Найдём собственный вектор для собственного значения лямбда = -7

$$Av = \lambda v \Rightarrow Av = \lambda I v$$

$$Av - \lambda I v = 0$$

$$(A - \lambda I)v = (A - 7I)v = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -7 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -6x + 3y = -7x \\ 4x + 5y = -7y \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 4x + 12y = 0 \end{cases} \qquad V_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$4x + 12y = 0 \Rightarrow 4x = -12y \; | : 4 \Rightarrow x = -3$$

$$\begin{vmatrix} -6-(-7) & 3 \\ 4 & 5-(-7) \end{vmatrix} = 1\cdot 12 - 4\cdot 3 = 0$$

имеет бесконечно много решений

$$\begin{vmatrix} -6-6 & 3 \\ 4 & 5-6 \end{vmatrix} = \overbrace{-12\cdot(-1)}^{12} - 12 = 0$$

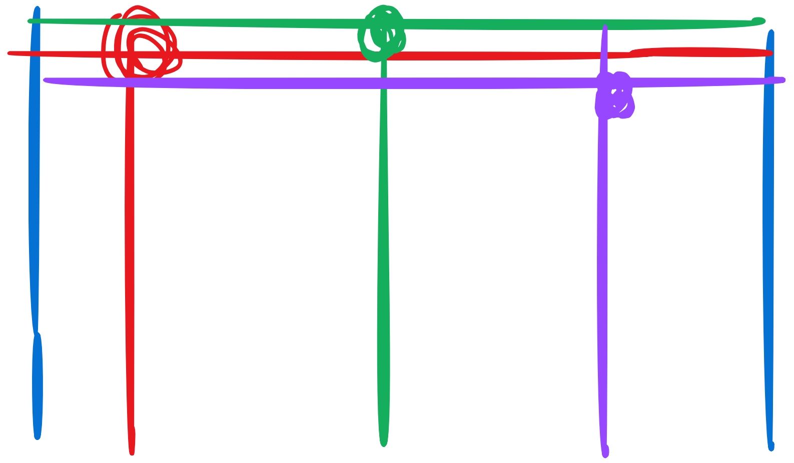
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Av = \lambda v$$

$$A - \lambda I = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$



Раскроем по первой строке

$$(2-\lambda)\left[(4-\lambda)(3-\lambda)-4\times 5\right]=0$$

$$(2-\lambda)\left[(4-\lambda)(3-\lambda) - 4 \times 5\right] = 0$$

$$2-\lambda = 0$$

$$-\lambda = -2 \quad | \cdot (-1)$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$(4-\lambda)(3-\lambda) - 4 \times 5 = 0$$

$$12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 \; -20 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda - 8 = 0$$

$a = 1$

$b = -7$

$c = -8$

$$D = 49 - 4 \cdot (1 \cdot (-8)) = 81$$

$$\lambda_2 = \frac{7-9}{2} = -1 \qquad \lambda_3 = 8$$

$$\det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \qquad \lambda_1 = 2$$

$$\begin{vmatrix} \overset{0}{2-2} & 0 & 0 \\ 0 & \overset{2}{4-2} & 5 \\ 0 & 4 & \overset{1}{3-2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\begin{vmatrix} \overset{3}{2-(-1)} & 0 & 0 \\ 0 & \overset{5}{4-(-1)} & 5 \\ 0 & 4 & \overset{4}{3-(-1)} \end{vmatrix} = 3 \cdot [5 \times 4 - 4 \times 5] = 0$$

$$\lambda_3 = 8$$

$$\begin{vmatrix} \overset{-6}{2-8} & 0 & 0 \\ 0 & \overset{-4}{4-8} & 5 \\ 0 & 4 & \overset{-5}{3-8} \end{vmatrix} = -6\,[-4 \cdot (-5) - 4 \cdot 5] = 0$$

$\lambda = -1$ $\quad Av = \lambda v$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x = -x \\ 4y + 5z = -y \\ 4y + 3z = -z \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x = 0 \quad \mid 3 \\ 5y + 5z = 0 \\ 4y + 4z = 0 \end{cases}$$

