

# 第6章 一些特殊的图

6.1 二部图（不讲）

6.2 欧拉图（略讲）

6.3 哈密顿图（略讲）

6.4 平面图（不讲）

# 6.1 二部图

- 二部图
- 完全二部图
- 匹配
- 极大匹配
- 最大匹配
- 匹配数
- 完备匹配

# 二部图

**定义** 设无向图  $G = \langle V, E \rangle$ , 若能将  $V$  分成  $V_1$  和  $V_2$  ( $V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ), 使得  $G$  中的每条边的两个端点一个属于  $V_1$ , 另一个属于  $V_2$ , 则称  $G$  为**二部图**, 记为  $\langle V_1, V_2, E \rangle$ , 称  $V_1$  和  $V_2$  为**互补顶点子集**.

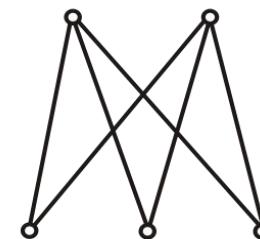
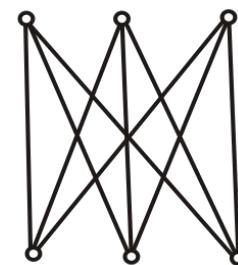
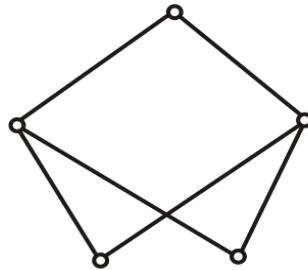
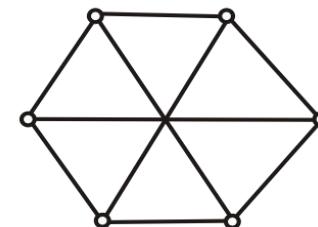
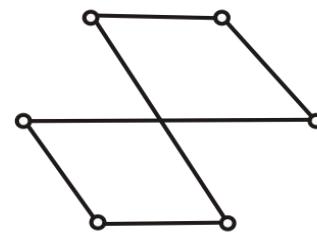
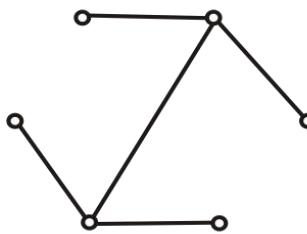
又若  $V_1$  中每个顶点均与  $V_2$  中每个顶点有且只有一条边相关联, 则称二部图  $G$  为**完全二部图**, 记为  $K_{r,s}$ , 其中  $r=|V_1|, s=|V_2|$ .

注意:  $n$  阶零图为二部图.

# 二部图的判别法

**定理** 无向图  $G = \langle V, E \rangle$  是二部图当且仅当  $G$  中无奇数长度的回路（无奇圈）.

**例** 下述各图都是二部图



# 匹配

设  $G = \langle V, E \rangle$  为无向图,  $E^* \subseteq E$

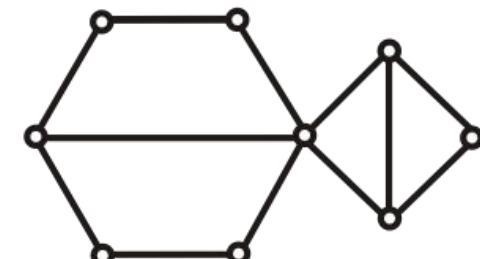
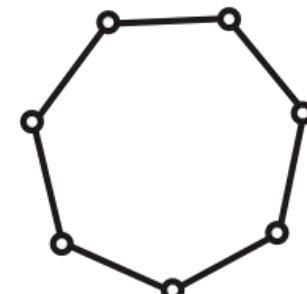
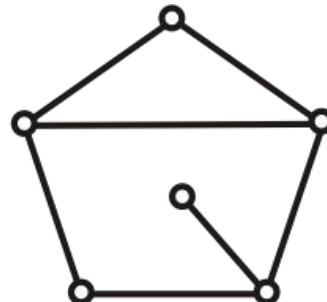
**匹配(边独立集)**: 任2条边均不相邻的边子集

**极大匹配**: 添加任一条边后都不再是匹配的匹配

**最大匹配**: 边数最多的极大匹配

**匹配数**: 最大匹配中的边数, 记为  $\beta_1$

例 3个图的匹配数 依次为3, 3, 4.



