自动控制原理

第5章 控制系统的时域运动分析

东南大学 自动化学院
陈杨杨
yychen@seu.edu.cn

问题：战斗机如何避开敌方导弹的攻击

问题：如何判断控制系统性能的优劣

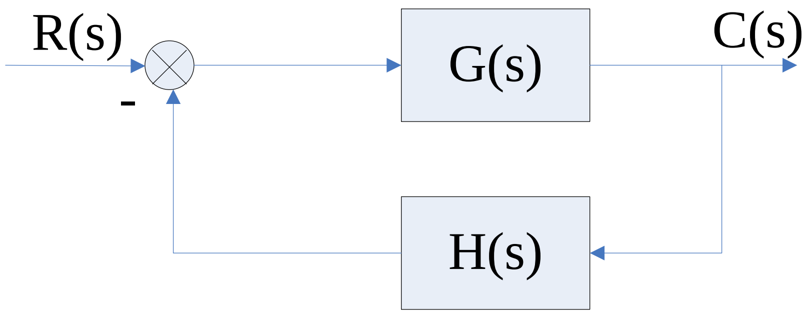
时域响应 → 瞬态响应；时域响应 → 稳态响应

瞬态指标 → 动态品质

稳态误差 → 系统精度

5.1 控制系统的时域响应

5.1.1 由传递函数求解连续时间系统的输出响应(零状态响应)



传递函数：

$$W(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \qquad (n\geq m)$$

$$=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \qquad \text{(Irreducible)}$$

输出响应的拉氏变换：

$$C(s)=W(s)R(s)=\frac{Q(s)}{\prod_{i=1}^{p}(s+\lambda_i)^{n_i}} \qquad (R(s)\text{ is rational function})$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\left[\frac{k_{i1}}{s+\lambda_i}+\frac{k_{i2}}{(s+\lambda_i)^2}\cdots+\frac{k_{in_i}}{(s+\lambda_i)^{n_i}}\right]$$

λ_i： 互异极点

n_i： 极点重数

$$k_{in_i}=W(s)R(s)(s+\lambda_i)^{n_i}\Big|_{s=-\lambda_i}$$

$$k_{i(n_i-1)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[W(s)R(s)(s+\lambda_i)^{n_i}\right]\Big|_{s=-\lambda_i}$$

$$\vdots$$

$$k_{i1}=\frac{1}{(n_i-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n_i-1}}{\mathrm{d}s^{n_i-1}}\left[W(s)R(s)(s+\lambda_i)^{n_i}\right]\Big|_{s=-\lambda_i}$$

复数共轭极点相对应的系数也互为共轭复数

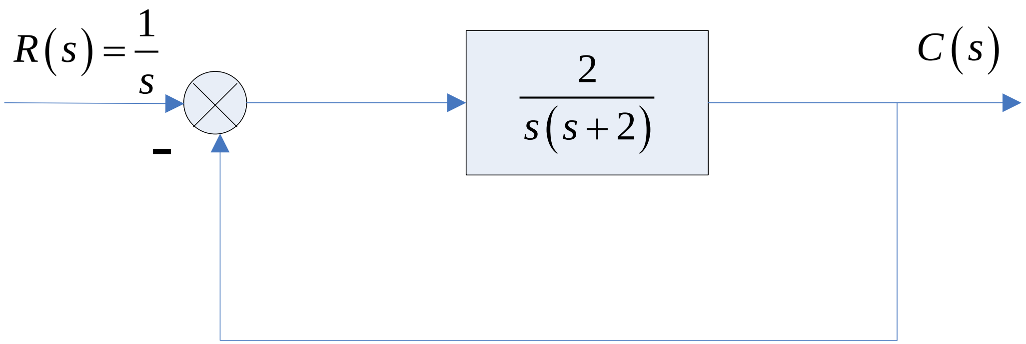
输出响应：

$$c(t)=\sum_{i=1}^{p}\left[k_{i1}e^{-\lambda_i t}+k_{i2}te^{-\lambda_i t}+\cdots+\frac{k_{in_i}}{(n_i-1)!}t^{(n_i-1)}e^{-\lambda_i t}\right]$$

△ 各项的性质由极点决定

△ 对应系数的大小与零点有关

E.g. 5.1 输入为单位阶跃函数时的输出响应



传递函数：

$$W(s)=\frac{\frac{2}{s(s+2)}}{1+\frac{2}{s(s+2)}}=\frac{2}{s^2+2s+2}$$

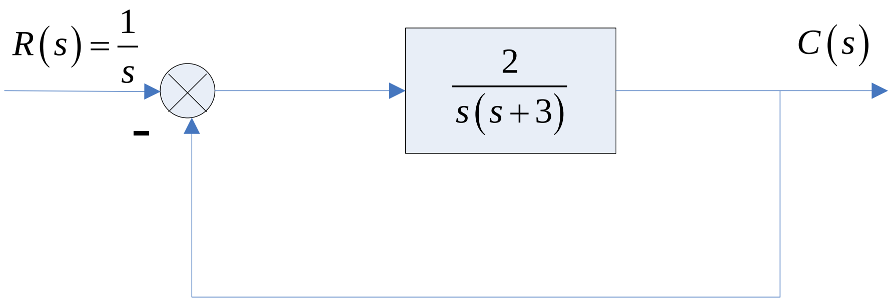
输出响应的拉氏变换：

$$C(s)=W(s)R(s)=\frac{2}{s\left(s^2+2s+2\right)}=\frac{1}{s}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

输出响应：

$$c(t)=1-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t=1-\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

Ex.5.1 输入为单位阶跃函数时的输出响应



传递函数：

$$W(s)=\frac{\frac{2}{s(s+3)}}{1+\frac{2}{s(s+3)}}=\frac{2}{s^2+3s+2}$$

输出响应的拉氏变换：

$$C(s)=W(s)R(s)=\frac{2}{s\left(s^2+3s+2\right)}=\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

输出响应：

$$c(t)=1-2e^{-t}+e^{-2t}$$

5.1.1 由Z变换法求解离散时间系统的输出响应

E.g.5.3 求解

$$y\left[(k+2)T\right]+3y\left[(k+1)T\right]+2y(kT)=\underline{1(kT)}$$

$t=0,\quad 1(0)=1(0^{+})=1$

初值为$y(0)=0, y(T)=1$

Z变换 $y\left[z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(T)\right]+3\left[zY(z)-zy(0)\right]+2Y(z)=\dfrac{z}{z-1}$

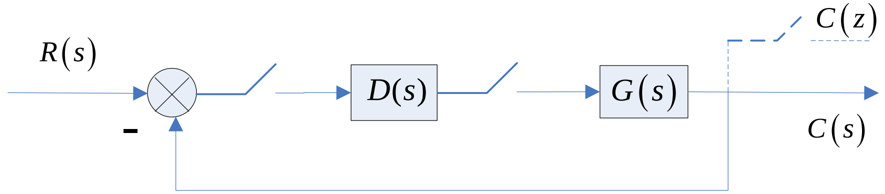
$$\downarrow$$

$$Y(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z+1)(z+2)}=z\left(\frac{\frac{1}{6}}{z-1}+\frac{\frac{1}{2}}{z+1}-\frac{\frac{2}{3}}{z+2}\right)=\frac{1}{6}\frac{z}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{z}{z+1}-\frac{2}{3}\frac{z}{z+2}$$

$$\downarrow$$

Z反变换 $y(kT)=\dfrac{1}{6}(1)^k+\dfrac{1}{2}(-1)^k-\dfrac{2}{3}(-2)^k, k=0,1,2,\ldots$

E.g.5.4 由传递函数求解采样系统的输出响应



输出的Z变换 $$C(z)=\frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}R(z)$$

$$R(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$G(z)=\frac{z}{z-e^{-4T}}\bigg|_{T=0.5}=\frac{z}{z-e^{-2}}$$

$$C(z)=\frac{z^3}{2(z-1)(z-0.3973)(z-0.1704)}=\frac{z}{z-1}-\frac{0.577z}{z-0.3973}-\frac{0.077z}{z-0.1704}$$

$$=\frac{z}{z-1}-\frac{0.577z}{z-e^{-0.923}}-\frac{0.077z}{z-e^{-1.77}}$$

Z反变换 $$c(kT)=1-0.577e^{-0.923k}+0.077e^{-1.77k},k=0,1,2,\ldots$$

5.2 控制系统瞬态性能分析

5.2.1 瞬态性能指标的定义

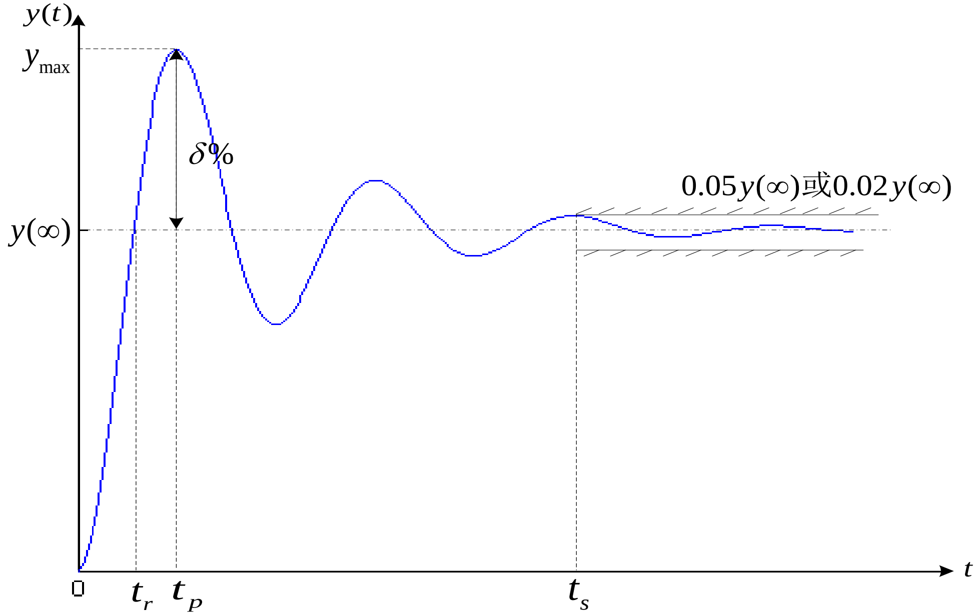
△ 瞬态性能：过渡过程中响应的瞬态行为；

单位阶跃信号 → 线性定常连续时间系统(0初始条件) → 输出响应的瞬态性能指标

稳定的线性定常连续时间系统的单位阶跃响应 → 衰减振荡(二阶欠阻尼)

稳定的线性定常连续时间系统的单位阶跃响应 → 单调变化(一阶、二阶过阻尼)

衰减振荡类型系统的性能指标



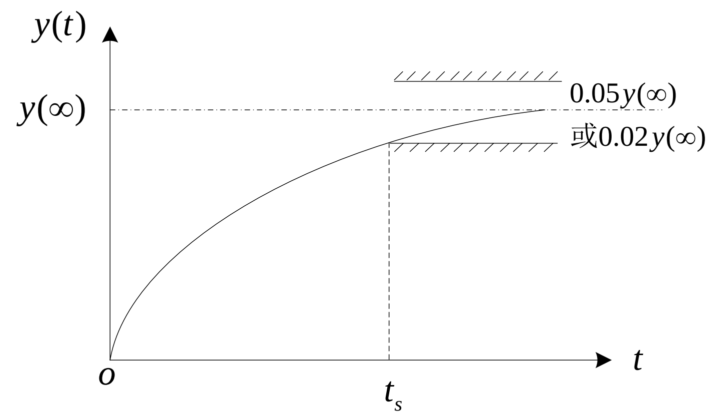
快速性指标

- ○ 上升时间 t_r：输出响应第一次达到稳态值的时间
- ○ 峰值时间 t_p：输出响应超过稳态值达到第一峰值(y_{max})的时间
- ○ 调节时间 t_s：当 $t \ge t_s$，$|y(t)-y(\infty)| \le |y(\infty)| \times \Delta\%$，$\Delta = 5 or 2$

平稳性指标

- ○ 超调量 $\delta\%$：$$\delta\% = \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$
- ○ 振荡次数 N：调节时间内，$y(t)$ 偏离 $y(\infty)$ 的振荡次数

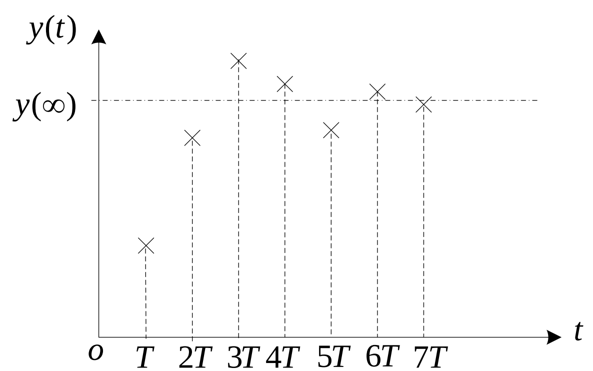
单调变化类型系统的性能指标



快速性指标

- ○ 上升时间 t_r：稳态值的10%上升至90%的时间
- ○ 调节时间t_s：当 $t \geq t_s$，$|y(t)-y(\infty)| \leq |y(\infty)| \times \Delta\%$，$\Delta = 5or2$

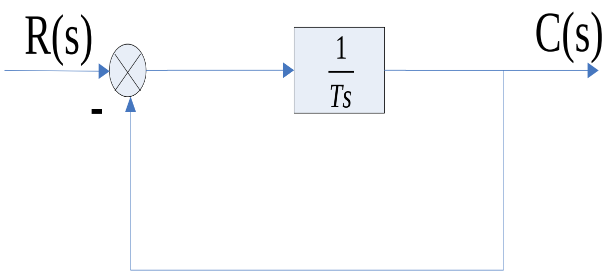
离散时间系统的性能指标

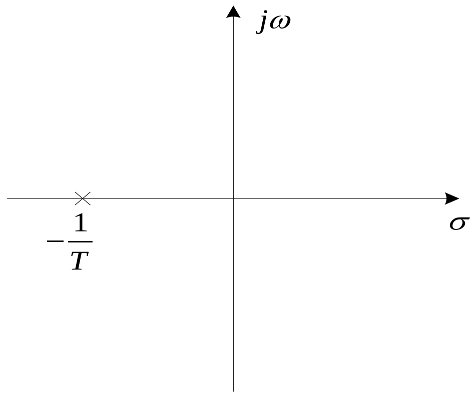


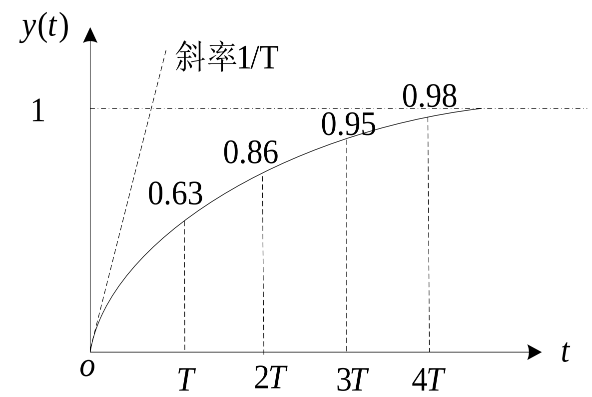
○ 调节时间 $t_s = NT$ ：当$k \geq N$，$|y(kT)-y(\infty)| \leq |y(\infty)| \times \Delta\%$

