

第五章 控制系统的时域运动分析

参考书：《自动控制原理(田玉平教授版)》第五章
《自动控制原理(胡寿松教授版)》第三章

第五章 控制系统的时域运动分析

- 控制系统的时域响应
- 控制系统瞬态性能分析
- 控制系统稳态性能分析

分析和设计控制系统的首要工作是确定系统的模型，一旦获得系统的数学模型，可以采用不同的方法去分析系统的性能。

线性系统：时域分析法 根轨迹法 频率法

非线性系统：描述函数法 相平面法

采样系统：Z变换法

多输入多输出系统：状态空间法

5.1 控制系统时域响应

求解：

连续时间系统：利用传递函数求输出响应

零初始条件下， $c(t) = L^{-1}\{C(s)\} = L^{-1}\{\Phi(s)R(s)\}$

离散时间系统：利用Z变换求差分方程(离散系统)的输出响应

零初始条件下， $c(k) = Z^{-1}\{C(z)\} = Z^{-1}\{\Phi(z)R(z)\}$

零状态响应

非零初始条件下，输出响应的求法？
将非零初始条件引起的零输入响应加上

5.1 控制系统时域响应

动态性能+静态性能

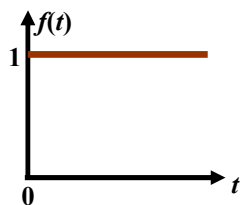
动态性能需要通过其对输入信号的响应过程来评价。因此在分析和设计控制系统时，需要一个对系统的性能进行比较的基准---典型输入信号。条件：1 能反映实际输入；2 在形式上尽可能简单，便于分析；3 使系统运行在最不利的工作状态。

典型输入信号：

1. 阶跃函数

$$r(t) = \begin{cases} A & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{令 } A=1 \text{ 称单位阶跃函数,}$$

$$\text{记为 } 1(t) \quad R(s) = L[1(t)] = \frac{1}{s}$$



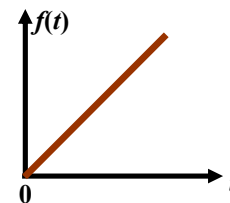
考查系统对恒值信号的跟踪能力

2. 斜坡函数 (等速度函数)

$$r(t) = \begin{cases} At & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$A=1$ ，称单位斜坡函数，记为 $t \cdot 1(t)$

$$L[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}$$



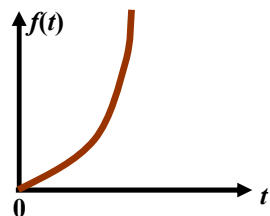
考查系统对匀速信号的跟踪能力

3. 抛物线函数 (等加速度函数)

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} At^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$A=1$ ，称单位抛物线函数，记为 $\frac{1}{2} t^2 \cdot 1(t)$

$$R(s) = L\left[\frac{1}{2} t^2 \cdot 1(t)\right] = \frac{1}{s^3}$$



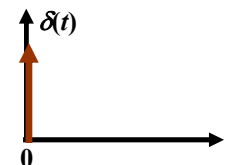
考查系统的机动跟踪能力

4. 脉冲函数

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{及 } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$R(s) = L[\delta(t)] = 1$$



考查系统在脉冲扰动下的恢复情况

各函数间关系:

$$\begin{array}{ccccccc} \delta(t) & \xrightarrow{\text{积分}} & 1(t) & \xrightarrow{\text{积分}} & t \cdot 1(t) & \xrightarrow{\text{积分}} & \frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t) \\ & \xleftarrow{\text{求导}} & & \xleftarrow{\text{求导}} & & \xleftarrow{\text{求导}} & \end{array}$$

5. 正弦函数

$$r(t) = A \sin \omega t$$

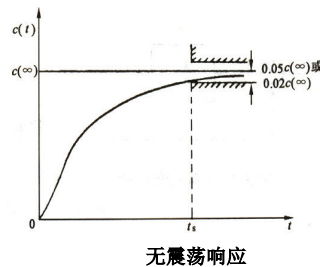
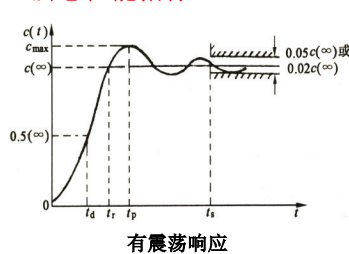
$$R(s) = L[A \sin \omega t] = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

5.2 控制系统瞬态性能分析

$$c(t) = c_{ts}(t) + c_{ss}(t)$$

= 瞬态响应 + 稳态响应

1. 瞬态性能指标



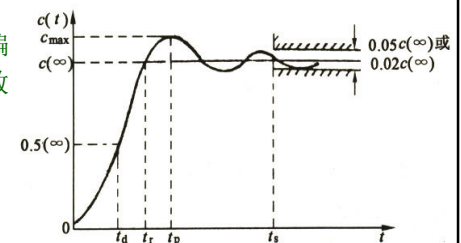
- (1) 延迟时间 t_d : $c(t)$ 从0到 $0.5c(\infty)$ 的时间;
- (2) 上升时间 t_r : $c(t)$ 第一次达到 $c(\infty)$ 的时间。
无超调时, $c(t)$ 从 $0.1c(\infty)$ 到 $0.9c(\infty)$ 的时间;

- (3) 峰值时间 t_p : $c(t)$ 到达第一个峰值的时间;

- (4) 调节时间 t_s : $c(t)$ 衰减到与稳态值之差不超过 $\pm 2\%$ 或 $\pm 5\%$ 所需的时间。通常该偏差范围称作误差带, 用符号 Δ 表示, 即 $\Delta = 2\%$ 或 $\Delta = 5\%$;

- (5) 超调量 $\sigma\%$: $c(t)$ 最大峰值偏离稳态值的部分, 常用百分数表示, 描述系统平稳性;

$$M_p \% = \left| \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \right| \times 100\%$$



- (6) 振荡次数 N : 在调节时间内, $c(t)$ 偏离 $c(\infty)$ 的振荡次数。

小结：离散/连续LTI系统瞬态性能指标

1) 快速性指标—表示瞬态过程进行的快慢： t_r 、 t_p 、 t_s

2) 平稳性指标—反映瞬态过程的振荡激烈程度；

超调量和振荡次数

上升时间、超调量和调节时间是最常用动态性能指标；

3) 综合性指标——调节时间从整体反映系统快速性，但又可看成是同时反映响应速度和振荡(阻尼)程度；

4) 单调变化的单位阶跃响应过程通常只用调节时间和上升时间(由稳态值的10%上升到90%所需时间)2个指标；

5) 实际系统性能指标—根据实际系统时域响应曲线求得

2. 稳态性能指标

稳态误差 e_{ss} ：稳定系统误差终值。即

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

最后一节介绍

5.2.1 一阶系统的时域分析

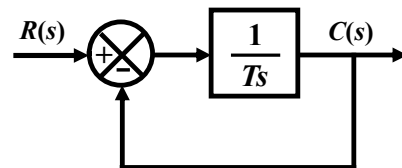
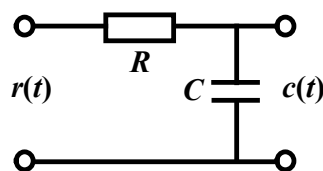
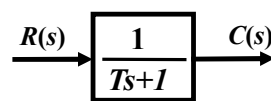
一阶系统：用一阶微分方程描述的系统

