

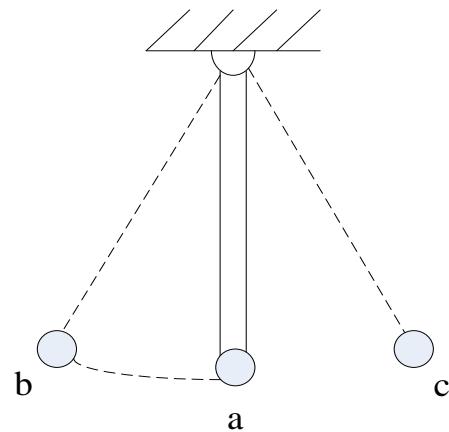
# 自动控制原理

## 第4章 控制系统的稳定性分析

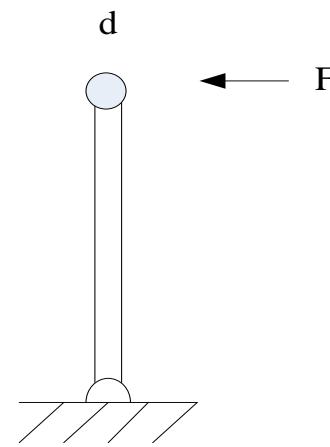
东南大学 自动化学院  
陈杨杨

[yychen@seu.edu.cn](mailto:yychen@seu.edu.cn)