$x = 0$

$y = -z$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

z=−4y
лямбда 2

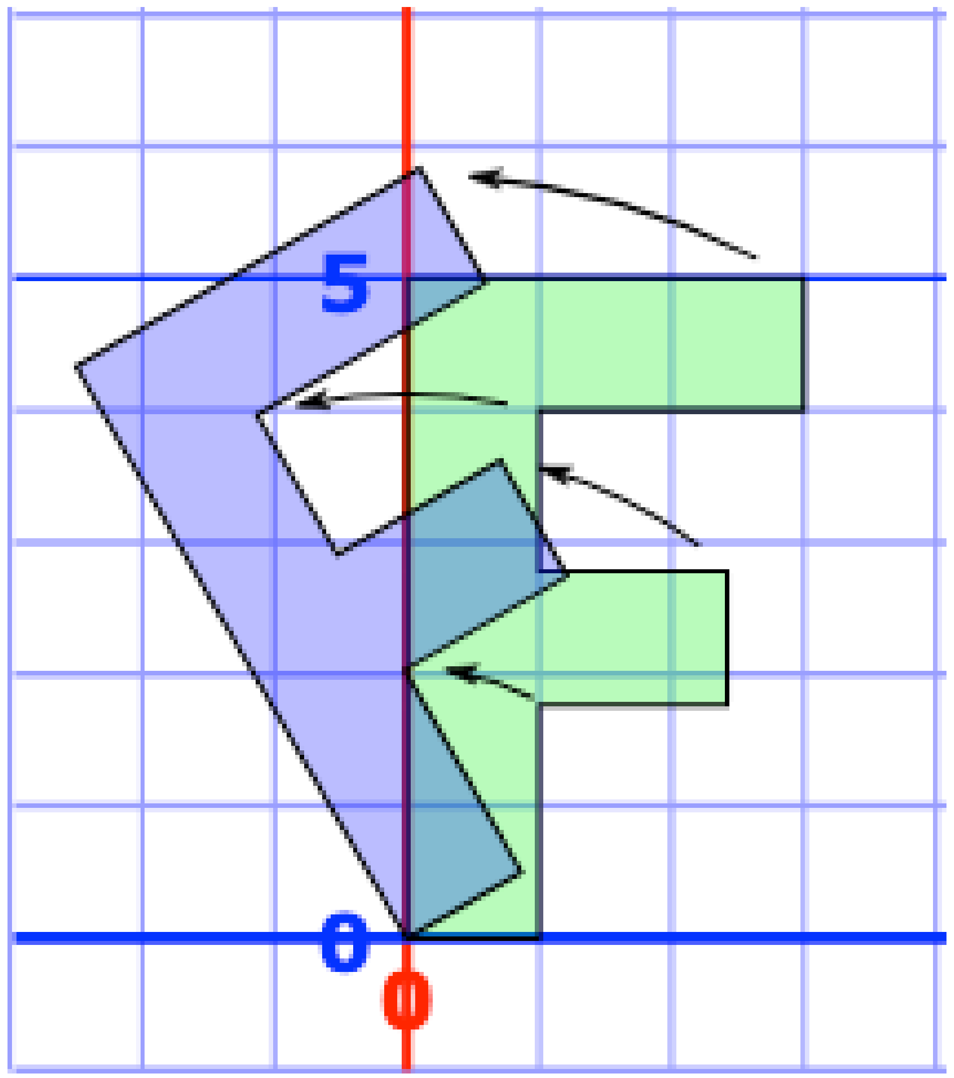
y=5/4z.
лямбда 8

Поворот на 30^0

$$A = \begin{vmatrix} \cos(30) & -\sin(30) \\ \sin(30) & \cos(30) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$

$\cos(30) \to \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(30) \to \frac{1}{2}$

Найдем собственный вектор и собственное значение, при условии что мы вращаем все точки



$$A - \lambda I$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{\cancel{4}}{\cancel{4}}\ \underline{1}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{9}}{4}=\frac{3}{4}$ 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$

2) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\lambda)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$ 4) $\underline{\lambda^2}$

$$\lambda^2-\cancel{2}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\lambda+1 \Rightarrow \lambda^2-\sqrt{3}\cdot\lambda+1$$

