

第二章 控制系统的数学描述

参考书：《自动控制原理(田玉平教授版)》第二章
《自动控制原理(胡寿松教授版)》第二章

第二章 控制系统的数学描述

- 控制系统微分方程的建立
- 输入-输出(I/O)运动方程
- 传递函数与系统框图
- 控制系统的结构图及其等效变换
- 信号流图
- 频率特性函数
- 采样控制系统的数学描述

2.1 控制系统微分方程的建立

2.1 控制系统微分方程的建立

从系统学的角度看，自动控制系统是信号传递和转换的过程。

1. 数学模型(Mathematical Model): 描述系统中各种信号(或变量)的传递和变换关系的数学表达式。

2. 建立数学模型的意义:

- (1) 使设计者暂时离开系统的物理特性，在一般意义下研究控制系统的普遍规律。
- (2) 从定性的了解上升→数学定量的精确认识(严谨的分析)。

2.1 控制系统微分方程的建立

3. 数学模型分类

(1) 按系统运动特性:

动态数学模型: 描述系统动态过程(未至平衡状态前)规律的数学模型。

调压温控例子

静态数学模型: 描述系统稳态过程(平衡状态)规律的数学模型。

调压温控例子

3. 数学模型分类

(2) 按照建立数学模型方法:

机理建模/机理模型(白箱建模) -----根据系统本身运动规律(物理、化学等)来建模

优点: 方程式每个系数具有明确的物理意义

缺点: 系统的运动规律很复杂--非线性的, 简化会导致模型精度降低(参数物理意义变含糊); 通用性差

统计建模/统计模型(黑箱或灰箱建模) ----根据系统输入/输出 (Input/Output, I/O) 实验测试数据, 统计学方法建模

优点: 避免机理建模的困难, 以一定的精确度描述原系统的变化情况, 适合于系统控制与预测; 通用性好

缺点: 模型中的参数没有明确的物理意义

3. 数学模型分类

(3) 按照描述数学模型工具:

时域(Time Domain, TD)模型-----微分方程或差分方程描述的数学模型

优点: 有效的数学分析工具多

复域/频域(Frequency Domain, FD)模型-----拉氏或傅立叶变换对时域模型变换后得到的模型

优点: 可从工程上测试得到

性质: TD model \longrightarrow FD model

3. 数学模型分类

(4) 按照描述变量不同:

输入输出I/O模型-----描述系统输入量和输出量间关系的数学模型

优点: 模型简单, 易于分析

缺点: 系统内部其它变量之间的关系和运动规律没有建模

状态空间(State Space, SS)模型-----描述系统输入量、输出量和状态量之间关系的数学模型

优点: 描述系统所有变化规律

缺点: 较复杂, 矩阵分析理论等

性质: I/O model \longleftarrow 一定条件下 \longrightarrow SS model

4. 建立数学模型的原则

➤ 兼顾模型的精确度(模型分析和设计的复杂度)和控制系统精度(与模型精确度密切相关)，两者之间的折中

常用手段：一定范围和前提条件下进行理想化的假设。

例如：**电子放大器**看作理想线性放大环节，忽略非线性成份

通信卫星(轨道控制)看成一个质点来建模，而不考虑其形状和质量分布。在卫星的姿态控制中则不行！要考虑其天线和太阳能帆板的柔性体特性。

非线性, 时变, 分布参数 v.s 线性, 定常, 集中参数

⇒在此基础上考虑模型的种类，即建立何种模型？

5. 时域模型数学建模的通常步骤

(1) 建立物理模型

作一些理想化的假设

(2) 列写原始方程

物理定律: 牛顿定律、基尔霍夫电流和电压定律、能量守恒定律等

(3) 选定系统的输入量、输出量以及状态变量(仅在建立SS模型时要求)，消去中间变量，建立适当的I/O模型或SS模型

注：不同输入输出量模型不同！

2.2 输入--输出(I/O)运动方程

2.2.1 机械系统

三种理想化的要素：

质量

弹簧

阻尼器

2.2.1 机械系统

阻尼器：机械表面在滑动接触中运转，则物理系统存在摩擦

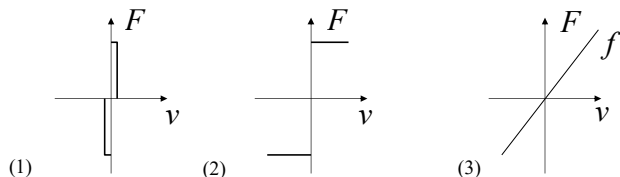
(1) **静摩擦力：**两个接触表面之间开始运动所需摩擦力

(2) **库仑摩擦力：**干表面之间的摩擦力，基本恒定

(3) **粘性摩擦力：**物体在润滑介质（空气、水、油等）中运动时粘滞阻尼

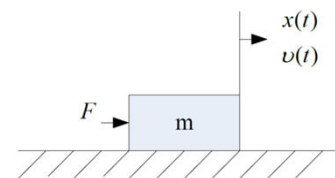
液压阻尼器：液压传动系统元件

阻尼器作用？好，坏？有时为改善系统动态响应，人为引入；抗地震



质量与惯量要素

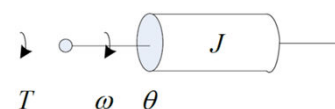
质量要素



力与加速度

$$F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

惯量要素

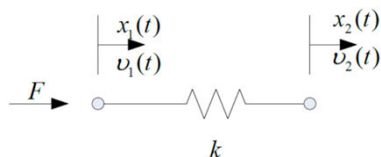


力矩与角加速度

$$T = J \frac{d\Omega}{dt} = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

(线性) 弹性要素

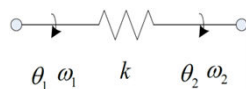
弹性要素



$$F = k(x_1 - x_2) = kx$$

$$= k \int_0^t (v_1 - v_2) dt$$

弹性要素

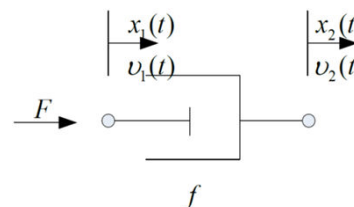


$$T = k(\theta_1 - \theta_2)$$

注：弹性要素力的作用点

阻尼要素

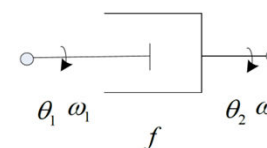
阻尼要素



$$F = f(v_1 - v_2) = f\dot{x}$$

$$= f(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = f\dot{x}$$

阻尼要素



$$T = f(\Omega_1 - \Omega_2)$$

弹性：力(力矩)与位移差成正比
阻尼：力(力矩)与速度差成正比

2.2.1 机械系统

机械系统：存在机械运动的装置，遵循物理学**力学定律**

机械运动包括**直线运动**(相应的位移称为线位移)和**旋转运动**(相应的位移称为角位移)

例2.1 弹簧-质量-阻尼器组成的机械平移系统

m 为物体质量

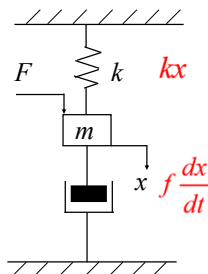
k 为弹簧系数

f 为粘性阻尼系数

外力 $F(t)$ 为输入量，位移 $x(t)$ 为输出量

列写系统的运动方程

$$F = \text{弹簧形变力} + \text{阻尼力} + \text{质点运动力}$$



解：在物体受外力 F 的作用下，质量 m 相对于初始状态的位移、速度、加速度分别为 x 、 dx/dt 、 d^2x/dt^2

根据弹簧、质量、阻尼器上力与位移、速度的关系和牛顿第二定律，作用在弹簧上力和加速度之间的关系

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F - f \frac{dx}{dt} - kx$$

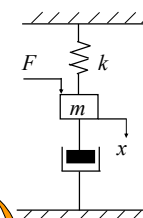
$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t)$$

k 、 f ：弹簧的弹性系数和阻尼器的粘性摩擦系数

负号表示弹簧力的方向和位移的方向相反

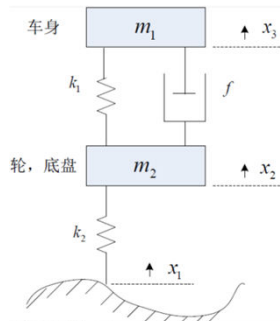
粘性摩擦力的方向和速度的方向相反

线性二阶常微分方程



例2.2 汽车缓振系统。求车厢垂直位移与路面函数间的运动方程

(将坐标原点选在系统静止时位置
(即初始形变)，重力作用对运动
方程没有影响)



例2.2 汽车缓振系统。求车厢垂直位移与路面函数间的运动方程。

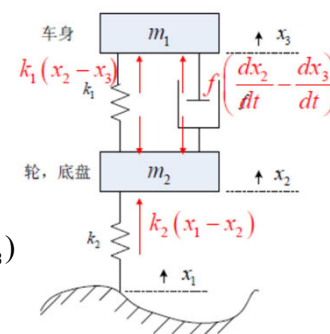
(将坐标原点选在系统静止时位置
(即初始形变)，重力作用对运动
方程没有影响)

m_1 的力平衡方程：

$$m_1 \frac{d^2x_3}{dt^2} = f \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right) + k_1(x_2 - x_3)$$

m_2 的力平衡方程：

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + k_1(x_2 - x_3) + f \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right) = k_2(x_1 - x_2)$$



例2.2 汽车缓振系统。求车厢垂直位移与路面函数间的运动方程。

x_1 为输入 x_3 为输出，消除中间变量 x_2

$$m_1 m_2 \frac{d^4 x_3}{dt^4} + (m_3 + m_1) f \frac{d^3 x_3}{dt^3} + (m_2 k_1 + m_1 k_2 + m_1 k_1) \frac{d^2 x_3}{dt^2} + k_2 f \frac{dx_3}{dt} + k_1 k_2 x_3 = k_2 f \frac{dx_1}{dt} + k_1 k_2 x_1$$

Attention: 物理解释！减振器的作用！建模是否正确？

非线性微分方程的求解很困难

忽略弱非线性环节（如果元件的非线性因素较弱或者不在系统线性工作范围以内，则它们对系统的影响很小，就可以忽略）
在一定条件下，可以近似地转化为线性微分方程，简化系统的动态特性的分析。解决许多工程问题

1. 小偏差线性化的概念

（小偏差法，切线法，增量线性化法）

偏微法：假设在控制系统的整个调节过程中，各个元件的输入量和输出量只是在平衡点附近作微小变化。这一假设是符合许多控制系统实际工作情况的，因为对闭环控制系统而言，一有偏差就产生控制作用，来减小或消除偏差，所以**各元件只能工作在平衡点附近**。

因此，对于不太严重的非线性系统，可以在一定的工作范围内线性化处理。工程上常用的方法是将非线性函数在**平衡点**附近展开成泰勒级数，去掉高次项，得到线性函数。

2. 举例

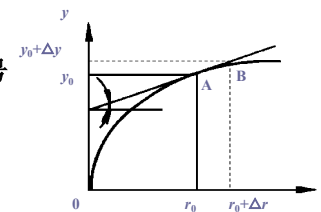
① 一个自变量 $y=f(r)$

r —元件的输入信号， y —元件的输出信号

设原运行于某平衡点（静态工作点）

A点: $r=r_0$, $y=y_0$, 且 $y_0=f(r_0)$

B点: 当 r 变化 Δr , $y=y_0+\Delta y$



函数在 (r_0, y_0) 点连续可微，在A点展开成泰勒级数，即

$$y = f(r_0) + \left(\frac{df(r)}{dr} \right)_{r=r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 f(r)}{dr^2} \right)_{r=r_0} (r - r_0)^2 + \dots$$

略去高次项, $y - y_0 = \left(\frac{df(r)}{dr} \right)_{r=r_0} (r - r_0)$ $\Delta y = K \Delta r, K = \left(\frac{df(r)}{dr} \right)_{r=r_0}$

② 两个自变量

$y=f(r_1, r_2)$ 静态工作点: $y_0=f(r_{10}, r_{20})$
在 $y_0=f(r_{10}, r_{20})$ 附近展开成泰勒级数, 即

$$y = f(r_{10}, r_{20}) + \left(\frac{\partial f}{\partial r_1} (r_1 - r_{10}) + \frac{\partial f}{\partial r_2} (r_2 - r_{20}) \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r_1^2} (r_1 - r_{10})^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial r_2^2} (r_2 - r_{20})^2 \right) + \dots$$

$$\Delta y = K_1 \Delta r_1 + K_2 \Delta r_2$$

函数变化与自变量变化成线性比例关系

3. 非线性项线性化条件及步骤

(1) 条件

- ① 系统工作在正常的工作状态, 有稳定的工作点
- ② 在运行过程中偏离且满足小偏差条件
- ③ 在工作点处, 非线性函数各阶导数均存在, 即函数属于单值、连续、光滑的非本质非线性函数

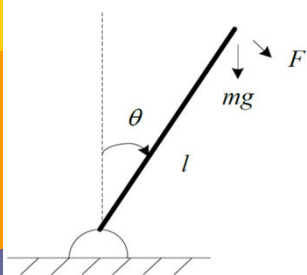
(2) 建立步骤

- ① 按系统数学模型的建立方法, 列出系统各个部分的微分方程
- ② 确定系统的工作点, 并分别求出工作点处各变量的工作状态
- ③ 对存在的非线性函数, 检验是否符合线性化的条件, 若符合就进行线性化处理
- ④ 将其余线性方程, 按增量形式处理, 其原则为: 对变量直接用增量形式写出; 对常量因其增量为零, 故消去此项
- ⑤ 联立所有增量化方程, 消去中间变量, 最后得到只含有系统总输入和总输出增量的线性化方程

4. 关于线性化的几点说明

- ① 线性化方程中的参数与选择的工作点有关。因此, 在进行线性化时, 应首先确定系统的静态工作点
- ② 实际运行情况是在某个平衡点附近, 且变量只能在小范围内变化
- ③ 若非线性特性是不连续的不能采用上述方法
- ④ 线性化以后得到的微分方程, 是增量微分方程

例2.3.0 泰勒展开来近似求解倒立摆的角位移与外力间的线性运动



1) 力矩平衡方程:

$$(F + mg \sin \theta)l = ml^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} - mg \sin \theta = F$$

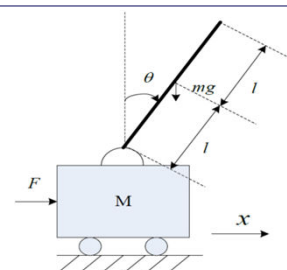
2) $y = mg \sin \theta$ 在平衡点 $\theta = 0$ 线性化

$$y = \sin 0 + mg \cos 0(\theta - \theta_0) = mg(\theta - \theta_0)$$

3) 近似线性增量方程:

$$ml \frac{d^2 \Delta \theta}{dt^2} - mg \Delta \theta = \Delta F$$

例2.3.1 泰勒展开来近似求解小车倒立摆的角位移与外力间的线性运动

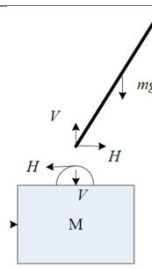


围绕摆杆重心的转动运动方程:

$$I \ddot{\theta} = Vl \sin \theta - Hl \cos \theta$$

摆杆重心水平运动方程:

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x + l \sin \theta) = H$$



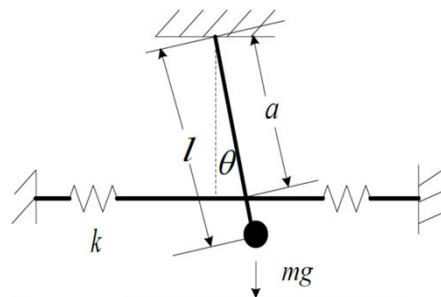
摆杆重心垂直运动方程:

$$m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos \theta) = V - mg$$

小车的水平运动方程:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = F - H$$

课堂练习题(单摆系统): 当单摆位于垂直位置, 作用于单摆上的弹性力为0。若振荡角度很小, 求系统的运动方程。



课堂练习题(单摆系统): 当单摆位于垂直位置, 作用于单摆上的弹性力为0。若振荡角度很小, 求系统运动方程

1) 力矩平衡方程:

$$2ka^2 \sin \theta \cos \theta + mgl \sin \theta = ml^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$ka^2 \sin 2\theta + mgl \sin \theta = ml^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

2) $y = mg \sin \theta$ 在平衡点 $\theta = 0$ 线性化

$$2ka^2 \theta + mgl \theta = ml^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$ka^2 \sin 2\theta = ka^2 \sin 0 + ka^2 \cos 0(2\theta - 0) + \text{高次项}$$

$$mg \sin \theta = mg \sin 0 + mg \cos 0(\theta - 0) + \text{高次项}$$

2.2.2 电气系统

电气系统常见的装置是由电阻、电感、电容、运算放大器等元件组成的电路，又称电气网络。仅由电阻、电感、电容(无源器件)组成的电气网络称为无源网络。如果电气网络中包含运算放大器(有源器件)，就称为有源网络

基尔霍夫电流定律

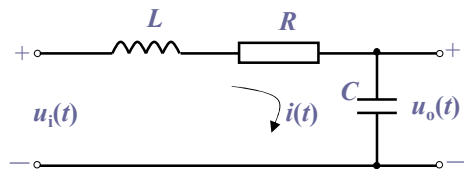
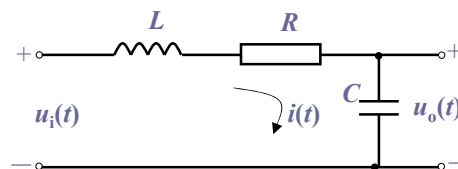
任意瞬间，流入和流出任意电路节点的所有电流代数和为0

基尔霍夫电压定律

任意瞬间，电路中沿任意环路的电压代数和为0

2.2.2 电气系统

例2.4 由电阻 R 、电感 L 和电容 C 组成无源网络。 u_i 输入， u_o 输出，求微分方程



解 设回路电流为 $i(t)$ 如图所示。由基尔霍夫电压定律可得到

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_o(t) = u_i(t)$$

式中 $i(t)$ 是中间变量。 $i(t)$ 和 $u_o(t)$ 的关系为

$$i(t) = C \frac{du_o(t)}{dt}$$

消去中间变量 $i(t)$,

$$LC \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

$$LC \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t) \quad \text{电气RLC}$$

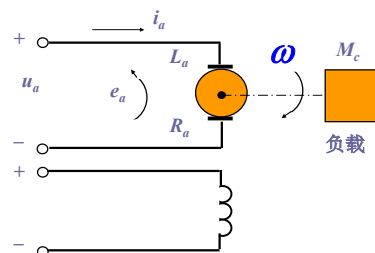
$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t) \quad \text{机械弹-质-阻}$$

小结：不同的物理系统，其数学模型的形式可能相同。把具有相同数学模型的不同物理系统称为**相似系统**，例如：**RLC串联网络系统**和**弹簧-质量-阻尼器系统**即为一对相似系统，故可用电子线路来模拟机械平移系统。在相似系统中，占据相应位置的物理量称为相似量。

2.2.3 机电系统

机械部分+电磁部分+机电耦合

他励直流电动机， ω 为电动机角速度(rad/s)， M_c 为折算到电动机轴上的总负载力矩(N·m)， u_a 为电枢电压(V)。设励磁电流恒定，并忽略电枢反应。



机械部分 $M_c = J \frac{d\omega}{dt} + f\omega$

电磁部分 $u_a - e_a = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a$

机电耦合 $e_a = k_b \omega$, $M_c = k_a i_a$

$$\frac{L_a J}{k_b k_d} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \left(\frac{R_a J}{k_b k_d} + \frac{L_a f}{k_b k_d} \right) \frac{d\omega}{dt} + \left(1 + \frac{R_a f}{k_b k_d} \right) \omega = \frac{u}{k_b}$$

忽略电感

$$\frac{R_a J}{k_b k_d} \frac{d\omega}{dt} + \left(1 + \frac{R_a f}{k_b k_d} \right) \omega = \frac{u}{k_b} \quad \text{机电时间常数}$$