# 匹配 (续)

设  $M$  为  $G$  中一个匹配,  $v \in V(G)$

$v$  为  $M$  饱和点:  $M$  中有边与  $v$  关联

$v$  为  $M$  非饱和点:  $M$  中没有边与  $v$  关联

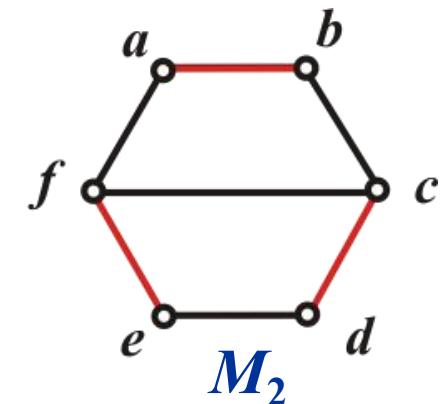
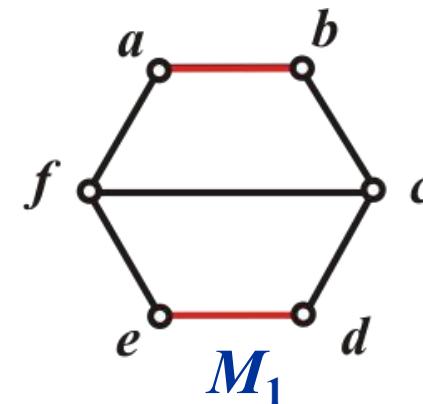
$M$  为完美匹配:  $G$  的每个顶点都是  $M$  饱和点

例 关于  $M_1$ ,  $a, b, e, d$  是饱和点

$f, c$  是非饱和点

$M_1$  不是完美匹配

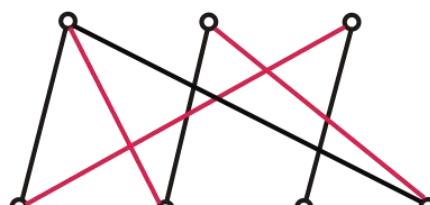
$M_2$  是完美匹配



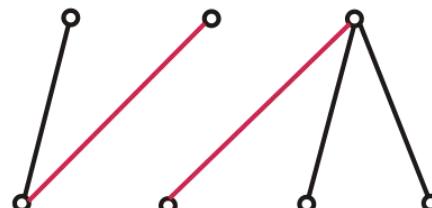
# 二部图中的匹配

**定义** 设 $G=<V_1, V_2, E>$ 为二部图,  $|V_1| \leq |V_2|$ ,  $M$ 是 $G$ 中最大匹配, 若 $V_1$ 中顶点全是 $M$ 饱和点, 则称 $M$ 为 $G$ 中 $V_1$ 到 $V_2$ 的**完备匹配**. 当 $|V_1|=|V_2|$ 时, 完备匹配变成完美匹配.

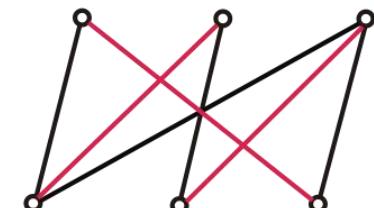
**例** 图中红边组成各图的一个匹配, (1)为完备的, 但不是完美的; (2)不是完备的, 其实(2)中无完备匹配; (3) 是完美的.



(1)



(2)



(3)

# Hall定理

**定理(Hall定理)** 设二部图  $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$  中,  $|V_1| \leq |V_2|$ .  $G$  中存在从  $V_1$  到  $V_2$  的完备匹配当且仅当  $V_1$  中任意  $k$  个顶点至少与  $V_2$  中的  $k$  个顶点相邻 ( $k=1, 2, \dots, |V_1|$ ).

由 Hall 定理不难证明, 上一页图(2)没有完备匹配.

**定理** 设二部图  $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$  中,  $V_1$  中每个顶点至少关联  $t$  条边 ( $t \geq 1$ ), 而  $V_2$  中每个顶点至多关联  $t$  条边, 则  $G$  中存在  $V_1$  到  $V_2$  的完备匹配.

Hall 定理中的条件称为 “**相异性条件**”, 第二个定理中的条件称为  **$t$  条件**. 满足  $t$  条件的二部图一定满足相异性条件.

