离散数学复习

2026年

主要内容

- 数理逻辑（第一、二章）
- 集合论（第三、四章）
- 图论（第五、六）
- 代数系统简介（第九章）

数理逻辑部分

- 第1章 命题逻辑
- 第2章 一阶逻辑

第1章 命题逻辑

1.1 命题符号化及联结词

1.2 命题公式及分类

1.3 等值演算

1.4 范式

1.5 联结词全功能集

1.6 组合电路

1.7 推理理论

第1章 命题逻辑

1.1 命题符号化及联结词

如何将命题符号化？找出原子命题、选择合适的联结词。（特别注意条件语句的前件和后件的区别）

1.2 命题公式及分类

如何构造真值表？根据真值结果对公式进行分类。

1.3 等值演算

等值演算的基本定律（P9的等值式，注意蕴涵等值式和德摩根律）

第1章 命题逻辑

1.4 范式

（1）析（合）取范式、极小（大）项的定义；主析（合）取范式的定义；

（2）极小项与成真赋值的对应关系；极大项与成假赋值的对应关系。

（3）利用真值表法或者等值演算法求一个命题公式等价的主析取范式、主合取范式。

1.5 联结词全功能集

（1）与非、或非的定义

（2）全功能是什么含义？最小全功能集中的最小是什么含义？

第1章 命题逻辑

1.6 组合电路

奎因-莫可拉斯基化简方法：

（1）合并。原则是？（能合并的项具有...的特点）

（2）确定。原则是？（在全覆盖的前提下尽可能地少）

1.7 推理理论

（1）直接推理：什么是前提？什么是结论？如何推理？（P23的推理定律，特别注意假言推理、拒取式、析取三段论）

（2）间接推理：附加前提法；归谬法

第一章作业

- 1.5 （5）—（8）
- 1.6 （2）（3）
- 1.7 （1）
- 1.8 （2）（3）
- 1.12 （3）；
- 1.17（1）；
- 1.19 （1）（2）

1.5 将下列命题符号化

(5) 如果天下大雨，他就乘公共汽车上班.

(6) 只有天下大雨，他才乘公共汽车上班.

(7) 除非天下大雨，否则他不乘公共汽车上班.

(8) 不经一事，不长一智.

解： 令p：天下大雨，q：他乘公共汽车上班，r：经一事，s：长一智.

(5) $p \to q$

(6) $q \to p$.

(7) $\neg p \to \neg q \Leftrightarrow q \to p$

(8) $\neg r \to \neg s \Leftrightarrow s \to r$

1.6 设p.q的真值为0；r.s的真值为1，求下列各命题公式的真值

(2) $(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \vee s)$.

(3) $(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow ((p \vee q) \wedge (r \wedge s))$.

(2) $(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \vee s) \Leftrightarrow 0 \wedge 1 \Leftrightarrow 0$.

(3) $(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow ((p \vee q) \wedge (r \wedge s)) \Leftrightarrow (0 \wedge 1) \rightarrow (0 \wedge 1) \Leftrightarrow 1$

1.7 判断下列命题公式的类型.

(1) $p \to (p \vee q \vee r)$.

1.8 用等值演算法证明下列等值式.

(2) $((p\to q)\wedge(p\to r))\Leftrightarrow(p\to(q\wedge r))$

$$
\begin{aligned}
&(p\to q)\wedge(p\to r)\\
\Leftrightarrow&(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)\\
\Leftrightarrow&\ \neg p\vee(q\wedge r)\\
\Leftrightarrow&\ p\to(q\wedge r)
\end{aligned}
$$

(3) $\neg(p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow((p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q))$

$\neg(p\leftrightarrow q)$

$\Leftrightarrow\neg((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$

$\Leftrightarrow\neg((\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p))$

$\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\vee\neg(\neg q\vee p)$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p)$

$\Leftrightarrow(p\vee(q\wedge\neg p))\wedge(\neg q\vee(q\wedge\neg p))$

$\Leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee\neg p))\wedge((\neg q\vee q)\wedge(\neg q\vee\neg p))$

$\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$

1.12.

