

# 第四章 控制系统的稳定性分析

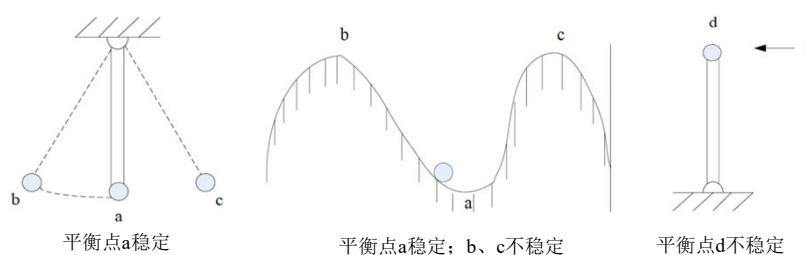
参考书：《自动控制原理(田玉平教授版)》第四章  
《自动控制原理(胡寿松教授版)》第三章

## 第四章 控制系统的稳定性分析

- 稳定性的概念和定义
- 线性定常系统稳定的充要条件
- 系统稳定性的代数判据
- 根轨迹图及系统稳定性分析
- 奈奎斯特稳定性判据

### 4.1 稳定性的概念和定义

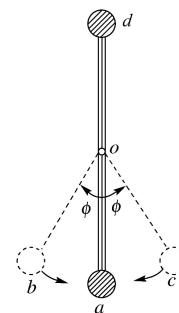
稳定性：控制系统的重要性能，系统正常工作的首要条件



稳定性：外力消失后，回平衡点的能力

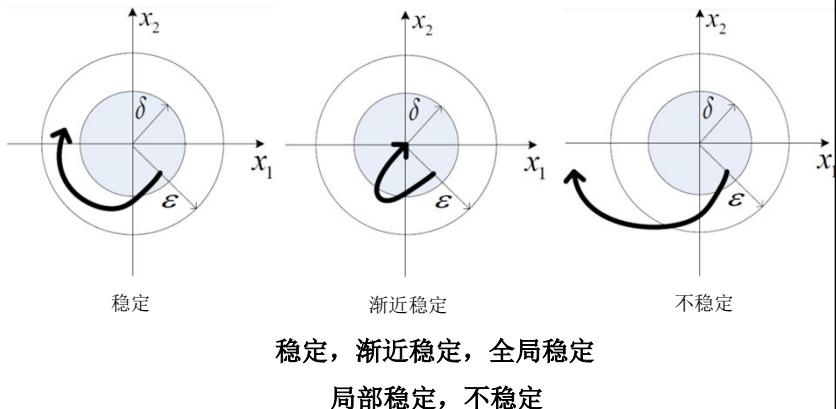
### 4.1 稳定性的概念和定义

系统稳定性：在初始条件影响下，IF 控制系统响应过程随时间的推移而逐渐衰减并趋于零，THEN 该系统具有渐近稳定性，简称具有稳定性。反之，在初始条件影响下，IF 控制系统的响应过程随时间推移而发散，THEN 称该系统具有不稳定性



## 4.1 稳定性的概念和定义

常见术语



## 4.2 线性定常系统稳定的充要条件

### 4.2.1 输入-输出方程

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} u(t) + a_0 u(t)$$

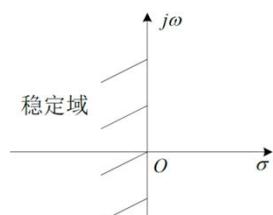
令  $u=0$ , 系统的解轨迹为

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}$$

$\lambda_i$  是特征方程  $a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$  的根 极点

渐近稳定: iff 特征根全部具有负实部

临界稳定: if 虚轴上有单重特征根, 其他具有负实部。系统响应趋于常数 (或等幅振荡)



### 4.2.2 离散时间控制系统

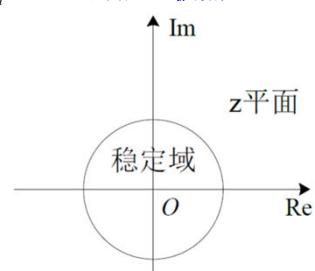
$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \dots + b_m z^{-m} U(z)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

$z_i$  是特征方程  $1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} = 0$  的根 极点

渐近稳定: iff 特征根全部位于  $z$  平面以原点为中心的单位圆内

临界稳定: if  $z$  平面以原点为中心的单位圆上有单重特征根, 其他位于圆内



## 4.3 系统稳定性的代数判据

### 4.3 系统稳定性的代数判据

设线性定常系统闭环传递函数为:

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K' \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

线性系统在零初始条件下，输入理想单位脉冲函数  $r(t)=\delta(t)$

$$R(s) = 1 \quad C(s) = \Phi(s) = \frac{K' \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

拉式反变换

$$c(t) = L^{-1} [\Phi(s)] = L^{-1} \left[ \frac{K' \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \right] = \sum_{j=1}^n a_j e^{-p_j t}$$

只有当特征方程所有根(闭环极点)都具有负实部时，随时间推移， $c(t)$ 才能趋于零，即回到初始状态。反之，若特征根中有一个具有正实部，则  $c(t)$  趋于  $\infty$ 。

线性定常系统稳定充要条件：系统特征方程所有根(即系统闭环极点)均具有负实部(或特征方程所有根均在  $s$  平面左半部)。

若有部分闭环极点位于虚轴上，而其余极点全部在  $s$  平面左半部时，便会出现临界稳定状态(恒值或等幅振荡)。

系统稳定性取决于 **系统参数和结构**，与 **初始条件、外作用无关**。  
确定系统稳定性方法：

- (1) 直接计算或间接得知系统特征方程的根: a) 直接对系统特征方程求解; b) 根轨迹法
- (2) 确定保证闭环极点具有负实部的系统参数区域: 可用赫尔维茨(Hurwitz)判据, 劳斯(Routh)判据, 奈奎斯特判据等方法

注：特征方程求解方法，虽然直观，但对于高阶系统是困难的

系统稳定必要条件：设线性系统的闭环特征方程为

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 = a_n \prod_{i=1}^n (s - s_i) = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

式中， $s_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 是系统  $n$  个闭环极点。

根据代数方程基本理论（韦达定理），

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n s_i &= \frac{a_{n-1}}{a_n} \\ &\vdots \\ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n s_i s_j &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ &\prod_{i=1}^n s_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

→ 系统特征根都具有负实部的**必要条件**为：

$$a_i a_j > 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

即，闭环特征方程各项同号且不缺项。

系统稳定充要条件：

系统稳定  $\Leftrightarrow$  系统特征方程的根全部具有负实部

利用特征方程(即高次代数方程)根与系数的代数关系，由特征方程中已知的系数，**间接判别出方程的根是否具有负实部，从而判定系统是否稳定**(代数稳定性判据)

### 4.3.1 连续时间系统稳定性的代数判据

□ 判据之一：赫尔维茨(Hurwitz)稳定判据

系统稳定充分必要条件：特征方程的赫尔维茨行列式

$D_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots, n$ ) 全部为正

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (\text{一般规定 } a_0 > 0)$$

各阶赫尔维茨行列式：

$$D_1 = a_{n-1} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

### 例4-1 系统特征方程

$$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$$

试用赫尔维茨判据判断系统稳定性

$$\text{解: } D(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$$

第一步：由特征方程得到各项系数

$$a_4 = 2 \quad a_3 = 1 \quad a_2 = 3 \quad a_1 = 5 \quad a_0 = 10$$

第二步：计算各阶赫尔维茨行列式

$$D_1 = a_3 = 1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 2 \times 5 = -7 < 0$$

结论：

系统不稳定

## □ 判据之二：林纳德—奇帕特(Lienard-Chipard)判据

系统稳定充分必要条件：

必要条件

1. 系统特征方程的各项系数大于零，即

$$a_i > 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

2. 奇数阶或偶数阶的赫尔维茨行列式大于零，即

$$D_{\text{奇}} > 0 \quad \text{或} \quad D_{\text{偶}} > 0$$

## 例4-2 单位负反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.25s+1)}$$

试求开环增益  $K$  的稳定域

解：第一步：求系统的闭环特征方程

$$\begin{aligned} D(s) &= s(0.1s+1)(0.25s+1) + K = 0 \\ 0.025s^3 + 0.35s^2 + s + K &= 0 \end{aligned}$$

第二步：列出特征方程的各项系数

$$a_3 = 0.025 \quad a_2 = 0.35 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = K$$

## 第三步：系统稳定的充分必要条件

(1)  $a_i > 0$ , 要求  $K > 0$

(2)  $D_2 > 0$

即： $D_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.35 & K \\ 0.025 & 1 \end{vmatrix} = 0.35 - 0.025K > 0$

解得： $K < 14$

开环增益  $K$  稳定域： $0 < K < 14$

小结： $K$  越大，系统稳定性越差。上述判据不仅判断系统稳定性，而且根据稳定性要求确定系统参数允许范围(即稳定域)

## □ 判据之三：劳斯(Routh)稳定判据

系统稳定充要条件：特征方程式全部系数为正，且由该方程式作出劳斯表中第一列全部元素都为正

若不满足，则不稳定

劳斯表中第一列元素符号改变的次数，等于相应特征方程式位于右半  $s$  平面上根的个数

应用劳斯稳定判据判定系统稳定性的步骤：

(1) 列系统闭环特征方程

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

线性系统稳定 iff 特征方程全部系数为正值，并且由特征方程系数组成劳斯阵第一列的系数也为正值

(2) 各项系数均为实数。检查各项系数是否都存在且大于零 ( $a_i > 0$ )，若都大于零，则进行第二步

(3) 利用特征方程系数构成劳斯计算表

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$	$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_na_{n-3}}{a_{n-1}}$
$s^{n-1}$	<del><math>a_{n-1}</math></del>	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$	
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$	$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_na_{n-5}}{a_{n-1}}$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	$c_1 = \frac{b_1a_{n-3} - b_2a_{n-1}}{b_1}$
$\vdots$	$\vdots$				
$s^1$	$\dots$				
$s^0$	$a_0$				$c_2 = \frac{b_1a_{n-5} - b_3a_{n-1}}{b_1}$

表中：1) 最左一列元素按  $s$  的幂次排列，由高到低，只起标识作用，不参与计算

2) 第一、二行元素，直接用特征方程的元素填入

3) 从第三行起各元素，是根据前两行的元素计算得到

注意：

- 1) 劳斯表的每一行右边要计算到出现零为止；
- 2) 总行数应为  $n+1$ ；
- 3) 如果计算过程无误，最后一行应只有一个数；
- 4) 可用一个正整数去乘或除劳斯表中的任意一行，不改变判断结果。表中空缺的项，运算时以零代入

### 4.3.2 劳斯-霍尔维茨判据的应用

#### (1) 判断系统的稳定性

例4-3 特征方程  $D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$ ，试用劳斯判据判别该特征方程的正实部根数目

解：劳斯表

$s^4$	1	3	5
$s^3$	2	4	
$s^2$	1	5	
$s^1$	-6		
$s^0$	5		

第一列元素符号改变了2次；∴系统不稳定，且  $s$  右半平面有2个根

#### 例4-4 系统特征方程 $D(s) = s^3 - 3s + 2 = 0$

试用劳斯判据确定正实数根的个数

解：系统的劳斯表为

$s^3$	1	-3
$s^2$	0	2
$s^1$	$\infty$	
$s^0$		

**第一种特殊情况：**劳斯表中某行的第一列元素为零，而其余各项不为零，或不全为零。对此情况，可作如下处理：

方法①用一个很小的正数  $\varepsilon$  来代替第一列为零的项，从而使劳斯表继续下去

方法②用因子  $(s+a)$  乘以原特征方程，其中  $a$  可为任意正数，再对新的特征方程应用劳斯判据

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & -3 \\ s^2 & 0(\varepsilon) & 2 \\ \hline s^1 & b_1 = \frac{2+3\varepsilon}{-\varepsilon} \\ s^0 & 2 \end{array}$$

方法①  $\because \varepsilon \rightarrow 0^+$  时,  $b_1 < 0$ , 劳斯表中第一列元素符号改变了两次

$\therefore$  系统有两个正根, 不稳定

方法② 用  $(s+3)$  乘以原特征方程, 得新的特征方程为:

$$D_1(s) = D(s)(s+3) = s^4 + 3s^3 - 3s^2 - 7s + 6 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & -3 & 6 \\ s^3 & 3 & -7 \\ \hline s^2 & -2/3 & 6 \\ s^1 & 20 \\ s^0 & 6 \end{array}$$

得到相同的判断结果

用全零行的上一行的系数构成一个辅助方程, 对辅助方程求导, 用所得方程的系数代替全零行, 继续劳斯表

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & -3 & 2 \\ s^3 & 1 & -1 \\ s^2 & -2 & 2 \rightarrow F(s) = -2s^2 + 2 \\ s^1 & -4 & \leftarrow F'(s) = -4s \\ s^0 & 2 \end{array}$$

劳斯表中第一列元素的符号改变两次,

$\therefore$  系统有两个正根, 系统不稳定。通过解辅助方程可求出关于原点对称的根:  $s_1=1$  和  $s_2=-1$

可用长除法求出另两个根, 分别为  $s_3=1$  和  $s_4=-2$

例4-5 线性系统的闭环特征方程  $D(s) = s^4 + s^3 - 3s^2 - s + 2 = 0$

试用劳斯判据判断系统稳定性

解: 劳斯表

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & -3 & 2 \\ s^3 & 1 & -1 \\ s^2 & -2 & 2 \\ s^1 & 0 & 0 \\ s^0 & \end{array}$$

第二种特殊情况: 劳斯表中某行元素全为零。此时, 特征方程中存在关于原点对称的根(实根, 共轭虚根或共轭复数根)。对此情况, 作如下处理:

例4-6 判断  $D(s) = s^6 + s^5 + 3s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + 1 = 0$  根的情况

解: 该系统的劳斯表如下

$$\begin{array}{c|ccccc} + & + & s^6 & 1 & 3 & 1 \\ + & + & s^5 & 1 & 3 & 2 \\ - & + & s^4 & 0 \leftarrow \varepsilon & 1 & 1 \\ + & - & s^3 & \frac{3\varepsilon - 1}{\varepsilon} & \frac{2\varepsilon - 1}{\varepsilon} & \\ + & + & s^2 & \frac{-2\varepsilon^2 + 4\varepsilon - 1}{3\varepsilon - 1} & 1 & \Rightarrow \begin{array}{l} \text{不一致一定存在虚根} \\ \text{极限值 } 1 \quad 1 \end{array} \\ + & - & s^1 & \frac{4\varepsilon^2 - \varepsilon}{2\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 1} & & \\ + & + & s^0 & 1 & & \\ & & & P(s) = s^2 + 1 \Rightarrow s = \pm j & & \end{array}$$

### 第三种特殊情况：情况(一)和(二)的复合

可以通过 $-\varepsilon$ ,  $\varepsilon$ 首行符号变化判断虚根

用辅助多项式除原多项式，判据其它特征根的分布

$$q(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$

再对 $q(s)$ 用劳斯判据，有

+	+	$s^4$	1	2	1
+	+	$s^3$	1	2	
-	+	$s^2$	0 $\leftarrow \varepsilon$	1	
+	-	$s^1$	$\frac{2\varepsilon - 1}{\varepsilon}$		
+	+	$s^0$	1		

### Hurwitz判据与Routh判据的关系

Hurwitz行列式各阶子式与Routh表中第一列的元素：

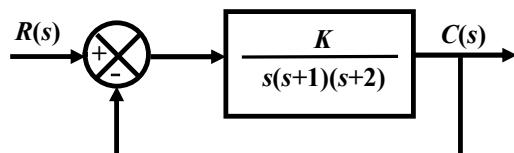
$$\begin{aligned}a_n &= a_n \\a_{n-1} &= D_1 \\b_1 &= D_2 / D_1 \\c_1 &= D_3 / D_2 \\\vdots & \\e_1 &= D_{n-2} / D_{n-3} \\f_1 &= D_{n-1} / D_{n-2} \\g_1 &= D_n / D_{n-1}\end{aligned}$$

注意：系统阶数小于7  
可采用Hurwitz判据

若Routh表中第一列的元素都大于0，  
则Hurwitz行列式各阶子式也大于0，反之亦然

### (2) 分析参数变化对稳定性的影响

例4-7 系统结构图如下，试确定使系统稳定时 $K$ 的取值范围



解：系统特征方程式  $s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$

$s^3$	1	2
$s^2$	3	$K$
$s^1$	$(6-K)/3$	
$s^0$	$K$	

要使系统稳定，劳斯表中第一列  
元素均大于零

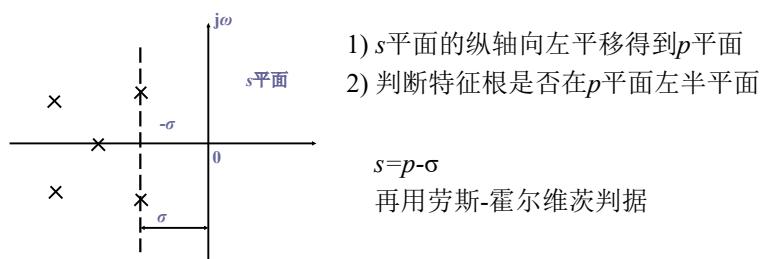
$$0 < K < 6$$

### (3) 确定系统的相对稳定性（稳定裕度）

相对稳定性或稳定裕度（时域）：

以实部最大的特征根和虚轴之间的距离 $\sigma (\sigma > 0)$

一般来说， $\sigma$ 愈大则系统的稳定度愈高



1)  $s$ 平面的纵轴向左平移得到 $p$ 平面

2) 判断特征根是否在 $p$ 平面左半平面

$$s = p - \sigma$$

再用劳斯-霍尔维茨判据

例4-8 上例若要系统具有 $\sigma=1$  以上稳定裕度量, 试确定 $K$

解: 将代入原系统的特征方程, 得  $s = z - 1$

$$(z-1)^3 + 13(z-1)^2 + 30(z-1) + K_g = 0$$

$$z^3 + 10z^2 + 7z + (K_g - 18) = 0$$

$$\begin{cases} K_g - 18 > 0 \\ 10 \times 7 - (K_g - 18) > 0 \end{cases}$$

根据劳斯判据, 稳定的充要条件是

$$18 < K_g < 88$$

$$\text{则 } 0.6 < K < 2.93$$

### (3) 确定系统的相对稳定性

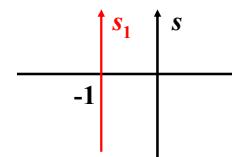
例4-9 检验多项式  $2s^3 + 10s^2 + 13s + 4 = 0$

是否有根在  $s$  右半平面, 并检验有几个根在垂直线  $s = -1$  的右边?

