第4章 二元关系与函数

- 4.1 集合的笛卡儿积与二元关系
- 4.2 关系的运算
- 4.3 关系的性质
- 4.4 关系的闭包（不讲）
- 4.5 等价关系和偏序关系（重点讲）
- 4.6 函数的定义和性质（不讲）
- 4.7 函数的复合和反函数（不讲）

4.1 集合的笛卡儿积和二元关系

- 有序对
- 笛卡儿积及其性质
- 二元关系的定义
- 二元关系的表示

有序对

定义 由两个客体 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组称为有序对，记作$<x,y>$

实例：点的直角坐标(3,–4)

有序对性质

有序性 $<x,y> \neq <y,x>$ （当$x\neq y$时）

$<x,y>$ 与 $<u,v>$ 相等的充分必要条件是

$$<x,y>=<u,v> \Leftrightarrow x=u \wedge y=v$$

例1 $<2, x+5> = <3y-4, y>$，求 x, y.

解 $3y-4 = 2, x+5 = y \Rightarrow y = 2, x = -3$

有序 n 元组

定义 一个**有序 n ($n\geq 3$) 元组** $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$ 是一个有序对，其中第一个元素是一个有序 n-1元组，即

$$<x_1, x_2, \ldots, x_n> = < <x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}>, x_n>$$

当 n=1时, $<x>$ 形式上可以看成有序 1 元组.

实例 n 维向量是有序 n元组.

两个有序n元组相等

设$<x_1,x_2,\cdots,x_n>$与$<y_1,y_2,\cdots,y_n>$是两个n重组，如果$x_i=y_i$，$i=1,\cdots,n$，则称这两个n重组相等，记为

$$<x_1,x_2,\cdots,x_n>=<y_1,y_2,\cdots,y_n>。$$

n重组$<x_1,x_2,\cdots,x_n>$与$<y_1,y_2,\cdots,y_n>$相等，即：

$$(<x_1,x_2,\cdots,x_n>=<y_1,y_2,\cdots,y_n>)$$
$$\Leftrightarrow(x_1=y_1)\wedge(x_2=y_2)\wedge\cdots\wedge(x_n=y_n)$$

笛卡儿积

定义　设A,B为集合，A与B 的笛卡儿积记作A×B，即　$A\times B=\{ \langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in B \}$

如果A，B都是有限集，$|A|=n$，$|B|=m$，根据排列组合原理，$|A\times B|=?$

$|A\times B|=nm=|A||B|$

【例】设 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2,3\}$，

(1)试求$A\times B$和$B\times A$

(2)验证$|A\times B|=|A||B|$和$|B\times A|=|B||A|$

解：

(1)

$$A\times B=\{<a,1>,<a,2>,<a,3>,<b,1>,<b,2>,<b,3>\}$$

$$B\times A=\{<1,a>,<1,b>,<2,a>,<2,b>,<3,a>,<3,b>\}$$

(2)

$$|A\times B|=6=2\times 3=|A||B|$$

$$|B\times A|=6=3\times 2=|B||A|$$

例：若$A=\{\varnothing\}$， 则$P(A)\times A=\{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$，

设$B=\{1,2\}$, 求$P(B)\times B$。

$P(B)\times B$

$=\{\varnothing，\{1\}，\{2\}，\{1,2\}\}\times\{1,2\}$

$=\{<\varnothing,1>, <\varnothing,2>，<\{1\},1>，<\{1\},2>，<\{2\},1>,$

$<\{2\},2>，<\{1，2\},1>，<\{1，2\},2>\}$

笛卡儿积的性质

不适合交换律 $A\times B\neq B\times A \quad (A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$

不适合结合律 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$

对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

若A或B中有一个为空集，则$A\times B$就是空集.

$$A\times\varnothing=\varnothing\times B=\varnothing$$

若$|A|=m$, $|B|=n$, 则 $|A\times B|=mn$

性质的证明

证明　$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

证 任取$<x,y>$

$<x,y>\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B\vee<x,y>\in A\times C$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$

所以有$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

例题

例3 (1) 证明 $A=B \wedge C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C=B\times D$是否推出 $A=B \wedge C=D$? 为什么?

解 (1) 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in A\times C \Leftrightarrow x\in A \wedge y\in C$$

$$\Leftrightarrow x\in B \wedge y\in D \Leftrightarrow <x,y>\in B\times D$$

(2) 不一定. 反例如下:

$A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $C=D=\varnothing$, 则 $A\times C=B\times D$ 但是 $A\neq B$.