(1) 用真值表法或等值演算法求解析子(1).

p	q	r	$q\wedge r$	$p\vee(q\wedge r)$	$p\wedge q\wedge r$	$(p\vee(q\wedge r))\rightarrow(p\wedge q\wedge r)$
0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

成真赋值为: 000, 001, 010, 111

成假赋值为: 011, 100, 101, 110

主析取范式为: $(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow \Sigma\,0,1,2,7$

主合取范式为: $(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow \Pi\,3,4,5,6$

$$F=(\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge\neg x_3\wedge x_4)\vee(\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge x_4)$$
$$\vee(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3\wedge x_4)\vee(\neg x_1\wedge x_2\wedge x_3\wedge x_4)$$
$$\vee(x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge\neg x_4)\vee(x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge x_4)$$
$$\vee(x_1\wedge x_2\wedge x_3\wedge\neg x_4)$$

编号	极小项	角码	标记
1	$x_1\wedge x_2\wedge x_3\wedge\neg x_4$	1110	*
2	$x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge x_4$	1011	*
3	$\neg x_1\wedge x_2\wedge x_3\wedge x_4$	0111	*
4	$x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge\neg x_4$	1010	*
5	$\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3\wedge x_4$	0101	*
6	$\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge x_4$	0011	*
7	$\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge\neg x_3\wedge x_4$	0001	*

项	覆盖	运算符数
$x_1\wedge x_3\wedge\neg x_4$	(1,4)	3
$x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3$	(2,4)	3
$\neg x_2\wedge x_3\wedge x_4$	(2,6)	3
$\neg x_1\wedge x_4$	(3,5,6,7)	2

第一批				第二批		
合并项	项	表示串	标记	合并项	项	表示串
(1,4)	$x_1\wedge x_3\wedge\neg x_4$	1–10		(3,5,6,7)	$\neg x_1\wedge x_4$	0– –1
(2,4)	$x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3$	101–				
(2,6)	$\neg x_2\wedge x_3\wedge x_4$	–011				
(3,5)	$\neg x_1\wedge x_2\wedge x_4$	01–1	*			
(3,6)	$\neg x_1\wedge x_3\wedge x_4$	0–11	*			
(5,7)	$\neg x_1\wedge\neg x_3\wedge x_4$	0–01	*			
(6,7)	$\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge x_4$	00–1	*			

选择(1,4), (2,4)和(3,5,6,7)，或者(1,4), (2,6)和(3,5,6

标记*表示该项已被合并

1.19 (2) 前提：$p \to (q \to s)$，q，$p \vee \neg r$.

结论：$r \to s$.

证明：

①	$p \vee \neg r$.	前提引入
②	r.	附加前提引入
③	p.	①②析取三段论
④	$p \to (q \to s)$.	前提引入
⑤	$q \to s$.	③④假言推理
⑥	q.	前提引入
⑦	s.	⑤⑥假言推理

第2章 一阶逻辑

2.1 一阶逻辑基本概念

2.2 一阶逻辑合式公式及解释

2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

第2章 一阶逻辑

2.1 一阶逻辑基本概念

（1）一阶逻辑和命题逻辑的区别与联系是?

（2）个体、谓词、量词的定义；

（3）如何在一阶逻辑中将命题符号化？（特别注意特性谓词在全称量词和存在量词中的引入方法）

第2章 一阶逻辑

2.2 一阶逻辑合式公式及解释

（1）一阶逻辑合式公式与命题逻辑合式公式的区别与联系是?

（2）量词的辖域、约束出现、自由出现的定义；

（3）一阶逻辑合式公式的解释？（其实就是赋值的过程）

第2章 一阶逻辑

2.3　一阶逻辑等值式与前束范式

（1）量词的引入之后，出现哪些新的等值式和蕴涵式?

（2）前束范式的定义。如何求合式公式的前束范式?（等值演算法、换名）

（3）一阶逻辑推理（US、UG、ES、EG规则）

2.3 (3) 没有不犯错误的人

个体域D默认为全总个体域

$\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$，其中，$M(x)$：x是人，$F(x)$：x不犯错误

(5) 任何金属都可以溶解在某种液体中

$\forall x(M(x)\rightarrow\exists y(N(y)\wedge H(x,y)))$.

其中，$M(x)$：x是金属，$N(y)$：y是液体，$H(x,y)$：x可溶解在y中.

(6) 凡对顶角都相等.

$\forall x\forall y(F(x)\wedge F(y)\wedge G(x,y)\rightarrow L(x,y))$

其中，$F(x)$：x是角，$G(x,y)$：x,y对顶，$L(x,y)$：x,y相等.

2.14 求下列各式的前束范式

(1) $\neg\exists x F(x) \rightarrow \forall y G(x,y)$.