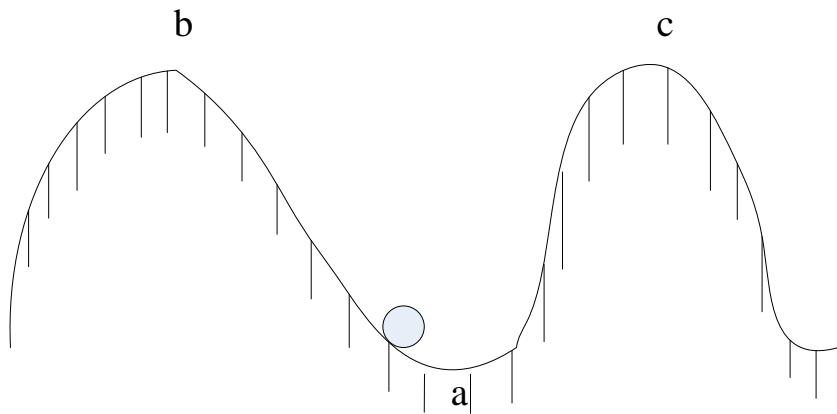
## 4.1 稳定性的概念和定义



平衡点a稳定



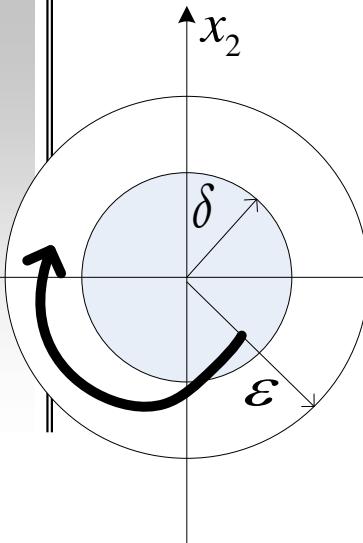
平衡点d不稳定



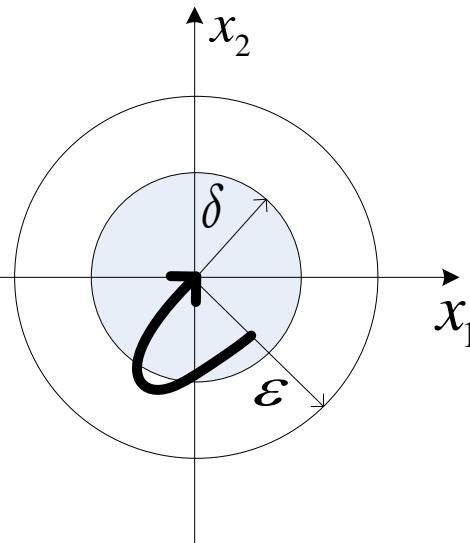
平衡点a稳定, b.c不稳定

稳定性:外力消失后,  
回平衡点的能力

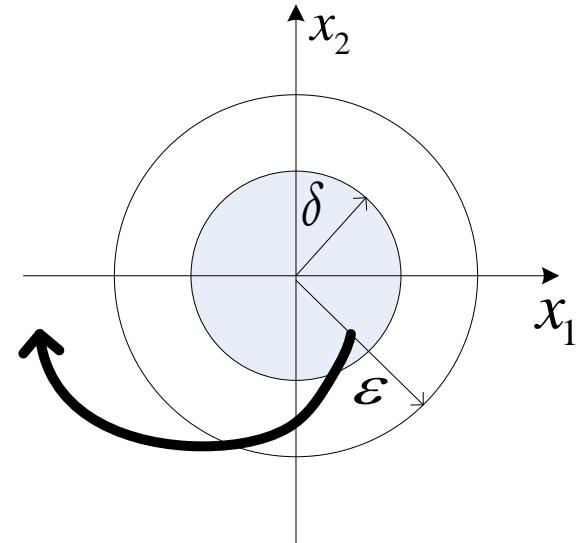
## 几个常见术语



稳定



渐进稳定



不稳定

稳定, 漐近稳定, 全局稳定  
局部稳定, 不稳定

## 4.2 线性定常系统稳定的充要条件

### 4.2.2 输入-输出方程

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} u(t) + b_0 u(t)$$

令  $u=0$ , 系统的解轨迹为

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}$$

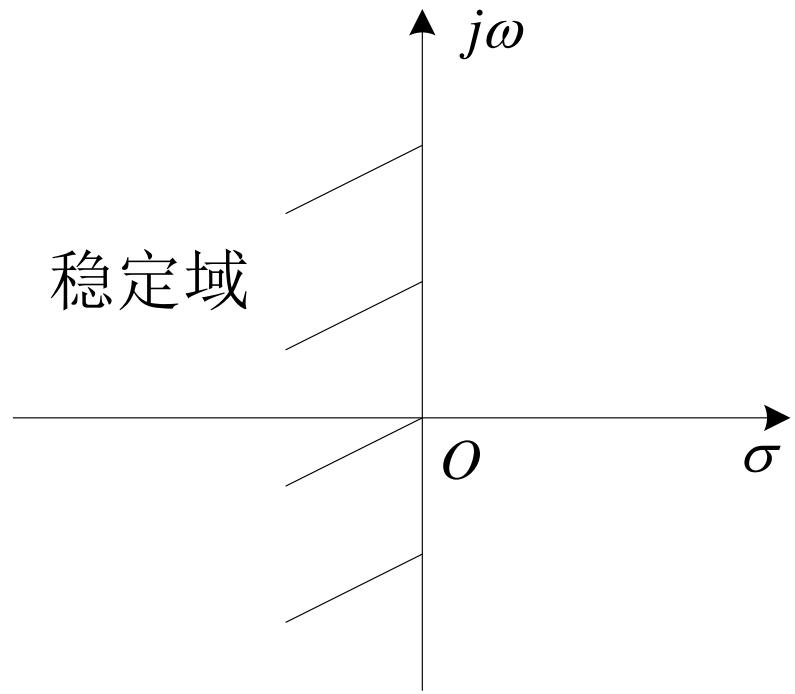
$\lambda_i$  是特征方程的根  $+ \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$  (极点)

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}$$

$\lambda_i$ 是特征方程的根  
 $a_n + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$

渐近稳定: iff 特征根全部具有负实部

临界稳定: if 虚轴上有单重特征根, 其他具有负实部。系统响应趋于常数 (或等幅振荡)



### 4.2.3 离散时间控制系统

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \cdots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \cdots + b_m z^{-m} U(z)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

