1.3 命题逻辑等值演算

- 等值式
- 基本等值式
- 等值演算
- 置换规则

等值式

定义 **若等价式$A \leftrightarrow B$是重言式，**

（也就是说A和B的任一赋值，A和B的真值都相同），

则称A与B等值（等价、逻辑相等），记作$A \Leftrightarrow B$，

并称$A \Leftrightarrow B$是等值式

命题公式等价有下面的三条性质：

(1) 自反性，$A \Leftrightarrow A$

(2) 对称性，若$A \Leftrightarrow B$，则$B \Leftrightarrow A$

(3) 传递性，若$A \Leftrightarrow B$，$B \Leftrightarrow C$，则$A \Leftrightarrow C$

$A \Leftrightarrow B$当且仅当$A \leftrightarrow B$是重言式。

所谓两个命题公式等价即为两个公式的真值表相同，所以可用真值表来验证两个命题公式是否等价.

【例】根据等价的定义，用真值表证明

$$p\to(q\to p)\Leftrightarrow\neg p\to(p\to\neg q)$$

证明：构造$p\to(q\to p)$和$\neg p\to(p\to\neg q)$的真值表

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$q\to p$	$p\to(q\to p)$	$p\to\neg q$	$\neg p\to(p\to\neg q)$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1

证明等价的另外一种方法叫做等值演算法，其基本思想是：先用真值表证明一组基本等价式，以它们为基础进行公式之间的演算。基本等价式常叫命题定律。

基本等值式

双重否定律：$\neg\neg A \Leftrightarrow A$

等幂律: $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律: $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律: $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律: $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

基本等值式(续)

德·摩根律: $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$

$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

（实现了否定联结词在括号内外的转移）

吸收律: $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$, $A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$

零律: $A\vee 1\Leftrightarrow 1$, $A\wedge 0\Leftrightarrow 0$

同一律: $A\vee 0\Leftrightarrow A$, $A\wedge 1\Leftrightarrow A$

排中律: $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$

矛盾律: $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$

基本等值式(续)

蕴涵等值式: $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$

等价等值式: $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$

假言易位: $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$

等价否定等值式: $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$

归谬论: $(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)\Leftrightarrow\neg A$

等值演算与置换规则

等值演算:

由已知的等值式推演出新的等值式的过程

置换规则：若$A\Leftrightarrow B$, 则$\Phi(B)\Leftrightarrow\Phi(A)$

等值演算的基础:

(1) 等值关系的性质：自反、对称、传递

(2) 基本的等值式

(3) 置换规则

应用举例——证明两个公式等值

例1.9 证明 $p\rightarrow(q\rightarrow r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\rightarrow r$

证 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$

$\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee r)$ （蕴涵等值式，置换规则）

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （结合律，置换规则）

$\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\vee r$ （德·摩根律，置换规则）

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\rightarrow r$ （蕴涵等值式，置换规则）

应用举例—证明两个公式等值（续）

例1.9 证明 $p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

证 p

$\Leftrightarrow p \wedge 1$ （同一律，置换规则）

$\Leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q)$（排中律，置换规则）

$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ （分配律，置换规则）

应用举例——判断公式类型

例 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

解 $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

$\Leftrightarrow q\wedge\neg(\neg p\vee q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow q\wedge(p\wedge\neg q)$ （德·摩根律）

$\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge\neg q)$ （交换律，结合律）

$\Leftrightarrow p\wedge 0$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0$ （零律）

由最后一步可知，该式为矛盾式.

例3 (续)

(2) $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

解 $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(q\vee\neg p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ （交换律）

$\Leftrightarrow 1$

由最后一步可知，该式为重言式.

例3 (续)

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

解 $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$ （分配律）

$\Leftrightarrow p\wedge 1\wedge r$ （排中律）

$\Leftrightarrow p\wedge r$ （同一律）

是非重言式的可满足式.