$\Leftrightarrow \neg\exists z F(z) \rightarrow \forall y G(x,y)$ （换名规则）

$\Leftrightarrow \forall z \neg F(z) \rightarrow \forall y G(x,y)$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow \exists z (\neg F(z) \rightarrow \forall y G(x,y))$ （量词辖域扩张等值式）

$\Leftrightarrow \exists z \forall y (\neg F(z) \rightarrow G(x,y))$ （量词辖域扩张等值式）

(2) $\neg(\forall x F(x,y) \vee \exists y G(x,y))$.

$\Leftrightarrow \neg(\forall s F(s,y) \vee \exists t G(x,t))$. （换名规则）

$\Leftrightarrow \neg \forall s (F(s,y) \vee \exists t G(x,t))$. （量词辖域扩张等值式）

$\Leftrightarrow \neg \forall s \exists t (F(s,y) \vee G(x,t))$ （量词辖域扩张等值式）

$\Leftrightarrow \exists s \exists t \neg (F(s,y) \vee G(x,t))$. （量词否定等值式）

证明下列推理：

有理数和无理数都是实数，虚数不是实数。因此，虚数既不是有理数，也不是无理数。

(2) 设 $F(x)$：x 是有理数，$G(x)$：x 是无理数，$H(x)$：x 是实数，$I(x)$：x 是虚数.

前提：$\forall x((F(x) \vee G(x)) \rightarrow H(x))$，$\forall x(I(x) \rightarrow \neg H(x))$

结论：$\forall x(I(x) \rightarrow (\neg F(x) \wedge \neg G(x)))$

证明：

① $\forall x(I(x) \rightarrow \neg H(x))$ 前提引入

② $I(y) \rightarrow \neg H(y)$ ①∀−

③ $\forall x((F(x) \vee G(x)) \rightarrow H(x))$ 前提引入

④ $(F(y) \vee G(y)) \rightarrow H(y)$ ③∀−

⑤ $\neg H(y) \rightarrow (\neg F(y) \wedge \neg G(y))$ ④置换

⑥ $I(y) \rightarrow (\neg F(y) \wedge \neg G(y))$ ②⑤假言三段论

⑦ $\forall x(I(x) \rightarrow (\neg F(x) \wedge \neg G(x)))$ ⑥∀+

集合论部分

- 第3章 集合
- 第4章 二元关系

第3章 集合的基本概念和运算

- **3.3 集合中元素的计数**

容斥原理（为了避免漏所以容，为了避免重复所以斥）

- **3.4集合的覆盖和划分**

什么是覆盖？什么是划分？为什么说划分是一种特殊的覆盖？最大、最小划分是什么含义？

使用容斥原理求不超过120的素数个数。

23. 因为 $11^2=121$，不超过 120 的合数至少含有 2,3,5 或 7 这几个素因子之一. 先考虑不能被 2,3,5,7 整除的整数. 设

$$S=\{x \mid x\in \mathbf{Z}, 1\leqslant x\leqslant 120\}$$
$$A_1=\{x \mid x\in S, x\text{ 是 2 的倍数}\}$$
$$A_2=\{x \mid x\in S, x\text{ 是 3 的倍数}\}$$
$$A_3=\{x \mid x\in S, x\text{ 是 5 的倍数}\}$$
$$A_4=\{x \mid x\in S, x\text{ 是 7 的倍数}\}$$

那么

$$|S|=120,\quad |A_1|=60,\quad |A_2|=40,\quad |A_3|=24,\quad |A_4|=17$$
$$|A_1\cap A_2|=20,\quad |A_1\cap A_3|=12,\quad |A_1\cap A_4|=8,\quad |A_2\cap A_3|=8,\quad |A_2\cap A_4|=5,\quad |A_3\cap A_4|=3$$
$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=4,\quad |A_1\cap A_2\cap A_4|=2,\quad |A_1\cap A_3\cap A_4|=1,\quad |A_2\cap A_3\cap A_4|=1$$
$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=0$$

根据包含排斥原理，不能被 2,3,5,7 整除的整数是

$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}| &= 120-(60+40+24+17)\\ &\quad +(20+12+8+8+5+3)-(4+2+1+1)+0\\ &= 120-141+56-8=27\end{aligned}$$

因为 2,3,5,7 不满足上述条件，但是它们都是素数. 另外，1 满足上述条件，但是 1 不是素数，因此，不超过 120 的素数有 $27+4-1=30$ 个.

