5.2 通路、回路与图的连通性

- 简单通(回)路, 初级通(回)路, 复杂通(回)路
- 无向连通图, 连通分支
- 弱连通图, 单向连通图, 强连通图
- 点割集与割点
- 边割集与割边(桥)

通路与回路

定义 给定图$G=<V, E>$（无向或有向的），设G中顶点与边的交替序列$\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$,

(1) 若$\forall i(1\le i\le l)$, v_{i-1} 和 v_i是e_i的端点(对于有向图, 要求v_{i-1}是始点, v_i是终点), 则称Γ为通路, v_0是通路的起点, v_l是通路的终点, l为通路的长度. 又若$v_0=v_l$，则称Γ为回路.

(2) 若通路(回路)中所有顶点(对于回路, 除$v_0=v_l$)各异，则称为初级通路(初级回路). 初级通路又称作路径, 初级回路又称作圈.

(3) 若通路(回路)中所有边各异, 则称为简单通路(简单回路), 否则称为复杂通路(复杂回路).

通路与回路(续)

定理 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于等于$n-1$的通路.

推论 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于等于$n-1$的初级通路.

定理 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的回路，则一定存在v_i到自身长度小于等于n的回路.

推论 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的简单回路，则一定存在长度小于等于n的初级回路.

无向图的连通性

设无向图$G=\langle V, E\rangle$,

u与v连通: 若u与v之间有通路. 规定u与自身总连通.

连通关系 $R=\{\langle u,v\rangle \mid u,v \in V$且$u\sim v\}$是$V$上的等价关系

连通图: 平凡图, 或者任意两点都连通的图

连通分支: V关于R的等价类的导出子图

设$V/R=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$, $G[V_1]$, $G[V_2]$, …,$G[V_k]$是G的连通分支, 其个数记作$p(G)=k$.

G是连通图$\Leftrightarrow p(G)=1$

无向图的短程线与距离

u与v之间的短程线: u与v之间长度最短的通路(u与v连通)

u与v之间的距离$d(u,v)$: u与v之间短程线的长度

若u与v不连通, 规定$d(u,v)=\infty$

性质:

$d(u,v)\geq 0$, 且$d(u,v)=0 \Leftrightarrow u=v$

$d(u,v)=d(v,u)$（对称性）

$d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w)$ （三角不等式)

点割集

记 $G-v$: 从G中删除v及关联的边

$G-V'$: 从G中删除V'中所有的顶点及关联的边

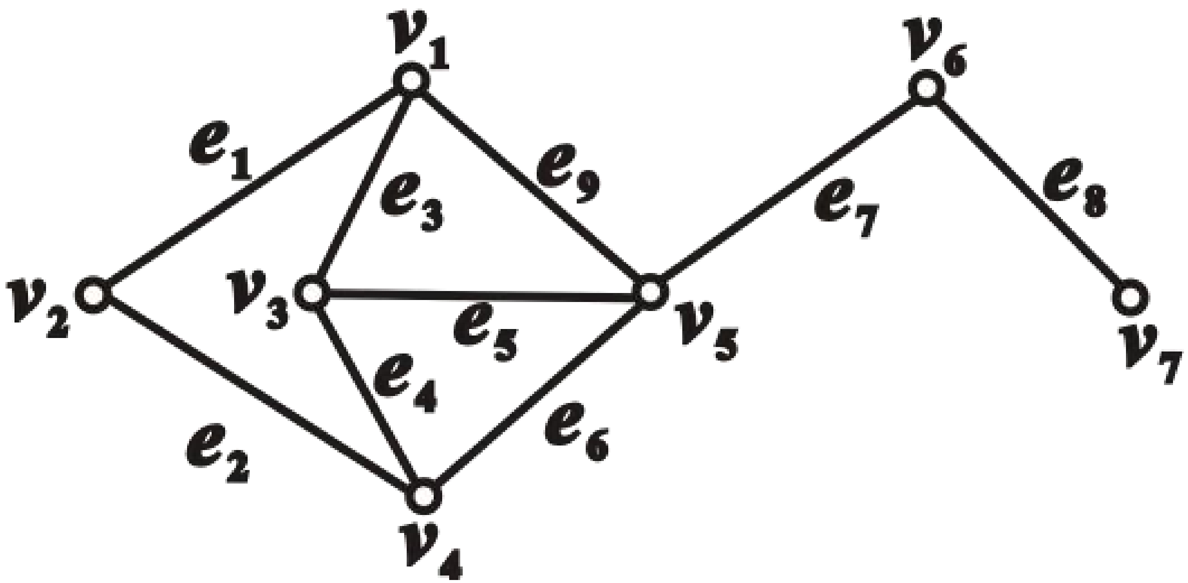
$G-e$: 从G中删除e

$G-E'$: 从G中删除E'中所有边

定义 设无向图$G=<V, E>$, 如果存在顶点子集$V'\subset V$, 使$p(G-V')>p(G)$，而且删除V'的任何真子集V''后（$\forall V''\subset V'$），$p(G-V'')=p(G)$, 则称V'为G的点割集. 若$\{v\}$为点割集, 则称v为割点.

