

命题逻辑的特点

- 命题逻辑是指以逻辑运算符结合原子命题来构成代表“命题”的公式，以及允许某些公式建构成“定理”的一套形式“证明规则”。
- 用数学的方法研究关于推理、证明等问题（符号逻辑）
- 利用计算的方法来代替人们思维中的逻辑推理过程（十七世纪提出想法）
- 创造一种“通用的科学语言”，把推理过程象数学一样利用公式来进行计算，从而得出正确的结论（莱布尼兹）

命题逻辑的局限性

苏格拉底三段论：

凡是人都要死的。


苏格拉底是人。

所以苏格拉底是要死的。

在命题逻辑中，只能用 p 、 q 、 r 表示以上3个命题，

上述推理可表成 $(p \wedge q) \rightarrow r$


这不是重言式



在研究命题逻辑中，原子命题是命题演算中最基本的单位，同时不再对原子命题进行分解，这样会产生两个缺点：

- (1) 不能研究命题的结构，成分和内部逻辑的特征；
- (2) 不能表达两个原子命题所具有的共同特征，甚至在命题逻辑中无法处理一些简单又常见的推理过程。

苏格拉底的三段论无法用我们前面学的命题推理理论来证明 r 是 p 和 q 的有效结论。主要原因是把 p 视作一个简单命题，而失去了它的内在含义，这就是命题逻辑局限性，为此引入一阶逻辑的概念以及一阶逻辑相关的推理。



第2章 一阶逻辑

2.1 一阶逻辑基本概念

2.2 一阶逻辑合式公式及解释

2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

2.1 一阶逻辑基本概念

- 个体词
- 谓词
- 量词
- 一阶逻辑中命题符号化

命题逻辑的局限性

苏格拉底三段论：

凡是人都要死的。

苏格拉底是人。

所以苏格拉底是要死的。

在命题逻辑中，只能用 p 、 q 、 r 表示以上3个命题，

上述推理可表成 $(p \wedge q) \rightarrow r$

这不是重言式

基本概念——个体词、谓词、量词

个体词（个体）：所研究对象中可以独立存在的具
体或抽象的客体

个体常项：具体的事物，用 a, b, c 表示

个体变项：抽象的事物，用 x, y, z 表示

个体域：个体变项的取值范围

有限个体域，如 $\{a, b, c\}, \{1, 2\}$

无限个体域，如 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}, \dots$

全总个体域：宇宙间一切事物组成

基本概念 (续)

谓词: 表示个体词性质或相互之间关系的词

谓词常项: $F(a)$: a 是人

谓词变项: $F(x)$: x 具有性质 F

一元谓词: 表示事物的性质

多元谓词(n 元谓词, $n \geq 2$): 表示事物之间的关系

如 $L(x,y)$: x 与 y 有关系 L , $L(x,y)$: $x \geq y$, ...

0元谓词: 不含个体变项的谓词, 即命题常项或命题变项

基本概念(续)

量词: 表示数量的词

全称量词 \forall : 表示任意的, 所有的, 一切的等

如 $\forall x$ 表示对个体域中所有的 x

存在量词 \exists : 表示存在, 有的, 至少有一个等

如 $\exists x$ 表示在个体域中存在 x

一阶逻辑中命题符号化

方法一、用0元谓词将命题符号化

要求：先将它们在命题逻辑中符号化，再在一阶逻辑中符号化

方法二、对谓词变项中的变元进行量化（全称量化或存在量化）。

一阶逻辑中命题符号化（续）

例 用0元谓词将命题符号化

(1) 墨西哥位于南美洲

在命题逻辑中, 设 p : 墨西哥位于南美洲
符号化为 p

在一阶逻辑中, 设 a : 墨西哥,
 $F(x)$: x 位于南美洲,
符号化为 $F(a)$

例(续)

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$ 是有理数

在命题逻辑中, 设 $p: \sqrt{2}$ 是无理数, $q: \sqrt{3}$ 是有理数.

符号化为 $p \rightarrow q$

在一阶逻辑中, 设 $F(x): x$ 是无理数, $G(x): x$ 是有理数

符号化为 $F(\sqrt{2}) \rightarrow G(\sqrt{3})$

(3) 如果 $2 > 3$, 则 $3 < 4$

在命题逻辑中, 设 $p: 2 > 3$, $q: 3 < 4$.