第4章 二元关系

- 4.1 集合的笛卡儿积与二元关系
- 4.2 关系的运算
- 4.3 关系的性质
- 4.5 等价关系和偏序关系

第4章 二元关系

- **4.1 集合的笛卡儿积与二元关系**

1、笛卡尔积的定义及性质；

2、二元关系的关系矩阵、关系图的表示方法。

- **4.2 关系的运算**

1、复合运算的定义

2、求逆运算的定义

第4章 二元关系

- **4.3 关系的性质**

五种性质的定义；及其关系矩阵、关系图合集合表示上的特点；

- **4.5 等价关系和偏序关系**

1、等价关系：等价关系的定义；等价类、商集的定义；等价关系和划分之间的一一对应关系

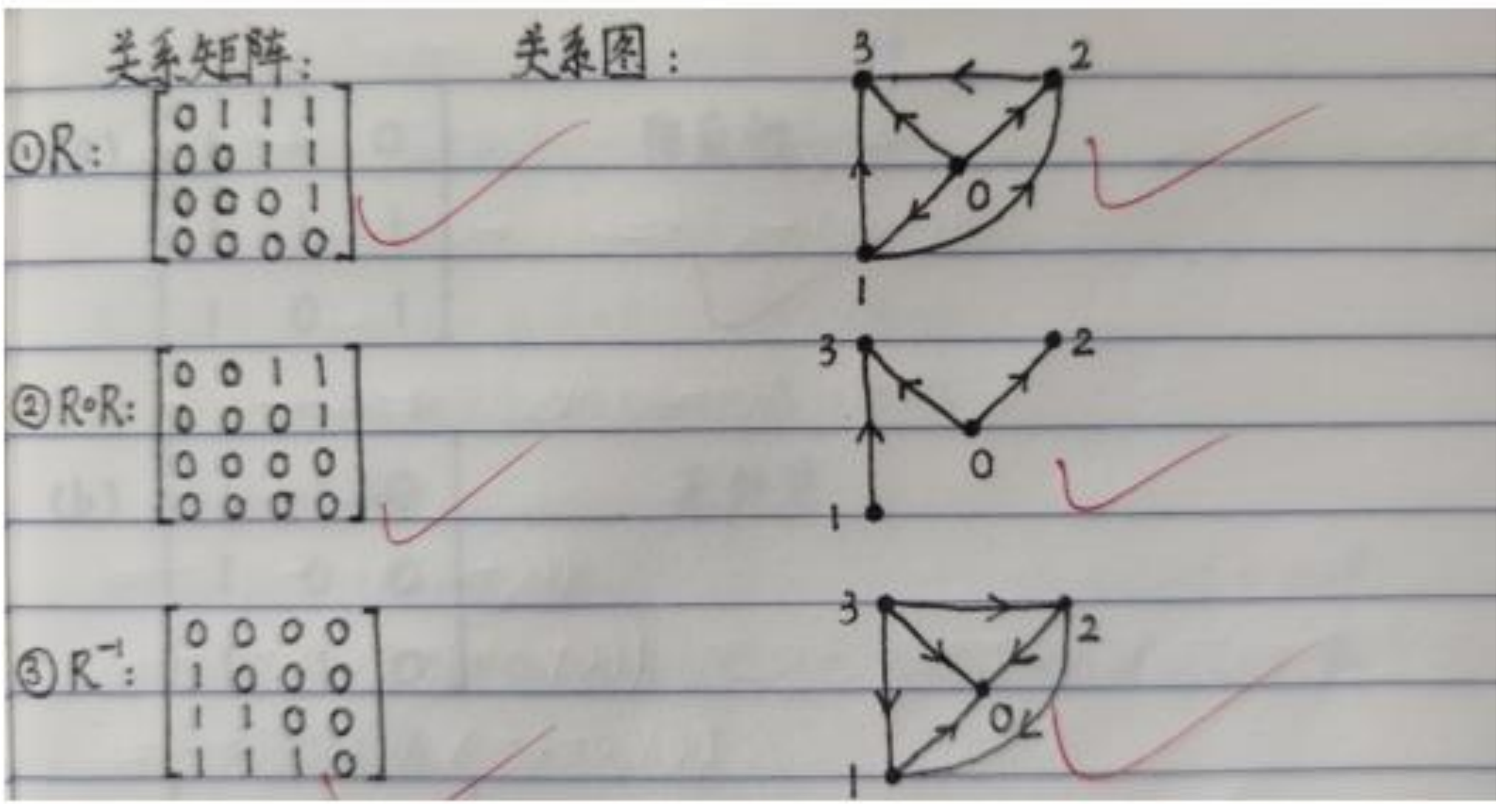
2、偏序关系：偏序关系的定义；盖住关系与哈斯图；极大极小元、最大最小元、上下界、上下确界。