点割集(续)

例



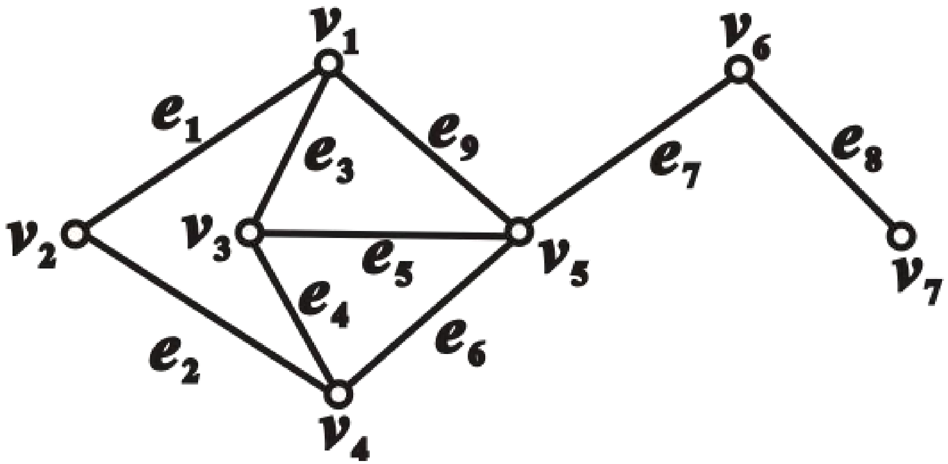
$\{v_1,v_4\}$, $\{v_6\}$是点割集, v_6是割点.

$\{v_2,v_5\}$是点割集吗?

边割集

定义 设无向图$G=<V, E>$, $E'\subseteq E$, 若$p(G-E')>p(G)$且$\forall E''\subset E'$, $p(G-E'')=p(G)$, 则称E'为G的边割集. 若$\{e\}$为边割集, 则称e为割边或桥.

例



$\{e_1,e_2\}$，$\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$，$\{e_8\}$等是边割集，e_8是桥.

$\{e_7,e_9,e_5,e_6\}$是边割集吗？

有向图的连通性

设有向图$D=<V, E>$

u可达v: u到v有通路. 规定u到自身总是可达的.

可达具有自反性和传递性

D弱连通(连通): 基图为无向连通图

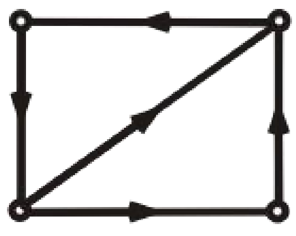
D单向连通: $\forall u,v\in V$，u可达v 或v可达u

D强连通: $\forall u,v\in V$，u与v相互可达

强连通$\Rightarrow$单向连通$\Rightarrow$弱连通

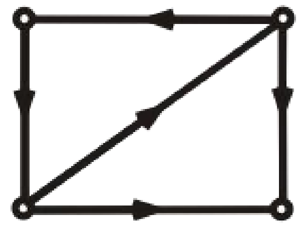
有向图的连通性(续)

例 考察下图的连通性



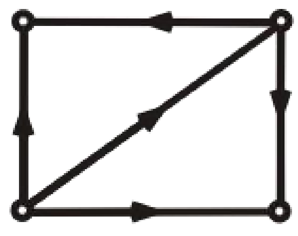
(1)

强连通



(2)

单连通



(3)

弱连通

定理 一个有向图G是强连通的充分必要条件是G中有一个回路至少包含G的每个结点一次。

定理 一个有向图G是单向连通的充分必要条件是G中有一个路至少包含每个结点一次。

有向图的短程线与距离

*u*到*v*的短程线: *u*到*v*长度最短的通路 (*u*可达*v*)

*u*与*v*之间的距离$d\langle u,v\rangle$: *u*到*v*的短程线的长度

若*u*不可达*v*, 规定$d\langle u,v\rangle=\infty$

性质:

$d\langle u,v\rangle\geq 0$, 且$d\langle u,v\rangle=0 \Leftrightarrow u=v$

$d\langle u,v\rangle+d\langle v,w\rangle \geq d\langle u,w\rangle$

注意: 没有对称性

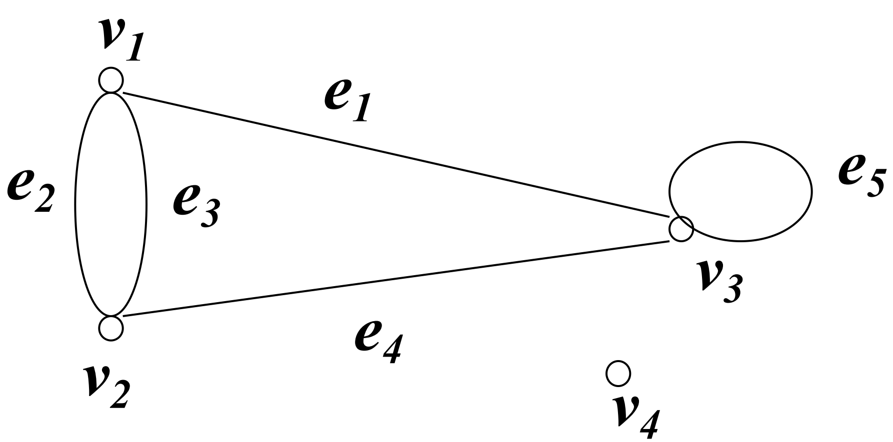
5.3 图的矩阵表示

- 无向图的关联矩阵
- 有向图的关联矩阵
- 有向图的邻接矩阵
- 有向图的可达矩阵

无向图的关联矩阵

定义 设无向图$G=\langle V, E\rangle$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令$m_{ij}$为$v_i$与$e_j$的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为**$G$的关联矩阵**，记为$M(G)$.

关联次数可能取值为0，1，2



$$M(G)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

无向图的关联矩阵（续）

性质

（1）每一列恰好有两个1或一个2

（2）第i行元素之和为v_i的度数，即

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i)$$

（3）所有元素之和等于2m

（4）$\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = 0$，当且仅当$v_i$为孤立点

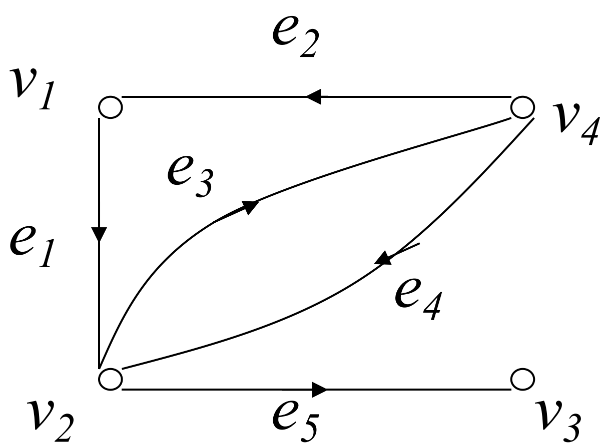
（5）平行边的列相同

有向图的关联矩阵

定义 设无环有向图$D=\langle V, E\rangle$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

则称$(m_{ij})_{n\times m}$为D的关联矩阵，记为$M(D)$.



$$M(D)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

性质:

(1) 每一列恰好有一个1和一个-1

(2) 第i行1的个数等于$d^+(v_i)$，-1的个数等于$d^-(v_i)$

(3) $M(D)$中所有1的个数等于所有-1的个数，都等于m.

(4) 平行边对应的列相同

A、B、C、D四人传球6次，从A开始，最终回到A的手里，有多少种传法？

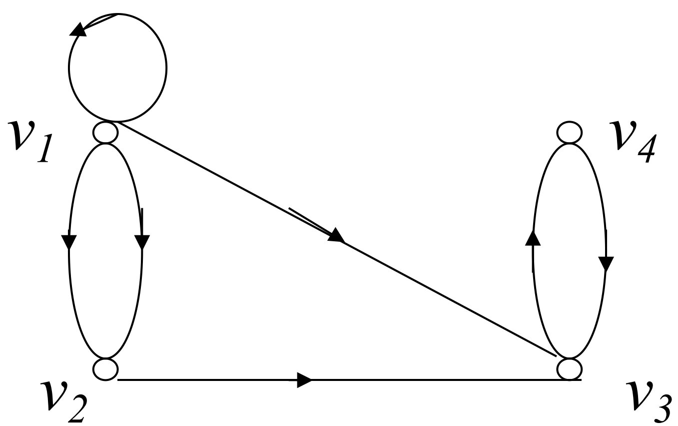
$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix},A^6=\begin{pmatrix}183&182&182&182\\182&183&182&182\\182&182&183&182\\182&182&182&183\end{pmatrix}$$

