```python
def svd(a, full_matrices=True, compute_uv=True, hermitian=False):
    """
    Singular Value Decomposition.

    When `a` is a 2D array, and ``full_matrices=False``, then it is
    factorized as ``u @ np.diag(s) @ vh = (u * s) @ vh``, where
    `u` and the Hermitian transpose of `vh` are 2D arrays with
    orthonormal columns and `s` is a 1D array of `a`'s singular
    values. When `a` is higher-dimensional, SVD is applied in
    stacked mode as explained below.

    Parameters
    ----------
    a : (..., M, N) array_like
        A real or complex array with ``a.ndim >= 2``.
    full_matrices : bool, optional
        If True (default), `u` and `vh` have the shapes ``(..., M, M)`` and
        ``(..., N, N)``, respectively.  Otherwise, the shapes are
        ``(..., M, K)`` and ``(..., K, N)``, respectively, where
        ``K = min(M, N)``.
    compute_uv : bool, optional
        Whether or not to compute `u` and `vh` in addition to `s`.  True
        by default.
    hermitian : bool, optional
        If True, `a` is assumed to be Hermitian (symmetric if real-valued),
        enabling a more efficient method for finding singular values.
        Defaults to False.

    Returns
    -------
    When `compute_uv` is True, the result is a namedtuple with the following
    attribute names:

    U : { (..., M, M), (..., M, K) } array
        Unitary array(s). The first ``a.ndim - 2`` dimensions have the same
```

```python
if hermitian:
    # note: lapack svd returns eigenvalues with s ** 2 sorted descending,
    # but eig returns s sorted ascending, so we re-order the eigenvalues
    # and related arrays to have the correct order
    if compute_uv:
        s, u = eigh(a)
        sgn = sign(s)
        s = abs(s)
        sidx = argsort(s)[..., ::-1]
        sgn = _nx.take_along_axis(sgn, sidx, axis=-1)
        s = _nx.take_along_axis(s, sidx, axis=-1)
        u = _nx.take_along_axis(u, sidx[..., None, :], axis=-1)
        # singular values are unsigned, move the sign into v
        vt = transpose(u * sgn[..., None, :]).conjugate()
        return SVDResult(wrap(u), s, wrap(vt))
    else:
        s = eigvalsh(a)
        s = abs(s)
        return sort(s)[..., ::-1]

_assert_stacked_2d(a)
t, result_t = _commonType(a)

m, n = a.shape[-2:]
if compute_uv:
    if full_matrices:
        gufunc = _umath_linalg.svd_f
    else:
        gufunc = _umath_linalg.svd_s

    signature = 'D->DdD' if isComplexType(t) else 'd->ddd'
    with errstate(call=_raise_linalgerror_svd_nonconvergence,
                  invalid='call', over='ignore', divide='ignore',
                  under='ignore'):
        u, s, vh = gufunc(a, signature=signature)
    u = u.astype(result_t, copy=False)
```

реализация SVD через спектральную теорему(собственные значения) для эрмитовой матрицы

Эрмитова матрица

$$\begin{bmatrix} 3 & 2+3i & -2i & 5-i \\ 2-3i & 9 & 12 & 1+4i \\ 2i & 12 & 1 & 7 \\ 5+i & 1-4i & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

Hermitian matrix

Частный случай
Если матрица вещественная и симметричная , то она — эрмитова

$$A = U\Sigma V^T$$

SVD (разложение по сингулярным числам) — метод, используемый в линейной алгебре для разложения матрицы на три более простые матрицы, что упрощает анализ и обработку.

Понимание SVD на примере

Представьте, что у вас есть таблица данных, например, набор рейтингов, где строки — это люди, а столбцы — продукты. Числа в таблице показывают, насколько каждому человеку нравится тот или иной фильм.