1、设 $A=\{0,1,2,3\}$ ，R 是 A 上的二元关系

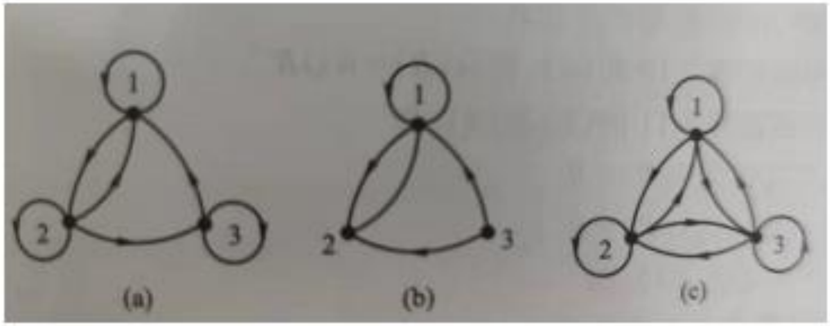
$R=\{<0,1>,<0,2>,<0,3>,<1,2>,<1,3>,<2,3>\}$

(1)请写出 R、 $R\circ R$、 R^{-1} 的关系矩阵;

(2) 请画出 R、 $R\circ R$ 、 R^{-1}的关系图。



2、设 $A=\{1,2,3\}$，下图给出了三种 A 上的二元关系，写出每种关系对应的关系矩阵，并说明每种关系所具有的性质。



(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 自反性

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 无性质

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 自反性

对称性

传递性

3、设 $A=\{1,2,3,4\}$，R 为 $A\times A$ 上的二元关系，$\forall <a,b>,<c,d>\in A\times A$

$$<a,b>R<c,d> \Leftrightarrow a+b=c+d$$

(1) 证明：R 为等价关系；

(2) 求 R 导出的划分。

(1) 证明：R为等价关系 (2) 求R导出的划分.

$A\times A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<2,4>,$

$<3,1>,<3,2>,<3,3>,<3,4>,<4,1>,<4,2>,<4,3>,<4,4>\}.$

$\forall <a,b>\in A\times A.\quad a+b=a+b.$

$<a,b>R<a,b> \Leftrightarrow a+b=a+b.$

R具有自反性.

$\forall <a,b>,<b,a>\in A\times A.\quad a+b=b+a.$

$<a,b>R<b,a> \Leftrightarrow a+b=b+a.$

R具有对称性

$\forall <a,b>,<c,d>,<e,f>\in A\times A.\quad a+b=c+d=e+f.$

$<a,b>R<c,d> \Leftrightarrow <a,b>R<e,f> \Leftrightarrow <c,d>R<e,f>$

R具有传递性

故R为等价关系

(2) $[\langle 1,1\rangle] = \{\langle 1,1\rangle\}$

$[\langle 1,2\rangle] = [\langle 2,1\rangle] = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$

$[\langle 1,3\rangle] = [\langle 2,2\rangle] = [\langle 3,1\rangle] = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle\}$

$[\langle 1,4\rangle] = [\langle 2,3\rangle] = [\langle 3,2\rangle] = [\langle 4,1\rangle] = \{\langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle\}$

$[\langle 2,4\rangle] = [\langle 3,3\rangle] = [\langle 4,2\rangle] = \{\langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

$[\langle 3,4\rangle] = [\langle 4,3\rangle] = \{\langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle\}$