所以答案是183种。

如果你理解了图的邻接矩阵的定义，这个题变得非常简单。

有向图的邻接矩阵

定义 设有向图$D=<V, E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令 $a_{ij}^{(1)}$为顶点v_i邻接到顶点v_j边的条数，称$(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$为**$D$的邻接矩阵**, 记作$A(D)$, 简记为$A$.



$$A(D)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

性质

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n$

(3) $\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m ---D$中长度为1的通路数(边的总数)

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)} ---D$中长度为1的回路数（环的个数）

D中的通路及回路数

定理 设A为n阶有向图D的邻接矩阵, 则$A^l(l\geq 1)$中元素

$a_{ij}^{(l)}$为D中v_i到v_j长度为 l 的通路数，

$a_{ii}^{(l)}$为v_i到自身长度为 l 的回路数，

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的通路总数，

$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的回路总数.

D中的通路及回路数(续)

推论 设 $B_r = A + A^2 + \ldots + A^r (r \geq 1)$，则 B_r 中元素

$b_{ij}^{(r)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度小于等于 r 的通路数，

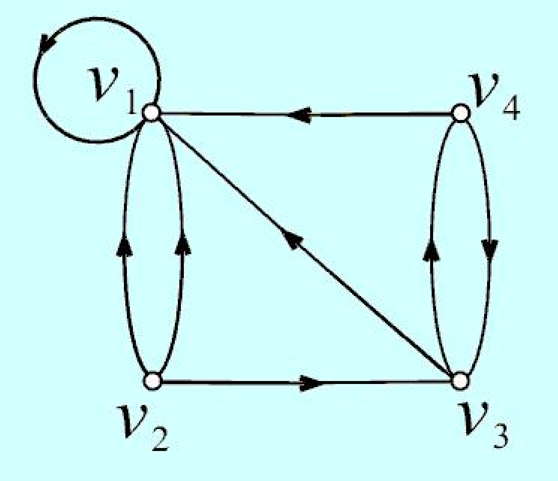
$\sum\limits_{i,j} b_{ij}^{(r)}$ 为 D 中长度小于或等于 r 的通路数，

$\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 r 的回路数.

例 有向图 D 如图所示, 求 A, A^2, A^3, A^4, 并回答问题：

(1) D 中长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？

(2) D 中长度小于或等于4的通路为多少条？其中有多少条回路？



例(续)

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

长度	通路	回路
1	8	1
2	11	3
3	14	1
4	17	3
合计	50	8

A、B、C、D四人传球6次，从A开始，最终回到A手里，有多少种传法?

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix},A^6=\begin{pmatrix}183&182&182&182\\182&183&182&182\\182&182&183&182\\182&182&182&183\end{pmatrix}$$

所以答案是183种。

如果你理解了图的邻接矩阵的定义，这个题变得非常简单。

有向图的可达矩阵

定义 设$D=<V, E>$为有向图, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i\text{可达}v_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

称$(p_{ij})_{n\times n}$为D的可达矩阵, 记作$P(D)$, 简记为P.

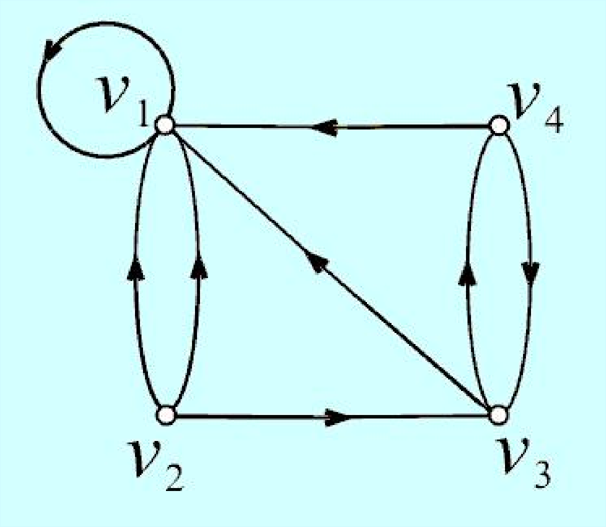
性质:

$P(D)$主对角线上的元素全为1.

D强连通当且仅当$P(D)$的元素全为1.

有向图的可达矩阵(续)

例 求下图所示的有向图D的可达矩阵



$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$$

本小节学习目标：

- 会写出图的关联矩阵、邻接矩阵、可达矩阵
- 重点理解邻接矩阵次方的含义