4.5 等价关系与偏序关系

- 等价关系的定义与实例
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应

- 偏序关系
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特定元素

等价关系

定义 设$R\subseteq X\times X$，如果R是自反的，对称的和传递的，则称R是X上的等价关系。

设R是等价关系，若$\langle x,y\rangle\in R$，称x等价于y。

Remark:

1. 等价关系的关系矩阵主对角线全为1的对称阵;
2. 等价关系的关系图每一个结点上都有自回路且每两个结点间如果有边，一定有方向相反的两条边。

例如，我们用a ,b,c,d,e,f 分别表示6位大学生，其中a ,b,c都姓张，d,e,f都姓李。

若令集合$A=\{\underbrace{a ,b ,c}_{张}, \underbrace{d ,e , f}_{李}\}$

R是A上的同姓氏关系（同姓的大学生认为是相关的）

容易验证同姓氏关系R是A上的等价关系。

（1）因为每一个大学生都和自己是同姓的，所以满足自反性；

（2）当$(a,b) \in R$时有$(b,a) \in R$，所以满足对称性；

（3）当$(a,b) \in R$和$(b,c) \in R$时有$(a,c) \in R$，所以R是可传递的。

由此可得同姓氏关系 R是等价关系。

（1）a ,b,c都姓“张”， d,e,f 都姓“李”

	a	b	c	d	e	f
a	√	√	√			
b	√	√	√			
c	√	√	√			
d				√	√	√
e				√	√	√
f				√	√	√

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

易见在描述等价关系的表格中，带有“√”的格子将形成若干个正方形；而在关系矩阵中则有一些小方阵，其元素都是1，而其它元素都是0。

又如设集合A的情况同上所述

若令集合A={$\underbrace{a ,b ,c , d}_{20}$,$\underbrace{e , f}_{22}$ }

其中a ,b,c,d都是20岁，e,f都是22岁。

如果年龄相同的大学生认为是相关的，那么“同年龄”关系R是等价关系。

（1）因为每一个大学生都和自己是同年龄的，所以满足自反性;

（2）当(a,b) ∈R时有(b,a) ∈R，所以满足对称性;

（3）当(a,b) ∈R和(b,c) ∈R时有(a,c) ∈R，所以R是可传递的。

由此可得同年龄关系 R是等价关系。

（2）a ,b,c,d都是20岁， e,f都是22岁；

对于（2）所示的等价关系的表格表示和关系矩阵也有上述特征：

	a	b	c	d	e	f
a	√	√	√	√		
b	√	√	√	√		
c	√	√	√	√		
d	√	√	√	√		
e					√	√
f					√	√

$$
\begin{array}{c}
\\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

由上述2个例子可知那种同姓氏、同年龄的关系都是等价关系。

由此可知等价关系所具有的重要特性。

如果抽象地讨论，对集合A中的元素按照某种特性分成几个组，每个元素只属于一个组（如按年龄分组，即同年龄人在同一组内；或按姓氏分组，即同姓人在同一组内），并且定义在同一组内的元素是相关的，而不在同一组内的元素是不相关的，那么由此产生的二元关系必然是等价关系。

【例】设A={1,2,3,4,5}，R是A上的二元关系，R={<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<3,3>,<3,4>,<4,3>,<4,4>,<5,5>}，证明R是A上的等价关系。

证明：R的关系矩阵M_R如下：

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

M_R的主对角线全为1且是对称阵，所以R是自反的和对称的；还可以用二元关系传递性的定义证明R是传递的。故R是A上的等价关系。

图4.9是R的关系图。
由图可以看出R是自反的和对称的。
与前面一样，也可以用二元关系传递性的定义证明R是传递的。
故R是A上的等价关系。

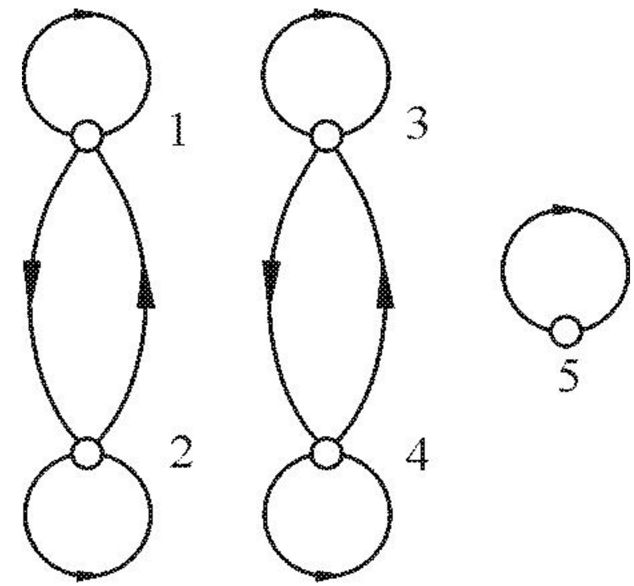


图 4.9

从图4.9不难看出，
（1）等价关系R的关系图被分为三个互不连通的部分。
（2）每部分中的结点两两都有关系，不同部分中的任意两个结点则没有关系。

【例】 设$R=\{<x,y> \mid x\in I\wedge y\in I\wedge x\equiv y \mod k\}$是整数集合$I$上的二元关系。证明$R$是等价关系。