二元关系的定义

定义 如果一个集合满足以下条件之一：

（1）集合非空, 且它的元素都是有序对

（2）集合是空集

则称该集合为一个二元关系, 简称为关系，记作R.

如$\langle x,y\rangle \in R$, 可记作 xRy；如果$\langle x,y\rangle \notin R$, 则记作$x \not R y$

实例：$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle a,b\rangle\}$, $S=\{\langle 1,2\rangle,a,b\}$.

R是二元关系, 当a, b不是有序对时，S不是二元关系

根据上面的记法，可以写 $1R2$, aRb, $a \not R c$ 等.

从A到B的关系与A上的关系

定义 设A,B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系叫做**从A到B的二元关系**，当$A=B$时则叫做 **A上的二元关系**.

例：

$A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$,

$R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A\times B$, $R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$.

那么 R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系，

R_3和R_4同时也是 A上的二元关系.

设A是具有n个元素的有限集，则A上的二元关系有？种。

$$2^{n^2}$$

证明： 由$|A|=n$，则$|A \times A|=n^2$。
由集合的幂集（power set）的基数与集合本身基数的关系，可以得到
$|P(A \times A)|=2^{|A \times A|}=2^{n^2}$，
即$A \times A$的子集有2^{n^2}个。
所以有2^{n^2}种二元关系。

A上重要关系的实例

设 A 为任意集合，

$\varnothing$是 A 上的关系，称为空关系

E_A, I_A 分别称为全域关系与恒等关系，定义如下：

$$E_A=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$$

$$I_A=\{<x,x>|x\in A\}$$

例如, $A=\{1,2\}$, 则

$$E_A=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$$

$$I_A=\{<1,1>,<2,2>\}$$

A上重要关系的实例（续）

小于等于关系 L_A, 整除关系D_A, 包含关系$R_{\subseteq}$定义:

$L_A=\{<x,y>|\ x,y\in A\land x\le y\}$, $A\subseteq$R，R为实数集合

$D_B=\{<x,y>|\ x,y\in B\land x$整除$y\}$,

$B\subseteq$Z*, Z*为非0整数集

$R_{\subseteq}=\{<x,y>|\ x,y\in A\land x\subseteq y\}$, A是集合族.

类似的还可以定义大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等等.

实例

例如 $A = \{1, 2, 3\}$, $B =\{a, b\}$, 则

$$L_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$$

$$D_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$$

$A=P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 则 A上的包含关系是

$$R_{\subseteq}=\{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a\}>,$$
$$<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$$

关系的表示

表示方式：关系的集合表达式（描述法、列举法）、关系矩阵、关系图

Remark:

A, *B*为有穷集，关系矩阵适于表示从*A*到*B*的关系或者*A*上的关系;

关系图适于表示*A*上的关系。

关系的表示——关系矩阵

关系矩阵：若$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$，$R$是从$A$到$B$的关系，则布尔矩阵$M_R = [\ r_{ij}\ ]_{m\times n}$，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & <a_i,b_j>\in R\\0 & <a_i,b_j>\notin R\end{cases}$$

$$i=1,\cdots,m \quad j=1,\cdots,n$$

称为二元关系R的关系矩阵。

【例】设$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3\}$，R是A到B的二元关系，定义为：

$$R=\{<a_1,b_1>,<a_1,b_3>,<a_2,b_2>,<a_2,b_3>,$$

$$<a_3,b_1>,<a_4,b_1>,<a_4,b_2>\}$$

写出R的关系矩阵。

解：

$$M_R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

关系的表示——关系图

表示二元关系R的图叫做R的关系图。

A到B二元关系的关系图和A上的二元关系的关系图的定义是不一样的。

(1)A到B二元关系R的关系图

设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，R是A到B二元关系，R的关系图的绘制方法如下：

①画出m个小圆圈表示A的元素，再画出n个小圆圈表示B的元素。这些小圆圈叫做关系图的结点；

②如果$<a_i,b_j>\in R$，则从a_i到b_j画一根有方向(带箭头)的线。这些有方向(带箭头)的线叫做关系图的边。

例：　二元关系R的关系图如图4.1。

$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3\}$，

R是A到B的二元关系，定义为：

$$R=\{<a_1,b_1>,<a_1,b_3>,<a_2,b_2>,<a_2,b_3>,$$
$$<a_3,b_1>,<a_4,b_1>,<a_4,b_2>\}$$

