

卷积运算：

$$(f * g)(x) = \int f(\tau)g(x - \tau) d\tau$$

离散化后：

$$\sum_k \Delta x \cdot f(k\Delta x)g(m\Delta x - k\Delta x)$$

我们需要找具体空间位置( $k\Delta x$ )与数组指标之间的关系。

对于正弦图与卷积核：

正弦图一行为  $N$  个像素

卷积核长度为  $2N-1$

正弦图  $N$  个像素对应(上面的  $k\Delta x$ 是空间位置，下面的  $0$  到  $N-1$  为数组指标)

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0\Delta x & & (N-1)\Delta x & & \\ & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \\ & & 0 & \dots & N-1 & & \\ \text{卷积核对应关系:} & & & & & & \\ -(N-1)\Delta x & & 0\Delta x & & (N-1)\Delta x & & \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \\ 0 & \dots & N-1 & \dots & 2N-2 & & \end{array}$$

图\*

因此我们想计算的卷积有如下对应关系

$$(f * g)(col) = (f * g)(col\Delta x) = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta x \cdot f(k\Delta x)g(col\Delta x - k\Delta x)$$

$f(k\Delta x)$ 对应 $f(k)$

$g(col\Delta x - k\Delta x)$ 对应什么？

由图\*可知 $-(N-1)\Delta x$ 对应指标  $0$ ，可以推理出 $(col - k)\Delta x$ 对应 $(col - k)+N-1$

故有

$$(f * g)(col) = \Delta x \sum_{k=0}^{N-1} f(k)g((col - k) + N - 1)$$

目前程序里 $g((col - k) + N - 1)$ 有区别，此处推导应该是对的不过目前程序是假设卷积核对称，不对称就不正确。

如果是两个卷积核卷积

都有同图\*的对应关系

$$\begin{array}{ccccccc} -(N-1)\Delta x & & 0\Delta x & & (N-1)\Delta x & & \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \\ 0 & \dots & N-1 & \dots & 2N-2 & & \end{array}$$

$$(f * g)[col] \quad col = 0, 1, \dots, 2N - 1$$

$$= (f * g)([col - (N - 1)] \Delta x) \leftarrow \text{指标转位置}$$

$$= \Delta x \sum_k f(k \Delta x) * g([col - (N - 1)] \Delta x - k \Delta x)$$

$$= \Delta x \sum_k f[k + (N - 1)] * g[col - (N - 1) - k + (N - 1)] \leftarrow \text{位置转指标}$$

$$= \Delta x \sum_k f[k + (N - 1)] * g[col - k]$$

这里  $k$  应当从  $-(N - 1)$  取到  $(N - 1)$

但注意,  $(col - k)$  会超出  $0 - 2N - 2$  的范围

因此需要加个判断:

```
if (col - k) < 0 || (col - k) > 2N - 2
    不进行求和;
else
    进行求和;
```

总结:主要是找空间位置和指标关系

$$\underbrace{\begin{matrix} -(N - 1)\Delta x & & 0\Delta x & & (N - 1)\Delta x \\ 0 & \dots & N - 1 & \dots & 2N - 2 \end{matrix}}_{\text{空间位置}}$$

指标:  $i = \frac{x + (N - 1)\Delta x}{\Delta x}$

$$x = i\Delta x - (N - 1)\Delta x$$