设x和y是两个整数，k是一个正整数，若x，y用k除的余数相等，就称x和y模k同余，也称x和y模k的的等价。记为$x\equiv y \mod k$

x和y模k同余还可以描述为：$x-y$可以被k整除。

证明： 设a,b,c是任意的整数。

(1) 因为 $a-a=k\times 0$，所以 $a\equiv a \mod k$，$<a,a>\in R$。故R是自反的。

(2) 若$<a,b>\in R$，$a\equiv b \mod k$，$a-b=k\times t$，$t\in I$，$b-a=-(a-b)=k\times(-t)$，$-t\in I$，$b\equiv a \mod k$，$<b,a>\in R$。故R是对称的。

(3) 若$<a,b>\in R$且$<b,c>\in R$，

$a-b=k\times t_1$，$t_1\in I$，$b-c=k\times t_2$，$t_2\in I$，

$a-c=(a-b)+(b-c)=k\times t_1+k\times t_2=k\times(t_1+t_2)$，$t_1+t_2\in I$，$<a,c>\in R$，故$R$是传递的。

等价类

定义 设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x\in A$， 令

$$[x]_R = \{\, y \mid y\in A \wedge xRy \,\}$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于R 的等价类, 简称为 x 的等价类, 简记为$[x]$.

实例 A={ 1, 2, … , 8 }上模 3 等价关系的等价类:

$[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\}$

$[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\}$

$[3]=[6]=\{3,6\}$

等价类的性质

定理1 设R是非空集合A上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A$, $[x]$ 是A的非空子集.

(2) $\forall x, y \in A$, 如果 $x\, R\, y$, 则 $[x]=[y]$.

(3) $\forall x, y \in A$, 如果 $x \not R\, y$, 则 $[x]$与$[y]$不交.

(4) $\cup\{\, [x] \mid x \in A\}=A$，即所有等价类的并集就是$A$.

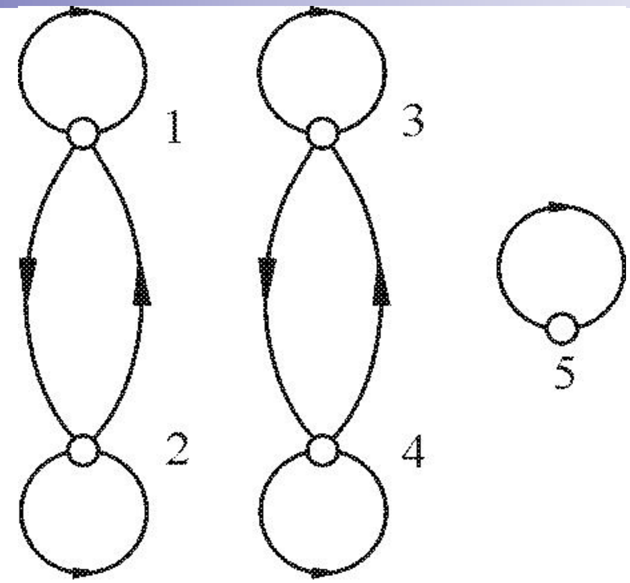


图 4.9

等价关系R等价类为：

$[1]_R=[2]_R=\{1,2\}$，

$[3]_R=[4]_R=\{3,4\}$，

$[5]_R=\{5\}$。

在R的关系图（图4.9）中，三个互不连通的部分，每一部分中的所有结点构成一个等价类。

模3等价关系的等价类叫模3等价类，模3等价类有以下三个：

$$[0]_R=\{\cdots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$$
$$[1]_R=\{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$$
$$[2]_R=\{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$$

商集

定义　设R为非空集合A上的等价关系, 以R的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的商集, 记做A/R,　$A/R = \{ [x]_R \mid x\in A \}$

实例　$A=\{1,2,\ldots,8\}$,A关于模3等价关系R的商集为

$$A/R = \{ \{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\} \}$$

A关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{ \{1\},\{2\}, \ldots ,\{8\}\}$$

$$A/E_A = \{ \{1, 2, \ldots ,8\} \}$$

集合的划分

定义　设X为非空集合, 若X的子集族$\pi(\pi\subseteq P(A))$满足下面条件:

(1) $\varnothing\notin\pi$

(2) $\forall x\forall y\ (x,y\in\pi\wedge x\neq y\rightarrow x\cap y=\varnothing)$

(3) $\cup\pi=X$

则称π是X的一个划分, 称π中的元素为X的划分块.

等价关系和划分一一对应的关系

定理1:设 R是X上的等价关系，X关于R的商集X/R是X的一个划分。

定理2: 设$S=\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$是$X$的一个划分，
$R=\{<x,y>| x$和y在同一个划分块中$\}$,
则R是X上的等价关系。

定理 1 设 R是X上的等价关系，X关于R的商集X/R是X的一个划分。

证明：

(1)证明X关于R的商集中的元素都是是X 的非空子集

$$[x]_R \subseteq X \text{且} x \in [x]_R \neq \varnothing\text{。}$$

(2)证明 $\bigcup\limits_{x \in X} [x]_R = X$。

因为 $[x]_R \subseteq X$，所以 $\bigcup\limits_{x \in X} [x]_R \subseteq X$；

另一方面， 对于任意的$x \in X$，有$x \in [x]_R \subseteq \bigcup\limits_{x \in X} [x]_R$，

所以$X \subseteq \bigcup\limits_{x \in X} [x]_R$， 进而$\bigcup\limits_{x \in X} [x]_R = X$