小结：对于同一个系统，若从不同的角度研究问题，数学模型形式不一样

2.2.4 液位系统

层流 液体由一层通向另一层的平滑运动

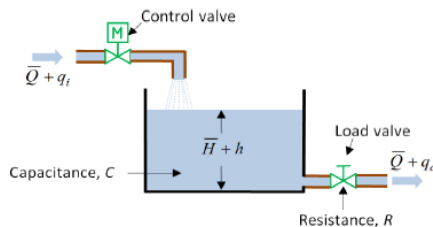
线性动态

紊流 液体不规则的运动

非线性动态

液阻 $R = \frac{\text{液位差变化}(m)}{\text{流量变化}(m^3/s)}$

层流时，负载阀的液阻 $R = \frac{h}{q_0}$



问题一：运动方程与整个系统的关系刻画

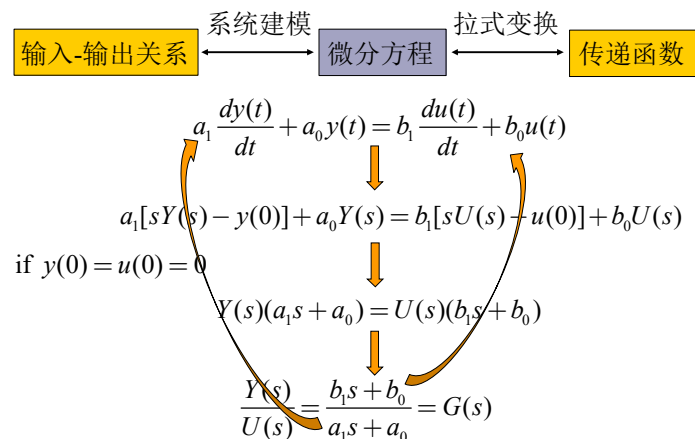
系统框图，每个内部结构用传递函数（运动方程）表示

问题二：有了系统框图，如何求得输入-输出关系

框图化简

2.3 传递函数与系统框图

2.3.1 传递函数



2.3.1 传递函数

衡量控制系统性能的好坏：系统的内在因素，即系统的结构参数，而与外部施加的信号无关。因而，控制系统品质好坏的评价可以通过对系统结构参数的分析来达到，而不需要直接对系统输出响应进行分析。

传递函数：在拉氏变换基础之上引入的描述线性定常系统或元件输入、输出关系的函数。与微分方程一一对应，方便分析系统或元件结构参数对系统响应的影响。

1. 定义

零初始条件下，线性定常系统输出量拉氏变换与输入量拉氏变换之比，称为该系统的**传递函数**，记为 **$G(s)$** ，即：

$$G(s) = \frac{L[y(t)]}{L[r(t)]} = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

意义：

$$Y(s) = R(s)G(s)$$

2. 传递函数的求法

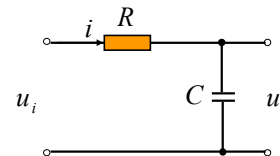
线性定常系统（环节）一般表达式（零初始条件）

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ &= b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \\ & [a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] Y(s) \\ &= [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0] R(s) \\ & G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \end{aligned}$$

例2.5 求RC电路的传递函数， $u_i(t)$ 是输入电压， $u_o(t)$ 是输出电压

解 由基尔霍夫电压定律可得

$$RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$



当初始条件为零时，对上式进行拉氏变换后可得传递函数为

$$(RCs + 1)U_o(s) = U_i(s)$$

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

3. 关于传递函数的几点补充说明

- (1) 只适用于线性定常系统
- (2) 表达式中各项系数的值完全取决于系统的结构和参数，并且与微分方程中各导数项的系数相对应
- (3) 实际系统传递函数中分母多项式的阶数 n 总是大于或等于分子多项式的阶数 m ，即 $n \geq m$ 。通常将分母多项式阶数为 n 的系统称为 n 阶系统
- (4) 传递函数只能表示单输入、单输出的关系。

(5) 零极点表示法

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = \frac{M(s)}{N(s)}$$

上式中 K_g ——零极点形式传递函数的根轨迹增益；

$-z_i$ ——分子多项式 $M(s)=0$ 的根，称为零点；

$-p_j$ ——分母多项式 $N(s)=0$ 的根，称为极点。

◆控制系统特征方程式 $N(s)=0$ 。 $-z_i$ 、 $-p_j$ 可为实数、虚数、或复数。若为虚数、或复数，必为共轭虚数、或共轭复数

(6) 时间常数表示法

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$= \frac{b_0}{a_0} \times \frac{d'_m s^m + d'_{m-1} s^{m-1} + \dots + d'_1 s + 1}{c'_n s^n + c'_{n-1} s^{n-1} + \dots + c'_1 s + 1} = K \frac{\prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{\prod_{j=1}^n (T_j s + 1)}$$

其中 τ_i ——分子各因子的时间常数；

T_j ——分母各因子的时间常数；

K ——时间常数形式传递函数的增益；通常称为传递系数

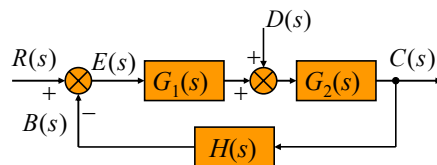
一般形式

$$G(s) = \frac{K_g}{s^v} \times \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (s + z_i) \prod_{k=1}^{m_2} (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)}{\prod_{j=1}^{n_1} (s + p_j) \prod_{l=1}^{n_2} (s^2 + 2\zeta_l \omega_l s + \omega_l^2)}$$

$$G(s) = \frac{K}{s^v} \times \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)}$$

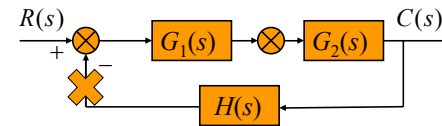
$$n = v + n_1 + 2n_2 \quad m = m_1 + 2m_2$$

反馈控制系统的典型结构



输入量、干扰量同时作用于线性系统

2.3.2 开环传递函数

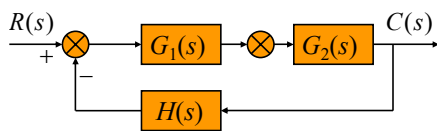


$$G_K(s) = G_1(s)G_2(s)H(s)$$

注：开环传递函数并非指开环控制系统的传递函数，而是指闭环系统断开反馈点后整个环路的传递函数

2.3.3 闭环系统传递函数

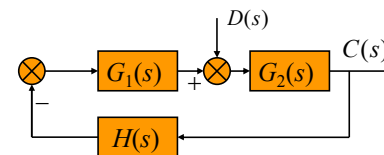
1. 给定输入作用下闭环传递函数 令 $D(s)=0$



$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s)$$

2. 扰动作用下闭环传递函数 令 $R(s)=0$



$$\Phi_D(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

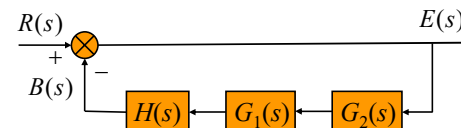
$$C(s) = \Phi_D(s)D(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} D(s)$$

3. 总输出

$$C(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)R(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} + \frac{G_2(s)D(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

2.3.4 闭环系统偏差传递函数

1. 给定输入作用下偏差传递函数 令 $D(s)=0$



$$\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$E(s) = \Phi_E(s)R(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s)$$

2. 扰动作用下偏差传递函数 令 $R(s)=0$

$$\Phi_{DE}(s) = \frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$E(s) = \Phi_{DE}(s)D(s) = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s)$$

3. 总偏差

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} + \frac{-G_2(s)H(s)D(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$1 + G_1(s)G_2(s)H(s) = 1 + G_K(s)$$

——闭环系统的特征多项式

$$1 + G_K(s) = 0$$

——闭环系统的特征方程。其根称为闭环系统的特征根或闭环系统的极点。★

2.3.5 典型环节及其传递函数

系统由一些基本环节组成，包括：电气、机械、液压、或气动等等。尽管这些系统的物理本质差别很大，但是描述他们的动态性能的传递函数可能是相同的。从数学表达式出发，一般可将一个复杂的系统分为有限的一些**典型环节**组成，并求出这些典型环节的传递函数，以便于分析及研究复杂的系统。

常用典型环节：**比例环节、惯性环节、微分环节、积分环节和振荡环节等。**

1. 比例/放大环节 (Proportional, P)

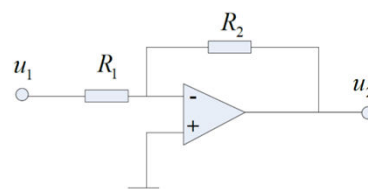
微分方程： $y(t) = Ku(t)$

传递函数： $G(s) = K$ (增益、放大系数)

方框图：

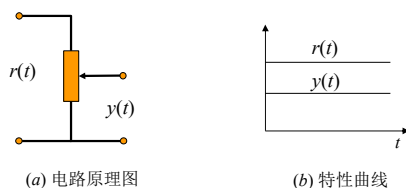


特点：输出量与输入量成正比，不失真也不延时



举例：机械系统中略去弹性的杠杆、作为测量元件的测速发电机 (输入为角速度，输出为电压) 以及电子放大器等 (忽略非线性和惯性)

例2.6 如图a所示的电压分压器即为典型比例环节，当输入量 $r(t)$ 为阶跃变化信号时，输出量 $y(t)$ 的变化如图b所示



特点：储能元件，对于突变形式的输入不能立即复现，其输出总落后于输入。时间常数越大，环节的惯性越大，则延时越长

2. 惯性(inertial)环节

一阶微分方程： $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t)$

传递函数： $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$

惯性环节的增益

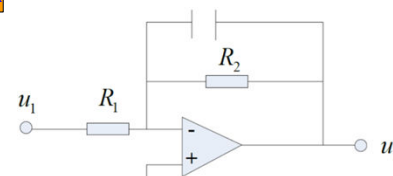
方框图：



在复平面 1个极点 $s = -1/T$

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{R_2 // \frac{1}{Cs}}{R_1}$$

$$= -\frac{R_2 \cdot \frac{1}{Cs} / (R_2 + \frac{1}{Cs})}{R_1} = -\frac{R_2 / R_1}{R_2 Cs + 1} = -\frac{K}{Ts + 1}$$

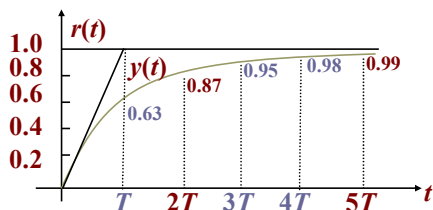


例2.7 输入信号为单位阶跃信号，其拉普拉斯变换 $R(s) = 1/s$ ，则输出量的拉普拉斯变换表达式

$$Y(s) = \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

$$y(t) = 1 - e^{-t/T} \quad t \geq 0$$

单位阶跃输入信号，惯性环节的输出信号是指数函数。
当时间 $t = (3 \sim 4)T$ 时，输出量接近其稳态值。



惯性环节系统应用？
含储能元件系统，许多温度系统，忽略电枢电感的直流电机

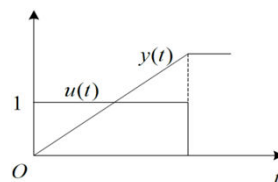
3. 积分(Integral, I)环节

微分方程： $y(t) = \frac{1}{T_i} \int r(t) dt$

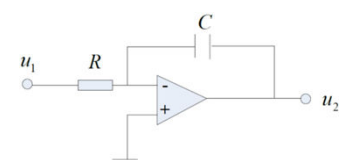
传递函数： $G(s) = \frac{1}{T_i s} = \frac{K_i}{s}$

积分时间常数 1个极点在复平面原点

I 环节具有记忆功能！



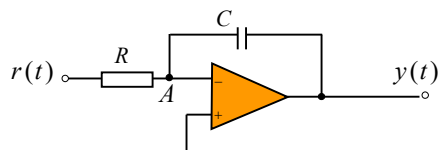
方框图：



$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{1}{RCs} = -\frac{1}{Ts}$$

特点：输出正比于输入对时间的积分

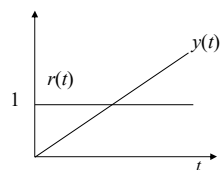
例2.8 积分调节器电路



在单位阶跃输入信号作用下，输出的拉普拉斯变换表达式为

$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$y(t) = t$$



输出量随时间成正比地无限增加

4. 微分(Derivative, D)环节

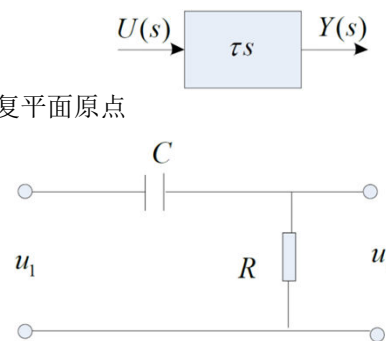
一阶微分方程: $y(t) = \tau \frac{du(t)}{dt}$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \tau s \quad \text{1个零点在复平面原点}$$

微分时间常数

$$y(t) = \tau \frac{d}{dt} 1(t) = \tau \delta(t)$$

非因果关系



$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{RCs}{1 + RCs} \approx RCs; (RC \ll 1)$$

Note: D环节在控制器中需谨慎用

5. 延迟环节

时域方程: $y(t) = r(t - \tau)$

传递函数: $G(s) = e^{-\tau s}$

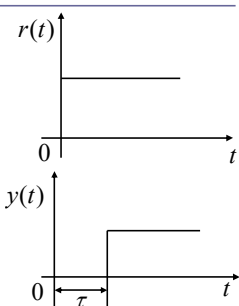


Q: 有没有零点和极点?

将延迟环节的传递函数展开为泰勒级数:

$$G(s) = e^{-\tau s} = \frac{1}{e^{\tau s}} = \frac{1}{1 + \tau s + \frac{1}{2!} \tau^2 s^2 + \dots}$$

无穷多个零点和极点!



当延迟时间很小时，可近似为惯性环节:

$$G(s) = e^{-\tau s} \approx \frac{1}{1 + \tau s}$$

特点:

- 输出和输入相同仅延迟时间 τ ; 不失真;
- 延时环节对控制系统稳定性等有较大影响, 延时大的系统不易控制;
- 与其他环节同时存在。人体、计算机系统、液压机械传动、气动传动。

原因: 延时效应。信号输入环节后, 由于环节传递信号的速度有限。输出响应要延迟一段时间 τ 才能产生

6. 二阶振荡环节

产生原因: 含有两种储能元件, 因能量相互转换而使输出带有振荡性质

$$\text{微分方程: } T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2T\zeta \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = r(t)$$

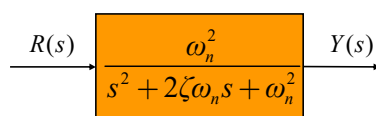
传递函数:

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

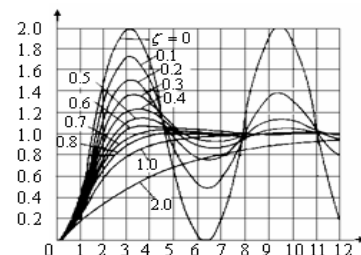
$$= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \rightarrow (T = \frac{1}{\omega_n} \text{ 为时间常数})$$

RLC电路、质量弹簧系统、他励直流电机等在适当的参数配合下均是振荡环节

方框图:



振荡环节阶跃响应



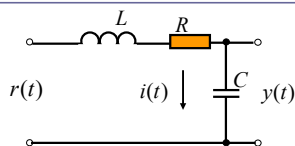
特点:

1. 含有两种形式的储能元件, 并能将储存的能量相互转换。
如动能与位能、电能与磁能间转换
2. 能量转换过程中使输出产生振荡

例2.9 无源RLC网络, 输入 $r(t)$, 输出 $y(t)$

$$\text{解: } G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$= \frac{1/(LC)}{s^2 + Rs/L + 1/(LC)}$$



$$\begin{cases} T^2 = LC \\ 2\zeta T = RC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \sqrt{LC} \\ \zeta = \frac{R\sqrt{LC}}{2L} \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\begin{cases} \omega_n = 1/(LC) \\ 2\zeta\omega_n = R/L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = 1/(\sqrt{LC}) \\ \zeta = R/L \times \sqrt{LC}/2 = \frac{R\sqrt{LC}}{2L} \end{cases}$$

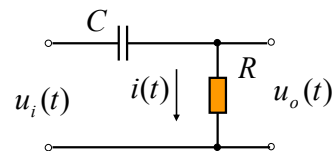
例2.10 具有惯性环节的微分环节

$$\text{解: } G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R}{R + 1/Cs}$$

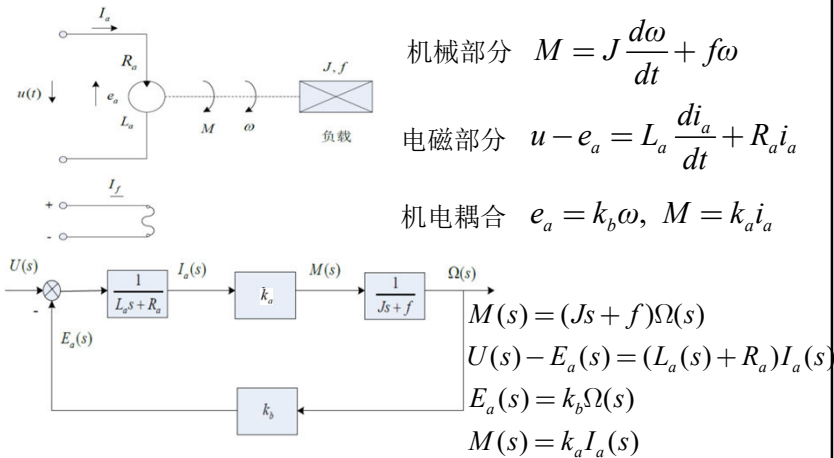
$$= \frac{RCs}{RCs + 1} = \frac{\tau s}{\tau s + 1}$$

$\tau = RC$ 时间常数

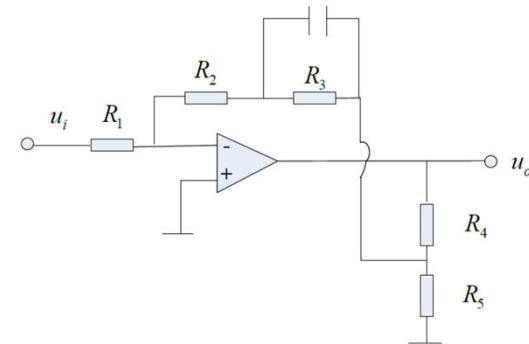
当 $\tau \ll 1$ 时, 才近似为纯微分环节



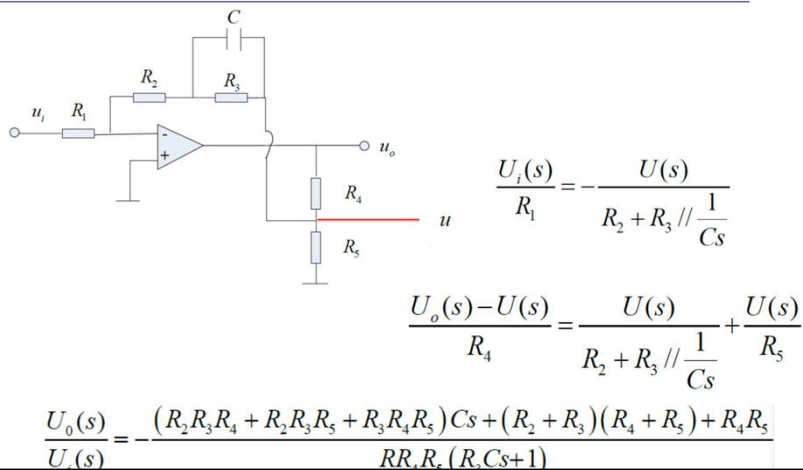
例2.11 他励直流电动机的结构框图和传递函数



思考题：求输入-输出传递函数



思考题：求输入-输出传递函数



说明：

- (1) 对应同一元件(或系统)，可以取不同的量作为输出量和输入量，得到不同的传递函数
- (2) 对于复杂的控制系统，在建立系统或被控对象的数学模型时，将其与典型环节的数学模型对比，即可知其由什么样的典型环节组成。由于典型环节的动态性能和响应是已知的，因而给分析、研究系统性能提供方便
- (3) 典型环节的概念只适用于能够用线性定常数学模型描述的系统

