离散数学第一章作业:

1.5 （5）—（8）

作业：1.5 (5)-(8). 1.6 (2)-(3). 1.7 (1)

1.5 将下列命题符号化

(5) 如果天下大雨，他就乘公共汽车上班.

(6) 只有天下大雨，他才乘公共汽车上班.

(7) 除非天下大雨，否则他不乘公共汽车上班.

(8) 不经一事，不长一智.

解：令 p：天下大雨. q：他乘公共汽车上班. r：经一事. s：长一智.

(5) $p \to q$

(6) $q \to p$.

(7) $\neg p \to \neg q \Leftrightarrow q \to p$

(8) $\neg r \to \neg s \Leftrightarrow s \to r$

1.6 （2）（3）

1.6 设 $p.q$ 的真值为 0；$r.s$ 的真值为 1. 求下列各命题公式的真值.

(2) $(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \vee s)$.

(3) $(p \wedge (q \vee r)) \to ((p \vee q) \wedge (r \wedge s))$.

解：

(2) $(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \vee s) \Leftrightarrow 0 \wedge 1 \Leftrightarrow 0$.

(3) $(p \wedge (q \vee r)) \to ((p \vee q) \wedge (r \wedge s)) \Leftrightarrow (0 \wedge 1) \to (0 \wedge 1) \Leftrightarrow 1$

1.7 （1）

1.7 判断下列命题公式的类型.

(1) $p \to (p \vee q \vee r)$.

p	q	r	$p \vee q \vee r$	$p \to (p \vee q \vee r)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	[illegible]	[illegible]	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

故此命题公式为重言式.

1.8 （2）（3）

1.8 用等值演算法证明下列等值式.

(2) $((p\to q)\land(p\to r))\Leftrightarrow(p\to(q\land r))$

$(p\to q)\land(p\to r)$

$\Leftrightarrow(\neg p\lor q)\land(\neg p\lor r)$

$\Leftrightarrow\neg p\lor(q\land r)$

$\Leftrightarrow p\to(q\land r)$

$\therefore((p\to q)\land(p\to r))\Leftrightarrow(p\to(q\land r))$

(3) $\neg(p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow((p\lor q)\land\neg(p\land q))$

$\neg(p\leftrightarrow q)$

$\Leftrightarrow\neg((p\to q)\land(q\to p))$

$\Leftrightarrow\neg((\neg p\lor q)\land(\neg q\lor p))$

$\Leftrightarrow\neg(\neg p\lor q)\lor\neg(\neg q\lor p)$

$\Leftrightarrow(p\land\neg q)\lor(q\land\neg p)$

$\Leftrightarrow(p\lor(q\land\neg p))\land(\neg q\lor(q\land\neg p))$

$\Leftrightarrow((p\lor q)\land(p\lor\neg p))\land((\neg q\lor q)\land(\neg q\lor\neg p))$

$\Leftrightarrow(p\lor q)\land\neg(p\land q)$

A++ 3.18

$\therefore\neg(p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow((p\lor q)\land\neg(p\land q))$.

1.12

（1）

1.12.

(1) 用真值表法或等价演算法求解习题6).

p	q	r	$q\land r$	$p\lor(q\land r)$	$p\land q\land r$	$(p\lor(q\land r))\to(p\land q\land r)$
0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

成真赋值为: 000, 001, 010, 111

成假赋值为: 011, 100, 101, 110

主析取范式为: $(\neg p\land\neg q\land\neg r)\lor(\neg p\land\neg q\land r)\lor(\neg p\land q\land\neg r)\lor(p\land q\land r)$

$\Leftrightarrow\Sigma\ 0,1,2,7$

主合取范式为: $(p\lor\neg q\lor\neg r)\land(\neg p\lor q\lor r)\land(\neg p\lor q\lor\neg r)\land(\neg p\lor\neg q\lor r)$

$\Leftrightarrow\Pi\ 3,4,5,6$

（2）

(2) p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to q$	$\neg q \vee p$	$(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1

成真赋值为：00，10，11

成假赋值为：01

主析取范式为：$(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow \Sigma\, 0, 2, 3$

主合取范式为：$p \vee \neg q$

$\Leftrightarrow \Pi\, 1$

1.17

(1)