$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$$

$T=RC$ ，时间常数

典型传递函数及结构图为：

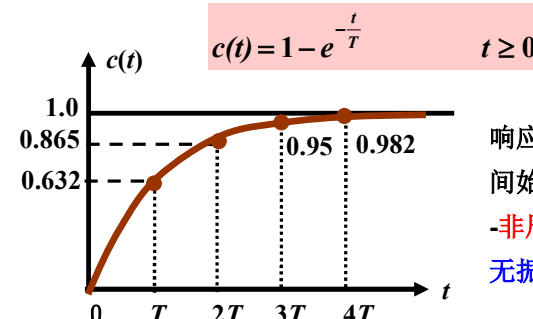
$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$



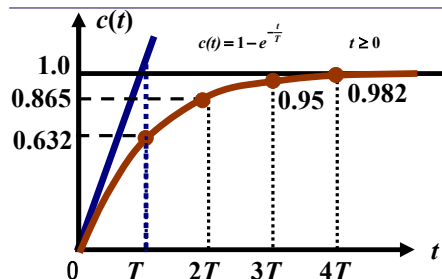
1. 单位阶跃响应

当输入信号 $r(t)=1(t)$ 时，系统响应 $c(t)$ 称作其单位阶跃响应

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts+1} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$



响应曲线在 $[0, \infty)$ 时间区间始终不会超过其稳态值---
-非周期响应
无振荡



一阶系统响应两个重要特点:

① 可以用时间常数 T 度量系统输出量数值

② 响应曲线初始斜率等于 $1/T$

一阶系统瞬态响应指标调整时间 t_s

定义: $|c(t_s) - 1| = \Delta$ (Δ 取 5% 或 2%)

$$\Delta = e^{-\frac{t_s}{T}} \quad \begin{cases} t_s \approx 3T (\Delta = 5\%) \\ t_s \approx 4T (\Delta = 2\%) \end{cases}$$

T 反映系统的惯性:

T 越小, 惯性越小, 响应快!

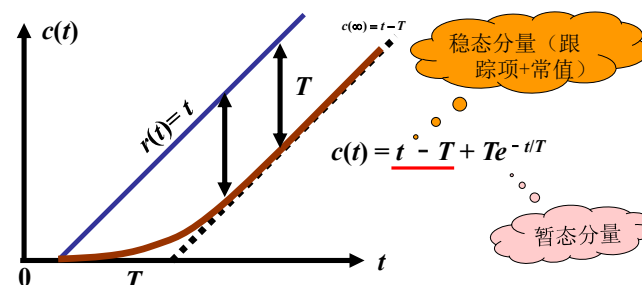
T 越大, 惯性越大, 响应慢!

2. 单位斜坡响应 $[r(t) = t]$

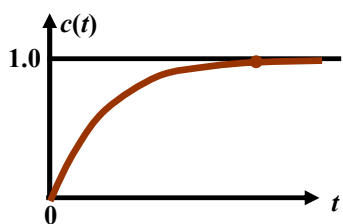
$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s+1/T}$$

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T} \quad (t \geq 0)$$

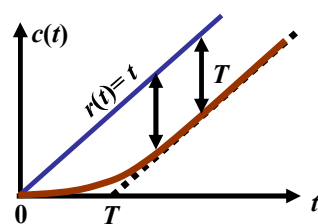
稳态响应: 与输入斜坡函数斜率相同, 但时间上滞后一个时间常数 T



过渡过程后, 稳态输出与单位斜坡输入存在位置误差(跟踪误差)



VS



阶跃响应: 输出量与输入量间的位置误差随时间而减小, 趋于0; 初始状态下, 位置误差最大, 响应曲线的斜率也最大; 无差跟踪

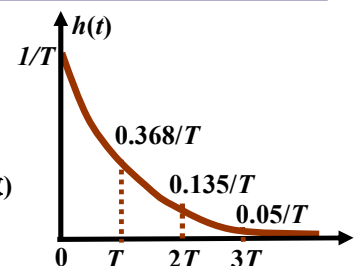
斜坡响应: 输出量与输入量间的位置误差随时间而增大, 趋于常值 T ; 初始状态下, 位置误差和响应曲线斜率均为0。有差跟踪

3. 单位脉冲响应 $[R(s)=1]$

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

$$h(t) = C_{\text{脉冲}}(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}$$

闭环传函, 系统输出称为脉冲(冲激)响应函数, 以 $h(t)$ 标志



闭环传函提供实验方法: 以单位脉冲输入信号作用于系统, 测定系统单位脉冲响应

$$C_{\text{阶跃}}(t) = \frac{d}{dt} C_{\text{斜坡}}(t) \quad C_{\text{脉冲}}(t) = \frac{d}{dt} C_{\text{阶跃}}(t)$$

$$\longleftrightarrow r_{\text{阶跃}}(t) = \frac{d}{dt} r_{\text{斜坡}}(t) \quad r_{\text{脉冲}}(t) = \frac{d}{dt} r_{\text{阶跃}}(t)$$

LTI系统重要性质

1) IF系统输入信号为原输入信号导数, THEN系统输出为原输出导数

$$C(s) = G_B(s)R(s) \begin{cases} C_1(s) = G_B(s)L\left[\frac{dr(t)}{dt}\right] = G_B(s) \cdot sR(s) = sC(s) \\ c_1(t) = \frac{dc(t)}{dt} \end{cases}$$

2) 零初始条件下, IF系统输入信号为原输入信号时间积分, THEN系统输出为原输出对时间积分, 积分常数由零初始条件决定

$$C_2(s) = G_B(s)L\left[\int r(t)dt\right] = G_B(s) \frac{R(s)}{s} = \frac{1}{s} C(s)$$

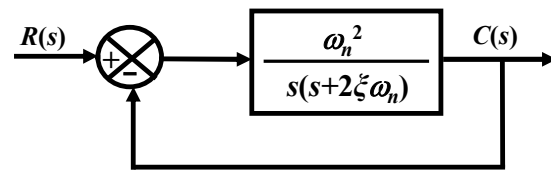
$$y_2(t) = \int y(t)dt$$

5.2.2 二阶系统的时域分析

1. 二阶系统数学模型

标准化二阶系统

结构图:



$$\text{闭环传递函数 } \Phi(s) = \frac{\frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}}{1 + \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

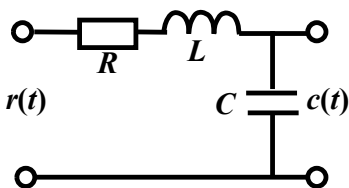
二阶系统有两个结构参数 ξ (阻尼比)和 ω_n (无阻尼振荡频率)

二阶系统性能分析和描述, 用这两个参数表示

例如: RLC电路

微分方程

$$LC \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + RC \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$$



$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} \Big|_{\text{零初条件}} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$T = \sqrt{LC} \quad \omega_n = 1/T \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

对于不同二阶系统, 阻尼比和无阻尼振荡频率含义不同

2. 二阶系统闭环极点

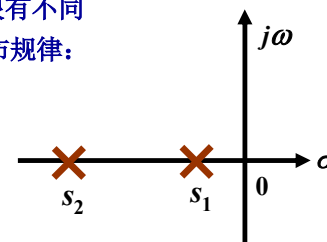
二阶系统闭环特征方程, 即

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

其两个特征根: $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$

二阶系统, 阻尼比 ξ 取值不同, 特征根有不同类型值, 或者说在 s 平面上有不同分布规律:

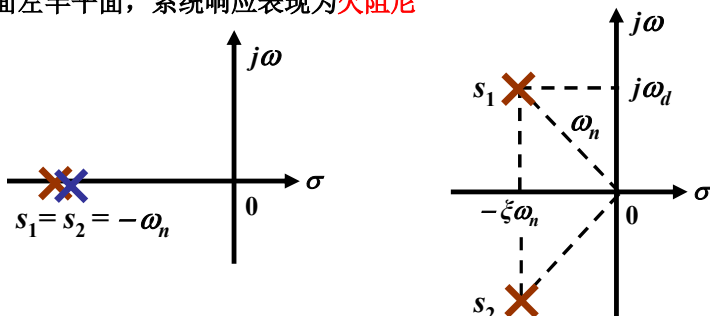
(1) $\xi > 1$ 时, 特征根为一对不等值负实根, 位于 s 平面负实轴上, 使得系统响应表现为过阻尼



$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

(2) $\xi=1$ 时, 特征根为一对等值负实根, 位于 s 平面负实轴, 系统响应表现为**临界阻尼**

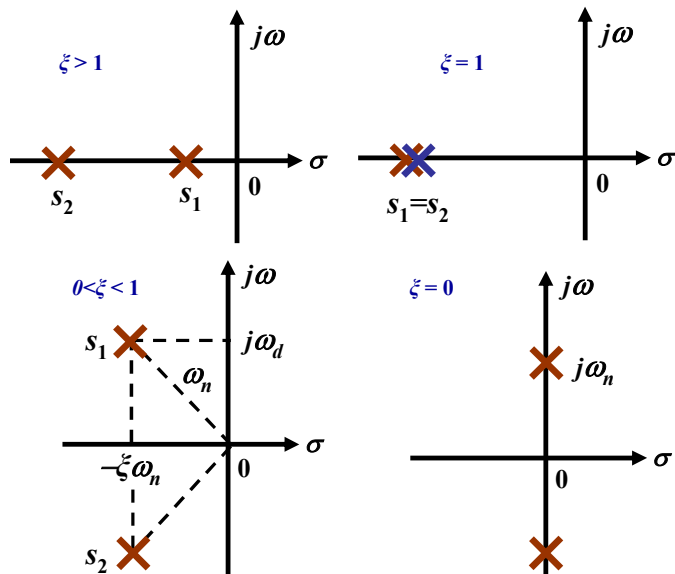
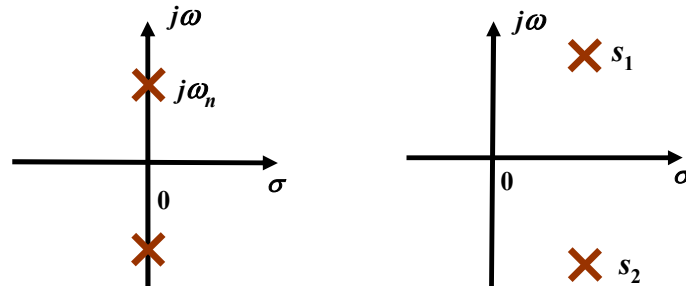
(3) $0 < \xi < 1$ 时, 特征根为一对具有负实部的共轭复根, 位于 s 平面左半平面, 系统响应表现为**欠阻尼**



$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

(4) $\xi=0$ 时, 特征根为一对幅值相等的虚根, 位于 s 平面虚轴上, 系统响应表现为无阻尼**等幅振荡**过程

(5) $\xi < 0$ 时, 特征根位于 s 平面右半平面, 系统响应表现为幅值随时间增加而**发散**



阻尼比取不同值时, 二阶系统根分布

3. 单位阶跃响应

$$\text{闭环传递函数 } \Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\text{输出 } C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \times \frac{1}{s}$$

$$\text{分解 } C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s-s_1)(s-s_2)}$$

式中 s_1, s_2 是系统两个闭环特征根

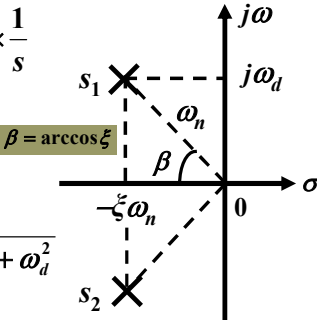
阻尼比在不同范围内取值, 二阶系统特征根在 s 平面上位置不同, 二阶系统时间响应对应不同的运动规律

二阶系统单位阶跃响应: **振荡**和**非振荡**

(1) 欠阻尼情况 $0 < \zeta < 1$ $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d$

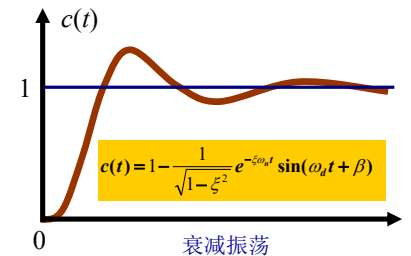
$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n + j\omega_d)(s + \xi\omega_n - j\omega_d)} \times \frac{1}{s}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \times \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$


$$c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta) \quad (t \geq 0)$$

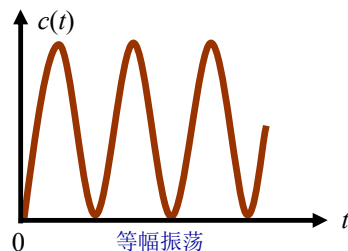


欠阻尼二阶系统单位阶跃响应:

Part I: 稳态分量为1, 表明系统在 $1(t)$ 作用下不存在稳态位置误差;
Part II: 瞬态响应是阻尼正弦项, 振荡频率为**阻尼振荡频率** ω_d , 幅值则指数衰减, 两者均由参数 ξ 和 ω_n 决定

(2) 无阻尼情况 $\zeta=0$

$$c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t \right) = 1 - \cos \omega_d t$$



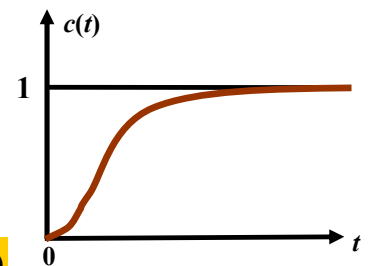
(3) 临界阻尼情况 $\zeta=1$

$$s_{1,2} = -\omega_n$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \times \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} - \frac{1}{s + \omega_n}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (t \geq 0)$$



此时响应是稳态值为1的非周期上升过程, 其变化率:

$t=0$, 变化率为0;

$t>0$ 变化率为正, $c(t)$ 单调上升;

$t \rightarrow \infty$, 变化率趋于0. **整个过程不振荡, 无超调, 稳态误差=0**

(4) 过阻尼情况 $\xi > 1$ $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$ 引入等效时间常数

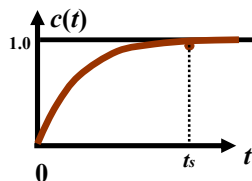
$$T_1 = \frac{1}{\omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} \quad T_2 = \frac{1}{\omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + 1/T_1)(s + 1/T_2)} \times \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{(T_2/T_1 - 1)(s + 1/T_1)} + \frac{1}{(T_1/T_2 - 1)(s + 1/T_2)}$$

$$c(t) = 1 + \frac{e^{-t/T_1}}{T_2/T_1 - 1} + \frac{e^{-t/T_2}}{T_1/T_2 - 1}$$

响应特性包含两个单调衰减的指数项，且它们的代数和不超过1，因而响应是非振荡的。
调节速度慢。(不同于一阶系统)