问题一：直观的描述一个系统(包括输入-输出关系，内部结构)

系统框图，每个内部结构用传递函数表示

问题二：有了系统框图，如何直接得到输入-输出关系
框图化简

2.4 控制系统的方框图及其等效变换

2.4.1 方框图

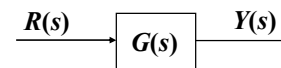
定义：(系统结构图) 所有环节用方框来表示，按照系统中各个环节之间的联系，将各方框连接起来构成；
方块一端为相应环节输入信号，另一端为输出信号，箭头表示信号传递方向，并在方框内标明相应环节的传递函数。

作用：信号传送过程和环节连接方式--串联，并联，反馈(简洁直观)

性质：每个框图环节应是相互独立的，即：本环节的输出只由输入和环节本身特性决定。

描述：箭头(信号流向)，流入箭头(输入信号)，流出箭头(输出信号)

方框：信号的数学变换，标注传递函数信号分支点和信号相加点



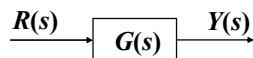
方框图基本单元

1. 表明了系统的组成、信号的传递方向；
2. 表示出了系统信号传递过程中的数学关系；
3. 可揭示、评价各环节对系统的影响；
4. 易构成整个系统，并简化写出整个系统的传递函数；
5. 直观、方便（图解法）。

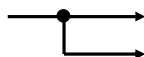
2.4.2 组成

① 方块：一个元件(环节)

② 信号流线：箭头表示信号传递方向

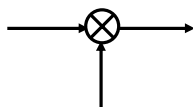


③ 分支点：信号多路输出且相等



④ 相加点(综合点、比较点)

相同性质的信号进行去取代数和(相同量纲的物理量)



2.4.3 建立

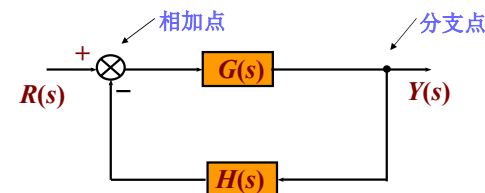
步骤：

(1) 列出描述每个元件的拉普拉斯变换方程

(2) 以结构图的基本要素表示每个方程，并将各环节的传递函数填入方块图内；将信号的拉普拉斯变换标在信号线附近

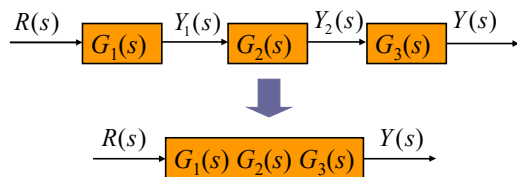
(3) 按照系统信号传递顺序，依次将各环节的结构图连接起来，构成系统的结构图。

◆ 负反馈系统的结构图



2.4.4 结构图的等效变换

(1) 串联(cascaded connection)



$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_3(s)Y_2(s)}{Y_1(s)} = \frac{G_3(s)G_2(s)Y_1(s)}{R(s)} = G_3(s)G_2(s)G_1(s)$$

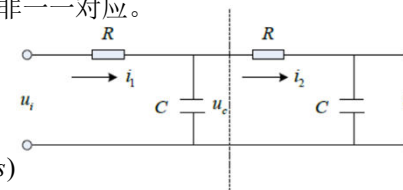
$$G(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s)$$

注意：

➤ 每个串联系统应相互独立，即后一个环节的加入不影响前一个环节的输入-输出关系

➤ 方框与实际系统中的元部件并非一一对应。

➤ 串联电路 ➡ 串联系统？



例2.12 求串联RC网络的传递函数

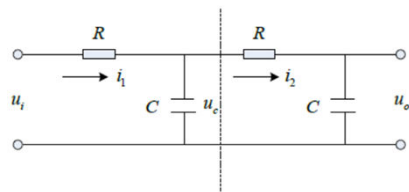
$$u_i = i_1 R + u_c \Rightarrow U_i(s) = I_1(s)R + U_c(s)$$

$$u_c = i_2 R + u_o \Rightarrow U_c(s) = I_2(s)R + U_o(s)$$

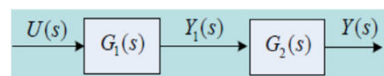
$$i_1 - i_2 = C \frac{du_c}{dt} \Rightarrow I_1(s) - I_2(s) = CsU_c(s)$$

$$i_2 = C \frac{du_o}{dt} \Rightarrow I_2(s) = CsU_o(s)$$

例2.12 求串联RC网络的传递函数



$$G(s) = \frac{1}{(RC)^2 s^2 + 3RCs + 1}$$

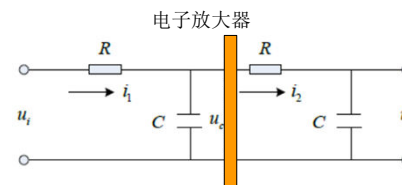


负载效应

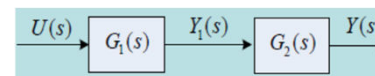
如果看成串联

$$G'(s) = \frac{1}{RCs + 1} \cdot \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{(RC)^2 s^2 + 2RCs + 1}$$

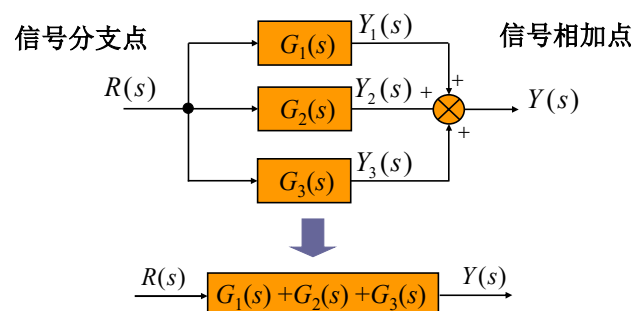
等价措施：消除负载效应，保证电路独立性



加电子放大器RC串联网络



(2) 并联 (parallel connection)



注：相加点符号可+可-

$$G(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s)$$

(2) 并联 (parallel connection)

分支不同于分流，每个分支是同样的信号

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) = G_1(s)R(s) + G_2(s)R(s) + G_3(s)R(s) \\ &= (G_1(s) + G_2(s) + G_3(s))R(s) \end{aligned}$$

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + G_3(s)$$

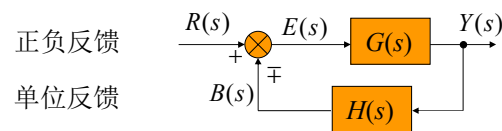
(3) 反馈 (feedback connection)

前向通道：由偏差→输出的通道

反馈通道：由输出→反馈信号的通道

闭环传递函数(closed-loop)：从 $U(s) \rightarrow Y(s)$ 的传递函数

开环传递函数(open loop)：组成闭合回路各串联环节的乘积
(从输入→反馈断开点)

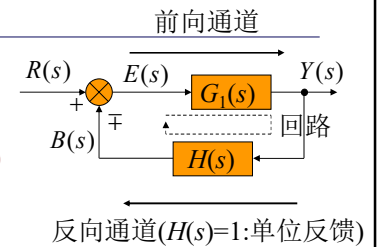


(3) 反馈(feedback connection)

$$Y(s) = G_1(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) \mp B(s) = R(s) \mp Y(s)H(s)$$

$$\therefore Y(s) = G_1(s)[R(s) \mp Y(s)H(s)]$$

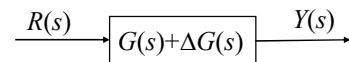


$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)H(s)} = 0 \quad \text{闭环系统的特征方程}$$

开环传递函数 $G_0(s)$ = 闭环回路各串联环节的乘积 $G_1(s)H(s)$

负反馈对扰动的抑制

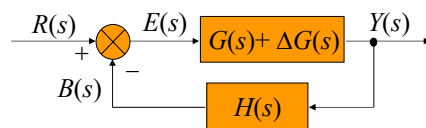
$$Y(s) = G_1(s)E(s)$$



$$Y(s) = (G(s) + \Delta G(s))U(s)$$

$$= G(s)U(s) + \Delta G(s)U(s) = Y_0(s) + \Delta Y(s)$$

一般假设： $|G(s)| \gg |\Delta G(s)|$



负反馈对扰动的抑制

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{G(s) + \Delta G(s)}{1 + (G(s) + \Delta G(s))H(s)} U(s) \\ &\approx \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} U(s) + \frac{\Delta G(s)}{1 + G(s)H(s)} U(s) \\ &= Y_0'(s) + \Delta Y'(s) \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\Delta Y'(s)}{\Delta Y(s)} \right| = \left| \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \right| \ll 1 \quad \begin{array}{l} \text{反馈对反向通道中的内部扰动?} \\ \text{反馈对外部扰动?} \end{array}$$

注：扰动只要出现在闭环中，不管在什么位置，都能够被有效抑制；
impossible for open loop

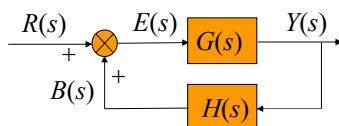
正反馈的特点：

1. 可以使输入信号被**反复放大**，小激励产生大输出。
2. 使系统**不稳定**，控制系统中尽量避免。
3. 适用场合：系统**不需保持**在某个目标情况

正反馈对企业的发展机制将起到很大的作用。
很弱小的基础→不断(循环)发展壮大的过程

教室/K歌房 音响啸叫

Q: 人生中的正反馈？



2.4.5 方框图化简

实际系统，往往是多回路系统，形成**回路交错或相套**。为便于计算和分析，常将复杂方框图简化为较简单方框图。

① 结构图简化的关键是**解除各种连接**之间，包括环路与环路之间的交叉，应设法使它们分开，或形成大环套小环的形式。

② 解除交叉连接的有效方法是**移动相加点或分支点**。一般，结构图上相邻的分支点可以彼此交换，相邻的相加点也可以彼此交换。但当分支点与相加点相邻时，它们的位置就不能作简单的交换。

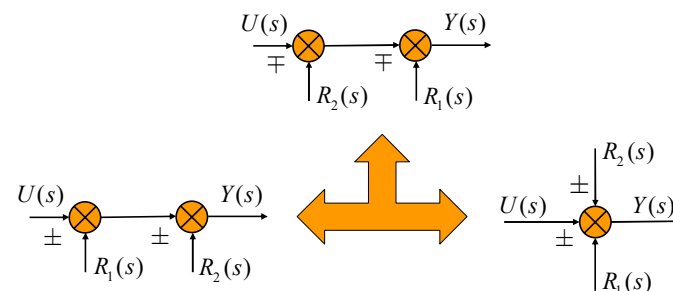
2.4.5 方框图化简

化简原则：输入输出关系不变
分支点间或汇合点间移动
分支点和汇合点间**不能**交换

在对系统进行分析时，为了简化系统的结构图，常常需要对信号的分支点或相加点进行变位运算，以便消除交叉，求出总的传递函数。

变位运算的原则是，**输入和输出都不变。变换前后的方框图是等效的。**

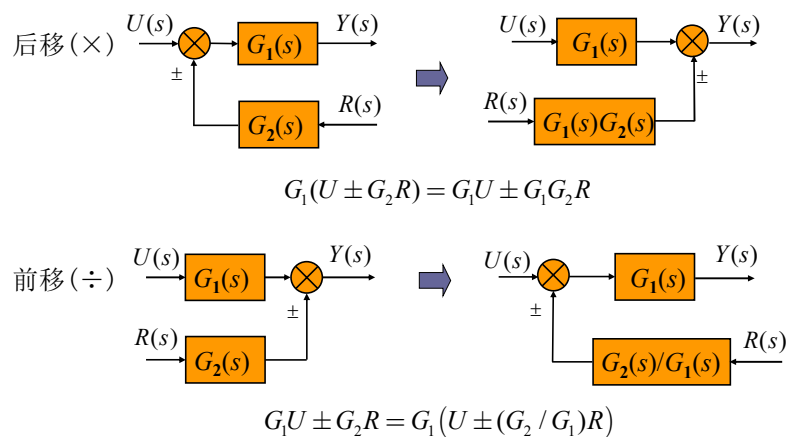
(1) 相加(汇合)点移动



$$(U \pm X_1) \pm X_2 = (U \pm X_2) \pm X_1 = U \pm X_1 \pm X_2$$

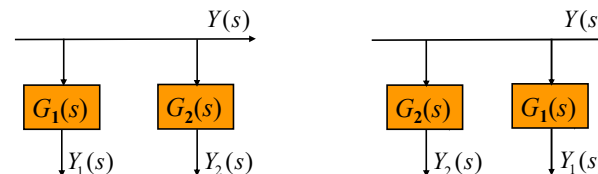
(1) 相加(汇合)点移动

注：相加点进入和出去的信号量纲必须相同，否则不能加减

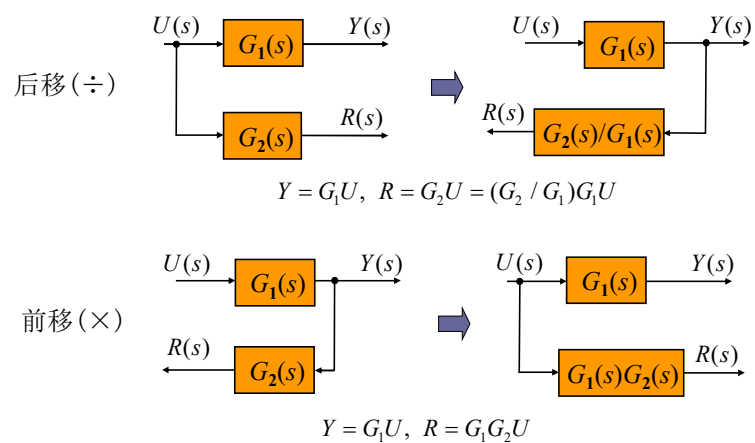


(2) 分支点(信号由某一点分开)移动

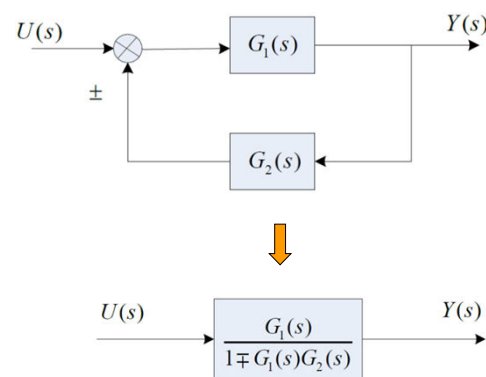
分支点分出信号，数值相同



(2) 分支点(信号由某一点分开)移动



闭环回路



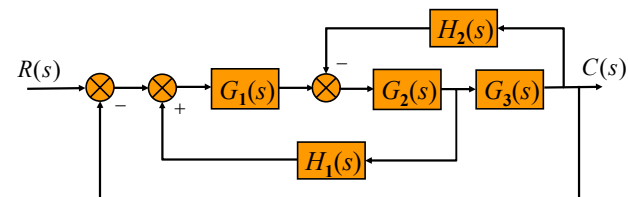
(3) 分支点之间可任意互换，相加点之间可互换(但注意前后符号一致)。

(4) 相加点和分支点之间一般不能互换变位

总结:

- ① 变换前与变换后前向通道中传递函数的乘积必须保持不变 (前向传函不变)
- ② 变换前与变换后回路中传递函数的乘积必须保持不变。(开环传函不变)

例2.13 求系统传递函数



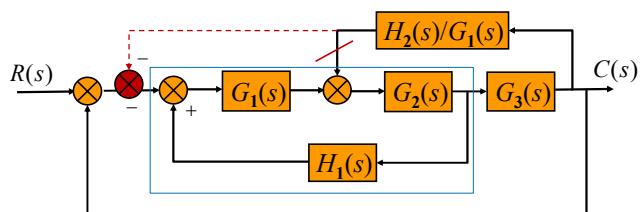
提示：图中有无并联环节？

能否直接串联合并 G_1, G_2, G_3 或

反馈合并 G_2, G_3, H_2 ? G_1, G_2, H_1 ?

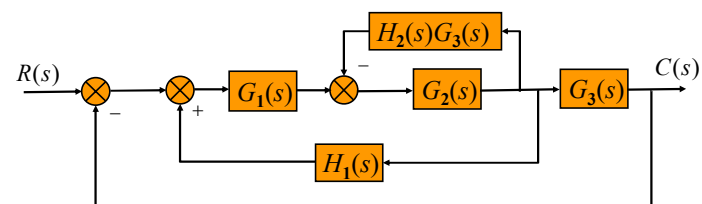
例2.13 求系统传递函数

解法一： H_2 反馈汇合点前移 (1/4)



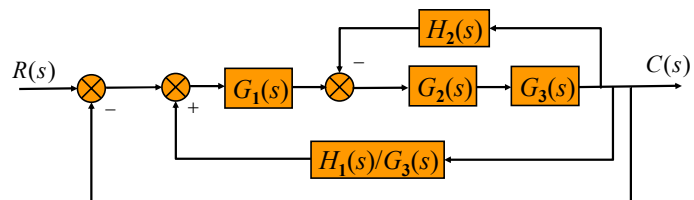
例2.13 求系统传递函数

解法二： H_2 反馈分支点前移 (1/4)



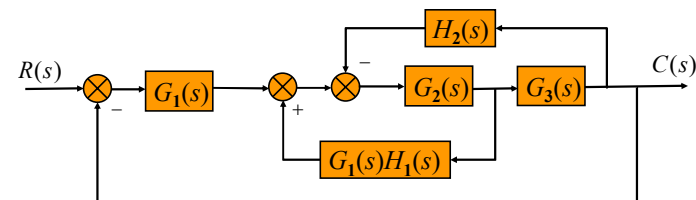
例2.13 求系统传递函数

解法三： H_1 反馈分支点后移 (1/4)