解: 1)	$s^3$	2	13	劳斯表中第一列元素均为正
	$s^2$	10	4	$\therefore$ 系统在 $s$ 右半平面没有根,
	$s^1$	12.2		系统是稳定的
	$s^0$	4		

2) 令  $s = s_1 - 1$  坐标平移,  
得新特征方程为

$$2s_1^3 + 4s_1^2 - s_1 - 1 = 0$$



$s_1^3$	2	-1
$s_1^2$	4	-1
$s_1^1$	-0.5	
$s_1^0$	-1	

劳斯表中第一列元素不全为正, 且第一列元素符号改变一次,  
故系统在  $s_1$  右半平面有一个根

$\therefore$  系统在垂直线  $s = -1$  的右边有一个根

问题: 为何要学习Routh判据和Hurwitz判据  
(代数判据)

能否求解特征方程的根?

阶数>4, 无法精确求解

## 回顾

1. 劳斯判据的充要条件回顾
2. 劳斯判据的三种情况，如何处理
3. 霍尔判据的充要条件

**思考题** 单位负反馈系统的开环传递函数为  $G_0(s) = \frac{K(s+1)}{s^3 + as^2 + (3+K)s + 1+K}$

分析闭环系统临界稳定时  $K, a$  的取值范围，并求对应的特征值

$$\text{闭环传递函数: } \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{K(s+1)}{s^3 + as^2 + (3+K)s + 1+K}$$

$\begin{array}{c cc} s^3 & 1 & 3+K \\ s^2 & a & 1+K \\ s^1 & \frac{a(3+K)-(1+K)}{a} & \\ s^0 & 1+K & \end{array}$	(1) $a \neq 1, 1+K \neq 0, \frac{a(3+K)-(1+K)}{a} = 0$ $a > 0, 1+K > 0$ $K = -3 + \frac{2}{a-1} \rightarrow K > 0, a > 0$
	$as^2 + (1+k)s = 0 \Rightarrow s = \pm i\sqrt{\frac{1+k}{a}}$

$\begin{array}{c cc} s^3 & 1 & 3+K \\ s^2 & 3 & 3+K \\ s^1 & 6+2K & \\ s^0 & 3+K & \end{array}$
---

$$(2) a = 0, 1+K = 0$$

$$P(s) = s^3 + (3+K)s$$

$$P(s) = 0 \Rightarrow s = \pm i\sqrt{2}, 0$$

$\begin{array}{c cc} s^3 & 1 & 3+K \\ s^2 & a & 0 \\ s^1 & 2 & \\ s^0 & 0 & \end{array}$
--

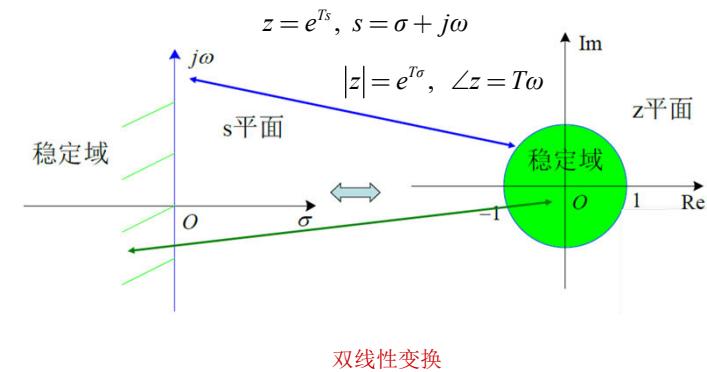
$$(3) a > 0, 1+K = 0$$

$$P(s) = 2s$$

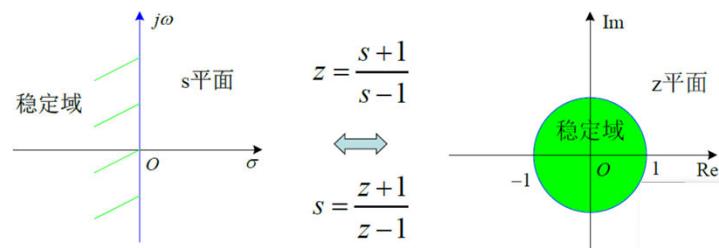
$$P(s) = 0 \Rightarrow s = 0$$

### 4.3.3 离散时间系统稳定性的代数判据

劳斯-霍尔维茨判据在离散系统中的应用



### 4.3.3 离散时间系统稳定性的代数判据



转换后，通过  $s$  的实部是否大于0来判断系统稳定性

### 4.3.3 离散时间系统稳定性的代数判据

- 虚轴 → 单位圆周  $z = \frac{j\omega + 1}{j\omega - 1} \Rightarrow A(z) = 1$
- 左半平面 → 单位圆内  $z = \frac{-\Delta + j\omega + 1}{-\Delta + j\omega - 1} \Rightarrow A(z) = \frac{\sqrt{\omega^2 + (1-\Delta)^2}}{\sqrt{\omega^2 + (1+\Delta)^2}} < 1$
- 右半平面 → 单位圆外  $z = \frac{\Delta + j\omega + 1}{\Delta + j\omega - 1} \Rightarrow A(z) = \frac{\sqrt{\omega^2 + (1+\Delta)^2}}{\sqrt{\omega^2 + (-1+\Delta)^2}} > 1$

### 如何应用劳斯-霍尔维茨判据判断离散系统的稳定性

- 求出离散系统的特征方程  $D(z)=0$
- 在  $D(z)$  中令  $z=(s+1)/(s-1)$ , 得到  $\bar{D}(s)=0$
- 再用劳斯-霍尔维茨判据

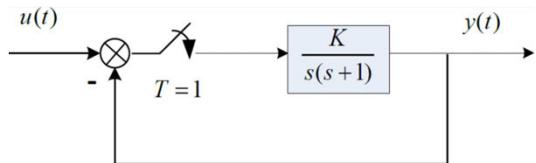
### 例4-10 离散系统的特征方程 $D(z) = 45z^3 + 117z^2 + 119z + 39 = 0$

试判别系统的稳定性

$$\begin{aligned}\bar{D}(s) &= 45\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^3 + 117\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 + 119\left(\frac{s+1}{s-1}\right) + 39 = 0 \\ \bar{D}(s) &= 40s^3 + 2s^2 + 2s + 1 = 0\end{aligned}$$

$s^3$	<b>40</b>	<b>2</b>	系统有两个根在单位圆外, 不稳定
$s^2$	2	1	
$s^1$	<b>-18</b>		
$s^0$	1		

例4-11 求图中闭环采样系统稳定时K值范围



$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)} = K \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) \Rightarrow G(z) = \frac{Kz(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$$D(z) = z^2 + (0.63K - 1.37)z + 0.37 = 0$$

$$\bar{D}(s) = \left( \frac{s+1}{s-1} \right)^2 + (0.63K - 1.37) \left( \frac{s+1}{s-1} \right) + 0.37 = 0$$

例4-11 求图中闭环采样系统稳定时K值范围

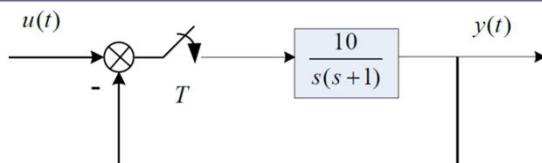
$$\bar{D}(s) = 0.63Ks^2 + 1.26s + 2.74 - 0.63 = 0$$

$s^2$	$0.63K$	$2.74 - 0.63K$
$s^1$	1.26	
$s^0$	2.74 - 0.63K	

$$\begin{aligned} 2.74 - 0.63K &> 0 \\ 0.63K &> 0 \end{aligned}$$

$$0 < K < 4.35$$

例4-12 求图中闭环采样系统稳定时采样周期取值范围



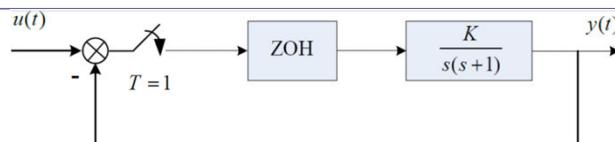
$$D(z) = z^2 + (9 - 11e^{-T})z + e^{-T} = 0$$

$$\bar{D}(s) = \left( \frac{s+1}{s-1} \right)^2 + (9 - 11e^{-T}) \left( \frac{s+1}{s-1} \right) + e^{-T} = 0$$

$$\bar{D}(s) = 10(1 - e^{-T})s^2 + 2(1 - e^{-T})s + (12e^{-T} - 8) = 0$$

$$\begin{aligned} 1 - e^{-T} &> 0 \\ 12e^{-T} - 8 &> 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad 0 < T < 0.405$$

思考题：试求图中闭环系统稳定时K值范围



$$G(z) = \frac{\frac{K(0.368z + 0.264)}{(z-1)(z-0.368)}}{1 + \frac{K(0.368z + 0.264)}{(z-1)(z-0.368)}}$$

$$D(z) = z^2 + (0.368K - 1.368)z + (0.368 + 0.264K)$$

$$\bar{D}(s) = \left( \frac{s+1}{s-1} \right)^2 + (0.368K - 1.368) \left( \frac{s+1}{s-1} \right) + (0.368 + 0.264K) = 0$$

朱利(Jury)判据: 直接在z域内应用的稳定性判据

$$D(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_n > 0$$

行	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$\dots$	$z^{n-k}$	$\dots$	$z^{n-2}$	$z^{n-1}$	$z^n$
1	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$a_{n-k}$	$\dots$	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
2	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_k$	$\dots$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
3	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_{n-k}$	$\dots$	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	
4	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$\dots$	$b_{k-1}$	$\dots$	$b_1$	$b_0$	
5	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_{n-k}$	$\dots$	$c_{n-2}$		
6	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$\dots$	$c_{k-2}$	$\dots$	$c_0$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						
$2n-5$	$l_0$	$l_1$	$l_2$	$l_3$					
$2n-4$	$l_3$	$l_2$	$l_1$	$l_0$					
$2n-3$	$m_0$	$m_1$	$m_2$						

(2n-3)×(n+1)维的朱利阵

偶数行是将奇数行反序排列

$$\begin{aligned} b_k &= \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \\ c_k &= \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-k-1} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2 \\ d_k &= \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-k-2} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n-3 \end{aligned}$$

朱利判据(充要条件):

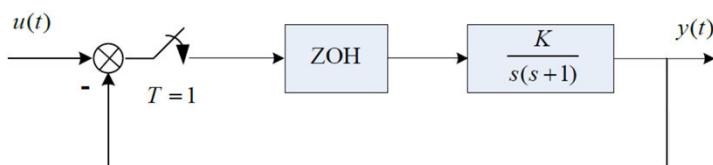
$$(1) D(1) = D(z)|_{z=1} > 0 \quad \text{系数之和}>0$$

$$(2) (-1)^n D(-1) = (-1)^n D(z)|_{z=-1} > 0 \quad a_n - a_{n-1} + \dots - a_1 + a_0 > 0$$

(3) 朱利阵中的元素满足下列(n-1)个约束条件

$$|a_0| < a_n; |b_0| > |b_{n-1}|; |c_0| > |c_{n-2}|; \dots; |l_0| > |l_3|; |m_0| > |m_2|$$

例4-13 试求图中闭环采样系统稳定时K值范围



$$D(z) = z^2 + (0.368K - 1.368)z + (0.368 + 0.264K)$$

$$a_2 = 1, \quad a_1 = 0.368K - 1.368, \quad a_0 = 0.368 + 0.264K$$

例4-13 试求图中闭环采样系统稳定时K值范围

朱利判据

$$(1) D(1) = a_2 + a_1 + a_0 = 1 + (0.368K - 1.368) + 0.368 + 0.264K > 0$$

$$\Rightarrow K > 0$$

$$(2) (-1)^n D(-1) = a_2 - a_1 + a_0 = 1 - (0.368K - 1.368) + 0.368 + 0.264K > 0$$

$$\Rightarrow K < 26.31$$

$$(3) |a_0| < a_n \Rightarrow |0.368 + 0.264K| < 1 \Rightarrow K < 2.39$$

$$0 < K < 2.39$$

**例4-14** 离散时间系统的特征多项式如下, 试判断系统稳定性

$$D(z) = 2z^4 + 7z^3 + 10z^2 + 4z + 1$$

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$
1	1	4	10	7	2
2	2	7	10	4	1
3	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$	$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10$	$\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = -10$	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -1$	
4	-1	-10	-10	-3	
5	$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 8$	$\begin{vmatrix} -3 & -10 \\ -1 & -10 \end{vmatrix} = 20$	$\begin{vmatrix} -3 & -10 \\ -1 & -10 \end{vmatrix} = 20$		

**例4-14** 离散时间系统的特征多项式如下, 试判断系统稳定性

$$D(z) = 2z^4 + 7z^3 + 10z^2 + 4z + 1$$

- 朱利判据 (1)  $D(1) = 2 + 7 + 10 + 4 + 1 > 0$   
 (2)  $(-1)^n D(-1) = 2 - 7 + 10 - 4 + 1 > 0$   
 (3)  $|a_0| < a_4, yes \quad |b_0| > b_3, yes \quad |c_0| > c_2, no$

不稳定

**思考题** 离散时间系统的特征多项式  $D(z) = z^3 + 2z^2 - 0.54z - 1$

试判断系统稳定性

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$
1	-1	-0.5	2	1
2	1	2	-0.5	-1
3	$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = -1.5$	$\begin{vmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.5$	

(1)  $D(1) = 2 + 7 + 10 + 4 + 1 > 0$

朱利判据 (2)  $(-1)^n D(-1) = 2 - 7 + 10 - 4 + 1 > 0$  不稳定  
 (3)  $|a_0| < a_4, yes \quad |b_0| > b_3, yes \quad |c_0| > c_2, no$

问题: 如果系统的某个参数发生变化,

特征根如何变化?

系统的稳定性又如何?

◇ 反复计算特征方程的根?

不现实, 阶数>4, 无法精确求解

◇ 采用Routh-Hurwitz(Jury)判断?

只能判断系统稳定性的变化, 无法描述特征根的变化

采用Evans提出的图解法, 根轨迹图

## 4.4 根轨迹图及系统稳定性分析

### 4.4 根轨迹图及系统稳定性分析

控制系统的稳定性及动态性能与系统的闭环极点和零点在  $s$  平面上的位置密切相关，因此可根据闭环零极点的分布来间接地研究系统的性能

当特征方程的阶数高于四阶时，求解零极点的过程比较复杂。如果要研究系统参数变化对闭环特征方程根的影响，那么就需要进行大量的反复计算，同时还不能直观看出影响趋势。因此对于高阶系统的求根问题来说，解析法就显得很不方便

#### 4.4.1 根轨迹图的基本概念

1948年，W.R. Evans 在文献“控制系统的图解分析”中提出在复平面上由系统的开环传递函数求取闭环特征根的方法，即根轨迹法。当开环增益或其它参数改变时，其全部数值对应的闭环极点均可在根轨迹图上简便地确定

根轨迹法是分析和设计线性定常控制系统，求解特征方程根的图解方法，使用十分简便，特别是对于多回路系统的研究

借助于根轨迹法，可以方便直观地分析系统特征根与系统参数之间的关系

**根轨迹：**系统某一参数在规定范围内变化时，闭环系统特征方程根在  $s$  平面上位置也随之变化移动，一个根形成一条轨迹

► **广义根轨迹：**系统的任意一个参数变化所形成的根轨迹

► **常规（狭义）根轨迹（通常情况）：**

变化参数为 **开环增益  $K$** ，且其变化取值范围为  $0$  到  $\infty$

根轨迹的基本概念：根轨迹与系统性能之间的关系，

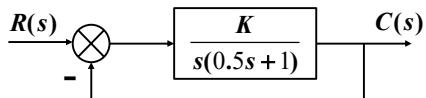
► 从闭环零、极点与开环零、极点之间关系推导出根轨迹方程

► 将向量形式根轨迹方程转化为幅(相)角条件和幅(模)值条件形式

► 绘制系统根轨迹

## 1. 根轨迹概念

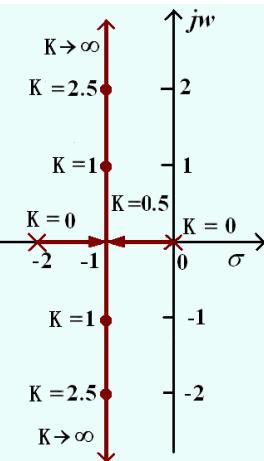
例4-16 控制系统的结构图:



$$G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)} \quad \Phi(s) = \frac{2K}{s^2 + 2s + 2K}$$

特征方程:  $s^2 + 2s + 2K = 0$

特征根:  $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2K}$

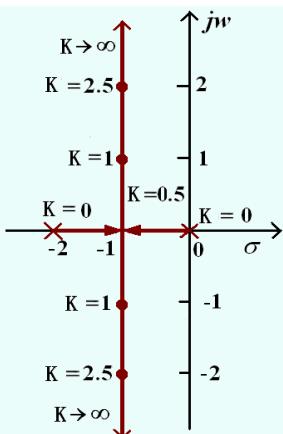


令开环增益K从0变到 $\infty$ ;  
粗实线为系统的根轨迹;  
箭头表示随着K值增加，根轨迹变化趋势;  
标注的数值为与闭环极点位置相对应的开环增益K的数值

## 2. 根轨迹与系统性能

(1) 稳定性: 当开环增益从零变到无穷时, 如果根轨迹没有越过虚轴进入s右半平面, 则系统对所有的K值都是稳定的;

如果系统的根轨迹越过虚轴进入s右半平面, 此时根轨迹与虚轴交点处的K值, 就是临界开环增益。

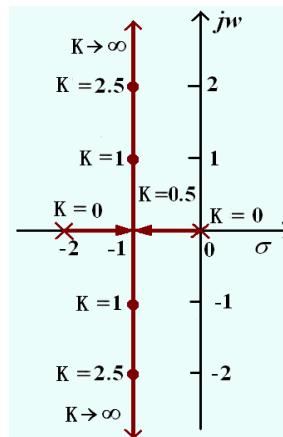


## 2. 根轨迹与系统性能

(2) 稳态性能: 由开环系统在坐标原点处的极点数可判断出系统的型别, 而此时的K值就是相应的静态误差系数。

如果给定系统的稳态误差要求, 则由根轨迹图可以确定闭环极点位置的容许范围。

$$G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)}$$



## 2. 根轨迹与系统性能

(3) 动态性能:

当  $0 < K < 0.5$  时: 过阻尼系统;

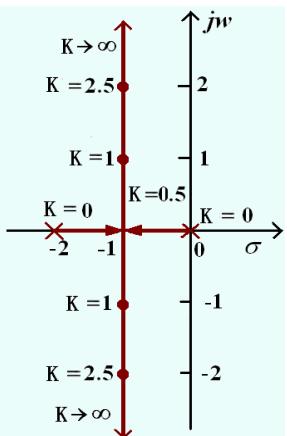
当  $K = 0.5$  时:

临界阻尼系统;

当  $K > 0.5$  时:

欠阻尼系统

$$\Phi(s) = \frac{2K}{s^2 + 2s + 2K}$$



## 3. 闭环零、极点与开环零、极点之间的关系

反馈通路传递函数  $H(s)$  表示为:

$$H(s) = K_h^* \frac{\prod_{f=1}^{m_2} (s - z_{hf})}{\prod_{l=1}^{n_2} (s - p_{hl})} \quad K_h^*: \text{反馈通路根轨迹增益}$$

则系统开环传递函数表示为:

$$G(s)H(s) = K_g \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (s - z_{gi}) \prod_{f=1}^{m_2} (s - z_{hf})}{\prod_{j=1}^{n_1} (s - p_{gj}) \prod_{l=1}^{n_2} (s - p_{hl})}$$

$K_g = K_g^* K_h^*$ : 开环系统根轨迹增益

## 3. 闭环零、极点与开环零、极点之间关系

一般情况下, 前向通路传递函数  $G(s)$  表示为:

$$G(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2^2 s^2 + 2\zeta_1 \tau_2 s + 1) \cdots}{s^v (T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\zeta_2 T_2 s + 1) \cdots} = K_g^* \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (s - z_{gi})}{\prod_{j=1}^{n_1} (s - p_{gj})}$$

$K$ : 前向通路增益;

$K_g^*$ : 前向通路根轨迹增益

$$K_g^* = K \frac{\tau_1 \tau_2^2 \cdots}{T_1 T_2^2 \cdots}$$

## 3. 闭环零、极点与开环零、极点之间的关系

对于有  $m$  个开环零点和  $n$  个开环极点系统, 必有  $m_1 + m_2 = m$  和  $n_1 + n_2 = n$ 。则

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{K_g^* \prod_{i=1}^{m_1} (s - z_{gi}) \prod_{j=1}^{n_2} (s - p_{hj})}{\prod_{f=1}^n (s - p_f) + K_g \prod_{l=1}^m (s - z_l)}$$

$$G(s) = K_g^* \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (s - z_{gi})}{\prod_{j=1}^{n_1} (s - p_{gj})} \quad H(s) = K_h^* \frac{\prod_{f=1}^{m_2} (s - z_{hf})}{\prod_{l=1}^{n_2} (s - p_{hl})}$$

### 3. 闭环零、极点与开环零、极点之间的关系

结论：

- 1) 闭环系统根轨迹增益等于开环系统前向通路根轨迹增益。对单位反馈系统，闭环系统根轨迹增益等于开环系统根轨迹增益
- 2) 闭环零点由开环前向通路零点与反馈通路极点组成。对单位反馈系统，闭环零点是开环零点
- 3) 闭环极点与开环零点、开环极点以及根轨迹增益  $K^*$  均有关

### 3. 闭环零、极点与开环零、极点之间的关系

根轨迹法的基本任务：

如何由已知的开环零、极点分布及根轨迹增益，通过图解方法找出闭环极点

#### 4.4.2 幅值条件和相角条件

根轨迹是系统所有闭环极点集合，闭环系统特征方程：

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

即：  $G(s)H(s) = -1$

$$\text{等价为: } K_g \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1$$

称为根轨迹方程

由于  $-1 = 1e^{j(2k+1)\pi}$ ;  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

幅(相)角条件：  $\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k + 1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\begin{aligned} \text{幅(模)值条件: } K &= K_g \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^n p_j} \quad |G_0(s)| = K_g \frac{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = 1 \\ &\Rightarrow K_g = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s - z_j|} \end{aligned}$$

根据相角条件和模值条件，可以确定s平面上根轨迹和根轨迹上对应 $K_g$ 值：

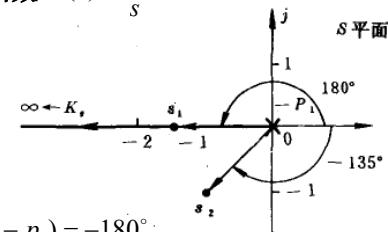
1. 相角条件是s平面上根轨迹所要满足的充要条件；
2. 模值条件可确定s平面上根轨迹各点所对应根轨迹增益 $K_g$ 。

例4-17 单位反馈系统的开环传递函数  $G(s) = \frac{K}{s}$

一个开环极点  $P_1 = 0$

负实轴上点  $s_1$

$$\sum_{i=1}^m \angle(s_1 - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s_1 - p_i) = -\angle(s_1 - p_1) = -180^\circ$$



负实轴上的点都是根轨迹上的点！

$$s_2 = -1-j \quad \sum_{i=1}^m \angle(s_2 - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s_2 - p_i) = -\angle(s_2 - p_1) = 135^\circ$$

负实轴外的点都不是根轨迹上的点！

#### 4.4.3 根轨迹绘制的基本法则

常规根轨迹：当可变参数为系统开环增益(根轨迹增益 $K^*$ )时，所绘制的根轨迹。其相角遵循 $180^\circ + 2k\pi$ 条件，因此称为 $180^\circ$ 根轨迹，相应的绘制法则称为 $180^\circ$ 根轨迹的绘制法则

◆ 法则1：根轨迹的起点和终点

根轨迹起于开环极点，终于开环零点

**证明：**设有 $m$ 个零点,  $n$ 个极点开环系统传递函数为:

$$G(s)H(s) = K^* \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

则由其组成的闭环系统特征方程:

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0$$

式中:  $K^* = 0 \rightarrow \infty$

起点:  $K^* = 0$       特征方程为:  $\prod_{i=1}^n (s - p_i) = 0$

$$\therefore s = p_i (i = 1, 2 \cdots n)$$

终点:  $K^* = \infty$       特征方程为:  $\prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0$

$$\therefore s = z_j (i = 1, 2 \cdots m)$$

实际系统中, 有 $m$ 个零点,  $n$ 个极点的开环系统传递函数一般满足 $m \leq n$ , 因此有 $n-m$ 条根轨迹的终点在无穷远处, 这是因为 $s \rightarrow \infty$ 时, 根据模值条件有:

$$K^* = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s - z_j|} = \lim_{s \rightarrow \infty} |s|^{n-m} = \infty$$

如果把有限数值的零点称作有限零点, 则把无穷远处的零点称为无限零点, 那么根轨迹必终止于开环零点。在无限零点的意义下, 系统的开环零极点数目相等

在绘制其它参数根轨迹时, 可能有 $m > n$ 的情况, 则有 $m-n$ 条根轨迹的起点在无穷远处, 称为无限极点, 此时系统的开环零极点数也是相等的

根轨迹起于开环极点, 终于开环零点

#### ◆ 法则 2: 根轨迹的分支数、对称性和连续性

根轨迹的分支数与开环有限零点 $m$ 和有限极点 $n$ 中的大者相等, 它们是连续的且对称于实轴

证明：

**分支数：**根轨迹是开环系统某一参数在规定范围内变化时，闭环特征方程的根在s平面上变化轨迹。因此根轨迹分支数必与闭环特征方程根的数目相一致。

闭环特征方程根的数目就等于 $m$ 和 $n$ 中的大者，所以根轨迹的分支数必与开环有限零、极点数中的大者相同。

**连续性：**由于根轨迹增益 $K^*$ 是连续变化的，特征方程的某些系数也随之而连续变化，因而特征根也会连续变化，故根轨迹具有连续性。

**对称性：**因为闭环特征方程的系数为实数，闭环特征方程的根只有实根和复根两种。实根位于实轴上，复根必共轭，而根轨迹是闭环特征根的集合，因此根轨迹对称于实轴。

#### ❖ 法则 3：根轨迹的渐近线

当 $n > m$ 时，有 $n-m$ 条根轨迹分支沿着与实轴交角 $\varphi_a$ ，交点为 $\sigma_a$ 的一组渐近线趋向无穷远处，且有：

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-m-1)$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$$

**证明：**渐近线可以理解为 $|s|$ 很大时根轨迹，故其必对称于实轴

$$\text{由于: } G(s)H(s) = K^* \frac{\prod_{j=1}^m (s-z_j)}{\prod_{i=1}^n (s-p_i)} = K^* \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$\text{式中: } a_1 = -\sum_{i=1}^n p_i \quad b_1 = -\sum_{j=1}^m z_j$$

当  $K^* \rightarrow \infty, s \rightarrow \infty$  时有  $G(s)H(s)$  近似为：

$$G(s)H(s) \approx \frac{K^*}{s^{n-m} + (a_1 - b_1)s^{n-m-1}}$$

由根轨迹方程:  $G(s)H(s) = -1$  得:

$$s^{n-m} \left(1 + \frac{a_1 - b_1}{s}\right) = -K^* \quad \text{或} \quad s \left(1 + \frac{a_1 - b_1}{s}\right)^{\frac{1}{n-m}} = (-K^*)^{\frac{1}{n-m}}$$

根据二项式定理将  $\left(1 + \frac{a_1 - b_1}{s}\right)^{\frac{1}{n-m}}$  展开

$$\left(1 + \frac{a_1 - b_1}{s}\right)^{\frac{1}{n-m}} = 1 + \frac{a_1 - b_1}{(n-m)s} + \frac{1}{2!} \frac{1}{n-m} \left(\frac{1}{n-m} - 1\right) \left(\frac{a_1 - b_1}{s}\right)^2 + \dots$$

$$\text{在 } s \text{ 值很大时: } \left(1 + \frac{a_1 - b_1}{s}\right)^{\frac{1}{n-m}} \approx 1 + \frac{a_1 - b_1}{(n-m)s}$$

$$\text{解得: } \sqrt[n-m]{K^*} = \frac{\omega}{\sin \varphi_a} = \frac{\sigma - \sigma_a}{\cos \varphi_a}$$

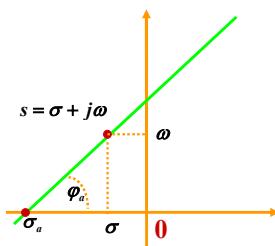
进而有:  $\omega = (\sigma - \sigma_a) \tan \varphi_a$

$$\text{式中: } \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \quad \sigma_a = -\frac{a_1 - b_1}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$$

在  $s$  复平面上  $\omega = (\sigma - \sigma_a) \tan \varphi_a$

表示一条直线: 与实轴的交

点为  $\sigma_a$ , 与实轴的夹角为  $\varphi_a$



$$\text{代入渐近线方程, 得: } s \left(1 + \frac{a_1 - b_1}{(n-m)s}\right) = (-K^*)^{\frac{1}{n-m}}$$

$$\text{令: } s = \sigma + j\omega$$

$$\text{有: } \left(\sigma + \frac{a_1 - b_1}{n-m}\right) + j\omega = \sqrt[n-m]{K^*} \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{n-m} + j \sin \frac{(2k+1)\pi}{n-m}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-m-1)$$

$$\text{则: } \sigma + \frac{a_1 - b_1}{n-m} = \sqrt[n-m]{K^*} \cos \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

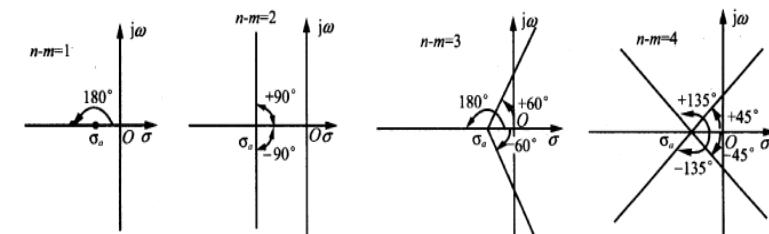
$$\omega = \sqrt[n-m]{K^*} \sin \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

$$\text{说明} \quad \varphi_a = \frac{(2k+1)180^\circ}{n-m} \quad \sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$$

1) 当  $k$  取不同值时,  $\varphi_a$  有  $(n-m)$  个值, 而  $\sigma_a$  不变;

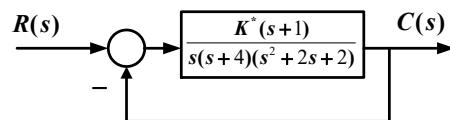
2) 根轨迹在  $s \rightarrow \infty$  时, 渐近线为

$(n-m)$  条与实轴交点为  $\sigma_a$ 、相角为  $\varphi_a$  的一组射线



例4-18 设  $G(s) = \frac{K^*(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$ , 试求由三个基本法则

确定数据并绘制相应图形



解: 由开环传递函数可得:  $m=1, n=4$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -4, \quad p_3 = -1+j, \quad p_4 = -1-j, \quad z_1 = -1$$

法则1: 起点:  $p_1=0, p_2=-4, p_3=-1+j, p_4=-1-j$

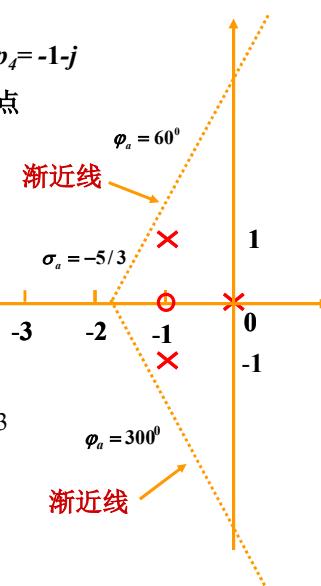
终点:  $z_1=-1$  和三个无穷远零点

法则2: 四条根轨迹分支

法则3: 比较线与实轴的交点及夹角为:

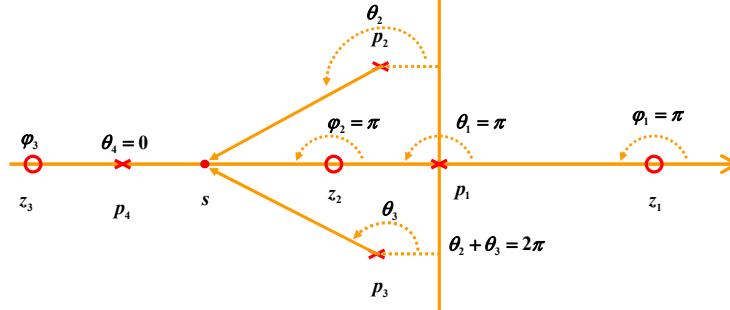
$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^4 p_j - \sum_{i=1}^1 z_i}{4-1} = \frac{-1-4-j-1-j+1}{3} = -5/3$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{4-1}, \quad k=0, 1, 2$$



#### ◆ 法则4: 根轨迹在实轴上的分布

实轴上某一区域, 若其右边开环实数零、极点个数之和为奇数, 则该区域必是根轨迹

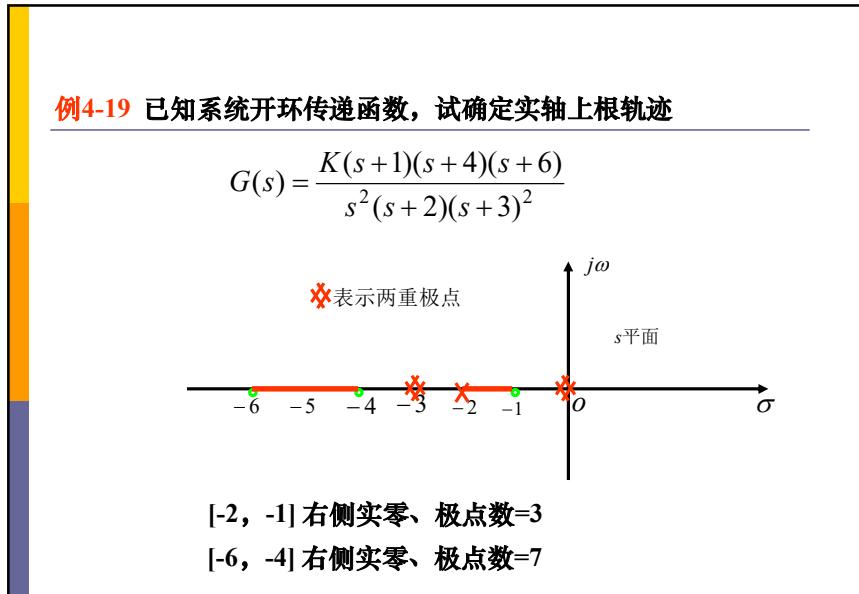
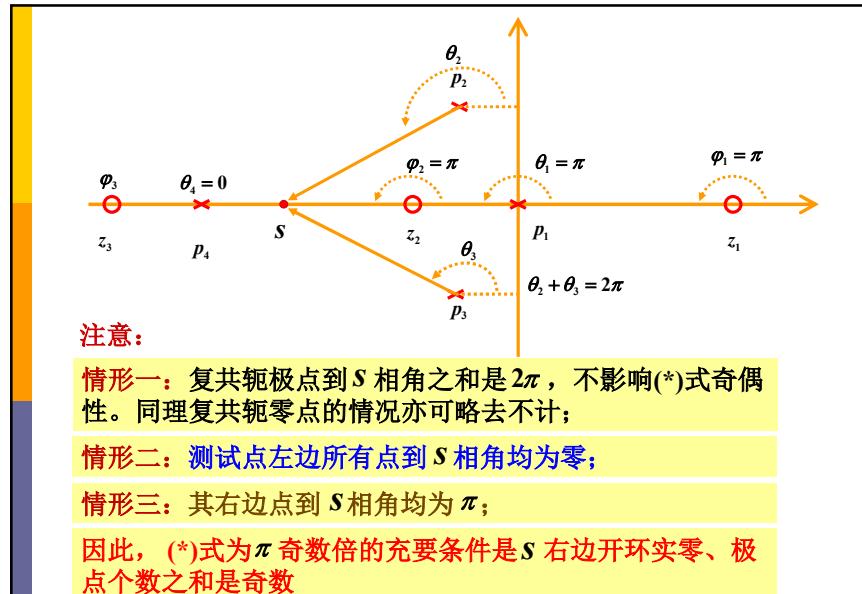


证明: 开环零、极点分布如图所示。设  $S$  是测试点。

则  $S$  为根轨迹上点的充要条件为:

$$\sum \angle(s-z_j) - \sum \angle(s-p_i) = (2k+1)\pi \quad (*)$$

即开环零点到  $S$  的相角之和减去开环极点到  $S$  的相角之和是  $\pi$  的奇数倍。



◆ 法则 5：根轨迹的分离点与分离角(汇合点与汇合角)

两条或两条以上根轨迹分支在s平面上相遇又立即分开的点，称为根轨迹的分离点。分离点坐标 $d$ 是方程：

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i}$$

的解，式中 $z_i$ : 各开环零点数值， $p_i$ : 各开环极点数值

➤ 分离角(分离点处, 根轨迹切线与实轴夹角)为:

$(2k \pm 1)\pi/l$  ( $l$  代表根轨迹数目)