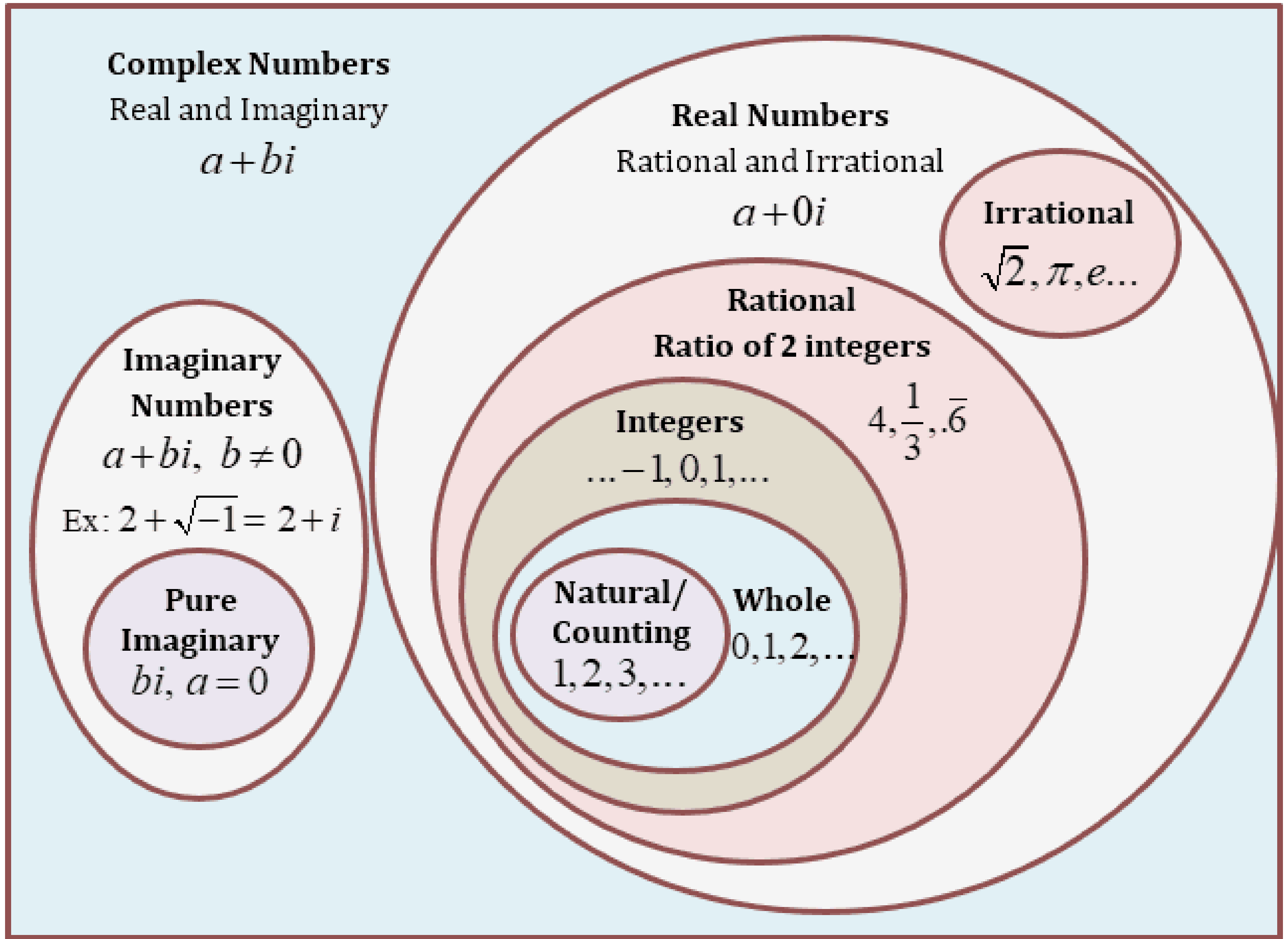
$$x^2 - \sqrt{3} \cdot x + 1$$

$a = 1$
$b = -\sqrt{3}$
$c = 1$

$$D = (-\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$D = 3 - 4 = -1 < 0 \Rightarrow$$

уравнение не имеет вещественных корней, но имеет два комплексных корня.



Комплексное число — это число вида:

$$z = a + bi$$

где:

- a — **вещественная часть** (обычное число),
- b — **мнимая часть** (также обычное число, но умноженное на i),
- i — мнимая единица, такая что $i^2 = -1$.