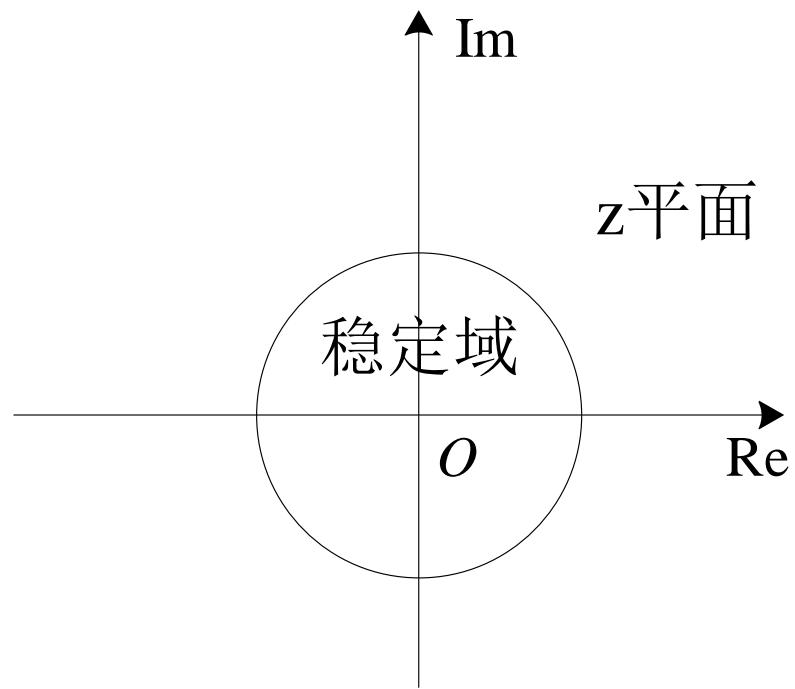
$z_i$ 是特征方程的根  $a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n} = 0$  (极点)

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

$z_i$ 是特征方程的根,  $z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n} = 0$

渐近稳定: iff 特征根全部位于  $z$  平面上以原点为中心的单位圆内

临界稳定: if  $z$  平面上以原点为中心的单位圆上有单重特征根, 其他位于圆内



问题：为什么要学习Routh判据和Hurwitz判据  
(代数判据)



能否求解特征方程的根？

阶数>4，无法精确求解。

## 4.3 系统稳定性的代数判据

### Routh判据

$$a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0 = 0, \quad a_n > 0$$

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\cdots$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\cdots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\cdots$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\cdots$
$s^{n-4}$	$d_1$			
$\vdots$	$\vdots$			
$s^2$	$e_1$			
$s^1$	$f_1$			
$s^0$	$g_1$			

劳斯表

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

1. 漐近稳定: iff 劳斯表的第一列的元素为正
2. 不稳定根的个数=劳斯表的第一列的元素符号改变的次数

**例4.6** 三阶系统的特征方程为

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

用劳斯判据分析系统稳定性与系数之间的关系

$s^3$	$a_3$	$a_1$
$s^2$	$a_2$	$a_0$
$s^1$	$\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_2}$	0
$s^0$	$a_0$	

$$a_0, a_2, a_3 > 0$$

$$\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_2} > 0 \Rightarrow a_1 > 0, a_1 a_2 > a_0 a_3$$

## 特殊情况

(1) 劳斯表某一行第一个元素为0, 其他不全为0。  
此时可以用一个很小的正数代替它

例4.7 系统的特征方程为

$$s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 5 = 0$$

判别系统的稳定性

首列变号2次, 系统存在  
两个右半开平面内的极  
点, 系统不稳定

可否用很小的负数代替?

这种情况意味系统是稳定还是  
不稳定?

$s^5$	1	2	3
$s^4$	1	2	5
$s^3$	$0 \leftarrow \varepsilon$	-2	
$s^2$	$\frac{2\varepsilon + 2}{\varepsilon} > 0$		5
$s^1$	$\frac{-4\varepsilon - 5\varepsilon^2 - 4}{2\varepsilon + 2} < 0$		
$s^0$	5		

## 特殊情况

(2) 劳斯表某一行全为0: 对称于虚轴的根。

不全为0的最后一行构成辅助多项式,

求导得到的系数代替全为0行的各项。

对称于虚轴的根通过辅助多项式求解。

为什么?

