1. 下列各式是描述系统的微分方程，其中 $c(t)$ 为输出量，$r(t)$ 为输人量，试判断哪些是线性定常或时变系统，哪些是非线性系统。

（1）$c(t)=5+r^2(t)+t\frac{\mathrm{d}^2r(t)}{\mathrm{d}t^2}$;

（2） $\frac{\mathrm{d}^3c(t)}{\mathrm{d}t^3}+3\frac{\mathrm{d}^2c(t)}{\mathrm{d}t^2}+6\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}+8c(t)=r(t)$；

（3） $t\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}+c(t)=r(t)+3\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$;

（4） $c(t)=r(t)\cos\ \omega t+5$;

（5） $c(t)=3r(t)+6\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+5\int_{-\infty}^{t}r(\tau)\mathrm{d}\tau$；

（6）$c(t)=r^2(t)$；

（7） $c(t)=\begin{cases}0, & t<6,\\ r(t), & t\geqslant 6\end{cases}$

Answer:

（1）非线性时变系统；

（2）线性定常系统；

（3）线性时变系统；

（4）非线性时变系统；

（5）线性定常系统；

（6）非线性定常系统；

（7）线性延迟系统。

2. 已知单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)},\ K^*>0$$

（1）绘制系统概略的根轨迹图 (求出分离点及与虚轴的交点);

（2）确定系统稳定时的 K 值范围;

（3）求分离点的 K^* 以及系统闭环极点处在分离点时阻尼比的值。

解：(1) 绘根轨迹图

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{(s+1+j)(s+1-j)(s+1+j2)(s+1-j2)}$$

渐近线：$\sigma_a=-1;\varphi_a=\pm 45°,\pm 135°$

分离点：由分离点方程

$$\frac{1}{d+1+j}+\frac{1}{d+1-j}+\frac{1}{d+1+j2}+\frac{1}{d+1-j2}=0$$

化简得

$$2(d+1)(2d^2+4d+7)=0$$

令$d+1=0$，得

$$d=-1\ （舍去）$$

令

$$2d^2+4d+7=0$$

求出

$$d=-1\pm j1.58$$

根轨迹与虚轴交点：由系统闭环特征方程

$$s^4+4s^3+11s^2+14s+10+K^*=0$$

列劳思表

$$\begin{array}{cccc}
s^4 & 1 & 11 & 10+K^* \\
s^3 & 4 & 14 & 0 \\
s^2 & 7.5 & 10+K^* & 0 \\
s^1 & \dfrac{65-4K^*}{7.5} & 0 & 0 \\
s^0 & 10+K^* & &
\end{array}$$