квадрат любого вещественного числа не может быть отрицательным.

тогда математики ввели новое число

$$i = \sqrt{-1}$$

$i^0 = 1$ (anything raise to the 0 is 1)

$i^1 = i$ (anything raise to 1 is just itself)

$i^2 = -1$ (definition of i^2)

$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$

$i^4 = i^2 \times i^2 = -1 \times -1 = 1$ (Back to 1!)

$$\sqrt{-16} = \sqrt{(16) \times (-1)} = \left(\sqrt{16}\right)\left(\sqrt{-1}\right) = 4i.$$

$$\begin{aligned}(4-3i)-(2+4i) &= 4-3i-2-4i \\ &= (4-2)+(-3i+-4i) \\ &= 2+-7i \\ &= 2-7i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8i)(4+i) &= (8i)(4)+(8i)(i) \\ &= 32i+8i^2 \\ &= 32i+8(-1) \\ &= 32i-8\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-\sqrt{3})-\sqrt{-1}}{2} \qquad x_2 = \frac{-(-\sqrt{3})+\sqrt{-1}}{2}$$

$$x_1 = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}} \qquad x_2 = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}$$

$$Av = \lambda v \qquad \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{2} y = \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{i}{2} x \\ \frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y = \frac{\sqrt{3}}{2} y + \frac{i}{2} y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\cancel{\frac{1}{2}}y = +\cancel{\frac{i}{2}}x & \Big| \cdot 2 \Rightarrow -y = ix \Rightarrow y = -ix \\ \frac{1}{2}x = +\frac{i}{2}y & \Big| \cdot 2 \Rightarrow x = iy \end{cases}$$

$x = i,\ y = -i \cdot i = -(i^2) = -(-1) = 1$

eigenvector $V_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

$Av = \lambda v$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{i\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2} \end{vmatrix}$$

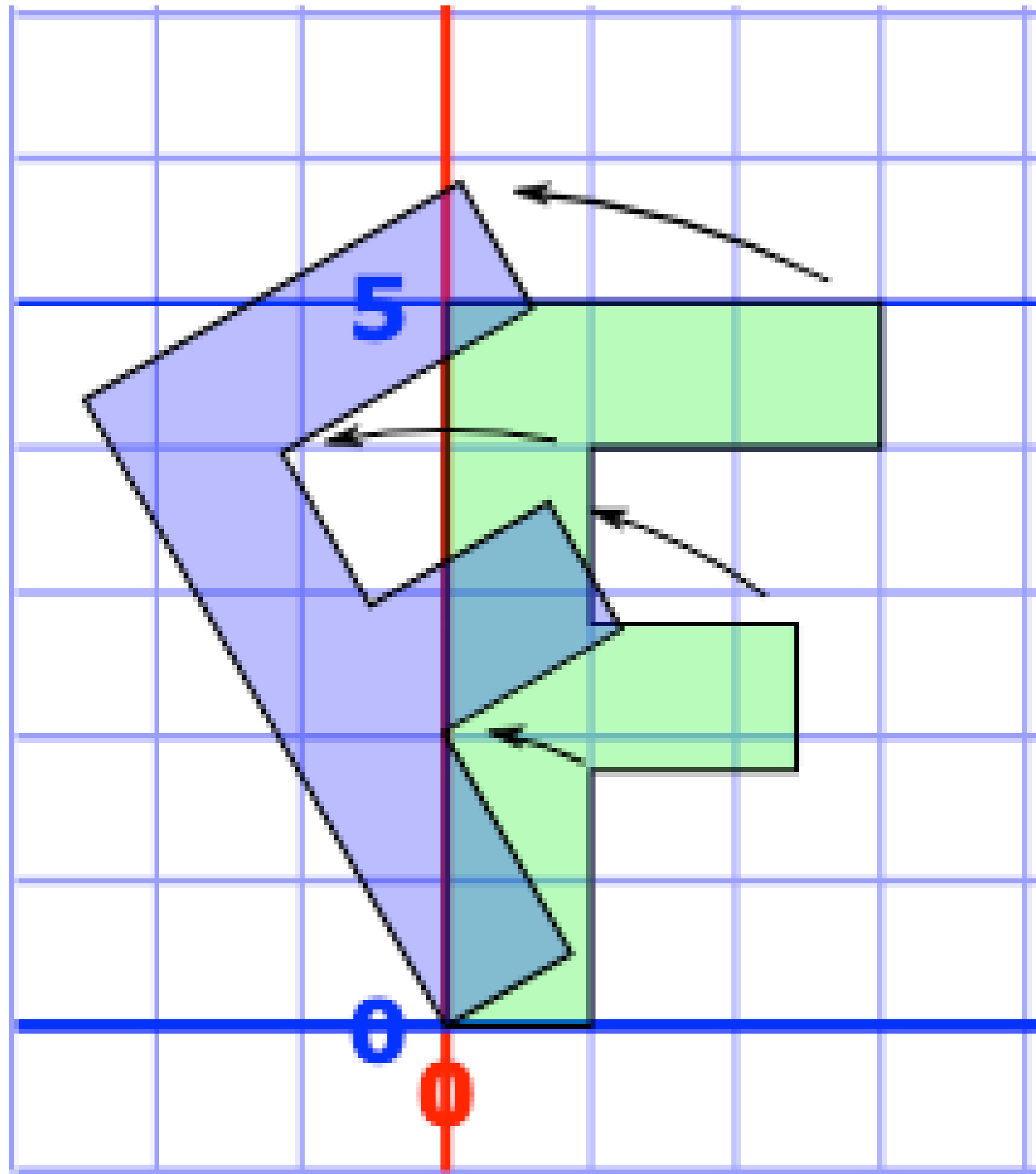
$\frac{i}{2}\cdot i=\frac{i^2}{2}=-1\cdot\frac{1}{2}$