(3) 证明商集X/R中的元素是两两互不相交的。

设 $[a]_R \neq [b]_R$， 证明$[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$

（反证法）

假定$[a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing$

$\Rightarrow \exists c \in [a]_R \cap [b]_R$

$\Rightarrow \exists c \in [a]_R \wedge \exists c \in [b]_R$

$\Rightarrow aRc \wedge bRc \Rightarrow aRc \wedge cRb$ (因为R是对称的)

$\Rightarrow aRb$ (因为R是传递的)

$\Rightarrow [a]_R = [b]_R$

与假定矛盾。

所以$[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$

定理 2 设$S=\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$是$X$的一个划分，

$R=\{<x,y>|\ x$和y在同一个划分块中$\}$，

则R是X上的等价关系。

证明：

(1)设$x \in X=S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$，因为$S$是$X$的一个划分，所以存在惟一的划分块$S_j \in S$，使$x \in S_j$，于是有$<x,x> \in R$，即$R$是自反的。

(2)设$<x,y> \in R$，x和y在某个划分块S_j中，则y和x也在划分块S_j中，所以$<y,x> \in R$，即R是对称的。

(3)设$<x,y> \in R \wedge <y,z> \in R \Rightarrow x$和$y$在$S_i$中且$y$和$z$在$S_j$中$\Rightarrow$ $y \in S_i \cap S_j \neq \varnothing$，因为$S$是$X$的一个划分，其中元素两两互不相交，故必有$S_i=S_j \Rightarrow x$和$z$在$S_j$中$\Rightarrow <x,z> \in R$，即$R$是传递的。

划分S导出的等价关系R也可以表示为：

$$R=(S_1\times S_1)\cup(S_2\times S_2)\cup\cdots\cup(S_m\times S_m)$$

【例】设$X=\{1, 2, 3, 4\}$，X的划分$S=\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$，试写出$S$导出的等价关系$R$。

解：

R

$=\{1\}\times\{1\}\cup\{2,3\}\times\{2,3\}\cup\{4\}\times\{4\}$

$=\{<1,1>,<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>,<4,4>\}$

【例】设$X=\{1,2,3\}$，写出集合X上的所有等价关系。

解：先写出集合X上的所有划分，它们是：

$S_1=\{\{1,2,3\}\}$， $S_2=\{\{1,2\},\{3\}\}$， $S_3=\{\{1,3\},\{2\}\}$

$S_4=\{\{2,3\},\{1\}\}$， $S_5=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

对应的等价关系为：

$R_1=\{1,2,3\}\times\{1,2,3\}=X\times X$

$R_2=\{1,2\}\times\{1,2\}\cup\{3\}\times\{3\}$

$=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>, <3,3>\}$

$R_3=\{1,3\}\times\{1,3\}\cup\{2\}\times\{2\}$

$=\{<1,1>,<1,3>,<3,1>,<3,3>,<2,2>\}$

$R_4=\{2,3\}\times\{2,3\}\cup\{1\}\times\{1\}$

$=\{<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>,<1,1>\}$

$R_5=\{1\}\times\{1\}\cup\{2\}\times\{2\}\cup\{3\}\times\{3\}$

$=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}=I_X$

等价关系的学习目标：

- 掌握等价关系的定义，会根据定义来判定一个二元关系是否为等价关系；
- 掌握等价类和商集的定义，会写出等价关系的商集；
- 理解等价关系和集合的划分之间的一一对应关系。

相容关系

设$R \subseteq X \times X$，如果R是自反的和对称的，则称R是X上的相容关系。

Remark:　相容关系有以下三个性质：

①所有等价关系都是相容关系。

②(关系矩阵的特点)

相容关系的关系矩阵主对角线全为1且是对称阵。

③（关系图的特点）

相容关系的关系图每一个结点上都有自回路且每两个结点间如果有边，一定有方向相反的两条边。

【例4.23】设$A=\{316,347,204,678,770\}$，$A$上的二元关系$R$定义为：$R=\{<x,y>|\ x\in A\wedge y\in A\wedge x$和$y$有相同数码$\}$，证明$R$是$A$上的相容关系。

证明：(1)显然R是自反的；

对于集合A中任意x和y，如果x和y有相同数码，则y和x也有相同数码。故R是对称的。于是，R是相容关系。

令$a=316$，$b=347$，$c=204$，$d=678$，$e=770$

用列举法将R表示为：

$$
\begin{aligned}
R=\{&<a,a>,<a,b>,<a,d>,<b,a>,<b,b>,<b,c>,<b,d>,\\
&<b,e>,<c,b>,<c,c>,<c,e>,<d,a>,<d,b>,<d,d>,\\
&<d,e>,<e,b>,<e,c>,<e,d>,<e,e>\}\\
=\{&<a,b>,<a,d>,<b,a>,<b,c>,<b,d>,<b,e>,<c,b>,<c,e>,\\
&<d,a>,<d,b>,<d,e>,<e,b>,<e,c>,<e,d>\}\cup I_A
\end{aligned}
$$