# 一个应用实例

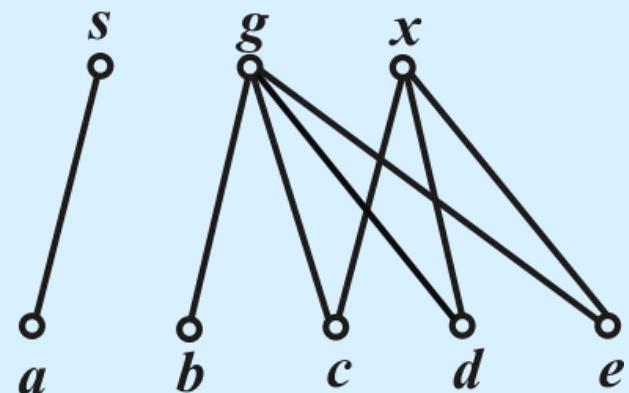
例 某课题组要从 $a, b, c, d, e$  5人中派3人分别到上海、广州、香港去开会. 已知 $a$ 只想去上海,  $b$ 只想去广州,  $c, d, e$ 都表示想去广州或香港. 问该课题组在满足个人要求的条件下, 共有几种派遣方案?

解 令 $G= \langle V_1, V_2, E \rangle$ , 其中 $V_1=\{s, g, x\}$ ,  $V_2=\{a, b, c, d, e\}$ ,  
 $E=\{(u, v) \mid u \in V_1, v \in V_2, v \text{想去 } u\}$ ,

其中 $s, g, x$ 分别表示上海、广州和香港.

$G$ 如图所示.

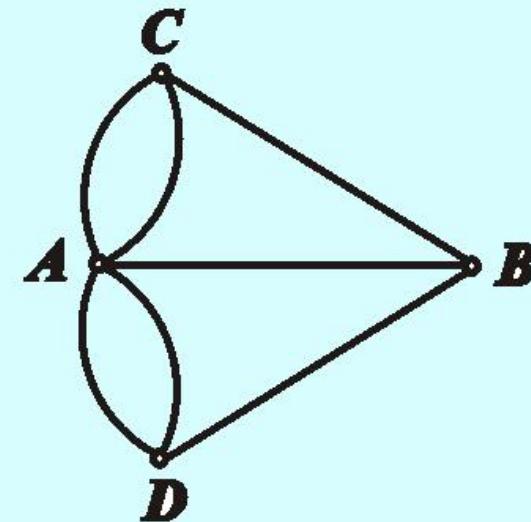
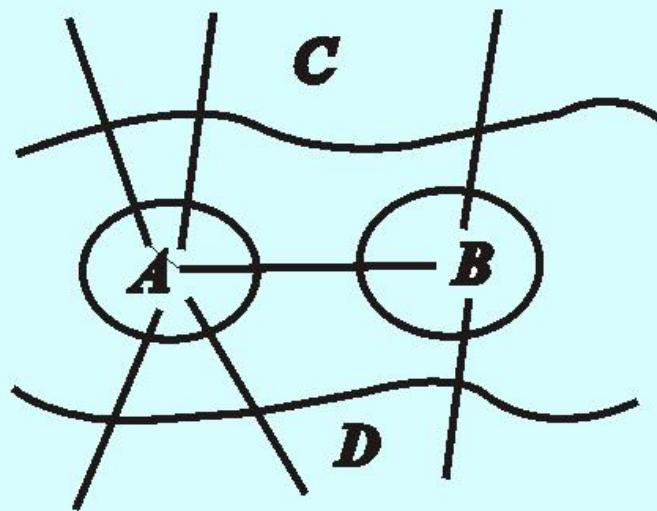
$G$  满足相异性条件, 因而可给出派遣方案, 共有9种派遣方案  
(请给出这9种方案).



## 6.2 欧拉图

- 欧拉通路
- 欧拉回路
- 欧拉图
- 半欧拉图

# 哥尼斯堡七桥问题



欧拉图是能一笔画出的边不重复的回路.

# 欧拉图

**欧拉通路:** 经过图中每条边一次且仅一次，并且行遍图中每一个顶点的通路.

**欧拉回路:** 经过图中每条边一次且仅一次，并且行遍图中每一个顶点的回路.

**欧拉图:** 具有欧拉回路的图.

**半欧拉图:** 具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

几点说明：

上述定义对无向图和有向图都适用.

