



离散数学

2025年9月

数理逻辑部分

- 第1章 命题逻辑
- 第2章 一阶逻辑

第1章 命题逻辑

1.1 命题符号化及联结词

1.2 命题公式及分类

1.3 等值演算

1.4 范式

1.5 联结词全功能集

1.6 组合电路

1.7 推理理论

1.1 命题符号化及联结词

- 命题与真值
- 原子命题
- 复合命题
- 命题常项
- 命题变项
- 联结词

命题与真值

命题: 判断结果惟一的陈述句

命题的真值: 判断的结果, 任何命题真值是惟一的

真值的取值: 真与假

真值为“真” True T 1(真) 真命题

真值为“假” False F 0(假) 假命题

注意: 感叹句、祈使句、疑问句都不是命题

陈述句中的悖论以及判断结果不惟一确定的也不是命题

例 下列句子中哪些是命题？

(1) $\sqrt{2}$ 是无理数.

真命题

(2) $2 + 5 = 8.$

假命题

(3) $x + 5 > 3.$

真值不确定

(4) 你有铅笔吗？

疑问句

(5) 这只兔子跑得真快呀！

感叹句

(6) 请不要讲话！

祈使句

(7) 我正在说谎话.

悖论

(3)~(7)都不是命题

命题常量与命题变元

表示命题的小写英文字母或带下标的小写英文字母常称为命题标识符。

如果命题标识符表示一个具体、确定的命题，称为命题常元。

如果命题标识符表示任意一个命题，称为命题变元。

? 命题变元是命题吗?

命题变元代表任意的命题，其真值是不确定的。因而不是命题。

命题的分类

简单命题(原子命题)：

如果一个命题不能再分解成更简单的命题，就是简单命题。用小写英文字母 $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i$ ($i \geq 1$) 表示。

复合命题：

由简单命题与联结词按一定规则复合而成的命题。

换句话说：如果一个命题不是原子命题，那么它就是复合命题。

联结词

1. 否定式与否定联结词 “ \neg ”

定义 设 p 为命题，复合命题“非 p ”(或“ p 的否定”)称为 p 的**否定式**，记作 $\neg p$. 符号 \neg 称作**否定联结词**，并规定 $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假.

例：否定下列命题。

p : 中国的每一个城市都是沿海城市。

$\neg p$: ??

- (1) 中国的每一个城市**都不是**沿海城市。
- (2) 中国的每一个城市**不都是**沿海城市。

p	$\neg p$
0	1
1	0

2. 合取式与合取联结词“ \wedge ”

定义 设 p, q 为二命题, 复合命题“ p 并且 q ”(或“ p 与 q ”)称 为 p 与 q 的**合取式**, 记作 $p \wedge q$. \wedge 称作**合取联结词**,

并规定 $p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

【例1.3】

- (1) 李平既用功又聪明.
- (2) 李平不仅聪明，而且用功.
- (3) 李平虽然聪明，但不用功.
- (4) 张辉与王丽都是三好生.
- (5) 张辉与王丽是同学.

解 令 p : 王晓用功, q : 王晓聪明, 则

- (1) $p \wedge q$ (2) $p \wedge q$ (3) $q \wedge \neg p$.

令 r : 张辉是三好学生, s : 王丽是三好学生

- (4) $r \wedge s$.
- (5) 令 t : 张辉与王丽是同学, t 是简单命题 .

联结词 (续)

3. 析取式与析取联结词 “ \vee ”

定义 设 p, q 为二命题，复合命题“ p 或 q ”称作 p 与 q 的**析取式**，记作 $p \vee q$. \vee 称作**析取联结词**，并规定 $p \vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

“ \vee ”与汉语中的“或”相似，但又不相同。

例 将下列命题符号化

- (1) 王燕学过英语或法语。
- (2) 王晓红生于1975年或1976年.

解 令 p :王燕学过英语, q :王燕学过法语

(1)为相容或(可兼或), 符号化为 $p \vee q$

(2)为排斥或(不可兼或), 不能直接用
“ \vee ”

令 v :王晓红生于1975年, w :王晓红生于1976年, 则 (2) 可符号化为 $(v \wedge \neg w) \vee (\neg v \wedge w)$,

联结词（续）

4. 蕴涵式与蕴涵联结词“ \rightarrow ”

定义 设 p, q 为二命题，复合命题 “如果 p , 则 q ” 称作 p 与 q 的**蕴涵式**，记作 $p \rightarrow q$ ，并称 p 是蕴涵式的**前件**， q 为蕴涵式的**后件**. \rightarrow 称作**蕴涵联结词**，并规定， $p \rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假.

