esprit Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

EXAMEN

Semestre : 1 ☐ 2 ☒

Session : Principale ☒ Rattrapage ☐

odule : Mathématiques de base 4 **Enseignants :** Equipe Mathématiques de base 4

asse : $2^{\text{ème}}$ **A/GC/EM/P** Date : 27/05/2024 Heure : $09h00$ Durée : $1h30$

ocuments autorisés : OUI ☐ NON ☒ **Calculatrice autorisée :** OUI ☒ NON ☐

rcice 1 :(8 points)

tout $n \geq 2$ et $x \in [-1, +\infty[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

(a) **(0.5 pt)** Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ converge simplement sur $[-1, 1]$.

(b) **(0.5 pt)** Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ sur $[-1, 1]$.

(c) **(0.5 pt)** Pour $x > 1$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

(d) **(0.5 pt)** Déduire le domaine de convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

(a) **(1.5 pt)** Vérifier que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(1)$ est une série télescopique. Determiner nature et calculer sa somme.

(b) **(1 pt)** La série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(-1)$ est-elle semi-convergente ? Justifiant votre réponse.

(c) **(0.5 pt)** Montrer que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(2)$ est grossièrement divergente.

(a) **(1 pt)** Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ sur $[-1, 1]$. On note somme $S(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$.

(b) **(1 pt)** Montrer que S est continue sur $[-1, 1]$ et calculer $\lim\limits_{x\to 0} S(x)$.

(c) **(1 pt)** Vérifier que $\int_0^1 S(x)\,dx = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}$.

rcice 2 :(5.5 points)