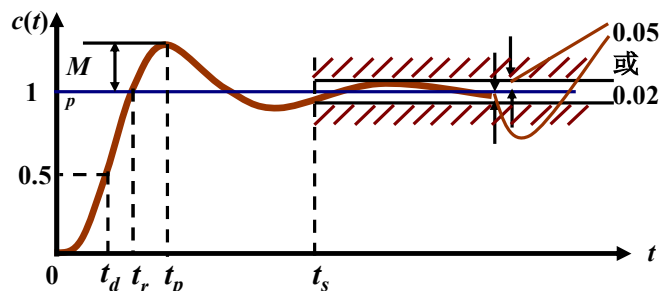
(5) 不稳定系统 $\xi < 0$

总结:

- 1) $\xi < 0$ 时，响应发散，系统不稳定；
- 2) $\xi > 1$ 时，响应与一阶系统相似，无超调，但调节速度慢；
- 3) $\xi = 0$ 时，无过渡过程，直接进入稳态，响应等幅振荡；
- 4) $0 < \xi < 1$ 时，响应有超调，但上升速度快，调节时间短，合理选择 ξ 可使既快又平稳，工程上把 $\xi = 0.707$ 的二阶系统称为二阶最优系统。

4. 二阶系统的动态性能指标

(1) 欠阻尼(衰减振荡的瞬态过程)



用 t_r, t_p, M_p, t_s 四个性能指标来衡量瞬态响应的好坏

1) 上升时间 t_r : 从零上升至第一次到达稳态值所需的时间

$$c(t_r) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_r} \sin(\omega_d t_r + \beta) \Big|_{t=t_r} = 1$$

$$\sin(\omega_d t_r + \beta) \Big|_{t=t_r} = 0$$

$$\omega_d t_r + \beta = k\pi \quad (k=1)$$

$$t_r = \frac{\pi - \arccos \xi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

小结: t_r 系统响应速度的一种度量(t_r 越小, 响应越快)

☞ IF 阻尼比 ξ 恒定: 自然频率 $\omega_n \uparrow \rightarrow$ 上升时间 $t_r \downarrow$;

☞ IF 阻尼振荡频率 ω_d 恒定: 阻尼比 $\xi \downarrow \rightarrow$ 上升时间 $t_r \downarrow$

2) 峰值时间 t_p : 响应超过稳态值, 到达第一个峰值所需的时间

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = 0$$

$$\frac{\xi\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p + \beta) - \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_p} \cos(\omega_d t_p + \beta) = 0$$

$$\frac{\omega_n e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t_p = 0 \Rightarrow \sin \omega_d t_p = 0 \Rightarrow \omega_d t_p = k\pi$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

小结:

- ✪ t_p 等于阻尼振荡周期的一半
- ✪ t_p 与闭环极点的虚部数值成反比

3) 超调量 M_p : 响应曲线偏离阶跃曲线最大值, 用百分比表示

$$M_p = \left| \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \right| \times 100\%$$

$$= \left| -\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p + \beta) \right| \times 100\%$$

$$\text{代入 } t_p \rightarrow M_p \% = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \pi} \times 100\%$$

M_p 只是 ξ 的函数, 其大小与自然频率 ω_n 无关: $\xi \downarrow \rightarrow M_p \uparrow$

取控制系统最大超调量 $M_p = 25\% \sim 1.5\%$, 对应阻尼比 $\xi = 0.4 \sim 0.8$

4) 调节时间 t_s : 响应曲线衰减到与稳态值之差不超过2%/5%时间

$$|c(t) - c(\infty)| \leq \Delta \times c(\infty) \quad (t \geq t_s)$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta) \right| \leq \Delta \quad (t \geq t_s)$$

$$|\sin(\omega_d t + \beta)| \leq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \leq \Delta \quad (t \geq t_s)$$

工程上, 当 $0.1 < \xi < 0.9$ 时, 通常用下列二式近似计算调节时间

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} \quad \Delta = 5\% c(\infty)$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad \Delta = 2\% c(\infty)$$

小结:

- 调节时间与闭环极点实部数值成反比
- 调节时间与系统阻尼比和自然频率乘积成反比

5) 振荡次数 N , $N = \frac{t_s}{T_d}$ $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$

$$\Delta = 2\% c(\infty) \quad N = \frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta} = \frac{-2}{\ln(M_p)}$$

$$\Delta = 5\% c(\infty) \quad N = \frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta} = \frac{-1.5}{\ln(M_p)}$$

振荡次数 N 只与阻尼比 ζ 有关

非振荡瞬态过程:

临界阻尼系统和过阻尼系统应用场合:

不允许瞬态响应出现超调的实际控制系统

调节时间求法—工程上采用的方法: 利用数值解法求出不同值下的相对调节时间, 然后制成曲线以供查用

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{s_1 t}}{-s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{-s_2} \right), \quad t \geq 0$$

$$(-s_1)/(-s_2) = 1 \quad t_s = \frac{4.75}{-s_2} \quad (\zeta = 1)$$

$$(-s_1)/(-s_2) \geq 4 \quad t_s = \frac{3}{-s_2}$$

$$\zeta = \frac{1 + \frac{-s_2}{-s_1}}{2\sqrt{\frac{-s_2}{-s_1}}}$$

总结:

$$t_r = \frac{\pi - \arccos \zeta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$M_p \% = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi} \times 100\%$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

(1) ω_n 固定, $\zeta \downarrow \rightarrow t_r, t_p \downarrow$
 $\zeta \uparrow (\zeta \text{ 一定范围}) \rightarrow t_s \downarrow$

(2) ζ 固定, $\omega_n \uparrow \rightarrow t_r, t_p, t_s \downarrow$

(3) $\zeta \downarrow \rightarrow M_p \uparrow$ 只由 ζ 决定

各性能指标之间是有矛盾的
 最佳阻尼系数 $\zeta=0.707$, $M_p=5\%$

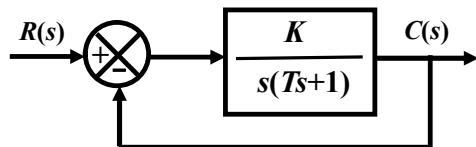
设计系统:

ζ 通常由最大超调量决定;
 t_s 由无阻尼振荡频率 ω_n 决定

总结:

- 阻尼比越小, 超调量越大, 上升时间越短, 振荡程度越加严重;
- 指示仪表系统--临界阻尼系统或过阻尼系统;
- 对于相同 ζ 系统, 其调节时间与 ω_n 值成反比;
- $\zeta=0.4 \sim 0.8$ 的动态过程, 不仅具有比 $\zeta=1$ 时更短的调节时间, 而且振荡程度也不严重

例5-1 单位负反馈随动系统如图所示



(1) 确定系统特征参数与实际参数的关系

(2) 若 $K = 16(\text{rad/s})$ 、 $T = 0.25(\text{s})$ ，试计算系统的动态性能指标

解: (1) 系统闭环传递函数:

$$\Phi(s) = \frac{K}{Ts^2 + s + K} = \frac{K/T}{s^2 + s/T + K/T}$$

与典型二阶系统比较(page 216)可得: $K/T = \omega_n^2$ $1/T = 2\xi\omega_n$

(2) $K = 16$, $T = 0.25$ 时

$$K/T = \omega_n^2 \quad 1/T = 2\xi\omega_n$$

$$\omega_n = \sqrt{K/T} = 8(\text{rad/s}) \quad \xi = \frac{1}{2\sqrt{KT}} = 0.25$$

$$M_p = e^{-\frac{0.25}{\sqrt{1-0.25^2}}\pi} \times 100\% = 47\%$$

$$t_r = \frac{\pi - \arccos 0.25}{8\sqrt{1-0.25^2}} = 0.24(\text{s})$$

$$t_p = \frac{\pi}{8\sqrt{1-0.25^2}} = 0.41(\text{s})$$

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{3}{8 \times 0.25} = 1.5(\text{s}) \quad (\Delta=0.05)$$