**例4.8** 系统的特征方程为

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

试确定其在复平面右半部根的个数

首列元素变号一次,  
存在一个正实部根

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$$

$$\Rightarrow s = \pm 1, \pm j5$$

$s^5$	1	24	-25
$s^4$	2	48	50
$s^3$	80	96	$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$
$s^2$	24	-50	$P'(s) = 8s^3 + 96s$
$s^1$	112.7		
$s^0$	-50		

## 特殊情况

(3) 情况1和2的复合。

进而可以通过 $-\varepsilon, \varepsilon$ 首行符号变化判断虚根

例4.9 判断  $s^6 + s^5 + 3s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 2s + 1 = 0$  根的情况

$$\varepsilon < 0 \quad \varepsilon > 0$$

+	+	$s^6$	1	3	3	1
+	+	$s^5$	1	3	2	
-	+	$s^4$	$0 \leftarrow \varepsilon$	1	1	
+	-	$s^3$	$\frac{3\varepsilon - 1}{\varepsilon}$	$\frac{2\varepsilon - 1}{\varepsilon}$		
+	+	$s^2$	$\frac{-2\varepsilon^2 + 4\varepsilon - 1}{3\varepsilon - 1}$	1	极限值 $\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0}$	1
+	-	$s^1$	$\frac{4\varepsilon^2 - \varepsilon}{2\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 1} \rightarrow 0$		$P(s) = s^2 + 1 \Rightarrow s = \pm j$	
+	+	$s^0$	1			

不一致  
一定能  
判断虚  
根

用辅助多项式除原多项式，判据其它特征根的分布

$$q(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$

再对 $q(s)$ 用劳斯判据，有

$\varepsilon < 0$	$\varepsilon > 0$			
+	+	$s^4$	1	2
+	+	$s^3$	1	2
-	+	$s^2$	$0 \leftarrow \varepsilon$	1
+	-	$s^1$	$\frac{2\varepsilon - 1}{\varepsilon}$	
+	+	$s^0$	1	

## Hurwitz判据

$$a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0 = 0, \quad a_n > 0$$

Hurwitz行列式D的形式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_{n-1} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_2 & a_0 \end{vmatrix}_{n \times n}$$

Hurwitz判据： iff Hurwitz行列式的各项主子式大于0.

$$D_1 = a_{n-1} > 0 \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0 \quad \cdots \quad D_n = D > 0$$

## Hurwitz判据与Routh判据的关系

Hurwitz行列式各阶子式与Routh表中第一列的元素：

$$a_n = a_n$$

$$a_{n-1} = D_1$$

$$b_1 = D_2 / D_1$$

$$c_1 = D_3 / D_2$$

⋮

$$e_1 = D_{n-2} / D_{n-3}$$

$$f_1 = D_{n-1} / D_{n-2}$$

$$g_1 = D_n / D_{n-1}$$

若Routh表中第一列的元素都大于0，  
则Hurwitz行列式各阶子式也大于0，反之亦然.

注意：系统阶数小于7可采用Hurwitz判据

### 4.3.2 劳斯-霍尔维茨判据的应用

判别反馈系统的稳定性

例4.10 系统的特征方程为

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

试判断系统的稳定性

$s^4$	1	3	5
$s^3$	2(1)	4(2)	
$s^2$	1	5	
$s^1$	-3		
$s^0$	5		

变号两次，系统有两个右半平面的极点，系统不稳定

**例4.11** 系统的特征方程为

$$0.001s^4 + 0.05s^3 + 0.2s^2 + 0.4s + 1 = 0$$

试判断系统的稳定性

$$a_4 = 0.001 > 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 0.05 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.001 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0.2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = 0.05 > 0$$