当 $K^*=16.25$ 时，劳斯表有全零行。辅助方程为

$$7.5s^2+10+K^*=0$$

代入 $K^*=16.25$ 及 $s=j\omega$，求出根轨迹与虚轴交点为

$$K^*=16.25,\ \omega=\pm 1.87$$

绘出系统根轨迹图如图 1 所示。

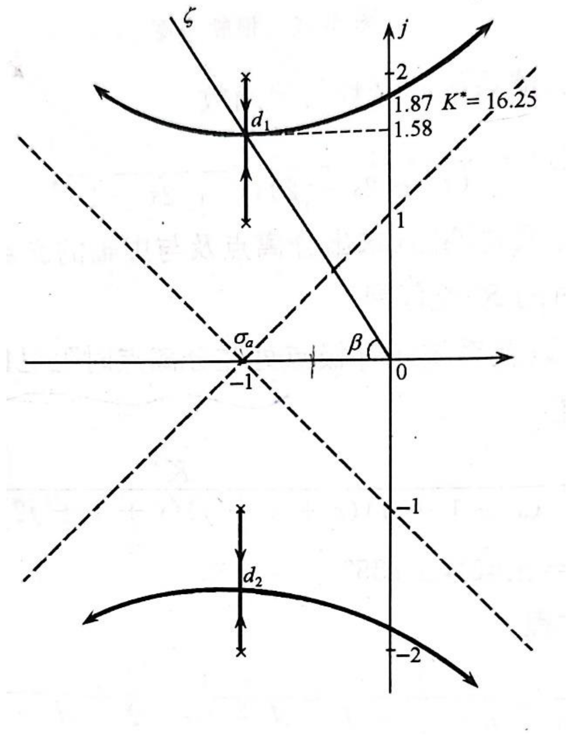

图 1

(2) 确定使系统稳定的 K 值范围

由图 1 知，使闭环系统稳定的 K^* 值范围为

$$0<K^*<16.25$$

由开环传递函数知

$$K=\frac{K^*}{10}$$

故使系统稳定的 K 值范围为

$$0<K<1.625$$

(3) 求分离点处的K^*及相应阻尼比 ζ

由分离点方程

$$2d^2+4d+7=0$$

知，分离点坐标满足

$$d^2+2d=-3.5$$

将分离点坐标代入根轨迹方程

$$G(s)H(s)=-1$$

得

$$\begin{aligned} K_d^* &= -(d^2+2d+2)(d^2+2d+5) \\ &= -(-3.5+2)(-3.5+5) \\ &= 2.25 \end{aligned}$$

或者，利用模值条件，得

$$K_d^*=0.42\times0.58\times2.58\times3.58=2.25$$

在图 1 上，过分离点 d_1 作阻尼比 ζ线，求出

$$\zeta=\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+(1.58)^2}}=0.535$$

3. 设某单位负反馈系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{4K(1-s)}{s[(K+1)s+4]}$$

（1）概略绘制 K 从 $0\to+\infty$ 时系统的根轨迹图;

（2）求系统阶跃响应中含有分量 $\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega t+\beta)$ 时的 K 值范围，其中 $\alpha>0,\omega>0$;

（3）求系统有一个闭环极点为 -2 时的闭环传递函数。

解：(1) 绘根轨迹图

闭环特征方程为

$$(s^2+4s)+K(s^2-4s+4)=0$$

写成根轨迹方程形式为

$$1+\frac{K(s-2)^2}{s(s+4)}=0$$

令等效开环传递函数为

$$G_1(s)=\frac{K(s-2)^2}{s(s+4)}$$

实轴上根轨迹：$[-4,0]$
分离点：由 $\frac{1}{d}+\frac{1}{d+4}=\frac{2}{d-2}$ 求得

$$d = -1$$

与虚轴交点：列劳斯表

$$\begin{array}{lcc} s^2 & K+1 & 4K \\ s^1 & 4-4K & 0 \\ s^0 & 4K & \end{array}$$