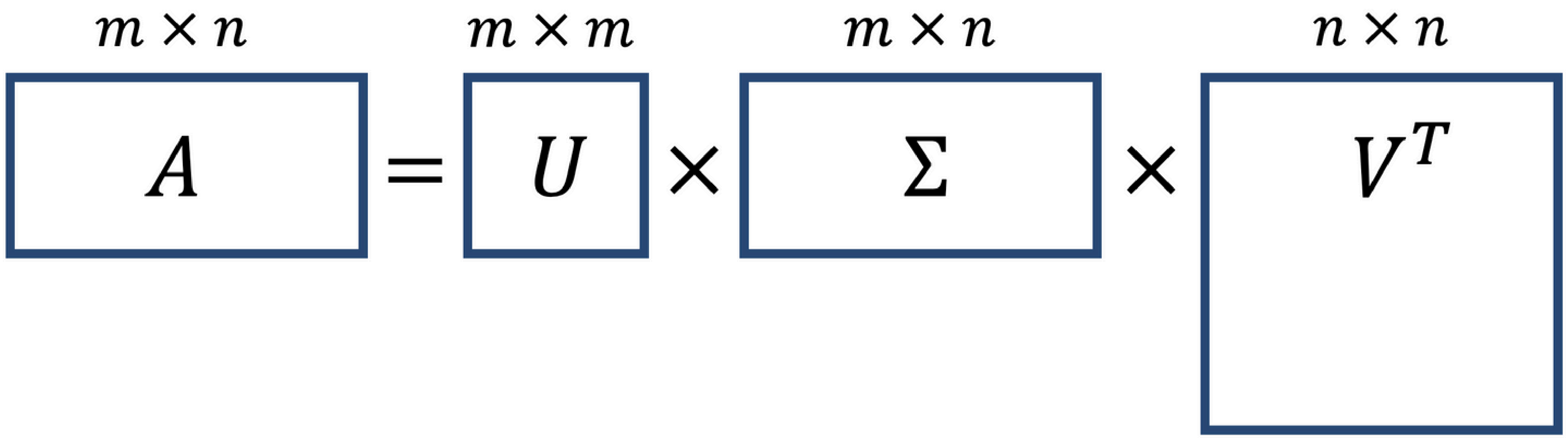
SVD разбивает эту таблицу (матрицу) на три меньшие части:

Имя	Фильм 1 Рейтинг	Фильм 2 Рейтинг
Амит	5	3
Санкет	4	2
Эндрю	2	5

U : показывает предпочтения людей

Σ : показывает важность каждого фильма

V^T : насколько фильмы похожи друг на друга.



$$A = U\Sigma V^T$$

m×n

m×m ортогональная матрица, столбцы которой являются левыми сингулярными векторами матрицы A

m×n прямоугольно-диагональная матрица, содержащая неотрицательные сингулярные значения матрицы A в порядке убывания

n×n Транспонированная ортогональная матрица, где строки являются правыми сингулярными векторами матрицы A.

ортогональная матрица

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

A^T = A^-1

1. *составить матрицу* A^*A;
2. *найти характеристические числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *матрицы* A^*A. *Не нарушая общности, их можно занумеровать так, чтобы выполнялись условия* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$, $\lambda_i \neq 0$ *при* $i = 1, \ldots, r$;
3. *подсчитать ненулевые сингулярные числа* $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, *матрицы* A;
4. *составить* $(m \times n)$*-матрицу* Σ
5. *построить ортонормированную систему собственных векторов* $v_1, v_2, ..., v_n$ *оператора с матрицей* A^*A, *принадлежащих соответственно собственным значениям* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$;
6. *составить матрицу* $V = (v_1, v_2, ..., v_n)$ *из столбцов координат векторов* $v_1, v_2, ..., v_n$. *Матрица* V *является матрицей перехода от исходного базиса евклидова (унитарного) пространства* X_n *к базису* $v_1, v_2, ..., v_n$;
7. *построить ортонормированную систему векторов*
$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1}, u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2}, \ldots, u_r = \frac{Av_r}{\sigma_r};$$
8. *дополнить систему векторов* $u_1, u_2, ..., u_r$ *любыми векторами* $u_{r+1}, u_{r+2}, ..., u_m$ *до ортонормированного базиса евклидова (унитарного) пространства* Y_m;
9. *составить матрицу* $U = (u_1, u_2, ..., u_m)$ *из столбцов координат векторов* $u_1, u_2, ..., u_m$. *Матрица* U *является матрицей перехода от исходного базиса евклидова (унитарного) пространства* Y_m *к базису* $u_1, u_2, ..., u_m$;
10. *записать сингулярное разложение* $A = U\Sigma V^*$ *матрицы* A.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $$A^t A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

