集合论

集合论部分

- 第3章 集合的基本概念和运算
- 第4章 二元关系和函数

第3章 集合的基本概念和运算

- 3.1 集合的基本概念（不讲）
- 3.2 集合的基本运算 （不讲）
- 3.3 集合中元素的计数（重点讲容斥原理）
- 3.4集合的覆盖和划分

（相容关系与覆盖）

（等价关系与划分）

3.1 集合的基本概念

- 集合的定义与表示
- 集合与元素
- 集合之间的关系
- 空集
- 全集
- 幂集

集合定义与表示

集合 没有精确的数学定义

理解：一些离散个体组成的全体

组成集合的个体称为它的元素或成员

集合的表示

列元素法 $A=\{a, b, c, d\}$

谓词表示法 $B=\{x \mid P(x)\}$

B 由使得 $P(x)$ 为真的 x 构成

常用数集

N, Z, Q, R, C 分别表示自然数、整数、有理数、实数和复数集合，注意 0 是自然数.

集合与元素

元素与集合的关系：隶属关系

属于$\in$，不属于 $\notin$

实例

$A=\{\, x \mid x\in \mathrm{R} \wedge x^2-1=0 \,\}$，$A=\{-1,1\}$

$1\in A$，$2\notin A$

注意：对于任何集合 A 和元素 x (可以是集合)，

$x\in A$和 $x\notin A$ 两者成立其一，且仅成立其一.

隶属关系的层次结构

例 3.1

$A=\{\,a, \{b,c\}, d, \{\{d\}\}\,\}$

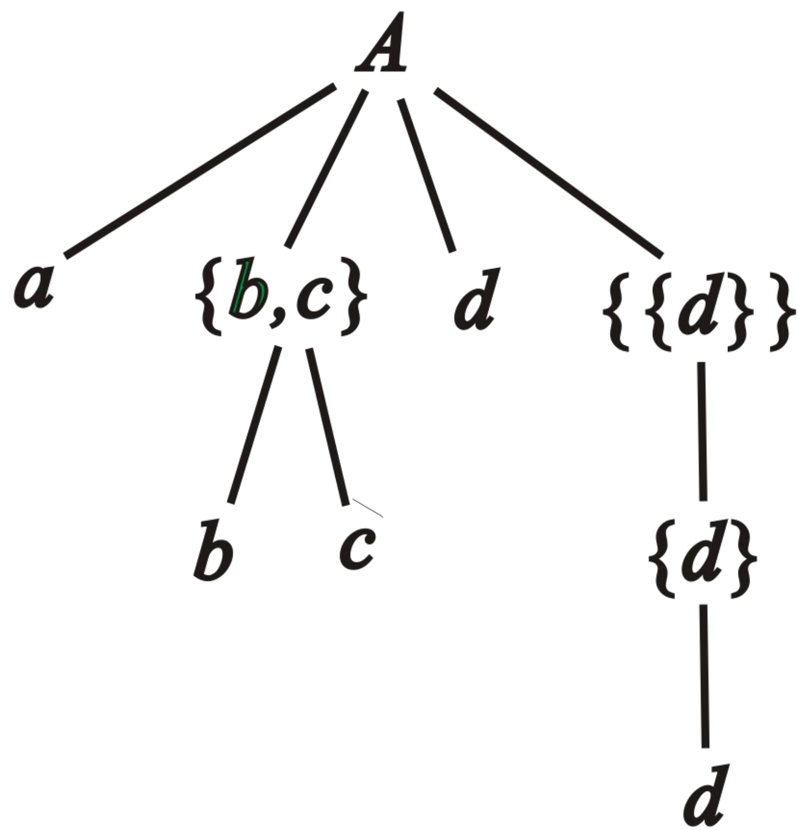
$\{b,c\}\in A$

$b\notin A$

$\{\{d\}\}\in A$

$\{d\}\notin A$

$d\in A$



集合之间的关系

包含（子集）　$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in B)$

不包含　$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$

相等　$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

不相等　$A \neq B$

真包含　$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

不真包含　$A \not\subset B$

思考：　$\neq$ 和 $\not\subset$ 的定义

注意 $\in$ 和 $\subseteq$ 是不同层次的问题

空集与全集

空集 $\varnothing$ 不含任何元素的集合

实例 $\{x \mid x^2+1=0 \wedge x \in \mathbf{R}\}$ 就是空集

定理 空集是任何集合的子集

$$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in \varnothing \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T$$

推论 空集是惟一的.

