Exercice 1 :(8 points)

Pour tout $n \geq 2$ et $x \in [-1, +\infty[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

1. (a) **(0.5 pt)** Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ converge simplement sur $[-1, 1]$.

$$\forall x \in [-1, 1],\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. D'où la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ convergence simple vers la fonction nulle sur $[-1, 1]$.

(b) **(0.5 pt)** Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ sur $[-1, 1]$.

$$\forall n \geq 2,\ \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-1, 1]$.

(c) **(0.5 pt)** Pour $x > 1$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Si $x > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{n\ln(x)}}{n(n-1)} = +\infty$ $(x > 1 \Rightarrow \ln(x) > 0)$.

(d) **(0.5 pt)** Déduire le domaine de convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$.
D'après question 1)a) La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[-1, 1]$ et d'après question 1)c) la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ ne converge pas simplement sur $]1, +\infty[$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$). Donc le domaine de convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ est $[-1, 1]$.

2. (a) **(1.5 pt)** Vérifier que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(1)$ est une série télescopique. Détermine sa nature et calculer sa somme.
On a

$$\sum_{n\geq 2} f_n(1) = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n\geq 2} \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n-1)}\right) = -\sum_{n\geq 2} a_{n+1} - a_n$$

avec $a_n = \frac{1}{(n-1)}$
donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(1)$ est une série télescopique.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(1)$ est convergente

$S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{(k-1)}\right) = 1 - \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$ donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(1)$ converge vers 1

(b) **(1 pt)** La série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(-1)$ est-elle semi-convergente ? Justifiant vot

$\sum\limits_{n\geq 2} f_n(-1)$ est une série alternée car elle est de la forme $\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^n a_n$, avec $a_n = \frac{}{n(n-1)}$.