2) $$\det(A^T A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \quad 3 \times 3 \qquad (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda) = 2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

$$0 \cdot (-1) - (-1)(2-\lambda) = 0 + (2-\lambda) = 2-\lambda$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+1)-1(2-\lambda)$$

$$(2-\lambda)\left[(\lambda^2-3\lambda+\cancel{1})-\cancel{1}\right]$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda)$$

$$2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2$$

$$x^2-3x=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-3\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=0 \text{ или } \lambda=3$$

3. $\sigma_1=\sqrt{3}$

$\sigma_2=\sqrt{2}$

$\sigma_3=0$

4. $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

5. $\lambda_1 = 3$

$$\begin{vmatrix} 2-3 & 0 & -1 \\ 0 & 2-3 & -1 \\ -1 & -1 & 1-3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Ступенчатый вид

$$R_3 \leftarrow R_1 \cdot (-1) + R_3$$

$$\left.\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}\right\} \text{линейно-зависимые} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0$$

$$R_3 \leftarrow R_2 \cdot (-1) + R_3$$

$$\begin{cases} -1x + 0y - 1z = 0 \\ 0x - 1y - 1z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

$$z = -1 \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$

$$\begin{vmatrix} 2-2 & 0 & -1 \\ 0 & 2-2 & -1 \\ -1 & -1 & 1-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = -y \\ y = -x \\ z = 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x = 1$

$\lambda_3 = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$R_1 \leftarrow \frac{1}{2} R_1$

$R_3 \leftarrow R_3 + R_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$R_3 \leftarrow R_3 + R_2$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{cases} x - \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Нормируем векторы

$$\frac{1}{|V_i|}\cdot V = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix} = V_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{vmatrix} = V_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{vmatrix} = V_3$$

6) $V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

7) $u_i = \frac{1}{\sigma_i} \cdot A v_i$

$\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = 3 : 3^{\frac{1}{2}} = 3^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{matrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \end{matrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8 — если исходная матрица (A) имеет ранг меньше количество строк, то нужно дополнять, у нас ранг 2, для базиса нам нужно всего 2 вектора, дополнительных не требуется

9) $U = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{matrix} & U & \Sigma & V^T \end{matrix}$$

10) $$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

1) $A^T A$

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 48 & 24 \\ 48 & 84 & 24 \\ 24 & 24 & 48 \end{pmatrix}$$

$7 \cdot 7 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 84$

$1 \cdot 7 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 7 \cdot 1 = 48$

$2 \cdot 7 + (-2) \cdot 5 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 24$

$7 \cdot 2 + 5 \cdot (-2) + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 2 = 24$

$1 \cdot 2 + 5 \cdot (-2) + 3 \cdot 6 + 7 \cdot 2 = 24$

$2 \cdot 2 + (-2)(-2) + 6 \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 48$

$7 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 7 = 48$

$1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 7 \cdot 7 = 84$

$2 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 24$

2) Находим eigenvalue

$$\det(A^TA - \lambda I) = \begin{pmatrix} 84-\lambda & 48 & 24 \\ 48 & 84-\lambda & 24 \\ 24 & 24 & 48-\lambda \end{pmatrix} = (144 + \lambda)(\lambda - 36)^2$$

$$\lambda_1 = 144 \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 36$$

3) $\sigma_1 = 12 \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = \sqrt{36} = 6$

4) $$\Sigma = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{4\times 3}$$

4×3

$$\underset{m\times n}{\boxed{A}} = \underset{m\times m}{\boxed{U}} \times \underset{m\times n}{\boxed{\Sigma}} \times \underset{n\times n}{\boxed{V^T}}$$

Единственность сингулярного разложения матрицы не гарантирована. Однозначно определена только матрица Σ (при условии упорядочения сингулярных чисел по убыванию).

5)

$$\lambda_1 = 144$$

$$(A^T A - \lambda \cdot I) \cdot X = 0$$

$$\begin{pmatrix} \overset{-60}{84-144} & 48 & 24 \\ 48 & \overset{-60}{84-144} & 24 \\ 24 & 24 & \underset{-96}{48-144} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$-120 + 96 + 24 = 0$$

$$\begin{cases} -60x_1 + 48x_2 + 24x_3 = 0 \\ 48x_1 - 60x_2 + 24x_3 = 0 \\ 24x_1 + 24x_2 - 96x_3 = 0 \end{cases}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Упростить систему уравнений по Гауссу :
Преобразование позволяет выразить некоторые переменные через другие, что облегчает решение системы линейных уравнений.