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

联结词（续）

$p \rightarrow q$ 的逻辑关系： p 为 q 的充分条件；也可以
说 q 为 p 的必要条件

“如果 p , 则 q ”的不同表述法很多：

- (1) 若 p , 就 q
- (2) 只要 p , 就 q
- (3) p 仅当 q
- (4) 只有 q 才 p
- (5) 除非 q , 才 p
- (6) 除非 q , 否则非 p .

例 设 p : 天冷, q : 小王穿羽绒服,

将下列命题符号化

- (1) 只要天冷, 小王就穿羽绒服. $p \rightarrow q$
- (2) 因为天冷, 所以小王穿羽绒服. $p \rightarrow q$
- (3) 若小王不穿羽绒服, 则天不冷. $p \rightarrow q$
- (4) 只有天冷, 小王才穿羽绒服. $q \rightarrow p$
- (5) 除非天冷, 小王才穿羽绒服. $q \rightarrow p$
- (6) 除非小王穿羽绒服, 否则天不冷. $p \rightarrow q$
- (7) 如果天不冷, 则小王不穿羽绒服. $q \rightarrow p$
- (8) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候. $q \rightarrow p$

注意: $p \rightarrow q$ 与 $\neg q \rightarrow \neg p$ 等值 (真值相同)

联结词 (续)

5. 等价式与等价联结词 “ \leftrightarrow ”

定义 设 p, q 为二命题，复合命题“ p 当且仅当 q ”称作 p 与 q 的**等价式**，记作 $p \leftrightarrow q$. \leftrightarrow 称作**等价联结词**. 并规定 $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真或同时为假.

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例1.5 求下列复合命题的真值

- | | |
|--|---|
| (1) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 $3 + 3 = 6.$ | 1 |
| (2) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 3 是偶数. | 0 |
| (3) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 太阳从东方升起. | 1 |
| (4) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 美国位于非洲. | 0 |
| (5) 函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的充要条件是它在 x_0 连续. | 0 |

复合命题符号化：

第一步：找出各简单命题，并将它们符号化

第二步：用合适的联结词，把简单命题逐个联结起来

例 1. 小王是游泳冠军或百米赛跑冠军

2. 小王现在在宿舍或在图书馆里

3. 选小王或小李中的一人当班长

4. 如果我上街，我就去书店看看，除非我很累

$$\neg r \rightarrow (p \rightarrow q) \text{ 或 } (\neg r \wedge p) \rightarrow q$$

5. 小王是计算机系学生，他生于1985年或1986年，他是三好学生。

在对复合命题进行符号化的时候应注意：

- (1) 具有否定意义的命题一定不是原子命题
- (2) 对于不可兼或的表示，可用 $\neg(p \leftrightarrow q)$
- (3) 联结词的优先顺序为： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ；如果出现的联结词同级，又无括号时，则按从左到右的顺序运算；若遇有括号时，应该先进行括号中的运算。

本节学习目标：

- (1) 理解并掌握命题的概念，学会判断一个语句是否为命题并确定其真值。
- (2) 牢固掌握五类联结词的定义。
- (3) 会熟练将复合命题符号化。

1.2 命题公式及分类

- 命题变项与合式公式
- 公式的赋值
- 真值表
- 命题的分类

重言式

矛盾式

可满足式

- 真值函数

命题公式

定义1.6 合式公式 (命题公式, 公式) 递归定义如下:

- (1) 单个命题常项或变项 $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i, \dots, 0, 1$ 是合式公式 (基础)
- (2) 若 A 是合式公式, 则 $(\neg A)$ 也是合式公式 (归纳)
- (3) 若 A, B 是合式公式, 则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式 (归纳)
- (4) 只有有限次地应用(1)~(3)形成的符号串才是合式公式 (界限)

递归: (自相关&层次缠绕? 埃舍尔的版画、卡农?)