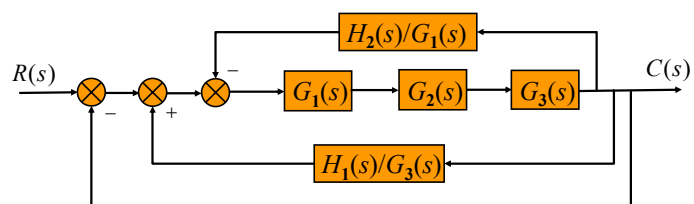
例2.13 求系统传递函数

解法四： H_1 反馈汇合点后移



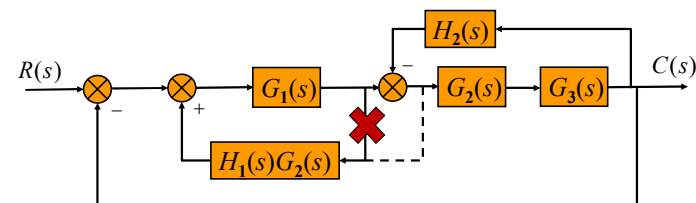
例2.13 求系统传递函数

解法五： H_1 反馈分支点后移
 H_2 反馈汇合点前移

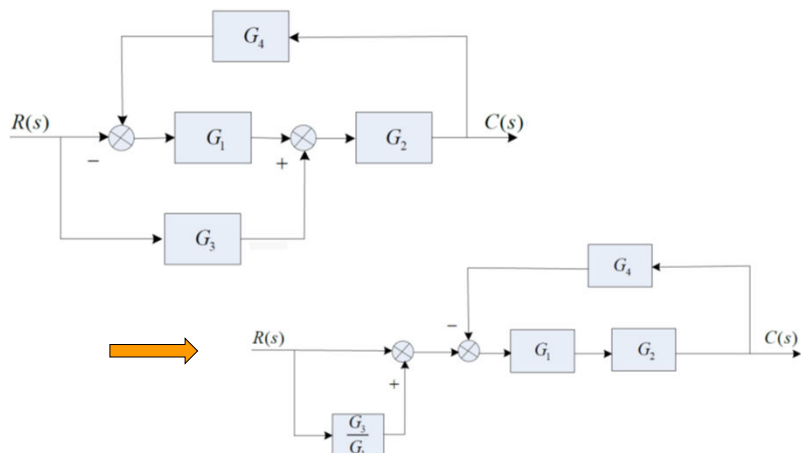


例2.13 求系统传递函数

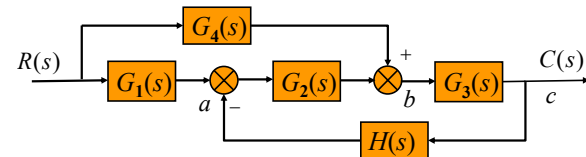
解法六： H_1 反馈分支点前移
 H_2 反馈分支点前移



思考题：求系统传递函数

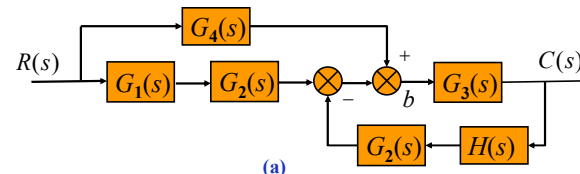


例2.14 化简求系统传递函数

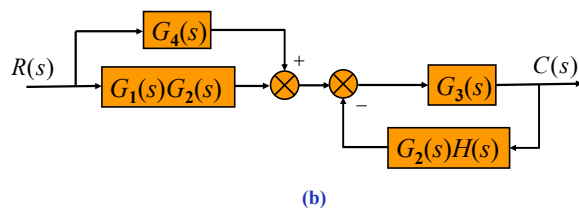


解：为消除交叉，可采用相加点、分支点互换的方法处理。

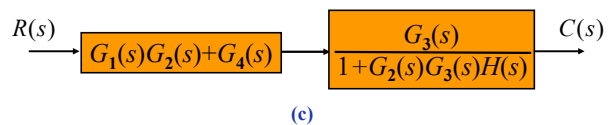
(1) 将相加点a移至G₂之后



(2) 再与b点交换



(3) 因G₄与G₁G₂并联，G₃与G₂H是负反馈环节



(4) 上图两环节串联，函数相乘后得系统的传递函数为

$$R(s) \rightarrow \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s) + G_3(s)G_4(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)H(s)} C(s)$$

注：

- ① 原系统的闭环传递函数，不是开环系统的传递函数，是闭环系统简化的结果；
- ② 分母中不能看成原闭环系统的开环传递函数，闭环系统开环传递函数应根据定义和具体框图定。

归纳规律:

如果满足以下两个条件:

- ① 所有回路两两相互接触
- ② 所有回路与所有前向通道接触

则可以得到以下简化结构图的规律:
闭环系统传递函数是一个有理分式

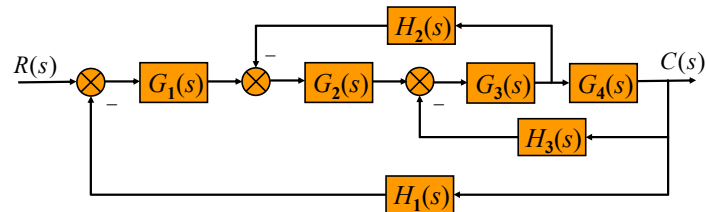
$$\Phi(s) = \frac{\sum_{m=1}^m \text{前向通道各串联环节的传递函数之积}}{1 + \sum_{n=1}^n (\pm \text{每一局部反馈回路的开环函数})}$$

负反馈取“+”
正反馈取“-”

式中, m 是前向通道的条数, n 是反馈回路数。

Mason公式

例2.15 简化系统结构图, 并求系统传递函数



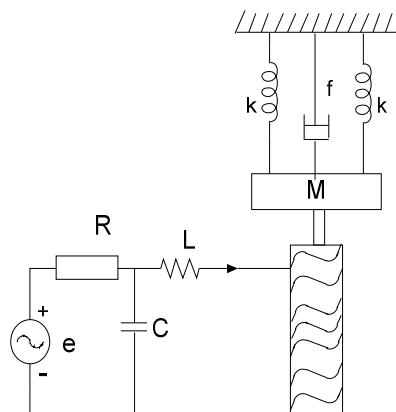
有一条前向通道: $G_1 G_2 G_3 G_4$

反馈回路开环传递函数: $G_1 G_2 G_3 G_4 H_1$, $G_3 G_4 H_3$, $G_2 G_3 H_2$

前向通道与反馈回路两两接触

所以

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 H_2 + G_3 G_4 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1}$$



2.5 信号流图与梅逊公式

2.5.1 信号流图的基本要素

节点——代表系统中的一个变量或信号。用符号“ \circ ”表示

支路——是连接两个节点的定向线段。用符号“ \rightarrow ”表示，其中的箭头表示信号的传送方向

传输——亦称支路增益，支路传输定量地表明变量从支路一端沿箭头方向传送到另一端的函数关系。用标在支路旁边的传递函数“ G ”表示支路传输



2.5.2 信号流图的常用术语

1. 节点及其类别

◆ **源节点** 只有输出支路而无输入支路的节点称为源节点或输入节点，对应于系统的输入变量，如图2.40中的 R 、 D

◆ **汇节点** 只有输入支路而无输出支路的节点称为汇节点或输出节点，对应于系统的输出变量，如图2.40中的 C

◆ **混合节点** 既有输入支路又有输出支路的节点称为混合节点，如图2.40中的 E 、 P 、 Q

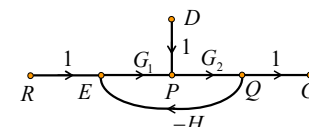


图2.40 系统信号流图

2. 通道及其类别

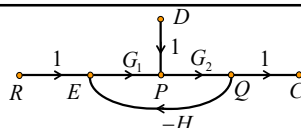


图2.40 系统信号流图

◆ **通道**：从某一节点开始，沿着支路箭头方向连续经过一些支路而终止于另一节点（或同一节点）的路径，如图2.40中 $REPQC$ 、 DPG_2QC 、 PG_2QHEG_1 等

◆ **前向通道**：从源节点开始并且终止于汇节点，与其它节点相交不多于一次的通道，如图2.40中的 $REPQC$ 、 DPG_2QC 等

◆ **回路**：通道的起点和终点是同一节点，并且与其它任何节点相交不多于一次的闭合路径，如图2.40中的 $EPQHE$ 。只与一个节点相交的回路，称为自回路

◆ **不接触回路**：信号流图中，没有任何共同节点的回路，称为不接触回路或互不接触回路

3. 传输及其类别

◆ **通道传输** 通道中各支路传输的乘积称为通道的传输

◆ **回路传输** 回路中各支路传输的乘积，称为回路的传输

◆ **前向通道传输** 前向通道中各支路传输的乘积称为前向通道的传输

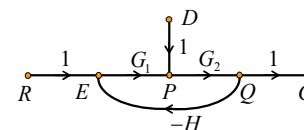


图2.40 系统信号流图

2.5.3 信号流图的性质

1. 信号流图只能用来表示代数方程组
2. 节点把所有输入信号叠加，传到所有的输出支路
3. 信号只能沿支路的箭头方向流通，后一个节点对前一个节点没有负载效应（即无反作用）
4. 对于给定的系统，信号流图不是唯一的
5. 节点变量=流入信号相加(正向叠加)
6. 流出信号=节点变量

2.5.4 信号流图的等效变换法则

	原流图	等效变换流图
串联支路合并		
并联支路合并		
混合节点消除		
回路消除		
自回路消除		

系统结构图

信号流图

变量	⇒	节点
输入变量	⇒	源节点
比较点 引出点	⇒	混合节点
传输线 方框	⇒	支路
输出端	⇒	汇节点

信号流图和系统方框图的关系

信息论 信号流图：复杂线路信号传递的图示方法

支路(Edge)
节点Node ○ ———→ ○ 节点Node
增益G(Weigh)

控制论 系统方框图：复杂系统的图示方法

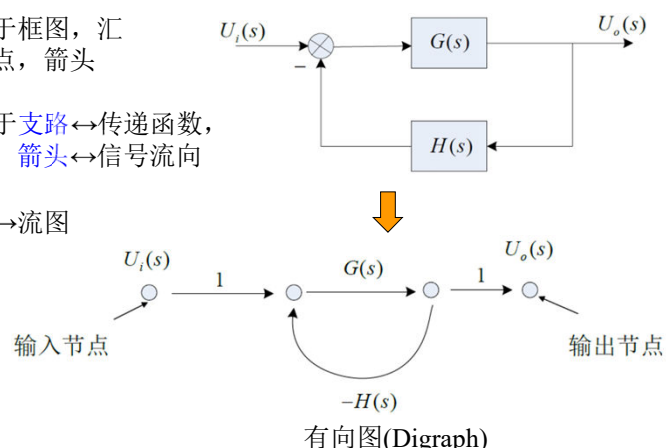
变量 → 传递函数G(Gain) → 变量

信号流图和系统方框图关系

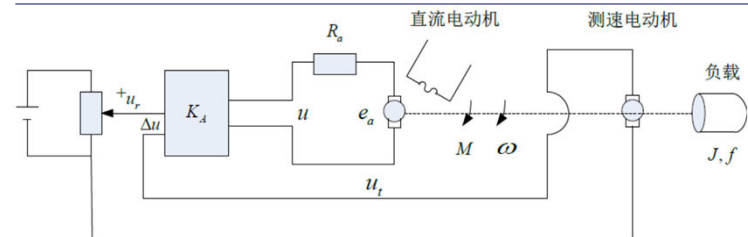
框图法：基于框图，汇合点，分支点，箭头

流图法：基于支路 \leftrightarrow 传递函数，节点 \leftrightarrow 变量，箭头 \leftrightarrow 信号流向

画法：框图 \leftrightarrow 流图



例2.16 速度反馈系统，画出系统信号流图



电磁部分：

$$\begin{aligned}\Delta u &= u_r - u_i \\ u &= K_A \Delta u \\ u - e_a &= i_a R_a\end{aligned}$$

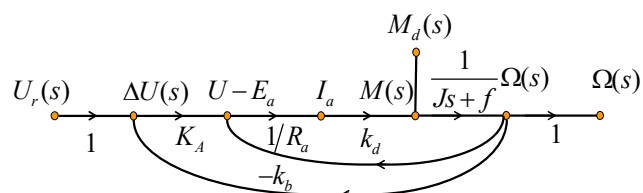
机电耦合部分：

$$\begin{aligned}u_i &= k_t \omega \\ M &= k_d i_a \\ e_a &= k_b \omega\end{aligned}$$

机械部分： $J \frac{d\omega}{dt} + f\omega + M_d = M$

$$\begin{aligned}U_i(s) &= k_t \Omega(s) & M(s) &= k_d I_a(s) \\ \Delta U(s) &= U_r(s) - U_i(s) & E_a(s) &= k_b \Omega(s) \\ U(s) - E_a(s) &= I_a(s) R_a & U(s) &= K_A \Delta U(s) \\ \Omega &= \frac{1}{Js + f} (M(s) - M_d(s))\end{aligned}$$

例2.16 速度反馈系统，画出系统信号流图



方法：

沿着信号输入 \rightarrow 输出的传递过程绘制

$$\begin{aligned}\Delta U(s) &= U_r(s) - U_i(s) & U_i(s) &= k_t \Omega(s) \\ U(s) - E_a(s) &= I_a(s) R_a & M(s) &= k_d I_a(s) \\ U(s) &= K_A \Delta U(s) & E_a(s) &= k_b \Omega(s) \\ \Omega &= \frac{1}{Js + f} (M(s) - M_d(s))\end{aligned}$$

2.5.5 梅逊(Mason)公式

前向通道

从输入到输出的一条按箭头方向可以走通
每个节点只通过一次
并非一定经过所有节点

回路

从某个节点出发按箭头方向回到该节点
每个节点只通过一次

不接触回路

两个回路没有公共节点

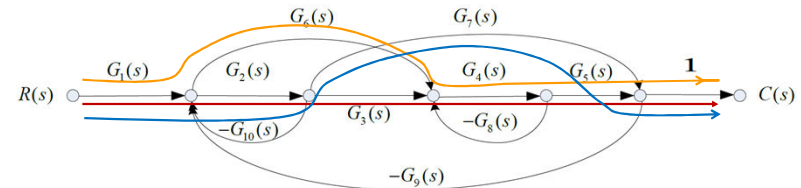
2.5.5 梅逊(Mason)公式

梅逊公式 $G(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \sum_i Q_i(s) \Delta_i(s)$

$\Delta(s) = 1 -$ 所有不同回路的传递函数之和
 + 每两个不接触回路的传递函数乘积之和
 - 每三个不接触回路的传递函数乘积之和
 + ... $\Delta(s) = 0$ 系统的特征方程式
 - ... $\Delta(s)$: 特征式

$Q_i(s)$: 从输入到输出某前向通道的传递函数
 $\Delta_i(s)$: 将 $\Delta(s)$ 中与 $Q_i(s)$ 通道接触的回路传递函数
 令为0后得到的表达式

例2.17 求传递函数



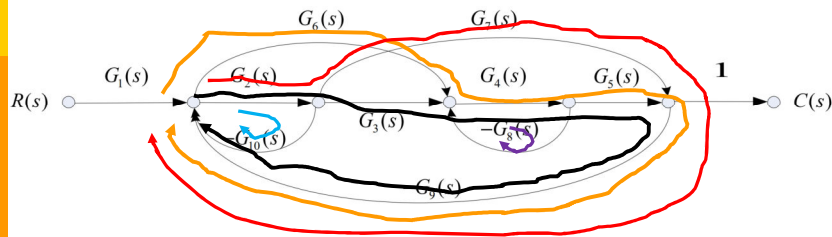
前向通道

$$Q_1(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)$$

$$Q_2(s) = G_1(s)G_6(s)G_4(s)G_5(s)$$

$$Q_3(s) = G_1(s)G_2(s)G_7(s)$$

例2.17 求传递函数

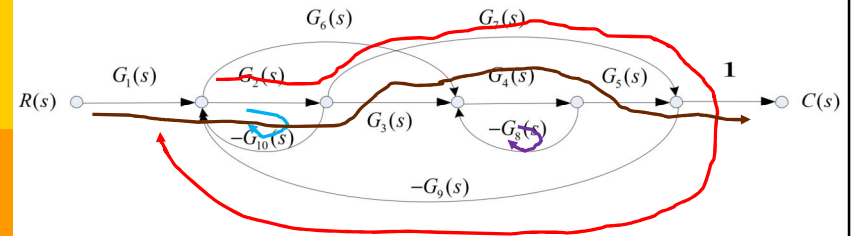


回路

$$L_1(s) = -G_2(s)G_{10}(s) \quad L_2(s) = -G_2(s)G_7(s)G_9(s)$$

$$L_3(s) = -G_4(s)G_8(s) \quad L_4(s) = -G_6(s)G_5(s)G_4(s)G_9(s)$$

$$L_5(s) = -G_2(s)G_3(s)G_5(s)G_4(s)G_9(s)$$



特征式 $L_1(s)$ 与 $L_3(s)$, $L_2(s)$ 与 $L_3(s)$ 是不接触回路

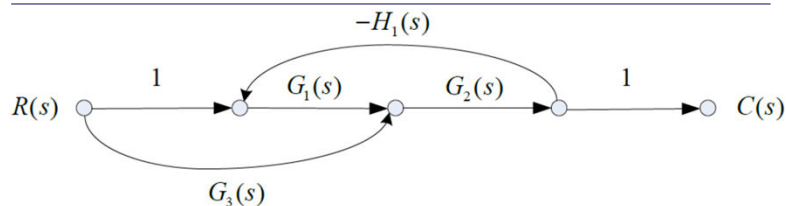
$$\Delta(s) = 1 - \sum_{i=1}^5 L_i + L_1L_3 + L_2L_3$$

Δ_i $\Delta_1(s) = 1 \quad \Delta_2(s) = 1 \quad \Delta_3(s) = 1 + G_4G_8$

$$G(s) = \frac{Q_1(s) \times 1 + Q_2(s) \times 1 + Q_3(s) \times (1 + G_4(s)G_8(s))}{\Delta(s)}$$

课堂思考题：求传递函数

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s) \times 1 + G_2(s)G_3(s) \times 1}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)}$$



前向通道

$$Q_1(s) = G_1(s)G_2(s) \quad Q_2(s) = G_3(s)G_2(s)$$

回路

$$L_1(s) = -G_1(s)G_2(s)H_1(s)$$

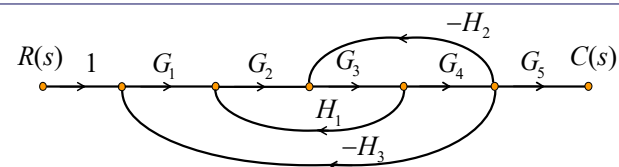
特征式

$$\Delta(s) = 1 - L_1$$

Δ_i

$$\Delta_1(s) = 1 \quad \Delta_2(s) = 1$$

例2.18 用梅逊增益公式求传递函数



解 一条前向通道： $P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5$

三个反馈回路： $L_1 = G_2G_3H_1$

$$L_2 = -G_3G_4H_2$$

$$L_3 = -G_1G_2G_3G_4H_3$$

三个回路相互接触： $\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3)$

$$= 1 - (G_2G_3H_1 - G_3G_4H_2 - G_1G_2G_3G_4H_3)$$

三个回路均与前向通道接触， $\Delta_1 = 1$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} P_1 \Delta_1 = \frac{G_1G_2G_3G_4G_5}{1 - G_2G_3H_1 + G_3G_4H_2 + G_1G_2G_3G_4H_3}$$

2.5.5 Mason公式

总结：

(1) Mason公式关键：找对系统回路和前向通道，以及确定两者之间以及回路之间的联系。

与框图法的特点不同

(2) 系统为多输入多输出时，分别求每一个输入和输出之间的传递函数(叠加原理)。例子？

Review

输入-输出运动方程：机械系统

质量要素 \Rightarrow 直线: $F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$ 旋转: $T = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$

弹性要素 \Rightarrow 直线: $F = k(x_1 - x_2) = k \int_0^t (v_1 - v_2) dt$
旋转: $T = k(\theta_1 - \theta_2) = k \int_0^t (\omega_1 - \omega_2) dt$

阻尼要素 \Rightarrow 直线: $F = f(v_1 - v_2) = f \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right)$
旋转: $T = f(\omega_1 - \omega_2) = f \left(\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} \right)$

输入-输出运动方程：电路系统

基尔霍夫电压定律

基尔霍夫电流定律

输入-输出运动方程：机电系统(他励直流电机)

机械部分

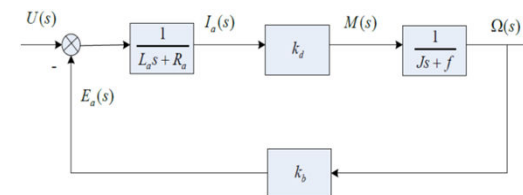
+

电磁部分

+

机电耦合

$$M = J \frac{d\omega}{dt} + f\omega \quad u - e_a = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a \quad e_a = k_b \omega, M = k_a i_a$$



