

Done















Collaborate with Acrobat Reader Use the app to add and reply to comments

Open



Generative summary



et

 $\forall n \geq 2, \ f_n \text{ est continue sur } [-1,1].$

Donc la somme S est continue sur [-1,1] et on'a :

$$\lim_{x \to 0} S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \lim_{x \to 0} f_n(x) = 0$$

(c) (1 pt) Vérifier que
$$\int_0^1 S(x) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n^2 - 1)}$$
.

on a

 $\sum_{n\geq 2} f_n \quad \text{converge uniformément sur} [-1,1]$

et

 $\forall n \geq 2, \ f_n \text{ est continue sur } [-1,1].$

alors

$$\int_0^1 S(x) \, dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n^2 - 1)}$$

Exercice 2:(5.5 points)

Soit la fonction définie par :

$$F(x) = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt.$$

(0.5 pt) Montrer que F est bien définie sur [0, +∞[.

En effet : on a

$$0 \le \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \le \frac{1}{1+t^2}, \quad x \in [0, +\infty[.$$

Or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$. On a $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ est convergente. De plus $\frac{1}{1+t^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}$, or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), d'après $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = 1$

le critère d'équivalence $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est convergente. Alors, $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est convergente. D'appèr la critère de comparaison $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente. Ainci F est bien définie cur

D'après le critère de comparaison $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ est convergente. Ainsi F est bien définie sur $[0,+\infty[$.

2. (1 pt) Étudier la continuité de F sur $[0, +\infty[$.

En effet : Notons f la fonction

$$f: [0, +\infty[\times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}] e^{-x}]]$$



•••

3