$[\langle 4,4\rangle] = \{\langle 4,4\rangle\}$

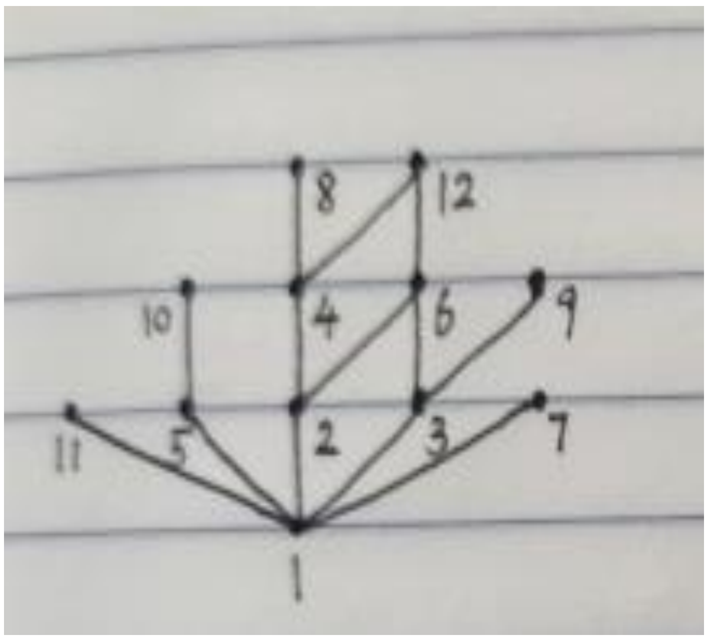
由R导出的划分有几个划分块？

4、对于集合$A=\{1，2，3，\cdots 12\}$与整除关系，构成一个偏序关系；

(1) 请画出哈斯图；

(2) 写出集合 A 的极大元、极小元、最大元、最小元；

(3) 写出集合$B=\{1，2，3，6\}$的最大元、最小元、上界、下界、上确界、下确界



A的

极大元：7.8.9.10.11.12.

极小元：1.

最大元：无.

最小元：1.

B的

最大元：6

最小元：1

上界：6.12

下界：1

上确界：6.

下确界：1.

图论部分

- 第5章 图的基本概念
- 第6章 特殊的图

第5章 图的基本概念

5.1 无向图及有向图

5.2 通路、回路、图的连通性

5.3 图的矩阵表示

第5章 图的基本概念

5.1 无向图及有向图

1、无向图和有向图定义及其表示；

2、点边关系（关联、相邻、邻接）；

3、度的定义和握手定理

4、子图、补图的定义

第5章 图的基本概念

5.2 通路、回路、图的连通性

1、通路、回路的定义

2、简单、初级的含义

3、连通的定义（有向图的强连通、单向连通、弱连通）

4、点割集、边割集的定义

第5章 图的基本概念

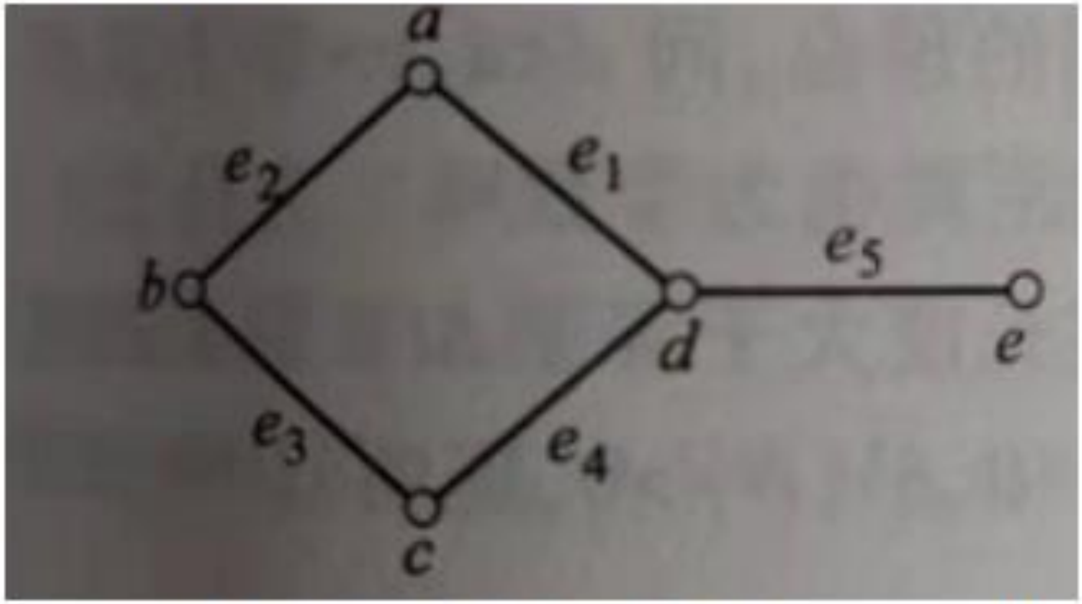
5.3 图的矩阵表示

1、关联矩阵

2、有向图的邻接矩阵（要理解邻接矩阵的N次方中的元素所表示的含义）

3、可达矩阵

1、无向图 G 如下图所示



请写出 G 的的点割集和边割集，并指出其中的割点和桥。

点割集 $\{a, c\}$, $\{d\}$

边割集 $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_3\}$, $\{e_1, e_4\}$, $\{e_2, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$ $\{e_3, e_4\}$, $\{e_5$