显然，当 $K = 1$ 时系统处于临界稳定，由辅助方程并代入 $K = 1$，解出交点处

$$K = 1,\ \omega = \pm\sqrt{2}$$

分离点处根轨迹增益：由模值条件得

$$K_d = \frac{1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{1}{3}$$

绘出系统根轨迹图如图 2 所示。

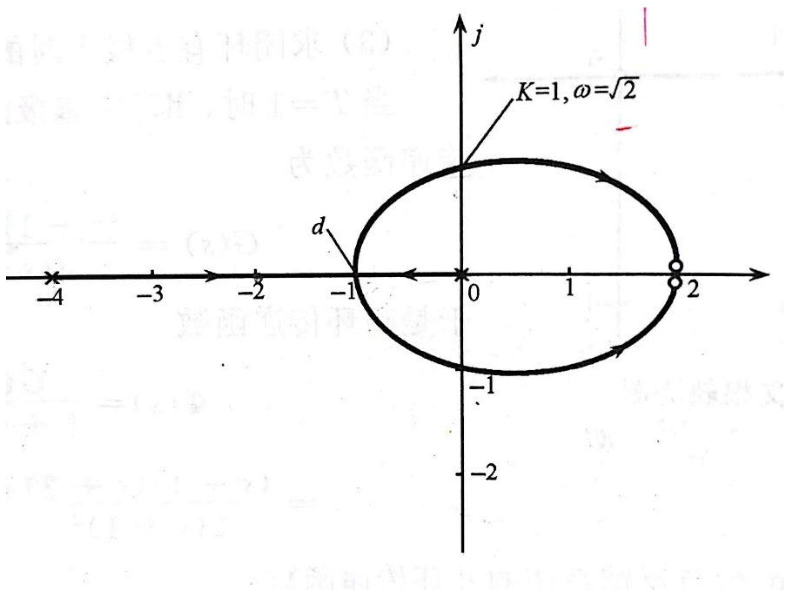

图 2

（2）求 K 值范围

当系统阶跃响应含有 $e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \beta)$ 分量时，系统处于欠阻尼状态，系统有一对具有负实部的共轭极点， K 值范围为

$$\frac{1}{3} < K < 1$$

(3) 求闭环传递函数

当系统具有 $s_1 = -2$ 闭环极点时，由模值条件，其对应的 K 值为

$$K = \frac{2 \times 2}{4 \times 4} = \frac{1}{4}$$

于是

$$G(s)=\frac{(1-s)}{s\left(\frac{5}{4}s+4\right)}$$

闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{0.8(1-s)}{(s+0.4)(s+2)}$$

4. 设系统结构图如图 3 所示，误差定义为 $E(s)=R(s)-C(s)$。试确定参数 K_1 和 T_0，使以下条件同时满足：

（1）在 $r(t)=t$ 作用下无稳态误差;

（2）在 $n(t)=t$ 作用下, 稳态误差的绝对值不大于 0.05。

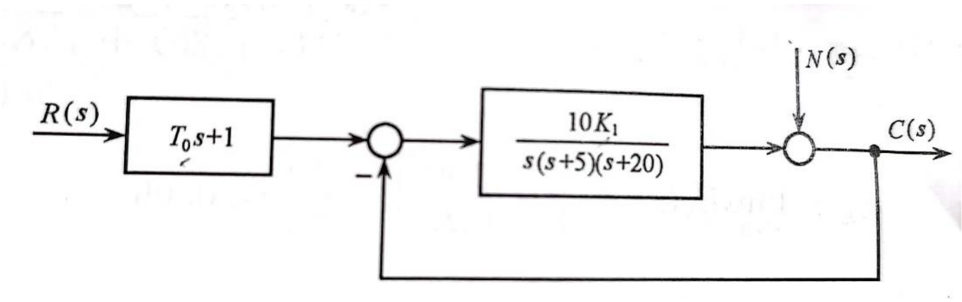

图 3

解：(1) 稳定性要求
参数 K_1 和 T_0 的选择，首先应保证系统稳定。由图可知，令 $N(s)=0$，系统在 $R(s)$ 作用下的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{10K_1(T_0s+1)}{s(s+5)(s+20)+10K_1}$$

若令 $R(s)=0$，则系统在 $N(s)$ 作用下的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{N(s)}=\frac{s(s+5)(s+20)}{s(s+5)(s+20)+10K_1}$$

因而，闭环特征方程为

$$s^3+25s^2+100s+10K_1=0$$

其劳思表如下：

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 100 \\ s^2 & 25 & 10K_1 \\ s^1 & \dfrac{2500-10K_1}{25} & 0 \\ s^0 & 10K_1 & \end{array}$$

可见，使闭环系统稳定的 K_1 值为

$$0 < K_1 < 250$$

而 T_0 取值不影响系统稳定性。

(2) 稳态误差要求

当 $r(t) = t$ 时，$R(s) = \frac{1}{s^2}$，而

$$\begin{aligned} E_r(s) \quad &= R(s) - C(s) = \left[1 - \frac{10K_1(T_0 s + 1)}{s(s+5)(s+20) + 10K_1}\right] R(s) \\ &= \frac{s[s^2 + 25s + (100 - 10K_1T_0)]}{s^3 + 25s^2 + 100s + 10K_1} \cdot \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