忽略电感

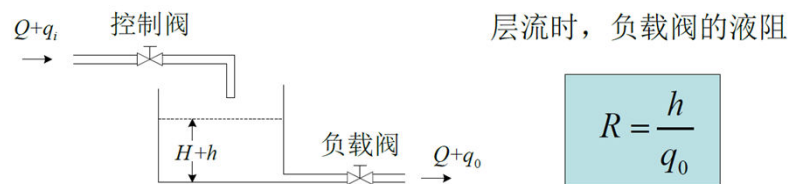
$$T \frac{d\omega}{dt} + \omega = ku$$

一阶惯性系统

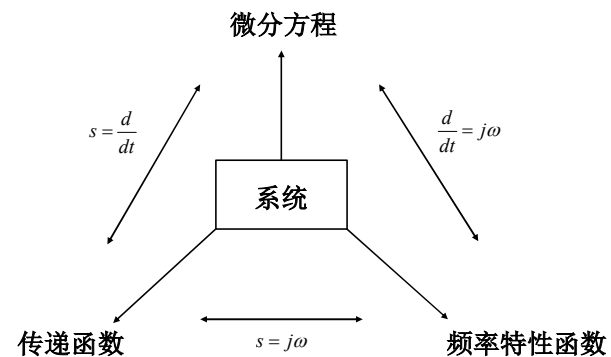
输入-输出运动方程：液位系统

层流 液体由一层通向另一层的平滑运动 线性动态

液阻 $R = \frac{\text{液位差变化(m)}}{\text{流量变化(m}^3/\text{s)}}$



三种模型之间的等价关系：



系统方框图 方框图化简：原则
梅森公式：前向通道；回路；不接触回路

幅频特性
相频特性

2.6 频率特性函数

Motivation—时域分析法的缺点：

- (1) 高阶系统的分析比较困难；
- (2) 要求精确的系统数学模型。当系统某些元件传递函数(内部机理)难以得到时，整个系统的分析将无法进行

Motivation—频域分析法(1932, Nyquist; 1945, Bode)优点:

- (1) 通过**开环频率特性曲线(图示法)**揭示闭环系统的动态性能和稳态性能, 得到**定性和定量**的结论; 简单迅速地判断某些环节或者参数对系统闭环性能影响, 并提出改进系统的方法;
- (2) **明确的物理意义: 时域指标和频域指标之间有对应关系**, 而且频率特性分析中使用简洁的曲线、图表及经验公式, 简化控制系统分析与设计;
- (3) 频率特性可通过**实验方法**测出, 不必通过时域建模。适用范围更广: 机理建模和非机理建模系统;
- (4) 使控制系统分析十分方便、直观, 并且可以拓展应用到某些**非线性系统**中

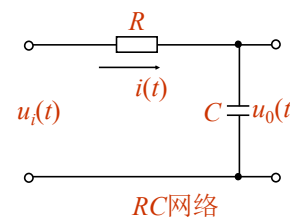
2.6.1 频率响应

频率响应是时间响应的**特例**, 是控制系统对正弦输入信号的稳态正弦响应。即一个稳定的线性定常系统, 在正弦信号的作用下, 稳态时输出仍是一个与输入同频率的正弦信号, 且稳态输出的幅值与相位是输入正弦信号频率的函数。

示例:

图示一阶RC网络, $u_i(t)$ 与 $u_o(t)$ 分别为输入与输出信号, 其传递函数为

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$



其中 $T=RC$, 为电路的时间常数, 单位为s

在零初始条件下, 当输入信号为一正弦信号, 即

$$u_i(t) = U_i \sin \omega t$$

U_i 与 ω 分别为输入信号的振幅与角频率, 运用时域法求电路输出

输出的拉氏变换为:

$$U_o(s) = \frac{1}{Ts + 1} \times \frac{U_i \omega}{s^2 + \omega^2}$$

对上式进行拉氏反变换可得输出的时域表达式:

输入信号: $u_i(t) = U_i \sin \omega t$

$$\text{输出信号: } \lim_{t \rightarrow \infty} u_o(t) = \frac{U_i}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \arctan T\omega) = U_o \sin(\omega t + \varphi)$$

稳态输出与输入幅值比为:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$$

输出与输入相位差为:

$$\varphi = -\arctan T\omega$$

二者均仅与输入频率 ω , 以及系统本身的结构与参数有关

2.6.2 频率特性函数的定义

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad n\text{阶LTI(linear time-invariant)系统}$$

$$u(t) = A \sin \omega t \quad u(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$y(t) = C_a \sin \omega t + C_b \cos \omega t + \sum_{i=1}^n C_i e^{-p_i t}$$

$$\text{频率响应 (稳定)} \rightarrow y_{\infty}(t) = C_a \sin \omega t + C_b \cos \omega t = B \sin(\omega t + \theta)$$

定义

$$G(j\omega) = \frac{\text{输出稳态解}}{\text{输入信号}} = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + a_0} = G(s)|_{s=j\omega}$$

性质: (1) 与输入正弦信号的幅值及相角均无关的复变函数;
(2) 输出幅值与角频率有关, 输出相角与角频率有关。

幅频特性函数	$F(\omega) = G(j\omega) $	} 可由实验 测试得到
相频特性函数	$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \angle G(j\omega)$	

2.6.3 频率特性与传递函数的关系

频率特性和传递函数之间的关系

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$$

IF 已知系统(或环节)的传递函数, **Then** 用 $j\omega$ 置换其中的 s , 得到该系统(或环节)的频率特性;

反之, **IF** 用实验方法获得系统(或元部件)的频率特性, **Then** 由频率特性确定出系统(或元部件)的传递函数

2.6.4 频率特性的图示方法

1. 极坐标频率特性图(奈奎斯特Nyquist图)

也称**幅相频率特性曲线**, 将角频率 ω 当成参量, 在极坐标图上绘出 $G(j\omega)$ 随 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时, 向量 $G(j\omega)$ 的矢端轨迹, 该图称作频率特性的**奈奎斯特(Nyquist)图**。

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= X(\omega) + jY(\omega) && \text{代数式} \\ &= |G(j\omega)| \angle G(j\omega) && \text{极坐标式} \\ &= A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} && \text{指数式} \end{aligned}$$

画法

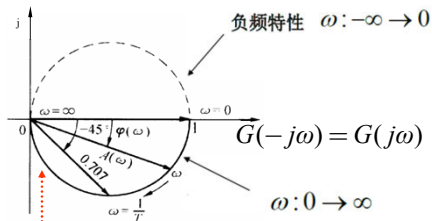
一: 对每一个 ω 求出 $G(j\omega)$ **实部** 和 **虚部** 在图中标出

二: 对每一个 ω 求出 $G(j\omega)$ **幅值** 和 **相角** 在图中标出

Nyquist图画法

画法1: 根据 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 画

画法2: 根据 $|G(j\omega)|$ 和 $\arg G(j\omega)$ 画



注意: 相角 $\varphi(\omega)$ 的大小与正负, 要从正实轴开始按逆时针方向为正, 顺时针方向为负进行计算

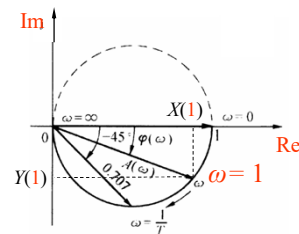
$G(j\omega)$ 在 $\omega: 0 \rightarrow \infty$ 和 $-\infty \rightarrow 0$ 关于实轴对称

Nyquist图

$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$	ω	0	$\frac{1}{2T}$	$\frac{1}{T}$	$\frac{2}{T}$	$\frac{3}{T}$	$\frac{4}{T}$	$\frac{5}{T}$	∞
	$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$	1	0.89	0.71	0.45	0.32	0.24	0.20	0
	$\varphi(\omega) = -\arctan \omega T$ (度)	0	-26	-45	-63.5	-71.5	-76	-78.7	-90

Nyquist图画法

画法3: 根据 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 几何关系确定图形



$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\arg \tan RC\omega$$

$$T = RC = 0.5$$

$$X(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2}, \quad Y(\omega) = \frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$X^2 + Y^2 = X, \quad (X - \frac{1}{2})^2 + Y^2 = \frac{1}{4}$$

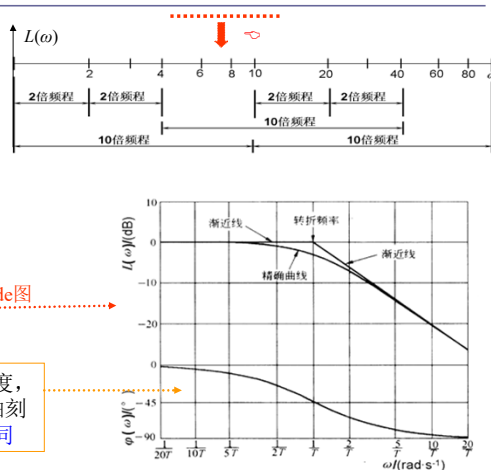
2. 对数频率特性图(Bode图)

对数幅频特性图
对数相频特性图

对数频率特性定义为:
 $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ dB
 $L(\omega)$ 的图形就是Bode图

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1} \quad \text{Bode图}$$

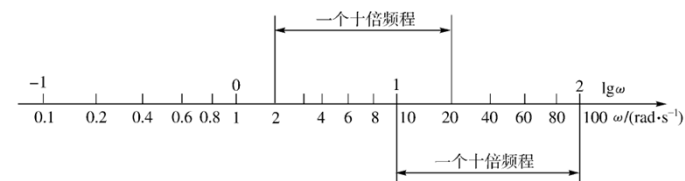
对数相频特性: 纵轴均匀刻度, 标以 $\varphi(\omega)$ 值(单位为度); 横轴刻度及标值方法与幅频特性相同



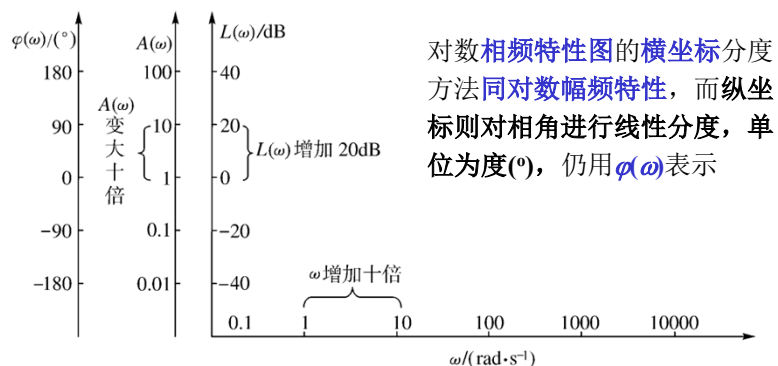
对数频率特性图(Bode图)将幅频和相频特性分别画出, 并按对数分度运算, 使系统分析和设计十分简便

(1) 伯德(Bode)图构成

横坐标是对 ω 取以10为底对数进行分度



纵坐标是对幅值分贝(dB)数进行分度, 用 $L(\omega)=20\lg A(\omega)$ 表示



在绘制函数关系时, 相当于 $\lg \omega$ 为自变量

横坐标对于 ω 是不均匀的, 但对 $\lg \omega$ 却是均匀的线性分度。 ω 每变化十倍, 横坐标 $\lg \omega$ 就增加一个单位长度, 记为decade或简写dec, 称之为“十倍频”或“十倍频程”。由于0频无法表示, 横坐标的最低频率是由所需的频率范围来确定

选取 $\lg \omega$ 作为横坐标原因: (1) 低频展宽; (2) 高频缩小

若横轴上有两点 ω_1 与 ω_2 , 则该两点的距离不是 $\omega_2 - \omega_1$, 而是 $\lg \omega_2 - \lg \omega_1$, 如2与20、10与100之间的距离均为一个单位长度, 即一个十倍频程

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)\dots G_n(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

式中 $A(\omega) = A_1(\omega)A_2(\omega)\dots A_n(\omega)$;

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega) \quad \text{对数相频特性}$$

在极坐标中绘制幅相频率特性, 要花较多时间, 而在绘制对数幅频特性时, 有

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$$

$$= 20 \lg A_1(\omega) + 20 \lg A_2(\omega) + \dots + 20 \lg A_n(\omega)$$

$$= L_1(\omega) + L_2(\omega) + \dots + L_n(\omega) \quad \text{对数幅频特性}$$

(2) Bode图法特点

- 1) 横坐标按频率取对数分度, 低频部分展宽, 而高频部分缩小。符合实际控制系统(一般为低频系统)的频率分辨要求;
- 2) 幅频特性取分贝数 $[20\lg |GH|]$ 后, 使各因子间乘除运算变为加减运算, 在Bode图上则变为各因子幅频特性曲线叠加, 简化作图过程, 方便系统设计和分析;
- 3) 采用由直线段构成的渐近特性(或稍加修正)代替精确Bode图, 绘图十分简便;
- 4) 系统设计和调试中, 开环放大系数 K 是最常变化参数。而 K 变化不影响对数幅频特性形状, 只会使幅频特性曲线作上下平移

2.6.5 典型环节的频率特性

1. 比例放大环节 $G(s) = K$

频率特性函数 $G(j\omega) = Ke^{-j0}$

幅频特性 $A(\omega) = K$

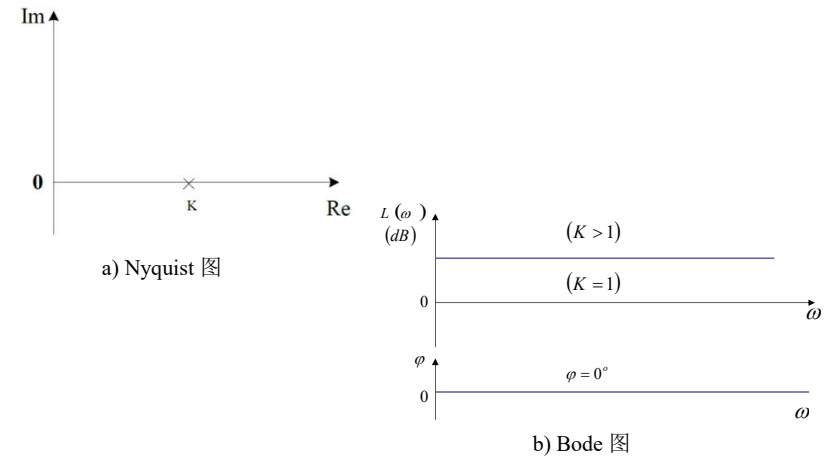
对数幅频特性 $L(\omega) = 20\lg K$

相频特性 $\varphi(\omega) = 0$

对数相频特性 $\varphi(\omega) = 0$

注：比例环节可以完全、真实地复现任何频率的输入信号，幅值上有放大或衰减作用；

$\varphi(\omega)=0^\circ$ ，表示输出与输入同相位，既不超过前也不滞后



2. 积分环节 $G(s) = 1/s$

频率特性函数 $G(j\omega) = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$

幅频特性 $A(\omega) = \frac{1}{\omega}$

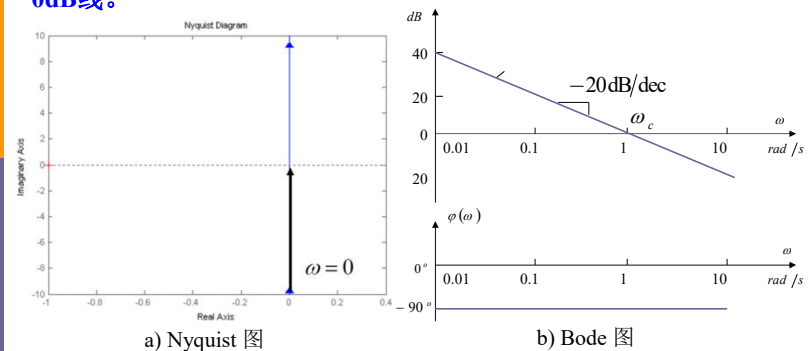
对数幅频特性 $L(\omega) = -20\lg \omega$

相频特性 $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

对数相频特性 $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

注：积分环节是低通滤波器，放大低频信号、抑制高频信号，输入频率越低，对信号的放大作用越强；并且有相位滞后作用，输出滞后输入的相位恒为 90°

频率每增加10倍，幅频特性下降20dB，故积分环节的对数幅频特性是一条斜率为-20dB/dec的斜线，并且在 $\omega=1$ 这一点穿过0dB线。



3. 微分环节 $G(s) = s$

频率特性函数 $G(j\omega) = \omega e^{j\frac{\pi}{2}}$

幅频特性 $A(\omega) = \omega$

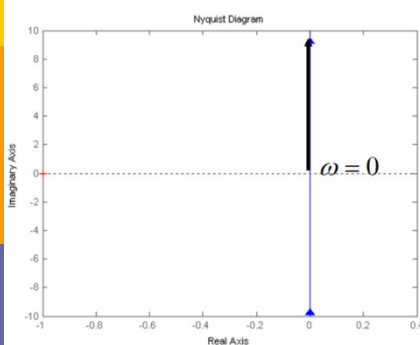
对数幅频特性 $L(\omega) = 20 \lg \omega$

相频特性 $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$

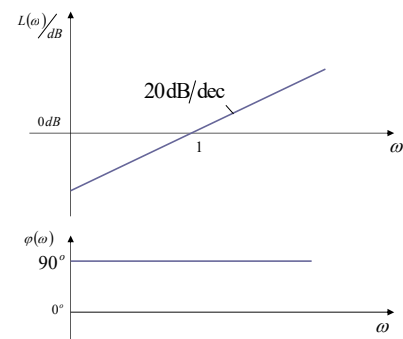
对数相频特性 $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$

注：积分环节与理想微分环节对数幅频特性，只相差正负号，二者以 ω 轴为基准，互为镜像；二者相频特性互以 ω 轴为镜像

理想微分环节是高通滤波器，输入频率越高，对信号的放大作用越强；并且有相位超前作用，输出超前输入的相位恒为 90° ，说明输出对输入有提前性、预见性作用



a) Nyquist 图



b) Bode 图

4. 惯性环节 $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$

频率特性函数 $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} e^{-j \arctan(\omega T)}$

幅频特性 $A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$

对数幅频特性 $L(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$

相频特性 $\varphi(\omega) = -\arctan \omega T$

对数相频特性 $\varphi(\omega) = -\arctan \omega T$

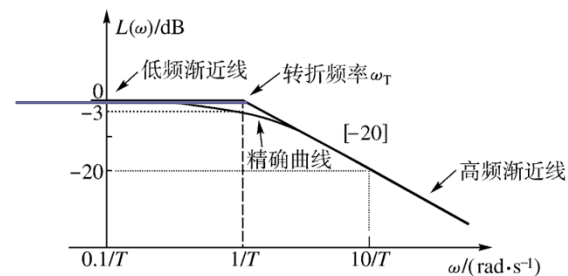
注：为简化对数频率特性曲线的绘制，常常使用渐近对数幅频特性曲线(特别是在初步设计阶段)

(1) 低频段

在 $T\omega \ll 1$ (或 $\omega \ll 1/T$)区段，近似 $T\omega \approx 0$ ，从而

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(T\omega)^2 + 1} \approx -20 \lg 1 = 0$$

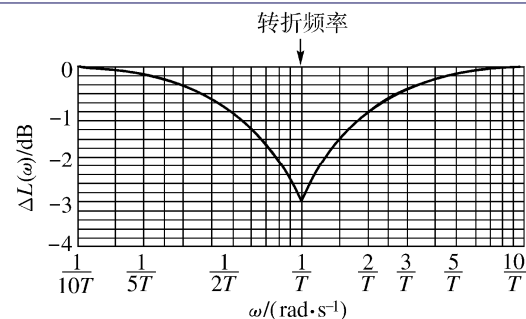
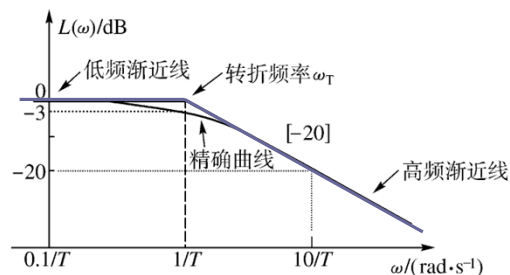
故在频率很低时，对数幅频特性近似用零分贝线表示，称为低频渐近线



(2) 高频段 在 $T\omega \gg 1$ (或 $\omega \gg 1/T$)区段, 可近似

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(T\omega)^2 + 1} \approx -20 \lg T\omega = -20 \lg T - 20 \lg \omega$$