(3) 若要求系统单位阶跃响应无超调, 且 $t_s \leq 10\text{s}$, 开环增益 K ? t_s ?

$$\xi \geq 1 \quad \text{取} \quad \xi = 1 \quad t_s = 4.75/(-s_2)$$

$$\text{特征方程} \quad s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T} = 0 \Rightarrow s^2 + \frac{1}{0.25}s + \frac{K}{0.25} = 0$$

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{4K} = 2\text{rad/s} \Rightarrow K = 1$$

$$\Rightarrow s_1 = s_2 = -2 \quad t_s = 4.75/(-s_2) = 2.375\text{s}$$

Conclusion:

➤ IF $0 < \xi < 1$ $K \uparrow \rightarrow \xi = \frac{1}{2\sqrt{KT}} \downarrow$, $M_p \uparrow$, $N \uparrow$

➤ IF $\xi > 1$ $K \uparrow \rightarrow \xi \downarrow$, $\omega_n \uparrow$, $t_s \downarrow$

$T \uparrow \rightarrow \xi \downarrow$, $\omega_n \downarrow$, $t_s \uparrow$

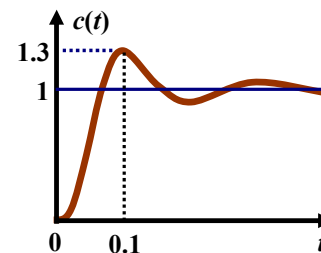
例5-2 单位负反馈系统单位阶跃响应曲线如图, 求开环传递函数

解:

$$\text{超调量} M_p = 30\% \quad e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi} \times 100\% = 0.3$$

$$\text{峰值时间} t_p = 0.1 \quad \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 0.1$$

$$\Rightarrow \xi = 0.357, \omega_n = 33.65(\text{rad/s})$$



二阶系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} = \frac{33.65^2}{s(s + 2 \times 0.357 \times 33.65)} = \frac{11.31}{s(s + 24)}$$

二阶系统性能改善

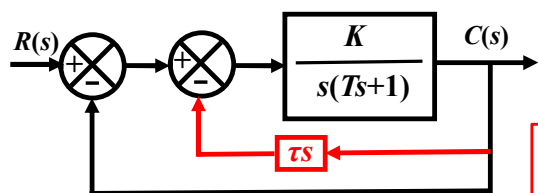
瞬态性能指标和参数 K 、 T 之间关系:

K 越大, 系统振荡越严重; 减小 K ?

T 增大对系统的瞬态性能指标不利

系统性能改善方法之一: 速度反馈在不改变 K 情况下, 采用

速度反馈(即微分反馈)使系统阻尼提高

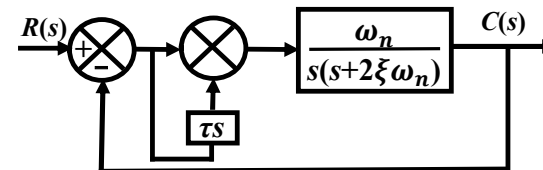


$$\Phi(s) = \frac{K}{s(Ts+1) + K(\tau s+1)}$$

$$= \frac{K/T}{s^2 + \frac{1+K\tau}{T}s + \frac{K}{T}}$$

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{K}{T}} \quad \zeta_1 = \frac{1+K\tau}{2\sqrt{KT}}$$

二阶系统性能改善方法二: 比例-微分校正(引入开环零点)



$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + \omega_n^2\tau)s + \omega_n^2} \quad \omega_{nd} = \omega_n \quad \zeta_d = \zeta + \frac{\tau\omega_n}{2}$$

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{(s^2 + 2\zeta_d\omega_n s + \omega_n^2)s}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta_d\omega_n s + \omega_n^2)s} + \frac{\omega_n^2\tau}{s^2 + 2\zeta_d\omega_n s + \omega_n^2}$$

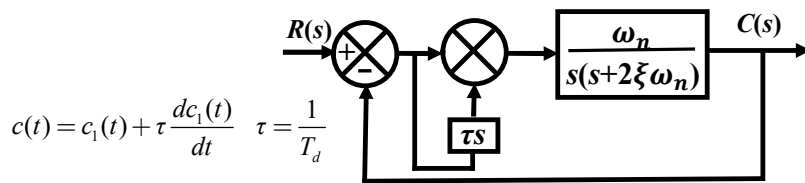
$C_1(s) * \tau s = C_2(s)$

二阶系统性能改善方法二: 比例-微分校正(引入开环零点)

$$c(t) = c_1(t) + c_2(t)$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta_d\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta_d^2}} \sin\left(\sqrt{1-\zeta_d^2}\omega_n t + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta_d^2}}{\zeta_d}\right)$$

$$+ \frac{\tau\omega_n}{\sqrt{1-\zeta_d^2}} e^{-\zeta_d\omega_n t} \sin\left(\sqrt{1-\zeta_d^2}\omega_n t\right)$$



$$c(t) = c_1(t) + \tau \frac{dc_1(t)}{dt} \quad \tau = \frac{1}{T_d}$$

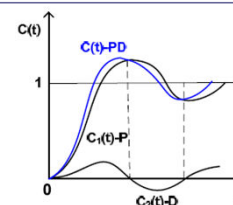
二阶系统性能的改善方法二: 比例-微分校正(引入开环零点)

$$\Delta = 5\% \text{ 时 } t_s = \left(3 + \ln \frac{d}{T_d}\right) \frac{1}{\zeta_d\omega_n}$$

$$\Delta = 2\% \text{ 时 } t_s = \left(4 + \ln \frac{d}{T_d}\right) \frac{1}{\zeta_d\omega_n}$$

d 为附加零点到任一共轭复数极点距离

D 作用: 提前反映出误差变化趋势, 使响应更快

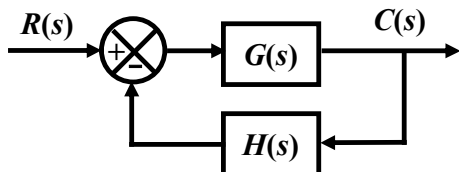


两种系统性能改善方法的应用: PD校正与速度反馈

- 1) 增加硬件传感器成本问题
- 2) PD校正物理实现问题
- 3) D控制高通滤波特性
- 4) 校正装置输入端有噪声或高频扰动情况

5. 高阶系统时域分析

(1) 高阶系统阶跃响应



闭环传递函数 $\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$

$G(s)$ 、 $H(s)$ 一般是复变量 s 多项式之比

$$\Phi(s) = \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

根据能量的有限性，分子多项式的阶次 m 不高于分母多项式阶次 n 。对上式进行因式分解：

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{a_0} \times \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^q (s + p_i) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2)}$$

式中 $0 < \xi_k < 1$ 。即系统有 q 个实极点和 r 对共轭复数极点，称为系统闭环特征根，或闭环极点。

系统单位阶跃响应：

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{b_0}{a_0} \times \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^q (s + p_i) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2)} \cdot \frac{1}{s}$$