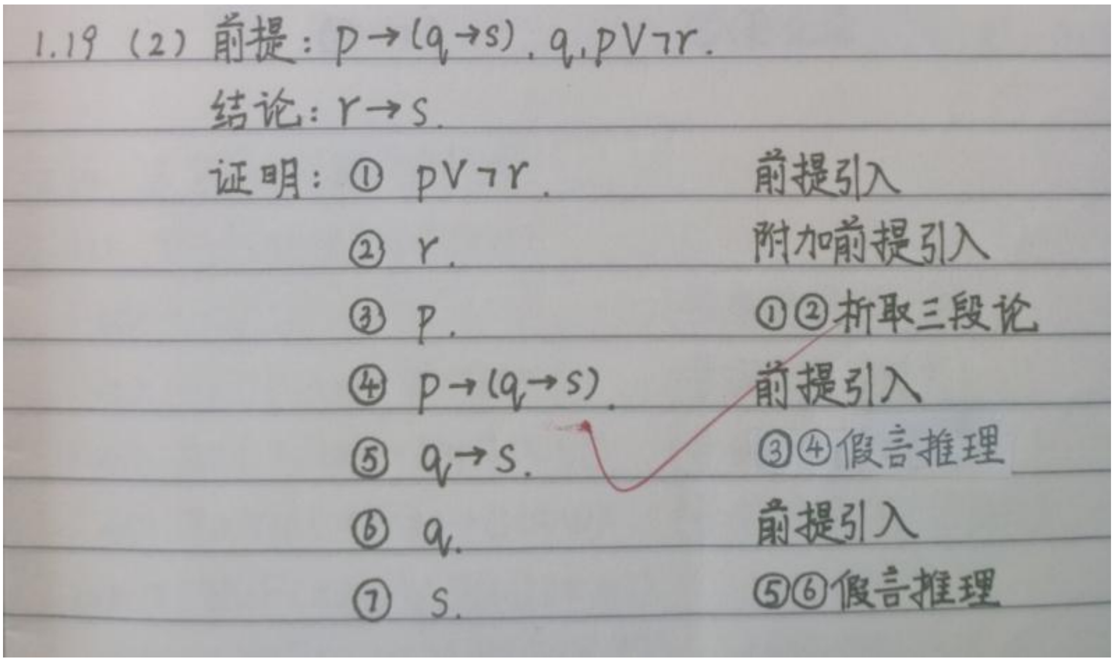
1.17 (1) $F \Leftrightarrow m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5$

项	$\neg x \wedge y$	$x \wedge \neg y$	$\neg x \wedge z$	$\neg y \wedge z$
覆盖	m_2, m_3	m_4, m_5	m_1, m_3	m_1, m_5
运算符数	2	2	2	2

$F \Leftrightarrow (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge z)$

或 $F \Leftrightarrow (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg y \wedge z)$.

1.19



1.19 (2) 前提：$p \to (q \to s)$, q, $p \vee \neg r$.

结论：$r \to s$.

证明：① $p \vee \neg r$. 前提引入

② r. 附加前提引入

③ p. ①②析取三段论

④ $p \to (q \to s)$. 前提引入

⑤ $q \to s$. ③④假言推理

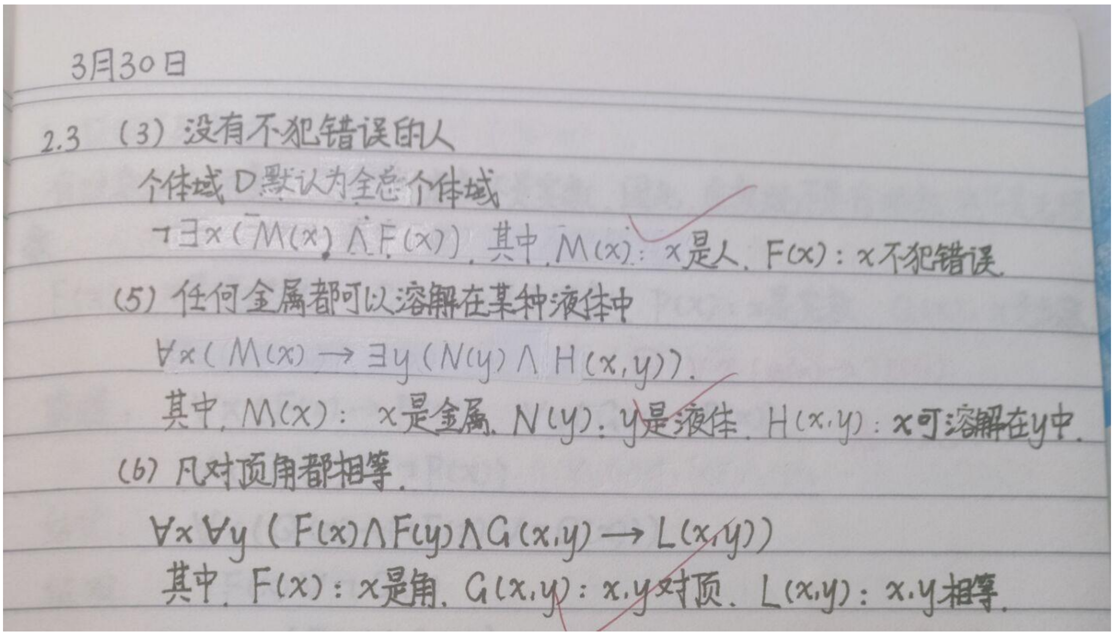
⑥ q. 前提引入

⑦ s. ⑤⑥假言推理

离散数学第二章作业：

1、 P53 Ex2.3（3）（5）（6）

答案：



3月30日

2.3 (3) 没有不犯错误的人

个体域D默认为全总个体域

$\neg \exists x (M(x) \wedge F(x))$, 其中 $M(x)$: x是人. $F(x)$: x不犯错误.

(5) 任何金属都可以溶解在某种液体中

$\forall x (M(x) \to \exists y (N(y) \wedge H(x,y)))$.

