

正弦信号与窄带噪声分析

【实验目的】

1. 学习和理解窄带高斯噪声的特性及其数学模型。
2. 掌握使用 Matlab 生成正弦信号和窄带噪声的方法。
3. 通过仿真分析不同参数下正弦信号加窄带噪声的随机过程波形。
4. 计算并分析合成信号的自相关函数、功率谱密度和包络。
5. 加深对随机信号通过窄带系统后统计特性变化的理解。

【实验原理】

一个广义的平稳窄带高斯过程 $n(t)$ 可以表示为：

$$n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t)$$

其中, f_c 是中心频率, $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 分别是同相分量和正交分量, 它们是零均值、方差相同且相互独立的低频高斯过程。

当一个正弦信号 $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$ 与窄带高斯噪声 $n(t)$ 叠加后, 得到的信号 $x(t)$ 为：

$$x(t) = s(t) + n(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) + n_c(t) \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t)$$

通常我们研究当信号频率 f_0 与噪声中心频率 f_c 相等的情况。此时, 合成信号可以表示为：

$$x(t) = [A \cos(\phi_0) + n_c(t)] \cos(2\pi f_c t) - [A \sin(\phi_0) + n_s(t)] \sin(2\pi f_c t)$$

该信号的包络 $R(t)$ 为：

$$R(t) = \sqrt{[A \cos(\phi_0) + n_c(t)]^2 + [A \sin(\phi_0) + n_s(t)]^2}$$

当信噪比较高时, 包络近似服从高斯分布; 当信噪比较低时, 包络近似服从瑞利分布。

自相关函数 $R_x(\tau)$ 和功率谱密度 $P_x(f)$ 是分析随机过程特性的重要工具。对于合成信号 $x(t)$, 其自相关函数是信号自相关函数与噪声自相关函数之和。功率谱密度可以通过对自相关函数进行傅里叶变换得到。

【Matlab 仿真】

主要参数说明：

1. **A**: 正弦信号幅度
2. **f0**: 正弦信号频率
3. **fs**: 采样频率

4. **N**: 采样点数

5. **noise_bw**: 窄带噪声带宽

6. **noise_power**: 窄带噪声功率

仿真代码:

```

1  clear;
2  %参数
3  fs = 1000;      % 采样频率 (Hz)
4  T = 1;          % 总时长 (s)
5  t = 0:1/fs:T-1/fs; % 时间向量
6  N = length(t);
7
8  %情况1
9  A1 = 2;          % 正弦波幅度
10 f0_1 = 50;        % 正弦波频率 (Hz)
11 noise_power1 = 0.1; % 噪声功率
12
13 %情况2
14 A2 = 0.5;          % 正弦波幅度
15 f0_2 = 50;          % 正弦波频率 (Hz)
16 noise_power2 = 1;   % 噪声功率
17
18 [x1, s1, n1, R1, Px1, f1, lags1, R_env1] = generate_signal(A1, f0_1, noise_power1,
19     fs, N);
20
21 [x2, s2, n2, R2, Px2, f2, lags2, R_env2] = generate_signal(A2, f0_2, noise_power2,
22     fs, N);
23
24 %画图
25 figure('Name', '高信噪比 - 原始信号');
26 subplot(2,1,1);
27 plot(t, s1);
28 title('正弦波信号 (A=2)');
29 xlabel('时间 (s)');
30 ylabel('幅度');
31 grid on;
32
33 subplot(2,1,2);
34 plot(t, n1);
35 title('窄带噪声 (功率=0.1)');
36 xlabel('时间 (s)');
37 ylabel('幅度');
38 grid on;
39
40 figure('Name', '低信噪比 - 原始信号');
41 subplot(2,1,1);