要求稳态误差

$$e_{ssr} = \lim_{s \to 0} sE_r(s) = \frac{100 - 10K_1T_0}{10K_1} = 0$$

应满足

$$K_1T_0 = 10$$

当$n(t) = t$时，$N(s) = \frac{1}{s^2}$，而

$$E_n(s) = R(s) - C(s) = -C(s) = -\frac{s(s+5)(s+20)}{s(s+5)(s+20) + 10K_1} \cdot \frac{1}{s^2}$$

要求稳态误差

$$e_{ssn} = \lim_{s \to 0} sE_n(s) = \left|-\frac{100}{10K_1}\right| = \frac{10}{K_1} \leqslant 0.05$$

应满足

$$K_1 \geqslant 200$$

综合稳定性及稳态误差要求，应取

$$200 \leqslant K_1 < 250,\ T_0 = \frac{10}{K_1}$$

不妨取 $K_1 = 200$，则 $T_0 = 0.05$ 。

5. 设单位反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(0.5s+1)(0.2s+1)}$$

（1）求单位阶跃输入作用下系统的稳态误差；

（2）确定系统的单位阶跃响应。

解：(1) 拉氏反变换法

写出系统闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{10}{s^3+7s^2+10s+10}$$

由于系统是 I 型的，故有 $\Phi(0)=1$。对闭环特征方程进行因式分解，得

$$\begin{aligned}D(s)\quad &=s^3+7s^2+10s+10=(s+5.52)(s^2+1.48s+1.83)\\&=(s+5.52)(s+0.74\pm j1.13)=0\end{aligned}$$

由于

$$\Phi(s)=\frac{10}{(s+5.52)(s^2+1.48s+1.83)}=\frac{\omega_n^2 p}{(s+p)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}\qquad(1)$$

故有：$p=5.52,\zeta=0.55,\omega_n=1.35$。从而算得

$$\beta=\frac{p}{\zeta\omega_n}=7.46$$

由式(1)有

$$\begin{aligned}h(t)=\quad &1-\frac{\mathrm{e}^{-\beta t}}{\beta\zeta^2(\beta-2)+1}-\frac{\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t}}{\beta\zeta^2(\beta-2)+1}\left[\beta\zeta^2(\beta-2)\cos\ \omega_d t\right.\\&\left.+\frac{\beta\zeta(\zeta^2(\beta-2)+1)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\ \omega_d t\right]\\=\quad &1-0.076\mathrm{e}^{-5.52t}-\mathrm{e}^{-0.74t}(0.93\cos\ 1.13t+0.98\sin\ 1.13t)\end{aligned}$$

由于指数项很快衰减，故上式可近似为

$$h(t)=1-\mathrm{e}^{-0.74t}(0.93\cos\ 1.13t+0.98\sin\ 1.13t)$$

这种近似方法仅在最后表达式中略去了非主导极点产生的微小分量，但已考虑了非主导极点对主导极点处留数的影响。

（2）主导极点法

由闭环特征方程的因式分解知，闭环主导极点应为

$$s_{1,2}=-0.74\pm j1.13$$

用主导极点代替全部极点，并注意到保持 $\Phi(0)=1$，可得近似闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{1.83}{s^2+1.48s+1.83}$$

由于 $\zeta=0.55, \omega_n=1.35$，故由式(3-37)得

$$
\begin{aligned}
h(t) &= 1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_d t+\arccos\,\zeta\right) \\
&= 1-\mathrm{e}^{-0.74t}(\cos\,1.13t+0.65\sin\,1.13t)
\end{aligned}
$$

6. 已知单位负反馈系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}, K>0, T>0$$

在 T 不变时，为什么单纯调整 K 值不能得到快速性和振荡性都好的闭环阶跃响应过程？叙述一种改变系统结构以改善系统性能的方案，并简述其理由。

解：由题意

$$G(s)=\frac{K/T}{s(s+1/T)}=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