符号化为 $p \rightarrow q$

在一阶逻辑中, 设 $F(x,y): x > y$, $G(x,y): x < y$,

符号化为 $F(2,3) \rightarrow G(3,4)$

一阶逻辑中命题符号化(续)

谓词变项不是命题，如果对其变元进行全称量化或存在量化，就变成了命题。

(1) 令 $F(x)$: x 会犯错误。

全称量化为: $(\forall x)F(x)$ 即为命题“所有人都会犯错误。”

(2) 令 $G(x)$: x 是研究生。

存在量化为: $(\exists x)G(x)$ 即为命题“有的人是研究生。”

【例】 命题：(1) 所有数小于5。

(2) 至少有一个数小于5。

个体域： ① $\{-1, 0, 1, 2, 4\}$

② $\{3, -2, 7, 8\}$

③ $\{15, 20, 24\}$

解： 设 $L(x)$ ： x 小于5。

(1) “所有数小于5。” 符号化为： $(\forall x) L(x)$


在个体域①， ②， ③中，

真值分别为： 真， 假， 假。

(2) “至少有一个数小于5。” 符号化为： $(\exists x)L(x)$

在个体域①， ②， ③中，

真值分别为： 真， 真， 假。



对谓词变项中所有个体变元进行量化后，该谓词变项就变成了命题，但所得命题的真值与个体域的选定有关。

这对命题函数的研究带来了一定的困难，为了统一，我们今后使用全总个体域。而将其它个体域用一个谓词来表示，叫做特性谓词。

(1) 所有的人都是要死的。

(2) 有的人活百岁以上。

第一种情况，考虑个体域为人类集合，则

(1) $F(x)$: x 是要死的。符号化为: $(\forall x)F(x)$

(2) $G(x)$: x 活百岁以上。符号化为: $(\exists x)G(x)$

第二种情况，考虑个体域为全总个体域，则

设特性谓词 $T(x)$: x 是人。

(1) 符号化为 $(\forall x) (T(x) \rightarrow F(x))$

(2) 符号化为 $(\exists x) (T(x) \wedge G(x))$



特性谓词加入的方法为：

(1) 对全称量词，特性谓词作为条件命题的前件加入。

(2) 对存在量词，特性谓词作为合取项加入。

下面举例说明如何用谓词公式表达自然语言中的命题。

【例】并非每个实数都是有理数。

解：设 $R(x)$ ： x 是实数

$Q(x)$ ： x 是有理数

符号化为： $\neg(\forall x)(R(x) \rightarrow Q(x))$

【例】没有不犯错误的人。

解：设 $M(x)$ ： x 是人

$F(x)$ ： x 犯错误

符号化为： $\neg(\exists x) (M(x) \wedge \neg F(x))$

(1) 每列火车都比某些汽车快。

(2) 某些汽车比所有火车慢。

解：设 $A(x)$ ： x 是火车。 $B(x)$ ： x 是汽车。 $C(x,y)$ ：
 x 比 y 快。

“每列火车都比某些汽车快。” 符号化为：
 $(\forall x)(A(x) \rightarrow (\exists y)(B(y) \wedge C(x,y)))$

“某些汽车比所有火车慢。” 符号化为：
 $(\exists x)(B(x) \wedge (\forall y)(A(y) \rightarrow C(y,x)))$

在对谓词变项进行量化时候，应注意：

1、在不同个体域中，命题符号化的形式可能不一样
如果没有特别说明，都应采用全总个体域

2、注意特性谓词的引入

3、n元谓词要转化为命题至少需要n个量词

$$\begin{aligned} 4、(\forall x)A(x) &\Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n) \\ (\exists x)A(x) &\Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n) \end{aligned}$$

5、多个量词同时出现时，不能随意颠倒它们的顺序。



本小节的学习目标：

- 1、理解个体、谓词和量词的概念。
- 2、学会将命题在全总个体域进行符号化。
(特别注意特性谓词的引入方法)

2.2 一阶逻辑公式及解释

- 合式公式(简称公式)
- 个体变项的自由出现和约束出现
- 解释与赋值
- 公式分类
永真式, 矛盾式, 可满足式

字母表

定义 字母表包含下述符号：

- (1) 个体常项: $a, b, c, \dots, a_i, b_i, c_i, \dots, i \geq 1$
- (2) 个体变项: $x, y, z, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, i \geq 1$
- (3) 函数符号: $f, g, h, \dots, f_i, g_i, h_i, \dots, i \geq 1$
- (4) 谓词符号: $F, G, H, \dots, F_i, G_i, H_i, \dots, i \geq 1$
- (5) 量词符号: \forall, \exists
- (6) 联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- (7) 括号与逗号: $(,), ,$

项

定义 项的定义如下:

- (1) 个体常项和个体变项是项.
- (2) 若 $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是任意的 n 元函数, t_1, t_2, \dots, t_n 是任意的 n 个项, 则 $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是项.
- (3) 所有的项都是有限次使用 (1), (2) 得到的.

个体常项、变项是项, 由它们构成的 n 元函数和复合函数还是项

原子公式

定义 设 $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是任意的 n 元谓词, t_1, t_2, \dots, t_n 是任意的 n 个项, 则称 $R(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是**原子公式**.