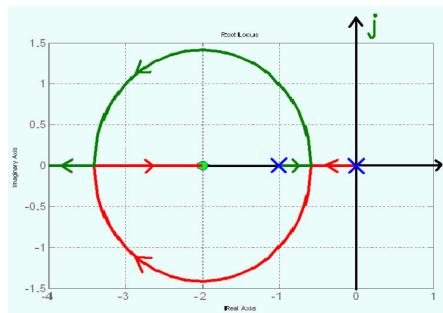
分离点的特性：

- 因为根轨迹是对称的，所以根轨迹的分离点或位于实轴上，或以共轭形式成对出现在复平面

➤ 常见的根轨迹分离点位于实轴上两条根轨迹分支的分离点

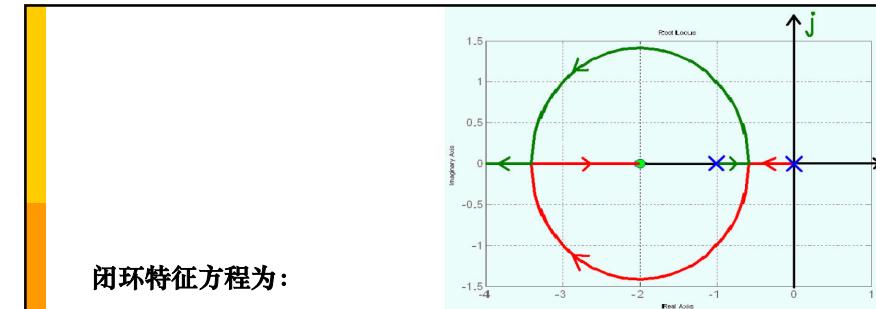
注：

- 实轴上两个相邻开环极点(其中一个可以是无限极点)间有根轨迹，则它们间有分离点
  - 实轴上两个相邻开环零点(其中一个可以是无限零点)间有根轨迹，则它们间有汇合点
  - 实轴上相邻开环零点和极点间有根轨迹，则可有可无



证明：由根轨迹方程，

$$\text{有: } 1 + K^* \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = 0$$



闭环特征方程为：

$$D(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) + K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0$$

根轨迹在  $s$  平面上相遇，说明闭环特征方程在相遇点处有重根出现。设重根为  $d$ ，根据代数中重根条件：

$$\begin{cases} D(s) = 0 \\ D'(s) = 0 \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) = -K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j) \quad \xrightarrow{\text{两端微分}} \quad \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^n (s - p_i) = -K^* \frac{d}{ds} \prod_{j=1}^m (s - z_j)$$

$$\frac{\frac{d}{ds} \prod_{i=1}^n (s - p_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{\frac{d}{ds} \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{j=1}^m (s - z_j)} \quad \xrightarrow{\text{得}} \quad \frac{d \ln \prod_{i=1}^n (s - p_i)}{ds} = \frac{d \ln \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{ds}$$

$$\text{代入} \quad \ln \prod_{i=1}^n (s - p_i) = \sum_{i=1}^n \ln(s - p_i)$$

$$\ln \prod_{j=1}^m (s - z_j) = \sum_{j=1}^m \ln(s - z_j)$$

$$\text{得: } \sum_{i=1}^n \frac{d \ln(s - p_i)}{ds} = \sum_{j=1}^m \frac{d \ln(s - z_j)}{ds}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(s - p_i)} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{(s - z_j)}$$

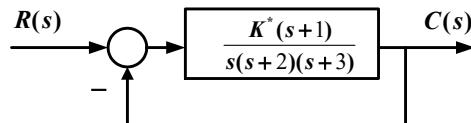
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(d - p_i)} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{(d - z_j)}$$

$d$  即为根轨迹的分离点

当  $l$  条根轨迹分支进入并立即离开分离点时，分离角可由  $(2k+1)\pi/l$  来决定，其中  $k=0, 1, 2, \dots, l-1$ 。

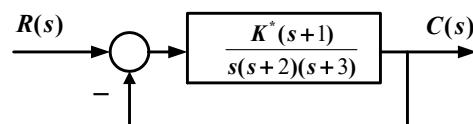
分离角定义为根轨迹进入分离点的切线方向与离开分离点的切线方向与实轴之间的夹角。显然，当  $l=2$  时，分离角必为直角。

例4-20 系统结构图如图所示，绘制其概略根轨迹。



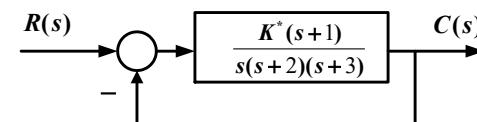
解：

法则1、2：一条根轨迹分支起于开环极点（0），终止于开环零点（-1），另外两条根轨迹分支起于开环极点（-2）和（-3），终止于无穷远处（无限零点）。



法则3：两条终止于无穷远处的根轨迹的渐近线与实轴的交角为  $90^\circ$  和  $270^\circ$ ，交点坐标为：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^3 p_i - \sum_{j=1}^1 z_j}{n-m} = \frac{(0-2-3)-(-1)}{3-1} = -2$$

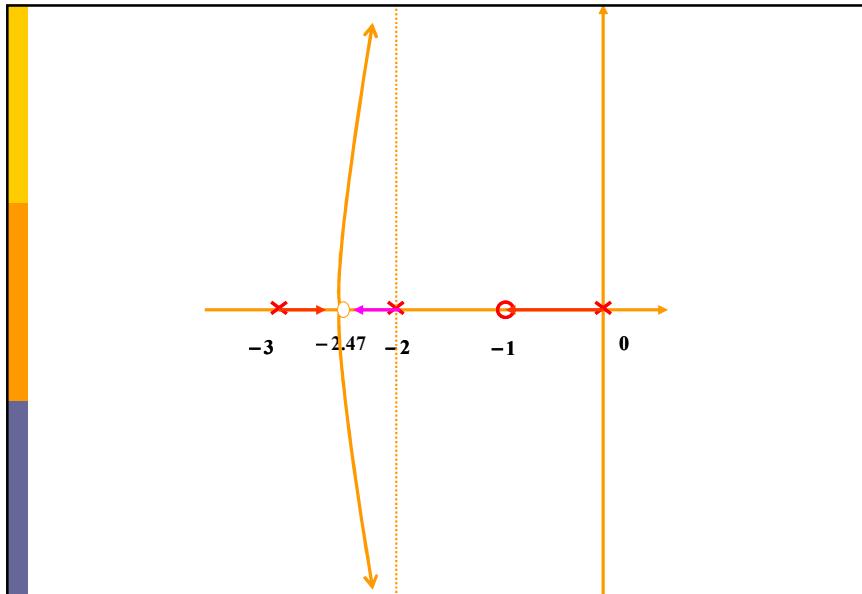


法则4：实轴上区域  $[-1, 0]$  和  $[-3, -2]$  是根轨迹。

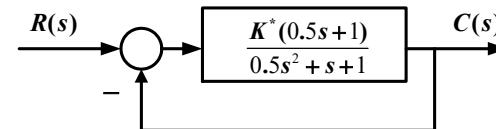
法则5：实轴区域  $[-3, -2]$  必有一个根轨迹的分离点  $d$ ， $d$  满足分离点方程：

$$\frac{1}{d+1} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+3}$$

解得：  $d = -2.47$



例4-21 系统结构图如图所示，绘制其根轨迹



解：

$$G(s) = \frac{K^*(s+2)}{(s+1+j)(s+1-j)}$$

法则1：起点： $-1 \pm j$  终点：-2，无穷远处

法则2：两条根轨迹分支

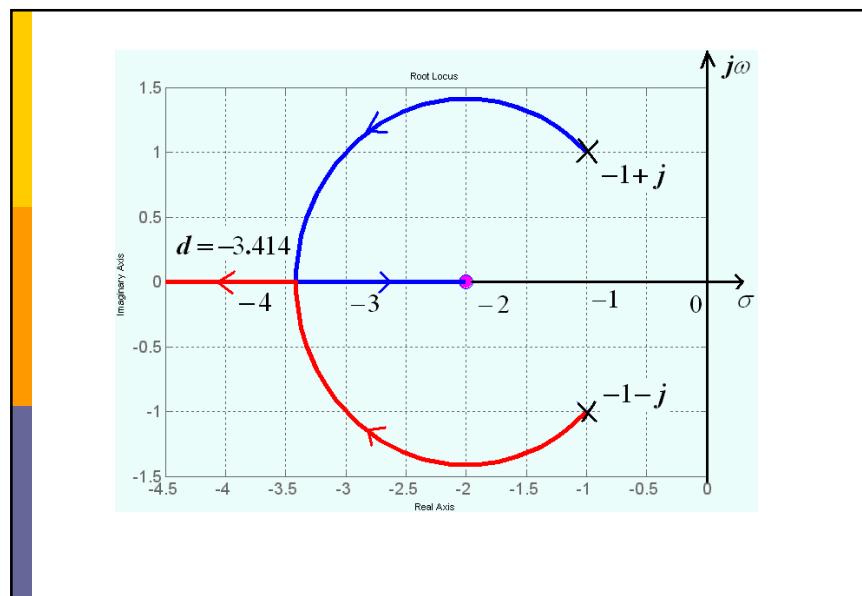
法则3： $n-m=1$ ，故只有 $180^\circ$ 渐近线，正好与负实轴重合

法则4： $(-\infty, -2]$  为实轴上的根轨迹

法则5：由分离点的坐标方程得：

$$\frac{1}{d+2} = \frac{1}{d+1-j} + \frac{1}{d+1+j}$$

$$d = -3.414 \quad \text{或} \quad d = -0.58 \quad (\text{舍去})$$



### 结论:

- 由两个极点(实数极点或复数极点)和一个有限零点组成的开环系统, 只要有限零点没有位于两个实数极点之间, 当 $K^*$ 从零变化到无穷时, 闭环根轨迹的复数部分, 是以有限零点为圆心, 以有限零点到分离点的距离为半径的一个圆, 或圆的一部分;
- 特别指出, 如果此时有限极点是共轭的, 则半径为零点到一个极点的距离

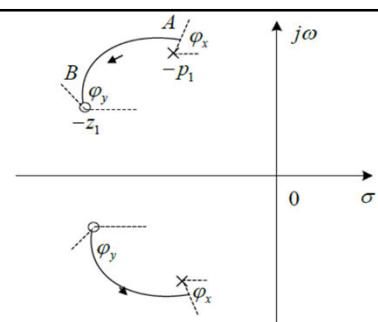
### ❖ 法则 6: 根轨迹的起始角与终止角

根轨迹离开开环复数极点处的切线与正实轴的夹角, 称为起始角, 以  $\theta_{p_i}$  标志; 根轨迹进入开环复数零点处的切线与正实轴的夹角, 称为终止角, 以  $\varphi_{z_i}$  表示

$$\theta_{p_i} = (2k+1)\pi + \left( \sum_{j=1}^m \varphi_{z_j p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \theta_{p_j p_i} \right);$$

$$\varphi_{z_i} = (2k+1)\pi - \left( \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^m \varphi_{z_j z_i} - \sum_{j=1}^n \theta_{p_j z_i} \right)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



证明: 设开环系统有  $m$  个有限零点,  $n$  个有限极点。在无限靠近待求起始角(或终止角)的复数极点  $p_i$ (或复数零点  $z_j$ )的根轨迹上取一点  $A(s_A)$ (或  $B(s_B)$ )。由于  $A$ (或  $B$ )无限接近  $p_i$ (或  $z_j$ ), 因此除  $p_i$ (或  $z_j$ ) 外, 所有开环零、极点到  $A$ (或  $B$ ) 的向量相角都可以用它们到  $p_i$ (或  $z_j$ ) 的向量相角  $\varphi_{z_j p_i}, \theta_{p_j p_i}$  ( $\varphi_{z_j z_i}, \theta_{p_j z_i}$ ) 来代替, 而  $p_i$ (或  $z_j$ ) 到  $A$ (或  $B$ ) 的向量相角即为起始角  $\varphi_{z_i}$ (或终止角  $\theta_{p_i}$ )

根据  $A(s_A)$  满足的相角条件, 有:

$$\sum_{j=1}^m \varphi_{z_j p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \theta_{p_j p_i} - \theta_{p_i} = -(2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^m \varphi_{z_j z_i} + \varphi_{z_i} - \sum_{j=1}^n \theta_{p_j z_i} = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

得到:

$$\theta_{p_i} = (2k+1)\pi + \left( \sum_{j=1}^m \varphi_{z_j p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \theta_{p_j p_i} \right) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\varphi_{z_i} = (2k+1)\pi - \left( \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^m \varphi_{z_j z_i} - \sum_{j=1}^n \theta_{p_j z_i} \right) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

例4-22 系统开环传递函数如下，绘制其根轨迹

$$G(s) = \frac{K^*(s+1.5)(s+2+j)(s+2-j)}{s(s+2.5)(s+0.5+j1.5)(s+0.5-j1.5)}$$

解：1) 实轴上区域  $[-1.5, 0]$  和  $(-\infty, -2.5]$  为根轨迹

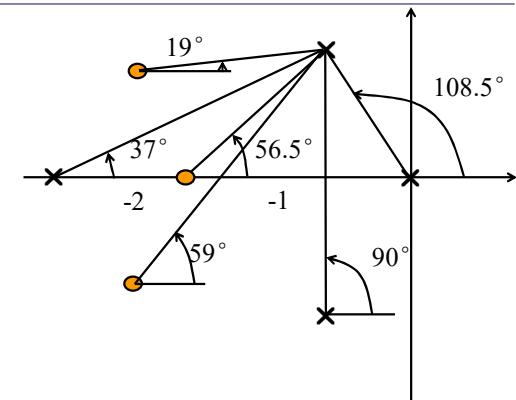
2)  $n-m=1$ , 只有一条  $180^\circ$  渐近线

3) 无分离点

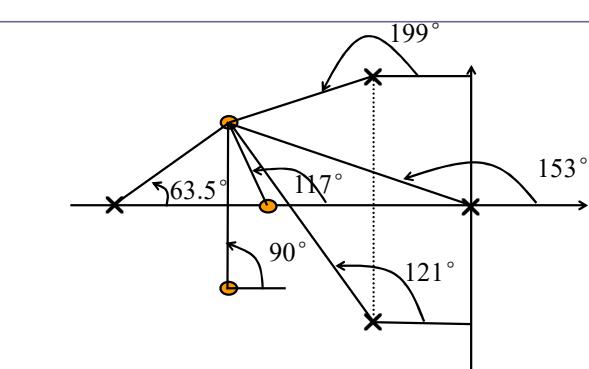
4) 起始角与终止角

$$\theta_{p_2} = 180^\circ + (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 79^\circ$$

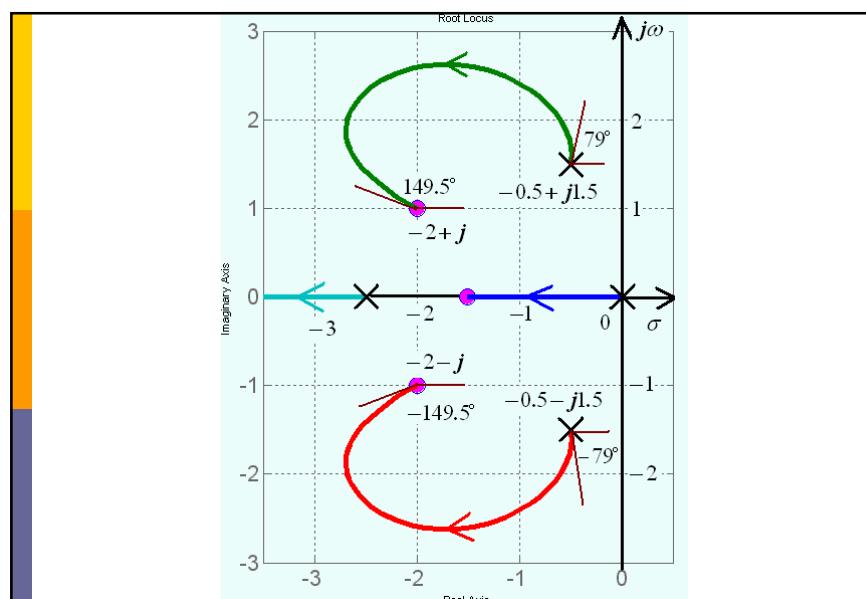
$$\varphi_{z_2} = -180^\circ - (\varphi_1 + \varphi_3) + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 149.5^\circ$$



$$\theta_{p_2} = 180^\circ + 56.5^\circ + 19^\circ + 59^\circ - 108.5^\circ - 90^\circ - 37^\circ = 79^\circ$$



$$\varphi_{z_2} = -180^\circ - 90^\circ - 117^\circ + 63.5^\circ + 153^\circ + 199^\circ + 121^\circ = 149.5^\circ$$



### ❖ 法则 7: 根轨迹与虚轴的交点

若根轨迹与虚轴相交，则交点上 $K^*$ 值和 $\omega$ 值可用劳斯判据(方法一)确定，也可令闭环特征方程中 $s = j\omega$  (方法二)，然后分别令其实部和虚部为零而求得

证明：

若根轨迹与虚轴相交，则表示闭环系统存在纯虚根，这意味着 $K^*$ 的数值使闭环系统处于临界稳定状态。因此令劳斯表第一列中包含 $K^*$ 的项为零，即可确定根轨迹与虚轴交点上 $K^*$ 值

此外，因为一对纯虚根是数值相同但符号相异的根，所以利用劳斯表中 $s^2$ 行的系数构成辅助方程必可解出纯虚根的数值，这一数值就是根轨迹与虚轴交点上 $\omega$ 值

如果根轨迹与正虚轴(或者负虚轴)有一个以上交点，则应采用劳斯表中幂大于2的 $s$ 偶次方行的系数构造辅助方程

确定根轨迹与虚轴交点处参数的另一种方法，是将 $s = j\omega$ 代入系统闭环特征方程，并令方程的实部和虚部分别为零，即可求得相应的 $K^*$ 和 $\omega$ 。

例4-23 系统的开环传递函数为  $G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$

求根轨迹与虚轴的交点

闭环特征方程  $s(s+1)(s+2) + K^* = s^3 + 3s^2 + 2s + K^* = 0$

劳斯表

$s^3$	1	2
$s^2$	3	$K^*$
$s^1$	$\frac{6 - K^*}{3}$	0
$s^0$	3	$K^*$

系统稳定的临界 $K^*$ 值：

$$K^* = 6$$

表中 $s^2$ 行元素构成辅助方程

$$3s^2 + 6 = 0$$

$$s = \pm j\sqrt{2}$$

根轨迹与虚轴的交点

$s = j\omega$  代入系统闭环特征方程

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K^* = (K^* - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

$$\begin{aligned} 2\omega - \omega^3 &= 0 \\ K^* - 3\omega^2 &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} K^* &= 6 \\ \omega &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