取拉氏反变换，并设全部初始条件为零，得到系统单位阶跃响应：

$$c(t) = A_0 + \sum_{i=1}^q A_i e^{-p_i t} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\xi_k \omega_k t} \sin(\omega_{dk} t + \beta_k)$$

式中 $\omega_{dk} = \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2}$ ； $\beta_k = \arccos \xi_k$ ； A_i 、 B_k 是与 $C(s)$ 在对应闭环极点上留数有关的常数。

高阶系统单位阶跃响应=常数项+(一阶系统+二阶系统)单位阶跃响应

$$c(t) = A_0 + \sum_{i=1}^q A_i e^{-p_i t} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\xi_k \omega_k t} \sin(\omega_{dk} t + \beta_k)$$

小结：IF系统所有闭环极点都具有负实部，系统时间响应的各暂态分量都将随时间增长而趋近于零，称高阶系统稳定。

(2) 闭环主导极点

1) 高阶系统瞬态响应各分量的衰减快慢由 $-p_i$ ， $-\xi_k \omega_k$ 决定，也即闭环极点负实部的绝对值越大，相应的分量衰减越快；

2) 极点远离原点，系数小；

3) 极点接近一个零点而远离其他极点和原点，系数小；

4) 极点远离零点而接近其他极点或原点，系数大；

5) 闭环主导极点：系数大而衰减慢的函数项对应的极点

闭环主导极点条件:

i) 距离 s 平面虚轴较近, 且周围没有其它的闭环极点和零点;

对应的瞬态分量衰减缓慢, 起主要作用;

不会构成闭环偶极子, 产生零极点相消现象;

ii) 其实部的绝对值比其它极点小5倍以上。

应用闭环主导极点的概念, 可以把一些高阶系统近似为一阶或二阶系统, 以实现对高阶系统动态性能的近似评估。

一般情况, 高阶系统具有振荡性, 所以主导极点常常是一对共轭复数极点。找到该对共轭复数极点, 高阶系统动态性能就可以应用二阶系统性能指标来近似估计。

5.3 控制系统稳态性能分析

5.3 控制系统稳态性能分析

□ 稳态响应是指当时间 t 趋于无穷大时系统的输出(精度问题)

$$y_s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

□ 稳态误差是评价系统对于给定信号的跟踪精度, 是系统控制准确度(控制精度)的一种度量

□ 稳态误差反映系统输出最终复现输入的程度

稳态误差取决于:

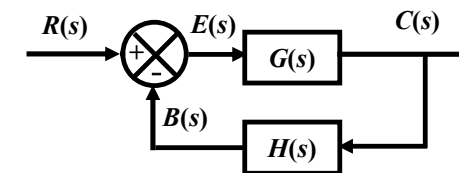
□ 系统结构/型别

□ 输入信号类型

描述稳态误差的两类系数: $\begin{cases} \text{静态误差系数} \\ \text{动态误差系数} \end{cases}$

1. 误差的定义

1) 从系统输入端定义, 系统的输入信号与反馈信号之差, 即偏差 $E(s) = R(s) - B(s)$



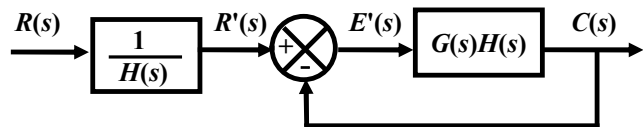
$$\text{误差传递函数 } \Phi_E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

2) 从系统输出端定义, 系统输出量的期望值与实际值之差, 即

$$E_o(s) = R(s) - C(s)$$

对于单位反馈系统, 两种定义是一致的

2. 两种定义的关系



$R'(s)$ 表示等效单位反馈系统的输入信号，也就是输出的期望值。因而， $E'(s)$ 是从输出端定义的非单位控制系统的误差

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

$$\begin{aligned} E'(s) &= R'(s) - C(s) = \frac{1}{H(s)} R(s) - C(s) \\ &= \frac{1}{H(s)} [R(s) - H(s)C(s)] \\ &= \frac{1}{H(s)} \cdot E(s) \end{aligned}$$

从系统输入端定义的稳态误差，可以直接或间接地表示从系统输出端定义的稳态误差

3. 稳态误差 e_{ss}

$$\text{定义: } e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

终值定理的条件：
除原点外，在虚轴及 s 平面
右半平面无极点

例5-8 设单位反馈控制系统开环传函： $G(s) = \frac{1}{Ts}$ ，试求当输入信号为 $r(t) = t^2/2$ ， $r(t) = 1(t)$ ， $r(t) = t$ ， $r(t) = \sin \omega t$ 时，控制系统稳态误差

$$\text{解: } \frac{E(s)}{R(s)} = \Phi_e(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{1}{1+1/Ts} = \frac{s}{s+1/T}$$

$$(1) \text{ 当 } r(t) = t^2/2 \quad R(s) = 1/s^3$$

$$\text{解法一: } E(s) = \frac{s}{s+1/T} \cdot \frac{1}{s^3}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+1/T} \cdot \frac{1}{s} = \infty$$

$$\text{解法二: } E(s) = \frac{s}{s+1/T} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{T}{s^2} - \frac{T^2}{s} + \frac{T^2}{s+1/T}$$

$$e(t) = T(t-T) + T^2 e^{-t/T}$$

$$e_{ss} = e_{ss}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_{ss}(t) = \infty$$

$$(2) \text{ 当 } r(t) = 1(t) \quad R(s) = 1/s$$

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s) = \frac{s}{s+1/T} \cdot \frac{1}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0$$

$$(3) \text{ 当 } r(t) = t \quad R(s) = 1/s^2$$

$$E(s) = \frac{s}{s+1/T} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s+1/T} \cdot \frac{1}{s} = T$$

$$(4) \text{ 当 } r(t) = \sin \omega t \quad R(s) = \omega/(s^2 + \omega^2)$$

终值定理的条件：
除原点外，在虚轴及 s 平面
右半平面无极点

终值定理条件不成立！

$$E(s) = \frac{s}{s+\frac{1}{T}} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\therefore = -\frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} \cdot \frac{1}{s+\frac{1}{T}} + \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} + c \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$e(t) = -\frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} \cos \omega t + \frac{T^2\omega^2}{T^2\omega^2 + 1} \sin \omega t$$

$$e_{ss}(t) = \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} (\cos \omega t + T\omega \sin \omega t)$$

$$= \frac{\omega T}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \cdot \sin(\omega t + \alpha) \quad \alpha = \tan^{-1} \frac{1}{\omega T} \quad e_{ss}(\infty) \neq 0$$

4. 给定作用下稳态误差计算

一般情况，系统误差的拉氏变换：

$$E(s) = \Phi_e(s)R(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}R(s)$$

稳态误差：

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_o(s)}$$

$G_o(s)$ 时间常数形式：

$$G_o(s) = \frac{K \prod_{j=1}^{m_1} (\tau_j s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\xi_k \tau_k s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n_1} (T_i s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\xi_l \tau_l s + 1)} = \frac{K}{s^v} G_n(s)$$

4. 给定作用下稳态误差计算

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_n(s) = 1$$

$$\Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_o(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + \frac{K}{s^v} G_n(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{v+1} R(s)}{\lim_{s \rightarrow 0} s^v + K}$$

