

4.3 关系的性质

- 自反性
- 反自反性
- 对称性
- 反对称性
- 传递性

定义(自反的)

设 $R \subseteq X \times X$, $(\forall x)(x \in X \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$, 则称 R 在 X 上是自反的。

Remark:

1. R 是 X 上的自反关系, R 的关系矩阵 M_R 和关系图有什么特点?

关系矩阵主对角线全为1;

关系图中每一个结点上都有自回路。

2. R 是 X 上的自反关系 $\Leftrightarrow I_X \subseteq R$

设 $X=\{1,2,3\}$, X 上的二元关系

$$R=\{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 1,2 \rangle\}$$

R 是自反的, 它的关系图、关系矩阵如下:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

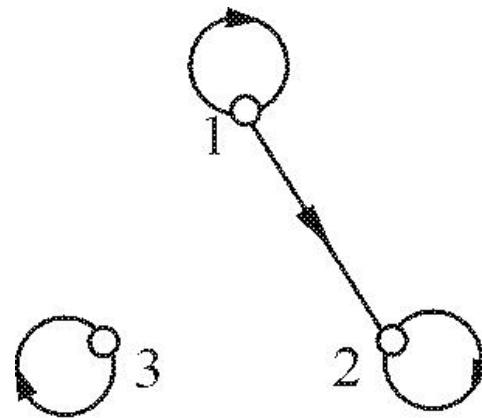


图 4.5

定义(反自反的)

设 $R \subseteq X \times X$, $(\forall x)(x \in X \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$, 则称 R 在 X 上是反自反的。

Remark.

1. R 是 X 上的反自反关系, R 的关系矩阵和关系图有什么特点?

M_R 的主对角线全为0; R 的关系图中每一个结点上都没有自回路。

2. R 是 X 上的反自反关系 $R \cap I_X = \emptyset$

设 $X=\{1,2,3\}$, X 上的二元关系 $R=\{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle\}$,
 R 是反自反的, 它的关系图关系矩阵如下:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

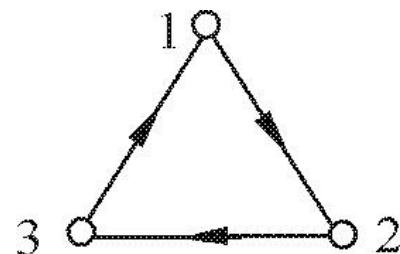


图 4.6

【例】设 R 是实数集合,

$$>=\{\langle x,y \rangle | x \in R \wedge y \in R \wedge x > y\}$$

是实数集合上的大于关系。证明实数集合上的大于关系是反自反的。

证明: $\forall x \in R$, $x \not> x$, $\langle x,x \rangle \notin >$, 所以 $>$ 是反自反的。

【例】 设 $A = \{1, 2, 3\}$, 定义 A 上的二元关系如下:

$$R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$$
$$S = \{\langle 1, 3 \rangle\}$$
$$T = \{\langle 1, 1 \rangle\}$$

试说明 R , S , T 是否是 A 上的自反关系或反自反关系。

解:

R 是 A 上的自反关系, 不是反自反关系。

S 是 A 上的反自反关系, 不是自反关系。

T 不是 A 上的自反关系也不是 A 上的反自反关系。

定义（对称的）

设 $R \subseteq X \times X$,

$(\forall x)(\forall y)(x \in X \wedge y \in X \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$,

则称 R 在 X 上是对称的。

Remark:

1. R 是 X 上的对称关系, R 的关系矩阵和关系图有什么特点?

关系矩阵 M_R 是对称阵。

关系图中, 若两个不同的结点间有边, 一定有方向相反的两条边。

2. R 是 X 上的对称关系 $\Leftrightarrow R = R^C$

设 $X=\{1,2,3\}$, X 上的二元关系 $R=\{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$,
 R 是对称的。它的关系图、关系矩阵如下:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

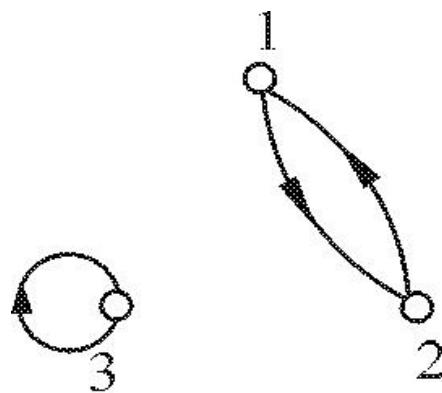


图 4.7

【例】设 $A=\{1,3,5,7\}$, 定义 A 上的二元关系如下:

$$R=\{\langle a,b \rangle | (a-b)/2 \text{是整数}\}$$

试证明 R 在 A 上是自反的和对称的。

证明:

自反的只需证明 $\forall a \in A, \langle a,a \rangle \in R$

对称的只需证明 $\forall a \in A, \forall b \in A$, 若 $\langle a,b \rangle \in R$, 则有 $\langle b,a \rangle \in R$

$\forall a \in A, (a-a)/2=0$, 0是整数, 所以 $\langle a,a \rangle \in R$ 。即 R 是自反的。

$\forall a \in A, \forall b \in A, \langle a,b \rangle \in R, (a-b)/2$ 是整数, 因为整数的相反数也是整数, 所以 $(b-a)/2=-(a-b)/2$ 是整数, $\langle b,a \rangle \in R$ 。即 R 是对称的。

定义（反对称的）

设 $R \subseteq X \times X$,

$(\forall x)(\forall y)(x \in X \wedge y \in X \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge (x \neq y) \rightarrow \langle y, x \rangle \notin R)$ 则称 R 在 X 上是反对称的。

Remark:

1. R 是 X 上的反对称关系，则其关系矩阵和关系图有下列特点：

M_R 中以主对角线为轴的对称位置上不能同时为1(主对角线除外)。

在 R 的关系图中每两个不同的结点间不能有方向相反的两条边。

2. R 是 X 上的反对称关系 $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_X$

设 $X = \{1, 2, 3\}$, X 上的二元关系 $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$, R 是反对称的。它的关系图、关系矩阵如下:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

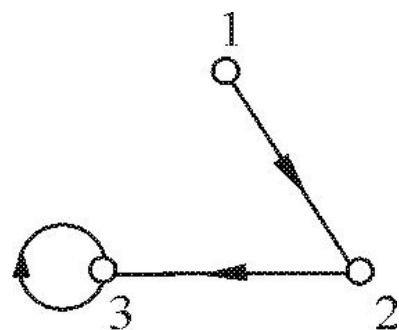


图 4.8

【例】设 $A=\{1,2,3\}$, 定义 A 上的二元关系如下:

$$R=\{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle\}$$

$$S=\{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$$

$$T=\{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle\}$$

$$U=\{\langle 1,3 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$$

试说明 R , S , T , U 是否是 A 上的对称关系和反对称关系。

解:

R 是 A 上的对称关系, 也是 A 上的反对称关系。

S 是 A 上的对称关系, S 不是 A 上的反对称关系。

T 不是 A 上的对称关系, T 是 A 上的反对称关系。

U 不是 A 上的对称关系, 也不是 A 上的反对称关系。

定义（传递的）

设 $R \subseteq X \times X$,

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$

则称 R 在 X 上是传递的。

R 是传递的当且仅当 $R^\circ \subseteq R$

【例】设 R 是实数集合，

$$S = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in R \wedge y \in R \wedge x = y \}$$

是实数集合上的等于关系。证明实数集合上的等于关系是传递的。

证明： $\forall x \in R, \forall y \in R, \forall z \in R,$

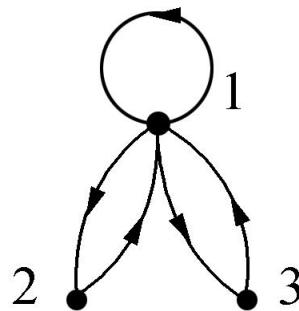
$\langle x, y \rangle \in S$ 且 $\langle y, z \rangle \in S$ ，由 S 的定义有 $x = y$ 和 $y = z$ ，
由实数相等的概念得 $x = z$ 。

再根据 S 的定义， $\langle x, z \rangle \in S$ 。

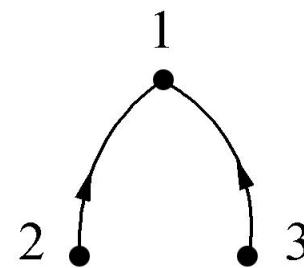
故实数集合上的等于关系 S 是传递的。

实例

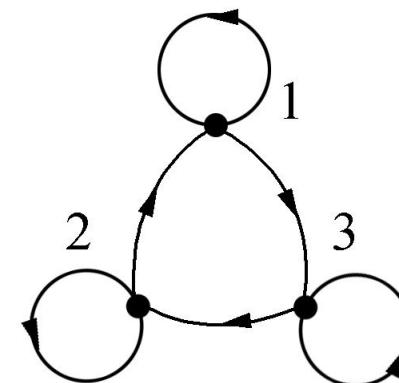
例 判断下图中关系的性质，并说明理由.