5.2.2 一阶系统瞬态性能分析

以一阶惯性系统(RC电路、加热过程)为例考察一个实根的阶跃响应特点







$$W(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ts+1}$$ 系统时间常数

$$C(s)=\frac{1}{Ts+1}R(s)=\frac{1}{s(Ts+1)}=\frac{1}{s}-\frac{T}{Ts+1}$$

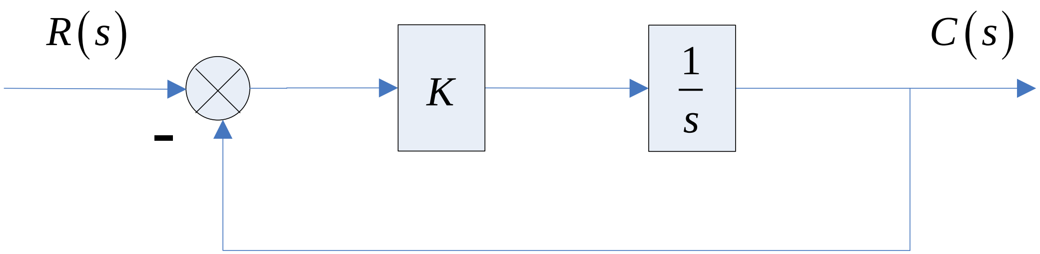
$$c(t)=1-e^{-\frac{t}{T}}$$

单调上升曲线
最大变化率1/T

○ 快速性(调节时间)：$t_s=\begin{cases}4T, & \Delta=2\\ 3T, & \Delta=5\end{cases}$

○ 平稳性(超调量)： $\delta\%=0$

E.g. 5.5 一阶系统如图5.9，前置放大器的增益$K=1$，计算系统的单位阶跃响应的调节时间 t_s。如果要实现$t_s \le 1s(\Delta=2)$，确定$K=?$



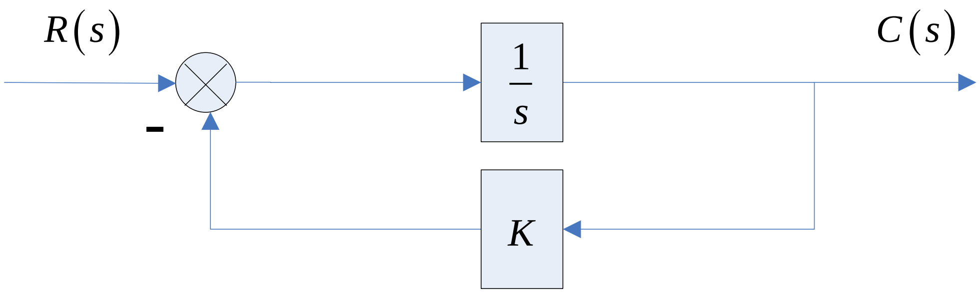
闭环传递函数：$W(s)=\dfrac{K/s}{1+K/s}=\dfrac{1}{s/K+1}$

系统时间常数：$T=1/K$

调节时间：$t_s=\begin{cases} 3T=3/K\big|_{K=1}=3s, & \Delta=5 \\ 4T=4/K\big|_{K=1}=4s, & \Delta=2 \end{cases}$

If $t_s \le 1s(\Delta=2)$，则 $t_s=4/K\le 1 \Rightarrow K\ge 4$

E.x. 5.2 一阶系统如下图，反馈放大器的增益$K=2$，计算系统的单位阶跃响应的调节时间 t_s。要想减少调节时间，K 如何调节？



闭环传递函数： $W(s)=\dfrac{1/s}{1+K/s}=\dfrac{1/K}{s/K+1}$

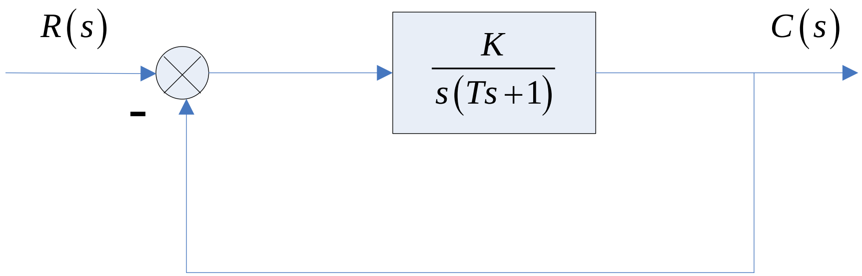
系统时间常数： $T=1/K$

输出响应： $C(s)=\dfrac{1}{s(s+K)}=\dfrac{1}{K}(\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+K})\Rightarrow c(t)=\dfrac{1}{K}(1-e^{-Kt})$

调节时间： $t_s=-\ln\Delta\%/K$ $K\uparrow, t_s\downarrow$

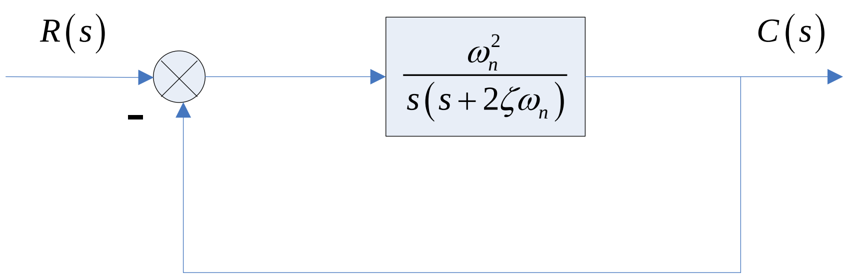
5.2.2 典型二阶系统瞬态性能分析

典型二阶系统的传递函数(二阶随动系统、RLC串联电路p19、机电系统p20)



传递函数：$W(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K/T}{s^2+\frac{1}{T}s+\frac{K}{T}}$

运动方程：$T\frac{d^2c(t)}{dt^2}+\frac{dc(t)}{dt}+Kc(t)=Kr(t)$



标准形式:$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

$\zeta=\frac{1}{2\sqrt{KT}}$:阻尼比

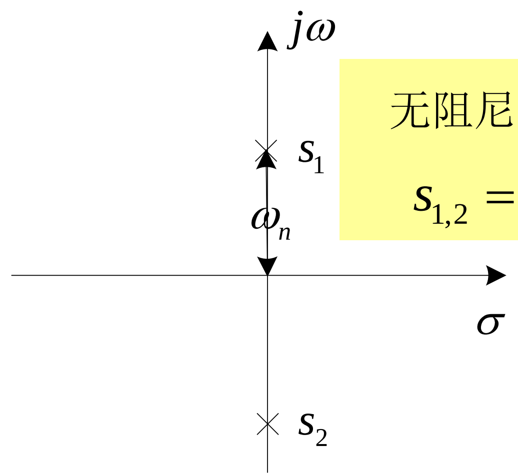
$\omega_n=\sqrt{\frac{K}{T}}$:无阻尼振动频率(自然频率)

典型二阶系统的特征方程

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

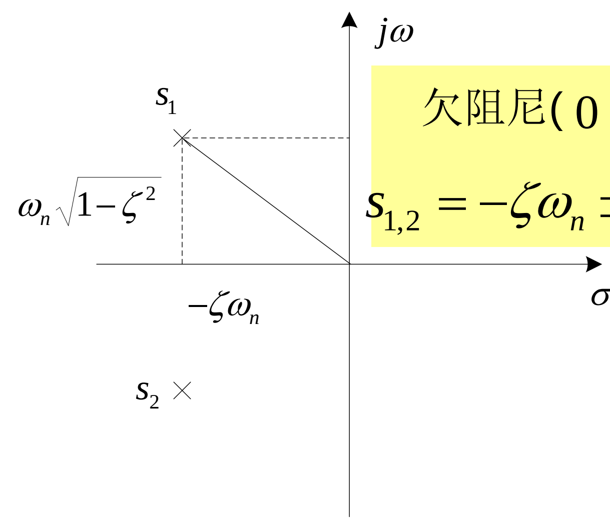
典型二阶系统的特征根(闭环极点)

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$



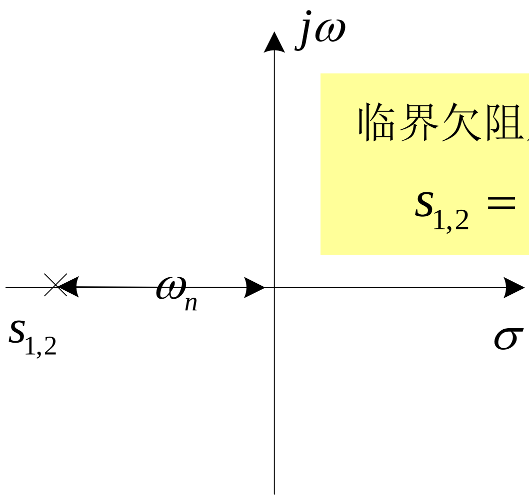
无阻尼($\zeta = 0$)

$$s_{1,2} = \pm \mathrm{j}\omega_n$$



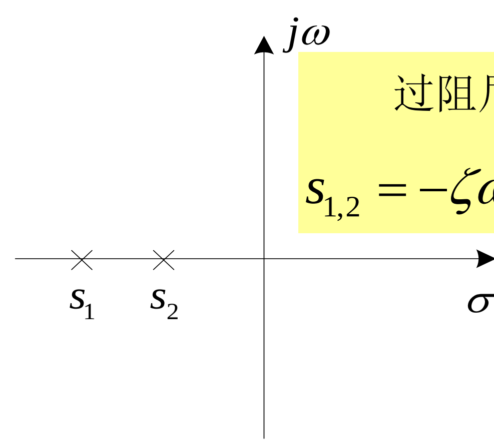
欠阻尼($0 < \zeta < 1$)

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \mathrm{j}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$



临界欠阻尼($\zeta = 1$)

$$s_{1,2} = -\omega_n$$



过阻尼($\zeta > 1$)

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

典型二阶系统单位阶跃响应(零初态)

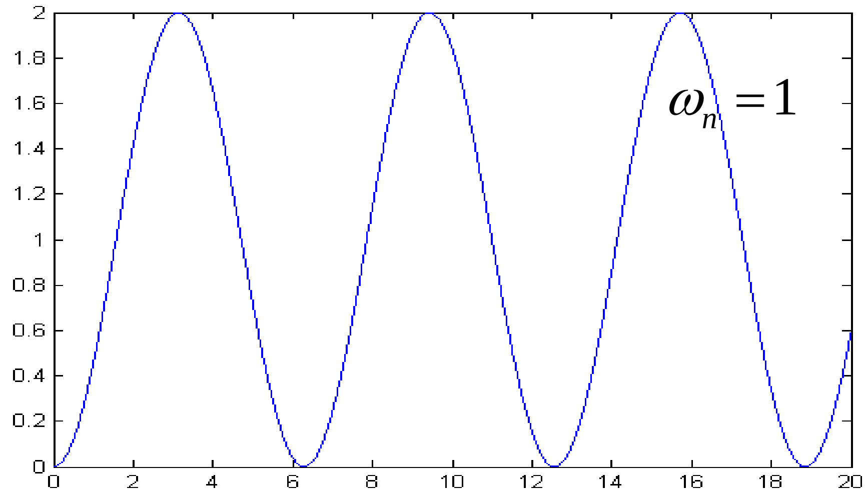
输出响应的拉氏变换：$C(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\dfrac{1}{s}$

输出响应：$c(t)=L^{-1}\left[C(s)\right]$

○ 无阻尼($\xi=0$)

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega_n^2}$$

$$c(t)=1-\cos\omega_n t=1-\sin\left(\omega_n t+\frac{\pi}{2}\right)$$

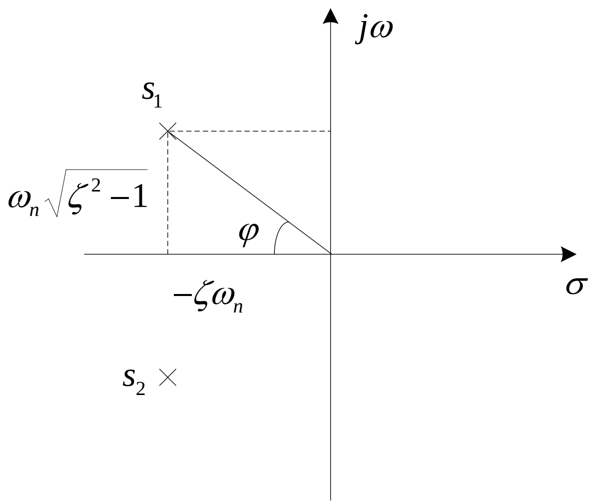


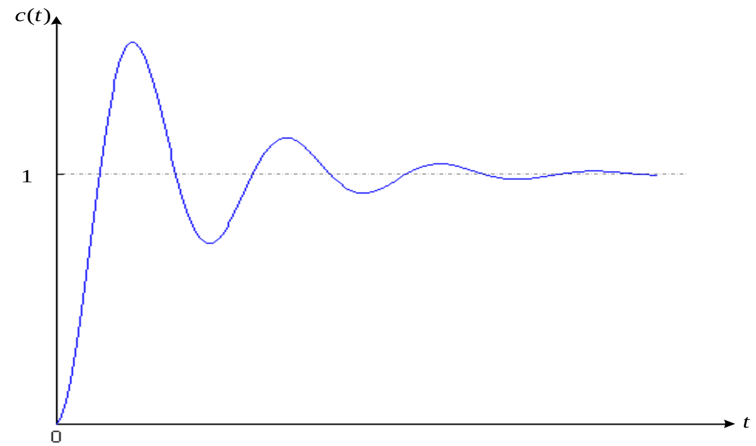
○ 欠阻尼$(0<\xi<1)$

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n+\mathrm{j}\omega_d)(s+\zeta\omega_n-\mathrm{j}\omega_d)}=\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}-\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\cdot\frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}$$

$$c(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t-\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\varphi)$$