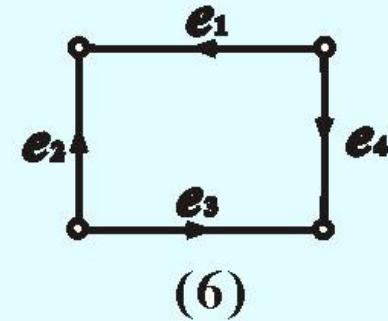
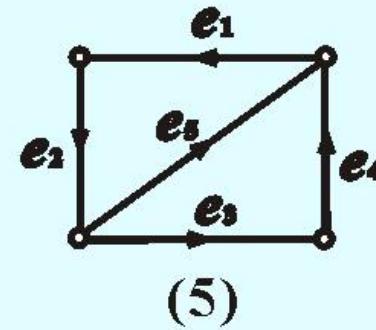
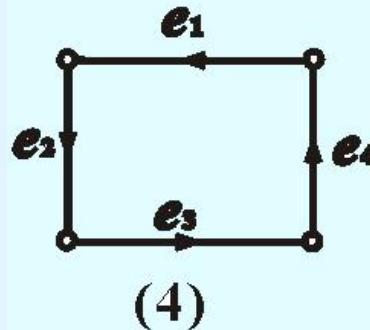
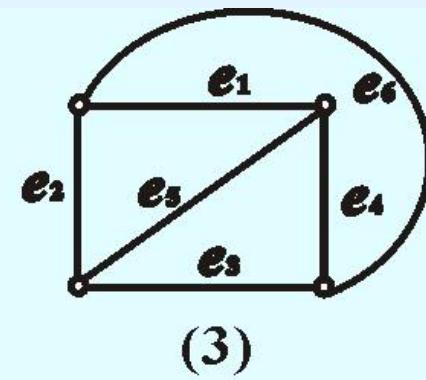
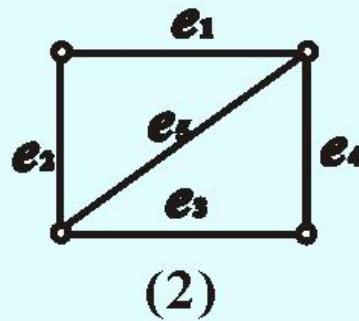
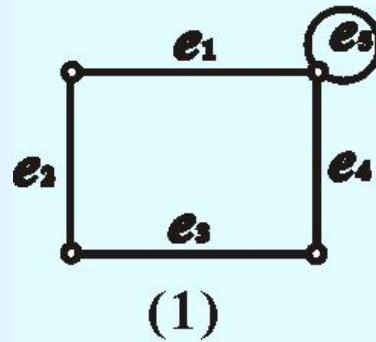
规定平凡图为欧拉图.

欧拉通路是简单通路，欧拉回路是简单回路.

环不影响图的欧拉性.

# 欧拉图(续)

例 图中, (1), (4)为欧拉图; (2), (5)有欧拉通路; (3), (6)既不是欧拉图, 也无欧拉通路.



# 欧拉图的判别法

**定理** 无向图 $G$ 为欧拉图当且仅当 $G$ 连通且无奇度顶点.

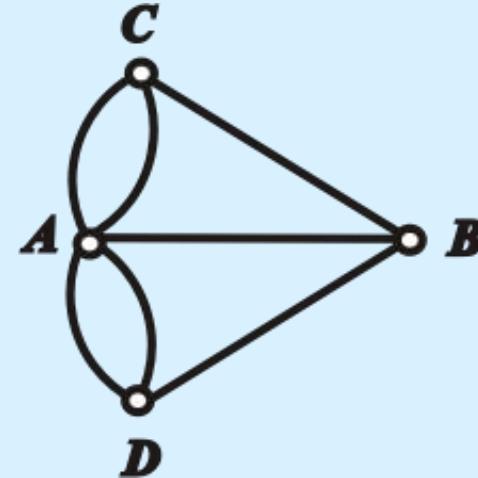
无向图 $G$ 具有欧拉通路当且仅当 $G$ 连通且恰有两个奇度顶点.