$$D_2 = 0.05 * 0.2 - 0.001 * 0.4 > 0$$

$$D_3 = 0.05 * 0.2 * 0.4 - 0.4^2 * 0.001 - 0.05^2 > 0$$

$$D_4 = 1 * D_3 > 0$$

系统稳定

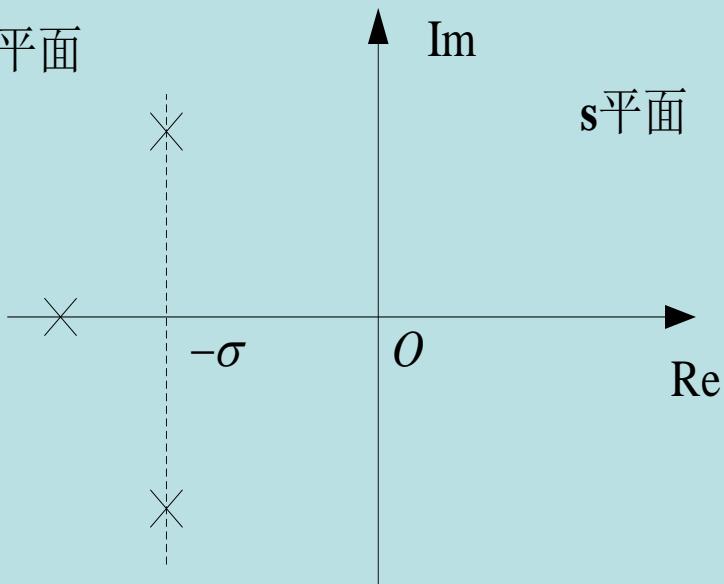
## 回顾

1. 劳斯判据的充要条件
2. 劳斯判据的三种情况，如何处理
3. 霍尔维茨的充要条件

## 确定系统的相对稳定性（稳定裕度）

稳定裕度（时域）：  
以实部最大的特征根和虚轴之间的距离  $\sigma (\sigma > 0)$

p平面

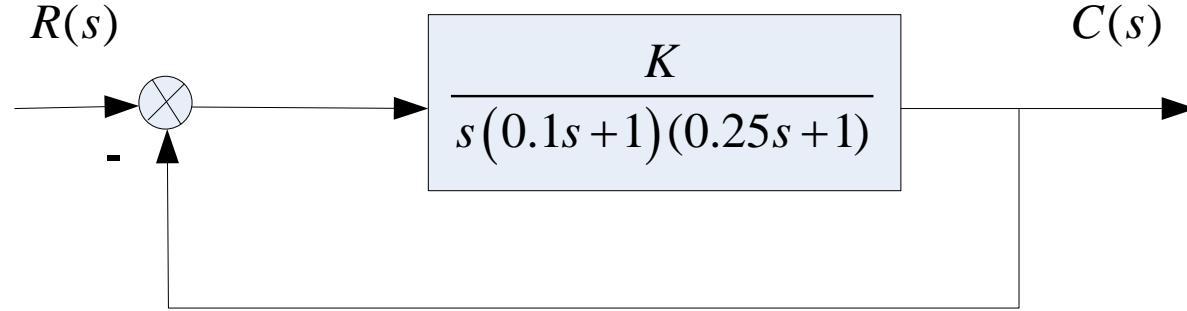


1. s平面的纵轴向左平移  $\sigma$  得到p平面
2. 判断特征根是否在p平面的左半平面

$$s = p - \sigma$$

再用劳斯-霍尔维茨判据

**例4.13** 试确定系统稳定开环增益的取值范围. 如果要使系统的稳定裕度为1, 问K的取值范围



$s^3$ $s^2$ $s^1$ $s^0$	1 14 $\frac{560 - K^*}{14}$ $K^*$	$40$ $K^*$ $s^3 + 14s^2 + 40s + K^* = 0$ $(1) 0 < K^* < 560 \Rightarrow 0 < K < 14$	$G(s) = \frac{K^*}{s(s+4)(s+10) + K^*}, K^* = 40K$
----------------------------------	--	--	--

$$s^3 + 14s^2 + 40s + K^* = 0$$

令  $s=p-1$ ,

$$p^3 + 11p^2 + 15p + (K^* - 27) = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 15 \\ \hline p^2 & 11 & K^* - 27 \\ p^1 & \frac{165 - (K^* - 27)}{11} \\ \hline p^0 & K^* - 27 \end{array}$$

$$(2) 27 < K^* < 192 \Rightarrow 0.675 < K < 4.8$$

思考题 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K(s+1)}{s^3 + as^2 + 3s + 1}$$