$L(\omega)$ 为因变量, $\lg \omega$ 为自变量, 对数幅频特性曲线是一条斜线, 斜率为 -20dB/dec , 称为**高频渐近线**, 与低频渐近线的交点为 $\omega_T = 1/T$, ω_T 称为**转折频率**——绘制惯性环节的对数频率特性重要参数

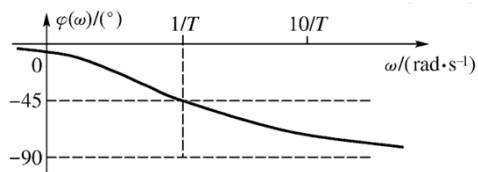


同时, 如需由渐近对数幅频特性曲线获取精确曲线, 只须分别在**低于或高于转折频率的一个十倍频程范围内**对渐近对数幅频特性曲线进行修正

(3) 对数相频特性

精确相频特性: $\varphi(\omega) = -\arctan(\omega T)$;

ω/T	0.1	0.25	0.4	0.5	1.0	2.0	2.5	4.0	10.0
相位($^\circ$)	-5.7	-14.1	-21.8	-26.6	-45	-63.4	-68.2	-75.9	-84.3



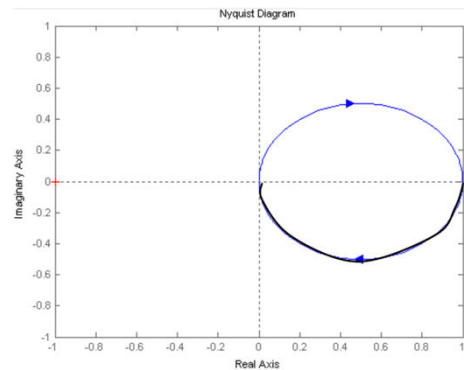
对数相频特性曲线对应于 $(\omega=1/T, \varphi(\omega)=-45^\circ)$ 点斜对称;
整个频率范围内, $\varphi(\omega)$ 呈滞后持续增加趋势, 极限为 -90°

当惯性环节时间常数 T 改变时, 其转折频率 $1/T$ 将在Bode图横轴上向左或向右移动。与此同时, **对数幅频特性及对数相频特性曲线也将随之向左或向右移动, 但形状保持不变**

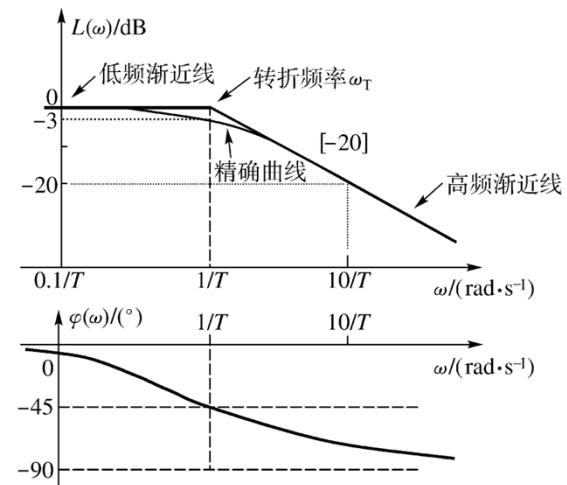
工程: 渐近线表示+修正

$$\begin{aligned} 1) \omega \ll \frac{1}{T} \quad L(\omega) &= -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \approx 0 \\ 2) \omega \gg \frac{1}{T} \quad L(\omega) &\approx -20 \lg \omega T \end{aligned}$$

低通, 相对 -45° 度具有奇对称性



a) Nyquist 图



b) Bode 图

5. 一阶微分环节 $G(s) = Ts + 1$

频率特性函数 $G(j\omega) = \sqrt{1 + \omega^2 T^2} e^{j \arctan(\omega T)}$

幅频特性 $A(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$

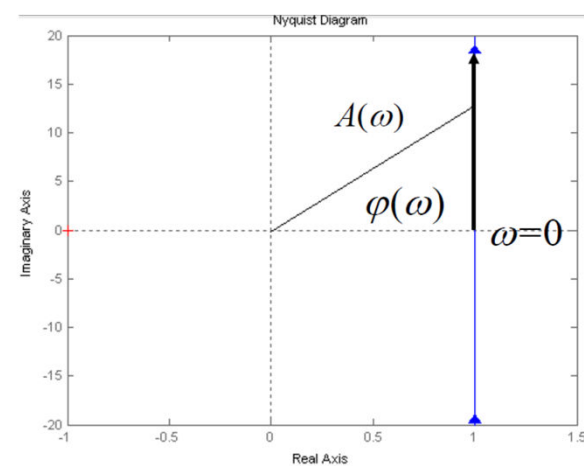
对数幅频特性 $L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$

相频特性 $\varphi(\omega) = \arctan \omega T$

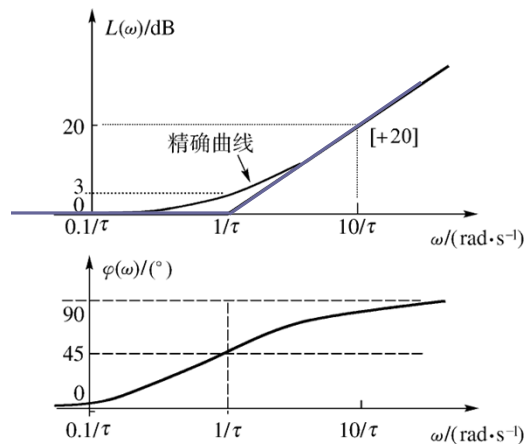
对数相频特性 $\varphi(\omega) = \arctan \omega T$

(1) 低频段: 在 $T\omega \ll 1$ (或 $\omega \ll 1/T$) 区段, 对数幅频特性近似用零分贝线表示, 为低频渐近线

(2) 高频段: 在 $T\omega \gg 1$ (或 $\omega \gg 1/T$) 区段, 高频渐近线近似为一条斜线, 斜率为 20dB/dec , 当频率变化10倍频, $L(\omega)$ 变化 20dB 。转折频率为 $\omega_T = 1/T$



a) Nyquist 图



b) Bode 图

一阶微分环节的对数幅频特性和相频特性与惯性环节的相应特性互以横轴为镜像。精确曲线修正方法也与惯性环节相同。注意修正值符号相反。如转折频率处 ω_T 对应的精确值：

$$L(\omega_T) = 0 + 3 = 3 \text{ dB}$$

一阶微分环节具有放大高频信号作用，输入频率 ω 越大，放大倍数越大；且输出超前于输入，相位超前范围为 $0^\circ \rightarrow 90^\circ$ ，输出对输入有提前性、预见性作用

一阶微分环节的典型实例是控制工程中常用的比例微分控制器(PD控制器)，PD控制器常用改善二阶系统的动态性能，但存在放大高频干扰信号的问题

6. 二阶振荡环节 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s^2/\omega_n^2 + 2\zeta s/\omega_n + 1}$, $0 \leq \zeta \leq 1$

频率特性函数 $G(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_n^2 + j2\zeta\omega/\omega_n}$

幅频特性 $A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}}$

相频特性 $\varphi(\omega) = -\arctan[(2\zeta\omega/\omega_n)/(1 - \omega^2/\omega_n^2)]$

(1) 对数幅频特性：

➤ 低频段 $\omega/\omega_n \ll 1$ (或 $\omega \ll \omega_n$) 时, $L(\omega) \approx 20\lg 1 = 0 \text{ dB}$, 低频渐近线与 0dB 线重合

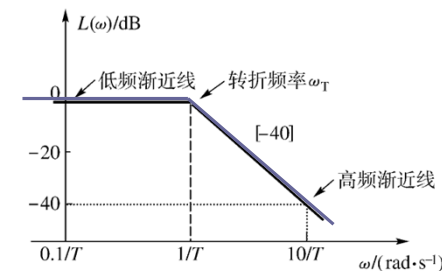
$$L(\omega) = -20\lg \sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}$$

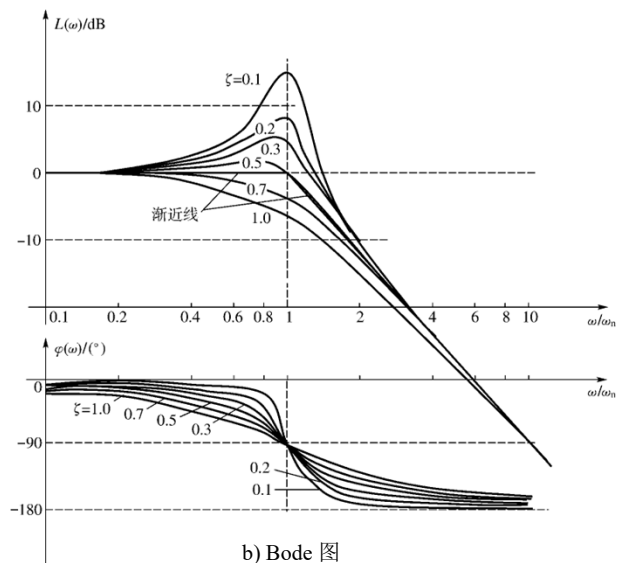
➤ 高频段

$\omega/\omega_n \gg 1$ (或 $\omega \gg \omega_n$) 时, 并考虑到 ($0 \leq \zeta \leq 1$), 有 $L(\omega) \approx -20\lg(\omega/\omega_n)^2 = -40\lg(\omega/\omega_n) = 40\lg\omega_n - 40\lg\omega \text{ dB}$

高频段是斜率 -40dB/dec 的斜线——高频渐近线

$\omega_T = \omega_n$ 为低频渐近线与高频渐近线交点处的横坐标, 称为转折频率, 也就是环节的无阻尼自然振荡频率 ω_n





$\zeta < 0.4$, 渐近线需要加尖峰修正。随 ζ 减小, 谐振峰值 M_r 增大, 谐振频率 ω_r 也越接近振荡环节的无阻尼自然振荡频率 ω_n 。谐振峰值 M_r 越大, 表明系统阻尼比 ζ 越小, 系统相对稳定性越差, 单位阶跃响应最大超调量 $\sigma\%$ 也越大

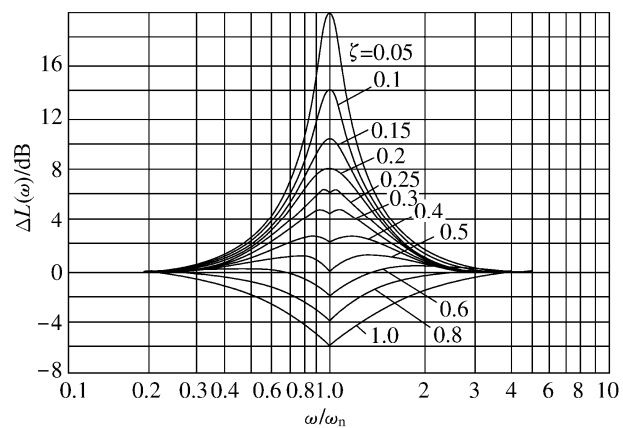
注:

$$\zeta = 0.707, \omega_r = 0, M_r = 1, \varphi(\omega_r) = 0^\circ$$

$\zeta > 0.707$ 不存在谐振峰值

$0 < \zeta < 0.707$ 存在谐振峰值

$\zeta = 0, \omega_r \approx \omega_n, M_r \approx \infty, \varphi(\omega_r) = -90^\circ$, 等幅振荡状态



(2) 相频特性 $\varphi(\omega) = -\arctan[(2\zeta\omega / \omega_n) / (1 - \omega^2 / \omega_n^2)]$

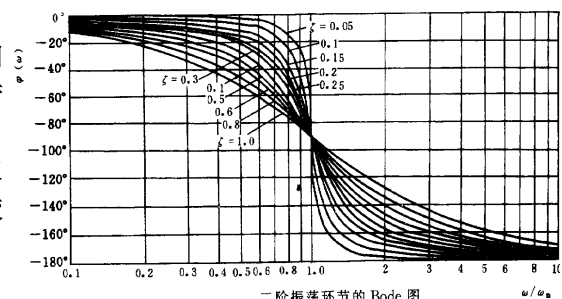
当 $\omega=0$ 时, $\varphi(\omega)=0$

$\omega=1/T$ 时, $\varphi(\omega)=-90^\circ$

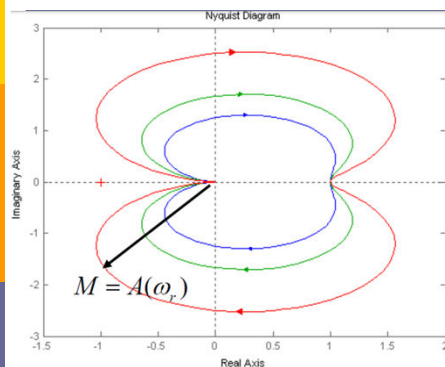
$\omega \rightarrow \infty$ 时, $\varphi(\omega) \rightarrow -180^\circ$

与惯性环节相似, 振荡环节对数相频特性曲线对应 $\omega=1/T$ 及 $\varphi(\omega)=-90^\circ$ 点斜对称

注: 振荡环节具有相位滞后作用, 输出滞后于输入范围:
 $0^\circ \rightarrow -180^\circ$; 同时 ζ 取值对曲线形状影响较大。



二阶振荡环节的 Bode 图
(b) 相频特性



a) Nyquist 图

1. If $\omega=0$, $A(0)=1$, $\varphi(0)=0^\circ$
2. If $\omega=\omega_n$, $A(\omega_n)=1/2\zeta$, $\varphi(\omega_n)=-90^\circ$
3. If $\omega\rightarrow\infty$, $A(\infty)=0$, $\varphi(\infty)=-180^\circ$
4. 由 $\frac{dA(\omega)}{d\omega} = 0$

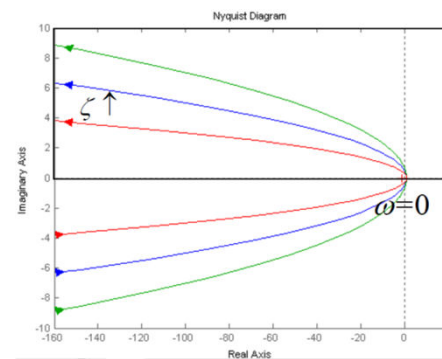
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \text{ : 谐振频率}$$

$$M = A(\omega_r) = 1 / (2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}) \text{ : 谐振峰值}$$

$$\zeta = 0.707 \text{ 最佳阻尼系数}$$

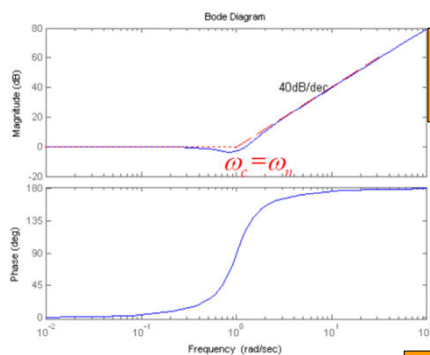
7. 二阶微分环节 $G(s) = s^2 / \omega_n^2 + 2\zeta s / \omega_n + 1$, $0 \leq \zeta \leq 1$

频率特性函数 $G(j\omega) = 1 - \omega^2 / \omega_n^2 + j2\zeta\omega / \omega_n$



a) Nyquist 图

7. 二阶微分环节 $G(s) = s^2 / \omega_n^2 + 2\zeta s / \omega_n + 1$, $0 \leq \zeta \leq 1$



b) Bode 图

幅频特性

$$A(\omega) = \sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega / \omega_n)^2}$$

相频特性

$$\varphi(\omega) = \arctan[(2\zeta\omega / \omega_n) / (1 - \omega^2 / \omega_n^2)]$$

8. 延时环节 $G(s) = e^{-\tau s}$

系统*延时环节
将原系统奈氏图的每点顺时针旋转 $\omega\tau$

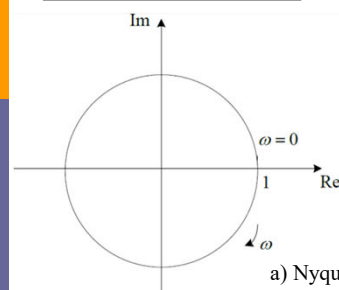
频率特性函数 $G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$

幅频特性 $A(\omega) = 1$

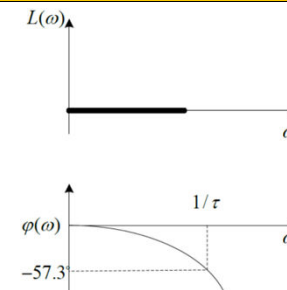
相频特性 $\varphi(\omega) = -\omega\tau$

对数幅频特性 $L(\omega) = 0$

对数相频特性 $\varphi(\omega) = -\omega\tau$



a) Nyquist 图



b) Bode 图

2.6.7 系统开环频率特性图绘制

绘制Nyquist图的坐标系是极坐标与直角坐标系的重合。取极点为直角坐标原点，极坐标轴为直角坐标实轴

由于系统的频率特性表达式为

$$G(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

对于某一特定频率 ω_i 下 $G(j\omega_i)$ 总可以用复平面上一个向量与之对应，该向量长度： $A(\omega_i)$ ，与正实轴夹角： $\varphi(\omega_i)$

2.6.7 系统开环频率特性图绘制

系统开环传递函数

$$G(s) = G_0(s)G_1(s) \cdots G_n(s)$$

其频率特性函数

$$G(j\omega) = G_0(j\omega)G_1(j\omega) \cdots G_n(j\omega)$$

幅频特性

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = |G_0(j\omega)| |G_1(j\omega)| \cdots |G_n(j\omega)|$$

相频特性

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \cdots + \varphi_n(\omega)$$

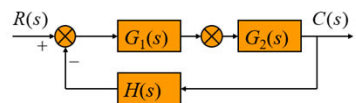
1. 开环Nyquist图绘制

(1) 定义：

频率特性：由反馈点是否断开分为闭环频率特性 $\Phi(j\omega)$ 与开环频率特性 $G_k(j\omega)$ ，分别对应于系统闭环传递函数 $\Phi(s)$ 与开环传递函数 $G_k(s)$ 。由于系统开环传递函数较易获取，并与系统元件一一对应，在控制系统频率分析法中，分析与设计系统一般是基于系统开环频率特性

Nyquist图用途：

判断系统的稳定性(绕 $[-1, j0]$ 点的圈数)，只需画出大致走向



$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \rightarrow \text{开环传函}$$

对于一般的线性定常系统，其频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0} = \frac{K(j\omega\tau_1 + 1)(j\omega\tau_2 + 1) \cdots (j\omega\tau_m + 1)}{(j\omega)^v(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1) \cdots (j\omega T_{n-v} + 1)}$$

时间常数形式

v ：开环传递函数积分环节的个数

$v=0$ ：0型系统；

$v=1$ ：I型系统；

$v=2$ ：II型系统；

$v>2$ ：不常见

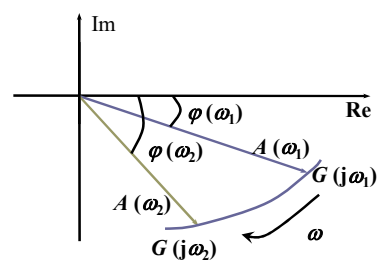
由多个典型环节组合而成的系统(延迟环节除外), 其频率特性满足下面的规律(重要)

$$G(j\omega) = \prod_{i=1}^n G_i(j\omega)$$

$$G_k(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^v} \times \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (j\omega\tau_i + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (-\tau_k^2\omega^2 + 2j\omega\zeta_k\tau_k + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (j\omega T_j + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (-T_l^2\omega^2 + 2j\omega\zeta_l T_l + 1)}$$

注: 系统的幅频特性与实频特性是 ω 的偶函数, 而相频特性与虚频特性是 ω 的奇函数, 即 $G(j\omega)$ 与 $G(-j\omega)$ 互为共轭。因此, 假定 ω 可为负数, 当 ω 在 $-\infty \rightarrow 0$ 的范围内连续变化时, 相应的奈氏图曲线 $G(j\omega)$ 必然与 $G(-j\omega)$ 对称于实轴。 ω 取负数虽然没有实际的物理意义, 但是具有鲜明的数学意义, 主要用于控制系统的奈氏稳定判别