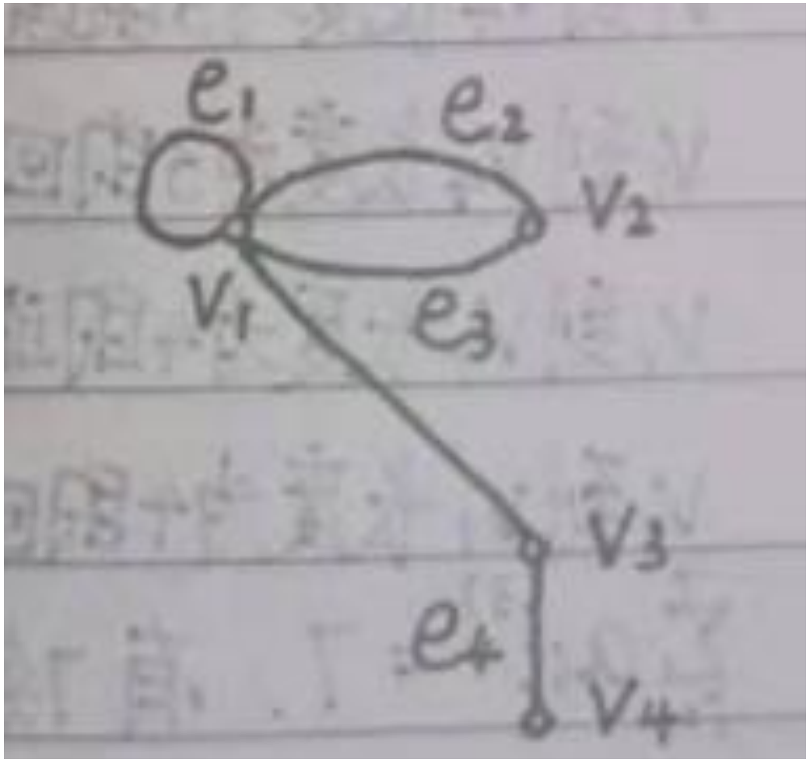
割点 d

桥 e_5

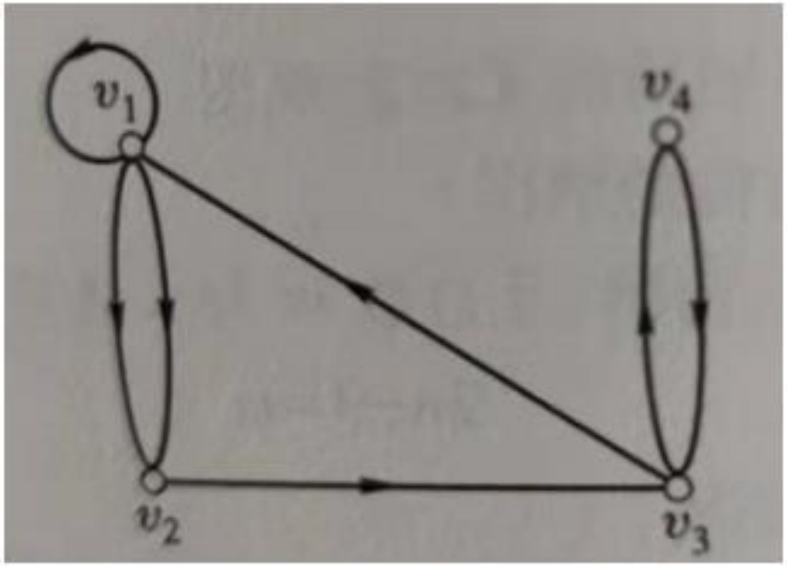
2、无向图 G=<V,E>,其中 V={v_1, v_2, v_3, v_4}, E={e_1,e_2,e_3,e_4,e_5}, 其关联矩阵为

$$M(G)=\begin{bmatrix}2&1&1&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

试画出 G 的图形。



3、有向图 D 如下图所示



(1) D 中 v_1 到 v_4 长度为 1，2，

(2) D 中 v_1 到 v_1 长度为 1，2，

(3) D 中长度为 3 的通路有多

(4) 写出 D 的可达矩阵。

解：(1) D的邻接矩阵 $A(D)=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$

V_1到V_4长度为1的通路为0条

V_1到V_1长度为1的回路为1条

(2)