证 假设存在$\varnothing_1$和$\varnothing_2$，则$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ 且$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$，因此$\varnothing_1 = \varnothing_2$

全集 E

相对性

在给定问题中，全集包含任何集合，即$\forall A\,(A \subseteq E)$

幂集

定义 $P(A) = \{ x \mid x \subseteq A \}$

实例

$P(\varnothing) = \{\varnothing\}$,

$P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$P(\{1,\{2,3\}\})=\{\varnothing,\{1\},\{\{2,3\}\},\{1,\{2,3\}\}\}$

计数

如果 $|A| = n$，则 $|P(A)| = 2^n$

3.2 集合的基本运算

- 集合基本运算的定义

  $\cup \quad \cap \quad - \quad \sim \quad \oplus$

- 文氏图（**John Venn**）
- 例题
- 集合运算的算律
- 集合包含或恒等式的证明

集合基本运算的定义

并 $A\cup B = \{\, x \mid x\in A \vee x\in B \,\}$

交 $A\cap B = \{\, x \mid x\in A \wedge x\in B \,\}$

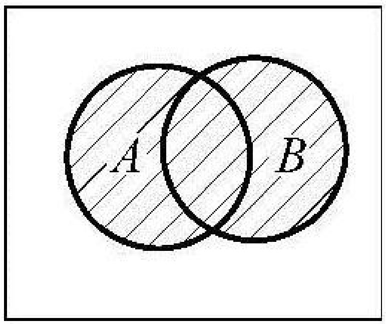
相对补 $A-B = \{\, x \mid x\in A \wedge x\notin B \,\}$