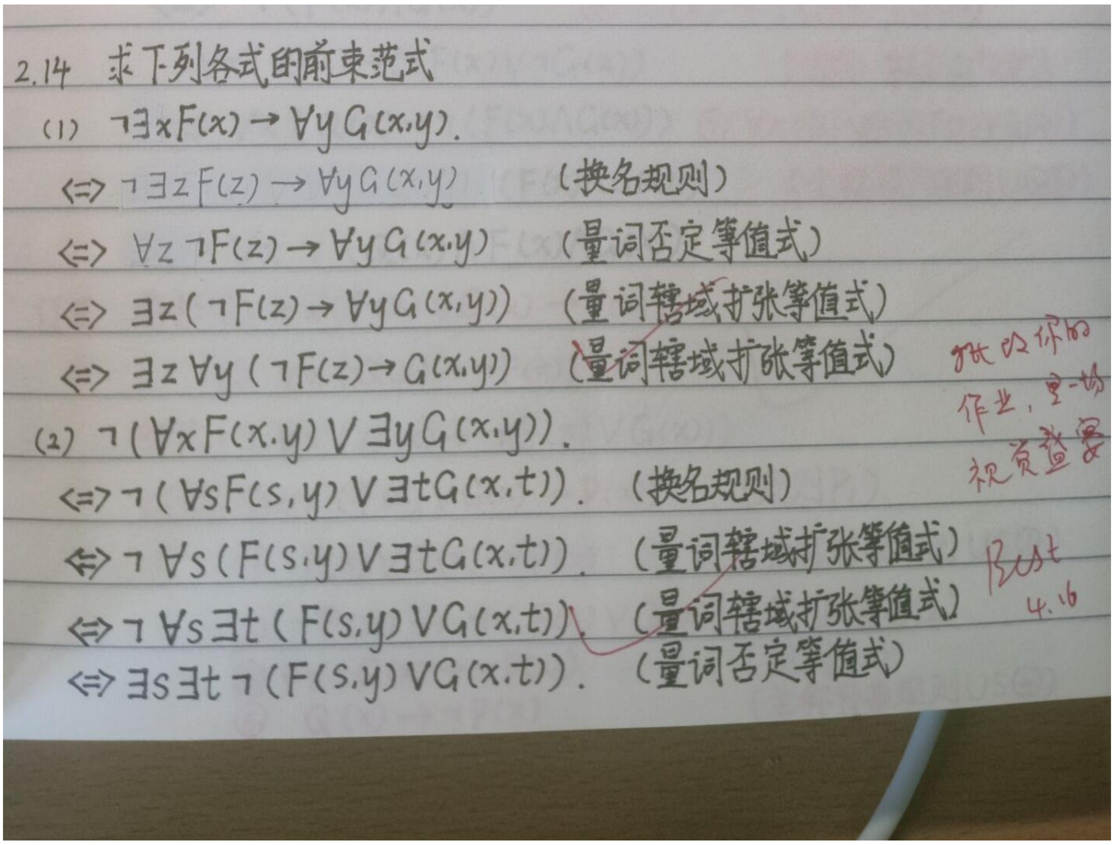
其中 $M(x)$: x是金属. $N(y)$: y是液体. $H(x,y)$: x可溶解在y中.

(6) 凡对顶角都相等.

$\forall x \forall y (F(x) \wedge F(y) \wedge G(x,y) \to L(x,y))$

其中 $F(x)$: x是角. $G(x,y)$: x,y对顶. $L(x,y)$: x,y相等.

2、 P54 Ex2.14



2.14 求下列各式的前束范式

(1) $\neg\exists x F(x) \rightarrow \forall y G(x,y)$.

$\Leftrightarrow \neg\exists z F(z) \rightarrow \forall y G(x,y)$ （换名规则）

$\Leftrightarrow \forall z \neg F(z) \rightarrow \forall y G(x,y)$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow \exists z(\neg F(z) \rightarrow \forall y G(x,y))$ （量词辖域扩张等值式）

$\Leftrightarrow \exists z \forall y(\neg F(z) \rightarrow G(x,y))$ （量词辖域扩张等值式）

(2) $\neg(\forall x F(x,y) \vee \exists y G(x,y))$.