阻尼振荡频率：$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ $\quad\varphi=\arctan\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

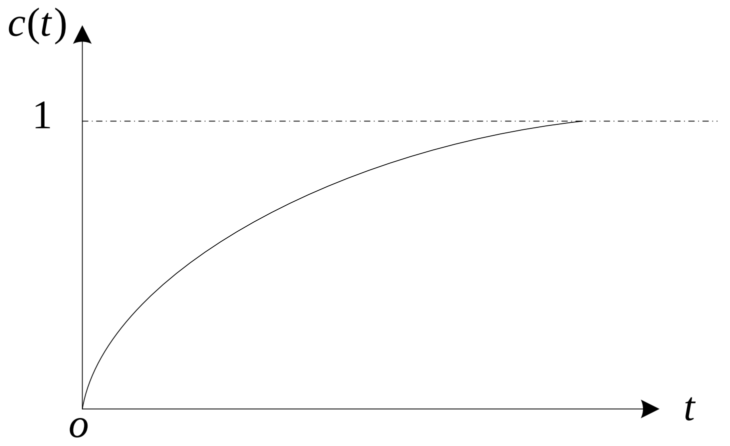




○ 临界阻尼($\xi = 1$)

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_n} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$$

$$c(t) = 1 - \left(1 + \omega_n t\right) e^{-\omega_n t}$$



○ 过阻尼($\xi>1$) s_1 s_2

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s\left(s-\left(-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right)\right)\left(s-\left(-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\right)\right)}$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}\cdot\frac{1}{s+\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}\cdot\frac{1}{s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}$$

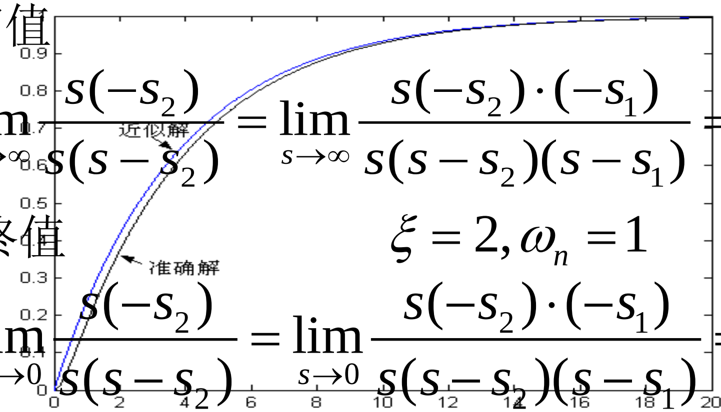
$$c(t)=1+\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}e^{-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}e^{-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}$$

$$=1+\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{e^{s_1 t}}{-s_1}-\frac{e^{s_2 t}}{-s_2}\right)$$

当 $\zeta\gg1$

$$W(s)=\frac{\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}{s+\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n}=\frac{-s_2}{s-s_2}$$

$$c(t)=1-e^{-s_2 t}$$

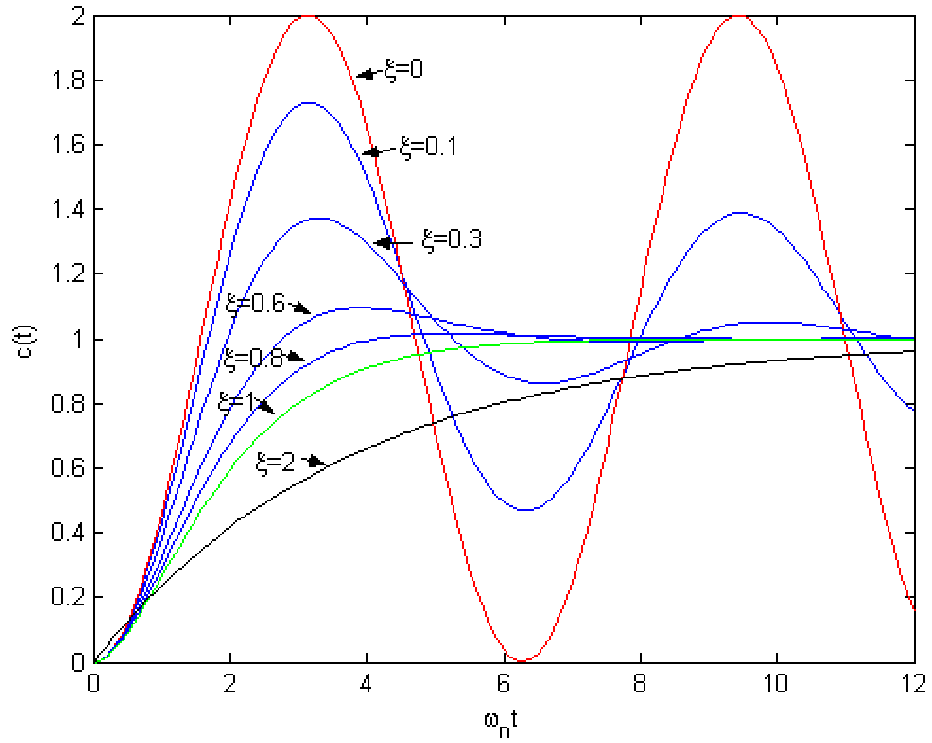


初值

$$\lim_{s\to\infty}\frac{s(-s_2)}{s(s-s_2)}=\lim_{s\to\infty}\frac{s(-s_2)\cdot(-s_1)}{s(s-s_2)(s-s_1)}=0$$

终值 $\xi=2,\omega_n=1$

$$\lim_{s\to0}\frac{s(-s_2)}{s(s-s_2)}=\lim_{s\to0}\frac{s(-s_2)\cdot(-s_1)}{s(s-s_2)(s-s_1)}=1$$



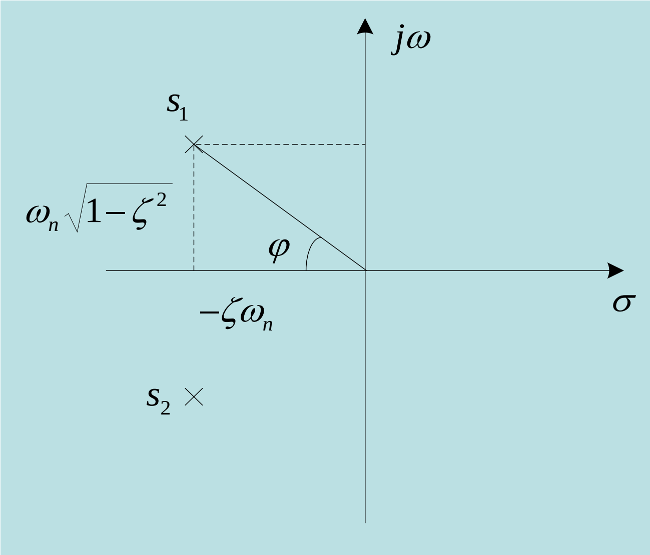
- 阻尼比ζ 越小，超调量越大，上升时间越短，振荡越厉害
- 在无振荡的曲线中，临界阻尼($\zeta=1$)调节时间最短
- 在欠阻尼的系统中，$\zeta=0.4\sim0.8$ 的动态过程调节时间短且振荡不严重
- 相同的阻尼比，若系统在 T^* 时刻进入稳态，$\omega_n\uparrow, t_s\downarrow$
- $\omega_n\uparrow, t_r\downarrow$

典型二阶系统的瞬态性能指标

○ 衰减振荡的瞬态过程 $0<\zeta<1$

上升时间 t_r：$c(t_r)=1$

① $1-e^{-\zeta\omega_n t_r}\left(\cos\omega_d t_r+\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t_r\right)=1$



② $\underbrace{e^{-\zeta\omega_n t_r}}_{\neq 0}\underbrace{\left(\cos\omega_d t_r+\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t_r\right)}_{=0}=0$

③ $\tan\omega_d t_r=\dfrac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta\omega_n}=\tan(\pi-\varphi)$

④ $t_r=\dfrac{\pi-\varphi}{\omega_d}=\dfrac{\pi-\varphi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

无阻尼的情况？

$$c(t)=1-\sin(\omega_n t+\frac{\pi}{2})\Rightarrow t_r=\frac{\left(\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\omega_n}$$

$$c(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t+\varphi)$$

○ 阻尼比ζ 不变，φ不变。

○ $\omega_n\uparrow, t_r\downarrow$

○ 若 ω_d 不变，$\zeta\downarrow\Rightarrow\varphi\uparrow\Rightarrow t_r\downarrow$

峰值时间 t_p

$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=t_p}=0$$

① $$\frac{\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t_p+\varphi\right)-\frac{\omega_d e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\left(\omega_d t_p+\varphi\right)=0$$

② $$\sin\left(\omega_d t_p+\varphi\right)=\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\cos\left(\omega_d t_p+\varphi\right)$$

③ $$\tan\left(\omega_d t_p+\varphi\right)=\tan(\varphi)$$

④ $$\omega_d t_p=\pi\Rightarrow t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- 无阻尼，$c(t)=1-\cos(\omega_n t)\Rightarrow t_p=\pi/\omega_n$
- $t_p=\dfrac{T_d}{2}$
- $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 为极点离实轴的距离，越远，时间越短

最大超调量$\delta\%$

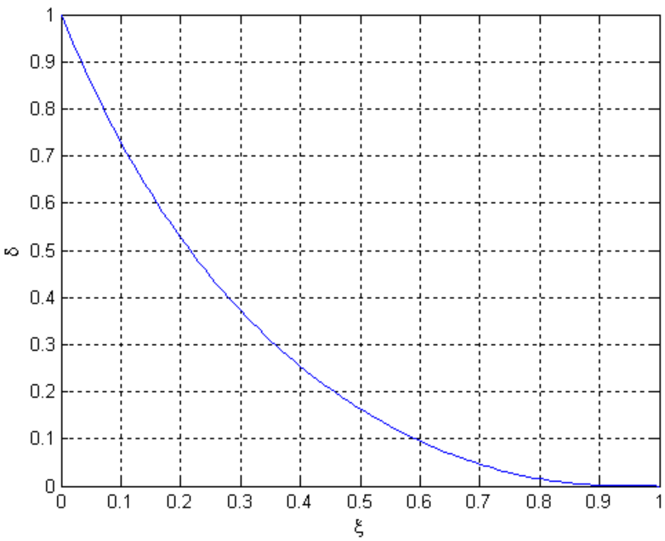
$$\delta\% = \left[c(t_p) - c(\infty)\right] \times 100\% = \left[c(t_p) - 1\right] \times 100\%$$

$$= -e^{-\zeta\omega_n t_p}\left(\cos\omega_d t_p + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t_p\right) \times 100\%$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$= e^{-\zeta\omega_n\left(\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}\left(\cos\omega_d\frac{\pi}{\omega_d} + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d\frac{\pi}{\omega_d}\right) \times 100\%$$

$$= e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$



- ○ $\delta\%$完全由阻尼比决定
- ○ $\zeta\downarrow, \delta\%\uparrow$:闭环极点离虚轴越近，超调量越大
- ○ 阻尼比的选取由$\delta\%$决定

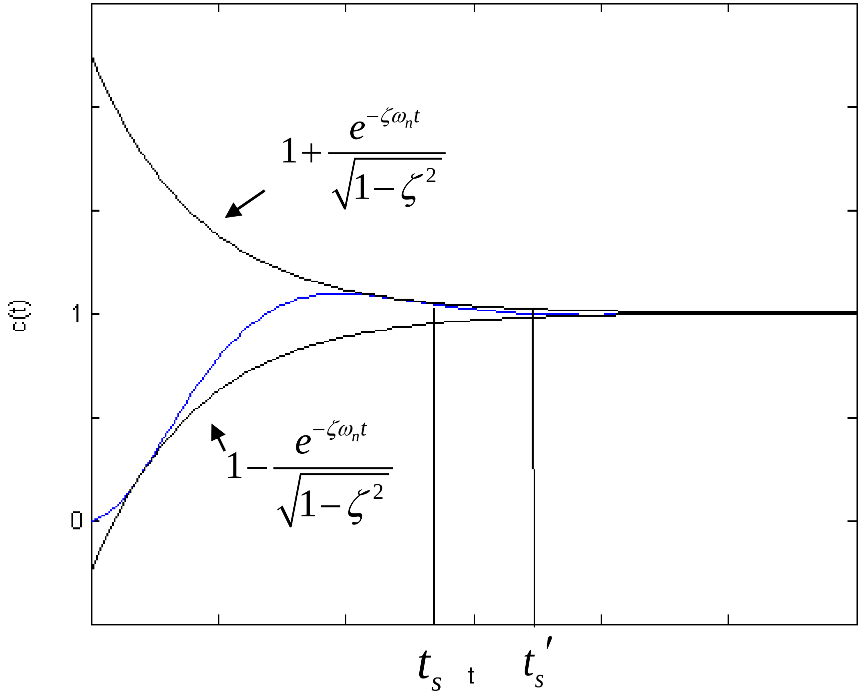
调节时间 t_s

$$\text{if } t \geq t_s,\ \text{then } \left|c(t)-c(\infty)\right| \leq c(\infty)\times\Delta\% \text{ with } \Delta = 2 or 5$$

$$\Rightarrow \left|\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t+\varphi\right)\right| \leq \Delta\%$$

为了简便计算，用c(t)的包络线来近似求解 t_s

包络线：$\boxed{1\pm\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$



$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s'}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \Delta\% \Rightarrow t_s \approx t_s' = \begin{cases} -\dfrac{1}{\zeta\omega_n}\ln\left(0.02\sqrt{1-\zeta^2}\right) \\ -\dfrac{1}{\zeta\omega_n}\ln\left(0.05\sqrt{1-\zeta^2}\right) \end{cases}$$

若ζ 很小，

$$t_s = \begin{cases} \dfrac{4}{\zeta\omega_n}, \Delta = 2 \\ \dfrac{3}{\zeta\omega_n}, \Delta = 5 \end{cases}$$

振荡次数 N

$$N=\frac{t_s}{T_d} \qquad \text{其中} T_d=\frac{2\pi}{\omega_d}=\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Choose $\Delta=2$ and $t_s=\dfrac{4}{\zeta\omega_n}$, then