本小节学习目标：

（1）理解等值式的定义。

（2）灵活使用基本等值式（特别是分配律、德摩根律、蕴涵等值式）进行等值演算。

1.4 范式

- 析取范式与合取范式

- 主析取范式与主合取范式

简单析取式与简单合取式

定义1.12(简单析取式、基本和)
由一些命题变元或其否定构成的析取式称为基本和，也叫简单析取式。

定义1.12 (简单合取式、基本积)
由一些命题变元或其否定构成的合取式称为基本积，也叫简单合取式。

析取范式与合取范式

定义1.13(析取范式)
由简单合取式的析取构成的公式叫做析取范式。

定义1.13(合取范式)
由简单析取式的合取构成的公式叫做合取范式。

任何命题公式都可以化成与其等值的析取范式或合取范式。步骤如下：

(1) 消去联结词“→”和“↔”

(2)消去“¬”(双重否定律)

内移“¬” (德摩根律)

(3)利用分配律，结合律将公式归约为合取范式和析取范式。

∧对∨分配（析取范式）

∨对∧分配（合取范式）

【例】求命题公式$(p\vee q)\leftrightarrow p$的合取范式和析取范式。

解：(1)求合取范式

$$
\begin{aligned}
& (p\vee q)\leftrightarrow p \\
\Leftrightarrow\ & ((p\vee q)\rightarrow p)\wedge(p\rightarrow(p\vee q)) && (\text{消去}\leftrightarrow) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg(p\vee q)\vee p)\wedge(\neg p\vee(p\vee q)) && (\text{消去}\rightarrow) \\
\Leftrightarrow\ & ((\neg p\wedge\neg q)\vee p)\wedge(\neg p\vee(p\vee q)) && (\neg\text{内移}) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee p)\wedge(\neg p\vee p\vee q) && (\text{分配律合取范式}) \\
\Leftrightarrow\ & 1\wedge(\neg q\vee p)\wedge(1\vee q) && (\text{排中律}) \\
\Leftrightarrow\ & 1\wedge(\neg q\vee p)\wedge 1 && (\text{零律，合取范式}) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg q\vee p) && (\text{同一律，合取范式})
\end{aligned}
$$

(2)求析取范式

$$(p\vee q)\leftrightarrow p$$

$\Leftrightarrow((p\vee q)\wedge p)\vee(\neg(p\vee q)\wedge\neg p)$ (消去$\leftrightarrow$)

$\Leftrightarrow((p\vee q)\wedge p)\vee((\neg p\wedge\neg q)\wedge\neg p)$ ($\neg$内移)

$\Leftrightarrow p\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg p)$ (吸收律，析取范式)

$\Leftrightarrow p\vee(\neg p\wedge\neg p\wedge\neg q)$ (交换律)

$\Leftrightarrow p\vee(\neg p\wedge\neg q)$ (幂等律，析取范式)

命题公式的公式的合取范式并不唯一，析取范式也不唯一。

主析取范式

定义1.20(极小项)

在基本积中，每个变元及其否定不同时存在，但两者之一必须出现且仅出现一次，这样的基本积叫做布尔合取也叫小项或极小项。

两个命题变元的极小项有:

$p \wedge q$，$p \wedge \neg q$，$\neg p \wedge q$，$\neg p \wedge \neg q$

n个命题变元共有几个极小项 ??

2^n

表1.12

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

表1.13

极小项	成真赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	00	m_0
$\neg p \wedge q$	01	m_1
$p \wedge \neg q$	10	m_2
$p \wedge q$	11	m_3

极小项有下列的性质：

(1)每个极小项只有一个成真赋值，且各极小项的成真赋值互不相同。极小项和它的成真赋值构成了一一对应的关系。可用成真赋值为极小项进行编码;

(极小项与其成真赋值的对应关系为：

变元对应1，而变元的否定对应0。)

(2)任意两个不同的极小项的合取为永假式;

(3)所有极小项的析取为永真式;

表1.14

极小项	成真赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	000	m_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	001	m_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	010	m_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	011	m_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	100	m_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	101	m_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	110	m_6
$p \wedge q \wedge r$	111	m_7

定义1.5.6 (主析取范式)

对于给定的命题公式，如果有一个它的等价公式，仅由极小项的析取组成，称该公式为原公式的主析取范式.