原子公式是由项组成的 n 元谓词.

例如, $F(x, y), F(f(x_1, x_2), g(x_3, x_4))$ 等均为原子公式

合式公式

定义 合式公式（简称公式）定义如下：

- (1) 原子公式是合式公式.
- (2) 若 A 是合式公式, 则 $(\neg A)$ 也是合式公式
- (3) 若 A, B 是合式公式, 则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式
- (4) 若 A 是合式公式, 则 $\forall x A, \exists x A$ 也是合式公式
- (5) 只有有限次地应用(1)~(4)形成的符号串是合式公式.

如 $x \geq 0, \forall x (F(x) \rightarrow G(x)), \forall x \exists y (x + y = 1)$

个体变项的自由出现与约束出现

定义 在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中, 称 x 为**指导变元**, A 为相应量词的**辖域**. 在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的**辖域**中, x 的所有出现都称为**约束出现**, A 中不是约束出现的其他变项均称为是**自由出现**.

例如, 在公式 $\forall x(F(x,y) \rightarrow G(x,z))$ 中,

$A=(F(x,y) \rightarrow G(x,z))$ 为 $\forall x$ 的辖域,

x 为指导变元, A 中 x 的两次出现均为约束出现,
 y 与 z 均为自由出现.

闭式: 不含自由出现的个体变项的公式.

【例】说明下列各式量词的辖域，找出约束变元和自由变元。


$$(1) (\forall x)P(x) \rightarrow Q(y)$$

$$(2) (\forall x) (P(x) \wedge (\exists y)Q(x,y))$$

$$(3) (\forall x) P(x) \wedge (\exists y)Q(x,y)$$

$$(4) (\exists x)(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \leftrightarrow (\forall x) R(x,y)$$

$$(5) (\exists x) P(x) \vee R(x,y)$$



在一个公式中，同一个变元既可以是约束的，又可以是自由的，容易混淆。为了使换名后的公式中出现的变元要么是约束的，要么是自由的，则要进行换名。

因为 $(\forall x)P(x)$ 与 $(\forall y)P(y)$ ， $(\exists x)P(x)$ 与 $(\exists y)P(y)$ 都具有相同意义，所以约束变元与表示该变元的符号无关。根据这个特点，可以对约束变元换名。换名规则如下：

(1)对约束变元可以换名，其更改变元名称的范围是量词的指导变元，以及该量词辖域中的所有该变元，公式的其余部分不变。

(2)换名时一定要更改成辖域中没有出现的变元名，最好是公式中没有的变量名。

【例】对 $(\exists x)(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \leftrightarrow (\forall x) R(x,y)$ 中的约束变元 y 换名。

解：下面哪个是正确的？

$$(\exists x)(\forall u)(P(x,u) \wedge Q(y,z)) \leftrightarrow (\forall x) R(x, y)$$

$$(\exists x)(\forall u)(P(x,u) \wedge Q(u,z)) \leftrightarrow (\forall x) R(x,y)$$

$$(\exists x)(\forall z)(P(x, z) \wedge Q(z,z)) \leftrightarrow (\forall x) R(x,y)$$



对公式中的自由变元也可以进行更改，这种更改叫做代入，代入规则是：

(1) 对于谓词公式中的自由变元可以代入，代入时需对公式中该变元自由出现的每处进行。

(2) 代入的变元与原公式中其他变元的名称不能相同。

【例】对 $(\exists x)(P(y) \wedge R(x,y)) \rightarrow (\forall y)Q(y)$ 中的自由变元 y 进行代入。

解： 下面哪个是正确的？

$$(\exists x)(P(z) \wedge R(x,z)) \rightarrow (\forall y)Q(y)$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge R(x,x)) \rightarrow (\forall y)Q(y)$$

$$(\exists x)(P(z) \wedge R(x,y)) \rightarrow (\forall y)Q(y)$$

公式的解释与分类

给定闭式 $A = \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

取个体域 \mathbf{N} , $F(x): x > 2$, $G(x): x > 1$

代入得 $A = \forall x(x > 2 \rightarrow x > 1)$ 真命题

给定非闭式 $B = \forall x F(x, y)$

取个体域 \mathbf{N} , $F(x, y): x \geq y$

代入得 $B = \forall x(x \geq y)$ 不是命题

令 $y=1$, $B = \forall x(x \geq 1)$ 假命题

解释和赋值

定义 解释 I 由下面4部分组成:

- (a) 非空个体域 D_I
- (b) 对每一个命题常项 a 指定一个 $\bar{a} \in D_I$
- (c) 对每一个函数符号 f 指定一个 D_I 上的函数 \bar{f}
- (d) 对每一个谓词符号 F 指定一个 D_I 上的谓词 \bar{F}

赋值 σ : 对每一个命题变项 x 指定一个值 $\sigma(x) \in D_I$

公式 A 在解释 I 和赋值 σ 下的含义: 取个体域 D_I , 并将公式中出现的 a 、 f 、 F 分别解释成 \bar{a} 、 \bar{f} 、 \bar{F} , 把自由出现的 x 换成 $\sigma(x)$ 后所得到的命题.

