

# 1.5 联结词全功能集

- 与非联结词, 或非联结词
- 联结词的全功能集
- 最小全功能联结词集

# 复合联结词

与非式:  $p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$

或非式:  $p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$

$\uparrow$ 和 $\downarrow$ 与 $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ 有下述关系:

$$\neg p \Leftrightarrow \neg(p \wedge p) \Leftrightarrow p \uparrow p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \uparrow q) \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$$

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p) \uparrow (\neg q) \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$$

# 复合联结词(续)

$$\neg p \Leftrightarrow p \downarrow p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$$

$$p \vee q \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

# 联结词的全功能集

**定义** 设 $S$ 是一个联结词集合，如果任何 $n(n\geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含 $S$ 中的联结词构成的公式表示，则称 $S$ 是**联结词全功能集**.

$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \overline{\vee}, \uparrow, \downarrow\}$

$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

$\{\neg, \wedge, \vee\}$

$\{\neg, \wedge\}、\{\neg, \vee\}$

$\{\uparrow\}、\{\downarrow\}$

# 最小全功能联结词集

设  $S$  是全功能联结词集，如果去掉其中的任何联结词后，就不是全功能联结词集.

$\{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}, \{\uparrow\}, \{\downarrow\}$  是最小全功能联结词集。

本小节学习目标：

- 1、了解与非、或非两个复合联结词的定义。
- 2、在理解所学联结词之间关系的基础上，掌握联结词全功能集的定义。

# 1.6 组合电路

- 组合电路
- 逻辑门

与门，或门，非门，与非门，或非门

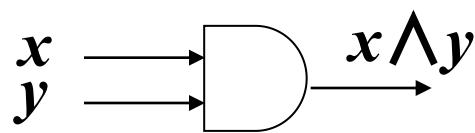
- 奎因-莫可拉斯基方法

# 组合电路

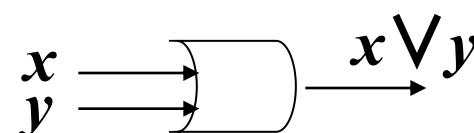
逻辑门：实现逻辑运算的电子元件.

与门，或门，非门.

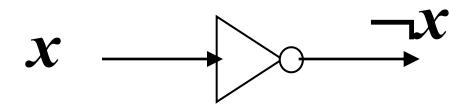
组合电路：实现命题公式的由电子元件组成的电路.