合式公式的层次

定义

- (1) 若公式 A 是单个的命题变项, 则称 A 为0层公式.
- (2) 称 A 是 $n+1(n\geq 0)$ 层公式是指下面情况之一:
 - (a) $A=\neg B$, B 是 n 层公式;
 - (b) $A=B\wedge C$, 其中 B,C 分别为 i 层和 j 层公式, 且
 $n=\max(i,j)$;
 - (c) $A=B\vee C$, 其中 B,C 的层次及 n 同(b);
 - (d) $A=B\rightarrow C$, 其中 B,C 的层次及 n 同(b);
 - (e) $A=B\leftrightarrow C$, 其中 B,C 的层次及 n 同(b).

合式公式的层次 (续)

例如 公式

p	0层
$\neg p$	1层
$\neg p \rightarrow q$	2层
$\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$	3层
$((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$	4层

公式的赋值

定义1.8 设 p_1, p_2, \dots, p_n 是出现在公式 A 中的全部命题变元，给 p_1, p_2, \dots, p_n 各指定一个真值，称为对公式 A 的一个赋值或解释。

若赋值使 A 的真值为T（F），则称这个赋值为 A 的成真赋值（成假赋值）。

含 n 个变项的公式有多少个赋值？

$$2^n$$

在命题公式 A 中，对 A 的每一个赋值，就确定了 A 的一个真值，把它们汇列成表，称该表为命题公式 A 的**真值表**。

构造真值表的几点注意：

- [1]先找出公式中所含的所有命题变元
- [2]第1行：命题变元；排列：由小到大；字典顺序
- [3]前n列：赋值；排列：从00...0到11...1递增

真值表

真值表: 公式 A 在所有赋值下的取值情况列成的表

例 给出公式的真值表

$A = (q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$ 的真值表

p	q	$q \rightarrow p$	$(q \rightarrow p) \wedge q$	$(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

实例

例 $B = \neg(\neg p \vee q) \wedge q$ 的真值表

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$\neg(\neg p \vee q) \wedge q$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0

例 $C = (p \vee q) \rightarrow \neg r$ 的真值表

p	q	r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \rightarrow \neg r$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

公式的类型

定义 设 A 为一个命题公式

- (1) 若 A 无成假赋值, 则称 A 为**重言式**(也称**永真式**)
- (2) 若 A 无成真赋值, 则称 A 为**矛盾式**(也称**永假式**)
- (3) 若 A 不是矛盾式, 则称 A 为**可满足式**

Remark:

- (1) 任何重言式都是可满足的。
- (2) 重言式的真值表的最后一列全为1,
矛盾式的真值表的最后一列全为0,
可满足的公式真值表的最后一列至少有一个1。

真值函数

问题：含 n 个命题变项的所有公式共产生多少个互不相同的真值表？

$$2^{2^n}$$

p	q	r	公式
0	0	0	1或0
0	0	1	1或0
0	1	0	1或0
0	1	1	1或0
1	0	0	1或0
1	0	1	1或0
1	1	0	1或0
1	1	1	1或0

真值函数

定义 称定义域为 $\{00\dots0, 00\dots1, \dots, 11\dots1\}$, 值域为 $\{0,1\}$ 的函数是 **n 元真值函数**, 定义域中的元素是长为 n 的0,1串. 常用 $F:\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ 表示 F 是 n 元真值函数.

共有 2^{2^n} 个 n 元真值函数.

例如 $F:\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$, 且 $F(00)=F(01)=F(11)=0$,
 $F(10)=1$, 则 F 为一个确定的2元真值函数.

命题公式与真值函数

对于任何一个含 n 个命题变项的命题公式 A , 都存在惟一的一个 n 元真值函数 F 为 A 的真值表.

等值的公式对应的真值函数相同.

下表给出所有2元真值函数对应的真值表, 每一个含2个命题变项的公式的真值表都可以在下表中找到.

例如: $p \rightarrow q$, $\neg p \vee q$, $(\neg p \vee q) \vee (\neg(p \rightarrow q) \wedge q)$ 等都对应表中的 $F_{13}^{(2)}$

2元真值函数对应的真值表

p	q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
p	q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

本小节学习目标：

- (1) 理解合式公式的定义。
- (2) 能熟练给出任一合式公式的真值表。
- (3) 理解真值函数的定义。