Generative summary

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(1)$ est convergente

$S_n = \sum\limits_{k=2}^{n}(-\frac{1}{k} + \frac{1}{(k-1)}) = 1 - \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$ donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(1)$ converge vers 1

(b) **(1 pt)** La série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(-1)$ est-elle semi-convergente ? Justifiant votre réponse.

$\sum\limits_{n\geq 2} f_n(-1)$ est une série alternée car elle est de la forme $\sum\limits_{n\geq 2}(-1)^n a_n$, avec $a_n = \frac{1}{n(n-1)}$.

$\forall n \geq 2, \quad a_{n+1} \leq a_n$. Donc $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante. De plus

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Alors, d'aprés le critère des séries altérnées, la série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ est convergente.

et $\sum\limits_{n\geq 2} |f_n(-1)| = \sum\limits_{n\geq 2} f_n(1)$ or $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(1)$ est convergente d'aprés (2.(a)) donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(-1)$ est absolument convergente. D'où, elle n'est pas semi-convergente.

(où directement, $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(-1)$ est absolument convergente alors elle est convergente et donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(-1)$ n'est pas semi-convergente.)

(c) **(0.5 pt)** Montrer que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(2)$ est grossièrement divergente.

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(2) = +\infty \neq 0$ (d'aprés 1.(c)) donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(2)$ est grossièrement divergente.

3. (a) **(1 pt)** Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ sur $[-1,1]$. On note sa somme $S(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$.

On a

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n(n-1)}, \qquad \forall x \in [-1,1], \ n \geq 2.$$

Puisque $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est une série convergente alors la série $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ est normalement convergente sur $[-1,1]$.

(b) **(1 pt)** Montrer que S est continue sur $[-1,1]$ et calculer $\lim\limits_{x\to 0} S(x)$.

On a

$$\sum_{n\geq 2} f_n \quad \text{converge normalement sur } [-1,1]$$

alors

$$\sum_{n\geq 2} f_n \quad \text{converge uniformément sur } [-1,1]$$

et