$\Leftrightarrow \neg(\forall s F(s,y) \vee \exists t G(x,t))$. （换名规则）

$\Leftrightarrow \neg\forall s(F(s,y) \vee \exists t G(x,t))$. （量词辖域扩张等值式）

$\Leftrightarrow \neg\forall s \exists t(F(s,y) \vee G(x,t))$. （量词辖域扩张等值式）

$\Leftrightarrow \exists s \exists t \neg(F(s,y) \vee G(x,t))$. （量词否定等值式）

批改你的作业，是一场视觉盛宴

Best 4.16

3、证明下列推理：

有理数和无理数都是实数，虚数不是实数。因此，虚数既不是有理数，也不是无理数。

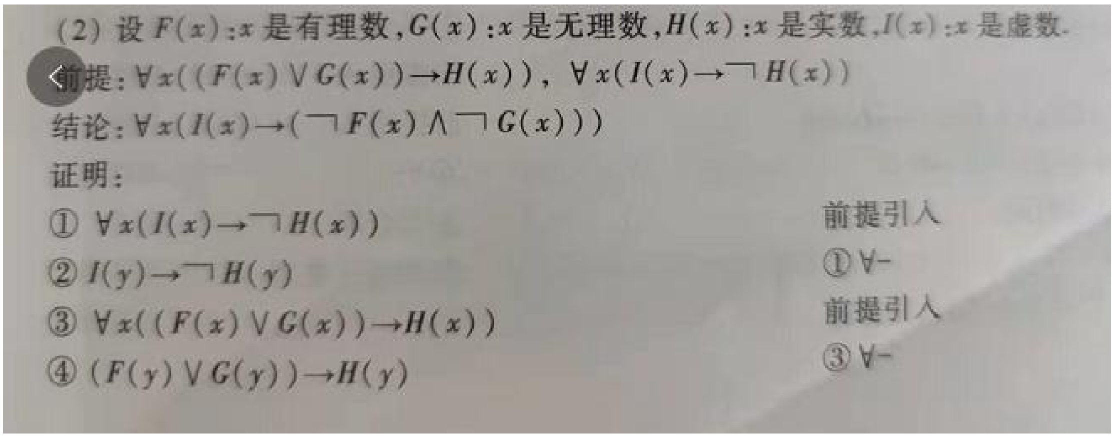
F（x）:x 是有理数;

G（x）:x 是有理数;

P（x）:x 是实数;

Q（x）:x 是虚数。

答案：



(2) 设 $F(x)$: x 是有理数，$G(x)$: x 是无理数，$H(x)$: x 是实数，$I(x)$: x 是虚数.

前提：$\forall x((F(x) \vee G(x)) \rightarrow H(x))$， $\forall x(I(x) \rightarrow \neg H(x))$

结论：$\forall x(I(x) \rightarrow (\neg F(x) \wedge \neg G(x)))$

证明：

① $\forall x(I(x) \rightarrow \neg H(x))$ 前提引入

② $I(y) \rightarrow \neg H(y)$ ①$\forall-$

③ $\forall x((F(x) \vee G(x)) \rightarrow H(x))$ 前提引入

④ $(F(y) \vee G(y)) \rightarrow H(y)$ ③$\forall-$

⑤ $\neg H(y)\rightarrow(\neg F(y)\wedge\neg G(y))$　　④置换

⑥ $I(y)\rightarrow(\neg F(y)\wedge\neg G(y))$　　②⑤假言三段论

⑦ $\forall x(I(x)\rightarrow(\neg F(x)\wedge\neg G(x)))$　　⑥∀+

离散数学第三章作业:

1、 使用容斥原理求不超过 120 的素数个数。

答案:

23. 因为 $11^2=121$,不超过 120 的合数至少含有 2,3,5 或 7 这几个素因子之一. 先考虑不能被 2,3,5,7 整除的整数. 设

$$S=\{x\mid x\in\mathbf{Z},1\leqslant x\leqslant 120\}$$
$$A_1=\{x\mid x\in S,x\text{ 是 2 的倍数}\}$$
$$A_2=\{x\mid x\in S,x\text{ 是 3 的倍数}\}$$
$$A_3=\{x\mid x\in S,x\text{ 是 5 的倍数}\}$$
$$A_4=\{x\mid x\in S,x\text{ 是 7 的倍数}\}$$

那么

$|S|=120,\quad |A_1|=60,\quad |A_2|=40,\quad |A_3|=24,\quad |A_4|=17$

$|A_1\cap A_2|=20,\quad |A_1\cap A_3|=12,\quad |A_1\cap A_4|=8,\quad |A_2\cap A_3|=8,\quad |A_2\cap A_4|=5,\quad |A_3\cap A_4|=3$

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=4,\quad |A_1\cap A_2\cap A_4|=2,\quad |A_1\cap A_3\cap A_4|=1,\quad |A_2\cap A_3\cap A_4|=1$

$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=0$

根据包含排斥原理,不能被 2,3,5,7 整除的整数是

$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|&=120-(60+40+24+17)\\&\quad+(20+12+8+8+5+3)-(4+2+1+1)+0\\&=120-141+56-8=27\end{aligned}$$

因为 2,3,5,7 不满足上述条件,但是它们都是素数. 另外,1 满足上述条件,但是 1 不是素数,因此,不超过 120 的素数有 $27+4-1=30$ 个.

2、 对 60 个人的调查表明，有 25 人阅读《每周新闻》杂志，26 人阅读《时代》杂志，26 人阅读《财富》杂志，9 人阅读《每周新闻》和《财富》杂志，11 人阅读《每周新闻》和《时代》杂志，8 人阅读《时代》和《财富》杂志，还有 8 人什么杂志也不读。

（1） 求三种杂志全都阅读的人数;

（2） 分别求只阅读《每周新闻》、《时代》和《财富》杂志的人数。

答案:（1）3 人（2）只阅读《每周新闻》、《时代》和《财富》杂志分别为 8 人、10 人、12 人。

解:(1) S:调查中至少读过一本杂志的人.

$|S|=60-8=52.$

A:读过《每周新闻》的人(调查中) B:调查中读过《时代》的人.

C:调查中读过《财富》的人.