```

```

39 plot(t, s2);
40 title('正弦波信号 (A=0.5)');
41 xlabel('时间 (s)');
42 ylabel('幅度');
43 grid on;
44
45 subplot(2,1,2);
46 plot(t, n2);
47 title('窄带噪声 (功率=1)');
48 xlabel('时间 (s)');
49 ylabel('幅度');
50 grid on;
51
52 figure('Name', '高信噪比 - 合成信号分析');
53 subplot(4,1,1);
54 plot(t, x1);
55 title('合成信号波形');
56 xlabel('时间 (s)');
57 ylabel('幅度');
58 grid on;
59
60 subplot(4,1,2);
61 plot(lags1/fs, R1);
62 title('自相关函数');
63 xlabel('延迟 (s)');
64 ylabel('相关性');
65 grid on;
66
67 subplot(4,1,3);
68 plot(f1, Px1);
69 title('功率谱密度');
70 xlabel('频率 (Hz)');
71 ylabel('功率');
72 grid on;
73
74 subplot(4,1,4);
75 plot(t, R_env1);
76 title('包络');
77 xlabel('时间 (s)');
78 ylabel('幅度');
79 grid on;
80
81 figure('Name', '低信噪比 - 合成信号分析');
82 subplot(4,1,1);
83 plot(t, x2);
84 title('合成信号波形');
85 xlabel('时间 (s)');
86 ylabel('幅度');

```

```

87 grid on;
88
89 subplot(4,1,2);
90 plot(lags2/fs, R2);
91 title('自相关函数');
92 xlabel('延迟 (s)');
93 ylabel('相关性');
94 grid on;
95
96 subplot(4,1,3);
97 plot(f2, Px2);
98 title('功率谱密度');
99 xlabel('频率 (Hz)');
100 ylabel('功率');
101 grid on;
102
103 subplot(4,1,4);
104 plot(t, R_env2);
105 title('包络');
106 xlabel('时间 (s)');
107 ylabel('幅度');
108 grid on;
109
110 function [x, s, n, Rx, Px, f, lags, R] = generate_signal(A, f0, noise_power, fs, N)
111     t = (0:N-1)/fs;
112     s = A * cos(2*pi*f0*t);
113     %窄带噪声
114     noise_bw = f0 / 5; % 带宽示例
115     [b, a] = butter(4, [f0-noise_bw/2, f0+noise_bw/2]/(fs/2));
116     wgn = sqrt(noise_power) * randn(1, N); % 高斯白噪声
117     n = filter(b, a, wgn);
118
119     x = s + n;
120
121     %自相关函数
122     [Rx, lags] = xcorr(x, 'biased');
123
124     %功率谱密度
125     Px_fft = fft(Rx);
126     Px = fftshift(abs(Px_fft));
127     f = (-length(Px_fft)/2:length(Px_fft)/2-1)*(fs/length(Px_fft));
128
129     %包络
130     R = abs(hilbert(x)); % 包络
131
132 end

```

仿真结果截图

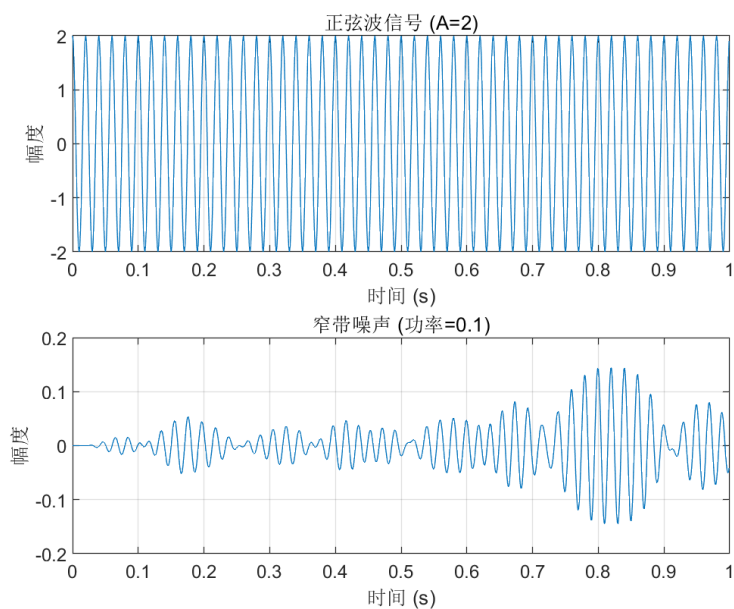
Case 1: 高信噪比 ($A=2$, noise_power=0.1)