проверим 1 из векторов

$X_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

Найти V_1 и проверить

$V_1=\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$



записать каноническое разложение матрицы A = матричная факторизация = Eigenvalue decomposition (EVD)

```python
import numpy as np


mat = np.mat("1 -2;1 3")

# Original matrix
print(mat)
print("")
evalue, evect = np.linalg.eig(mat)

# Eigenvalues of the said matrix"
print(evalue)
print("")

# Eigenvectors of the said matrix
print(evect)
```

$$AV = VD$$

$$AV = VD \mid \cdot V^{-1}$$

$$AVV^{-1} = VDV^{-1}$$

or, 1. $A = VDV^{-1}$

$$AV = \lambda V \mid V^{-1}$$

$$AVV^{-1} = V\Lambda V^{-1}$$

2. $A = V\Lambda V^{-1}$

$A \times A^{-1} = I$

$A^{-1} \times A = I$

Where I is the identity matrix

e.g. $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $A = P\Lambda P^{-1}$

$$M \times I = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4\times1+-3\times0 & -4\times0+-3\times1 \\ -6\times1+5\times0 & -6\times0+5\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$

Если собственные векторы матрицы A образуют базис, то она представима в виде

$$A = V \Lambda V^{-1} \qquad \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

A – матрица

V – матрица составленная из координат собственных векторов eigenvectors

Λ – диагональная матрица с соответствующими собственными числами eigenvalues

диагональная матрица - это матрица где везде стоят нули кроме главной диагонали

V^{-1} – обратная матрица

разложение матрицы называют каноническим или спектральным.

$A = V \Lambda V^{-1}$ – спектральное разложение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = V \Lambda V^{-1}$$

1. Характеристическа уравнение

$$A - \lambda I = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \cdot 1 =$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10$$

$a = 1$

$b = -7$

$c = 10$

$D = 49 - 4 \cdot 10 = 9$

$$\lambda_1 = \frac{7-3}{2} = 2 \quad \lambda_2 = \frac{7+3}{2} = 5$$

собственные векторы, соответствующие каждому собственному значению

$\lambda_2 = 5$

$(A - 5I)v = 0$

$$\begin{bmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x \\ 2x - 2x = 0 \end{cases}$$

система линейно зависима.

Решений бесконечно много.