**定理** 有向图 $D$ 是欧拉图当且仅当 $D$ 连通且每个顶点的入度都等于出度.

有向图 $D$ 具有欧拉通路当且仅当 $D$ 连通且恰有两个奇度顶点, 其中一个入度比出度大1, 另一个出度比入度大1, 其余顶点的入度等于出度.

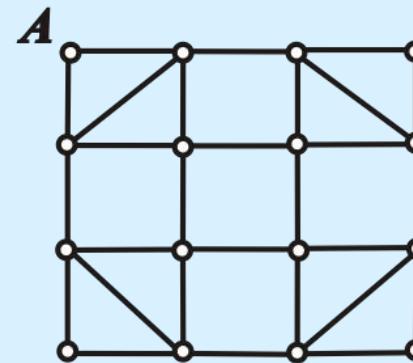
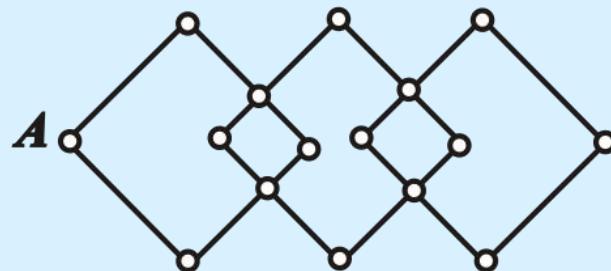
# 实例

例1 哥尼斯堡七桥问题



例2 下面两个图都是欧拉图.

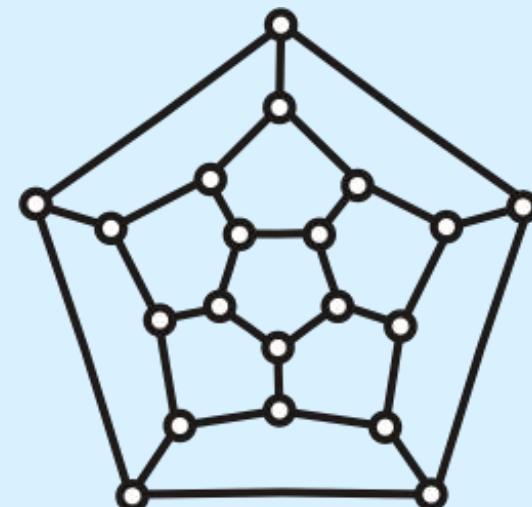
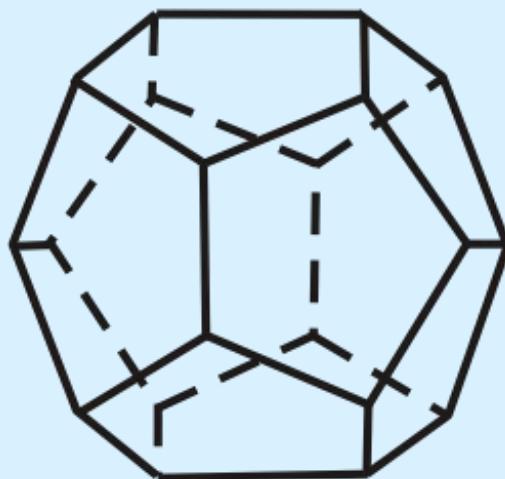
从A点出发, 如何一次成功地走出一条欧拉回路来?



## 6.3 哈密顿图

- 哈密顿通路
- 哈密顿回路
- 哈密顿图
- 半哈密顿图

# 哈密顿周游世界问题



# 哈密顿图的定义

**哈密顿通路**: 经过图中所有顶点一次且仅一次的通路.

**哈密顿回路**: 经过图中所有顶点一次且仅一次的回路.

**哈密顿图**: 具有哈密顿回路的图.

**半哈密顿图**: 具有哈密顿通路而无哈密顿回路的图.

几点说明:

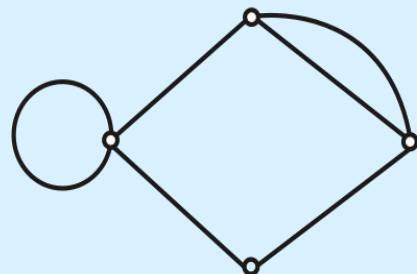
平凡图是哈密顿图.

哈密顿通路是初级通路, 哈密顿回路是初级回路.

