$n\geq 2$

et

$$\forall n \geq 2,\ f_n \text{ est continue sur } [-1,1].$$

Donc la somme S est continue sur $[-1,1]$ et on'a :

$$\lim_{x\to 0} S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x) = 0$$

(c) **(1 pt)** Vérifier que $\displaystyle\int_0^1 S(x)\,dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}$.

on a

$$\sum_{n\geq 2} f_n \quad \text{converge uniformément sur } [-1,1]$$

et

$$\forall n \geq 2,\ f_n \text{ est continue sur } [-1,1].$$

alors

$$\int_0^1 S(x)\,dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}$$

Exercice 2 :(5.5 points)

Soit la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt.$$

1. **(0.5 pt)** Montrer que F est bien définie sur $[0,+\infty[$.

En effet : on a

$$0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}, \quad x \in [0,+\infty[.$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$. On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est convergente. De plus $\displaystyle\frac{1}{1+t^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}$, or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), d'après le critère d'équivalence $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est convergente. Alors, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est convergente. D'après le critère de comparaison $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ est convergente. Ainsi F est bien définie sur $[0,+\infty[$.

2. **(1 pt)** Étudier la continuité de F sur $[0,+\infty[$.

En effet : Notons f la fonction

$$f : [0,+\infty[\times[0,+\infty[\ \to\ \mathbb{R}$$