由于幅值 $A(\omega)$ 和相位 $\varphi(\omega)$ 是频率 ω 的函数, 当 ω 在 $0 \rightarrow \infty$ 范围内连续变化时, 向量幅值与相角均随之连续变化, 不同 ω 下向量的端点在复平面上扫过的轨迹即为该系统的幅相频率特性曲线(Nyquist曲线)



极坐标图的表示方法

注: 绘制Nyquist图时, 把 ω 作为参变量, 并用箭头表示频率增大时曲线的变化轨迹, 表示该系统频率特性的变化规律

当系统或元件的传递函数已知时, 采用解析的方法先求取系统频率特性, 再求出系统幅频特性、相频特性或者实频特性、虚频特性的表达式, 然后逐点计算出Nyquist曲线:

- 用 $j\omega$ 代替 s , 求出频率特性 $G(j\omega)$;
- 求出幅频特性 $A(\omega)$ 与相频特性 $\varphi(\omega)$ 的表达式, 也可求出实频特性与虚频特性, 帮助判断 $G(j\omega)$ 所在的象限;
- 在 $0 \rightarrow \infty$ 的范围内选取不同 ω , 根据 $A(\omega)$ 与 $\varphi(\omega)$ 表达式计算出对应值, 在坐标图上描出对应的向量 $G(j\omega)$, 将所有 $G(j\omega)$ 的端点连接描出光滑的曲线即可得所求的奈氏曲线。

也可以用实验的方法求取

(2) 开环奈氏图基本绘制规律

控制系统由典型环节组成，则系统频率特性的绘制与典型环节频率特性的绘制方法基本相同。可根据复变函数的性质求出系统开环频率特性的幅频特性 $A(\omega)$ 与相频特性 $\varphi(\omega)$ 表达式，或由分母有理化求出实频特性与虚频特性，再由奈氏图的基本绘制方法求出系统的开环奈氏图。

具体地，先根据开环传递函数某些特征绘制出近似曲线，再利用 $A(\omega)$ 与 $\varphi(\omega)$ 等表达式描点，在曲线的重要部分修正。

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega\tau_1 + 1)(j\omega\tau_2 + 1) \cdots (j\omega\tau_m + 1)}{(j\omega)^v(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1) \cdots (j\omega T_{n-v} + 1)}$$

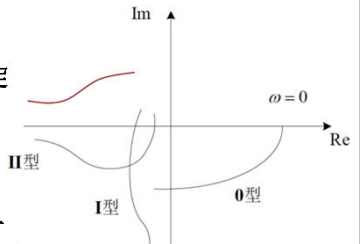
1) 低频段 ($\omega \rightarrow 0$)

$$G(j\omega) \approx \frac{K}{(j\omega)^v} = \frac{K}{(\omega)^v} e^{jv \times (-\frac{\pi}{2})}$$

结论1: 型别粗略决定出发

结论2: 比较精确出发点由时间常数决定

$$G(j\omega) \approx \frac{K}{(j\omega)^v} \frac{j\omega\tau + 1}{j\omega T + 1}$$



If $v=2, T > \tau$, 出发点位于负实轴的上方

If $v=2, T < \tau$, 出发点位于负实轴的下方

$$A(\omega) = |G_k(\omega)| = \frac{K}{\omega^v} \quad \varphi(\omega) = -v \cdot 90^\circ$$

可见低频段的形状（幅值与相位）

均与系统的型别 v 与开环传递系数 K 有关

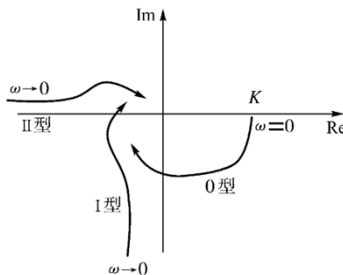
➤ 0型系统, $v=0$: $A(0)=K$, $\varphi(0)=0^\circ$

低频特性为实轴上的一点($K, 0$)

➤ I型系统, $v=1$: $A(0)=\infty$, $\varphi(0)=-90^\circ$

➤ II型系统, $v=2$: $A(0)=\infty$, $\varphi(0)=-180^\circ$

➤ III型系统, $v=3$: $A(0)=\infty$, $\varphi(0)=-270^\circ$



$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega\tau_1 + 1)(j\omega\tau_2 + 1) \cdots (j\omega\tau_m + 1)}{(j\omega)^v(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1) \cdots (j\omega T_{n-v} + 1)}$$

2) 高频段 ($\omega \rightarrow \infty$)

$$G(j\omega) \approx \frac{K\tau_1\tau_2 \cdots \tau_m}{T_1T_2 \cdots T_n \omega^{n-m}} e^{j(n-m) \times (-\frac{\pi}{2})}$$

结论1: $n > m$, $A(\infty)=0$, $\varphi(\infty)=-(n-m) \times 90^\circ$

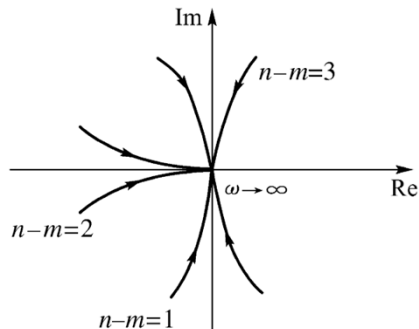
曲线终止于原点, 相角 $-(n-m) \times 90^\circ$

结论2: 当 $n=m$, 曲线终止于实轴有限点 $G(j\infty) = \frac{K\tau_1\tau_2 \cdots \tau_m}{T_1T_2 \cdots T_n}$

与负实轴的交点

通过 $\text{Im}(G(j\omega))=0$ or $\angle G(j\omega)=-(2n+1)\pi$ 求得

- ① $n-m=1$, 则 $\varphi(\infty)=-90^\circ$, 即幅相特性沿负虚轴进入坐标原点
- ② $n-m=2$, 则 $\varphi(\infty)=-180^\circ$, 即幅相特性沿负实轴进入坐标原点
- ③ $n-m=3$, 则 $\varphi(\infty)=-270^\circ$, 即幅相特性沿正虚轴进入坐标原点



3) Nyquist图与实轴、虚轴交点

将频率特性表达式按照分母有理化方法分解为实部与虚部。

- 曲线与实轴的交点处的频率由虚部为0求出

$$\text{Im}[G(j\omega)] = I(\omega) = 0$$

求出交点处 ω , 再代回频率特性表达式求出交点坐标

- 曲线与虚轴的交点处的频率由实部为0求出

$$\text{Re}[G(j\omega)] = R(\omega) = 0$$

求出交点处 ω , 再代回频率特性表达式求出交点坐标

4) 开环零点对曲线的影响

- 如果系统的开环传递函数**没有开环零点**, 则在 ω 由0增大到 ∞ 过程中, 特性的**相位单调连续减小** (滞后连续增加), **特性曲线平滑地变化**。奈氏曲线应该是从低频段开始幅值逐渐减小, 沿顺时针方向连续变化最后终于原点
- 如果系统的开环传递函数**有开环零点**, 则在 ω 由0增大到 ∞ 过程中, 特性的**相位不再是连续减小**。取决于开环零点的时间常数数值不同, 特性曲线的相位可能在某一频段范围内呈增加趋势。此时, 特性曲线出现凹部

在 $0 < \omega < \infty$ 区段, Nyquist曲线形状与所有典型环节及其参数有关, 但通过Nyquist曲线并不能直观显示出系统开环传递函数结构与参数

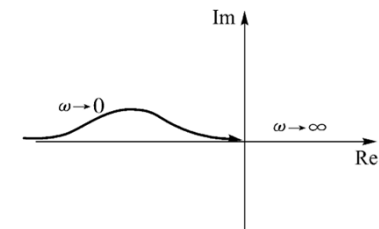
具有开环零点的系统, 开环频率特性: $G(j\omega) = \frac{K(j\omega T_2 + 1)}{(j\omega)^2(j\omega T_1 + 1)}$

$$\varphi(\omega) = -180^\circ - \arctan T_1 \omega + \arctan T_2 \omega \quad T_2 < T_1$$

II型系统

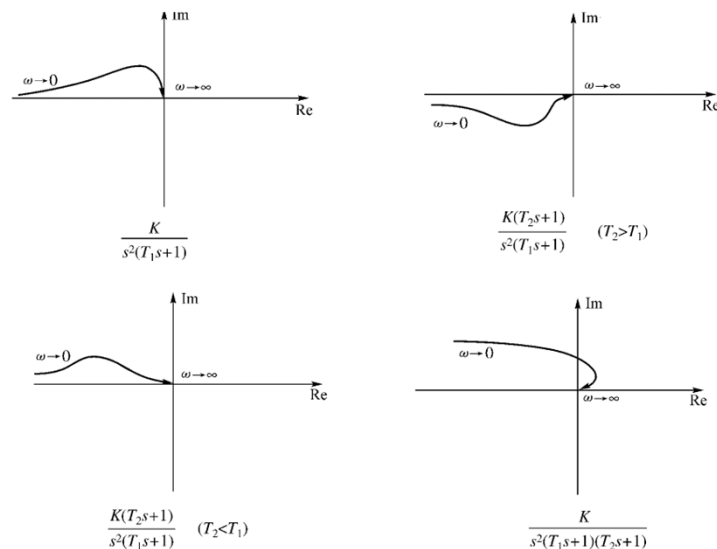
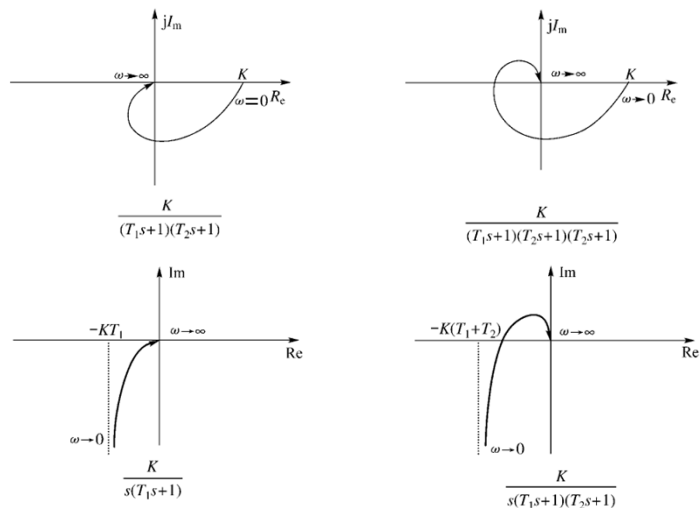
当 $\omega \rightarrow 0$ 时, 幅值 $A(\infty) \rightarrow \infty$, 而相角位移 -180° , 即奈氏图起点负实轴上半部;

当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $A(\infty) = 0$, $\varphi(\infty) = -(n-m) \times 90^\circ = -180^\circ$, 奈氏图沿负实轴终止于原点



增加开环零点: 奈氏曲线从低频段到高频段变化时, 相位先滞后后增加, 达到一个滞后最大值, 相位滞后又开始减小(即相位增加), 整条曲线出现凹凸

常见系统的开环传递函数与开环概略奈氏图



2. 开环Bode图绘制

系统开环传递函数

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)\cdots G_n(s)$$

对数幅频特性

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg |G_1(s)| + \cdots + 20 \lg |G_n(s)|$$

对数相频特性

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \cdots + \varphi_n(\omega)$$

绘制原则：幅值相加，相角相加

例2.19 设系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{Ts + 1}, \quad \tau < T$$

试画出开环系统的大致对数频率特性图

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg |G_1(s)| + \cdots + 20 \lg |G_n(s)|$$

开环系统由下列三个典型环节组成

$$G_1(s) = K \quad G_2(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad G_3(s) = \tau s + 1$$

渐近线表示叠加 $L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega)$

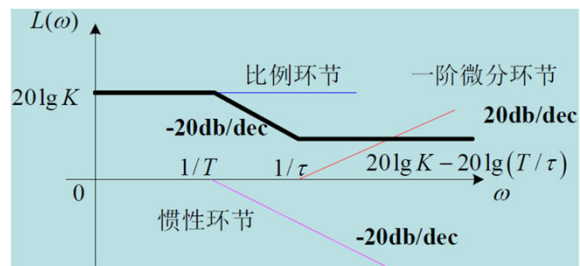
$$= 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega T)^2} + 20 \lg \sqrt{1 + (\omega \tau)^2}$$

相角叠加 $\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega)$

$$= 0^\circ - \arctan \omega T + \arctan \omega \tau$$

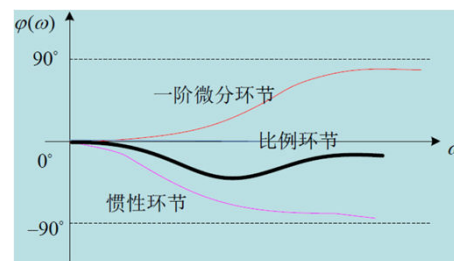
例2.19

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega T)^2} + 20 \lg \sqrt{1 + (\omega \tau)^2}$$



例2.19

$$\varphi(\omega) = 0^\circ - \arctan \omega T + \arctan \omega \tau$$



例2.20 开环传递函数

$$G(s) = \frac{s + 2}{s(s + 0.5)[(0.125s)^2 + 0.05s + 1]}$$

试画出开环系统的大致对数频率特性图

➤ 时间常数形式

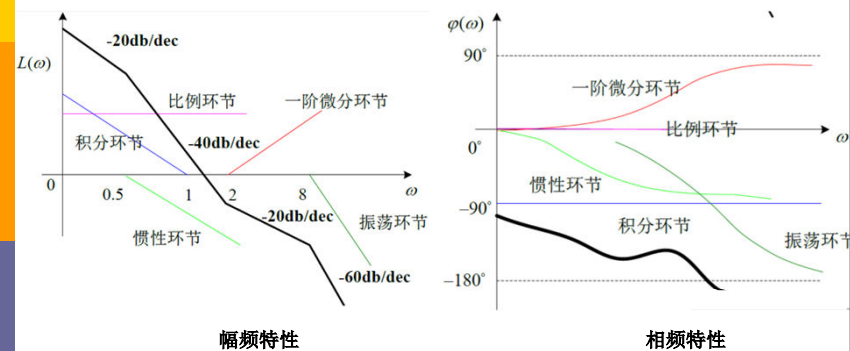
$$G(s) = \frac{4(0.5s + 1)}{s(2s + 1)(s^2 / 64 + 0.4s / 8 + 1)}$$

➤ 包含典型环节

$$G_1(s) = 4 \quad G_2(s) = \frac{1}{s} \quad G_3(s) = \frac{1}{2s + 1}$$

$$G_4(s) = 0.5s + 1 \quad G_5(s) = \frac{1}{s^2 / 64 + 0.4s / 8 + 1}$$

例2.20



Bode图绘制总结:

- (1) 系统开环幅频特性的渐近线由各典型环节的对数幅频特性叠加而成，而直线叠加就是斜率相加，所以 $L(\omega)$ 的渐近线必为由不同斜率线段组成的折线；
- (2) 低频段：当 $\omega \rightarrow 0$ 时，对数幅频特性与相频特性均与积分环节的个数 v 有关：即 $-20v\text{dB/dec}$ ；低频渐近线（及其延长线）在 $\omega=1$ 时，有 $L(1)=20\lg K$ 。相频： $\varphi(\omega)=-v*90^\circ$ ；

$$G_k(j\omega)\text{低频段表达式为 } G_k(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^v}$$

$$\text{幅频: } A(\omega) = |G_k(\omega)| = \frac{K}{\omega^v} \quad L(\omega) = 20\lg \frac{K}{\omega^v} = 20\lg K - 20v * \lg \omega$$

$$\text{相频: } \varphi(\omega) = -v * 90^\circ$$

Bode图绘制总结:

(3) 转折频率及转折后斜率变化量的确定

$$\text{惯性环节 } G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad \text{转折频率 } 1/T \text{ 处, 斜率 } -20\text{dB/dec}$$

$$\text{一阶微分环节 } G(s) = (\tau s + 1) \quad \text{转折频率 } 1/\tau \text{ 处, 斜率 } +20\text{dB/dec}$$

$$\text{振荡环节 } G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} \quad \text{转折频率 } 1/T \text{ 处, 斜率 } -40\text{dB/dec}$$

(4) 最终斜率与最终相位滞后与 $n-m$ 的关系

$$G_k(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^v} \times \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (j\omega\tau_i + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (-\tau_k^2 \omega^2 + 2j\omega\zeta_k \tau_k + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (j\omega T_j + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (-T_l^2 \omega^2 + 2j\omega\zeta_l T_l + 1)}$$

Bode图绘制总结:

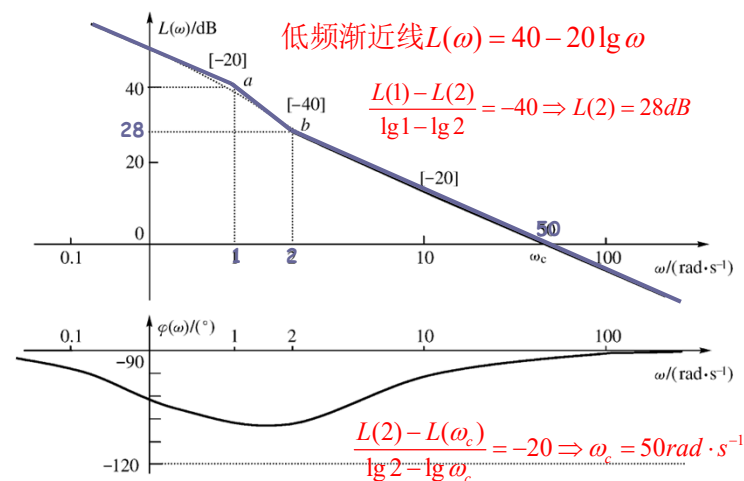
当 $\omega \rightarrow \infty$ 时，由于 $n > m$ ，所以高频段的近似表达式为

$$G_k(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K'}{(j\omega)^{n-m}} \quad K' = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i)}{\prod_{j=1}^{n-m} (T_j)}$$

$$\text{幅频: } A(\omega) = \frac{K'}{\omega^{n-m}} \quad L(\omega) = 20\lg \frac{K'}{\omega^{n-m}} = 20\lg K' - 20(n-m)\lg \omega$$

$$\text{相频: } \varphi(\omega) = -(n-m) * 90^\circ$$

高频段为一条斜率为 $-20(n-m)\text{dB/dec}$ 的斜线：高频段的对数幅频特性与相频特性均与 $(n-m)$ 有关



3. 最小相位系统

定义：系统开环传函在右半 s 平面上没有零点和极点

例：延时环节（非最小相位系统）

$$e^{-\tau s} = 1 - \tau s + \frac{1}{2!}(\tau s)^2 - \frac{1}{3!}(\tau s)^3 + \dots$$

$s = \infty + j\infty$ 为开环无限零点，无穷个，位于右半平面

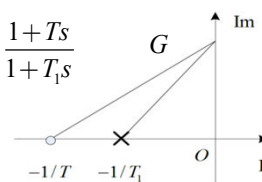
$s = -\infty + j\infty$ 为开环无限极点，无穷个，位于左半平面

最小相位系统??