分析闭环系统临界稳定时K,a的取值范围，并求对应的特征值

$$\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{K(s+1)}{s^3 + as^2 + (3+K)s + 1 + K}$$

$s^3$	1	$3+K$
$s^2$	$a$	$1+K$
$s^1$	$\frac{a(3+K)-(1+K)}{a}$	
$s^0$	$1+K$	

$$(1) \quad a \neq 1, 1+K \neq 0, \frac{a(3+K)-(1+K)}{a} = 0$$

$$a > 0, 1+K > 0$$

$$K = -3 + \frac{2}{a-1} \quad \rightarrow \quad K > 0, a > 0$$

$$as^2 + (1+K) = 0 \Rightarrow s = \pm i \sqrt{\frac{1+K}{a}}$$

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & 1 & 3+K \\
 s^2 & 3 & 3+K \\
 s^1 & 6+2K & \\
 s^0 & 3+K &
 \end{array}$$

$$(2) \quad a=0, 1+K=0$$

$$P(s) = s^3 + (3+K)s$$

$$P(s) = 0 \Rightarrow s = \pm i\sqrt{2}, 0$$

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & 1 & 3+K \\
 s^2 & a & 0 \\
 s^1 & 2 & \\
 s^0 & 0 &
 \end{array}$$

$$(3) \quad a>0, 1+K=0$$