$|A|=25.\ |B|=26.\ |C|=26.\ |A\cap B|=11.\ |A\cap C|=9.\ |B\cap C|=8.$

$$|S| = (|A| + |B| + |C|) - (|A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C|) + |A\cap B\cap C|$$

$$52 = (25 + 26 + 26) - (11 + 9 + 8) + |A\cap B\cap C|$$

$$|A\cap B\cap C| = 3.$$

(2) $|A\cap \bar{B}\cap \bar{C}| = |A| - |A\cap B| - |A\cap C| + |A\cap B\cap C|$

$= 25 - 11 - 9 + 3 = 8.$

$|\bar{A}\cap B\cap \bar{C}| = |B| - |A\cap B| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$

$= 26 - 11 - 8 + 3 = 10.$

$|\bar{A}\cap \bar{B}\cap C| = |C| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$

$= 26 - 9 - 8 + 3 = 12.$

离散数学第四章作业:

1、设 $A=\{0,1,2,3\}$，R 是 A 上的二元关系

$R=\{<0,1>,<0,2>,<0,3>,<1,2>,<1,3>,<2,3>\}$

(1)请写出 R、$R\circ R$、R^{-1} 的关系矩阵;

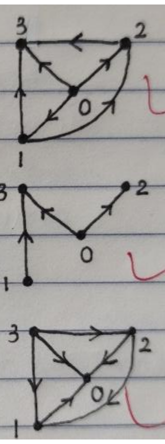
（2）请画出 R、$R\circ R$、R^{-1}的关系图。

关系矩阵: 关系图:

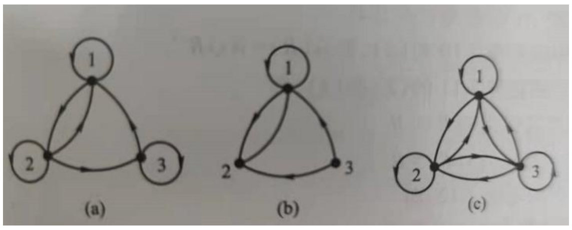
①R: $\begin{bmatrix} 0&1&1&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$

② R∘R: $\begin{bmatrix} 0&0&1&1\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$

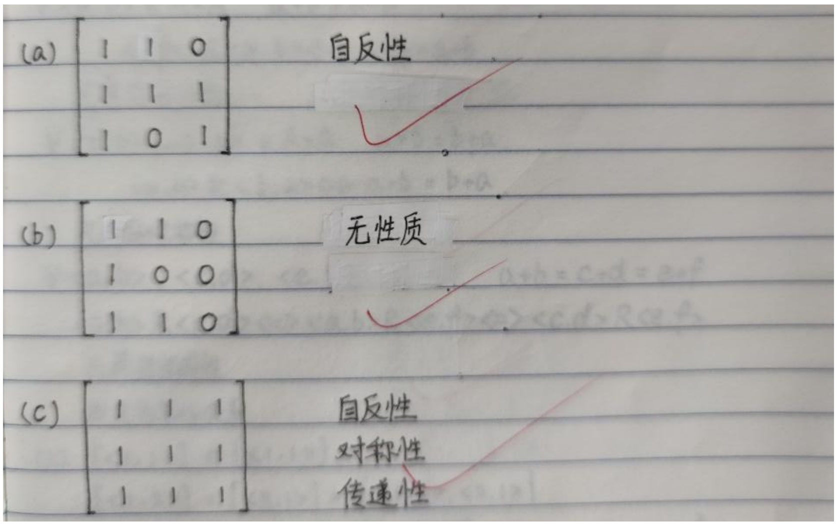
③ R^{-1}: $\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 1&1&0&0\\ 1&1&1&0 \end{bmatrix}$



2、设 $A=\{1,2,3\}$，下图给出了三种 A 上的二元关系，写出每种关系对应的关系矩阵，并说明每种关系所具有的性质。



答案:



(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 自反性

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 无性质

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 自反性 对称性 传递性

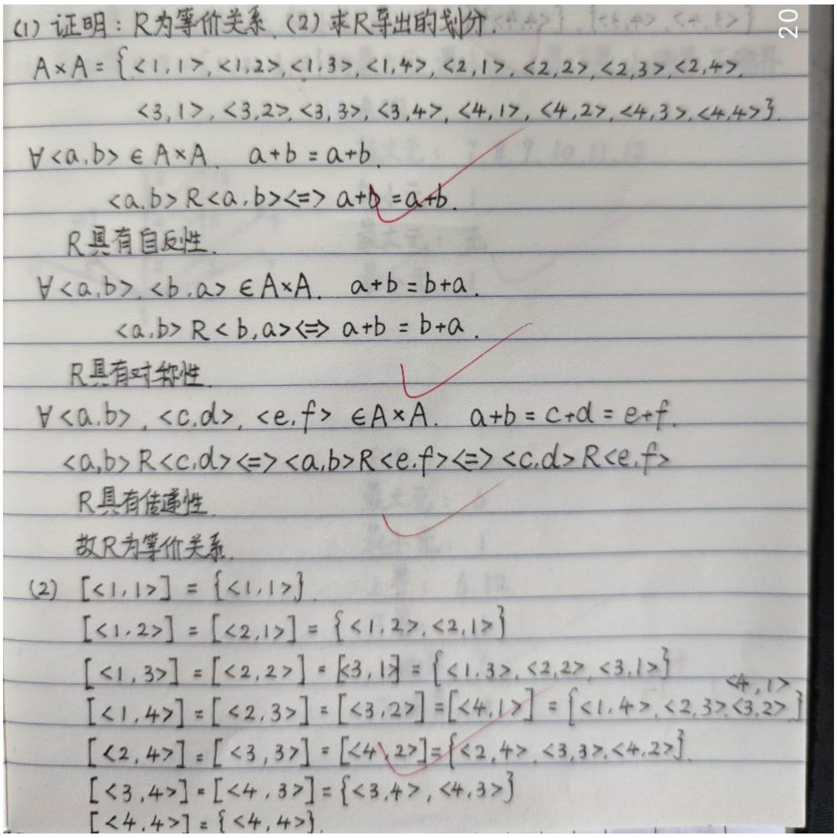
3、设 A= {1,2,3,4}，R 为 $A\times A$ 上的二元关系，$\forall <a,b>, <c,d> \in A\times A$