对称差 $A\oplus B = (A-B)\cup(B-A)$

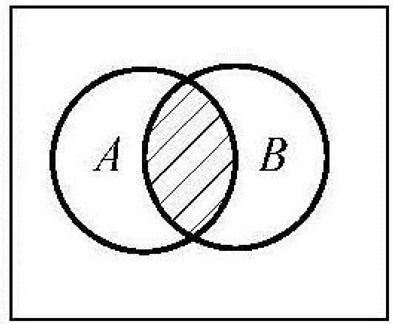
$= (A\cup B)-(A\cap B)$

绝对补 $\sim A = E-A$

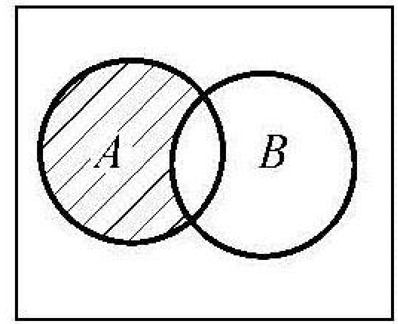
文氏图表示



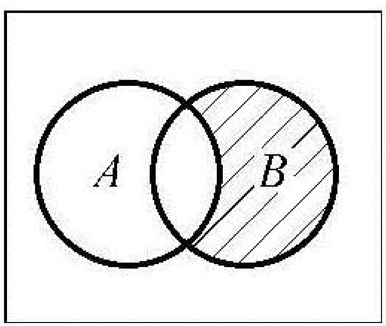
$A \cup B$



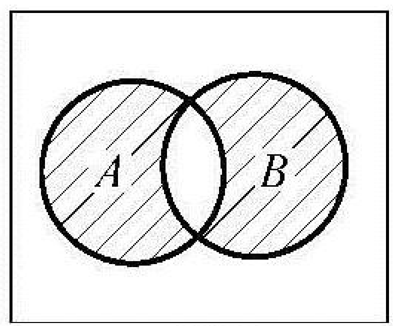
$A \cap B$



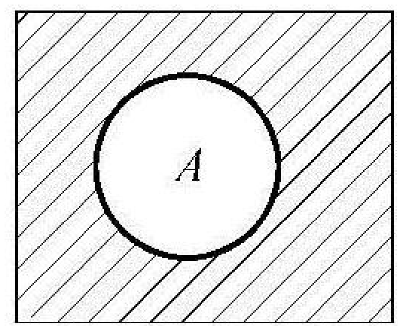
$A - B$



$B - A$



$A \oplus B$



$\sim A$

关于运算的说明

- 运算顺序：~和幂集优先，其他由括号确定
- 并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

$$A_1\cup A_2\cup\ldots A_n=\{x\mid x\in A_1\vee x\in A_2\vee\ldots\vee x\in A_n\}$$

$$A_1\cap A_2\cap\ldots A_n=\{x\mid x\in A_1\wedge x\in A_2\wedge\ldots\wedge x\in A_n\}$$

- 某些重要结果

$\varnothing\subseteq A-B\subseteq A$

$A\subseteq B \Leftrightarrow A-B=\varnothing$（后面证明）

$A\cap B=\varnothing \Leftrightarrow A-B=A$

例1

F:一年级大学生的集合　　S：二年级大学生的集合

R：计算机系学生的集合　　M：数学系学生的集合

T：选修离散数学的学生的集合

L：爱好文学学生的集合　　P：爱好体育运动学生的集合

所有计算机系二年级学生都选修离散数学

数学系一年级的学生都没有选修离散数学

数学系学生或爱好文学或爱好体育运动

只有一、二年级的学生才爱好体育运动

除去数学和计算机系二年级学生外都不选修离散数学

$T \subseteq (M \cup R) \cap S$

$R \cap S \subseteq T$

$(M \cap F) \cap T = \varnothing$

$M \subseteq L \cup P$

$P \subseteq F \cup S$

$S - (M \cup R) \subseteq P$

例2

分别对条件(1)到(5)，确定 X 集合与下述那些集合相等。

$S_1 = \{ 1, 2, \ldots, 8, 9 \}$, $S_2 = \{ 2, 4, 6, 8 \}$, $S_3 = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$,

$S_4 = \{ 3, 4, 5 \}$, $S_5 = \{ 3, 5 \}$

(1) 若 $X \cap S_3 = \varnothing$, 则 X $= S_2$

(2) 若 $X \subseteq S_4$, $X \cap S_2 = \varnothing$, 则 X $= S_5$

(3) 若 $X \subseteq S_1$， $X \nsubseteq S_3$, 则 X $= S_1, S_2, S_4$

(4) 若 $X - S_3 = \varnothing$, 则 X $= S_3, S_5$

(5) 若 $X \subseteq S_3$， $X \nsubseteq S_1$, 则 X 与 $S_1, \ldots, S_5$ 都不等

集合运算的算律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C=$ $A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C=$ $A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

	$\cup$与$\cap$	$\cap$与$\oplus$
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

吸收律的前提：$\cup$、$\cap$可交换

集合运算的算律（续）

	$-$	$\sim$
$D.M$ 律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

集合包含或相等的证明方法

- 证明 $X \subseteq Y$
  - 命题演算法
  - 包含传递法
  - 等价条件法
  - 反证法
  - 并交运算法
- 证明 $X = Y$
  - 命题演算法
  - 等式代入法
  - 反证法
  - 运算法

以上的 X, Y 代表集合公式

命题演算法证 $X\subseteq Y$

任取 x，

$$x\in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x\in Y$$

例3 证明$A\subseteq B \Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$

任取x

$$x\in P(A) \Rightarrow x\subseteq A \Rightarrow x\subseteq B \Rightarrow x\in P(B)$$