任何命题公式都存在着与之等价的主析取范式。可由以下两种方法求得:

(1)等价演算法

(2) 真值表法

用等价演算法求主析取范式的步骤如下：

①化归为析取范式。

②除去析取范式中所有永假的基本积。

③在基本积中，将重复出现的合取项和相同变元合并。

④在基本积中补入没有出现的命题变元，即添加$\wedge(p\vee\neg p)$，再用分配律展开，最后合并相同的极小项。

用真值表求主析取范式的步骤如下：

① 构造命题公式的真值表。

② 找出公式的成真赋值对应的极小项。

③ 这些极小项的析取就是此公式的主析取范式。

【例】用等价演算法和真值表法，求$(p\rightarrow q)\rightarrow r$的主析取范式。

解：

表1.15

p	q	r	$p\rightarrow q$	$(p\rightarrow q)\rightarrow r$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

公式的成真赋值对应　　的极小项为：

$\neg p\wedge\neg q\wedge r$　　(成真赋值为001)

$\neg p\wedge q\wedge r$　　(成真赋值为011)

$p\wedge\neg q\wedge\neg r$　　(成真赋值为100)

$p\wedge\neg q\wedge r$　　(成真赋值为101)

$p\wedge q\wedge r$　　(成真赋值为111)

$(p\to q)\to r$ 的主析取范式为：

$(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$

$\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_{111}\vee m_{101}\vee m_{100}\vee m_{011}\vee m_{001}$

$\Leftrightarrow m_7\vee m_5\vee m_4\vee m_3\vee m_1$

$\Leftrightarrow\sum 1，3，4，5，7$

Remark:

(1)矛盾式无成真赋值，因而主析取范式为0。

(2)重言式无成假赋值，因而主析取范式含2^n(n为公式中命题变元的个数)个极小项。

主合取范式

定义(极大项)

在基本和中，每个变元及其否定不同时存在，但两者之一必须出现且仅出现一次，这样的基本和叫作布尔析取，也叫大项或极大项。

两个变元p，q构成的极大项为：

$p \vee q$，$p \vee \neg q$，$\neg p \vee q$，$\neg p \vee \neg q$

n个变元共有2^n个极大项。

极大项有下列三个性质：

(1) 每个极大项只有一个成假赋值，极大项不同，成假赋值也不同。极大项和它的成假赋值构成了一一对应的关系。故可用成假赋值为该极大项进行编码;

(极大项与成假赋值的对应关系为：

变元对应0，而变元的否定对应1。)

(2)任意两个不同的极大项的析取式为永真式;

(3)全体极大项的合取式为永假式;

定义 (主合取范式)
对于给定的命题公式，如果有一个它的等价公式，仅由极大项的合取组成，则该等价式称为原公式的主合取范式。

任何命题公式都存在着与之等价的主合取范式。也可由以下两种方法求得。

(1)等价演算法

(2)真值表法

用等价演算法求主合取范式, 步骤如下:
①化归为合取范式。
②除去所有永真的基本和。
③在基本和中合并重复出现的析取项和相同的变元。
④在基本和中补入没有出现的命题变元。即增加 $\vee(p\wedge\neg p)$，然后，应用分配律展开公式，最后合并相同的极大项。

用真值表求主合取范式的步骤如下：

①构造命题公式的真值表。

②找出公式的成假赋值对应的极大项。

③这些极大项的析取就是此公式的主合取范式。

Remark:

(1)矛盾式无成真赋值，因而矛盾式的主合取范式含2^n (n为公式中命题变元的个数)个极大项。

(2)重言式无成假赋值，因而主合取范式记为1。

同一公式的主析取范式中m的下标和主合取范式中M的下标是互补的。因此，知道了主析(合)取范式就可以写出主合(析)取范式。

主范式的用途——与真值表相同

(1) 求公式的成真赋值和成假赋值

例如 $(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$,

其成真赋值为**001, 011, 101, 110, 111**,

其余的赋值 **000, 010, 100**为成假赋值.