例4-24 设系统开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试绘制闭环系统的概略根轨迹

解:

(1) 无开环零点, 开环极点为:

$$p_1 = 0, p_2 = -3, p_{3,4} = -1 \pm j$$

实轴上的根轨迹: [-3, 0]

(2)  $n-m=4$  条分支趋向无穷远。渐近线与实轴的交点与夹角分别为:

$$\sigma_a = \frac{0 - 3 - 1 + j - 1 - j}{4} = -1.25$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)180^\circ}{4} = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$$

(3) 分离点:  $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+3} + \frac{1}{d+1+j} + \frac{1}{d+1-j} = 0$

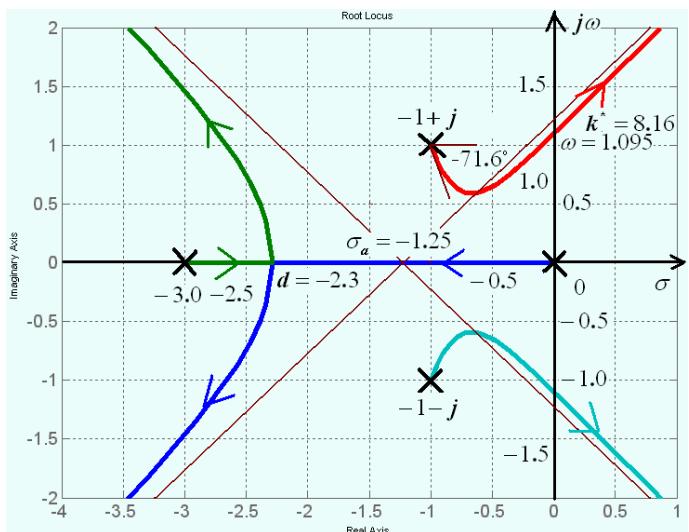
$$d \approx -2.3$$

(4) 起始角:  $\theta_{p_i} = -71.6^\circ$

(5) 根轨迹与虚轴的交点 (应用劳斯判据)

$$D(s) = s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 6s + K^* = 0$$

$s^4$	1	$K^*$	
$s^3$	5	6	由第一列、第四行元素为零
$s^2$	$\frac{34}{5}$	$K^*$	$204 - 25K^* = 0 \quad K^* = 8.16$
$s^1$	$(204 - 25K^*) / 34$	0	由辅助方程
$s^0$	$K^*$	$\frac{34}{5}s^2 + 8.16 = 0$	
		$s_{1,2} = \pm j1.095$	



例4-25 设系统开环传递函数为  $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$

试绘制系统的概略根轨迹

解：法则1 起点：  $p_1 = 0, p_2 = -3, p_3 = -1 + j, p_4 = -1 - j$

终点：  $z_1 = -2$  和三个无穷远处。

法则4  $[-2, 0], (-\infty, -3]$  为实轴上的根轨迹。

法则3 根轨迹的渐近线：  $n=4, m=1$ ，故有三条渐近线

$$\sigma_a = \frac{0-3-1+j-1-j+2}{4-1} = -1$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ \quad (k=0,1,2)$$

法则5 实轴上无相邻极点或相邻零点的根轨迹，无分离点

法则6 确定起始角：

$$\theta_{p3} = 180^\circ - (135^\circ + 90^\circ + 26.6^\circ - 45^\circ) = -26.6^\circ$$

$$\theta_{p4} = 26.6^\circ$$

法则7 根轨迹与虚轴的交点：

闭环系统特征方程：

$$s^4 + 5s^3 + 8s^2 + (6+K^*)s + 2K^* = 0$$

令  $s = j\omega$  代入系统闭环特征方程：

$$\omega^4 - 5\omega^3 j - 8\omega^2 + (6+K^*)\omega j + 2K^* = 0$$

令其实部和虚部分别为零，有：  $\begin{cases} -5\omega^3 + (6+K^*)\omega = 0 \\ \omega^4 - 8\omega^2 + 2K^* = 0 \end{cases}$

有  $\omega = 0$  (舍)，  $\omega = \pm 1.6$ ，此时：  $K^* = 7.0$

根轨迹与虚轴的交点也可以用劳斯表求得

由闭环特征方程列劳斯表：

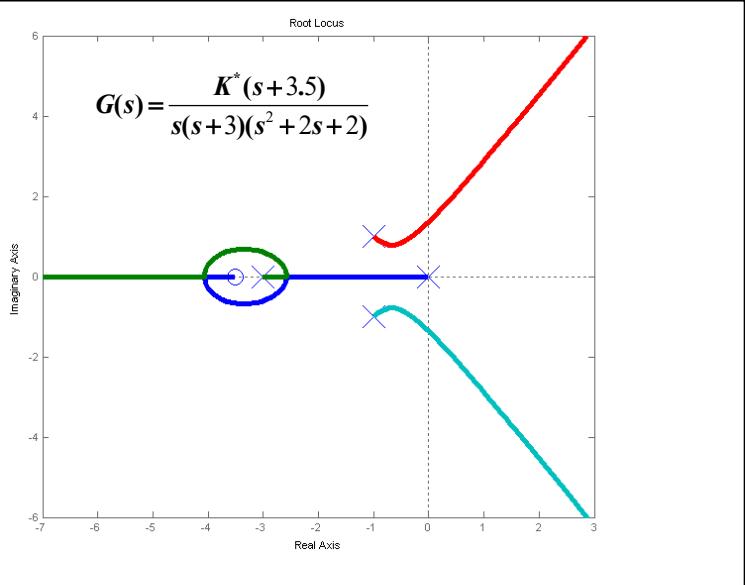
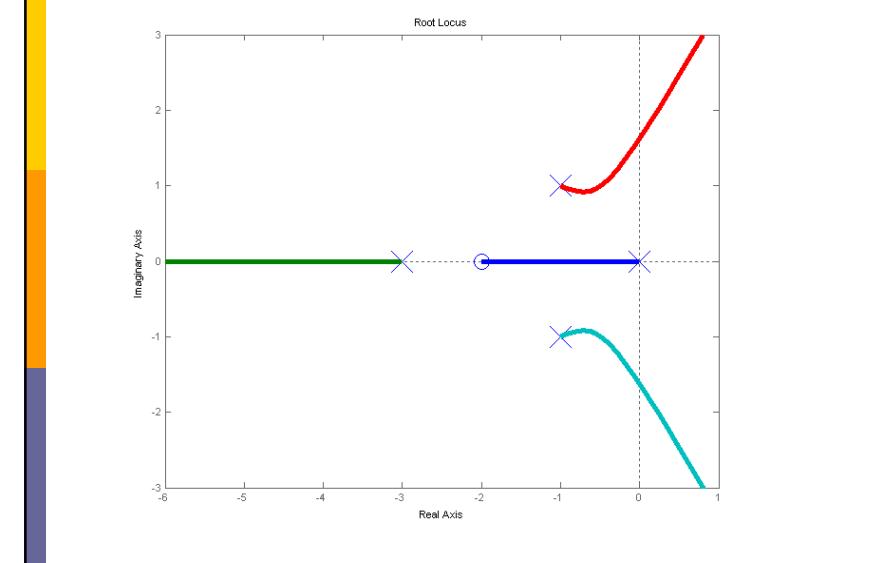
$s^4$	1	8	$2K^*$	令 $s^1$ 行首列为零：
$s^3$	5	$6+K^*$		
$s^2$	$\frac{34-K^*}{5}$	$2K^*$		$6+K^* - \frac{50K^*}{34-K^*} = 0$
$s^1$	$6+K^* - \frac{50K^*}{34-K^*}$			
$s^0$	$2K^*$		有： $K^* = 7.0$	

以 $s^2$ 行系数列辅助方程:  $F(s) = \frac{34-7}{5}s^2 + 2 \times 7 = 0$

有:  $s = \pm 1.6j$

故根轨迹与虚轴的交点为:  $\omega = \pm 1.6$

此时开环增益为:  $K^* = 7.0$



❖ 法则 8: 根之和与根之积  
系统闭环特征方程, 在  $n > m$  且  $n-m > 1$  时, 开环  $n$  个极点之和总等于闭环特征方程  $n$  个根之和:

$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{j=1}^n p_j$$

$s_i$  为系统闭环特征方程的根

证明：在  $n > m$  的一般情况下，系统闭环特征方程：

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

$$= \prod_{i=1}^n (s - s_i) = s^n + (-\sum_{i=1}^n s_i) s^{n-1} + \cdots + \prod_{i=1}^n (-s_i)$$

$$\sum_{i=1}^n s_i = -a_1 \quad \prod_{i=1}^n s_i = (-1)^n a_n$$

当  $n - m \geq 2$  时， $a_1$  与  $K^*$  无关，无论  $K^*$  为何值：

$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{j=1}^n p_j$$

**根之和不变  $\rightarrow K^*$  增大，一些根轨迹分支向左移动，  
则相应有另外一些根轨迹分支向右移动**

#### 4.4.4 根轨迹图的绘制与稳定性分析

$$\text{例4-26 } G_0(s) = \frac{K_g(s+1)}{(s+0.1)(s+0.5)}$$

绘制根轨迹图并判断闭环系统稳定性

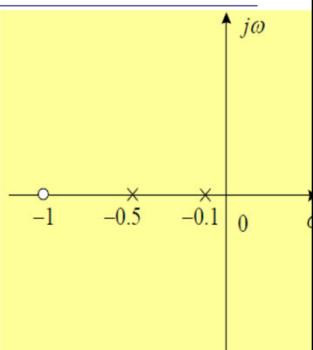
**法则1、2：** 条数，起点，终点

$$n = 2 \quad -p_1 = 0.1, -p_2 = -0.5 \\ -z_1 = -1, \infty$$

$$\text{法则3：渐近线} \quad -\sigma = \frac{\sum_{j=1}^N p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = 0.4$$

$$\theta = \frac{180^\circ(2k+1)}{n-m} = 180^\circ (k=1)$$

**法则4：** 实轴上的根轨迹  $(-\infty, -1) \quad (-0.5, -0.1)$



#### 根轨迹图绘制法则

起点和终点	起源于开环极点，终止于开环零点（无穷远零点）
分支和对称性	分支数 = $n - m$ 个开环极点；对称与实轴
渐近线	$n - m$ 条渐近线与实轴的交点： $-\sigma = -\frac{\sum_{j=1}^N p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$ 夹角： $\theta = 180^\circ \frac{(2k+1)}{n-m}, k = 0, 1, \dots, n-m-1$
实轴上的根轨迹	实轴上的一点，只要其右边的开环零点 + 极点 = 奇数
分离点与分离角	分离点 $N(z)D'(z) - N'(z)D(z) = 0$ $\sum_{i=1}^m \Delta\angle(z + z_i) - \sum_{j=1}^N \Delta\angle(z + p_j) = 0$ 分离角 $\theta_d = \frac{180^\circ}{k}$
出射角和入射角	出射角 $\varphi_o = \pm 180^\circ (2k+1) + \sum_{j=1}^N \angle(-p_j + z) - \sum_{i=1}^m \angle(p_i + z)$ 入射角 $\varphi_i = \pm 180^\circ (2k+1) + \sum_{j=1}^N \angle(z + p_j) - \sum_{i=1}^m \angle(-z + z_i)$
与虚轴的交点	劳斯判据和代入法
闭环极点之和、之积	$-\sum_{j=1}^N z_j = -\sum_{j=1}^N p_j = -a_{n-1}, (n-m \geq 2)$ $\prod z_j = \prod p_j + K_g \prod z_i$

**法则5：** 分离点，汇合点，分离角

$$N(s)D'(s) - N'(s)D(s) = 0 \Rightarrow s^2 + 2s + 0.55 = 0 \Rightarrow s = -1.67 \text{ or } -0.33$$

$$\theta_d = \frac{180^\circ}{k} = 90^\circ$$

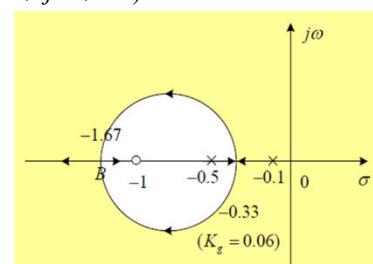
$$k_{gd} = 2.74 \text{ or } 0.06$$

**法则6：** 复平面上的根轨迹为圆

$$\angle(s+1) - \angle(s+0.1) - \angle(s+0.5) = 180^\circ$$

$$\angle(\sigma + j\omega + 1) - \angle(\sigma + j\omega + 0.1) - \angle(\sigma + j\omega + 0.5) = 180^\circ$$

$$\begin{aligned} & \arctan \frac{\omega}{\sigma+1} - \arctan \frac{\omega}{\sigma+0.1} \\ & = 180^\circ + \arctan \frac{\omega}{\sigma+0.5} \end{aligned}$$



$$\arctan \frac{\frac{\omega}{\sigma+1} - \frac{\omega}{\sigma+0.1}}{1 + \frac{\omega}{\sigma+1} \cdot \frac{\omega}{\sigma+0.1}} = 180^\circ + \arctan \frac{\omega}{\sigma+0.5}$$

$$\frac{\frac{\omega}{\sigma+1} - \frac{\omega}{\sigma+0.1}}{1 + \frac{\omega}{\sigma+1} \cdot \frac{\omega}{\sigma+0.1}} = \frac{\omega}{\sigma+0.5} \quad (\sigma+1)^2 + \omega^2 = 0.67^2$$

#### 4.4.5 广义根轨迹

在控制系统中，除根轨迹增益 $K^*$ 以外，其它情形下根轨迹统称为广义根轨迹。如系统参数根轨迹，开环传递函数中零点个数多于极点个数时的根轨迹，以及零度根轨迹等均可列入广义根轨迹范畴

**参数根轨迹：**以非开环增益为可变参数绘制的根轨迹，以区别开环增益 $K^*$ 为可变参数的常规根轨迹

参数根轨迹绘制法则与常规根轨迹绘制完全相同。只要在绘制参数根轨迹之前，引入等效单位反馈系统和等效传递函数概念，则常规根轨迹的所有绘制法则，均适用于参数根轨迹的绘制

对闭环特征方程  $1 + G(s)H(s) = 0$

$$\text{作等效变换: } A \frac{P(s)}{Q(s)} = -1$$

$A$ 为除 $K^*$ 以外的任意可变参数， $P(s)$ 和 $Q(s)$ 为两个与 $A$ 无关的首一多项式。等效单位反馈系统开环传递函数：

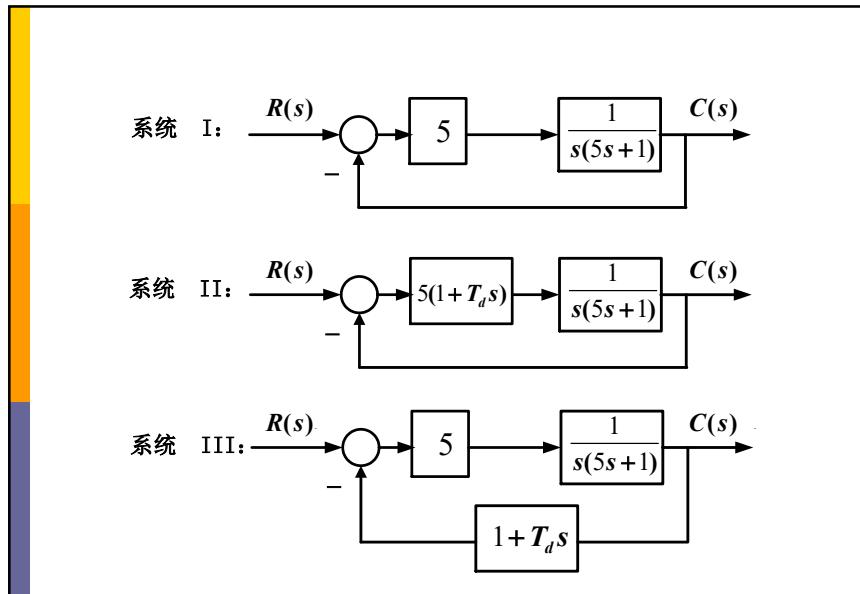
$$G_1(s)H_1(s) = A \frac{P(s)}{Q(s)}$$

即以参数 $A$ 为变量的参数根轨迹

关于等效的概念：  $G_1(s)H_1(s) = A \frac{P(s)}{Q(s)}$

**注：**等效仅在闭环极点相同成立，而闭环零点未必相同。由于闭环零点对系统的性能也有影响，所以由闭环零极点分布来分析和估算系统性能时，可采用参数根轨迹上的闭环极点，但必须采用原来闭环系统的零点

这一处理方法和结论，对绘制开环零极点变化时，同样适用



对于系统II和III具有相同的开环传递函数  $G(s)H(s)=\frac{5(1+T_a s)}{s(5s+1)}$

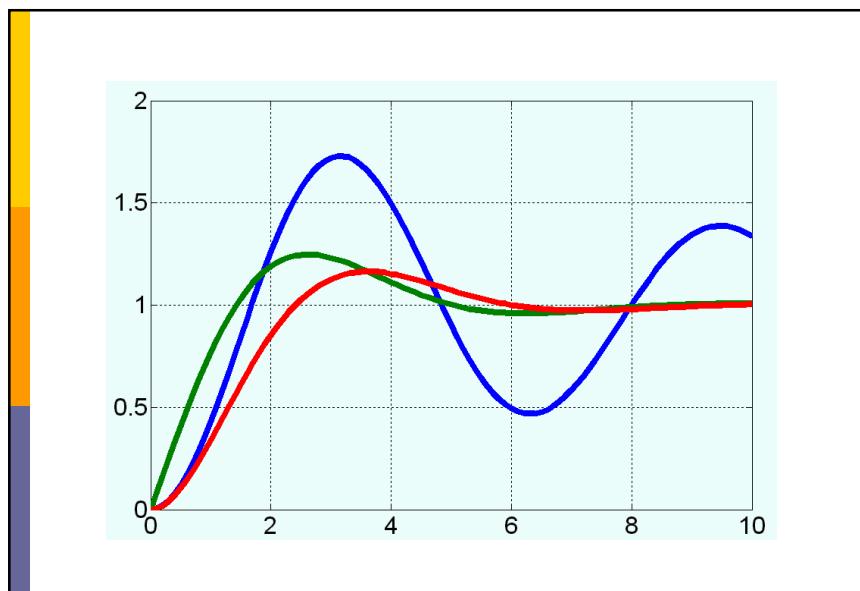
但闭环传递函数各自为

$$\Phi_{\text{II}}=\frac{5(1+T_a s)}{s(1+5s)+5(1+T_a s)}, \quad \Phi_{\text{III}}=\frac{5}{s(1+5s)+5(1+T_a s)}$$