任取x

$$x\in A \Rightarrow \{x\}\subseteq A \Rightarrow \{x\}\in P(A) \Rightarrow \{x\}\in P(B)$$

$$\Rightarrow \{x\}\subseteq B \Rightarrow x\in B$$

包含传递法证 $X \subseteq Y$

找到集合T 满足 $X \subseteq T$ 且 $T \subseteq Y$，从而有$X \subseteq Y$

例4 $A-B \subseteq A \cup B$

证 $A-B \subseteq A$

$A \subseteq A \cup B$

所以 $A-B \subseteq A \cup B$

利用包含的等价条件证 $X \subseteq Y$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \phi$$

例5 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证 $A \subseteq C \Rightarrow A \cup C = C$

$B \subseteq C \Rightarrow B \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$

命题得证

反证法证 $X\subseteq Y$

欲证$X\subseteq Y$, 假设命题不成立，必存在 x 使得 $x\in X$ 且 $x\notin Y$. 然后推出矛盾.

例6 证明 $A\subseteq C \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\cup B\subseteq C$

证 假设 $A\cup B \subseteq C$ 不成立,

则 $\exists x\,(x\in A\cup B\wedge x\notin C)$

因此 $x\in A$ 或 $x\in B$，且 $x\notin C$

若 $x\in A$, 则与 $A\subseteq C$ 矛盾;

若 $x\in B$, 则与 $B\subseteq C$ 矛盾.

利用已知包含式并交运算

由已知包含式通过运算产生新的包含式

$$X\subseteq Y \Rightarrow X\cap Z\subseteq Y\cap Z,\ X\cup Z\subseteq Y\cup Z$$

例7 证明 $A\cap C\subseteq B\cap C \wedge A-C\subseteq B-C \Rightarrow A\subseteq B$

证 $A\cap C\subseteq B\cap C$， $A-C \subseteq B-C$

上式两边求并，得

$(A\cap C)\cup(A-C) \subseteq (B\cap C)\cup(B-C)$

$\Rightarrow (A\cap C)\cup(A\cap\sim C) \subseteq (B\cap C)\cup(B\cap\sim C)$

$\Rightarrow A\cap(C\cup\sim C) \subseteq B\cap(C\cup\sim C)$

$\Rightarrow A\cap E \subseteq B\cap E$

$\Rightarrow A \subseteq B$

命题演算法证明$X=Y$

任取 x，

$x\in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x\in Y$

$x\in Y \Rightarrow \ldots \Rightarrow x\in X$

或者

$x\in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x\in Y$

例8 证明 $A\cup(A\cap B)=A$ （吸收律）

证 任取x,

$x\in A\cup(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A\vee x\in A\cap B$

$\Leftrightarrow x\in A \vee (x\in A \wedge x\in B) \Leftrightarrow x\in A$

等式替换证明$X=Y$

不断进行代入化简，最终得到两边相等

例9 证明$A\cup(A\cap B)=A$（吸收律）

证 (假设交换律、分配律、同一律、零律成立)

$$
\begin{aligned}
& A\cup(A\cap B) & \\
&=(A\cap E)\cup(A\cap B) & \text{同一律}\\
&=A\cap(E\cup B) & \text{分配律}\\
&=A\cap(B\cup E) & \text{交换律}\\
&=A\cap E & \text{零律}\\
&=A & \text{同一律}
\end{aligned}
$$

反证法证明$X=Y$

假设 $X=Y$ 不成立，则存在 x 使得 $x\in X$且$x\notin Y$，或者存在 x 使得 $x\in Y$且$x\notin X$，然后推出矛盾.

例10 证明以下等价条件

$$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$$

(1) (2) (3) (4)

证明顺序：

(1) $\Rightarrow$(2), (2) $\Rightarrow$(3), (3) $\Rightarrow$(4), (4) $\Rightarrow$(1)

(1) $\Rightarrow$(2)

显然$B\subseteq A\cup B$，下面证明$A\cup B\subseteq B$.

任取x,

$$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A\vee x\in B \Rightarrow x\in B\vee x\in B \Leftrightarrow x\in B$$

因此有$A\cup B\subseteq B$. 综合上述（2）得证.