(a)



(b)



(c)

- (a)不自反也不反自反；对称，不反对称；不传递.
- (b)反自反，不是自反的；反对称，不是对称的；是传递的.
- (c)自反，不反自反；反对称，不是对称；不传递.

【例】设 R, S 是 X 上的二元关系，证明

- (1)若 R, S 是自反的，则 $R \cup S$ 和 $R \cap S$ 是自反的。
- (2)若 R, S 是对称的，则 $R \cup S$ 和 $R \cap S$ 是对称的。
- (3)若 R, S 是传递的，则 $R \cap S$ 也是传递的。

证明：

- (1)设 R, S 是自反的，

$$I_X \subseteq R, I_X \subseteq S,$$

$$\text{则 } I_X \subseteq R \cup S, I_X \subseteq R \cap S,$$

所以 $R \cup S$ 和 $R \cap S$ 也是自反的。

(2) 设 R, S 是对称的,

$$R = R^C, \quad S = S^C,$$

则 $R \cup S = R^C \cup S^C = (R \cup S)^C, \quad R \cap S = R^C \cap S^C = (R \cap S)^C$,
所以 $R \cup S$ 和 $R \cap S$ 也是对称的。

(3) 设 R, S 是传递的,

$$R^\circ \ R \subseteq R, \quad S^\circ \ S \subseteq S,$$

$$\begin{aligned} (R \cap S)^\circ \ (R \cap S) &\subseteq (R^\circ \ R) \cap (R^\circ \ S) \cap (S^\circ \ R) \cap (S^\circ \ S) \\ &\subseteq (R^\circ \ R) \cap (S^\circ \ S) \subseteq R \cap S \end{aligned}$$

即 $(R \cap S)^\circ \ (R \cap S) \subseteq R \cap S$,

所以 $R \cap S$ 是传递的。

关系性质总结（关系矩阵和关系图的特点）

| | 自反 | 反自反 | 对称 | 反对称 | 传递 |
|------|-------------------|--------------------------|----------------------------|--|--|
| 表达式 | $I_A \subseteq R$ | $R \cap I_A = \emptyset$ | $R = R^{-1}$ | $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ | $R \circ R \subseteq R$ |
| 关系矩阵 | 主对角线元素全都是1 | 主对角线元素全都是0 | 矩阵是对称矩阵 | 若 $r_{ij} = 1$, 且 $i \neq j$, 则 $r_{ji} = 0$ | 对 M^2 中 1 所在位置, M 中相应位置都是1 |
| 关系图 | 每个顶点都有环 | 每个顶点都没有环 | 如果两个顶点之间有边, 是一对方向相反的边(无单边) | 如果两点之间有边, 是一条有向边(无双向边) | 如果顶点 x_i 连通到 x_k , 则从 x_i 到 x_k 有边 |

关系性质总结（集合表示上的特点）

设 R 为 A 上的关系，则

- (1) R 在 A 上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$
- (2) R 在 A 上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \emptyset$
- (3) R 在 A 上对称当且仅当 $R = R^{-1}$
- (4) R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
- (5) R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

自反性证明

证明模式 证明 R 在 A 上自反

任取 x ,

$x \in A \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$

| | | |
|----|------|----|
| 前提 | 推理过程 | 结论 |
|----|------|----|

例 证明若 $I_A \subseteq R$ ，则 R 在 A 上自反.

证 任取 x ,

$x \in A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$

因此 R 在 A 上是自反的.

对称性证明

证明模式 证明 R 在 A 上对称

任取 $\langle x, y \rangle$

$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$

前提

推理过程

结论

例 证明若 $R=R^{-1}$, 则 R 在 A 上对称.

证 任取 $\langle x, y \rangle$

$$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R^{-1} \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R$$

因此 R 在 A 上是对称的.

反对称性证明

证明模式 证明 R 在 A 上反对称

任取 $\langle x, y \rangle$

$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \Rightarrow \dots \Rightarrow x = y$

前提

推理过程

结论

例6 证明若 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$, 则 R 在 A 上反对称.