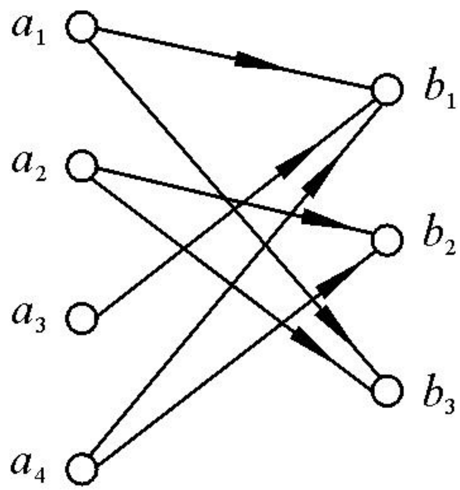


图 4.1

⑵A上的二元关系R的关系图

设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，R是A上的二元关系，其关系图如下绘制：

①画出m个小圆圈表示A的元素。

②如果$\langle a_i,a_j\rangle\in R$，则从$a_i$到$a_j$画一根有方向(带箭头)的线。

设$A=\{1,2,3,4\}$，R是A的二元关系，定义为：

$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$

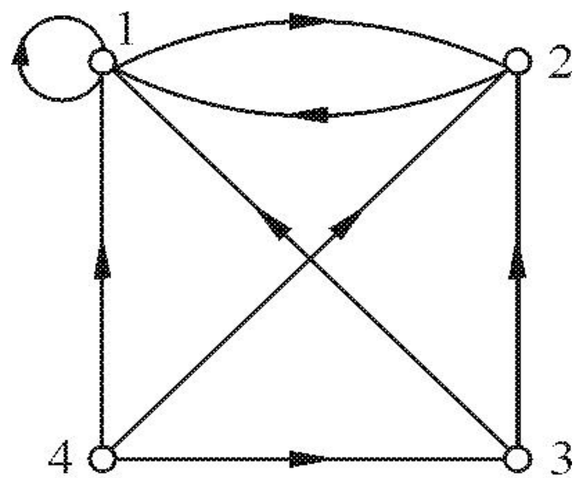


图 4.2

本小节学习目标：

- 理解和掌握笛卡尔积的定义
- 二元关系的定义及其表示（关系矩阵、关系图）

4.2 关系的运算

- 基本运算定义
  - 定义域、值域、域
  - 逆运算、合成运算
  - 基本运算的性质
- 幂运算
  - 定义
  - 求法
  - 性质

关系的基本运算定义

定义域、值域 和 域

$$\text{dom}R = \{ x \mid \exists y\, (\langle x,y\rangle \in R) \}$$

$$\text{ran}R = \{ y \mid \exists x\, (\langle x,y\rangle \in R) \}$$

$$\text{fld}R = \text{dom}R \cup \text{ran}R$$

例1 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$, 则

$\text{dom}R=\{1, 2, 4\}$

$\text{ran}R=\{2, 3, 4\}$

$\text{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$

关系的基本运算定义（逆运算）

逆运算

$$R^{-1} = \{<y,x> \mid <x,y> \in R\}$$

例　$R=\{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$

$$R^{-1}=\{<2,1>, <3,2>, <4,1>, <2,2>\}$$

关系的基本运算定义（逆运算续）

Remark.（ R^{-1} 与R之间的联系）

1. 关系矩阵

$$M_{R^{-1}} = M_R^{T}$$

2. 关系图

将R关系图中的弧线的箭头反置，就可以得到R^{-1}关系图。

3. $(R^{-1})^{-1} = R$

4. $\mathrm{dom}\, R^{-1} = \mathrm{ran}\, R$， $\mathrm{ran}\, R^{-1} = \mathrm{dom}\, R$

关系的基本运算定义（合成运算）

合成运算

设X，Y，Z是集合，$R\subseteq X\times Y$，$S\subseteq Y\times Z$，集合

$$\{\langle x,z\rangle \mid x\in X\wedge z\in Z\wedge(\exists y)(y\in Y\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in S)\}$$

叫做R和S的合成运算，记为$R\circ S$，是X到Z的二元关系。

例 $R=\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$S=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$R\circ S=\{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

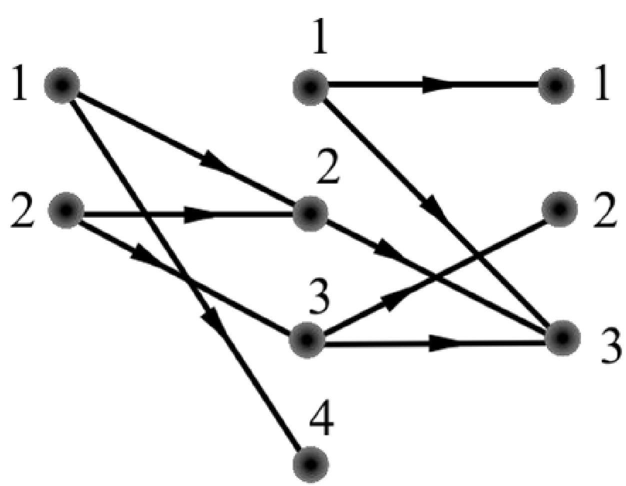
$S\circ R=\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