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$(A - 2I)V = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = -y \;|_2$$

$$x = -\frac{y}{2}$$

$$y = 1 \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \frac{adj(V)}{det(V)} \qquad V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

1) $det \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

Миноры

$M_{11} = 1$

$M_{12} = 1$

$M_{21} = 1$

$M_{22} = -\frac{1}{2}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$adj\, V_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \cdot 1 = 1$

$adj\, V_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1 \cdot 1 = -1$

$adj\, V_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -1 \cdot 1 = -1$

$adj\, V_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1 \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$

$$\operatorname{adj} V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj} V^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ редко, но четко

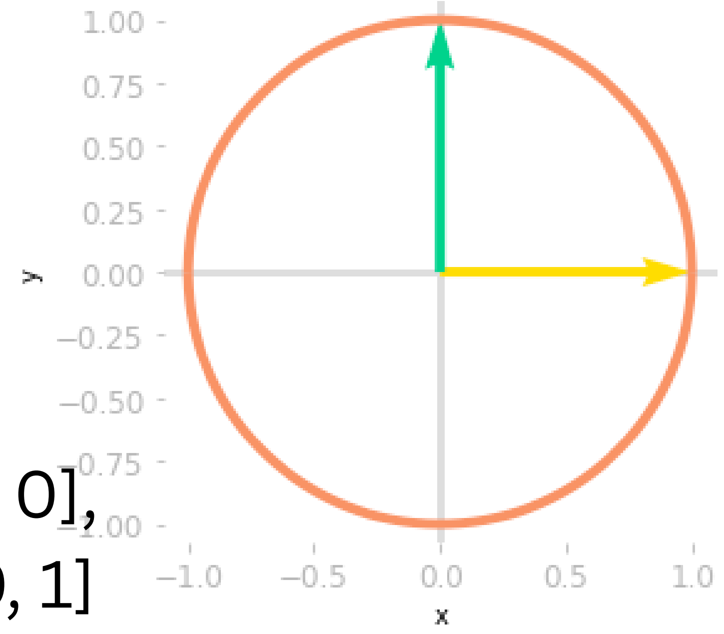
$$V^{-1} = \frac{1}{|V|} \cdot \operatorname{adj}(V) = -\frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = V \Lambda V^{-1}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$V \cdot \Lambda: \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{2} \cdot 2) + (1 \cdot 0) & (-\frac{1}{2} \cdot 0) + (1 \cdot 5) \\ (1 \cdot 2) + (1 \cdot 0) & (1 \cdot 0) + (1 \cdot 5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = C$$

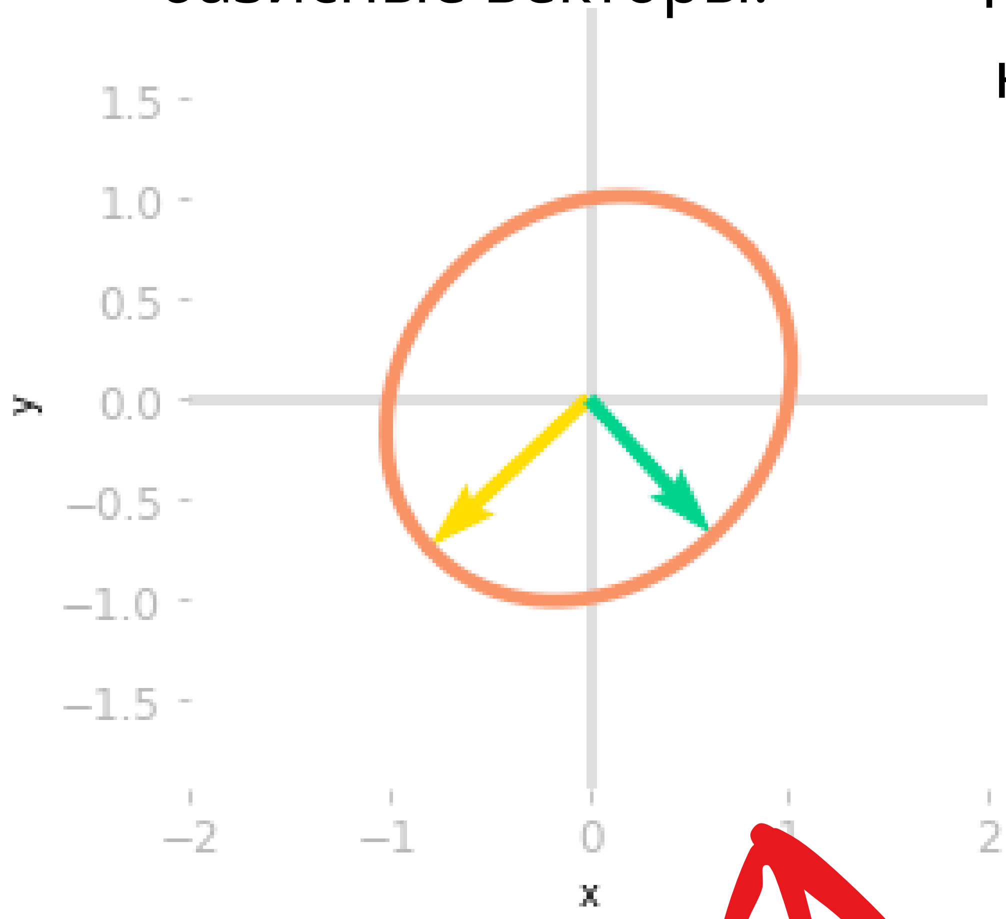
$$C \cdot V^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1 \cdot (-\frac{2}{3})) + (5 \cdot \frac{2}{3}) & (-1 \cdot \frac{2}{3}) + (5 \cdot \frac{1}{3}) \\ (2 \cdot (-\frac{2}{3})) + (5 \cdot \frac{2}{3}) & (2 \cdot \frac{2}{3}) + (5 \cdot \frac{1}{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = A$$