(2) $\Rightarrow$(3)

$$A=A\cap(A\cup B) \Rightarrow A=A\cap B$$

（将$A\cup B$用B代入)

(3) $\Rightarrow$(4)

假设$A-B\neq\varnothing$, 即$\exists x\in A-B$，那么$x\in A$且$x\notin B$. 而

$$x\notin B \Rightarrow x\notin A\cap B.$$

从而与$A\cap B=A$矛盾.

(4) $\Rightarrow$(1)

假设$A\subseteq B$不成立，那么

$$\exists x\ (x\in A \wedge x\notin B) \Rightarrow x\in A-B \Rightarrow A-B\neq\varnothing$$

与条件（4）矛盾.

集合运算法证明$X=Y$

由已知等式通过运算产生新的等式

$$X=Y \Rightarrow X\cap Z=Y\cap Z,\ X\cup Z=Y\cup Z，\ X-Z=Y-Z$$

例11 证明$A\cap C=B\cap C \wedge A\cup C=B\cup C \Rightarrow A=B$

证 由 $A\cap C=B\cap C$ 和 $A\cup C=B\cup C$ 得到

$$(A\cup C)-(A\cap C)=(B\cup C)-(B\cap C)$$

从而有 $A\oplus C=B\oplus C$

因此

$$A\oplus C=B\oplus C \Rightarrow (A\oplus C)\oplus C=(B\oplus C)\oplus C$$

$$\Rightarrow A\oplus(C\oplus C)=B\oplus(C\oplus C) \Rightarrow A\oplus\varnothing=B\oplus\varnothing \Rightarrow A=B$$

3.3 集合中元素的计数

- 集合的基数与有穷集合
- 包含排斥原理

集合的基数与有穷集合

集合 A 的基数：集合A中的元素数，记作 card$A$

有穷集 A： card$A$=|A|=n，n为自然数.

有穷集的实例：

$A=\{a,b,c\}$, card$A$=|A|=3；

$B=\{x \mid x^2+1=0, x\in R\}$, card$B$=|$B$|=0

无穷集的实例：

N, Z, Q, R, C 等

在对集合计数时，必须注意无一遗漏（容），无一重复（斥）。

基本思想是：先不考虑重叠的情况，把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来，然后再把计数时重复计算的数目排斥出去，使得计算的结果既无遗漏又无重复，这种计数的方法称为容斥原理。