合成运算的图示方法

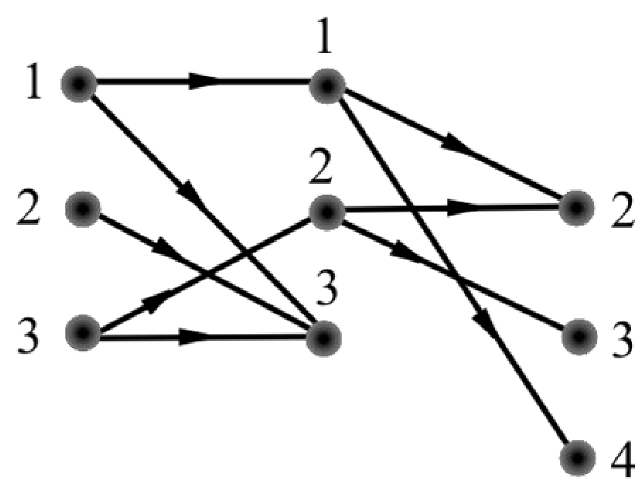
利用图示（不是关系图）方法求合成

$R\circ S=\{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

$S\circ R=\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$



$R\circ S$



$S\circ R$

合成运算的关系矩阵

设X，Y，Z是集合，$R\subseteq X\times Y$，$S\subseteq Y\times Z$，$R\circ S$是R和S的复合关系，$R\circ S\subseteq X\times Z$，

它们的关系矩阵分别是M_R、M_S和$M_{R\circ S}$。这三个矩阵之间的关系是什么？

设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，$Z=\{z_1,z_2,\cdots,z_p\}$

$R\subseteq X\times Y$，$S\subseteq Y\times Z$，$R\circ S\subseteq X\times Z$

$$M_R=(u_{ij})_{m\times n} \qquad u_{ij}=\begin{cases}1 & <x_i,y_j>\in R\\ 0 & <x_i,y_j>\notin R\end{cases}$$

$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$

$$M_S=(v_{ij})_{n\times \mathrm{p}} \qquad v_{ij}=\begin{cases}1 & <y_i,z_j>\in S\\ 0 & <y_i,z_j>\notin S\end{cases}$$

$i=1,\cdots,n$，$j=1,\cdots,p$

$$M_{R\circ S}=(w_{ij})_{m\times \mathrm{p}} \qquad w_{ij}=\begin{cases}1 & <x_i,z_j>\in R\circ S\\ 0 & <x_i,z_j>\notin R\circ S\end{cases}$$

$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,p$

w_{ij}与 u_{ij} v_{ij} 有如下的关系：

$$w_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (u_{ik} \wedge v_{kj}) \; i=1,\cdots,m， j=1,\cdots,p$$

将上述关系用矩阵符号记为：

$$M_{R\circ S}=M_R \circ M_S,$$

矩阵运算“◦”叫做关系矩阵M_R和M_S的布尔乘法。

【例】$A=\{1,2,3,4,5\}$，A上的二元关系R和S定义如下：

$R=\{<1,2>,<2,2>,<3,4>\}$

$S=\{<1,3>,<2,5>,<3,1>,<4,2>\}$

试求$M_{R\circ S}$和$M_R\circ M_S$，它们是否相等？

解： 按照R和S的定义，求出

$R\circ S=\{<1,5>,<3,2>,<2,5>\}$

写出R、S和$R\circ S$关系矩阵如下：

$$M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_S=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_{R\circ S}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

关系基本运算的性质

定理1 设F是任意的关系, 则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 (1) 任取$<x,y>$, 由逆的定义有

$$<x,y>\in(F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in F^{-1} \Leftrightarrow <x,y>\in F$$

所以有 $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) 任取x,

$$x\in\mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \exists y(<y,x>\in F) \Leftrightarrow x\in\mathrm{ran}F$$

所以有$\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$. 同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

关系基本运算的性质（续）

定理2 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H=F\circ (G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1}= G^{-1}\circ F^{-1}$