R的关系矩阵和关系图如下：

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

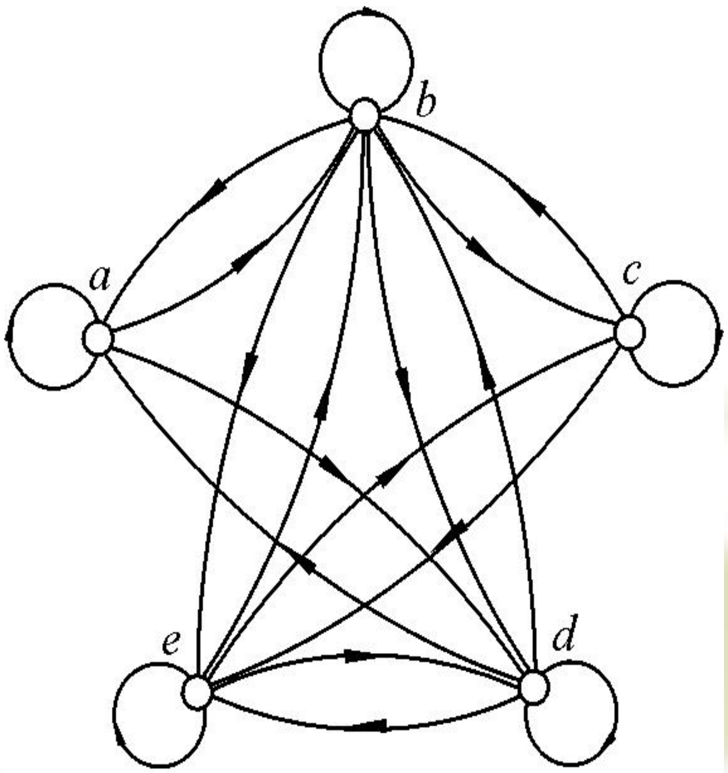


图 4.10

对于相容关系R的关系图，省去每一个结点上的自回路，将两个结点间方向相反的两条有向边改为一条无向边，得到一个简化图。此图叫做R的简化关系图。

例4.23中的相容关系R的简化关系图如图4.11所示。

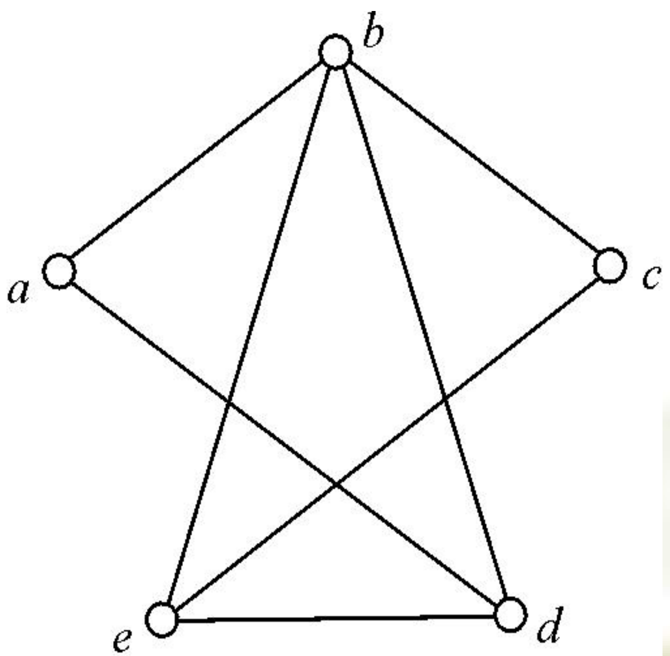


图 4.11

定义4.6.2 设R是X上相容的关系，$C\subseteq X$，如果$\forall a,b\in C$，有$<a,b>\in R$，则称C是由相容关系R产生的相容类。

Remark：

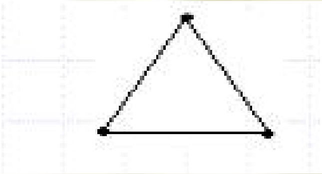
①相容类C一定是X的子集。

② X中的任何元素组成的单元素集是由相容关系R产生的一个相容类。

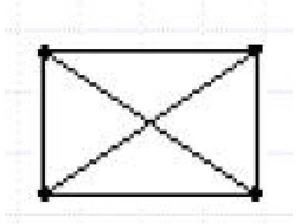
$\forall x\in X$，因为相容关系R是自反的，$<x,x>\in R$，所以$\{x\}$是由相容关系R产生的一个相容类。

关系图法：确定最大完全多边形---每个顶点都与其他所有顶点相联结的多边形。

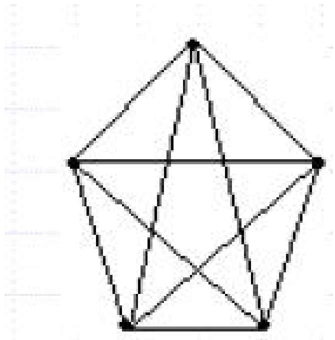
(1)孤立结点是最大的完全多边形；
(2)二个相互联结的结点是最大完全多边形；
(3)三角形是三个结点的最大完全多边形；



(4)四个结点;



(5)五个结点;