图 1: Case 1: 正弦信号及窄带高斯信号波形

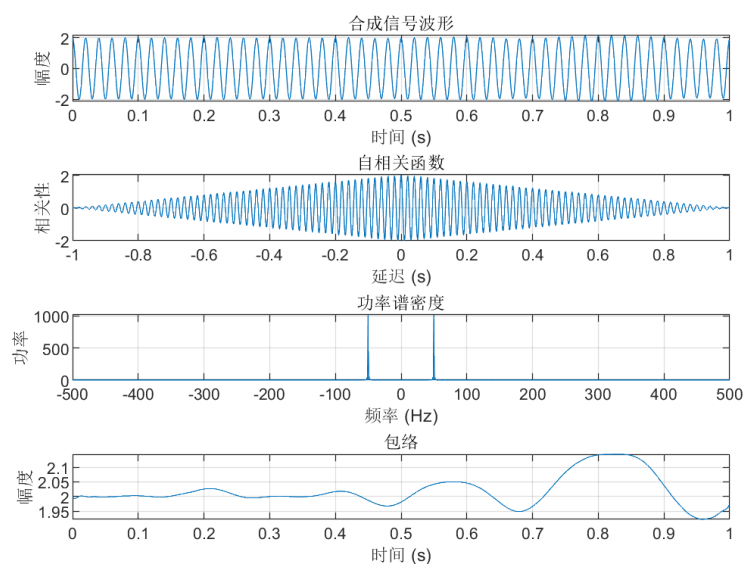


图 2: Case 1: 合成信号波形、自相关函数、功率谱及包络

Case 2: 低信噪比 ($A=0.5$, $\text{noise_power}=1$)