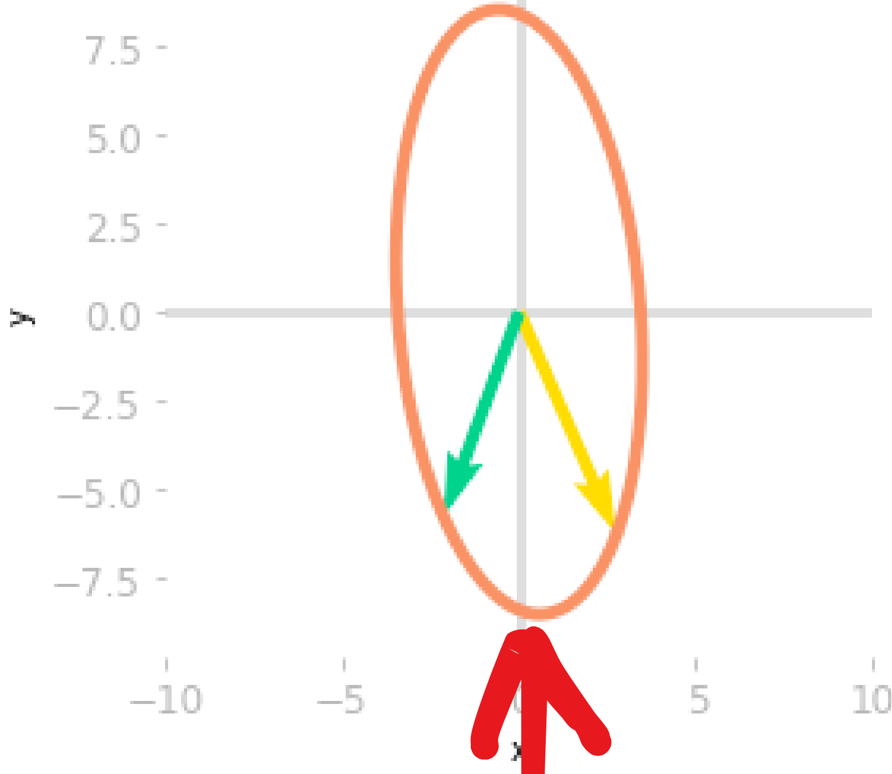
[1, 0],
[0, 1]

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 7 & 3\end{bmatrix}$$

поворачивает единичный круг и переводит в новый базис, базисные векторы.



растяжение/сжатие (или отражение, если λ<0) отражении по оси y (желтый вектор теперь находится справа от зеленого .



переводит векторы из базиса (где осями являются собственные векторы) в стандартный базис (где оси — это [1,0] и [0,1]).

$$A = V \Lambda V^{-1}$$

Анализ главных компонент (PCA) для снижения размерности. (следующий курс)

Проблемы с собственными значениями и собственными векторами

Сложность вычислений : n^3

Чувствительность к шуму и выбросам : может привести к неточностям, если данные содержат значительный шум или выбросы.

Работает только для квадратных матриц.