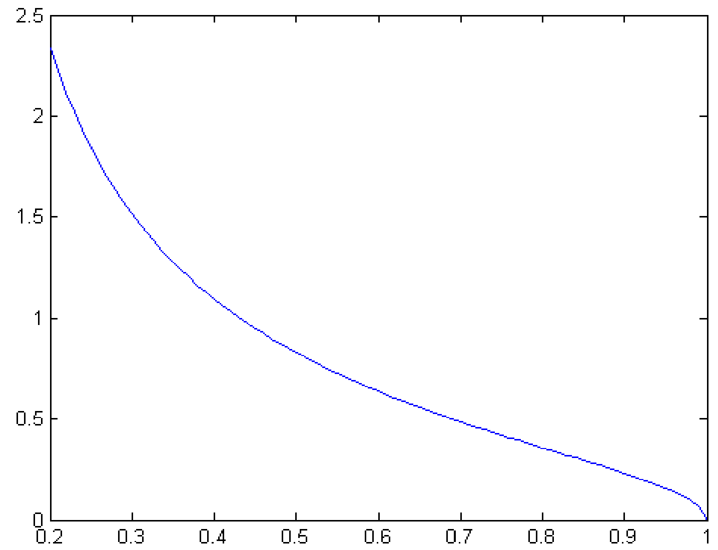
$$\boxed{N=\frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta}}$$

Choose $\Delta=5$ and $t_s=\dfrac{3}{\zeta\omega_n}$, then

$$\boxed{N=\frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta}}$$

If we know $\delta\%=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$, then

$$\boxed{N=\frac{-2}{\ln\delta\%}\ or\ \frac{-1.5}{\ln\delta\%}}$$



○ N 只与阻尼比有关

小结

各指标间是有矛盾的

if $\zeta\downarrow$,then $t_p\downarrow$ but $\delta\%\uparrow$

ζ unchanged while $\omega_n\uparrow$,
then $t_p, t_s\downarrow$ but $\delta\%$ unchange

○ $\zeta=0.707$， 最佳阻尼系数

t_s最小(取 $\Delta=5$) $\delta\%<5\%$

$$t_r=\frac{\pi-\varphi}{\omega_d}=\frac{\pi-\varphi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\delta\%=e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\%$$

$$t_s=\frac{4}{\zeta\omega_n}\, or\, \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

$$N=\frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta}\, or\, \frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta}$$

○ 非振荡的瞬态过程 $1 \le \xi$（无超调系统）

调节时间 t_s

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{e^{s_1 t}}{-s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{-s_2}\right)$$

令 $(-s_1)/(-s_2) = A$，可以求出 $(-s_2)t_s$

$$\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{e^{s_1 t_s}}{-s_1} - \frac{e^{s_2 t_s}}{-s_2}\right) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{e^{s_2 t_s} e^{A}}{-s_2 A} - \frac{e^{s_2 t_s}}{-s_2}\right) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{e^{A}}{A} - 1\right)\frac{e^{s_2 t_s}}{-s_2} = \Delta\%$$

$$\Rightarrow -s_2 t_s = \ln \frac{2A\Delta\%(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\sqrt{\zeta^2 - 1}}{e^{A} - A}$$

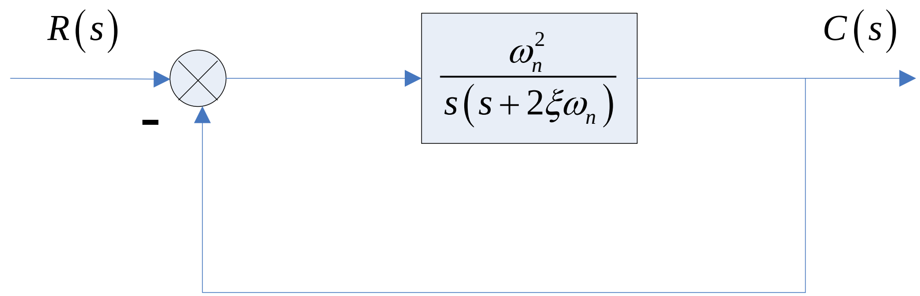
$$\zeta = \left(1 + \frac{-s_2}{-s_1}\right) \Big/ \left(2\sqrt{\frac{-s_2}{-s_1}}\right)$$

- ○ if $(-s_1)/(-s_2) = 1$ 临界阻尼, then $t_s = \dfrac{4.75}{-s_2}$ with $\zeta = 1$
- ○ 如果 $-s_1$到虚轴的距离比$-s_2$到虚轴的距离大4倍以上，系统等效于具有s_2极点的一阶系统，$t_s \approx 3/(-s_2)$。

二阶系统的性能改善

欠阻尼系统

E.g.5.6 二阶系统如图，其中$\zeta = 0.6, \omega_n = 4rad/s$。当输入为单位阶跃信号时，试求系统的性能指标。



阻尼振荡频率 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 5\sqrt{1-0.6^2} = 4(rad/s)$

极点向量与负实轴的交角 $\varphi = \arctan\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \arctan\dfrac{\sqrt{1-0.6^2}}{0.6} = 0.93(rad)$

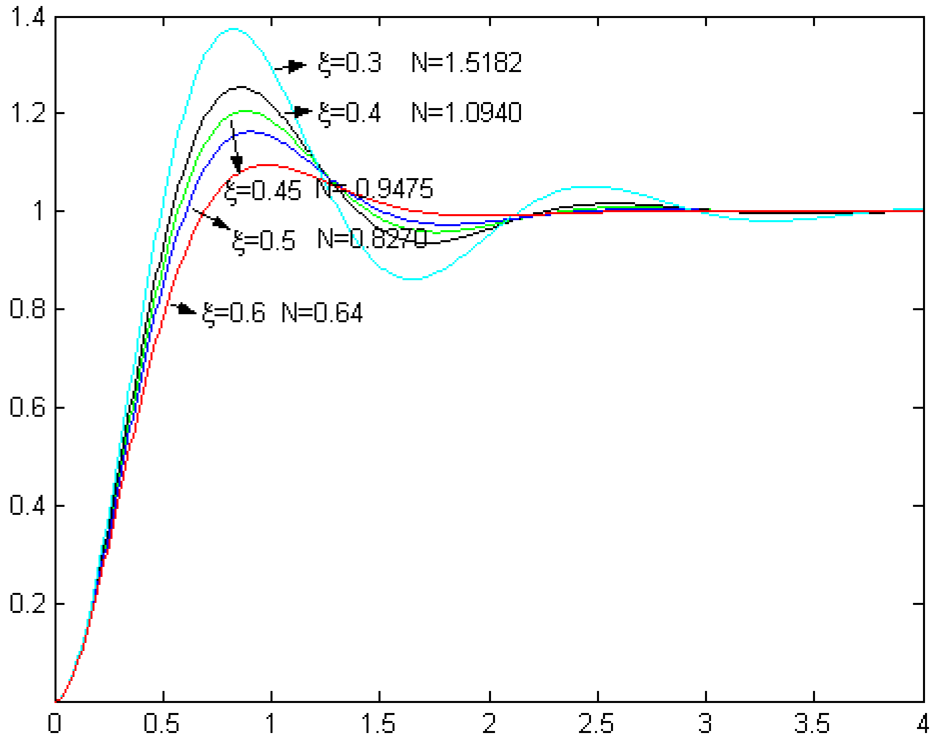
上升时间 t_r $\quad t_r = \dfrac{\pi-\varphi}{\omega_d} = \dfrac{3.14-0.93}{4} = 0.55(s)$

峰值时间 t_p $\quad t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d} = \dfrac{3.14}{4} = 0.785(s)$

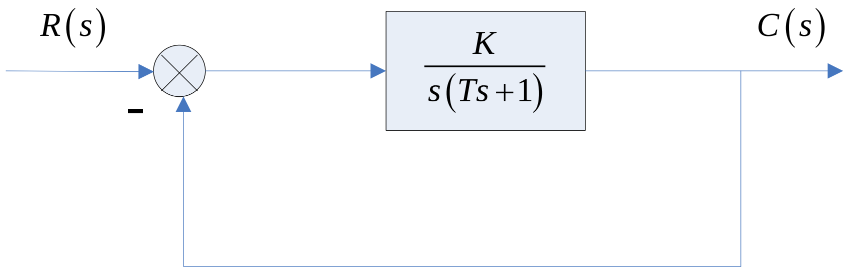
最大超调量 $\delta\%$ $$\delta\% = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = e^{\frac{-3.14\times 0.6}{\sqrt{1-0.6^2}}} \times 100\% = 9.48\%$$

调节时间 t_s $$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.6\times 5} = 1.33(s) or \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3}{0.6\times 5} = 1(s)$$

振荡次数 N $$N = \frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta} = \frac{2\sqrt{1-0.6^2}}{3.14\times 0.6} = 0.85 or \frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta} = \frac{1.5\sqrt{1-0.6^2}}{3.14\times 0.6} = 0.64$$



E.g.5.7 二阶随动系统如图，设 $K=16, T=0.25s$。(1) 计算瞬态性能指标 $\delta\%$ 和 t_s；(2) 若 $\delta\%=16\%$，当T不变时K取何值？(3) 若要求的单位阶跃响应无超调，且 $t_s\le 3s$，开环增益 $K=?$，$t_s=?$



(1)

阻尼比 ζ

$$\zeta=\frac{1}{2\sqrt{KT}}=\frac{1}{2\sqrt{16\times 0.25}}=0.25$$

自然振荡频率 ω_n

$$\omega_n=\sqrt{\frac{K}{T}}=\sqrt{\frac{16}{0.25}}=8(rad/s)$$

最大超调量 $\delta\%$

$$\delta\%=e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\%=e^{\frac{-3.14\times 0.25}{\sqrt{1-0.25^2}}}\times 100\%=44.43\%$$

调节时间 t_s

$$t_s=\frac{4}{\zeta\omega_n}=\frac{4}{0.25\times 8}=2(s)or\frac{3}{\zeta\omega_n}=\frac{3}{0.25\times 8}=1.5(s)$$

(2)

$$\delta\% = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \Rightarrow \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln\delta\% \Rightarrow \zeta = 0.5 \ (when \ \delta\% = 0.16)$$

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT}} \Rightarrow K = \frac{1}{4T\zeta^2} = \frac{1}{4\times 0.25\times (0.5)^2} = 4$$

(3)

$$\zeta \geq 1 \quad 取 \quad \zeta = 1$$

$$\boxed{t_s = \frac{4.75}{-s_2}}$$

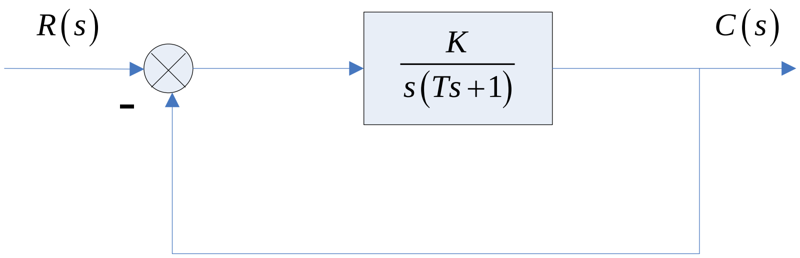
特征方程 $s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T} = 0 \Rightarrow s^2 + \frac{1}{0.25}s + \frac{K}{0.25} = 0$ $\quad s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

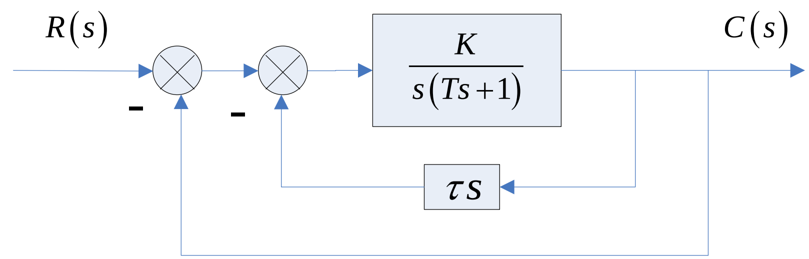
$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{4K} = 2(rad/s) \quad \Rightarrow K = 1$$

$$\Rightarrow s_1 = s_2 = -2 \qquad t_s = \frac{4.75}{-s_2} = 2.375$$

- If $0<\zeta<1$, $K\uparrow$, then $\zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT}}\downarrow$, $\delta\%\uparrow, N\uparrow$
- If $\zeta>1$, $K\uparrow$, then $\zeta\downarrow$, $\omega_n\uparrow, t_s\downarrow$;
  $T\uparrow$, then $\zeta\downarrow$, $\omega_n\downarrow, t_s\uparrow$

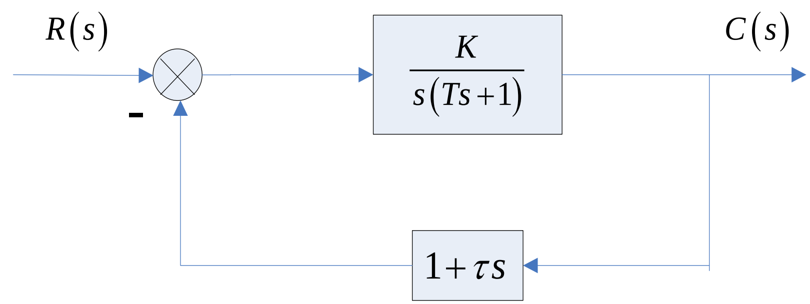
不改变K，加入速度反馈提高阻尼比来改善性能





$$W(s)=\frac{\frac{K}{T}}{s^2+\frac{1+K\tau}{T}s+\frac{K}{T}}$$

$$W(s)=\frac{\omega_{n1}^2}{s^2+2\zeta_1\omega_{n1}s+\omega_{n1}^2}$$



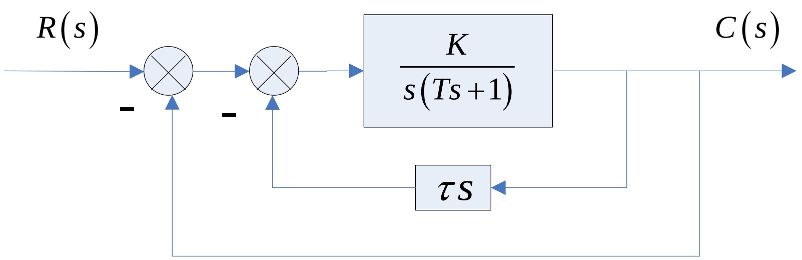
$$\omega_{n1}=\sqrt{\frac{K}{T}} \qquad \zeta_1=\frac{1+K\tau}{2\sqrt{KT}}$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{K}{T}} \qquad \zeta=\frac{1}{2\sqrt{KT}}$$