$v = 0$ 称为 0 型系统；

$v = 1$ 称为 I 型系统；

$v = 2$ 称为 II 型系统

稳态误差取决于：

系统开环增益 K /型别 v

输入信号类型

(1) 阶跃输入 $r(t) = A1(t)$ 作用下稳态误差

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + G_o(s)} \cdot \frac{A}{s} = \frac{A}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_o(s)}$$

令 $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_o(s)$ 静态位置误差系数

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$$

$$G_o(s) = \frac{K \prod_{j=1}^{m_1} (\tau_j s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\xi_k \tau_k s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n_1} (T_i s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\xi_l \tau_l s + 1)} = \frac{K}{s^v} G_n(s)$$

0 型系统： $K_p = K$ $e_{ss} = A/(1 + K)$ 有差系统

I 型及 I 型以上系统： $K_p = \infty$ $e_{ss} = 0$ (与开环增益 K 成反比)

(2) 单位斜坡 $r(t) = Bt$ 输入作用下稳态误差

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_o(s)} \frac{B}{s^2} = \frac{B}{\lim_{s \rightarrow 0} s G_o(s)}$$

$$G_o(s) = \frac{K \prod_{j=1}^{m_1} (\tau_j s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\xi_k \tau_k s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n_1} (T_i s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\xi_l \tau_l s + 1)} = \frac{K}{s^v} G_n(s)$$

令 $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{v-1}}$ 静态速度误差系数

$e_{ss} = \frac{B}{K_v}$ 0 型系统： $K_v = 0$ $e_{ss} = \infty$, 0 型系统无法跟踪斜坡输入
I 型系统： $K_v = K$ $e_{ss} = B/K$, 有差跟踪

II 型及 II 型以上系统： $K_v = \infty$ $e_{ss} = 0$, 无差跟踪

(3) 加速度 $r(t) = Ct^2/2$ 输入作用下稳态误差

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_o(s)} \cdot \frac{C}{s^3} = \frac{C}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_o(s)}$$

$$G_o(s) = \frac{K}{s^v} \frac{\prod_{j=1}^{m_1} (\tau_j s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{i=1}^{n_1} (T_i s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l \tau_l s + 1)} = \frac{K}{s^v} G_n(s)$$

$$\text{令 } K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{v-2}} \quad \text{静态加速度误差系数}$$

$$e_{ss} = \frac{C}{K_a}$$

0 型系统: $K_a = 0$ $e_{ss} = \infty$

I 型系统: $K_a = 0$ $e_{ss} = \infty$

II 型系统: $K_a = K$ $e_{ss} = C/K$

III 型及 III 型以上系统: $K_a = \infty$ $e_{ss} = 0$

阶跃、斜坡、加速度输入作用下稳态误差

系统 类型	静态误差系数			$r(t)=A \cdot 1(t)$	$r(t)=Bt$	$r(t)=Ct^2/2$
v	K_p	K_v	K_a	$e_{ss}=A/(1+K_p)$	$e_{ss}=B/K_v$	$e_{ss}=C/K_a$
0	K	0	0	$A/(1+K)$	∞	∞
1	∞	K	0	0	B/K	∞
2	∞	∞	K	0	0	C/K

Conclusion

(1) 系统稳态误差 **只**由稳态的三要素决定:

输入信号 $R(s)$; 系统的结构参数 v ; 开环增益 K

i.e., **同型别+同增益+同输入** \rightarrow 稳定系统的稳差相同

(2) 有界稳态误差情况: 开环增益 K 越大, 稳差越小

(3) 信号跟踪能力: 系统型别越高 v , 能够跟踪信号的阶次就越高

稳态误差、动态响应与稳定性

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}} \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT}}$$

➤ 系统稳态响应性能(稳态误差)与动态响应性能关系

• 典型二阶系统, 开环增益 K 越大, 阻尼越小, 易振荡

\leftrightarrow **增益 K 越大, 稳态误差越小**

➤ 系统稳态响应性能(稳态误差)与稳定性关系

• 开环增益 K 越大, 稳差越小

\leftrightarrow **开环稳定系统, 增益 K 越大, 稳定性(裕度)就越差**

• 系统型别 v 越高, 能够跟踪的信号的阶次就越高, 稳态响应更好

\leftrightarrow **开环系统积分环节越多, 稳定性就越差**

➤ 分析与设计基本要求: 兼顾系统稳定性(裕度)、稳态误差、动态性能

控制系统的动态误差

稳态误差不是有界极限值时，稳态误差随时间变化情况($t \rightarrow \infty$)

➤ 动态误差系数求法之一：

$$\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_K(s)} = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1}s + \frac{1}{k_2}s^2 + \dots$$

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{1+G_K} \Big|_{s=0} \quad \frac{1}{k_1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{1+G_K} \right] \Big|_{s=0}$$

$$E(s) = \Phi_E(s)R(s) = \frac{1}{k_0}R(s) + \frac{1}{k_1}sR(s) + \frac{1}{k_2}s^2R(s) + \dots$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{k_0}r(t) + \frac{1}{k_1}\dot{r}(t) + \frac{1}{k_2}\ddot{r}(t) + \dots \quad k_0, k_1, k_2 - \text{动态位置、速度、加速度误差系数}$$

控制系统的动态误差

➤ 动态误差系数求法之二：

$$\Phi_E(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n}$$

$$\Phi_E(s) = C_0 + C_1s + C_2s^2 + \dots$$

$$E(s) = \Phi_E(s)R(s) = C_0R(s) + C_1sR(s) + C_2s^2R(s) + \dots \quad k_i = \frac{1}{C_i}$$

$$E(s) = \Phi_E(s)R(s) = \frac{1}{k_0}R(s) + \frac{1}{k_1}sR(s) + \frac{1}{k_2}s^2R(s) + \dots$$

➤ 特定系统动态误差与静态误差系数之间关系

0 型系统： $r(t) = 1(t) \quad k_0 = 1 + K_p$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{k_0}R(s) + \frac{1}{k_1}sR(s) + \dots \right] \Big|_{R(s)=\frac{1}{s}} = \frac{1}{k_0} = \frac{1}{1+K_p}$$

控制系统的动态误差

➤ 特定系统动态误差与静态误差系数之间关系

I 型系统： $r(t) = t \quad k_0 = 1 + K_p$

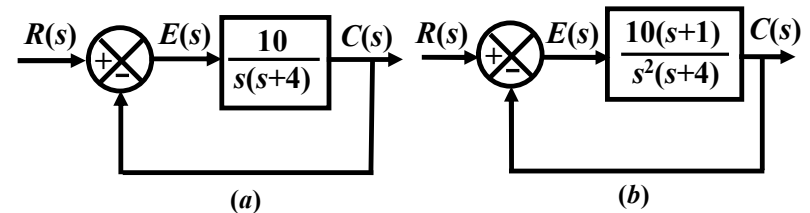
$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{k_1}sR(s) + \frac{1}{k_2}s^2R(s) + \dots \right] \Big|_{R(s)=\frac{1}{s^2}} = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{K_v}$$

$$k_1 = K_v \quad k_0 = \infty$$

II 型系统： $r(t) = 0.5t^2 \quad \frac{1}{k_0} = \frac{1}{1+G_K(s)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{1+\frac{K}{s}} \Big|_{s=0} = 0$

$$k_2 = K_a \quad k_1 = \infty \quad k_0 = \infty$$

例5-9 当参考输入 $r(t) = 4+6t+3t^2$ ，分别求两个系统稳态误差



解：图(a)，I型系统

$$K_p = \infty, \quad K_v = 10/4, \quad K_a = 0$$

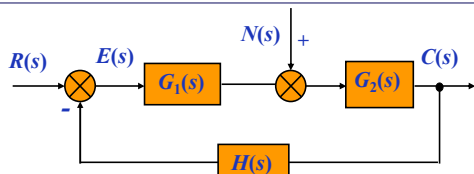
$$e_{ss1} = \frac{4}{1+K_p} + \frac{6}{K_v} + \frac{6}{K_a} = \infty$$