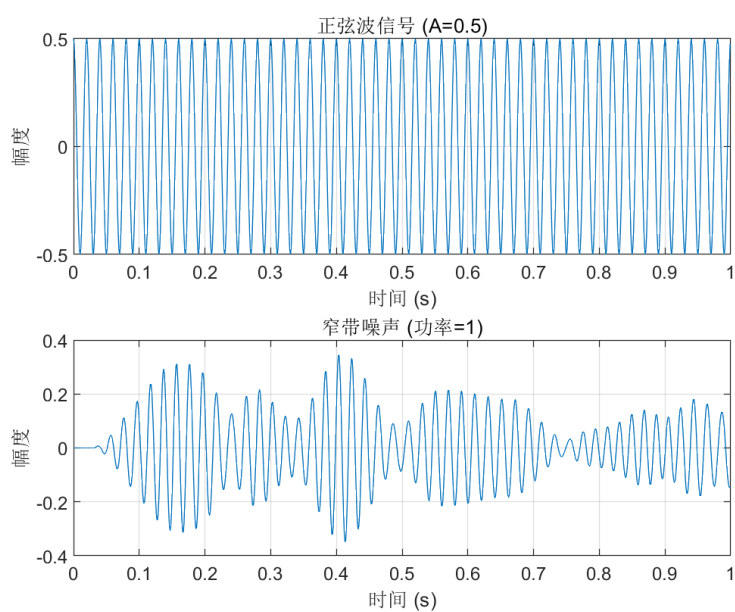


图 3: Case 2: 正弦信号及窄带高斯信号波形

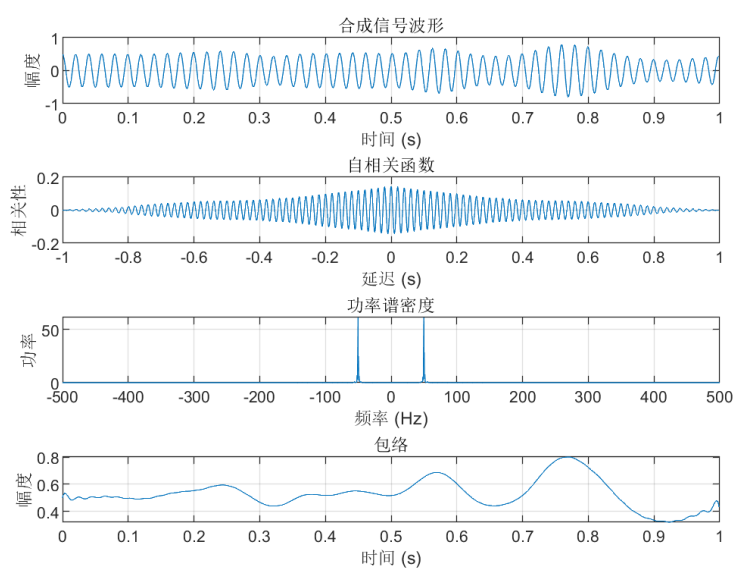


图 4: Case 2: 合成信号波形、自相关函数、功率谱及包络

【仿真结果分析】

通过本次仿真实验，我们系统地研究了正弦信号在窄带高斯噪声干扰下的合成波形特性、统计特征及其频域表现。通过对不同信噪比（SNR）情形的对比分析，可以清晰地观察到信号与噪声的能量比例对合成信号特性的显著影响。

在 **Case 1 (高信噪比)** 中，正弦信号的幅度远大于噪声的方差。时域波形显示，信号整体保持了规则的正弦振荡形式，仅在波峰和波谷处出现轻微随机扰动。这种小幅度的波动主要由窄带噪声的低频包络变化引起，但未对信号的整体结构造成实质破坏。其自相关函数表现出明显的周期性，与纯正弦信号的自相关函数形态高度一致。主峰清晰且规律性强，说明信号仍具有很强的时间相干性。随延迟增加，自相关函数幅值缓慢衰减，体现出信号中随机噪声成分的影响较小。在频域中，功率谱密度（PSD）在信号频率 $f_0 = 50\text{Hz}$ 附近呈现出尖锐的谱峰，旁侧的频谱分量较弱且分布窄，符合窄带噪声的特征。该结果说明，主要能量仍集中在载频处，信号特征保持稳定。信号的包络波形 $R(t)$ 近似为一条平滑曲线，振幅主要分布在正弦信号幅度 A 附近。由于信号分量占主导，包络的分布接近高斯分布，表明信号幅度的波动主要来源于微小噪声扰动，而非随机过程的统计波动。

在 **Case 2 (低信噪比)** 中，噪声功率显著增加，淹没了原始正弦信号的确定性成分。时域波形中，信号的周期性几乎被破坏，表现为幅度和相位均随机波动的过程，尽管整体仍在中心频率 f_0 附近振荡。自相关函数曲线中，主峰迅速衰减，周期性结构变得模糊，说明信号的相干性显著降低。此时，随机过程的统计性质占据主导，信号与噪声难以区分。在频域分析中，功率谱密度展现出较宽的谱分布，主峰不再尖锐，且噪声能量在较宽频带内均匀扩散，造成频谱“展宽”现象。这种展宽反映出信号频率成分的不确定性增加，说明噪声破坏了原有的频率集中性。包络分析结果表明， $R(t)$ 呈现强烈的随机起伏，局部幅值变化明显，信号的瞬时幅度不再稳定。其统计分布更接近瑞利分布，与理论模型相符。这种特征说明在低信噪比下，信号的幅度信息几乎完全由噪声统计特性决定。

综合高、低信噪比两种情形可得出以下结论：

- 信噪比（SNR）是决定信号可辨识性的核心因素。**当信噪比较高时，正弦信号的确定性特征明显；而当信噪比较低时，信号的周期性与可识别性显著降低。
- 自相关函数反映了信号相干性的变化。**高 SNR 下自相关函数具有明显周期性，而低 SNR 下快速衰减，体现出噪声对时间一致性的破坏。
- 功率谱密度揭示能量分布规律。**高 SNR 信号能量集中，谱峰突出；低 SNR 信号能量分散，谱宽增加，噪声主导频域特性。
- 包络分布体现统计特性转变。**高 SNR 下包络近似高斯分布，低 SNR 下转变为瑞利分布，符合随机信号理论。

总体而言，本实验清晰地验证了窄带高斯噪声叠加对正弦信号的影响规律。随着噪声功率增加，信号的确定性特征逐步被噪声掩盖，随机性增强。这一现象不仅符合理论预期，也为理解通信系统中信号检测、滤波与解调等过程提供了重要的仿真依据。

实验成员：张韞译萱，张凯铭，杨宸源

日期：2025 年 10 月 10 日