$$<a,b> R <c,d> \Leftrightarrow a+b=c+d$$

(1) 证明：R 为等价关系；

(2) 求 R 导出的划分。

答案：



(1) 证明：R为等价关系.(2) 求R导出的划分.

$A\times A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<2,4>,<3,1>,<3,2>,<3,3>,<3,4>,<4,1>,<4,2>,<4,3>,<4,4>\}$.

$\forall <a,b>\in A\times A$. $a+b=a+b$.

$<a,b>R<a,b> \Leftrightarrow a+b=a+b$.

R具有自反性.

$\forall <a,b>, <b,a> \in A\times A$. $a+b=b+a$.

$<a,b>R<b,a> \Leftrightarrow a+b=b+a$.

R具有对称性.

$\forall <a,b>, <c,d>, <e,f> \in A\times A$. $a+b=c+d=e+f$.

$<a,b>R<c,d> \Leftrightarrow <a,b>R<e,f> \Leftrightarrow <c,d>R<e,f>$

R具有传递性.

故R为等价关系.

(2) $[<1,1>]=\{<1,1>\}$.

$[<1,2>]=[<2,1>]=\{<1,2>,<2,1>\}$

$[<1,3>]=[<2,2>]=[<3,1>]=\{<1,3>,<2,2>,<3,1>\}$

$[<1,4>]=[<2,3>]=[<3,2>]=[<4,1>]=\{<1,4>,<2,3>,<3,2>,<4,1>\}$

$[<2,4>]=[<3,3>]=[<4,2>]=\{<2,4>,<3,3>,<4,2>\}$.

$[<3,4>]=[<4,3>]=\{<3,4>,<4,3>\}$

$[<4,4>]=\{<4,4>\}$.

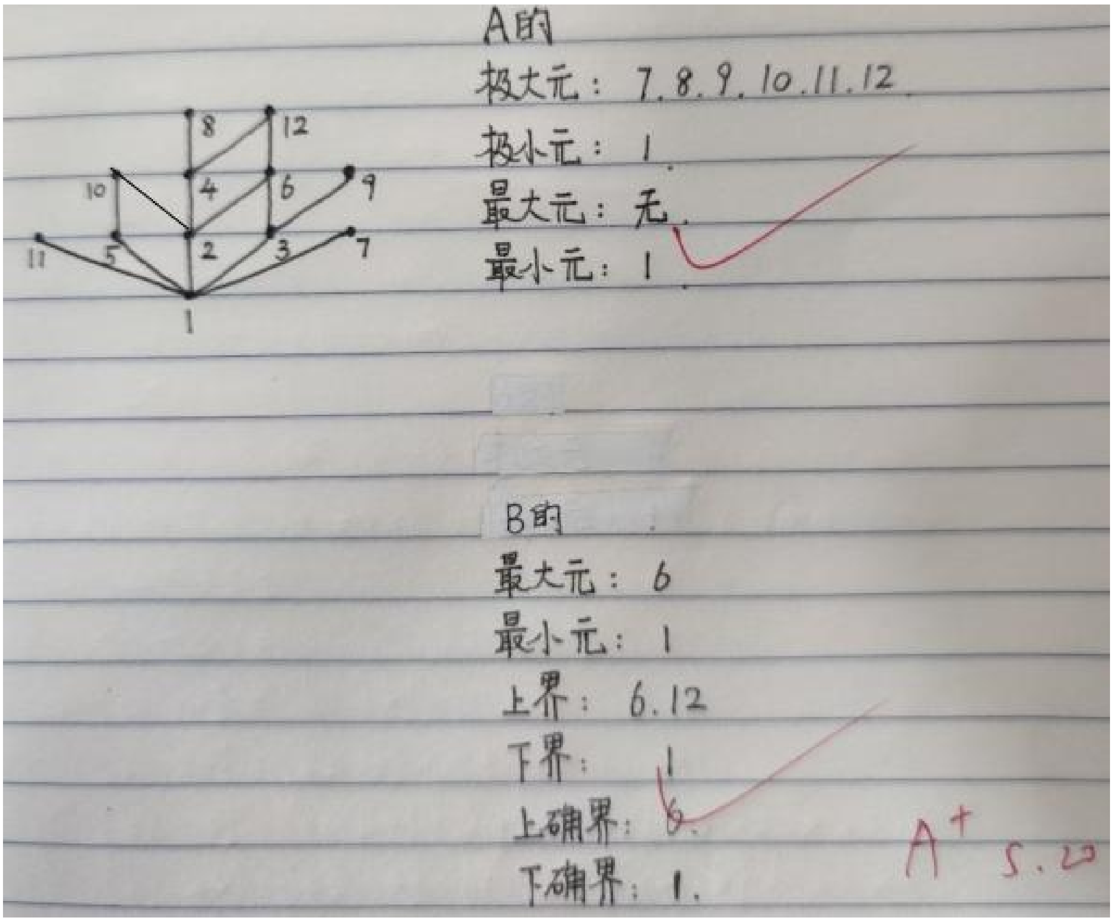
4、对于集合 $A=\{1, 2, 3, \cdots 12\}$ 与整除关系，构成一个偏序关系；