绘制根轨迹时等效开环传递函数为

$$G_l(s)H_1(s)=\frac{T_a s}{s(s+0.2)+1}$$

尽管有相同根轨迹，但闭环系统性能却不同。这是因为各自的闭环零点不同



例4-27 计算等效传递函数  $G(s)H(s)=\frac{5(1+T_a s)}{s(5s+1)}$

以  $T_a$  为变量绘制参数根轨迹

解:  $1+G(s)H(s)=0$

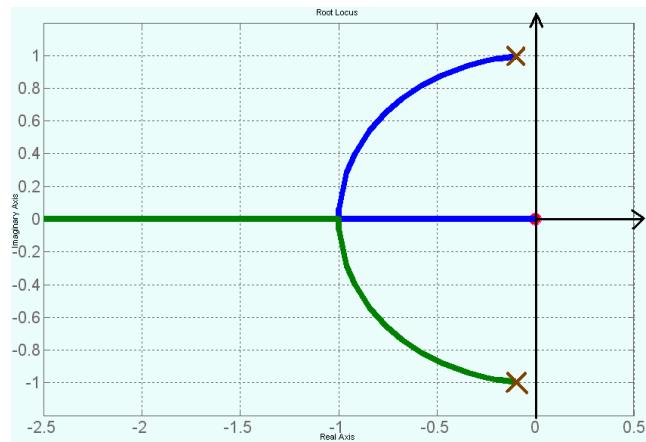
→  $(5s+1)s+5(1+T_a s)=0$

→  $5s^2+s+5+5T_a s=0$

同除  $5s^2+s+5$

→  $G_l(s)H_1(s)=\frac{5T_a s}{5s^2+s+5}=T_a \frac{s}{s(s+0.2)+1}$

$(T_a : 0 \rightarrow \infty)$



例4-28 单位反馈系统的开环传递函数  $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(T_a s + 1)}$

开环增益  $K$  可自行选定。分析时间常数  $T_a$  对系统性能影响

解：闭环特征方程

$$s(s+1)(T_a s + 1) + K = 0 \Rightarrow [s(s+1) + K] + T_a s^2 (s+1) = 0$$

$$1 + \frac{T_a s^2 (s+1)}{s(s+1) + K} = 0 \Rightarrow G_1(s) = \frac{T_a s^2 (s+1)}{s(s+1) + K}$$

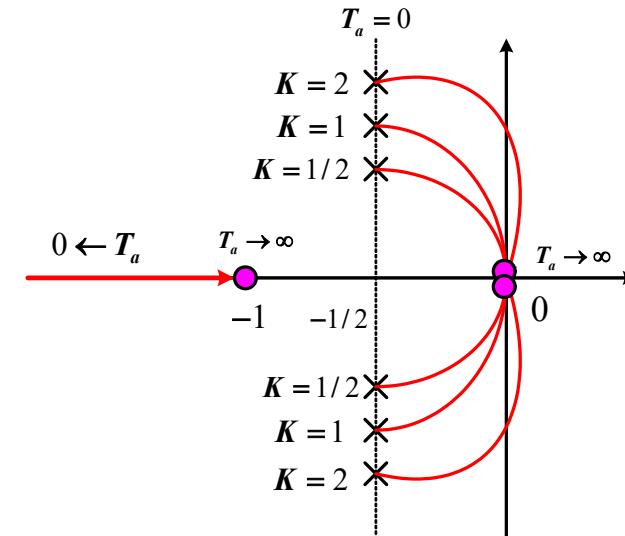
$$\text{等效开环极点: } p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - K}$$

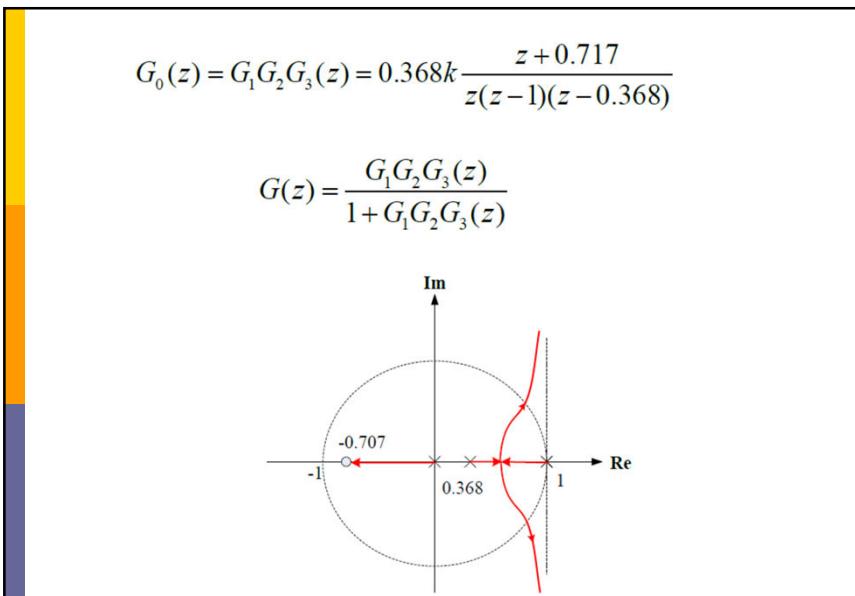
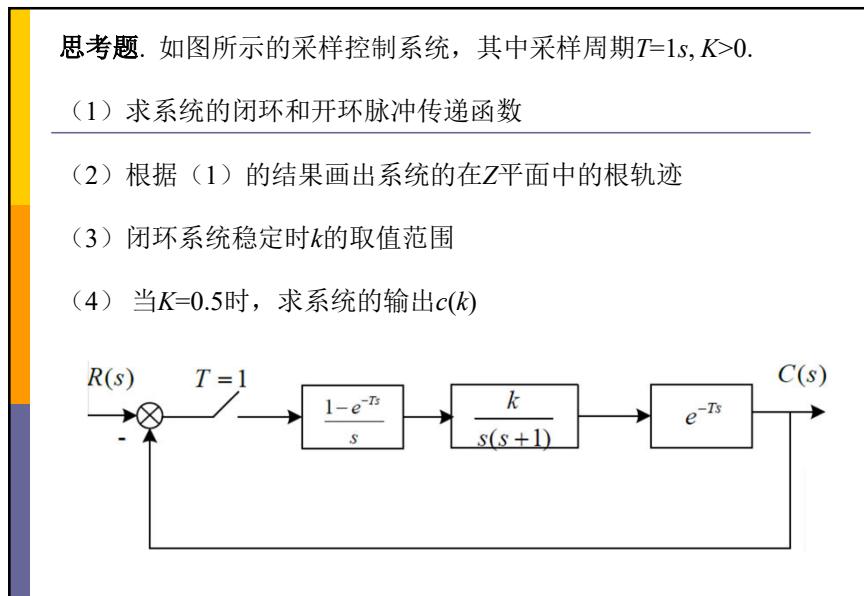
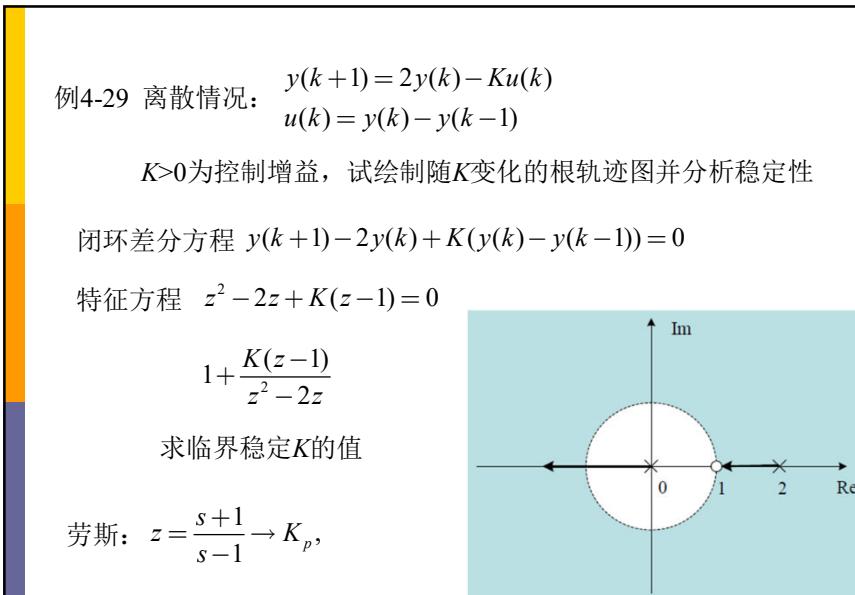
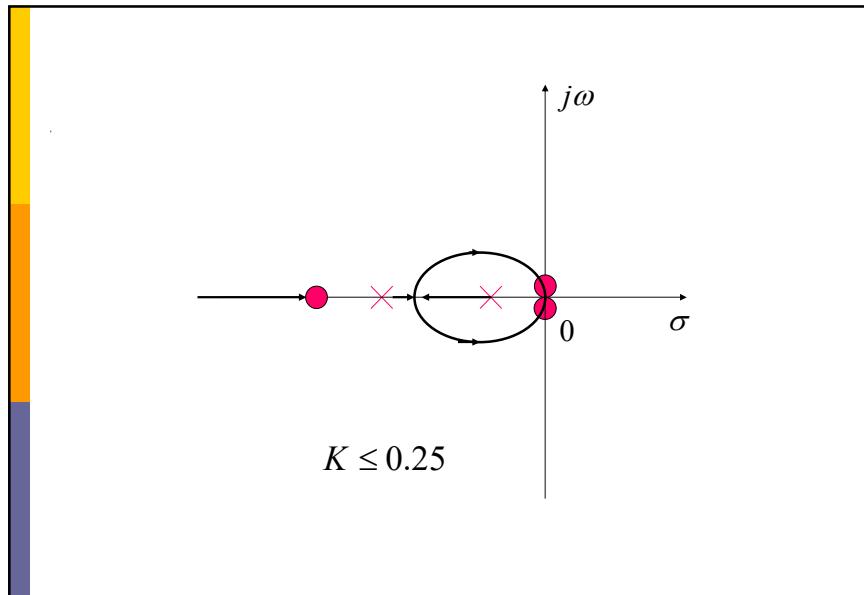
注：若分母多项式为高次时，无法解析求解等效开环极点，则运用根轨迹法求解。如本例，求解分母特征根的根轨迹方程：

$$1 + \frac{K}{s(s+1)} = 0$$

$K$  可自行选定，选定不同  $K$  值，然后将  $G_1(s)$  的零、极点画在  $s$  平面上，令  $T_a = 0 \Rightarrow T_a \rightarrow \infty$

绘制出  $T_a$  变化时的参数根轨迹





闭环特征方程:

$$z^3 - 1.368z^2 + 0.368(k+1)z + 0.264k = 0$$

$$z = \frac{s+1}{s-1}$$

$$0.632ks^3 + (1.264 - 1.16k)s^2 + (4 + 0.424)s + (2.736 + 0.104k) = 0$$

$$s^3 : 0.632k \quad 4 + 0.424k$$

$$s^2 : 1.264 - 1.16k \quad 2.736 + 0.104k$$

$$s^1 : (5.06 - 5.83k - 0.558k^2) \times (k^2 + 1.3k + 4)$$

$$s^0 : 2.736 + 0.104k$$

$$0 < k < 0.8$$

问题: 如果系统闭环传递函数和开环传递函数未知, 如何判断系统的稳定性?

◇ Routh-Hurwitz(Jury)

系统的闭(开)环传递函数

◇ 根轨迹图

系统的开环传递函数

实验得到开环的频率特性图(Nyquist曲线)

Nyquist利用这个图来分析系统的稳定性

## 4.5 奈奎斯特稳定性判据

系统稳定充分必要条件: 系统闭环特征根都具有负实部, 即位于s左半平面。在时域分析中判断系统的稳定性,

方法一: 求出特征方程的全部根;

方法二: 使用Routh-Hurwitz稳定判据 (代数判据)

缺点: 高阶系统, 非常困难且费时, 也不便于研究系统参数、结构对稳定性的影响。特别是, IF已知开环特性, 研究闭环系统的稳定性, 还需要求出闭环特征方程。

解决方法: 直接利用开环特性判断闭环系统的稳定性。对于一个自动控制系统, 其开环数学模型易于获取, 同时包含闭环系统所有环节的动态结构和参数。

除劳斯判据外，分析系统稳定性的另一种常用判据为奈奎斯特（Nyquist）判据。Nyquist稳定判据是奈奎斯特于1932年提出，是频率法的重要内容，简称奈氏判据。奈氏判据主要特点：

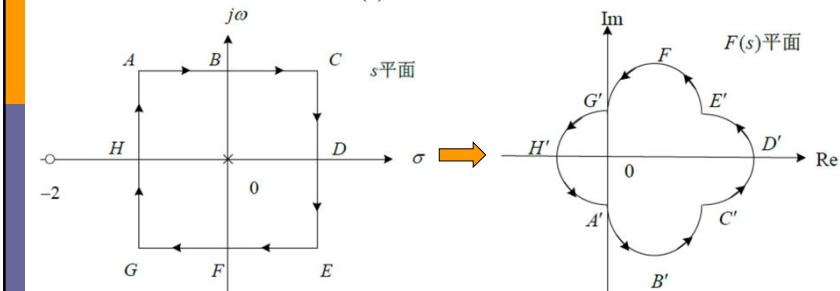
1. 根据系统的开环频率特性，来研究闭环系统稳定性，而不必求闭环特征根；
2. 能够确定系统的稳定程度（相对稳定性）；
3. 可用于分析系统的瞬态性能，利于系统的分析与设计；
4. 基于系统的开环奈氏图，是一种图解法