Определить свободные переменные :
В процессе преобразования становятся очевидными, какие переменные являются "свободными"

найти набор линейно независимых векторов

$x_2 = 36$

$$\begin{pmatrix} 84-36 & 48 & 24 \\ 48 & 84-36 & 24 \\ 24 & 24 & 48-36 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 48x_1 + 48x_2 + 24x_3 = 0 \\ 48x_1 + 48x_2 + 24x_3 = 0 \\ 24x_1 + 24x_2 + 12x_3 = 0 \end{cases}$$

$48 \cdot 2 - 48 + 24 \cdot 2 = 0$

$48 \cdot 1 - 48 \cdot 2 + 24 \cdot 2 = 0$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Нормируем $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2^2+2^2+1}} = \dfrac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

б) $V = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

чтобы мы получили ортонормированную систему векторов, для матриц U и V , где:

U^TU=I,V^TV=I

орт, или единичный вектор, это вектор, длина которого равна единице.

7)

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sigma_1}\cdot Av_1 = \frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}7&1&2\\5&5&-2\\3&3&6\\1&7&2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}7&1&2\\5&5&-2\\3&3&6\\1&7&2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{Av_3}{\sigma_3} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}7&1&2\\5&5&-2\\3&3&6\\1&7&2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

4×3 $\quad$ 4×4

$$\underset{m\times n}{\boxed{A}} = \underset{m\times m}{\boxed{U}} \times \underset{m\times n}{\boxed{\Sigma}} \times \underset{n\times n}{\boxed{V^T}}$$

у нас 3 вектора, надо 4.

8)

SVD, левые сингулярные векторы (столбцы матрицы U) должны образовывать ортонормированный базис всего пространства (R^4). Если у нас уже есть три сингулярных вектора u1 и u2 u3 (соответствующих ненулевым сингулярным значениям), то четвертый вектор u4 должен быть ортогонален им всем и иметь единичную длину.

dot product = 0 = 90°

$$V_1^T V_4 = 0 \quad V_2^T V_4 = 0 \quad V_3^T V_4 = 0 \quad \|V_3\| = 1$$

$$\begin{cases} V_1^T V_4 = 0 \\ V_2^T V_4 = 0 \\ V_3^T V_4 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$V_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений
можем выбрать произвольное решение, а затем нормировать его.

$$U_4 = \frac{1}{\|V_4\|} = \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot V_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

g)

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underset{}{\overset{m\times n}{A}} = \overset{m\times m}{U} \times \overset{m\times n}{\Sigma} \times \overset{n\times n}{V^T}$$

(b) $$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

две строки линейно независимы ⇒ ранг = 2

1) $$A^T A = \begin{bmatrix} 14 & 28 & 45 \\ 28 & 56 & 90 \\ 45 & 90 & 145 \end{bmatrix}$$

2) $$\det(A^T A - \lambda I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 14-\lambda & 28 & 45 \\ 28 & 56-\lambda & 90 \\ 45 & 90 & 145-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\lambda_1 \approx 215.0, \quad \lambda_2 \approx 0.9, \quad \lambda_3 = 0$$

3) $$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} \approx \sqrt{215} \approx 14.66, \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} \approx \sqrt{0.9} \approx 0.95, \quad \sigma_3 = 0$$

4) $$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.66 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5) $$(A^T A - \lambda_1 I)v = 0 \,.$$

Нормируем

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

6) $$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-6}{\sqrt{6}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

7) $$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i \qquad u_1 = \frac{1}{14.66} A v_1 \approx \frac{1}{14.66\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

σ3=0

ОШИБКА - деление на 0

$$\underset{m \times n}{\boxed{A}} = \underset{m \times m}{\boxed{U}} \times \underset{m \times n}{\boxed{\Sigma}} \times \underset{n \times n}{\boxed{V^T}}$$

8) Дополняем до ортонормированного базиса

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

9) $$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-3}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-6}{\sqrt{30}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

10) $$A = \underset{U}{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-3}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-6}{\sqrt{30}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}} \underset{\Sigma}{\begin{bmatrix} 14.66 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{V^T}{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-6}{\sqrt{6}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}$$