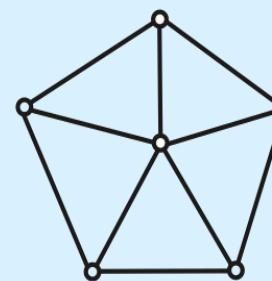
环与平行边不影响图的哈密顿性.

# 实例

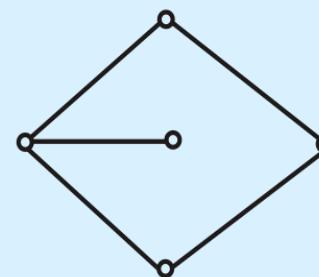
例 图中, (1), (2)是哈密顿图; (3)是半哈密顿图.  
(4)既不是哈密顿图, 也不是半哈密顿图.



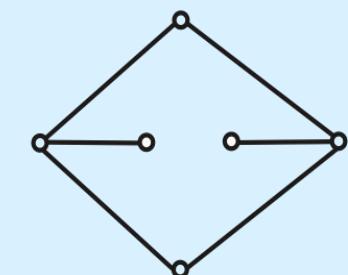
(1)



(2)



(3)



(4)

# 无向哈密顿图的充分条件

## 定理

设 $G$ 是 $n$ 阶( $n \geq 3$ )无向简单图, 若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于 $n-1$ , 则 $G$ 中存在哈密顿通路.

当 $n \geq 3$ 时, 若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于 $n$ , 则 $G$ 中存在哈密顿回路, 从而 $G$ 为哈密顿图.

上面定理给出了图中存在一条汉密尔顿路和汉密尔顿回路的充分条件，而不是必要条件。

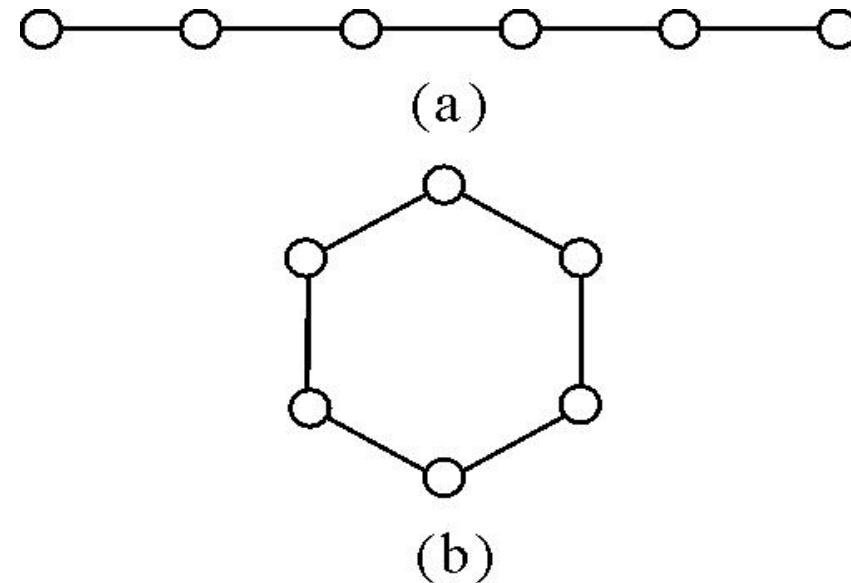


图 9.37

(a)有6个结点，任意两个结点度数的和小于5，但图中存在一条汉密尔顿路。

(b)也有6个结点，任意两个结点度数的和小于6，但图中存在一条汉密尔顿回路。

某地有5个风景点，若每个风景点均有两条道路与其它点相通，问是否可经过每个风景点恰好一次的游完这5处？

解：因为有5个风景点，故可看成一个有5个结点的无向图，其中每处均有两条路与其它结点相通，所以 $\deg(v_i)=2$ ,  $i=1, \dots, 5$ 。故对任意两点 $v_i$ ,  $v_j$ 均有