（1） 请画出哈斯图；

（2） 写出集合 A 的极大元、极小元、最大元、最小元；

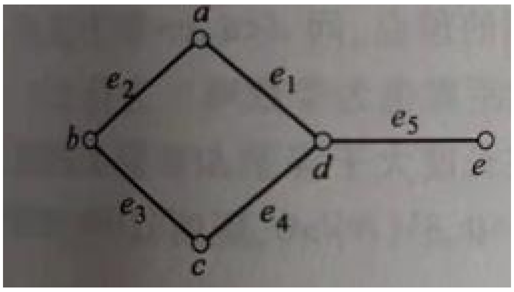
(3)　写出集合$B=\{1，2，3，6\}$的最大元、最小元、上界、下界、上确界、下确界

答案：



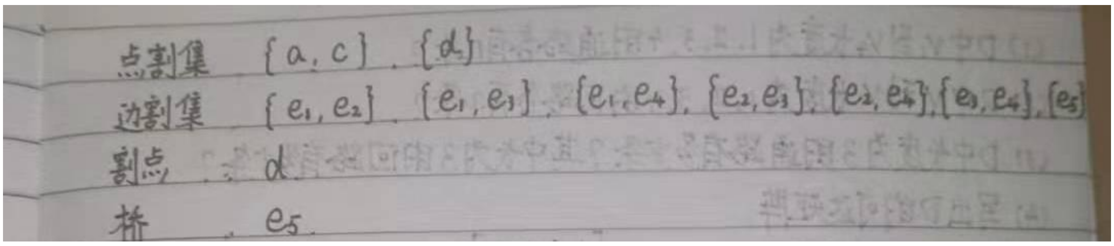
第五章作业

1、无向图 G 如下图所示



请写出 G 的的点割集和边割集，并指出其中的割点和桥。

答案：



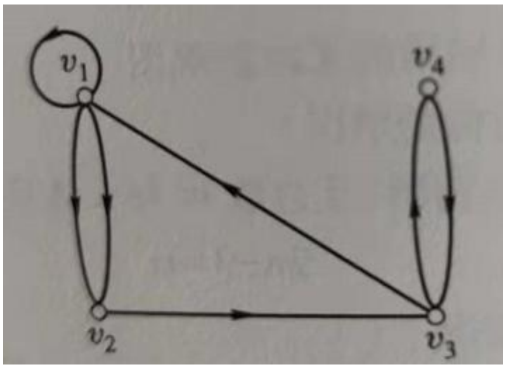
2、无向图 G=<V,E>,其中 V=$\{v_1，v_2，v_3，v_4\}$，E=$\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,\}$，其关联矩阵为

$$M(G)=\begin{bmatrix}2&1&1&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

试画出 G 的图形。

答案:

3、有向图 D 如下图所示



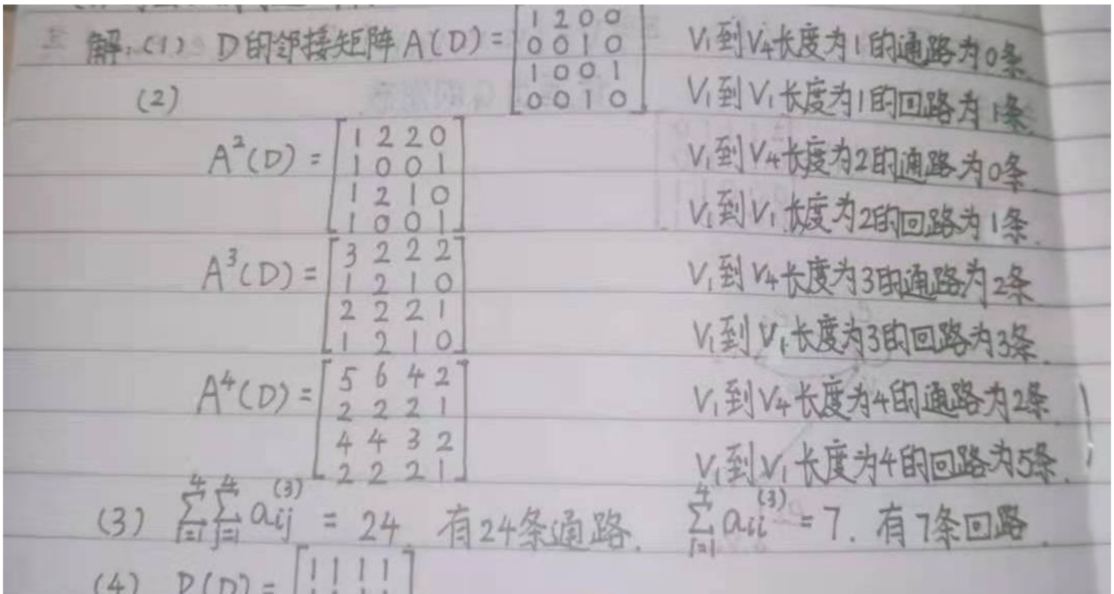
（1） D 中v_1到v_4长度为 1，2，3，4 的通路各有几条？

（2） D 中v_1到v_1长度为 1，2，3，4 的回路各有几条？

（3） D 中长度为 3 的通路有多少条？其中长为 3 的回路有多少条？

（4） 写出 D 的可达矩阵。

答案:



解：(1) D的邻接矩阵 $A(D)=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$ 　V_1到V_4长度为1的通路为0条.

(2) 　V_1到V_1长度为1的回路为1条.

$A^2(D)=\begin{bmatrix}1&2&2&0\\1&0&0&1\\1&2&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$ 　V_1到V_4长度为2的通路为0条. V_1到V_1长度为2的回路为1条.

$A^3(D)=\begin{bmatrix}3&2&2&2\\1&2&1&0\\2&2&2&1\\1&2&1&0\end{bmatrix}$ 　V_1到V_4长度为3的通路为2条. V_1到V_1长度为3的回路为3条.

$A^4(D)=\begin{bmatrix}5&6&4&2\\2&2&2&1\\4&4&3&2\\2&2&2&1\end{bmatrix}$ 　V_1到V_4长度为4的通路为2条. V_1到V_1长度为4的回路为5条.

(3) $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}a_{ij}^{(3)}=24$. 有24条通路. $\sum_{i=1}^{4}a_{ii}^{(3)}=7$. 有7条回路.

(4) $P(D)=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$

第九章作业：

1、 P227 Ex9.16

答案：

(1) 运算表如下：

$*$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

(2) 零元：0

幺元：1

可逆元：$1^{-1}=1$，$2^{-1}=3$，$3^{-1}=2$，$4^{-1}=4$

2、 设代数系统$V_1=<\{0，1\}，\circ>$，$V_2=<\{0，1\}，*>$， 其中$\circ$表示模 2 加法，$*$表示模 2 乘法。试构造积代数$V_1\times V_2$的运算表，并指出其中积代数的幺元。

答案：

2. 运算表如下

	$\langle 0,0\rangle$	$\langle 0,1\rangle$	$\langle 1,0\rangle$	$\langle 1,1\rangle$
$\langle 0,0\rangle$	$\langle 0,0\rangle$	$\langle 0,0\rangle$	$\langle 1,0\rangle$	$\langle 1,0\rangle$
$\langle 0,1\rangle$	$\langle 0,0\rangle$	$\langle 0,1\rangle$	$\langle 1,0\rangle$	$\langle 1,1\rangle$
$\langle 1,0\rangle$	$\langle 1,0\rangle$	$\langle 1,0\rangle$	$\langle 0,0\rangle$	$\langle 0,0\rangle$
$\langle 1,1\rangle$	$\langle 1,0\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	$\langle 0,0\rangle$	$\langle 0,1\rangle$

积代数的单位元（幺元）是：$\langle 0,1\rangle$

3、 P227 Ex9.20

答案：

3. 证明：

① 验证 ∘ 运算对 Z 封闭

$\forall x, y \in Z$，　$x \circ y = x + y - 2 \in Z$

∴ ∘ 为 Z 上的二元运算　（也可省略）

② 验证 ∘ 运算是否结合的

$\forall x, y, z \in Z$，则有

$$x \circ y \circ z = (x+y-2) \circ z$$
$$= x+y-2+z-2$$
$$= x+y-4$$

2021/5/25 11:20

$$x \circ (y \circ z) = x \circ (y+z-2)$$
$$= x+y+z-2-2$$
$$= x+y+z-4$$

∴ $x \circ y \circ z = x \circ (y \circ z)$

即 ∘ 满足结合律.

③ 单位元的存在.

设 $e \in Z$，为单位元，则 $\forall x \in Z$

$x \circ e = x + e - 2 = x$

且 $e \circ x = e + x - 2 = x$

可以推出 $e = 2 \in Z$

所以，Z 上的二元运算 ∘ 存在单位元为 2

④ Z 中每个元素都有逆元

$\forall x \in Z$，设 x^{-1} 为其逆元，则有

$x \circ x^{-1} = x + x^{-1} - 2 = e = 2$

且 $x^{-1} \circ x = x^{-1} + x - 2 = e = 2$

可以推出 $x^{-1} = 4 - x \in Z$

所以，Z 中每个元素 x 都有逆元，且其逆元为 $4-x$

综上，Z 与运算 ∘ 能构成群。

2021/5/25 11:21