$$P(s) = 2s$$

$$P(s) = 0 \Rightarrow s = 0$$

## 课后练习

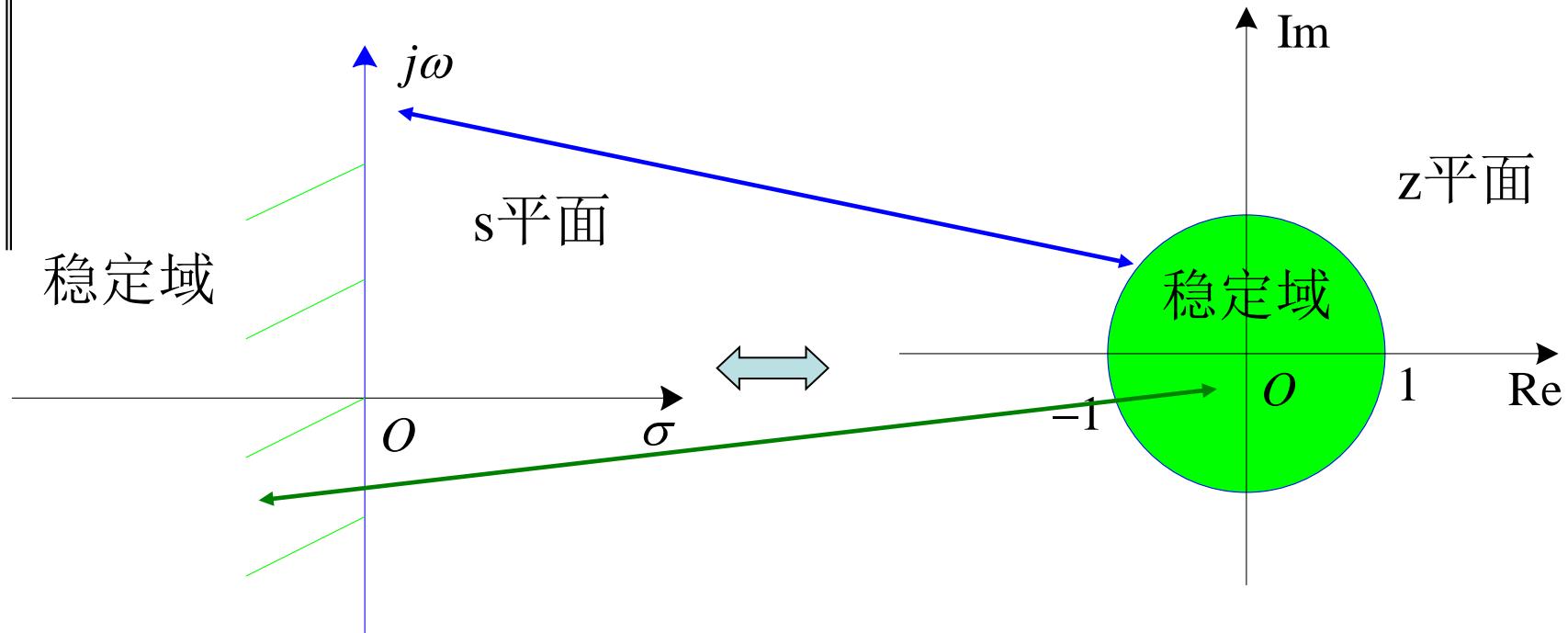
4.4

4.5

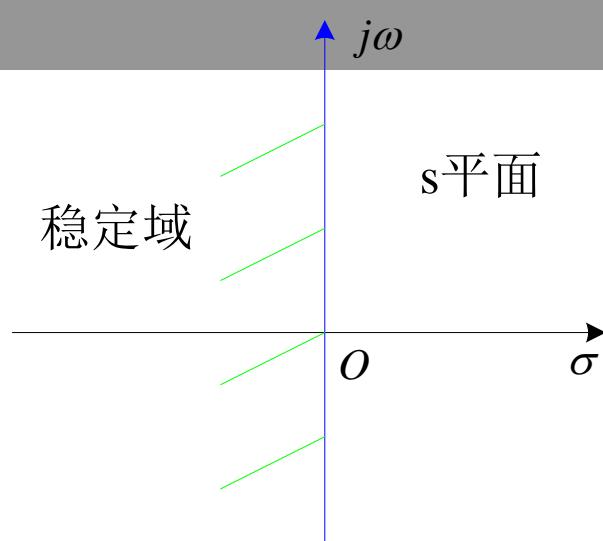
4.6

### 4.3.3 离散时间系统稳定性的代数判据

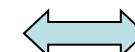
劳斯-霍尔维茨判据在离散系统中的应用



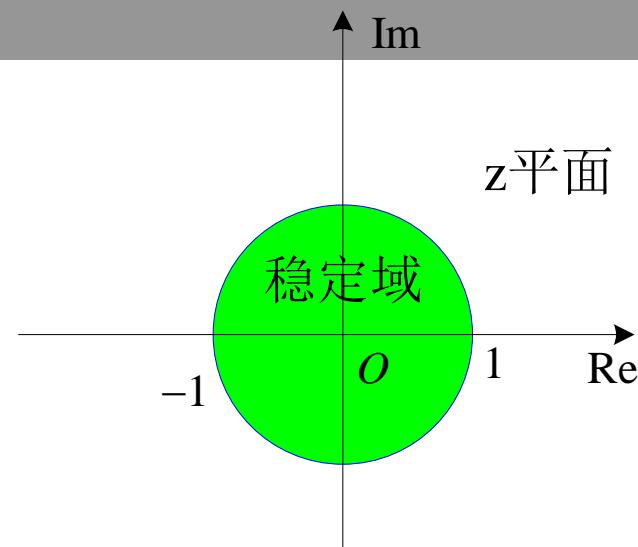
变换? 双线性变换



$$z = \frac{s+1}{s-1}$$



$$s = \frac{z+1}{z-1}$$



转换后，通过s的实部是否大于0来判断系统的稳定性

1. 虚轴→单位圆周

$$z = \frac{j\omega + 1}{j\omega - 1} \Rightarrow A(z) = 1$$

2. 左半平面→ 单位圆内

$$z = \frac{-\Delta + j\omega + 1}{-\Delta + j\omega - 1} \Rightarrow A(z) = \frac{\sqrt{\omega^2 + (1-\Delta)^2}}{\sqrt{\omega^2 + (-1-\Delta)^2}} < 1$$

3. 右半平面→单位圆外

$$z = \frac{\Delta + j\omega + 1}{\Delta + j\omega - 1} \Rightarrow A(z) = \frac{\sqrt{\omega^2 + (1+\Delta)^2}}{\sqrt{\omega^2 + (-1+\Delta)^2}} > 1$$