#### 4.5.1 幅角定理

自变量 $s=\sigma+j\omega$ 的复变函数： $F(s)=\frac{s+2}{s}$

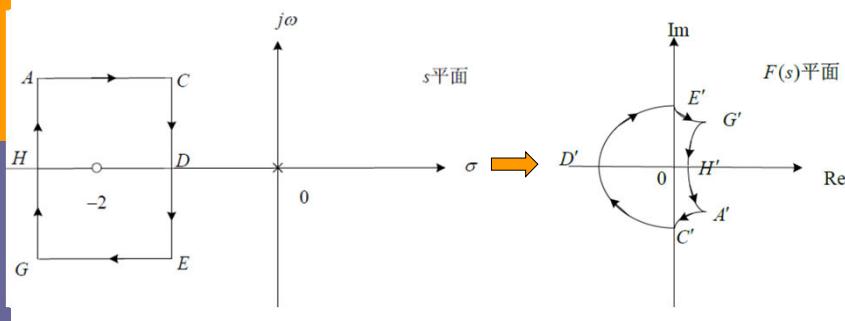
若 $s$ 平面中自变量沿包围极点的围线顺时针变化，

则映射点在 $F(s)$ 平面上逆时针包围原点



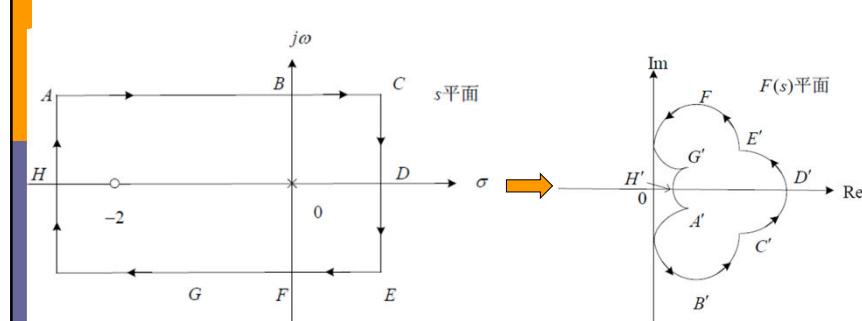
#### 4.5.1 幅角定理

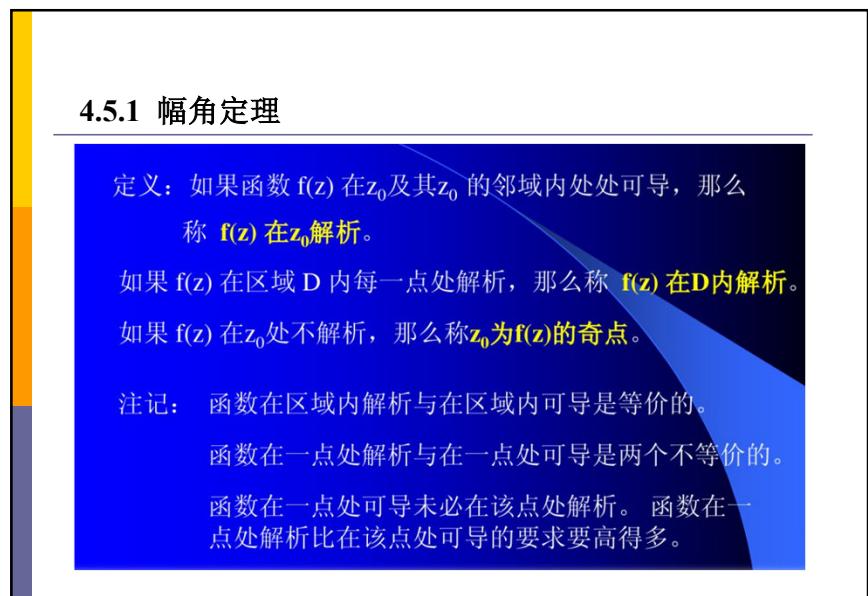
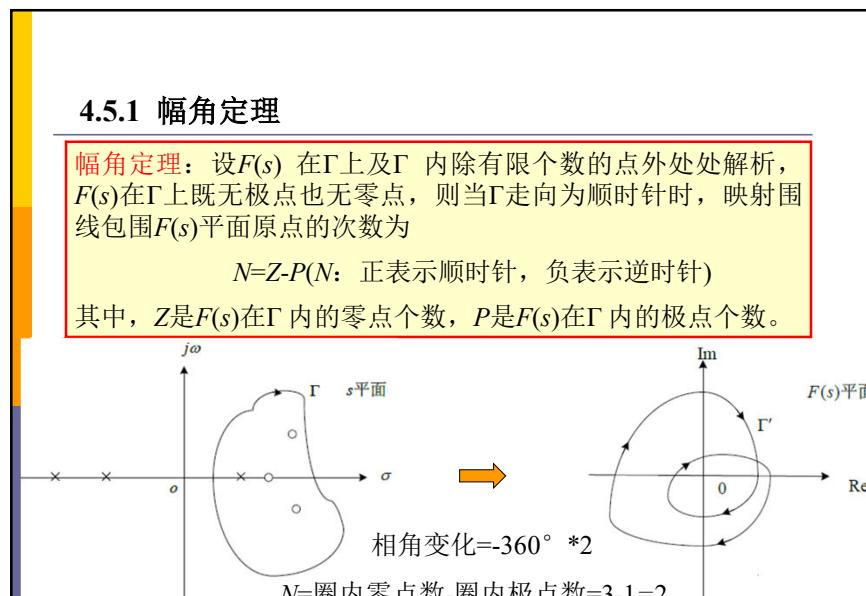
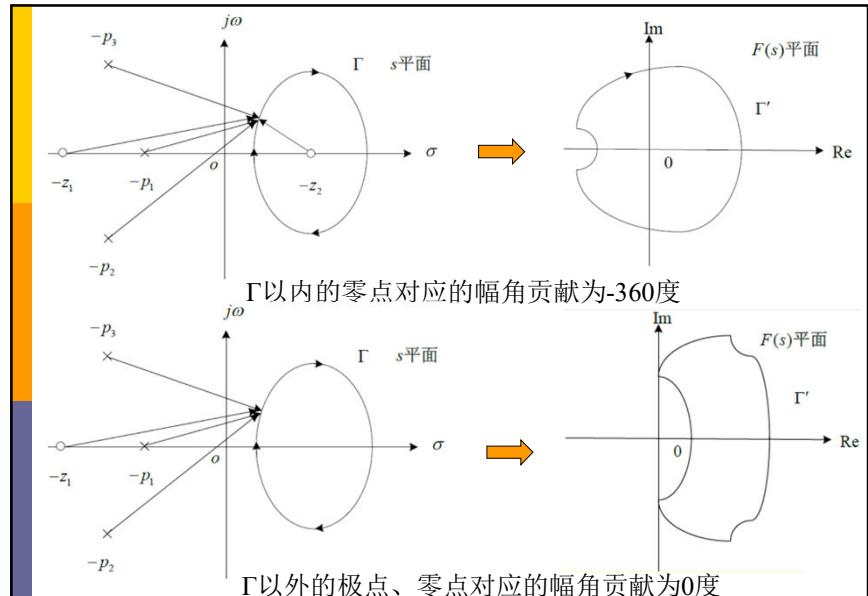
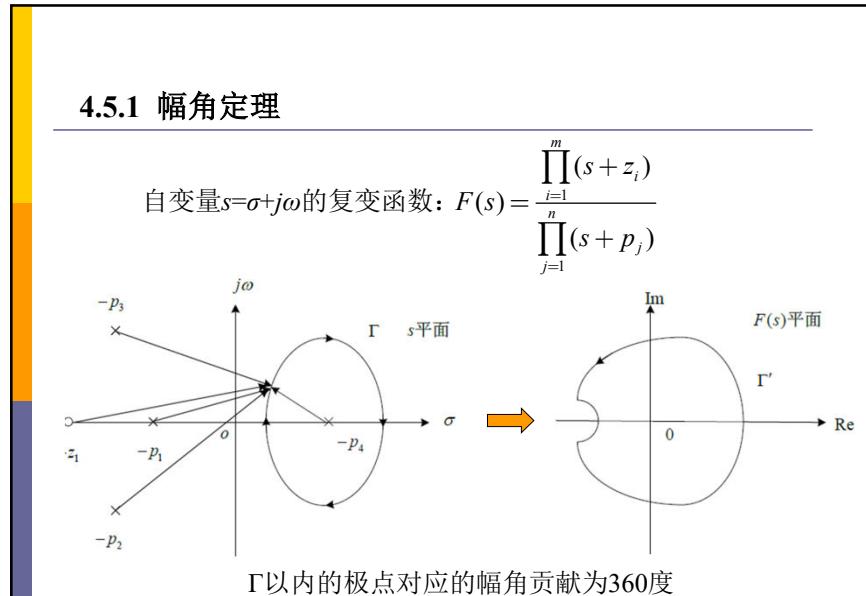
若 $s$ 平面中自变量包围零点的围线顺时针变化，  
则映射点在 $F(s)$ 平面上顺时针包围原点



#### 4.5.1 幅角定理

若 $s$ 平面中自变量同时包围极点和零点的围线顺时针变化，  
则映射点在 $F(s)$ 平面上不包围原点



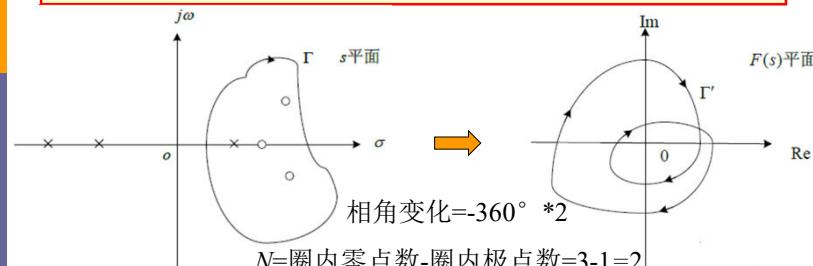


### 4.5.1 幅角定理

**幅角定理:** 设 $F(s)$ 在 $\Gamma$ 上及 $\Gamma$ 内除了有限个数的点外是处处解析的,  $F(s)$ 在 $\Gamma$ 上既无极点也无零点, 则当 $\Gamma$ 走向为顺时针时, 映射围线包围 $F(s)$ 平面原点的次数为

$$N=Z-P \quad (N: 正表示顺时针, 负表示逆时针)$$

其中,  $Z$ 是 $F(s)$ 在 $\Gamma$ 内的零点个数,  $P$ 是 $F(s)$ 在 $\Gamma$ 内的极点个数。

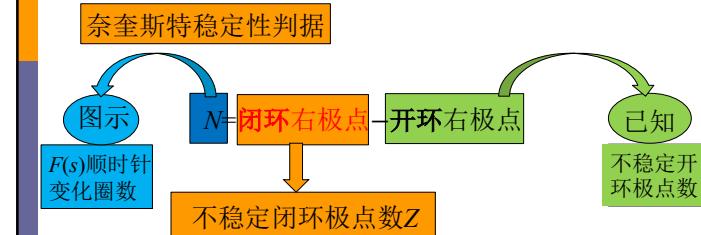


### 4.5.1 幅角定理

如何运用柯西幅角定理?

Step 1: 构造能包围整个右半s平面的封闭围线 $\Gamma$

构造函数 $F(s)$ : 零点对应系统闭环极点  
极点对应系统开环极点



### 4.5.1 幅角定理

如何运用柯西幅角定理?

Step 1: 构造能包围整个右半s平面的封闭围线 $\Gamma$

Step 2: 由开环频率特性曲线确定映射围线包围原点的圈数 $N$

奈奎斯特稳定性判据

不稳定闭环极点数  $Z = \text{不稳定开环极点数 } P$

$$+ F(s) \text{顺时针变化圈数 } N > 0? = 0?$$

### 4.5.1 幅角定理

辅助函数的构建: 闭环极点 开环极点 (零点)

$$\text{开环传函: } G_0(s) = G(s)H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

$$\text{特征方程: } 1 + G_0(s) = 0 \quad \text{闭环极点}$$

$$\text{辅助函数: } 1 + G_0(s) = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)} = F(s)$$

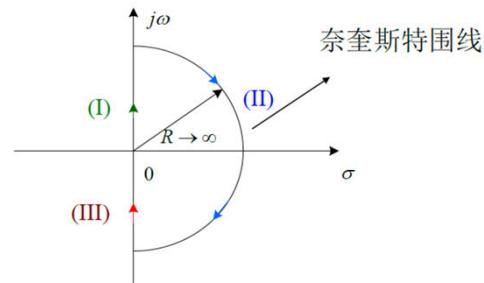
开环极点

$F(s)$ 的零点=闭环极点

$F(s)$ 的极点=开环极点

## 4.5.2 奈奎斯特 (Nyquist) 稳定判据

Step 1:



如果  $F(s)$  在虚轴上无零、极点

Part I:  $s=j\omega, \omega: 0 \rightarrow \infty$

Part II:  $s=Re^{j\theta}, R \rightarrow \infty, \theta: \pi/2 \rightarrow -\pi/2$

Part III:  $s=j\omega, \omega: -\infty \rightarrow 0$

## 4.5.2 奈奎斯特 (Nyquist) 稳定判据

Step 2 (已知):

Part I:  $s=j\omega, \omega: 0 \rightarrow \infty$

$$G_0(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} \quad \text{频率特性图}$$

Part III:  $s=j\omega, \omega: -\infty \rightarrow 0$

负频率特性图

Part II:  $s=Re^{j\theta}, R \rightarrow \infty, \theta: \pi/2 \rightarrow -\pi/2$

$$G_0(R e^{j\theta}) \rightarrow \begin{cases} 0, & n > m \\ \frac{K \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m}{T_1 T_2 \cdots T_n}, & n = m \end{cases} \quad G_0(j\omega) \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{端点 } (\omega \rightarrow \infty), \\ & n > m \\ \frac{K}{1 + jT\omega}, & n = m \end{cases}$$

## 4.5.2 奈奎斯特 (Nyquist) 稳定判据

Step 2 (于是):

奈奎斯特围线对  $F(s)$  的映射 = 对  $G_0(s)$  的映射 + 1(右移1单位)



$F(s)$  平面上对原点的包围  $\leftrightarrow G_0(s)$  平面上对  $(-1, j0)$  点的包围

奈奎斯特稳定性判据

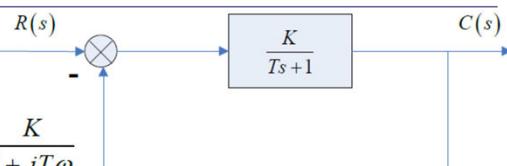
图示  
 $G_0(j\omega)$  与 Re 的交点

$N$  = 闭环右极点数 - 开环右极点数  $P$

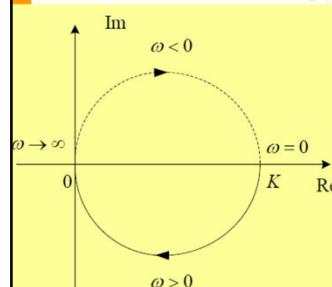
已知

0, 稳定; 否则, 不稳定

### 例4-31 试用奈奎斯特稳定性判据判别其稳定性



$$G_0(j\omega) = \frac{K}{1 + jT\omega}$$



起点  $\omega=0, G_0(0)=K$

终点  $\omega \rightarrow \infty, G_0(\infty) \rightarrow 0 \angle -90^\circ$

中间点 (与负实轴的交点)

找几个  $\omega$  值代入求点, 画大致趋势

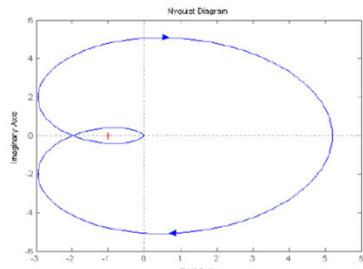
$$Z = N + P = 0 + 0 = 0 \quad \text{稳定}$$

#### 例4-32 试用奈奎斯特稳定性判据判别其稳定性

$$G_0(s) = \frac{52}{(s+2)(s^2 + 2s + 5)}$$

$$G_0(j\omega) = \frac{52/2/5}{(1+j\frac{\omega}{2})(-\frac{\omega^2}{5} + j\frac{2\omega}{5} + 1)}$$

Z=N+P=2+0=2 不稳定

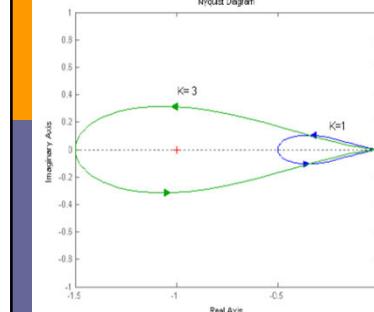


起点  $\omega=0, G_0(0)=5.2$   
 终点  $\omega \rightarrow \infty, G_0(\infty) \rightarrow 0 \angle -270^\circ$   
 与负虚轴交点（中间点）  
 $\omega=2.5, G_0(j2.5)=0-j5.06$   
 与负实轴交点（中间点）  
 $\omega=3, G_0(j3)=2+j0$

#### 例4-33 试用奈奎斯特稳定性判据判别其稳定性

$$G_0(s) = \frac{K}{(s-1)(s+2)}$$

$$G_0(j\omega) = \frac{K/2}{(-1+j\omega)(1+j\omega/2)} = \frac{K/2}{(-1-\omega^2/2)+j\omega/2} = \frac{-K[(2+\omega^2)+j\omega]}{(2+\omega^2)^2+\omega^2}$$

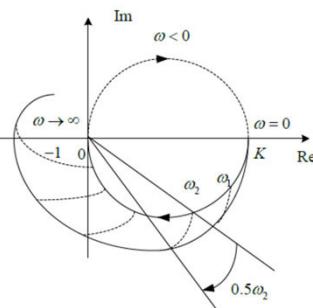


起点  $\omega=0, G_0(0)=-K/2$   
 终点  $\omega \rightarrow \infty, G_0(\infty) \rightarrow 0 \angle -180^\circ$   
 中间点  $\omega=2, G_0(j2)=-K(3+j)/20$   
 $K < 2, Z=N+P=0+1=1, \text{unstable}$   
 $K > 2, Z=N+P=-1+1=0, \text{stable}$   
 $K=2, \text{critically stable}$

#### 例4-34 单位反馈系统的开环传函为 $G_0(s) = \frac{10e^{-0.5s}}{s+1}$

试判断系统的稳定性

$$G_0(j\omega) = \frac{10}{1+j\omega} e^{-0.5j\omega} = \left| \frac{10}{1+j\omega} \right| e^{j \left[ \angle \left( \frac{10}{1+j\omega} \right) + \angle (e^{-0.5j\omega}) \right]} = \left| \frac{10}{1+j\omega} \right| e^{j \left[ \angle \left( \frac{10}{1+j\omega} \right) - 0.5j\omega \right]}$$



相当于在  $\frac{10}{1+j\omega}$  的奈奎斯特曲线上  
 每一点顺时针旋转  $0.5\omega$

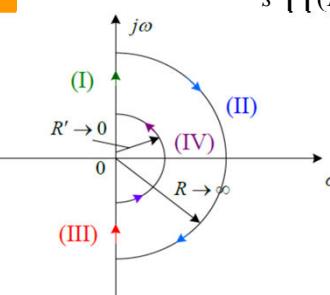
曲线包围  $(-1, j0)$ ,  $N \neq P=0$ , 不稳定

#### 4.5.3 开环系统含有积分环节时奈奎斯特稳定性判据的应用

##### Case 1：开环系统含积分环节

$$G_0(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^n \prod_{i=1}^v (T_i s + 1)}, \quad v \geq 1$$

4.5.2 基于假设： $F(s)$  在虚轴上无零、极点  $\longleftrightarrow$   
 开环和闭环传递函数虚轴上无极点



Part I  $s=j\omega, (\omega: 0^+ \rightarrow \infty)$

Part II  $s=Re^{j\theta}, (R \rightarrow \infty, \theta: \pi/2 \rightarrow -\pi/2)$

Part III  $s=j\omega, (\omega: -\infty \rightarrow 0^-)$

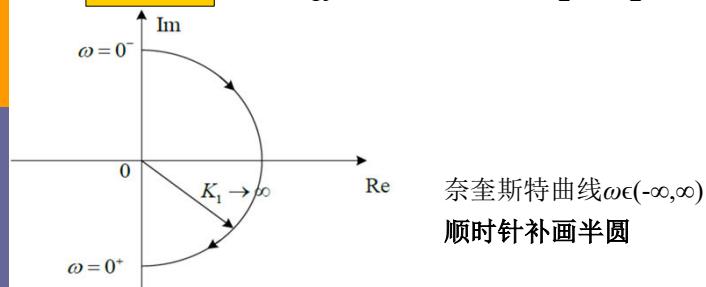
Part IV  $s=R'e^{j\theta'}, (R' \rightarrow 0, \theta': -\pi/2 \rightarrow \pi/2)$

$v=1$  (I型系统)

$$\text{代入 } s = R'e^{j\theta'} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \frac{K}{R'e^{j\theta'}} = K'e^{j\theta_1}$$

半径无穷的右半圆

$$K_1 = \frac{K}{R} \rightarrow \infty, \quad \theta_1 = -\theta': \quad +\frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

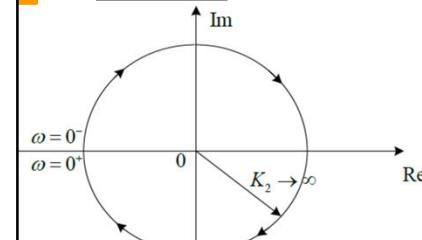


$v=2$  (II型系统)

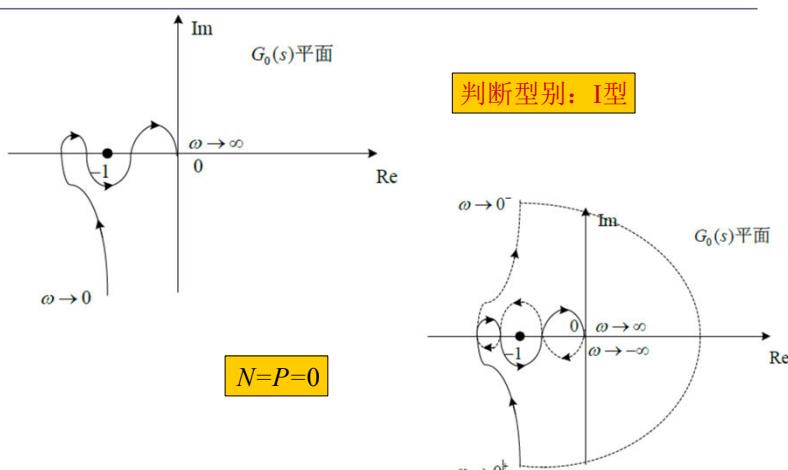
$$\text{代入 } s = R'e^{j\theta'} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \frac{K}{(R'e^{j\theta'})^2} = K_2 e^{j\theta_2}$$

半径无穷的圆

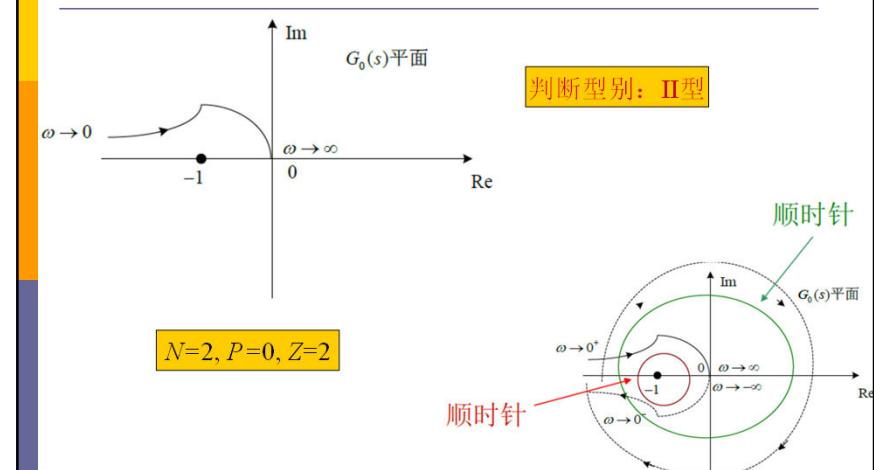
$$K_2 = \frac{K}{(R')^2} \rightarrow \infty, \quad \theta_2 = -2\theta': \quad +\pi \rightarrow -\pi$$