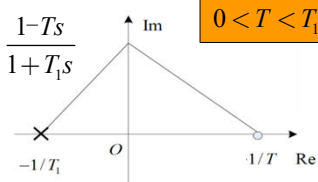
如果两个开环稳定系统有相同幅频特性，对任意 $\omega \geq 0$ ，最小相位系统的相位滞后总小于非最小相位系统

3. 最小相位系统

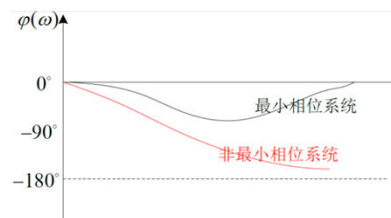
$$G_1(s) = \frac{1+Ts}{1+T_1s}$$



$$G_2(s) = \frac{1-Ts}{1+T_1s}$$

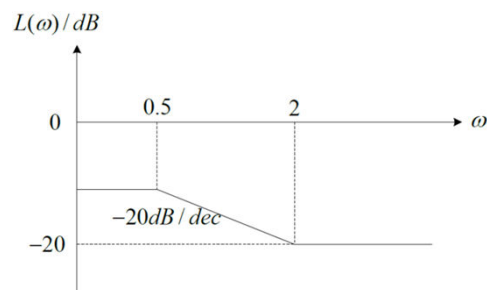


$$0 < T < T_1$$

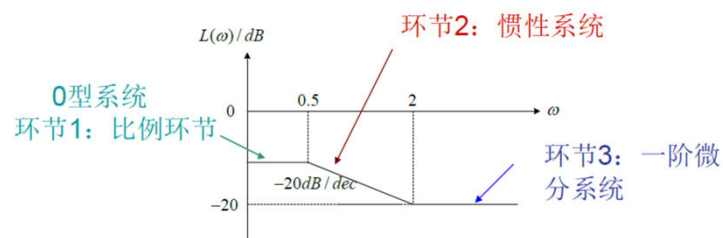


最小相位系统的对数幅频特性与对数相频特性一一对应关系：
若已知为最小相位，则根据幅频曲线可惟一确定传函（相频）

例2.21 某最小相位系统的渐近对数幅频特性，试写出系统传递函数



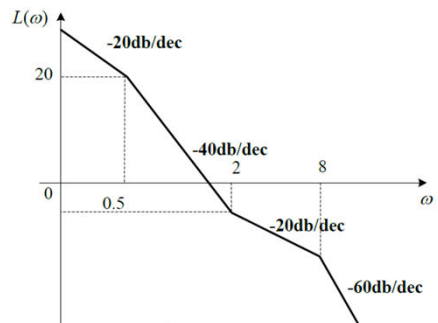
例2.21 某最小相位系统的渐近对数幅频特性，写出系统传递函数



$$G(s) = \frac{K(0.5s+1)}{2s+1}$$

$$20 \lg K - 20 \lg 2\omega \Big|_{\omega=2} + 20 \lg 0.5\omega \Big|_{\omega=2} = -20 \Rightarrow K = 0.4$$

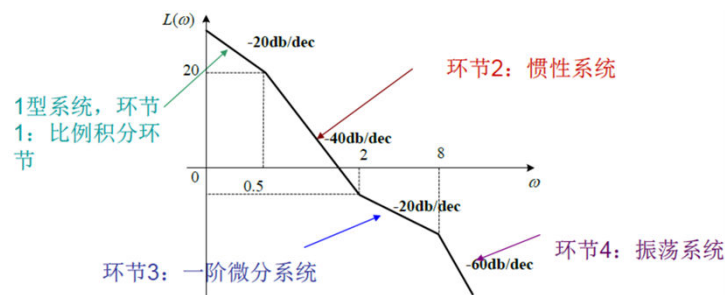
思考题：设某最小相位系统的渐近对数幅频特性如图，写出系统传递函数，其中谐振频率为 $\omega_r = 8\sqrt{1-0.02}$



$$G(s) = \frac{K(0.5s+1)}{s(2s+1)(s^2/64+2\zeta s/8+1)}$$

$$20\lg K - 20\lg 0.5\omega = 20 \Rightarrow K = 5 \quad \omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} \Rightarrow \zeta = 0.1$$

思考题：设某最小相位系统的渐近对数幅频特性如图，写出系统传递函数，其中谐振频率为 $\omega_r = 8\sqrt{1-0.02}$



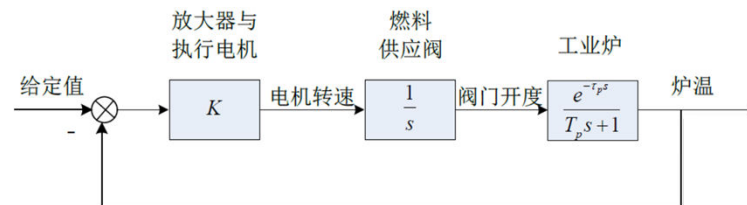
$$G(s) = \frac{K(0.5s+1)}{s(2s+1)(s^2/64+2\zeta s/8+1)}$$

$$20\lg K - 20\lg 0.5\omega = 20 \Rightarrow K = 5 \quad \omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} \Rightarrow \zeta = 0.1$$

2.6 采样控制系统的数学描述

2.6.1 采样控制系统

采样控制出现的原因



K 较大

K 较小

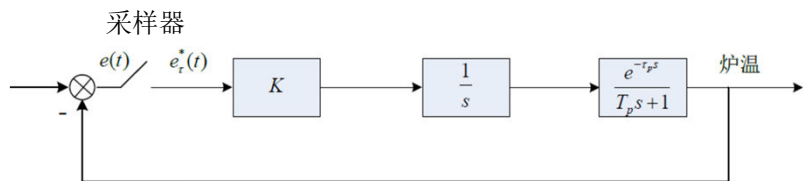
延时+大惯性环节的系统

调节过度

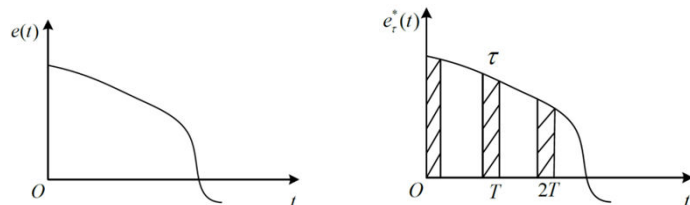
调节误差大
调节时间长

2.6.1 采样控制系统

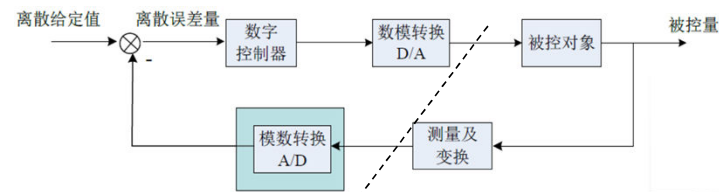
系统包含时间的离散函数的信号



采样器每隔 T 秒接通一次，每次接通时间为 τ

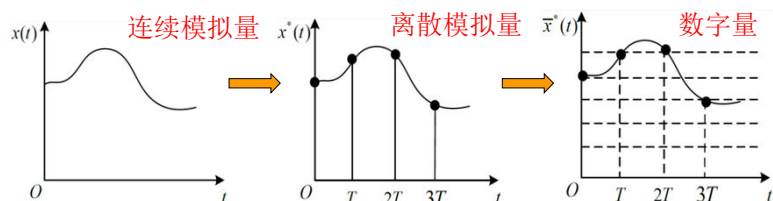


采样控制系统典型框图

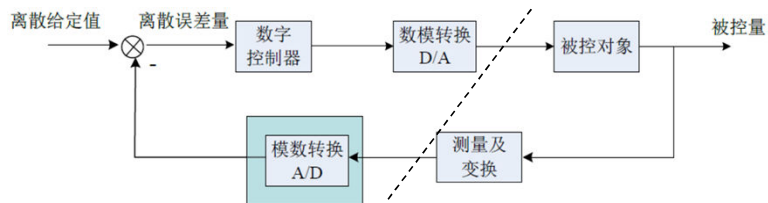


A/D转换器(Analog/Digital Converter): 采样器每 T 秒通一次，时间 τ

○采样过程 + ○量化(编码)过程

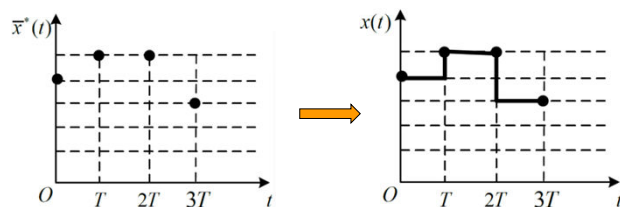


采样控制系统典型框图



D/A转换器(Digital/ Analog Converter): 采样器每 T 秒通一次，时间 τ

○解码过程 + ○复现过程



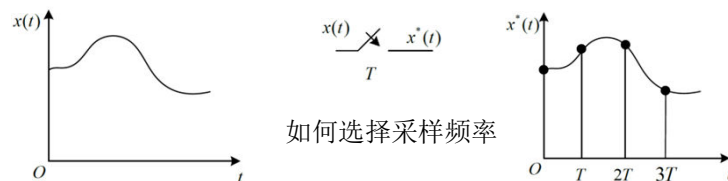
2.6.2 信号采样与恢复

关键：信息传递过程中，
系统信号特征是否保持？

1. 采样器

连续信号→离散信号的装置

采样频率高，信号丢失小
采样频率低，信号丢失大



如何选择采样频率

脉冲序列 $x^*(t) = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t-T) + x(2T)\delta(t-2T) + \dots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

$$= x(t)\delta_T(t) \quad \text{where } \delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_x(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{频谱} \quad \text{反傅里叶变换}$$

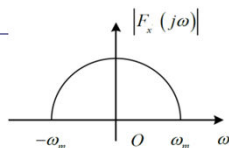
$$F_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{傅里叶变换}$$

$$\begin{aligned} F_{x^*}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta_T(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \quad \longrightarrow \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T} \text{ 采样角频率}$$

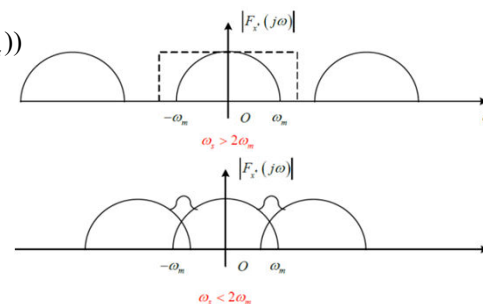
$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T}$$



傅里叶变换物理意义：连续信号可以看成不同频率正弦信号叠加

$$\begin{aligned} F_{x^*}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{-jn\omega_s t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jn\omega_s t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_x(j(\omega - n\omega_s)) \end{aligned}$$

$x^*(t)$ 的频谱 = $x(t)$ 的频谱
经过无穷次平移叠加



香农(Shannon)

采样定理

2. 保持器 离散→连续信号的滤波器装置

零阶保持器(Zero-Order-Holder, ZOH), 其脉冲响应函数为

$$g_h(t) = 1(t) - 1(t - T)$$

时域表达式 $e_h(t) = e(kT), \quad kT \leq t < (k+1)T$

$$\text{传递函数 } G_h(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-Ts} = \frac{1}{s} (1 - e^{-Ts})$$

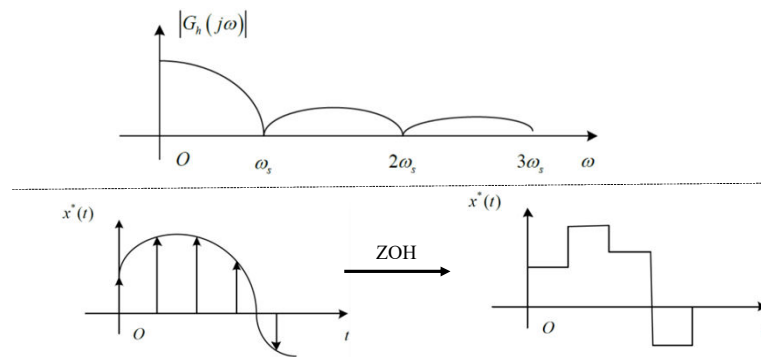
频率特性

$$G_h(j\omega) = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T}) = e^{-j\omega T/2} \frac{(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{j\omega} = T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\omega T/2}$$

零阶保持器(ZOH)

零阶保持器相当于一个近似带宽为 ω_s 的低通滤波器

截取原信号的频谱

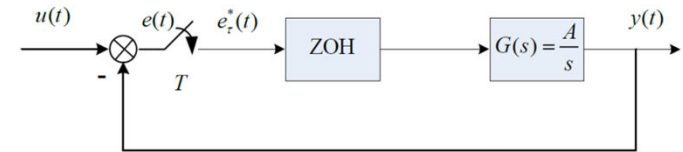


一阶保持器

$$e_h(t) = e(kT) + \frac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T}(t - kT), \quad kT \leq t < (k+1)T$$

高阶保持器

2.6.3 采样系统的差分方程描述



每个周期内系统输出

$$y(t) = y(kT) + Ae(kT)(t - kT), \quad kT \leq t \leq (k+1)T$$



$$y(T) = (1 - AT)y(0) + ATu(0)$$

$$y(2T) = (1 - AT)y(T) + ATu(T)$$

$$= (1 - AT)[(1 - AT)y(0) + ATu(0)] + ATu(T)$$

$$= (1 - AT)^2 y(0) + (1 - AT)ATu(0) + ATu(T)$$

⋮

迭代法 ↓

$$y(kT) = (1 - AT)^k y(0) + AT \sum_{i=0}^{k-1} (1 - AT)^{k-1-i} u(iT)$$

0输入响应 0状态响应

采样瞬时值

$$y[(k+1)T] = y(kT) + Ae(kT)((k+1)T - kT) = y(kT) + ATe(kT)$$

$$= y(kT) + AT[u(kT) - y(kT)] = (1 - AT)y(kT) + ATu(kT)$$

输入-输出差分方程

一般采样系统差分方程描述

向前差分方程 $y(k)$ 及之后值与 u 的关系, **预测模型**

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_n y(k)$$

$$= b_0 u(k+n) + b_1 u(k+n-1) + \cdots + b_m u(k+n-m)$$

向后差分方程 $y(k)$ 及之前值与 u 的关系

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n)$$

$$= b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_m u(k-m)$$

对于高阶采样控制系统, 上述直接建模法有时相当不便,

基于Z变换的脉冲传函法

Z 变换

1. Z变换(单边)

$$\begin{aligned}
 x^*(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT) \\
 X^*(s) &= L[x^*(t)] = L\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)\right] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \int_0^{\infty} \delta(t-kT)e^{-st} dt \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT} \quad \boxed{z = e^{sT}} \\
 X(z) &= Z[x^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}
 \end{aligned}$$

Z 变换

$$x(k) = \begin{cases} \dots, 0, 1, a, a^2, \dots \end{cases} = \begin{cases} a^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 X(z) &= Z[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \\
 &= \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|
 \end{aligned}$$

- Z变换时暂不考虑收敛区域的问题
- 表述时看成Z变换作用于连续信号:

$$X(z) = Z(x(k)) = Z(x(t))$$

Z 变换

$$x(t) = 1(t) \quad X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{z}{z-1}$$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= t \quad (t \geq 0) \\
 X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \\
 &= T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots + kz^{-k} + \dots) \\
 &= -Tz \left[\frac{d(z^{-1} + z^{-2} + \dots + kz^{-k} + \dots)}{dz} \right] \\
 &= -Tz \frac{d\left(\frac{z}{z-1} - 1\right)}{dz} = \frac{Tz}{(z-1)^2}
 \end{aligned}$$

Z 变换

$$x(t) = e^{-at} \quad (t \geq 0)$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-aT}}$$

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad x(t) = L^{-1}[X(s)] = 1(t) - e^{-t}$$

$$\begin{aligned}
 X(z) &= Z[1(t)] - Z[e^{-t}] = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \int_0^{\infty} \delta(t-kT)e^{-st} dt \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT}
 \end{aligned}$$

Z 变换

2. Z变换的性质

(1) 线性性质

$$Z[ax_1(t) + bx_2(t)] = Z[ax_1(t)] + Z[bx_2(t)] = aX_1(z) + bX_2(z)$$

(2) 正负位移定理 $Z(x(k+n)) = z^n X(z) - \sum_{i=0}^{n-1} z^{n-i} x(i)$

$$Z(x(k-n)) = z^{-n} X(z) + \sum_{i=0}^{n-1} z^{-i} x(i-n)$$

(3) 初值定理 $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

(4) 终值定理 $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$

(若终值存在)

2. Z变换的性质

(5) 卷积性质 $\sum_{m=0}^k x(k-m)u(m) \rightarrow X(z)U(z)$

(6) 乘以 k^n $k^n x(k) \rightarrow \left(-z \frac{d}{dz}\right)^n x(z)$

(7) 乘以 α^k $X(a^{-1}z)$

3. Z反变换

(1) 长除法

(2) 部分分式展开法

(3) 反演积分法/留数法

(1) 长除法

$$X(z) = \frac{10z}{z^2 - 5z + 4} \rightarrow z(k) ?$$

$$\begin{array}{r} 10z^{-1} + 50z^{-2} + 210z^{-3} \dots \\ z^2 - 5z + 4 \overline{) 10z} \\ \underline{10z - 50 + 40z^{-1}} \\ 50 - 40z^{-1} \\ \underline{50 - 250z^{-1} + 200z^{-2}} \\ 210z^{-1} - 200z^{-2} \\ \underline{210z^{-1} - 1050z^{-2} + 840z^{-3}} \\ 850z^{-2} - 840z^{-3} \end{array}$$

$$\{x(k)\} = \{0, 10, 50, 210, \dots\}$$

$$x^*(t) = 10\delta(t-T) + 50\delta(t-2T) + 210\delta(t-3T) + \dots$$

(2) 部分分式展开法

$$X(z) = \frac{10z}{z^2 - 5z + 4} \rightarrow z(k)?$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{10}{z^2 - 5z + 4} = \frac{10}{(z-1)(z-4)} = -\frac{10}{3(z-1)} + \frac{10}{3(z-4)}$$

$$X(z) = -\frac{10z}{3(z-1)} + \frac{10z}{3(z-4)}$$

$$x(k) = -\frac{10}{3} \cdot 1(k) + \frac{10}{3} \cdot 4^k = \frac{10}{3} (4^k - 1), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Z反变换只能求出 $x^*(t)$ ，而不能唯一确定连续变量 $x(t)$

2.6.4 脉冲传递函数

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)$$

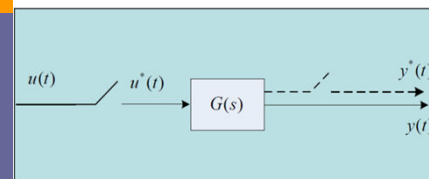
输入/输出初值为0

Z变换

后向

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \dots + b_m z^{-m} U(z)$$

$$\text{脉冲传递函数 } G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$



如果 $u^*(t) = \delta(t)$, $y(t) = L^{-1}[G(s)]$

于是 $U(z) = 1$

$$G(z) = Y(z) = Z[y(t)] = Z[L^{-1}[G(s)]]$$

前向

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = b_0 u(k+m) + b_1 u(k+m-1) + \dots + b_m u(k)$$

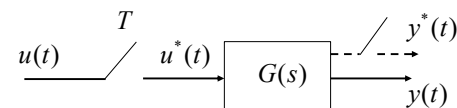
输入/输出初值为0

Z变换

$$z^n Y(z) + a_1 z^{n-1} Y(z) + \dots + a_n Y(z) = z^m b_0 U(z) + b_1 z^{m-1} U(z) + \dots + b_m U(z)$$

$$\begin{aligned} \text{脉冲传递函数 } G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^m b_0 + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \\ &= z^{-(n-m)} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \triangleq G(z) \end{aligned}$$

数字采样系统



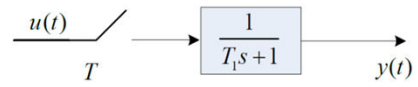
假设系统初始条件为零

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Z(y^*(t))}{Z(u^*(t))} = \frac{Z\left[\sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \delta(t-kT)\right]}{Z\left[\sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \delta(t-kT)\right]}$$

输入为单位脉冲函数时

$$G(z) = \frac{Y(z)}{1} = Z[g(t)] = Z[L^{-1}[G(s)]]$$

例2.22 求采样系统脉冲传递函数



$$G(z) = Z[L^{-1}[G(s)]] = Z\left[L^{-1}\left[\frac{1}{T_1 s + 1}\right]\right] = \frac{1}{T_1} \frac{z}{z - e^{-T/T_1}}$$