画出简化相容关系的关系图后,
先确定结点最多的完全多边形,以后逐次减少。

例4.24：设X=｛1,2,3,4,5,6｝，R是X上的相容关系，它的简化关系图如图4.12所示，试找出所有最大相容类。

解：

最大完全3边形的顶点构成的集合：｛2,3,5｝和｛2,3,4｝。

两个端点构成的集合｛1,5｝

孤立点构成的集合：｛6｝。

所以，最大相容类为：

｛2,3,5｝，｛2,3,4｝，｛1,5｝和｛6｝。

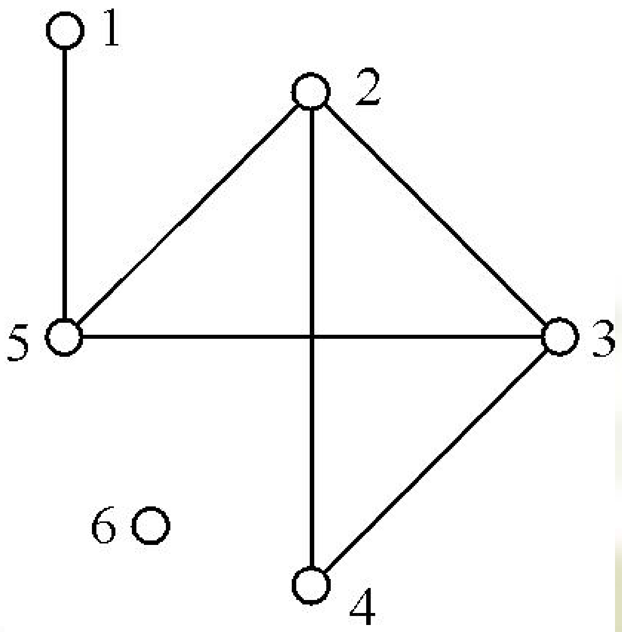
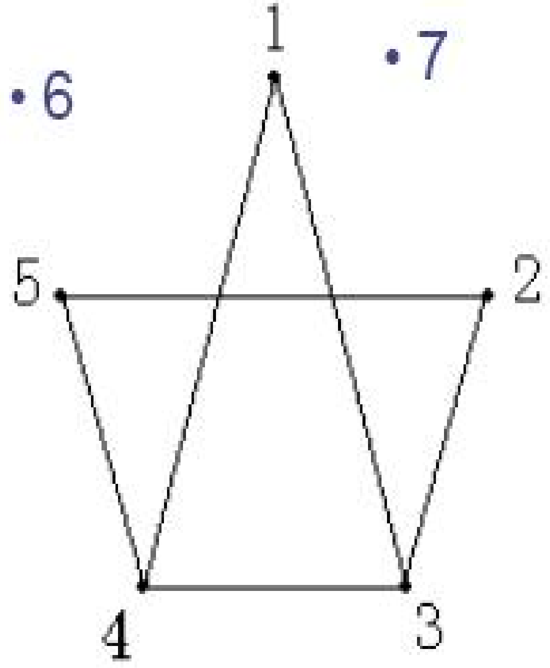
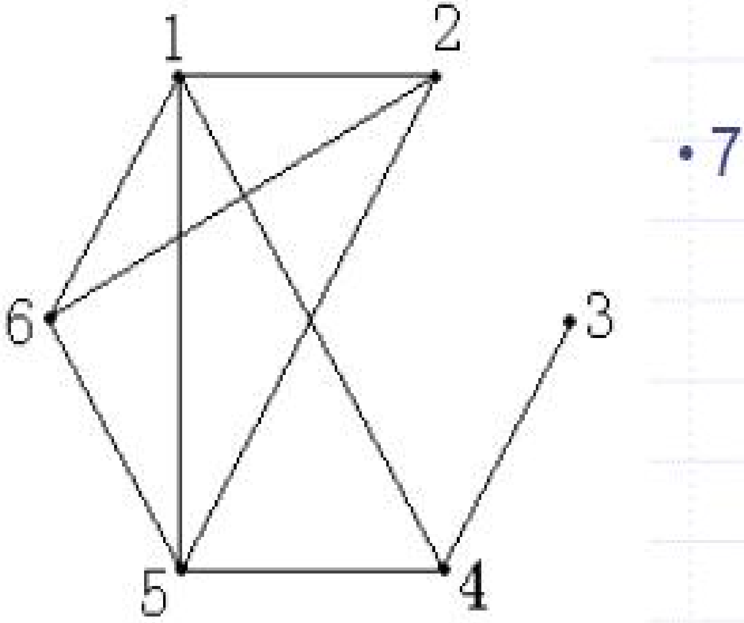


图 4.12

例：已知相容关系图，求出最大相容类（X={1,2,3,4,5,6,7}）





等价关系可以看成是一种特殊的相容关系，
集合的划分可以看成是一种特殊的覆盖；

等价类和集合的划分一一对应
相容类和集合的覆盖一一对应

定理4.6.2 设X是有限集合，R是X上的相容关系，由R产生的所有最大相容类构成的集合是X的覆盖。

定理4.6.3 设$S=\{S_1，S_2，\cdots，S_m\}$是X的一个覆盖，则$R=(S_1\times S_1)\cup(S_2\times S_2)\cup\cdots\cup(S_m\times S_m)$是$X$上的相容关系。

定理4.6.4 集合X上的相容关系R与集合X的完全覆盖$C_R(X)$是一一对应的。

偏序关系与哈斯图

定义（偏序关系）

设$R\subseteq X\times X$，如果R是自反的，反对称的和传递的，则称R是X上的偏序关系。记为$\preccurlyeq$。

二重组$<X,\preccurlyeq>$称为偏序集。如果$<x,y>\in\preccurlyeq$，记为$x\preccurlyeq y$，读作x小于等于y。

Example

I_A是A上偏序关系；

实数集合上的小于等于关系也是自反的，反对称的和传递的，它是实数集合上的偏序关系。

【例】设A是集合，$P(A)$是A的幂集合，$P(A)$上的包含关系$\subseteq$定义如下：

$$\subseteq = \{ <x,y> \mid x \in P(A) \wedge y \in P(A) \wedge x \subseteq y \}$$

试证明$\subseteq$是$P(A)$上偏序关系。

证明：

(1) $\forall x \in P(A)$，$x \subseteq x$，$<x,x> \in \subseteq$。即$\subseteq$是自反的。

(2) 设$<x,y> \in \subseteq \wedge <y,x> \in \subseteq$，由包含关系$\subseteq$定义有$x \subseteq y \wedge y \subseteq x$，则$x=y$。即$\subseteq$是反对称的。