$$\deg(v_i) + \deg(v_j) = 2 + 2 = 4 = 5 - 1$$

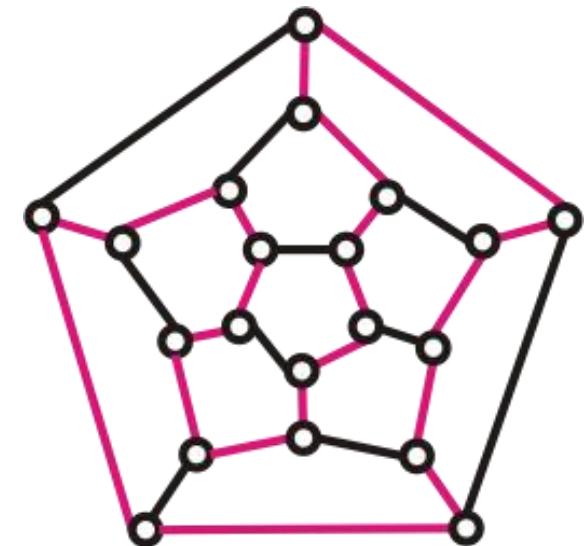
由定理可知此图中一定有一条汉密尔顿路，本题有解。

# 判断是否是哈密顿图的可行方法

- 观察出一条哈密顿回路

例如 右图(周游世界问题)中红边给出一条哈密顿回路, 故它是哈密顿图.

注意, 此图不满足定理的条件.



- 满足充分条件

例如 当 $n \geq 3$ 时,  $K_n$  中任何两个不同的顶点  $u, v$  均有  $d(u) + d(v) = 2(n-1) \geq n$ , 所以  $K_n$  为哈密顿图.

# 无向哈密顿图的必要条件

**定理** 设无向图  $G = \langle V, E \rangle$  是哈密顿图, 则对于任意  $V_1 \subset V$  且  $V_1 \neq \emptyset$ , 均有  $p(G - V_1) \leq |V_1|$ .

几点说明:

定理中的条件是哈密顿图的必要条件, 但不是充分条件.

可利用该定理判断某些图不是哈密顿图.

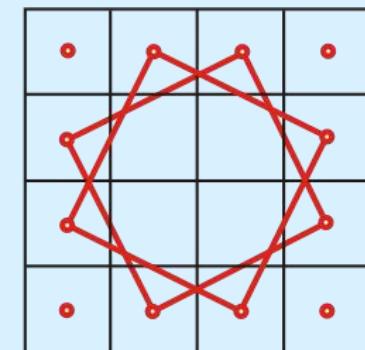
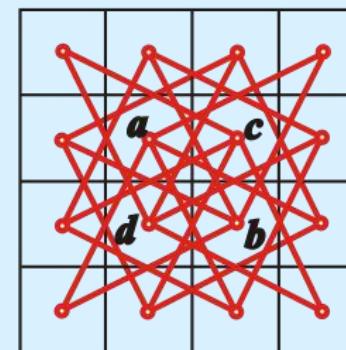
设  $G$  为  $n$  阶无向连通简单图, 若  $G$  中有割点, 则  $G$  不是哈密顿图.

# 判断是否是哈密顿图的可行方法(续)

## ■不满足必要条件

例 1/4 国际象棋盘( $4 \times 4$ 方格)上的跳马问题：马是否能恰好经过每一个方格一次后回到原处？

解 每个方格看作一个顶点，2个顶点之间有边当且仅当马可以从一个方格跳到另一个方格，得到16阶图 $G$ ，如左图红边所示。取 $V_1 = \{a, b, c, d\}$ ，则 $p(G - V_1) = 6 > |V_1|$ ，见右图。由定理，图中无哈密顿回路，故问题无解。



# 应用实例

例 某次国际会议8人参加，已知每人至少与其余7人中的4人有共同语言，问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座，使得每个人都能与两边的人交谈？

解 图是描述事物之间关系的最好的手段之一. 作无向图  $G = \langle V, E \rangle$ , 其中  $V = \{v | v \text{ 为与会者}\}$ ,  $E = \{(u, v) | u, v \in V, u \text{ 与 } v \text{ 有共同语言, 且 } u \neq v\}$ .  $G$  为简单图. 根据条件,  $\forall v \in V$ ,  $d(v) \geq 4$ . 于是,  $\forall u, v \in V$ , 有  $d(u) + d(v) \geq 8$ . 由定理可知  $G$  为哈密顿图. 服务员在  $G$  中找一条哈密顿回路  $C$ , 按  $C$  中相邻关系安排座位即可.

由本题想到的：哈密顿图的实质是能将图中所有的顶点排在同一个圈中.