证 任取 $\langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R^{-1} \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \cap R^{-1} \Rightarrow \langle x, y \rangle \in I_A \Rightarrow x = y\end{aligned}$$

因此 R 在 A 上是反对称的.

传递性证明

证明模式 证明 R 在 A 上传递

任取 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle$

$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$

前提

推理过程

结论

例7 证明若 $R^{\circ}R \subseteq R$ ，则 R 在 A 上传递.

证 任取 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle$

$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R^{\circ}R \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$

因此 R 在 A 上是传递的.

运算与性质的关系

| | 自反性 | 反自反性 | 对称性 | 反对称性 | 传递性 |
|-----------------|-----|------|-----|------|-----|
| R_1^{-1} | √ | √ | √ | √ | √ |
| $R_1 \cap R_2$ | √ | √ | √ | √ | √ |
| $R_1 \cup R_2$ | √ | √ | √ | × | × |
| $R_1 - R_2$ | × | √ | √ | √ | × |
| $R_1 \circ R_2$ | √ | × | × | × | × |

本小节学习目标

- 理解掌握关系五种性质（自反、反自反、对称、反对称、传递）的定义；
- 会根据关系矩阵、关系图、集合表示等来判定关系的性质。

4.4 关系的闭包（不讲）

- 闭包定义
- 闭包的构造方法
 - 集合表示
 - 矩阵表示
 - 图表示
- 闭包的性质

闭包定义

定义 设 R 是非空集合 A 上的关系, R 的**自反**(**对称或传递**)**闭包**是 A 上的关系 R' ,使得 R' 满足以下条件:

- (1) R' 是自反的(对称的或传递的)
- (2) $R \subseteq R'$
- (3) 对 A 上任何包含 R 的自反(对称或传递)关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.

一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$,对称闭包记作 $s(R)$,传递闭包记作 $t(R)$.

闭包的构造方法

定理1 设 R 为 A 上的关系, 则有

$$(1) \ r(R) = R \cup R^0$$

$$(2) \ s(R) = R \cup R^{-1}$$

$$(3) \ t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

说明:

- 对于有穷集合 A ($|A|=n$) 上的关系, (3)中的并最多不超过 R^n .
- 若 R 是自反的, 则 $r(R)=R$; 若 R 是对称的, 则 $s(R)=R$; 若 R 是传递的, 则 $t(R)=R$.

闭包的构造方法（续）

设关系 R , $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系矩阵分别为 M , M_r , M_s 和 M_t , 则

$$M_r = M + E$$

$$M_s = M + M'$$

$$M_t = M + M^2 + M^3 + \dots$$

E 是和 M 同阶的单位矩阵, M' 是 M 的转置矩阵.
注意在上述等式中矩阵的元素相加时使用逻辑加.

闭包的构造方法（续）

设关系 $R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系图分别记为 G, G_r, G_s, G_t , 则 G_r, G_s, G_t 的顶点集与 G 的顶点集相等. 除了 G 的边以外, 以下述方法添加新边:

考察 G 的每个顶点, 如果没有环就加上一个环, 最终得到 G_r . 考察 G 的每条边, 如果有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i \neq j$, 则在 G 中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边, 最终得到 G_s . 考察 G 的每个顶点 x_i , 找从 x_i 出发的每一条路径, 如果从 x_i 到路径中任何结点 x_j 没有边, 就加上这条边. 当检查完所有的顶点后就得到图 G_t .

实例

例1 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b \rangle, \langle b,a \rangle, \langle b,c \rangle, \langle c,d \rangle, \langle d,b \rangle\}$, R 和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图如下图所示.



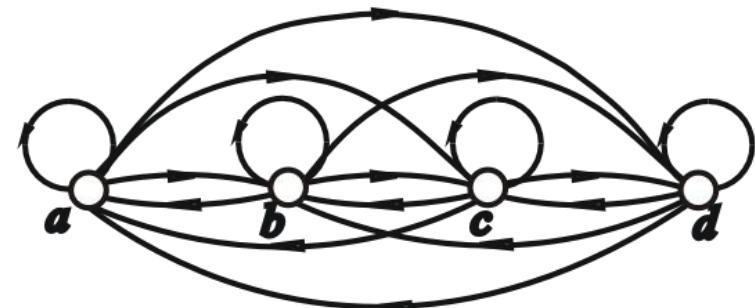
R



$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$