输出速度反馈不改变自然频率，但是增加了阻尼系数

进而减少超调量

E.g.5.8 在上例的基础上加入速度反馈改善系统性能。为了使 $\zeta_1 = 0.5$, 求 τ 值，并计算性能指标 $\delta\%$ 和 t_s



原系统 $K = 16, T = 0.25s$

$$\zeta_1 = \frac{1+K\tau}{2\sqrt{KT}} \Rightarrow \tau = \frac{1+K}{2\zeta_1\sqrt{KT}} = 0.0625(s)$$

由

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{K}{T}} = 8(rad/s) \qquad \zeta_1 = 0.5$$

最大超调量 $\delta\%$

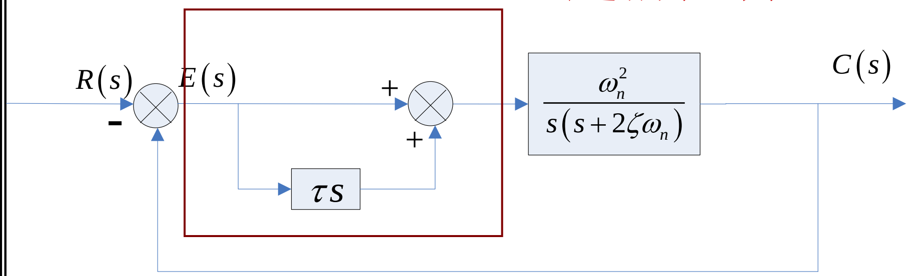
$$\delta\% = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 16.3\%$$

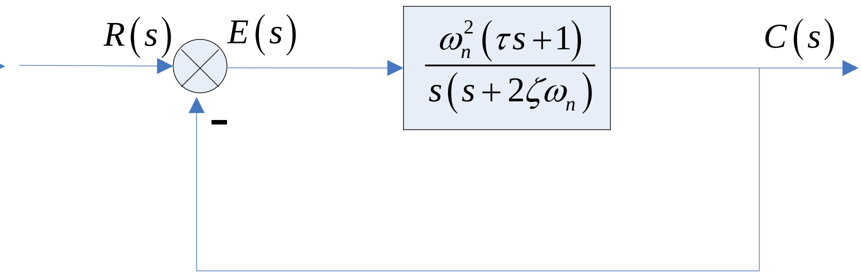
调节时间 t_s

$$t_s = \frac{4}{\zeta_1\omega_{n1}} = 1(s) or \frac{3}{\zeta_1\omega_{n1}} == 0.75(s)$$

比例-微分控制(PD)

超前控制

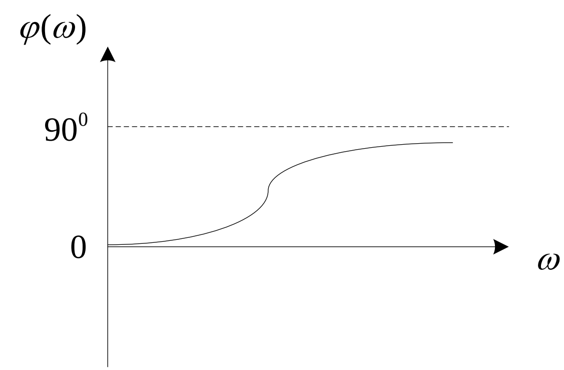




$$W(s)=\frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{s^2+(2\zeta\omega_n+\omega_n^2\tau)s+\omega_n^2}$$

$$W(s)=\frac{\omega_{nd}^2(\tau s+1)}{s^2+2\zeta_d\omega_{nd}s+\omega_{nd}^2}$$

$$\boxed{\omega_{nd}=\omega_n \qquad \zeta_d=\zeta+\frac{\tau\omega_n}{2}}$$



PD控制不改变自然频率，但是增加了阻尼系数

比例-微分控制(PD)

增加了一个零点

$$W(s)=\frac{\omega_{nd}^2(\tau s+1)}{s^2+2\zeta_d\omega_{nd}s+\omega_{nd}^2}$$

○ 零点对系统的影响

$$C_2(s)=C_1(s)\cdot\tau s$$

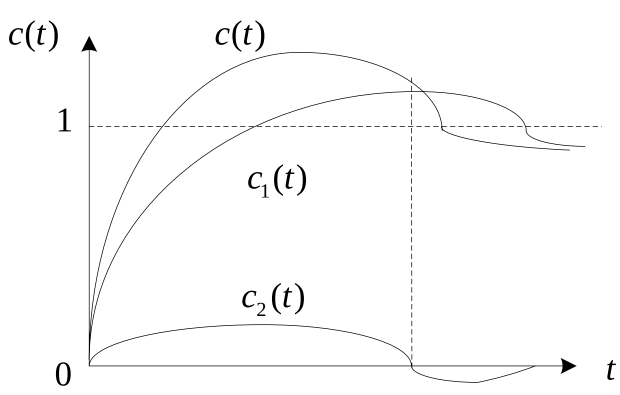
单位阶跃响应，其中 $0<\zeta_d<1$

$$C_1(s)\longleftrightarrow C_2(s)$$

$$C(s)=\frac{\omega_{nd}^2(\tau s+1)}{s\left(s^2+2\zeta_d\omega_{nd}s+\omega_{nd}^2\right)}=\boxed{\frac{\omega_{nd}^2}{s\left(s^2+2\zeta_d\omega_{nd}s+\omega_{nd}^2\right)}}+\frac{\omega_{nd}^2\tau}{s^2+2\zeta_d\omega_{nd}s+\omega_{nd}^2}$$

$$c(t)=\boxed{1-\frac{e^{-\zeta_d\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta_d^2}}\sin\left(\sqrt{1-\zeta_d^2}\,\omega_n t+\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta_d^2}}{\zeta_d}\right)}+\frac{\tau\omega_n e^{-\zeta_d\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta_d^2}}\sin\sqrt{1-\zeta_d^2}\,\omega_n t$$

$$c_1(t)\longleftrightarrow c_2(t)$$



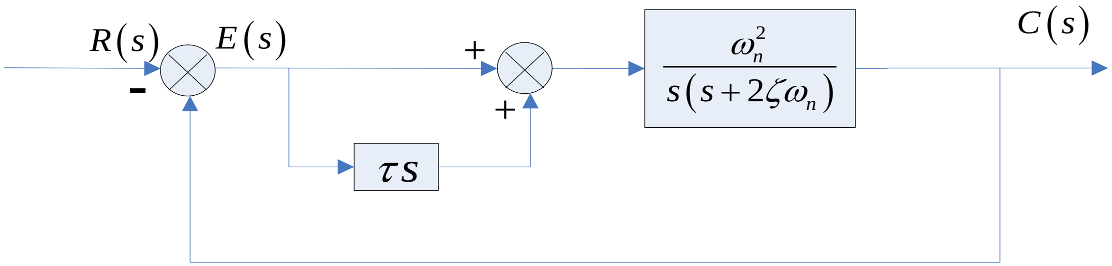
$$c_2(t)=\tau\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{T_d}\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$t_s=\left(4+\ln\frac{l}{T_d}\right)\frac{1}{\zeta_d\omega_n}\ or\ \left(3+\ln\frac{l}{T_d}\right)\frac{1}{\zeta_d\omega_n}$$

l：零点到极点的距离

E.g.5.9 加入PD控制对系统的改善，系统如下其中$\zeta=0.25$ $\omega_n=8$

为使 $\zeta_d=0.5$，确定τ 和调节时间t_s



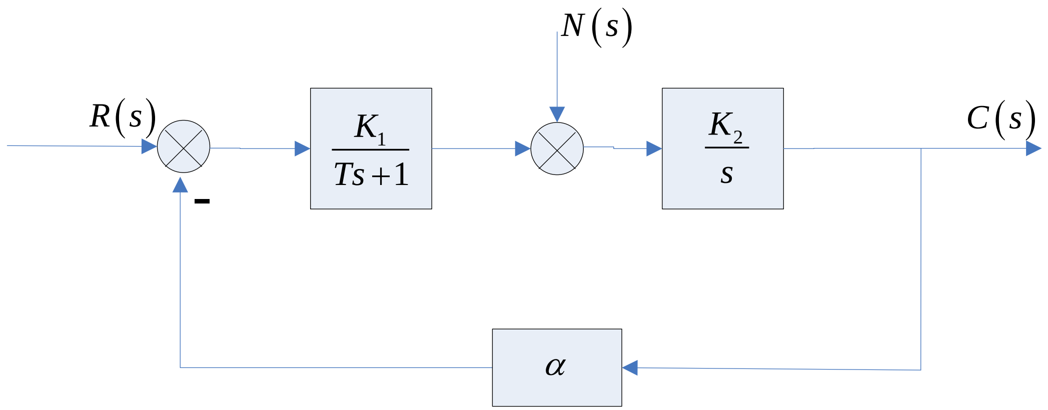
$$\zeta_d=\zeta+\frac{\tau\omega_n}{2}\Rightarrow\tau=\frac{2(\zeta_d-\zeta)}{\omega_n}=0.0625(s)$$

$$-T_d=-\frac{1}{\tau}=-16$$

$$l=\sqrt{(16-4)^2+(6.9)^2}=13.8$$

$$t_s=\left(4+\ln\frac{l}{T_d}\right)\frac{1}{\zeta_d\omega_n}=0.96 \text{ or } \left(3+\ln\frac{l}{T_d}\right)\frac{1}{\zeta_d\omega_n}=0.72$$

扰动下的二阶系统的分析



$$W_N(s)=\frac{C(s)}{N(s)}=-\frac{K_2/s}{1+\dfrac{K_1K_2\alpha}{s(Ts+1)}}=-\frac{K_2(Ts+1)}{Ts^2+s+K_1K_2\alpha}$$

$$=-\frac{1}{K_1\alpha}\frac{\dfrac{K_1K_2\alpha}{T}(Ts+1)}{s^2+\dfrac{1}{T}s+\dfrac{K_1K_2\alpha}{T}}=-\frac{1}{K_1\alpha}\cdot\frac{\omega_n^2(Ts+1)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{K_1K_2\alpha}{T}}=\sqrt{\frac{K}{T}}\qquad \zeta=\frac{1}{2\sqrt{K_1K_2\alpha T}}=\frac{1}{2\sqrt{KT}}$$

不变

扰动下的二阶系统的分析

阶跃响应是原系统的 $-\frac{1}{K_1\alpha}$

$$c_N(t) = -\frac{1}{K_1\alpha} + \frac{1}{K_1\alpha}\left[\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta_d^2}}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) - \frac{T\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta_d^2}}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right]$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta_d\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta_d^2}}\sin\left(\sqrt{1-\zeta_d^2}\,\omega_n t + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta_d^2}}{\zeta_d}\right) + \frac{\tau\omega_n e^{-\zeta_d\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta_d^2}}\sin\sqrt{1-\zeta_d^2}\,\omega_n t$$

最大偏离

$$c'(t)\Big|_{t=T^*} = 0 \Rightarrow c_{\max} = -\frac{1}{K_1\alpha}\left[1 + \frac{1}{2\zeta}e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}(\pi)\ \varphi}\right],\ \text{其中}\ \varphi = \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

调节时间

$$t_s : c(t_s) = 5\% \cdot c_{\max}\ \text{and}\ c(t \ge t_s) \le c(t_s)$$

高阶系统瞬态性能分析

$$W(s)=\frac{K_g\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n_1}(s+p_j)\prod_{l=1}^{n_2}(s^2+2\zeta_l\omega_l s+\omega_l^2)}$$

单位阶跃响应的拉氏变换

$$C(s)=\frac{K_g\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s\prod_{j=1}^{n_1}(s+p_j)\prod_{l=1}^{n_2}(s^2+2\zeta_l\omega_l s+\omega_l^2)}$$

$$=\frac{\alpha_0}{s}+\sum_{j=1}^{n_1}\frac{\alpha_j}{s+p_j}+\sum_{l=1}^{n_2}\frac{\beta_l(s+\zeta_l\omega_l)+\gamma_l\omega_l\sqrt{1-\zeta_l^2}}{s^2+2\zeta_l\omega_l s+\omega_l^2}$$

其中

$$\alpha_0=\lim_{s\to 0}sC(s)\qquad \alpha_j=\lim_{s\to -p_j}(s+p_j)C(s)$$

β_l,γ_l 为$C(s)$在极点$-\zeta_l\omega_l \pm j\omega_l\sqrt{1-\zeta_l^2}$处留数的虚部和实部

高阶系统瞬态性能分析

单位阶跃响应（初始条件为0）

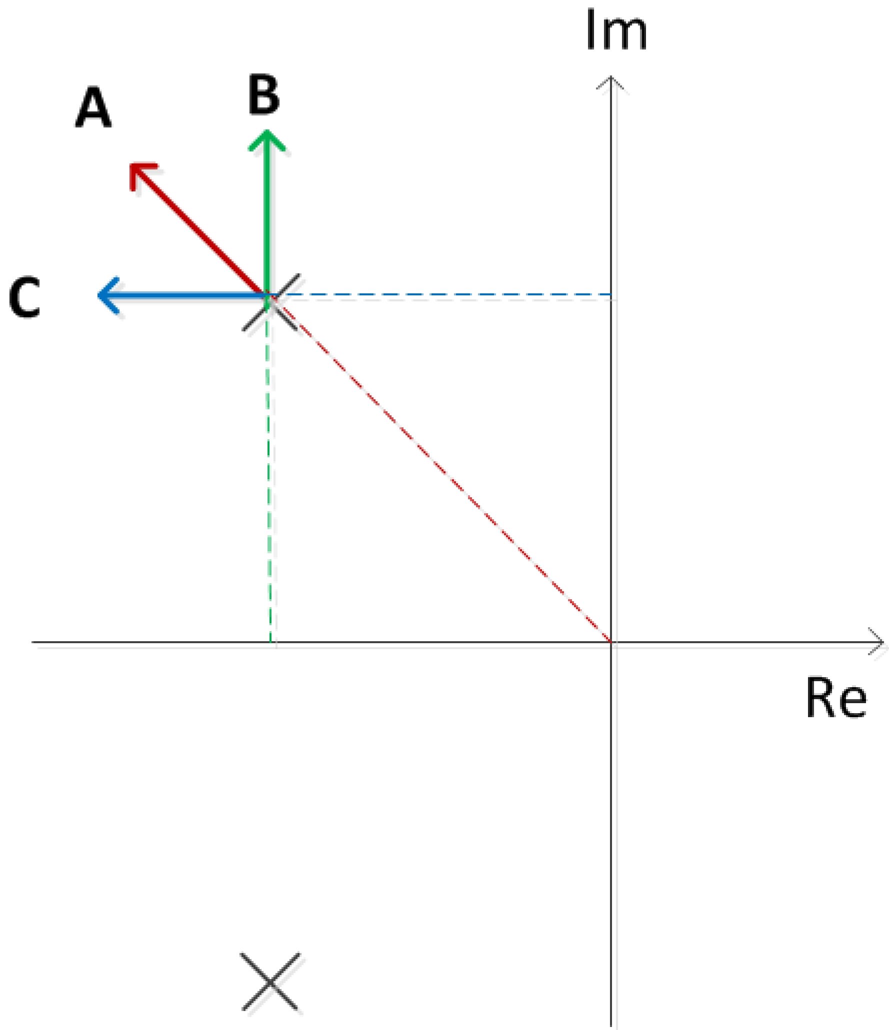
$$C(s)=\frac{\alpha_0}{s}+\sum_{j=1}^{n_1}\frac{\alpha_j}{s+p_j}+\sum_{l=1}^{n_2}\frac{\beta_l(s+\zeta_l\omega_l)+\gamma_l\omega_l\sqrt{1-\zeta_l^2}}{s^2+2\zeta_l\omega_l s+\omega_l^2}$$