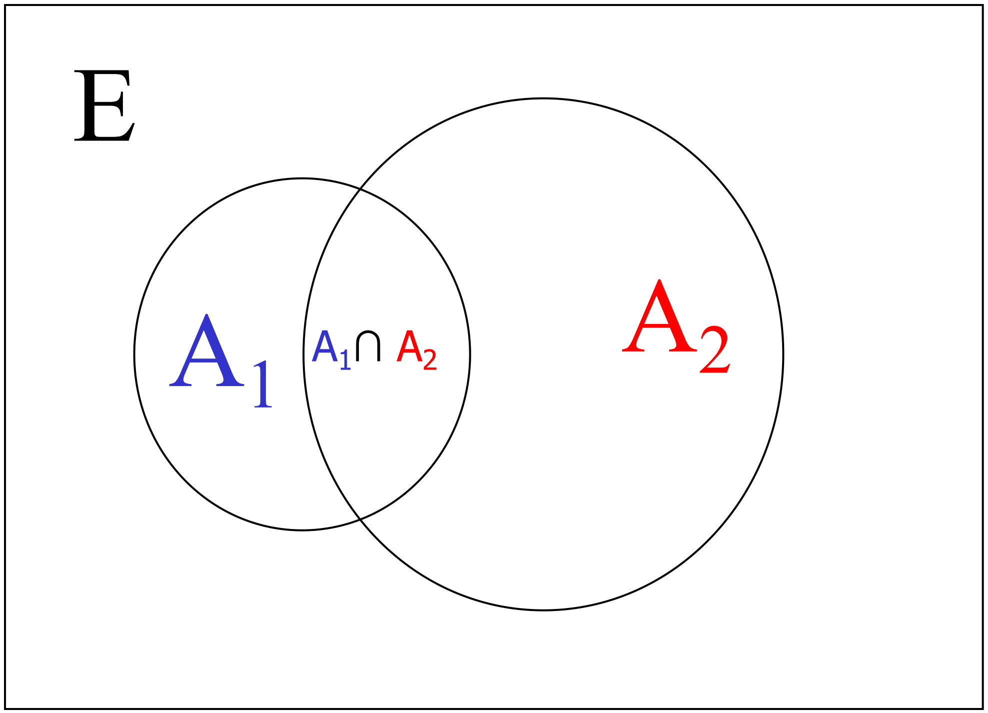
如果被计数的事物有A、B两类，那么，

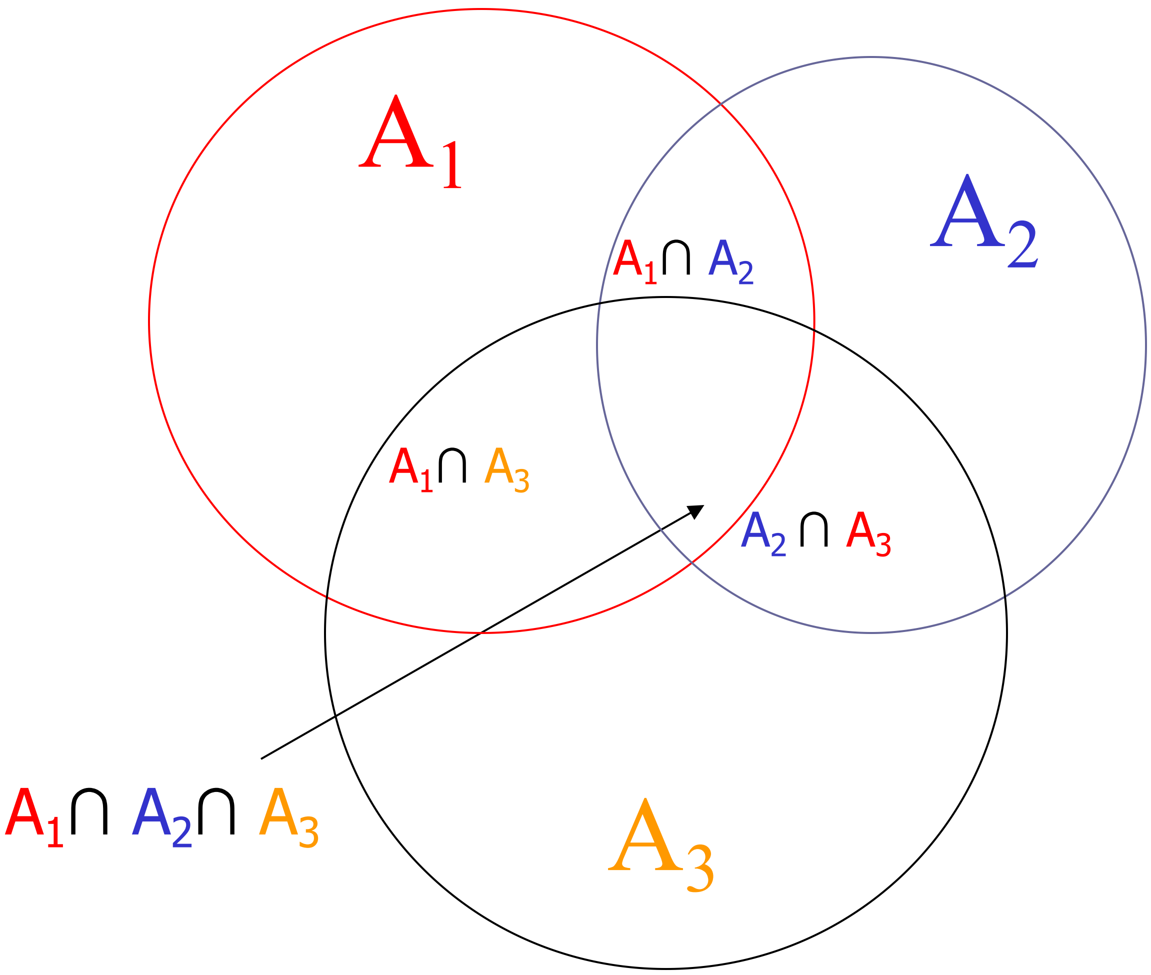
A类或B类元素个数

= A类元素个数+B类元素个数

—既是A类又是B类的元素个数。

- **定理** 设A_1，A_2为有限集合，其元素个数分别为$|A_1|$，$|A_2|$，则
$|A_1 \cup A_2| = |A_1|+|A_2| - | A_1 \cap A_2|$