故有

$$\omega_n=\sqrt{\frac{K}{T}}, \zeta=\frac{1}{2\sqrt{KT}}$$

表征系统快速性和振荡性的动态性能指标分别为上升时间 t_r 和超调量 $\sigma\%$，其表达式为

$$t_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}, \sigma\%=\mathrm{e}^{-\pi\zeta}/\sqrt{1-\zeta^2}\times 100\%$$

可以看出，要求系统快速性及振荡性均好，就要求系统的自然频率 ω_n 和阻尼比 ζ 均大。然而，在 T 不变情况下，单纯调整 K，不可能满足同时增大 ω_n 和 ζ 的要求，例如增大 K，可加大 ω_n，但同时也减小了 ζ；反之，减小 K，可加大 ζ，但同时也减小了 ω_n 。

一种改善系统性能的方案是附加测速反馈，如图 4 所示，K_t 为测速反馈系数。

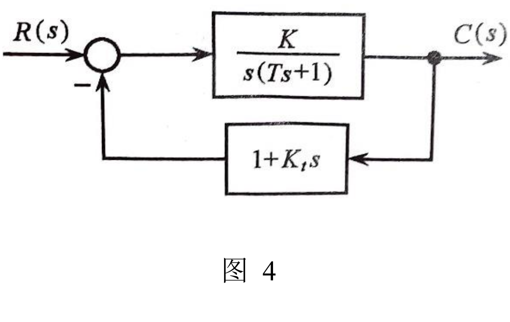

图 4

由图得系统闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{K/T}{s^2+\frac{1}{T}(1+KK_t)s+\frac{K}{T}}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

于是有

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}, \zeta = \frac{1 + KK_t}{2\sqrt{KT}}$$

显然，增大 K 可同时满足系统对快速性和振荡性的要求。

7. 已知系统结构图和开环对数频率特性曲线如下图 5 所示。

（1）确定使闭环系统具有欠阻尼状态的开环增益 K 的范围;