闭环极点有关

$$c(t)=\alpha_0+\sum_{j=1}^{n_1}\alpha_j e^{-p_j t}+\sum_{l=1}^{n_2}\beta_l e^{-\zeta_l\omega_l t}\cos(\omega_l\sqrt{1-\zeta_l^2}t)+\sum_{l=1}^{n_2}\gamma_l e^{-\zeta_l\omega_l t}\sin(\omega_l\sqrt{1-\zeta_l^2}t)$$

闭环极点、零点有关

- 高阶系统的单位阶跃响应=常数项+（一阶系统+二阶系统）单位阶跃响应
- 各项的衰减速度取决于极点和虚轴间的距离
- 极点远离原点，系数小
- 极点接近一个零点而远离其他极点和原点，系数小
- 极点远离零点而接近其他极点或原点，系数大
- 闭环主导极点：系数大而衰减慢的函数项对于的极点



A

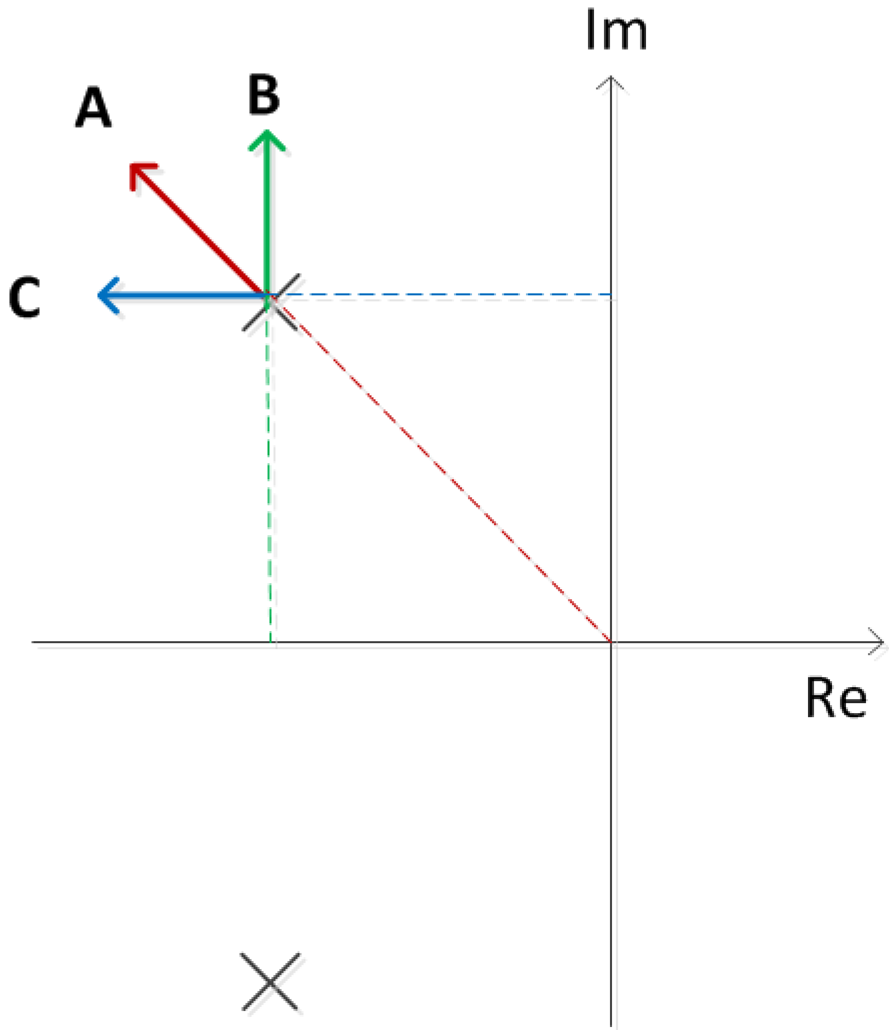
$$t_r = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d} = \frac{\pi - \varphi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \downarrow$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \downarrow$$

$$\delta\% = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} or \frac{3}{\zeta\omega_n} \downarrow$$

$$N = \frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta} or \frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta}$$



B

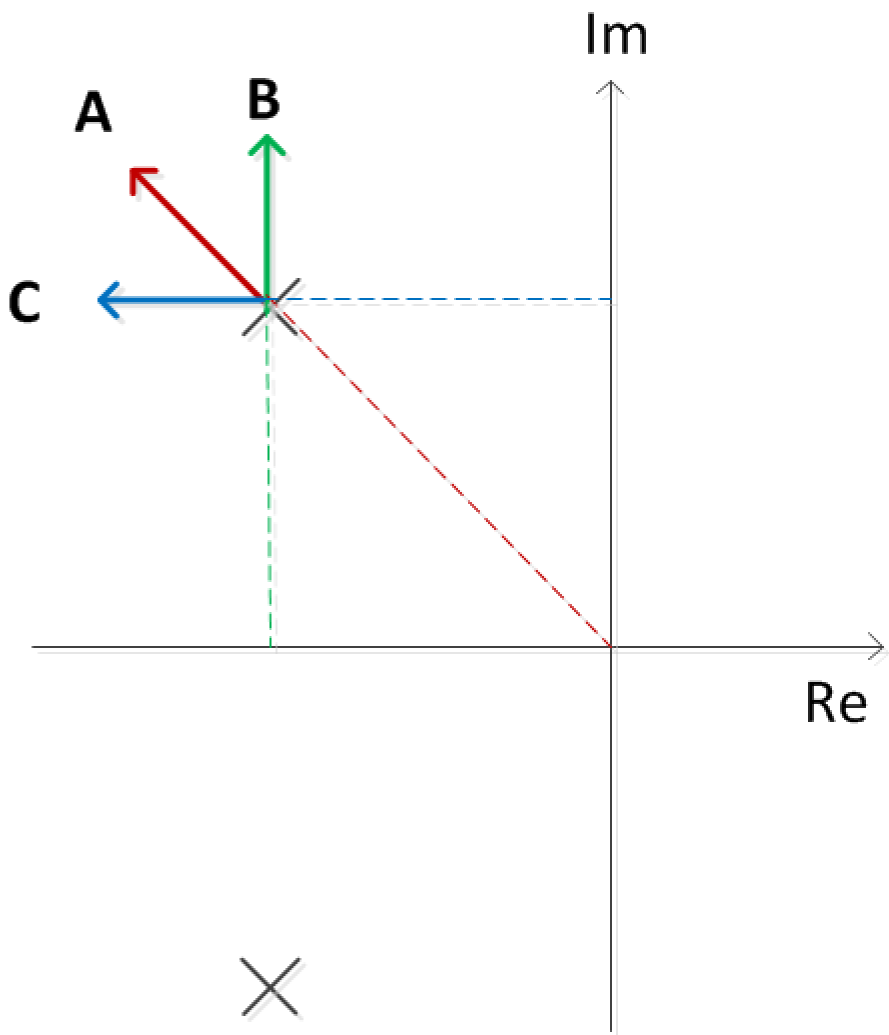
$$t_r = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d} = \frac{\pi - \varphi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \downarrow$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \downarrow$$

$$\delta\% = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \uparrow$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} or \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

$$N = \frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta} or \frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta} \uparrow$$



C

$$t_r = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d} = \frac{\pi - \varphi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \uparrow$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\delta\% = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \downarrow$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \, or \, \frac{3}{\zeta\omega_n} \downarrow$$

$$N = \frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta} \, or \, \frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta} \downarrow$$

5.3 控制系统稳态性能分析

5.3.1 误差、偏差与稳定误差

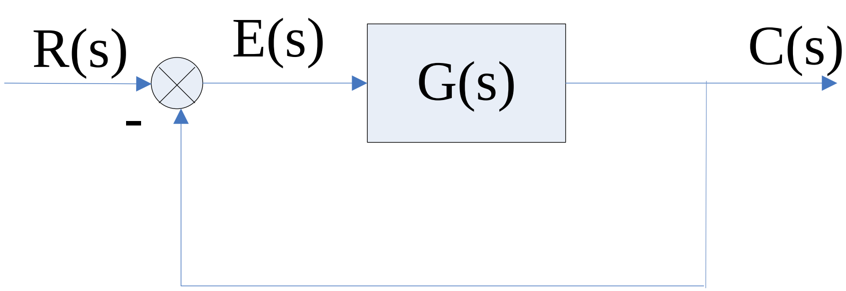
误差

$$\varepsilon(t)=c_0(t)-c(t)=\text{期望输出实际输出}$$

稳定误差

$$\varepsilon_{ss}=\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)$$

偏差



$E(s)=R(s)-C(s)$

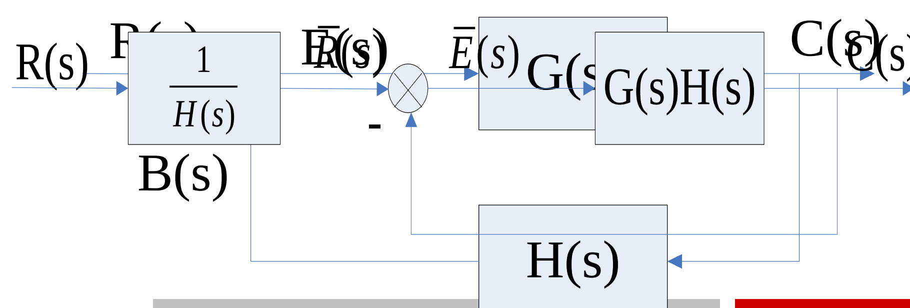
若 $r(t)=c_0(t)$

则 $\varepsilon(t)=e(t)$ 进而 $\varepsilon_{ss}=e_{ss}$

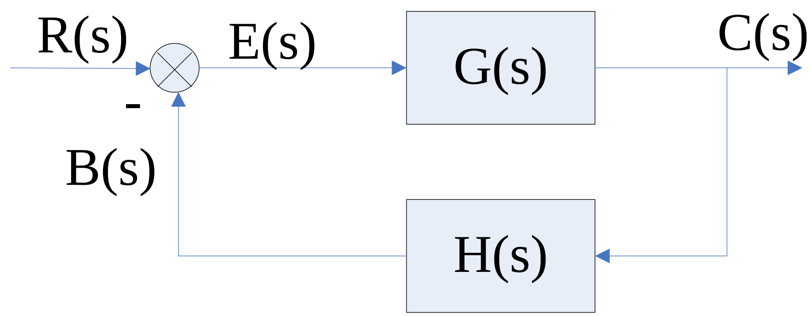
$E(s)=R(s)-B(s)=R(s)-H(s)C(s)$

$\bar{E}(s)=E(s)/H(s)=R(s)/H(s)-C(s)$

e_{ss} 代替 ε_{ss}



5.3.2 误差的数学模型



偏差

$$E(s)=R(s)-H(s)C(s)=R(s)-H(s)\frac{G(s)R(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

稳定误差

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_0(s)}$$

时间常数的形式

$$G_0(s)=\frac{K}{s^{\upsilon}}\frac{\prod_{i=1}^{m_1}(\tau_i s+1)\prod_{k=1}^{m_2}(\tau_k^2 s^2+2\zeta_k\tau_k s+1)}{\prod_{j=1}^{n_1}(T_j s+1)\prod_{l=1}^{n_2}(T_l^2 s^2+2\zeta_l T_l s+1)}=\frac{K}{s^{\upsilon}}G_n(s)$$

$$\lim_{s\to 0}G_n(s)=1\quad\Rightarrow e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_0(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+\frac{K}{s^{\upsilon}}G_n(s)}=\frac{\lim_{s\to 0}s^{\upsilon+1}R(s)}{\lim_{s\to 0}s^{\upsilon}+\boxed{K}}$$

5.3.3 稳态误差分析与静态误差系数

○ 阶跃输入下的稳态误差及静态位置误差系数

阶跃信号

$$r(t)=A\cdot 1(t),\quad R(s)=\frac{A}{s}$$

稳定误差

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_0(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+\dfrac{K}{s^{\upsilon}}G_n(s)}=\frac{A}{1+\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{K}{s^{\upsilon}}G_n(s)}$$

$$e_{ss}=\begin{cases}\dfrac{A}{1+K}, & \upsilon=0\\ 0, & \upsilon\geq 1\end{cases}$$

静态位置误差系数

$$K_p=\lim_{s\to 0}G_0(s) \qquad e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{A}{1+K_p}$$

$$K_p=\begin{cases}K, & \upsilon=0\\ \infty, & \upsilon\geq 1\end{cases}$$

有静差系统

一阶无差度系统

○ 斜坡输入作用下的稳态误差及静态速度误差系数

斜坡信号（速度信号）

$$r(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ Bt, & t\ge 0\end{cases},\quad R(s)=\frac{B}{s^2}$$

稳定误差

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_0(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+\dfrac{K}{s^{\upsilon}}G_n(s)}=\frac{B}{\lim\limits_{s\to 0} s\dfrac{K}{s^{\upsilon}}G_n(s)}$$

$$e_{ss}=\begin{cases}\infty, & \upsilon=0\\ \dfrac{B}{K}, & \upsilon=1\\ 0, & \upsilon>1\end{cases}$$

