

## 2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

- 等值式

- 基本等值式

  - 量词否定等值式

  - 量词辖域收缩与扩张等值式

  - 量词分配等值式

- 前束范式

# 等值式与基本等值式

**定义** 设 $A$ 、 $B$ 是一阶逻辑中的任意两个公式，若 $A \leftrightarrow B$ 为逻辑有效式，则称 $A$ 与 $B$ 是**等值**的，记作 $A \Leftrightarrow B$ ，并称 $A \Leftrightarrow B$ 为**等值式**。

## 基本等值式：

命题逻辑中16组（24个）基本等值式的代换实例

如，  $\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x F(x)$

$$\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y) \Leftrightarrow \neg \forall x F(x) \vee \exists y G(y)$$
$$\neg(\forall x F(x) \vee \exists y G(y)) \Leftrightarrow \neg \forall x F(x) \wedge \neg \exists y G(y)$$

## 基本等值式:

**消去量词等值式**      设  $D=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$(1) \quad \forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$$

$$(2) \quad \exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$$

## 量词否定等值式

$$(1) \quad \neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$(2) \quad \neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

# 基本等值式(续)

## 量词辖域收缩与扩张等值式

设 $A(x)$ 是含 $x$ 自由出现的公式,  $B$ 中不含 $x$ 的出现

关于全称量词的:

$$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$$

$$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$$

$$\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$$

$$\forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)$$

关于存在量词的:

$$\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$$

$$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$$

$$\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$$

$$\exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)$$

# 基本的等值式(续)

## 量词分配等值式

$$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$$

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

Remark:  $\forall$ 对 $\vee$ 无分配律,  $\exists$ 对 $\wedge$ 无分配律

## 量词分配蕴涵式

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$$

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

## 多个量词的使用

(1)约定:  $(\forall x)(\forall y) A(x,y)$ 表示 $(\forall x) ((\forall y) A(x,y))$

(2)一般地说, 多个量词相连时,

**同名量词是无序的**, 即改变它们的次序, 命题真值不变。

**异名量词是有序的**, 即改变它们的次序, 命题真值发生变化。

令 $A(x,y)$ 表示 $x+y=10$ , 个体域为整数集合 $I$ 。

$(\forall x)(\exists y)A(x,y)$ 表示对任一整数 $x$ , 存在整数 $y$ , 使 $x+y=10$ 。这是一个真命题。

$(\exists y)(\forall x)A(x,y)$ 表示存在整数 $y$ , 对任一整数 $x$ , 有 $x+y=10$ 。这是一个假命题。

因为同名量词是无序的，所以有下列等价关系：

$$(\forall x)(\forall y)A(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)A(x,y)$$

$$(\exists x)(\exists y)A(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)A(x,y)$$

而异名量词有下列的蕴含关系：

$$(\exists y)(\forall x)A(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)A(x,y)$$

$$(\exists x)(\forall y)A(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)A(x,y)$$

# 前束范式

定义一个公式，如果量词均在全式的开头，它们的作用域延伸到整个公式的末尾，则称为前束范式。前束范式可表示成如下形式：

$$(\square v_1)(\square v_2) \dots (\square v_n)A$$

其中： $\square$ 是 $\exists$ 或 $\forall$ ， $v_i$ 是个体变元， $i=1, \dots, n$ ； $A$ 是不含量词的谓词公式。

下面哪个是前束范式？

$$(\forall x)(\forall y)(F(x) \vee G(y) \rightarrow L(x,y))$$

$$(\forall y)(\forall x)(\exists z)(\neg H(x,y) \wedge F(x) \rightarrow L(x,z))$$

$$(\forall x)F(x) \vee (\forall y)(G(y) \rightarrow L(x,y))$$

$$(\forall y)(\forall x)(\neg H(x,y) \wedge F(x)) \rightarrow (\exists z)L(x,z)$$