类似地，由主合取范式也可立即求出成假赋值和成真赋值.

主范式的用途(续)

(2) 判断公式的类型

设A含n个命题变项，则

A为重言式$\Leftrightarrow A$的主析取范式含2^n个极小项

$\Leftrightarrow A$的主合取范式为1.

A为矛盾式$\Leftrightarrow A$的主析取范式为0

$\Leftrightarrow A$的主合取范式含2^n个极大项

A为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow A$的主析取范式中至少含一个且不含全部极小项

$\Leftrightarrow A$的主合取范式中至少含一个且不含全部极大项

主范式的用途(续)

(3) 判断两个公式是否等值

例 用主析取范式判断下述两个公式是否等值：

(1) $p \to (q \to r)$ 与 $(p \wedge q) \to r$

(2) $p \to (q \to r)$ 与 $(p \to q) \to r$

解 $p \to (q \to r) = m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

$(p \wedge q) \to r = m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

$(p \to q) \to r = m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

故(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.

说明：

由公式A的主析取范式确定它的主合取范式，反之亦然.

用公式A的真值表求A的主范式.

主范式的用途(续)

例 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习. 选派必须满足以下条件:

(1)若赵去，钱也去;

(2)李、周两人中至少有一人去;

(3)钱、孙两人中有一人去且仅去一人;

(4)孙、李两人同去或同不去;

(5)若周去，则赵、钱也去.

试用主析取范式法分析该公司如何选派他们出国?

例 (续)

解此类问题的步骤为：

① 将简单命题符号化

② 写出各复合命题

③ 写出由②中复合命题组成的合取式

④ 求③中所得公式的主析取范式

例 (续)

解 ① 设p：派赵去，q：派钱去，r：派孙去，
s：派李去，u：派周去.

② (1) $(p\to q)$

(2) $(s\lor u)$

(3) $((q\land\neg r)\lor(\neg q\land r))$

(4) $((r\land s)\lor(\neg r\land\neg s))$

(5) $(u\to(p\land q))$

③ (1) ~ (5)构成的合取式为

$$A=(p\to q)\land(s\lor u)\land((q\land\neg r)\lor(\neg q\land r))\land ((r\land s)\lor(\neg r\land\neg s))\land(u\to(p\land q))$$

例 (续)

④ $A \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s\wedge u)$

结论：由④可知，A的成真赋值为00110与11001，因而派孙、李去（赵、钱、周不去）或派赵、钱、周去（孙、李不去）.

A的演算过程如下：

$A \Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))\wedge(s\vee u)\wedge(\neg u\vee(p\wedge q))\wedge((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))$ （交换律）

$B_1= (\neg p\vee q)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))$

$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(q\wedge\neg r))$ （分配律）

例 (续)

$$B_2 = (s\vee u)\wedge(\neg u\vee(p\wedge q))$$

$\Leftrightarrow ((s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge s)\vee(p\wedge q\wedge u))$ （分配律）

$B_1\wedge B_2 \Leftrightarrow (\neg p\wedge q\wedge\neg r\wedge s\wedge\neg u)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg u)$

$\vee(q\wedge\neg r\wedge s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge s)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge u)$

再令 $B_3 = ((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))$

得 $A \Leftrightarrow B_1\wedge B_2\wedge B_3$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s\wedge u)$

本小节学习目标:

1、理解简单析取式（简单合取式）、析取范式（合取范式）、极小项（极大项）、主析取范式（主合取范式）的定义，并理解这些定义之间的联系与区别。

2、能熟练用真值表法或者等值演算法写出任一命题公式的等价主合取范式和主析取范式.