图(b)，II型系统

$$K_p = \infty, \quad K_v = \infty, \quad K_a = 10/4$$

$$e_{ss2} = \frac{4}{1+\infty} + \frac{6}{\infty} + \frac{6}{10/4} = 2.4$$

5. 扰动作用下的稳态误差



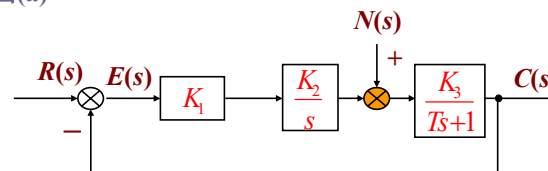
- ▶ 扰动信号无处不在(加工过程的负载转矩变换)
- ▶ 为提高系统抗干扰能力—要求分析扰动信号引起的稳态误差，并且设法减小或消除扰动引起的稳差

$$C_n(s) = \Phi_n(s) * N(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

$$E_n(s) = -\frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s) = \Phi_{en}(s)N(s)$$

图(a)和图(b)中扰动量作用点不同，分别讨论系统稳态误差的影响

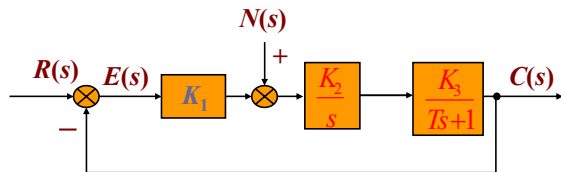
1) 图(a)



令 $R(s)=0$, $N(s)$ 为单位阶跃响应时，稳态误差为：

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \left[-\frac{K_3 s}{s(Ts+1) + K_1 K_2 K_3} \right] = 0$$

2) 图(b)



令 $R(s)=0$, $N(s)$ 为单位阶跃响应时，稳态误差：

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \left[-\frac{K_2 K_3}{s(Ts+1) + K_1 K_2 K_3} \right] = -\frac{1}{K_1}$$

扰动输入时稳态误差特点：

- (1) 若扰动作用点之前有一个积分环节，如图(a)，则阶跃扰动时的稳态误差为零；
- (2) 若扰动作用点之前无积分环节，如图(b)，则阶跃扰动时的稳态误差不为零，其值与扰动作用点前的 K_1 有关。 K_1 越大，则稳态误差越小，但相对稳定性将降低；
- (3) 系统给定输入和扰动输入同时存在，可用叠加原理将其分别引起的稳差叠加；
- (4) 实际随动系统稳差可取输入和干扰两者引起稳差的绝对值之和

综合输入量和扰动量引起的系统稳态误差分析：

- (1) 对同一系统，由于作用量和作用点不同，其给定稳态误差和扰动稳态误差是不同的。对恒值自动控制系统来讲，后者是主要的；而对随动自动控制系统来讲，前者是主要的；
- (2) 给定稳态误差 e_{ssr} 与前向通道的积分环节数目 ν 和开环增益 K 有关。若 ν 愈大(但 ν 一般不大于2)， K 愈大，则给定稳态误差 e_{ssr} 愈小。对给定信号而言，系统为 ν 型；
- (3) 扰动稳态误差 e_{ssn} 与扰动作用点前的前向通道积分环节数目 ν_1 和增益 K_1 有关。若 ν_1 愈大(但 ν_1 一般不大于2)， K_1 愈大，则扰动稳态误差 e_{ssn} 愈小。对扰动信号而言，系统为 ν_1 型；
- (4) 扰动稳态误差、稳态误差系数可参照给定稳态误差的结论，用 ν_1 、 K_1 分别取代 ν 和 K

6. 减小稳态误差的措施

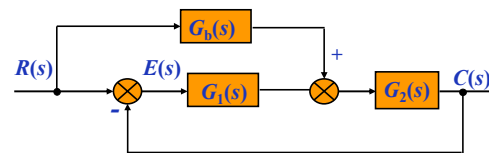
- (1) 为减小系统给定稳态误差，可以增加前向通道积分环节的个数或增大开环增益；
- (2) 为减小系统扰动误差，应增加 $R(s)$ 至扰动作用点之间的积分环节个数，或加大扰动作用点之前的开环增益。

但一般系统的积分环节不能超过两个，放大倍数也不能随意增大，否则将使系统暂态性能变坏，甚至造成系统不稳定。因此稳态精度与暂态性能、稳定性始终存在矛盾。

在保证系统稳定的前提下，为提高稳态精度，可采用措施：

- (1) 在增大开环增益时，附加校正装置，以确保稳定；
- (2) 增加系统前向通道积分环节个数的同时，对系统进行校正，保证系统稳定，并具有一定的瞬态响应速度；
- (3) 采用复合控制。在按输出反馈控制的基础上，再增加按给定作用或主要扰动而进行的补偿控制，构成复合控制系统

(a) 按给定输入补偿的复合控制



$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{[G_1(s) + G_b(s)]G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

给定误差为

$$E(s) = R(s) - C(s) = [1 - \Phi(s)]R(s) = \frac{1 - G_2(s)G_b(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}R(s)$$

$$\text{则 } G_b(s) = \frac{1}{G_2(s)}$$

$$\text{补偿后 } E(s)=0$$

全补偿条件

由于输出量完全复现了输入信号，因而系统具有理想的跟随性能。此时，输入控制信号沿开环传递，闭环控制的作用仅仅是用来消除扰动引起的误差。

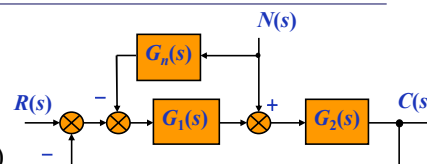
(b) 按扰动补偿的复合控制

只有扰动作用时系统的输出

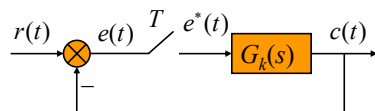
$$C(s) = \frac{[1 - G_1(s)G_n(s)]G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} N(s)$$

$$\text{当满足 } G_n(s) = \frac{1}{G_1(s)} \Rightarrow C(s) = 0$$

- 1) 系统的输出完全不受扰动的影响，实现全补偿；
- 2) 这种补偿方法的前提是该扰动量是系统主要的扰动量，且该扰动量是可测的。它通过已设计好的补偿装置 $G_n(s)$ 经过补偿通道来控制并抵消扰动对系统输出的影响。



7. 离散系统稳态误差



$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \Phi_E(z) R(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1 + G_k(z)} R(z) \end{aligned}$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G_k(z)$$

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) G_k(z)$$

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G_k(z)$$

7. 离散系统稳态误差

系统 类型	静态误差系数			$r(t)=A \cdot 1(t)$	$r(t)=Bt$	$r(t)=Ct^2/2$
v	K_p	K_v	K_a	$e_{ss}=A/(1+K_p)$	$e_{ss}=B/K_v$	$e_{ss}=C/K_a$
0	K	0	0	$A/(1+K)$	∞	∞
1	∞	K	0	0	B/K	∞
2	∞	∞	K	0	0	C/K