与门



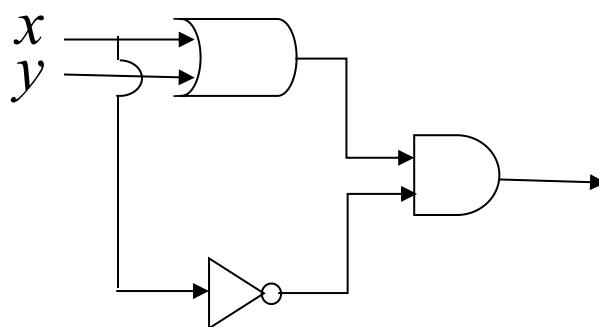
或门



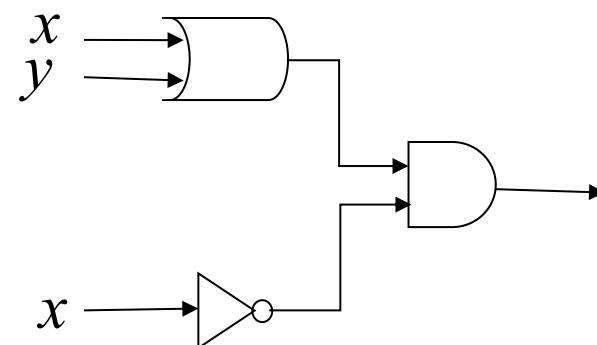
非门

# 组合电路的例子

$(x \vee y) \wedge \neg x$  的组合电路



第一种画法



第二种画法

# 例

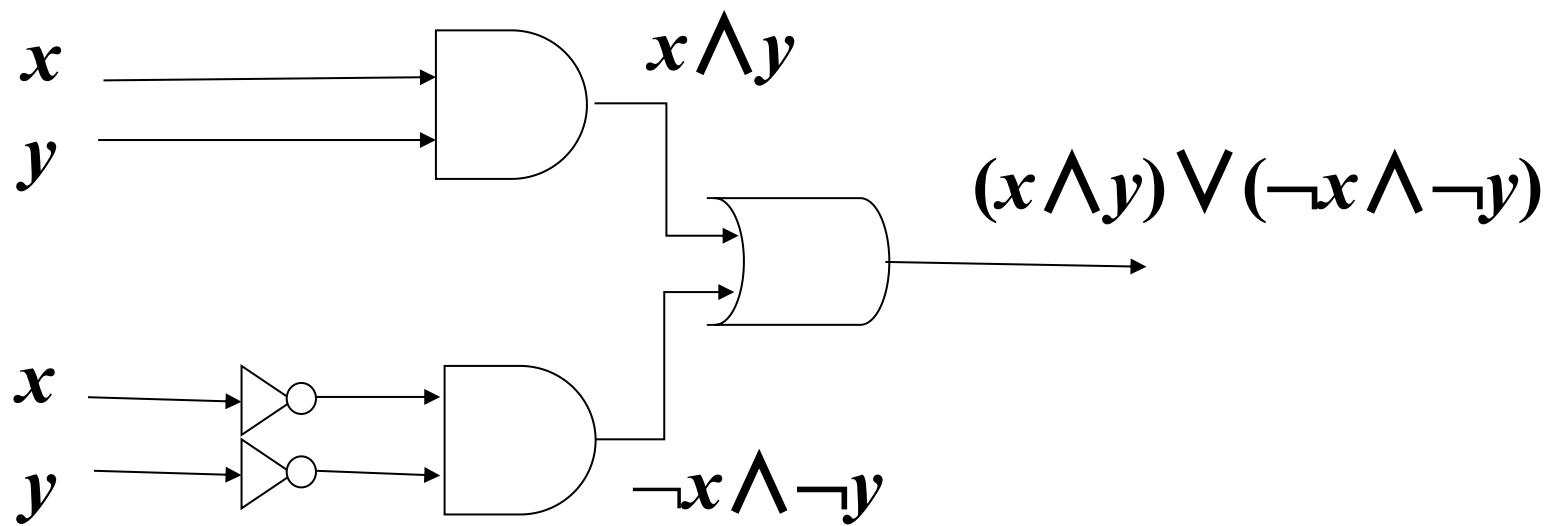
例 楼梯的灯由上下2个开关控制, 要求按动任何一个开关都能打开或关闭灯. 试设计一个这样的线路.

解  $x,y$ :开关的状态,  $F$ :灯的状态, 打开为1, 关闭为0.  
不妨设当2个开关都为0时灯是打开的.

$$F = m_0 \wedge m_3 = (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y)$$

$x$	$y$	$F(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

# 例(续)



# 设计组合电路

- 步骤:** 1. 构造输入输出表(问题的真值函数),  
2. 写出主析取范式,  
3. 化简.

**最简展开式:** 包含最少运算的公式

**例** 当且仅当  $x=y=z=1$  或  $x=y=1$  且  $z=0$  时输出1.

$$F = m_6 \vee m_7 = (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

4个与门, 1个或门和一个非门

$$F \Leftrightarrow x \wedge y \quad \text{一个与门}$$

# 奎因-莫可拉斯基方法

1. 合并简单合取式生成所有可能出现在最简展开式中的项.
2. 确定最简展开式中的项.

例 求下述公式的最简展开式:

$$\begin{aligned} F = & (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \\ & \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \\ & \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \\ & \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \end{aligned}$$

# 例(续)

解

编号	极小项	角码	标记
1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	1110	*
2	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	1011	*
3	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	0111	*
4	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	1010	*
5	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$	0101	*
6	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	0011	*
7	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$	0001	*

# 例(续)

第一批				第二批		
合并项	项	表示串	标记	合并项	项	表示串
(1,4)	$x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	1-10		(3,5,6,7)	$\neg x_1 \wedge x_4$	0--1
(2,4)	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$	101-				
(2,6)	$\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	-011				
(3,5)	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_4$	01-1	*			
(3,6)	$\neg x_1 \wedge x_3 \wedge x_4$	0-11	*			
(5,7)	$\neg x_1 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$	0-01	*			
(6,7)	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_4$	00-1	*			

标记\*表示该项已被合并

# 例(续)

项	覆盖	运算符数
$x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	(1,4)	3
$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$	(2,4)	3
$\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	(2,6)	3
$\neg x_1 \wedge x_4$	(3,5,6,7)	2

选择(1,4), (2,4)和(3,5,6,7), 或者(1,4), (2,6)和(3,5,6,7).  
最简展开式为

$$F \Leftrightarrow (x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_4)$$

或

$$F \Leftrightarrow (x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_4)$$