任何谓词公式,都可以化成与其等价的前束范式。

如何求谓词公式的前束范式? (利用等值式、代入规则、换名规则等)。

例 求公式 $(\forall x)F(x) \rightarrow (\exists x)G(x)$  的前束范式。

解：  $(\forall x)F(x) \rightarrow (\exists x)G(x)$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall x)F(x) \vee (\exists x)G(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)\neg F(x) \vee (\exists x)G(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\neg F(x) \vee G(x)) \quad (\text{前束范式})$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(F(x) \rightarrow G(x)) \quad (\text{前束范式})$$

例把公式 $(\forall y)G(x,y) \rightarrow (\exists x)F(x,y)$ 化为等价的前束范式。

解：  $(\forall y)G(x,y) \rightarrow (\exists x)F(x,y)$

$$\Leftrightarrow (\forall t)G(x,t) \rightarrow (\exists s)F(s,y)$$

$$\Leftrightarrow (\exists t)(\exists s)(G(x,t) \rightarrow F(s,y))$$

# 一阶逻辑的推理理论

在谓词演算中， $C$ 是一组前提 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的有效结论，仍然定义为 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow C$ 。

(1)全称指定规则(US规则)

$$(\forall x)A(x) \Rightarrow A(c)$$

此式成立的条件是：

①  $c$ 是个体域中任一个体。

② 用 $c$ 取代 $A(x)$ 中 $x$ 时，一定在 $x$ 出现的所有地方进行取代。

Re: 利用这个规则，可以从带有全称量词的前提中，推导出不带全称量词的特殊结论。它体现了在逻辑推理中由一般到特殊的推导方法。

## (2)全称推广规则(UG规则)

$$A(y) \Rightarrow (\forall x)A(x)$$

此式成立的条件是：

- ①  $y$ 是个体域中任一个体且对 $y$ ,  $A(y)$ 为真。
- ②  $x$ 是不出现在 $A(y)$ 中的个体变元。

例如, 个体域为实数集合 $R$ ,

$G(x,y)$ 表示 $x>y$ , 设 $A(y): (\exists x)G(x,y)$ , 显然 $A(y)$ 满足条件①, 一定能推出 $(\forall z)A(z) \Leftrightarrow (\forall z)(\exists x)G(x,z) \Leftrightarrow (\forall z)(\exists x)(x>z)$ , 这是一个真命题。

若推成 $(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\exists x)G(x,x) \Leftrightarrow (\forall x)(\exists x)(x>x)$ , 就产生了错误, 因为这是一个假命题。错误的原因是违背了条件②。

### (3)存在指定规则 (ES规则)

$$(\exists x) A(x) \Rightarrow A(c)$$

此式成立的条件是：

- ①  $c$ 是个体域中的某个确定的个体，而不是个体变元。
- ②  $c$ 是不出现在 $A(x)$ 中的个体。

存在指定规则说明，若个体域中存在一些个体满足谓词 $A$ ，则至少有某个确定的个体 $c$ 满足谓词 $A$ 。

#### (4)存在推广规则(EG规则)

$$A(c) \Rightarrow (\exists x)A(x)$$

此式成立的条件是：

- ①  $c$ 是个体域中确定的个体。
- ②  $x$ 不能是出现在 $A(c)$ 中的个体变元。

存在推广规则说明：对于个体域中的某个个体 $c$ 满足谓词 $A$ ，当然有 $(\exists x)A(x)$ 。

【例】证明苏格拉底论证：凡人要死。苏格拉底是人，苏格拉底要死。

设：  $H(x)$ ：  $x$ 是人。


$M(x)$ ：  $x$ 是要死的。

$s$ ： 苏格拉底。

本题要证明：  $(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x)) \wedge H(s) \Rightarrow M(s)$

证明：

- |  |             |
|--|-------------|
| (1) $(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x))$ | P           |
| (2) $H(s) \rightarrow M(s)$              | US(1)       |
| (3) $H(s)$                               | P           |
| (4) $M(s)$                               | T(2)(3)假言推理 |



本节学习目标：

- 1、理解关于量词的等价式或者蕴涵式。
- 2、理解前束范式的概念，能够写出一个谓词公式等价的前束范式。
- 3、会利用所学的推理方法进行谓词逻辑推理。

基本蕴涵式、基本等值式、与量词有关的等值式和蕴涵式

CP规则、归谬法、

US规则、UG规则、ES规则、EG规则。