静态速度误差系数

$$K_v=\lim_{s\to 0} sG_0(s)\qquad e_{ss}=\frac{B}{K_v}$$

$$K_v=\begin{cases}0, & \upsilon=0\\ K, & \upsilon=1\\ \infty, & \upsilon>1\end{cases}$$

二阶无差度系统

○ 抛物线输入作用下的稳态误差及静态加速度误差系数

抛物线信号（加速度信号）

$$r(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{1}{2}Ct^2, & t\ge 0\end{cases},\quad R(s)=\frac{C}{s^3}$$

稳定误差

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_0(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+\frac{K}{s^{\upsilon}}G_n(s)}=\frac{C}{\lim_{s\to 0}s^2\frac{K}{s^{\upsilon}}G_n(s)}$$

$$e_{ss}=\begin{cases}\infty, & \upsilon=0,1\\ \frac{C}{K}, & \upsilon=2\\ 0, & \upsilon>2\end{cases}$$

静态速度误差系数

$$K_a=\lim_{s\to 0}s^2G_0(s)\qquad e_{ss}=\frac{C}{K_a}$$

$$K_v=\begin{cases}0, & \upsilon=0,1\\ K, & \upsilon=2\\ \infty, & \upsilon>2\end{cases}$$

三阶无差度系统

○ 稳态误差小结

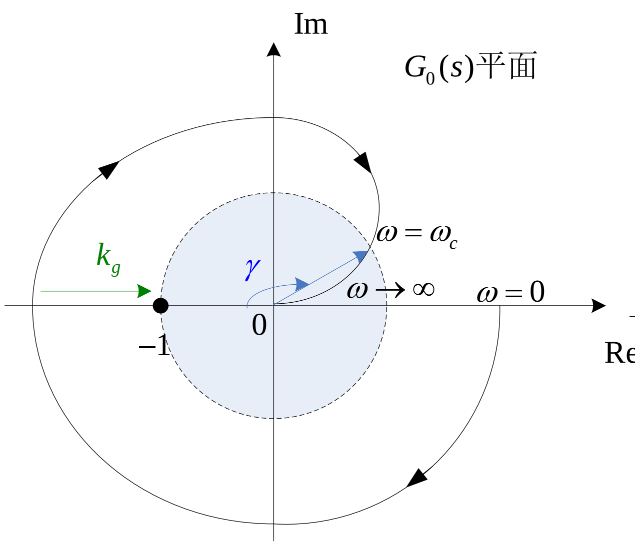
稳定误差

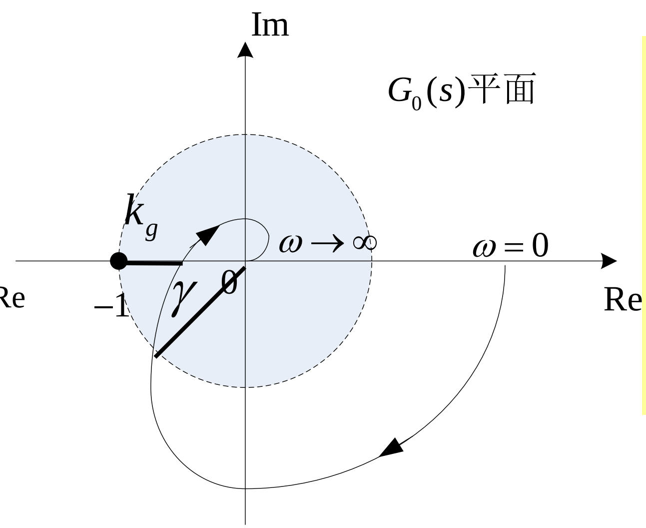
△ 开环增益越大，稳态误差越小

△ 系统阶数（无差度）越高，
能跟踪的信号阶数越高

e_{ss} \ K_i	位置误差 $r(t)=A\cdot 1(t)$	速度误差 $r(t)=Bt$	加速度误差 $r(t)=\frac{1}{2}Ct^2$
0型	$\frac{A}{1+K_p}$　$K_p=K$	∞　$K_v=0$	∞　$K_a=\infty$
I型	0　$K_p=\infty$	$\frac{B}{K_v}$　$K_v=K$	∞　$K_a=\infty$
II型	0　$K_p=\infty$	0　$K_v=\infty$	$\frac{C}{K_a}$　$K_a=K$

稳定性

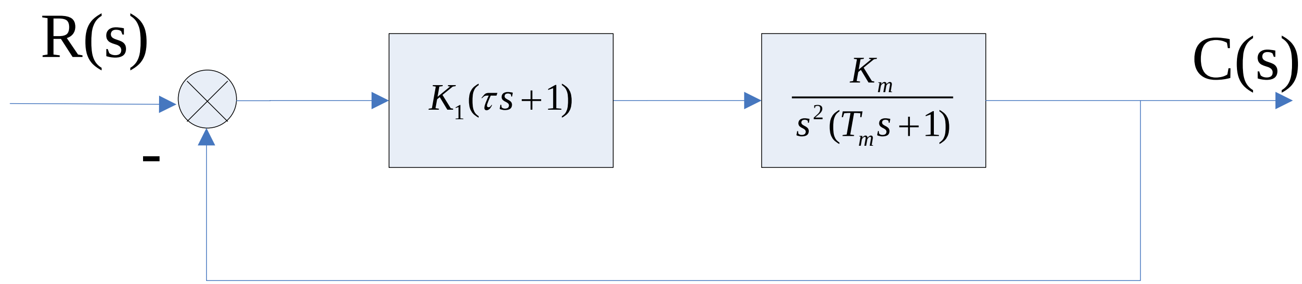




△ 开环增益越大，
稳定性越差

△ 系统阶数越高，
稳定性越差

E.g.5.10 PD控制系统如图，输入信号为 $r(t)=1(t)+t+\frac{1}{2}t^2$ 。对系统稳定性分析及稳态误差分析



稳定性分析

特征方程： $s^2(T_m s+1)+K_1K_m(\tau s+1)=0 \Rightarrow T_m s^3+s^2+K_1K_m\tau s+K_1K_m$

s^3	T_m	$K_1K_m\tau$
s^2	1	K_1K_m
s^1	$K_1K_m\tau-K_1K_mT_m$	
s^0	K_1K_m	

稳定的充要条件：

$T_m>0,\ K_1K_m\tau-K_1K_mT_m>0,\ K_1K_m>0$

$\downarrow$

$\tau>T_m$

决定系统的稳定性

稳态误差分析

开环传函： $$G_0(s)=\frac{K_1K_m(\tau s+1)}{s^2(T_m s+1)}$$

开环增益： $$K=K_1K_m$$

无静差度： $$\upsilon=2$$

各静态误差系数： $$K_p=\infty,\ K_v=\infty,\ K_a=K=K_1K_m$$

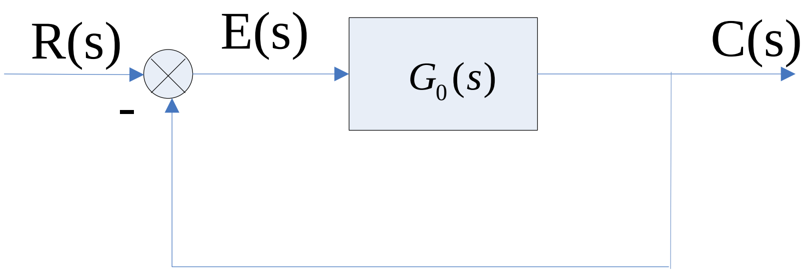
$$r(t)=r_1(t)+r_2(t)+r_3(t)=1(t)+t+\frac{1}{2}t^2$$

$$\downarrow$$

$$e_{ss}=e_{ss1}+e_{ss2}+e_{ss3}=0+0+\frac{1}{K_1K_m}=\frac{1}{K_1K_m}$$

5.3.4 控制系统的动态误差

引入动态误差的目的：刻画稳态误差没有极限值，随时间变化的规律



稳定误差	$G_0(s)=\dfrac{K}{T_1 s+1}$	$G_0(s)=\dfrac{K}{T_2 s+1}$
阶跃输入信号	$e_{ss}=A/(1+K)$	$e_{ss}=A/(1+K)$
斜坡输入信号	$e_{ss}=\infty$	$e_{ss}=\infty$

$$e_{ss}(t)=\frac{B}{K+1}-\frac{BT_1 t}{(K+1)^2}+\frac{BT_1}{(K+1)^2}e^{-\frac{K+1}{T_1}t}$$
$$=\frac{B}{K+1}-\frac{BT_1 t}{(K+1)^2}\quad (t\to\infty)$$

$$e_{ss}(t)=\frac{B}{K+1}-\frac{BT_2 t}{(K+1)^2}+\frac{BT_2}{(K+1)}e^{-\frac{K+1}{T_2}t}$$
$$=\frac{B}{K+1}-\frac{BT_2 t}{(K+1)^2}\quad (t\to\infty)$$

○误差传递函数在$s=0$ 邻域展开成泰勒级数

$$W_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_0(s)}=\frac{1}{k_0}+\frac{1}{k_1}s+\frac{1}{k_2}s^2+\cdots$$

其中 $\frac{1}{k_0}=\frac{1}{1+G_0(s)}\Big|_{s=0}$，$\frac{1}{k_1}=\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{1+G_0(s)}\right]\Big|_{s=0}$，$\frac{1}{k_2}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{1+G_0(s)}\right]\Big|_{s=0}$，$\cdots$

$$\boxed{E(s)=\frac{1}{k_0}R(s)+\frac{1}{k_1}sR(s)+\frac{1}{k_2}s^2R(s)+\cdots}$$

若初始条件为0

$$\boxed{\lim_{t\to\infty}e_{ss}(t)=\frac{1}{k_0}r(t)+\frac{1}{k_1}\dot{r}(t)+\frac{1}{k_2}\ddot{r}(t)+\cdots}$$

k_0:动态位置误差系数

k_1:动态速度误差系数

k_3:动态加速度误差系数

○动态位置误差系数简便求法

$$W_E(s)=\frac{b_0+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_ms^m}{a_0+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ns^n}$$

$$\begin{array}{r} C_0+C_1s+C_2s^2\cdots \\ a_0+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ns^n \overline{\big)\, b_0+b_1s+b_2s^2+\cdots+b_ms^m} \end{array}$$

$$\boxed{k_i=\frac{1}{C_i}}$$

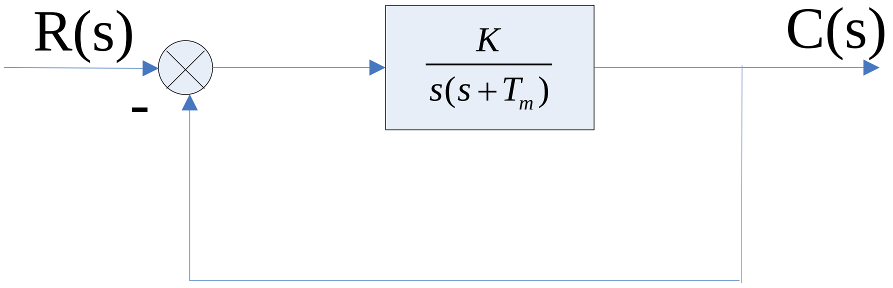
○动态位置误差系数与静态误差系数间的关系

If $r(t)=1(t)$ then 0-system $\quad e(\infty)=\lim\limits_{s\to 0}sE(s)=\lim\limits_{s\to 0}s\left[\frac{1}{k_0}R(s)+\frac{1}{k_1}sR(s)+\frac{1}{k_2}s^2R(s)+\cdots\right]\Bigg|_{R(s)=1/s}=\frac{1}{k_0}=\frac{1}{1+K_p}$

If $r(t)=t$ then 1-system $\quad e(\infty)=\lim\limits_{s\to 0}sE(s)=\lim\limits_{s\to 0}s\left[\frac{1}{k_0}R(s)+\frac{1}{k_1}sR(s)+\frac{1}{k_2}s^2R(s)+\cdots\right]\Bigg|_{R(s)=1/s^2}=\frac{1}{k_1}=\frac{1}{K_v}$

If $r(t)=\frac{1}{2}t^2$ then 2-system $\quad e(\infty)=\lim\limits_{s\to 0}sE(s)=\lim\limits_{s\to 0}s\left[\frac{1}{k_0}R(s)+\frac{1}{k_1}sR(s)+\frac{1}{k_2}s^2R(s)+\cdots\right]\Bigg|_{R(s)=1/s^3}=\frac{1}{k_3}=\frac{1}{K_a}$

E.g.5.13 随动系统如图。求动态误差系数，并确定静态速度误差系数



开环传函：

$$G_0(s)=\frac{K}{s(s+T_m)}$$

误差传函：

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_0(s)}=\frac{T_m s+s^2}{K+T_m s+s^2}=0+\frac{T_m}{K}s+\frac{K-T_m^2}{K^2}s^2+\cdots$$