$A^2(D)=\begin{bmatrix}1&2&2&0\\1&0&0&1\\1&2&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$

V_1到V_4长度为2的通路为0条

V_1到V_1长度为2的回路为1条

$A^3(D)=\begin{bmatrix}3&2&2&2\\1&2&1&0\\2&2&2&1\\1&2&1&0\end{bmatrix}$

V_1到V_4长度为3的通路为2条

V_1到V_1长度为3的回路为3条

$A^4(D)=\begin{bmatrix}5&6&4&2\\2&2&2&1\\4&4&3&2\\2&2&2&1\end{bmatrix}$

V_1到V_4长度为4的通路为2条

V_1到V_1长度为4的回路为5条

(3) $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}a_{ij}^{(3)}=24$ 有24条通路. $\sum_{i=1}^{4}a_{ii}^{(3)}=7$. 有7条回路

(4) $P(D)=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$

A、B、C、D四人传球6次，从A开始，最终回到A手里，有多少种传法？

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}, A^6=\begin{pmatrix}183&182&182&182\\182&183&182&182\\182&182&183&182\\182&182&182&183\end{pmatrix}$$

答案是？

第6章 一些特殊的图

6.2 欧拉图

欧拉图的定义是？如何判定图是否为欧拉图？

6.3 哈密顿图

哈密顿图的定义是？如何判定图是否为哈密顿图？

代数系统部分

第9章 代数系统简介

9.1 二元运算及其性质

9.2 代数系统

9.3 几个特殊的代数系统

第9章 代数系统简介

9.1 二元运算及其性质

1、什么是集合上的二元运算？

2、二元运算有哪些性质？

3、特异元素的定义和简单性质

第9章 代数系统简介

9.2 代数系统及其之间的关系

1、什么是代数系统?

2、子代数、积代数的定义是什么?

3、代数系统的同类型、同种、同态、同构是什么意思?

第9章 代数系统简介

9.3 半群、群

1、半群的定义（满足结合律的代数系统，可以定义元素的正整数次幂）

2、独异点的定义（有单位元的半群，可以定义元素的非负整数次幂）

3、群的定义与简单性质（每个元素都可逆的独异点，可以定义元素的整数次幂）

第9章 代数系统简介

9.3 半群、群

4、如何利用群的定义证明一个集合和运算能否构成群？

（1）运算结果关于集合封闭；（代数系统）

（2）运算满足结合律；（半群）

（3）有单位元；（独异点）

（4）每个元素可逆。（群）

第九章作业

1. Ex 9.16

(1) 运算表如下:

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

(2) 零元: 0

幺元: 1

可逆元: $1^{-1}=1$, $2^{-1}=3$, $3^{-1}=2$, $4^{-1}=4$

证明：

① 验证$\circ$运算对Z封闭.

$\forall x, y \in Z$, $x \circ y = x+y-2 \in Z$

$\therefore$ $\circ$为Z上的二元运算.

② 验证$\circ$运算是可结合的.

$\forall x, y, z \in Z$, 则有

$$
\begin{aligned}
x \circ y \circ z &= (x+y-2) \circ z \\
&= x+y-2+z-2 \\
&= x+y-4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \circ (y \circ z) &= x \circ (y+z-2) \\
&= x+y+z-2-2 \\
&= x+y+z-4
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $x \circ y \circ z = x \circ (y \circ z)$

即$\circ$满足结合律.

③ 单位元的存在.

设$e \in Z$, 为单位元, 则 $\forall x \in Z$

$x \circ e = x+e-2 = x$

且 $e \circ x = e+x-2 = x$

可以推出 $e = 2 \in Z$

所以, Z上的二元运算$\circ$存在单位元为2

④ Z中每个元素都有逆元

$\forall x \in Z$, 设x^{-1}为其逆元, 则有

$x \circ x^{-1} = x + x^{-1} - 2 = e = 2$

且 $x^{-1} \circ x = x^{-1} + x - 2 = e = 2$

可以推出 $x^{-1} = 4 - x \in Z$

所以, Z中每个元素x都有逆元, 且其逆元为$4-x$

2. 运算表如下

	<0,0>	<0,1>	<1,0>	<1,1>
<0,0>	<0,0>	<0,0>	<1,0>	<1,0>
<0,1>	<0,0>	<0,1>	<1,0>	<1,1>
<1,0>	<1,0>	<1,0>	<0,0>	<0,0>
<1,1>	<1,0>	<1,1>	<0,0>	<0,1>

积代数的单位元（幺元）是：<0,1>