A_1
A_2
$A_1 \cap A_2$
$A_1 \cap A_3$
$A_2 \cap A_3$
$A_1 \cap A_2 \cap A_3$
A_3

设A_1，A_2，A_3为有限集合，其元素个数分别为$|A_1|$，$|A_2|$， $|A_3|$则有

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\
&= |A_1|+|A_2| +|A_3| \\
&\quad -| A_1\cap A_2| -| A_1\cap A_3| -| A_2\cap A_3| \\
&\quad + | A_1\cap A_2 \cap A_3 |
\end{aligned}
$$

S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots$$

$$+ (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots$$

$$+ (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

证明 $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$

$$= |S| - |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m}|$$

$$= |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}|$$

包含排斥原理

定理 设 S 为有穷集，$P_1, P_2, \ldots, P_m$ 是 m 种性质，A_i 是 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集，i=1, 2, …, m.则 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$ 的元素数为

$$
\begin{aligned}
&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}| \\
&= |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots \\
&+ (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|
\end{aligned}
$$

例1 一个班里有50个学生，在第一次考试中有26人得5分，在第二次考试中有21人得5分。如果两次考试中都没得5分的有17人，那么在两次考试都得5分的有多少人？

解：设A、B分别表示第一和第二次考试中得5分学生的集合，那么有

$$|E| = 50,\ |A| = 26,\ |B| = 21,\ |\overline{A} \cap \overline{B}| = 17$$

首先由$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$知

$$|A \cup B| = |E - \overline{A \cup B}| = |E - \overline{A} \cap \overline{B}| = 33$$

又因为 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

所以 $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$

$$= 26 + 21 - 33 = 14$$

3.4 集合的覆盖与划分

- 集合的覆盖（与相容关系有一一对应关系）
- 集合的划分（与等价关系有一一对应关系）

集合的覆盖

设A是非空集合，$\pi=\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$，$S_i\neq\varnothing$，$i=1,\cdots, m$，且满足：

(1) $\forall S_i\in\pi$，$S_i\subseteq A$

(2) $S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_m = A$

则称π是A的一个覆盖。

集合的划分

（集合的划分，一种特殊的覆盖）

设A是非空集合，$\pi=\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$，$S_i\neq\varnothing$，$i=1,\cdots,m$，$\pi$是$A$的一个覆盖，满足$\boldsymbol{S_i\cap S_j=\varnothing}$，$i\neq j$，则称$\pi$是$A$的一个划分。称$S_i$，$i=1,\cdots,m$，是$A$的划分块。

"$S_i\cap S_j=\varnothing$，$i\neq j$"是指π中的元素两两互不相交。

【例3.20】设 $A=\{a,b,c\}$，以下是A的子集构成的集合：

$$S=\{\{a,b\},\{b,c\}\}$$
$$Q=\{\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$$
$$D=\{\{a\},\{b,c\}\}$$
$$G=\{\{a,b,c\}\}$$
$$E=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$$
$$F=\{\{a\},\{a,c\}\}$$