在给定的解释和赋值下, 任何公式都成为命题.

实例

例 给定解释 I 如下:

(a) 个体域 $D=\mathbf{N}$

(b) $\bar{a} = 2$

(c) $\bar{f}(x, y) = x + y, \bar{g}(x, y) = xy$

(d) 谓词 $\bar{F}(x, y) : x = y$

以及赋值 σ : $\sigma(x)=0, \sigma(y)=1, \sigma(z)=2$.

说明下列公式在 I 与 σ 下的涵义,并讨论真值

(1) $\forall x F(g(x, a), y)$

$\forall x (2x=1)$ 假命题

例(续)

$$(2) \forall x F(f(x,a),y) \rightarrow \forall y F(x,f(y,a))$$

$$\forall x (x+2=1) \rightarrow \forall y (0=y+2) \quad \text{真命题}$$

$$(3) \exists x F(f(x,y),g(x,z))$$

$$\exists x (x+1=2x) \quad \text{真命题}$$

$$(4) \forall x \forall y \exists z F(f(x,y),z)$$

$$\forall x \forall y \exists z (x+y=z) \quad \text{真命题}$$

$$(5) \exists x \forall y \forall z F(f(y,z),x)$$

$$\exists x \forall y \forall z (y+z=x) \quad \text{假命题}$$

闭式只需要解释, 如(4),(5)

公式的分类

永真式(逻辑有效式):在任何解释和赋值下为真命题

矛盾式(永假式):在任何解释和赋值下为假命题

可满足式: 存在成真的解释和赋值

说明:

永真式为可满足式, 但反之不真

谓词公式的可满足性 (永真性, 永假性) 是不可判定的

代换

定义 设 A_0 是含命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n 的命题公式,
 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个谓词公式, 用 A_i 处处代替 A_0 中的 p_i
($1 \leq i \leq n$), 所得公式 A 称为 A_0 的**代换实例**.

如 $F(x) \rightarrow G(x), \forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)$ 是 $p \rightarrow q$ 的代换实例

定理 重言式的代换实例都是重言式, 矛盾式的代换实例都是矛盾式.

实例

例 判断下列公式的类型

(1) $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$;

设 I 为任意的解释, 若 $\forall xF(x)$ 为假, 则 $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$ 为真. 若 $\forall xF(x)$ 为真, 则 $\exists xF(x)$ 也为真, 所以 $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$ 也为真.
是逻辑有效式.

(2) $\forall xF(x) \rightarrow (\forall x \exists y G(x,y) \rightarrow \forall xF(x))$;

重言式 $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ 的代换实例, 是逻辑有效式.

例(续)

$$(3) \quad \forall x F(x) \rightarrow (\forall x F(x) \vee \exists y G(y));$$

重言式 $p \rightarrow (p \vee q)$ 的代换实例, 是逻辑有效式.

$$(4) \quad \neg(F(x,y) \rightarrow R(x,y)) \wedge R(x,y);$$

矛盾式 $\neg(p \rightarrow q) \wedge q$ 的代换实例, 是矛盾式.

例(续)

$$(5) \quad \forall x \exists y F(x,y) \rightarrow \exists x \forall y F(x,y).$$

取解释 I : 个体域 \mathbf{N} , $F(x,y)$ 为 $x=y$.

公式被解释为 $\forall x \exists y (x=y) \rightarrow \exists x \forall y (x=y)$, 其值为假.

解释 I' : 个体域 \mathbf{N} , $F(x,y)$ 为 $x \leq y$, 得到一个新的 在 I' 下,

公式被解释为 $\forall x \exists y (x \leq y) \rightarrow \exists x \forall y (x \leq y)$, 其值为真.

是非逻辑有效式的可满足式.

例(续)

(6) $\exists x F(x,y)$

取解释 I : 个体域 N , $F(x,y)$ 为 $x < y$. 赋值 σ_1 : $\sigma_1(y)=1$.

在 I 和 σ_1 下, $\exists x(x < 1)$, 真命题.

取解释 I : 个体域 N , $F(x,y)$ 为 $x < y$. 赋值 σ_2 : $\sigma_2(y)=0$.

在 I 和 σ_2 下, $\exists x(x < 0)$, 假命题

是非逻辑有效式的可满足式.



本小节 的学习目标：

1、学会用谓词公式对命题符号化。

2、理解约束变元和自由变元的概念；学会对命题公式中的约束变元进行换名，对自由变元进行代入。