(3) 设$<x,y> \in \subseteq \wedge <y,z> \in \subseteq$，由$\subseteq$的定义有$x \subseteq y \wedge y \subseteq z$，进而有$x \subseteq z$，所以$<x,z> \in \subseteq$，即$\subseteq$是传递的。

$\subseteq$是$P(A)$上偏序关系。

定义 覆盖（盖住、cover）

设$<X,\preccurlyeq>$为偏序集，对X中的元素x和y，如果$x\preccurlyeq y$，$x\neq y$且没有X中的其它元素z使$x\preccurlyeq z$和$z\preccurlyeq y$，则称y盖住了x。

【例】设$A=\{2,5,6,10,15,30\}$，A上的整除关系R定义如下：
$R=\{<x,y> \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x\text{整除}y\}$
验证R是A上的偏序关系，分析哪些元素盖住了另一些元素，哪些元素没有盖住了另一些元素。

解：R是自反的；R 是反对称的；R 是传递的。即R是A上的偏序关系。

用列举法将R表示为：
$R=\{<2,2>,<2,6>,<2,10>,<2,30>,<5,5>,<5,10>,<5,15>,<5,30>,<6,6>,<6,30>,<10,10>,<10,30>，<15,15>,<15,30>,<30,30>\}$

6和10盖住了2；但30没有盖住了2，因为$<2,6>\in R$和$<6,30>\in R$。

10和15盖住了5；但30没有盖住了5，因为$<5,10>\in R$和$<10,30>\in R$。

30盖住了6、10和15。

定义 设$<X,\preccurlyeq>$为偏序集，集合

$$\{<x,y>\mid x\in X\wedge y\in X\wedge y\text{盖住了}x\}$$

叫做X上的盖住关系。记为COV X。

Remark

COV $X\subseteq\preccurlyeq$

(任何盖住关系COV X都是相应偏序关系$\preccurlyeq$ 的子集)

如果$<x,y>\in$COV X，则有y盖住了x，所以$x\preccurlyeq y$，即$<x,y>\in\preccurlyeq$。故COV $X\subseteq\preccurlyeq$。

设$<X,\preccurlyeq>$是偏序集，可以利用盖住关系做一图，表示该偏序集$<X,\preccurlyeq>$。这个图叫做哈斯图。偏序集$<X,\preccurlyeq>$的哈斯图的画法如下：

① 用“。”表示X中的每一个元素。

② 如果 $x\preccurlyeq y$，则将x画在y的下方。

③ 若$<x,y>\in \mathrm{COV}\ X$，则在x和y间画一条直线。

例：偏序集$<A, R>$上的盖住关系的哈斯图是图4.13。

$$\mathrm{COV}\ A=\{<2,6>,<2,10>,<5,10>,<5,15>, <6,30>,<10,30>,<15,30>\}$$

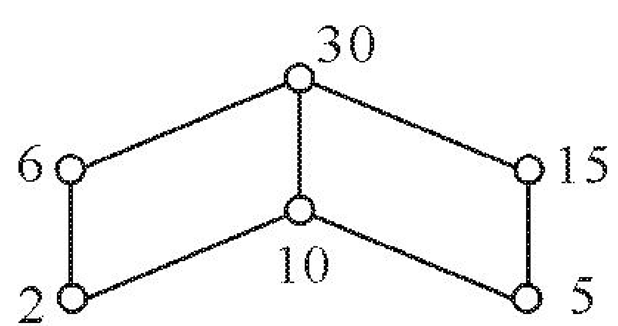


图 4.13

偏序集的特定元素（极小元与极大元）

定义　设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$.

(1) 若$\neg\exists x\,(x\in B\wedge x\prec y)$成立, 则称 y 为B的极小元.

(2) 若$\neg\exists x\,(x\in B\wedge y\prec x)$成立, 则称 y 为B的极大元.

也就是说，如果B中没有任何元素x满足

$x\neq y$且$y\preccurlyeq x(x\preccurlyeq y)$

则称y是B的极大元(极小元)。

【例】设$A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$，A上的二元关系
$R=\{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,<c,e>,<c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\}\cup I_A$
验证R是A上的偏序关系。写出盖住关系COV A，画出哈斯图。找出集合A的极大元和极小元。

解：容易验证R是自反的，反对称的和传递的，R是A上的偏序关系。

COV $A=\{<b,d>,<b,e>,<c,d>,<c,e>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\}$