证 (1) 任取$<x,y>$,

$<x,y>\in(F\circ G)\circ H$

$\Leftrightarrow\exists t(<x,t>\in F\circ G\wedge<t,y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists t (\exists s(<x,s>\in F\wedge<s,t>\in G)\wedge<t,y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists t \exists s (<x,s>\in F\wedge<s,t>\in G\wedge<t,y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists s (<x,s>\in F\wedge\exists t (<s,t>\in G\wedge<t,y>\in H))$

$\Leftrightarrow \exists s (<x,s>\in F\wedge<s,y>\in G\circ H)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ (G\circ H)$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ (G\circ H)$

关系基本运算的性质（续）

(2) 任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in(F\circ G)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow <y,x>\in F\circ G$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<y,t>\in F\wedge(t,x)\in G)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in G^{-1}\wedge(t,y)\in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in G^{-1}\circ F^{-1}$$

所以 $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

A上关系的幂运算

设R为A上的关系, n为自然数, 则 R 的 n次幂定义为:

(1) $R^0=\{<x,x> \mid x\in A\}=I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意:

对于A上的任何关系R_1和R_2都有

$$R_1^0 = R_2^0 = I_A$$

对于A上的任何关系 R 都有

$$R^1 = R$$

幂的求法

对于集合表示的关系R，计算 R^n 就是n个R右复合 . 矩阵表示就是n个矩阵相乘, 其中相加采用逻辑加.

例3 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$, 求$R$的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

解 R与R^2的关系矩阵分别为

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \quad M^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

幂的求法（续）

同理，$R^0=I_A$, R^3和R^4的矩阵分别是：

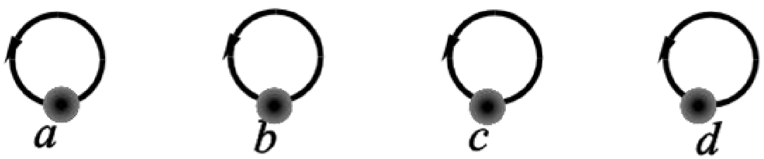
$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此$M^4=M^2$, 即$R^4=R^2$. 因此可以得到

$$R^2=R^4=R^6=\ldots,\quad R^3=R^5=R^7=\ldots$$

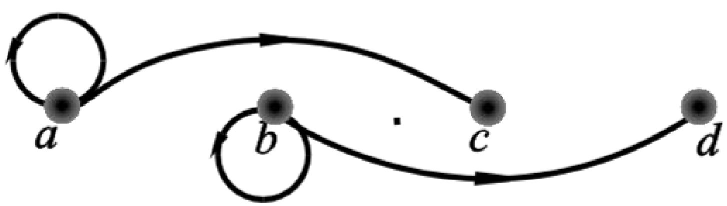
幂的求法（续）

$R^0, R^1, R^2, R^3, \ldots$的关系图如下图所示

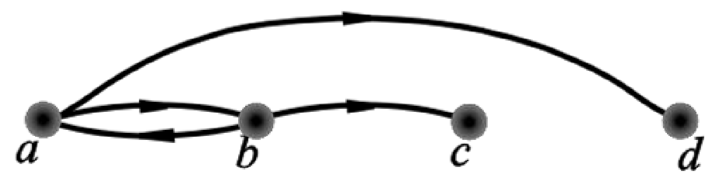


R^0

R^1



$R^2=R^4=\ldots$



$R^3=R^5=\ldots$

幂运算的性质

定理3 设A为n元集, R是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$.

证 R为A上的关系, 由于$|A|=n$, A上的不同关系只有 2^{n^2}个.

当列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \ldots, , \ldots,$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s=R^t$.

幂运算的性质（续）

定理4 设 R 是 A 上的关系, $m, n \in \mathbf{N}$, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的 $m \in \mathbf{N}$, 施归纳于 n.

若 $n=0$, 则有

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n+1}$$

所以对一切 $m, n \in \mathbf{N}$ 有 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

幂运算的性质（续）

(接上页证明)

(2) 对于任意给定的 $m\in\mathrm{N}$, 施归纳于n.

若n=0, 则有

$$(R^m)^0=I_A=R^0=R^{m\times 0}$$

假设 $(R^m)^n=R^{mn}$, 则有

$$(R^m)^{n+1}=(R^m)^n\circ R^m=(R^{mn})\circ R^m=R^{mn+m}=R^{m(n+1)}$$

所以对一切 $m,n\in\mathrm{N}$ 有 $(R^m)^n=R^{mn}$.

本小节学习目标

- 掌握关系的复合运算、求逆运算、幂运算的定义及其相关性质。