例4-35 设最小相位开环系统的频域特性曲线如下，开环系统在右半s平面无极点，试判断系统稳定性



例4-36 设最小相位开环系统的频域特性曲线如下，开环系统在右半s平面无极点，试判断系统稳定性

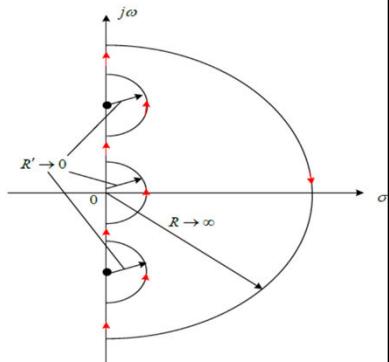


## 其他情况的应用

### $v \geq 3$ 系统

实际系统很少，分析过程类似I、II型系统

开环系统在虚轴上有零点or极点



## 奈奎斯特稳定性判据的简化

直接利用  $\omega: 0 \rightarrow \infty$  频率特性曲线

$$Z = 2N' + P$$

对于I型系统

顺时针加1/4圈

对于II型系统

顺时针加1/2圈

### 1. 绘制 $\omega$ 由 0 变到 $+\infty$ 时开环幅相频率特性 $G(j\omega)$

(1)  $\omega$  由 0 变到  $+\infty$  时开环幅相频率特性  $G(j\omega)$  逆时针包围  $(-1, j0)$  点的圈数为  $N'$ ，

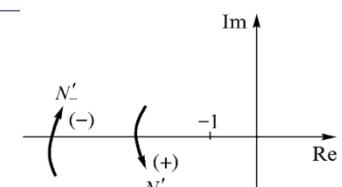
(2) 已知系统开环右极点数为  $P$ ，则系统闭环右极点个数为  $Z$ （不包括虚轴上的极点）：

$$Z = P - 2N'$$

(3) 当 Nyquist 曲线  $G(j\omega)$  通过  $(-1, j0)$  点时，表明在  $s$  平面虚轴上有闭环极点，系统处于临界稳定状态。

### 2. 采用穿越的概念简化复杂曲线包围次数的计算

$\omega$  由 0 变到  $+\infty$  时开环频率特性曲线要形成对  $(-1, j0)$  点的一次包围，势必穿越  $(-\infty, -1)$  区间一次



(1) 开环频率特性曲线逆时针穿越  $(-\infty, -1)$  区间时，随  $\omega$  增加，频率特性的相角值增大，称为一次正穿越  $N'_+$ ；

(2) 反之，开环频率特性曲线顺时针穿越  $(-\infty, -1)$  区间时，随  $\omega$  增加，频率特性的相角值减小，称为一次负穿越  $N'_-$ ；

(3) 频率特性曲线包围  $(-1, j0)$  点的情况，可以利用频率特性曲线在负实轴  $(-\infty, -1)$  区间正、负穿越来表达

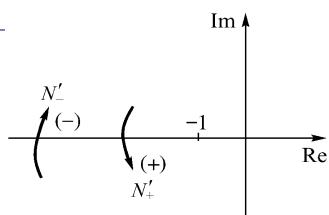
$\omega$ 由0变到 $+\infty$ 时开环幅相频率特性  
 $G(j\omega)$ 对 $(-1, j0)$ 点的总包围次数为

$$N' = (N'_+ - N'_-)$$

利用正、负穿越情况的奈奎斯特稳定判据叙述为：

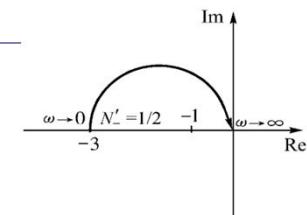
$$Z = P - 2(N'_+ - N'_-)$$

注意奈氏曲线在 $(-1, j0)$ 点以右负实轴上相位有变化不算穿越



### 3. 半次穿越

奈氏曲线始于或至于 $(-1, j0)$ 点以左负实轴，称为一个半次穿越



例4-37 某系统开环传递函数如下，试判断闭环系统的稳定性

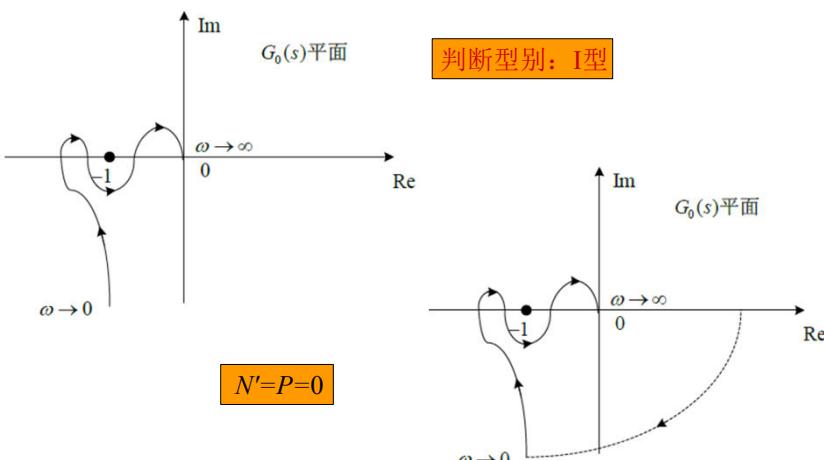
$$G(s)H(s) = \frac{-3}{s+1}$$

由于曲线始于 $(-3, j0)$ 点，故顺时针包围 $(-1, j0)$ 点次数为 $1/2$ ， $N'_- = 1/2$ 。由于开环右极点数为 $P=0$ ，故

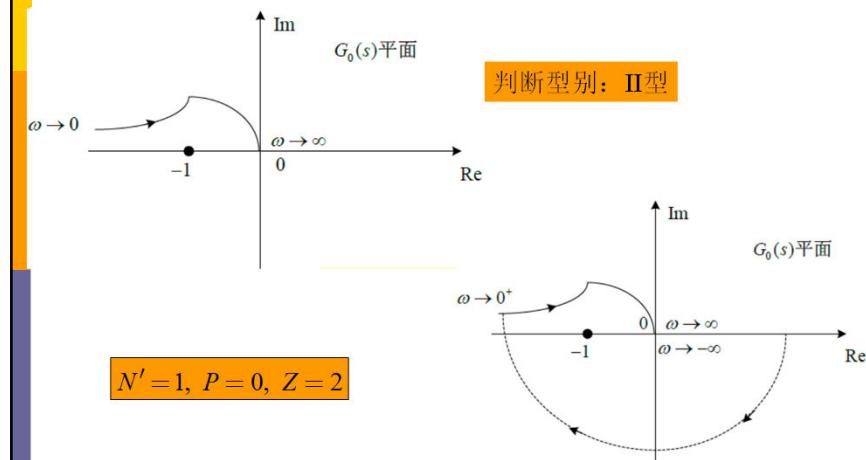
$$Z = P - 2(0 - N'_-) = P - 2N'_- = 1$$

闭环系统有一个右极点，闭环不稳定。

例4-38 设最小相位开环系统的频域特性曲线如下，开环系统在右半s平面无极点，试判断系统稳定性



例4-39 设最小相位开环系统的频域特性曲线如下，开环系统在右半s平面无极点，试判断系统稳定性



**思考题:** 单位反馈系统的开环传函为  $G_0(s) = \frac{10e^{-\tau s}}{s}$ ,  $\tau > 0$

试判断系统的稳定性

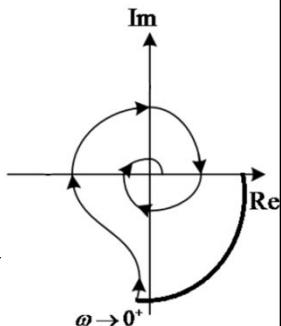
$$G_0(j\omega) = \frac{10e^{-j\omega\tau}}{j\omega}, \quad A(\omega) = \frac{10}{\omega}, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \tau\omega$$

与负实轴第一次相交对应的频率

$$-\frac{\pi}{2} - \tau\omega_g = -\pi \Rightarrow \omega_g = \frac{\pi}{2\tau}$$

与负实轴第一次相交对应的幅值

$$A(\omega_g) = \frac{20\tau}{\pi} \quad \frac{20\tau}{\pi} \leq 1 \Rightarrow 0 < \tau \leq \frac{\pi}{20}$$

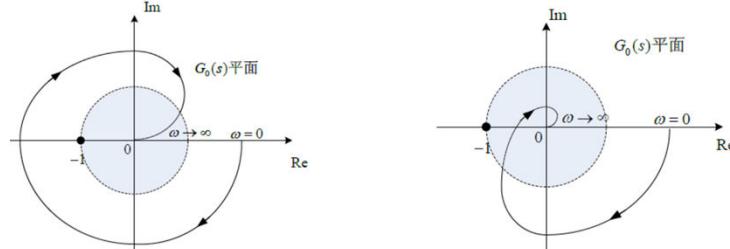


#### 4.5.4 奈奎斯特稳定性判据在伯德图中的表示形式

目的?

- ◊ Bode图更易画出;
- ◊ Bode图更易表示某环节or参数变化对稳定性的影响

如何翻译? (Bode图中描述奈式曲线包围(-1,j0)点)



#### 4.5.4 奈奎斯特稳定性判据在伯德图中的表示形式

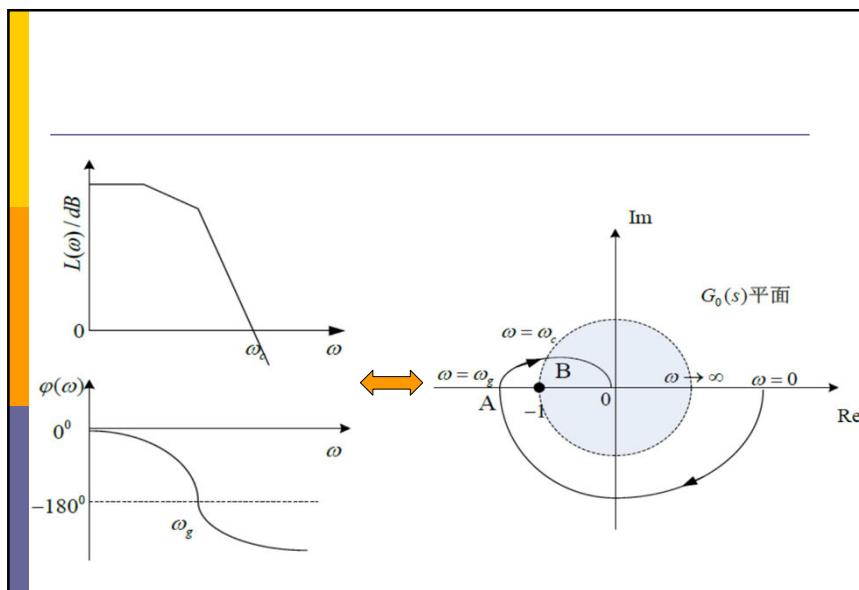
方法: 建立两者对应关系

(1) Nyquist图单位圆对应于Bode图上的零分贝线;

(2) Nyquist图负实轴对应于Bode图上的-180° 相位线;

(3) 在 $|G_k(j\omega)| > 1$ 频段内, 随着 $\omega$ 增加, 开环频率特性曲线由第三象限经过负实轴进入第二象限(或者相反, 由第二象限经负实轴进入第三象限), 则表示奈奎斯特图顺时针(或逆时针)包围(-1, j0)点一圈

在Bode图 $L(\omega) > 0$ 频段内, 随着 $\omega$ 增加对数相频特性曲线从大于-180°区域经-180°线进入小于-180°区域, 称为负穿越; 反之则称为正穿越



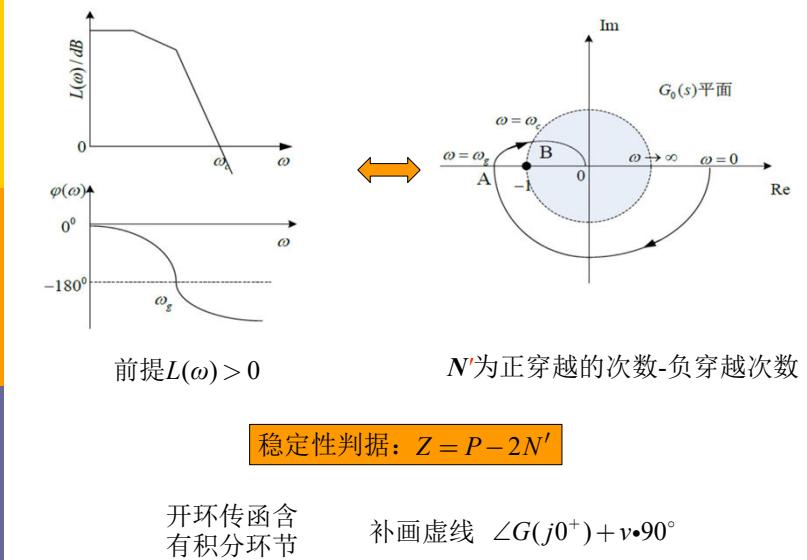
### Nyquist判据之Bode版

若系统开环传函在右半s平面上有 $P$ 个极点，在Bode图 $L(\omega) > 0$ 频段内，随着 $\omega$ 增加相频特性曲线对相位线-180°正、负穿越次数之差为 $P/2$ ，则闭环系统稳定；否则，闭环系统不稳定，其在右半s平面上极点数为

$$Z = P - 2N'$$

其中， $N'$ 为正穿越次数减去负穿越次数之差

开环传函包含积分环节时，在相频曲线 $\omega=0^+$ 的地方补画一条从相角 $\varphi(G_k(j0^+)) + 90^\circ \times v$ 到 $\varphi(G_k(j0^+))$ 的虚线  
将补上的虚线看成对数相频曲线的一部分



例4-40 某反馈系统开环传函为  $G_0(s) = \frac{K}{s^2(Ts+1)}$

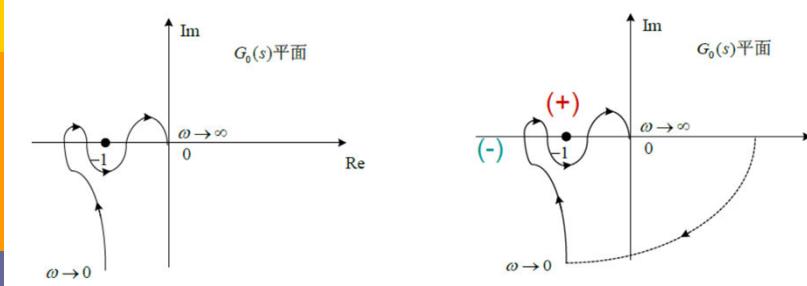
试判断系统稳定性

$$N' = -1$$

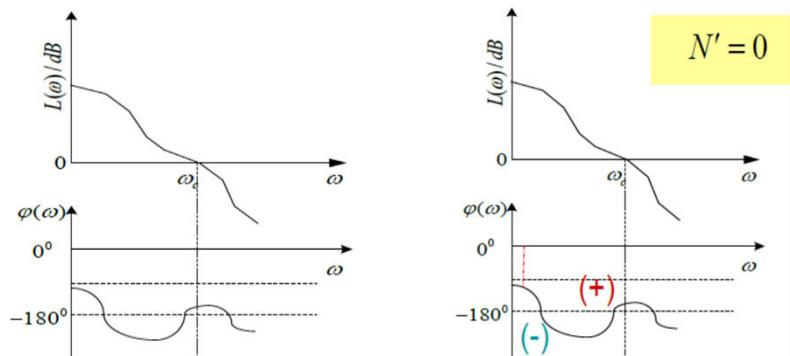
$$Z = P - 2N' = 0 + 2 = 2$$

**不稳定**

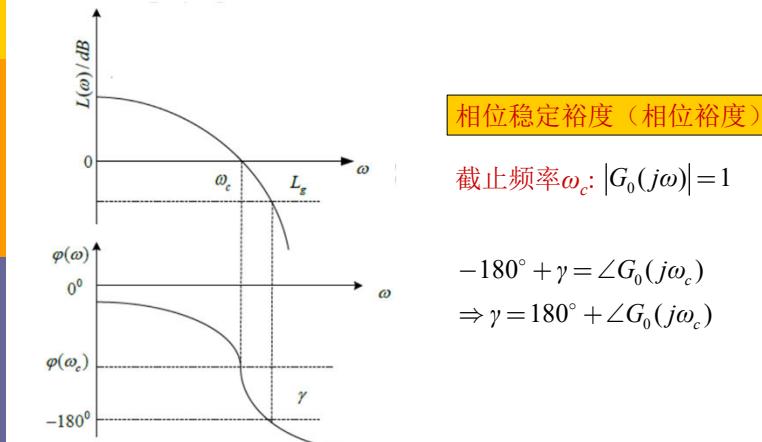
设最小相位开环系统的频域特性曲线，开环系统在右半s平面无极点，试大致画出其Bode图来判断系统稳定性



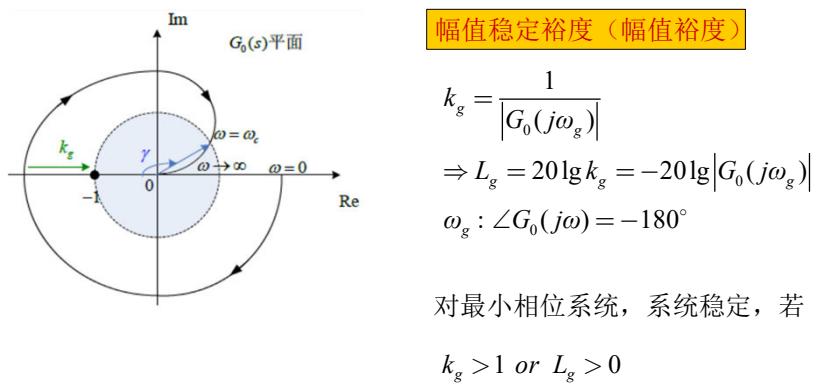
开环系统的频域特性曲线，开环系统在右半s平面无极点，试大致画出其Bode图判断系统稳定性



#### 4.5.5 稳定裕度（鲁棒性）



#### 4.5.5 稳定裕度（鲁棒性）



例4-41 当K=10 or 100时，分析闭环系统稳定性，并指出相位裕度和幅值裕度