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_0(s)}=\frac{1}{k_0}+\frac{1}{k_1}s+\frac{1}{k_2}s^2+\cdots$$

$$k_0=\infty,\ k_1=\frac{K}{T_m},\ k_2=\frac{K^2}{K-T_m^2}$$

$$K_v=k_1=\frac{K}{T_m}$$

E.g.5.14 系统1和2的开环传函如下

$$G_1(s)=\frac{10}{s(s+1)} \qquad G_2(s)=\frac{10}{s(5s+1)}$$

比较它们的静态稳态系数和动态误差系数。当输入为

$$r(t)=R_0+R_1t+\frac{1}{2}R_2t^2+e^{-R_3t}$$

试求出稳态误差表达式。

静态误差系数

$$K_{p1}=K_{p2}=\infty \qquad K_{v1}=K_{v2}=10 \qquad K_{a1}=K_{a2}=0$$

动态误差系数

$$W_{E_1}(s)=\frac{1}{1+G_1(s)}=\frac{s+s^2}{10+s+s^2}=0+0.1s+0.09s^2+\cdots$$

$$k_0=\infty,\ k_1=10,\ k_2=11.11$$

动态误差系数

$$W_{E_2}(s)=\frac{1}{1+G_2(s)}=\frac{s+5s^2}{10+s+5s^2}=0+0.1s+0.49s^2+\cdots$$

$$k_0=\infty,\ k_1=10,\ k_2=2.04$$

稳态误差表达式

由于 $e^{-R_3 t}\to 0$ with $t\to\infty$ 忽略

$$r(t)=R_0+R_1t+\frac{1}{2}R_2t^2$$

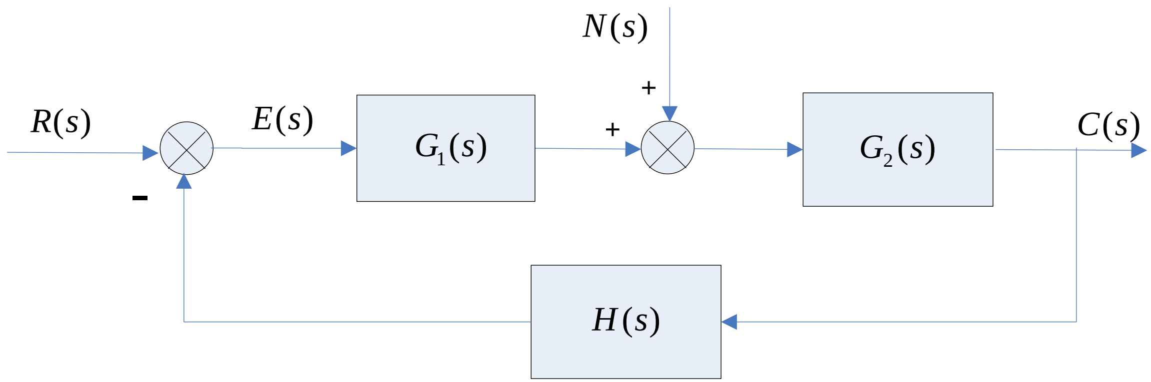
$$\dot{r}(t)=R_1+R_2t$$

$$\ddot{r}(t)=R_2$$

$$\lim_{t\to\infty}e_{1ss}(t)=\frac{1}{k_0}r(t)+\frac{1}{k_1}\dot{r}(t)+\frac{1}{k_2}\ddot{r}(t)+\cdots=0.1\left(R_1+R_2t\right)+0.09R_2$$

$$\lim_{t\to\infty}e_{2ss}(t)=\frac{1}{k_0}r(t)+\frac{1}{k_1}\dot{r}(t)+\frac{1}{k_2}\ddot{r}(t)+\cdots=0.1\left(R_1+R_2t\right)+0.49R_2$$

5.3.5 扰动输入作用下的稳态误差



当 $R(s)=0$ 时，

$$C_N(s)=\frac{G_2(s)N(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}=\frac{G_2(s)N(s)}{1+G_0(s)}$$

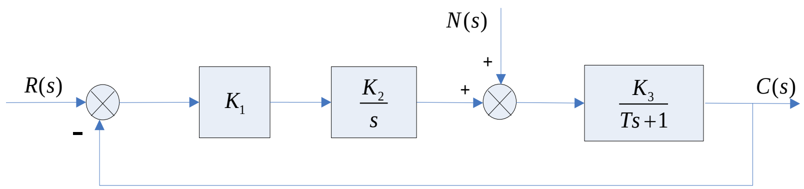
误差传函

$$E_N(s)=-\frac{G_2(s)H(s)N(s)}{1+G_0(s)}$$

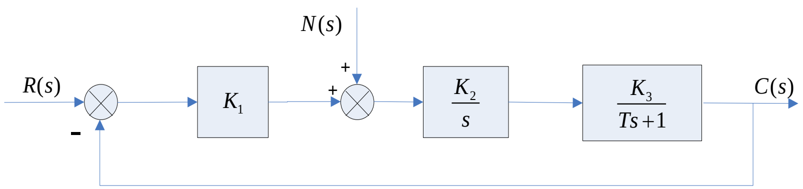
稳态误差

$$e_{ssn}=\lim_{s\to 0}sE_N(s)=-\lim_{s\to 0}\frac{sG_2(s)H(s)N(s)}{1+G_0(s)}$$

E.g.5.15 系统1和2如图。试计算在单位阶跃扰动信号作用下的稳态误差



稳态误差



$$e_{ssn} = \lim_{s\to 0} sE_N(s) = -\lim_{s\to 0} \frac{sG_2(s)H(s)N(s)}{1+G_0(s)}$$

系统1

$$G_2(s) = \frac{K_3}{Ts+1} \quad H(s)=1 \quad N(s)=\frac{1}{s} \quad G_0(s)=\frac{K_1K_2K_3}{s(Ts+1)}$$

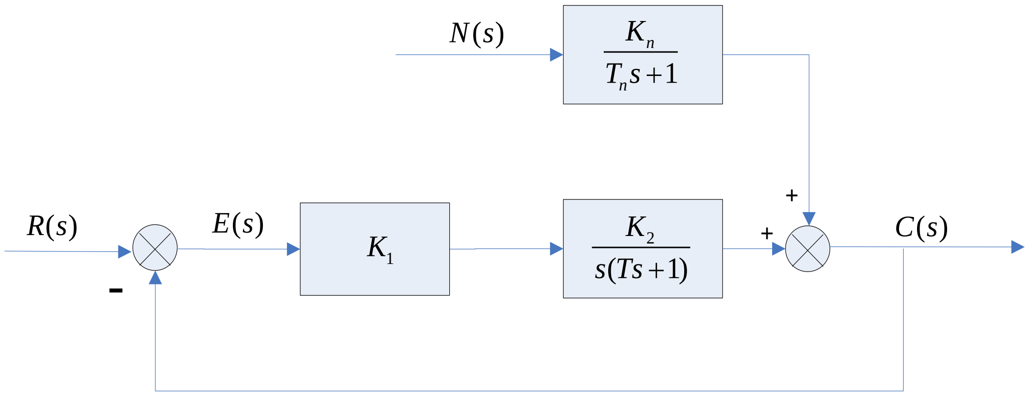
$$\boxed{e_{ssn} = -\lim_{s\to 0} \frac{K_3 s}{s(Ts+1)+K_1K_2K_3} = 0}$$

系统2

$$G_2(s) = \frac{K_2K_3}{s(Ts+1)} \quad H(s)=1 \quad N(s)=\frac{1}{s} \quad G_0(s)=\frac{K_1K_2K_3}{s(Ts+1)}$$

$$\boxed{e_{ssn} = -\lim_{s\to 0} \frac{K_2K_3}{s(Ts+1)+K_1K_2K_3} = -\frac{1}{K_1}}$$

E.g.5.16 某速度控制系统如图。给定输入和扰动输入均为单位斜坡函数，试计算系统的稳态误差



扰动为0

$$G_0(s)=\frac{K_1K_2}{s(Ts+1)} \qquad K_v=\lim_{s\to 0} sG_0(s)=K_1K_2$$

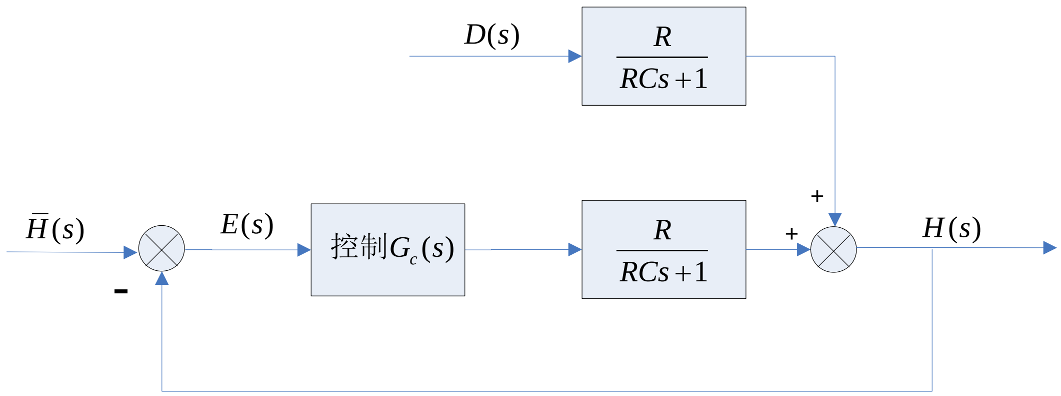
$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_0(s)}=\frac{s\cdot\frac{1}{s^2}}{1+\frac{K_1K_2}{s(Ts+1)}}=\frac{1}{K_1K_2}$$

输入为0

$$e_{ssn}=-\lim_{s\to 0}\frac{sG_2(s)H(s)\bar{N}(s)}{1+G_0(s)}=-\lim_{s\to 0}\frac{s\frac{K_n}{s^2(T_n s+1)}}{1+\frac{K_1K_2}{s(Ts+1)}}=-\frac{K_n}{K_1K_2}$$

$$e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssn}=\frac{1}{K_1K_2}-\frac{K_n}{K_1K_2}=\frac{1-K_n}{K_1K_2}$$

E.x.5.3 液位控制系统如图，其中期望值 $\bar{h}(t)=h^*$，扰动输入 $d(t)=d^*$，如果控制器分别采用PD和PID控制，则系统的稳态误差是多少？



PD控制器： $G_c(s)=K(\tau s+1)$

PID控制器： $G_c(s)=K\left(\tau s+1+\dfrac{1}{s}\right)$

$$H(s)=H_{\bar{H}}(s)+H_D(s)$$

$$=\frac{G_c(s)\dfrac{R}{RCs+1}}{1+\dfrac{R}{RCs+1}}\bar{H}(s)+\frac{\dfrac{R}{RCs+1}}{1+G_c(s)\dfrac{R}{RCs+1}}D(s)$$

$$E(s)=\bar{H}(s)-H(s)=\bar{H}(s)-\frac{RG_c(s)}{RCs+1+R}\bar{H}(s)-\frac{R}{RCs+1+RG_c(s)}D(s)$$

PD控制

$$E(s)=\bar{H}(s)-H(s)=\frac{h^*}{s}--\frac{RK(\tau s+1)}{RCs+1+R}\frac{h^*}{s}-\frac{R}{RCs+1+RK(\tau s+1)}\frac{d^*}{s}$$

稳态误差：

$$\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\left[h^*-\frac{RK(\tau s+1)h^*}{RCs+1+R}-\frac{Rd^*}{RCs+1+RK(\tau s+1)}\right]=h^*-\frac{RKh^*}{1+R}-\frac{Rd^*}{1+RK}$$

PID控制

$$E(s)=\bar{H}(s)-H(s)=\frac{h^*}{s}--\frac{RK\left(\tau s+1+\frac{1}{s}\right)}{RCs+1+R}\frac{h^*}{s}-\frac{R}{RCs+1+RK\left(\tau s+1+\frac{1}{s}\right)}\frac{d^*}{s}$$

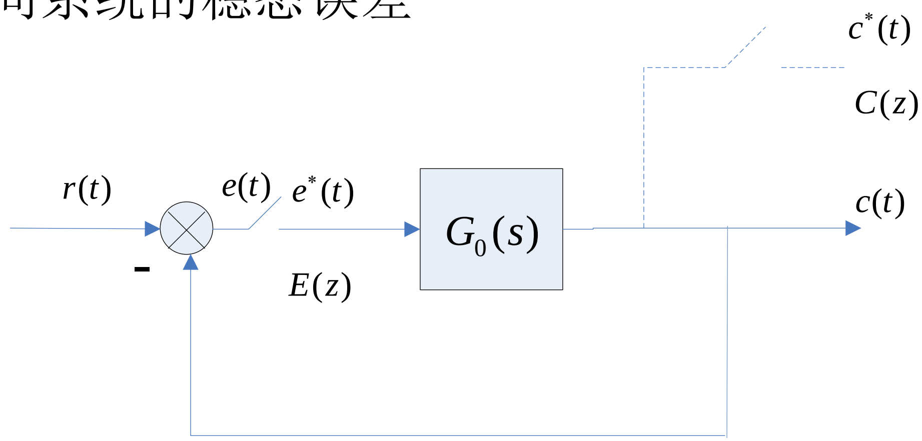
稳态误差：

$$\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\left[h^*-\frac{RK\left(\tau s+1+\frac{1}{s}\right)h^*}{RCs+1+R}-\frac{Rd^*}{RCs+1+RK\left(\tau s+1+\frac{1}{s}\right)}\right]=h^*-\frac{RKh^*}{1+R}$$

5.3.6 减少或消除稳态误差的措施

- ○ 增大系统开环增益or扰动作用点前系统的增益
- ○ 在系统的前向通道设置串联积分环节

5.3.7 离散时间系统的稳态误差



$$E(z)=R(z)-C(z)=\left[1-W(z)\right]R(z)=\frac{1}{1+G_0(z)}R(z)$$

如果系统稳定，

$$e(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{1}{1+G_0(z)}R(z)$$

○ 阶跃输入

$$r(t)=A\cdot 1(t),\quad R(z)=A\cdot\frac{z}{z-1}$$

稳定误差

$$e(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{1+G_0(z)}A\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{A}{1+\lim\limits_{z\to 1}G_0(z)}=\frac{A}{1+K_p}$$

静态位置误差系数

$$K_p=\lim_{z\to 1}G_0(z)$$

○ 斜坡输入

$$r(t)=Bt,\quad R(z)=B\cdot\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

稳定误差

$$e(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{1+G_0(z)}B\cdot\frac{Tz}{(z-1)^2}=\frac{B}{\frac{1}{T}\lim\limits_{z\to 1}(z-1)G_0(z)}=\frac{B}{K_v}$$

静态位置误差系数

$$K_v=\frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)G_0(z)$$

○ 抛物线输入

$$r(t)=\frac{1}{2}Ct^2,\quad R(z)=C\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

稳定误差

$$e(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{1}{1+G_0(z)}C\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}=\frac{C}{\frac{1}{T^2}\lim\limits_{z\to1}(z-1)^2G_0(z)}=\frac{C}{K_a}$$

静态位置误差系数

$$K_v=\frac{1}{T^2}\lim_{z\to1}(z-1)^2G_0(z)$$

○ 离散时间系统稳态误差

稳定系统的类别	位置误差 $r(t)=A\cdot1(t)$	速度误差 $r(t)=Bt$	加速度误差 $r(t)=\frac{1}{2}Ct^2$
0型	$\frac{A}{1+K_p}$	∞	∞
I型	0	$\frac{B}{K_v}$	∞
II型	0	0	$\frac{C}{K_a}$

E.g.5.3 单位负反馈采样系统，其中

$$G_0(s)=\frac{1}{s(0.1s+1)} \qquad T=0.1$$

输入信号为单位阶跃信号和单位速度信号时，求稳态误差和稳态系数

Z变换

$$G_0(s)=\frac{z(1-e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})}$$

I型系统

单位阶跃输入

$$K_p=\lim_{z\to 1}G_0(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z(1-e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})}=\infty$$

$$e(\infty)=0$$

单位速度输入

$$K_v=\frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)G_0(z)=\frac{1}{T}\lim_{z\to 1}\frac{z(1-e^{-1})}{(z-e^{-1})}=\frac{1}{T}=10$$

$$e(\infty)=0.1$$