哈斯图如图4.15所示。

集合A的极大元是：a,f,h。

集合A的极小元是：a,b,c,g。

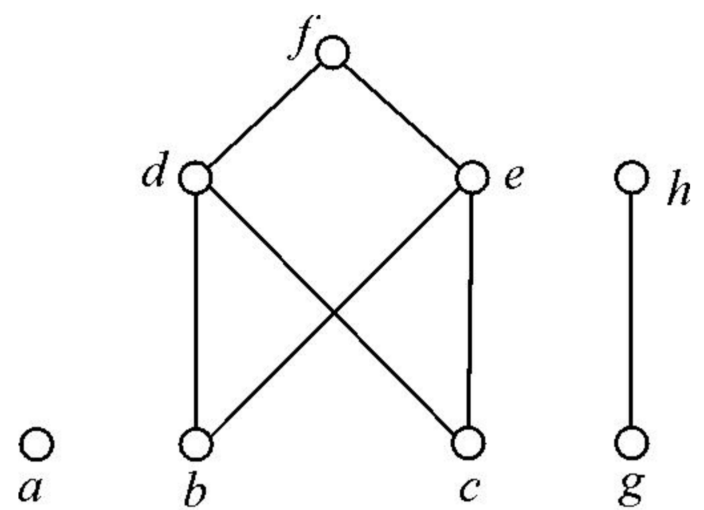


图 4.15

Remark：

①在哈斯图中，如果集合B的某个元素不存在B的其它元素从上(下)方与其相通，则该元素就是B的极大元(极小元)。

②孤立点既是极大元又是极小元。

③极大元和极小元不惟一。有限集合B的极大元和极小元一定存在。

偏序集的特定元素（最小元与最大元）

定义　设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$.

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的最小元.

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的最大元.

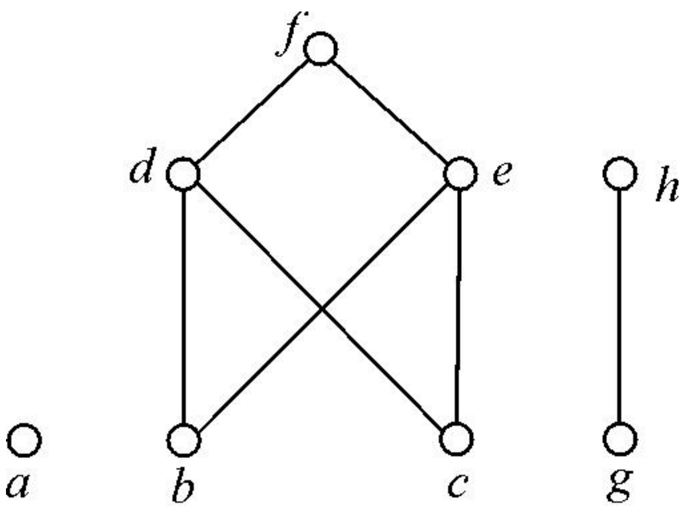


图 4.15

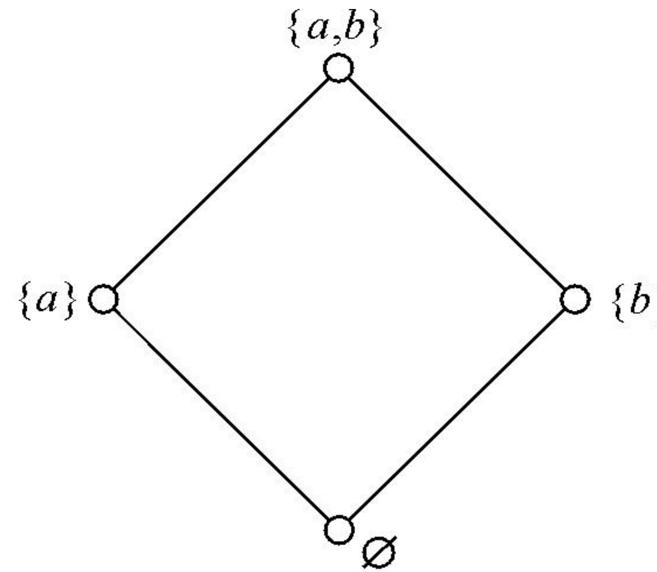


图 4.14

这两个哈斯图最大、最小元是什么？

图4.15无最大、最小元；

图4.16的最大元是集合{a,b},最小元是空集。

Remark：

①最大元和最小元不一定存在。如果存在，一定惟一。

②在哈斯图中，如果集合B的某个元素向下(上)通向B的**所有**元素，则该元素就是B的最大元(最小元)。

特殊元素的性质

- 对于有穷集，极小元和极大元必存在，可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.
- 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元，也是极大元.

偏序集的特定元素(上、下界)

定义　设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$.

(1) 若$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为B的上界.

(2) 若$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为B的下界.

(3) 令$C = \{y \mid y$为B的上界$\}$, 则称C的最小元为B的最小上界 或 上确界.

(4) 令$D = \{y \mid y$为B的下界$\}$, 则称D的最大元为B的最大下界 或 下确界.

【例】设$A=\{2,3,6,12,24,36\}$，其上的整除关系

$$R=\{<a, b>\mid a\in A\land b\in A\land a\text{能整除}b\}$$

是A上的偏序关系，试求盖住关系COV A，画出哈斯图，确定下列集合的上界和下界。

(1) $B1=\{2,3,6\}$

(2) $B2=\{12,24,36\}$

解：用列举法将R表示为：

$R=\{<2,6>,<2,12>,<2,24>,<2,36>,<3,6>,<3,12>,<3,24><3,36>,<6,12>,<6,24>,<6,36>,<12,24>,<12,36>\}\cup I_A$