试确定哪些集合是A的覆盖？哪些集合是A的划分？哪些集合既不是覆盖，也不是划分？

在A的所有划分中基数最大的划分叫做A的最大划分，基数最小的划分叫做A的最小划分。

所谓集合的基数即为集合里面元素的个数。

在例3.20中，？是A的最大划分，？是A的最小划分。

【例】设$A=\{1,2,3\}$，试确定A的所有划分。

解： 有一个划分块的划分是：$\{\{1,2,3\}\}$

有两个划分块的划分是：

$\{\{1\},\{2,3\}\}$，$\{\{2\},\{1,3\}\}$，

$\{\{3\},\{1,2\}\}$

有三个划分块的划分是：

$\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

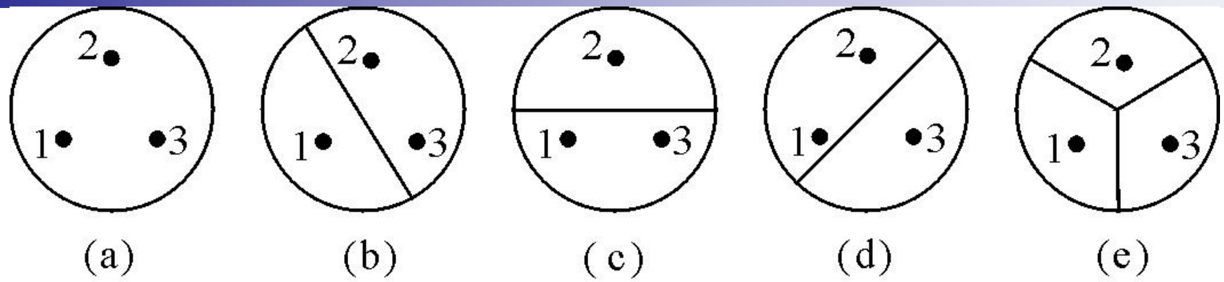


图 3.9

图3.9是*A*的所有划分的示意图。

(a)表示有一个划分块的划分{{1,2,3}}。

(b)、(c)和(d)表示有两个划分块的划分{{1},{2,3}}、{{2},{1,3}}和{{3},{1,2}}。

(e) 表示有三个划分块的划分{{1},{2},{3}}。

定理

设A=｛A_1，A_2，…，A_r｝与B=｛B_1，B_2，…，B_s｝是C的两种划分，则集合X=｛$A_i \cap B_j$ | i=1,…,r，j=1,…,s，$A_i \cap B_j \neq \varnothing$｝也是$C$的划分。

证明：（用划分的定义证明，所以分三步）

(1)先证 $\boldsymbol{A_i \cap B_j \subseteq C}$

由A，B是C的划分知，$A_i \subseteq C$，$B_j \subseteq C$，所以$A_i \cap B_j \subseteq C$。

(2)再证: $\bigcup_{i=1}^{r}\bigcup_{j=1}^{s}(A_i \cap B_j) = C$

$$
\begin{aligned}
&(A_1\cap B_1)\cup(A_1\cap B_2)\cup\cdots\cup(A_1\cap B_s)\cup\\
&\quad(A_2\cap B_1)\cup(A_2\cap B_2)\cup\cdots\cup(A_2\cap B_s)\cup\\
&\qquad\cdots\\
&\quad(A_r\cap B_1)\cup(A_r\cap B_2)\cup\cdots\cup(A_r\cap B_s)\\
&=(A_1\cap(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_s))\cup\cdots\\
&\quad\cup(A_r\cap(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_s))\\
&=(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_r)\cap(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_s)\\
&=C\cap C\\
&=C
\end{aligned}
$$

(3)最后证X中的元素是两两互不相交的。

在X中取任意两个不同元素，$A_i \cap B_h$与$A_j \cap B_k$，分三种情况讨论：

①设 $i \neq j$，$h=k$

$$(A_i \cap B_h) \cap (A_j \cap B_k) = (A_i \cap A_j) \cap (B_h \cap B_k) = \varnothing \cap (B_h \cap B_k) = \varnothing$$

②设 $i \neq j$，$h \neq k$

$$(A_i \cap B_h) \cap (A_j \cap B_k) = (A_i \cap A_j) \cap (B_h \cap B_k) = \varnothing \cap \varnothing = \varnothing$$

③ 设 $i=j$，$h \neq k$

$$(A_i \cap B_h) \cap (A_j \cap B_k) = (A_i \cap A_j) \cap (B_h \cap B_k) = (A_i \cap A_j) \cap \varnothing = \varnothing$$