（2）当阻尼比 $\zeta = 0.707$ 时, 求系统的开环增益 K 及系统的动态性能 $\sigma\%$ 和 t_s；

（3）当开环增益 $K = 6$ 时, 求系统的速度误差 e_{ss} 。

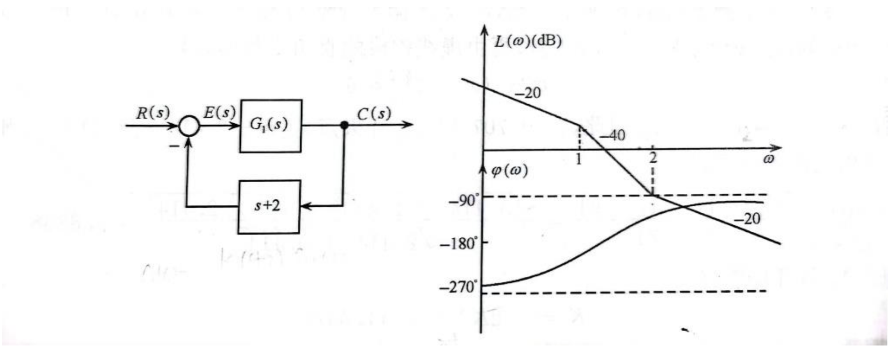

图 5

解：(1) 求闭环系统欠阻尼状态时的 K 值范围

由图可得系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s-1)}$$

为了确定满足题意要求的 K 值，作系统根轨迹，其分离点坐标为

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d-1} = \frac{1}{d+2}$$

经整理

$$d^2 + 4d - 2 = 0$$

求得

$$d_1 = 0.45, d_2 = -4.45$$

系统根轨迹是一个以 $(-2, j0)$ 为圆心， $\sqrt{6} = 2.45$ 为半径的圆，如图 6 所示。

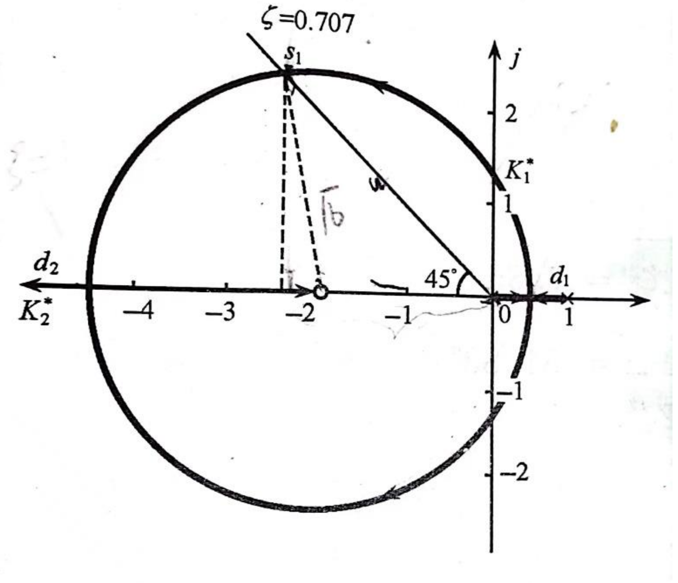

图 6

当 $\zeta = 0$ 时，根轨迹与虚轴相交，其对应 K_1^* 求法如下：写出闭环特征方程

$$s^2 + (K^* - 1)s + 2K^* = 0$$

令 $s = j\omega$，有

$$(2K^* - \omega^2) + j(K^* - 1)\omega = 0$$

令 $2K^* - \omega^2 = 0$，得 $\omega = \sqrt{2K^*}$，代入虚部，有

$$2K^*(K^* - 1)^2 = 0$$

故 $K_1^* = 1$ 。
当 $\zeta = 1$ 时，根轨迹在 d_2 处呈现重极点，由模值条件

$$K_2^* = \frac{5.45 \times 4.45}{2.45} = 9.899$$

闭环系统为欠阻尼状态时，根轨迹增益

$$1 < K^* < 9.899$$

由开环传递函数 $G(s)$ 知：开环增益 $K = -2K^*$，因此，使闭环系统具有欠阻尼状态的 K 值范围为

$$-19.8 < K < -2$$

(2) $\zeta = 0.707$ 时的 K 及 $\sigma\%$ 和 t_s
在图 5-88 上画 $\zeta = \cos\beta = 0.707$ 线，$\beta = 45°$，阻尼比线与根轨迹交于 s_1 点。由等腰直角三角形知，s_1 点坐标为 $s_1 = -x + jx$；再由虚线构成的直角三角形，得

$$x^2 + (x - 2)^2 = 6$$

解得 $x=1+\sqrt{2}=2.414$。因此，$\zeta=0.707$ 对应闭环极点 $s_{1,2}=-2.414\pm j2.414$。其相应 K^*可由模值条件算得

$$K^*=\frac{|s_1-1|\cdot|s_1-0|}{|s_1+2|}=\frac{\sqrt{3.414^2+2.414^2}\times\sqrt{2\times2.414^2}}{\sqrt{2.414^2+0.414^2}}=5.8288$$

对应的系统开环增益

$$K=-2K^*=-11.6576$$

超调量

$$\sigma\%=\mathrm{e}^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\times100\%=4.3\%$$

其相应闭环特征方程

$$s^2+4.8288s+11.6576=0$$

因 $2\zeta\omega_n=4.8288,\zeta\omega_n=2.4144$，故调节时间

$$t_s=\frac{3.5}{\zeta\omega_n}=1.45$$

(3) 求 $K=6$ 时的速度误差 e_{ss}

相应开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(0.5s+1)}{s(s-1)}$$

因此

$$e_{ss}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to0}G(s)}=-\frac{1}{K}=-\frac{1}{6}=-0.167$$

8.如图所示的采样控制系统，其中采样周期 T=1s, k>0.

（1）求系统的闭环和开环脉冲传递函数。

（2）根据（1）的结果画出系统的在 Z 平面中的根轨迹。

（3）求 k=1 时单位阶跃输入时的稳态误差。