盖住关系COV

$A=\{<2,6>,<3,6>,<6,12>,<12,24>,<12,36>\}$

$B_1=\{2,3,6\}$的上界是6,12,24,36。没有下界。

$B_2=\{12,24,36\}$的下界是2,3,6,12。没有上界。

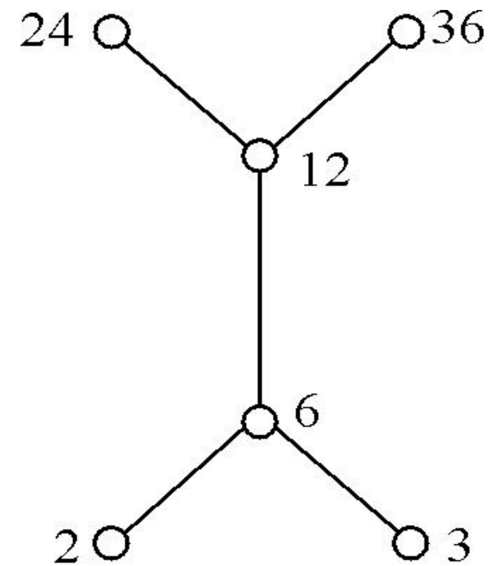


图 4.16

①上界和下界并不惟一。

②在哈斯图中，如果集合X的某个元素向下(上)通向B的所有元素，则该元素就是B的上界(下界)。

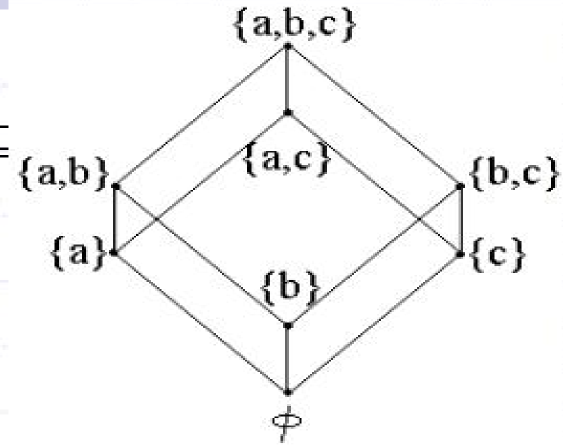
特殊元素的性质

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界存在不一定惟一
- 下确界、上确界如果存在，则惟一
- 集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对.

◆ 例： 设X={a,b,c}, $<P(X),\subseteq>$

是一部分序集合，

其哈斯图如右，



子集	上界	LUB	下界	GLB
{{a}{c}}	{a,c}{a,b,c}	{a,c}	Φ	Φ
{{a}{b}{c}}	{a,b,c}	{a,b,c}	Φ	Φ
{{a,b}{c}}	{a,b,c}	{a,b,c}	Φ	Φ
{{a,b}{b,c}}	{a,b,c}	{a,b,c}	{b} ,Φ	{b}
{{a,c}{c}}	{a,c}{a,b,c}	{a,c}	{c} ,Φ	{c}
{{b}}	{b}{a,b}{b,c}{a,b,c}	{b}	{b} ,Φ	{b}

学习要求：

（1）会画哈斯图

（2）根据哈斯图要会写出某个集合的极大（小）元，最大（小）元，上下界。

全序集和全序关系

设$<X,\preccurlyeq>$为偏序集，如果$\forall x \in X$，$\forall y \in X$，都有$x \preccurlyeq y$或$y \preccurlyeq x$，则称偏序集$<X,\preccurlyeq>$为全序集，也称为线序集。偏序关系$\preccurlyeq$称为X上的全序关系或线序关系。

Remark：

全序关系（线序关系）的哈斯图必然是一条线。

【例】设N为自然数集合，N上的大于等于关系定义为

$$R_{\geqslant}=\{<x,y>\mid x\in N\wedge y\in N\wedge x\geqslant y\}$$

$R_{\geqslant}$是全序关系。

其盖住关系为：

$$\text{COV } N=\{<1,0>,<2,1>,<3,2>,\cdots\}$$

其哈斯图是图4.17。

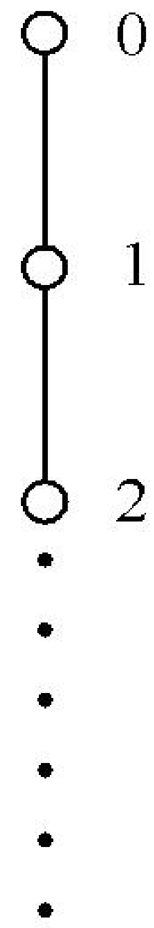


图 4.17

【例】设$P=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$，$P$上的包含关系

$$R_{\subseteq}=\{<x,y> \mid x\in P\wedge y\in P\wedge x\subseteq y\}$$

$R_{\subseteq}$是全序关系。

解： 其盖住关系为：

$$\text{COV } P=\{<\varnothing,\{a\}>, <\{a\},\{a,b\}>, <\{a,b\},\{a,b,c\}>\}$$

哈斯图如图4.18所示。

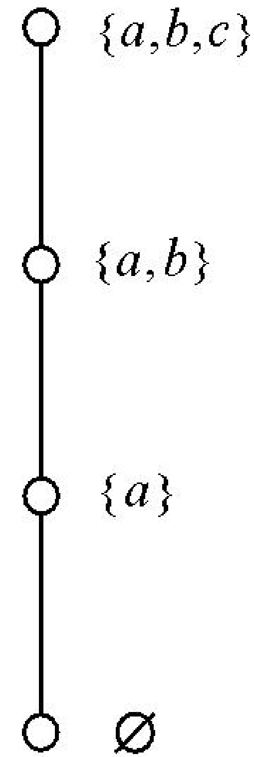


图 4.18

良序集与良序关系

设$<X,\preccurlyeq>$为偏序集，如果X的每一个非空子集存在最小元，则偏序集$<X,\preccurlyeq>$叫做良序集。偏序关系$\preccurlyeq$称为X上的良序关系。

（全序集与良序集的关系）

每一个良序集，一定是全序集。

有限全序集，一定是良序集。