## 如何应用劳斯-霍尔维茨判据判断离散系统的稳定性

- 1.求出离散系统的特征方程 $D(z)=0$
- 2.在 $D(z)$ 中令 $z=(s+1)/(s-1)$ , 得到  $\bar{D}(s) = 0$
- 3.再用劳斯-霍尔维茨判据

**例4.14** 离散系统的特征方程为

$$D(z) = 45z^3 + 117z^2 + 119z + 39 = 0$$

试判断系统的稳定性

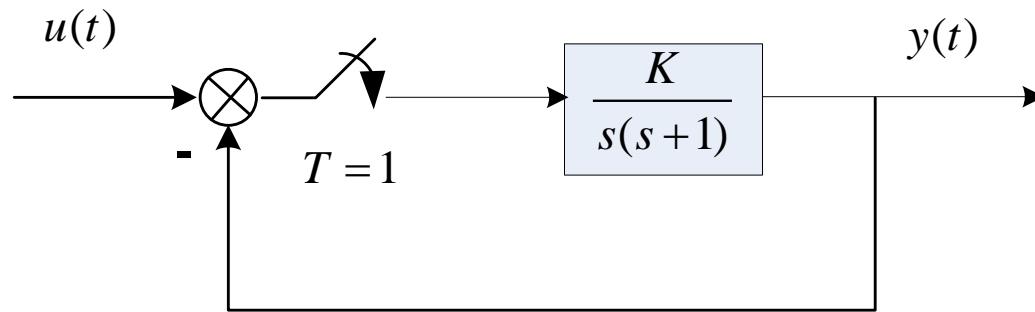
$$\bar{D}(s) = 45\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^3 + 117\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 + 119\left(\frac{s+1}{s-1}\right) + 39 = 0$$

$$\bar{D}(s) = 40s^3 + 2s^2 + 2s + 1 = 0$$

$s^3$	40	20
$s^2$	2	1
$s^1$	-18	
$s^0$	1	

系统有两个根在单位圆外，不稳定

## 例4.15 试求图中闭环采用系统稳定时的K值范围



$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)} = K \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) \Rightarrow G(z) = \frac{Kz(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$s^2$	0.63K	$2.74 - 0.63K$
$s^1$	1.26	
$s^0$	$2.74 - 0.63K$	

$$D(z) = z^2 + (0.63K - 1.37)z + 0.37 = 0$$

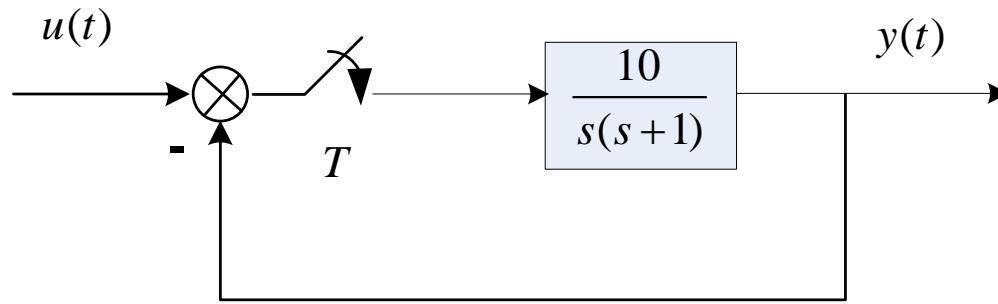
$$\bar{D}(s) = \left( \frac{s+1}{s-1} \right)^2 + (0.63K - 1.37) \left( \frac{s+1}{s-1} \right) + 0.37 = 0$$

$$\bar{D}(s) = 0.63Ks^2 + 1.26s + 2.74 - 0.63 = 0$$

$$2.74 - 0.63K > 0 \quad \longrightarrow \quad 0 < K < 4.35$$

$$0.63K > 0$$

**例4.16** 试求图中闭环采用系统稳定时的采样周期的取值范围



$$D(z) = z^2 + (9 - 11e^{-T})z + e^{-T} = 0$$

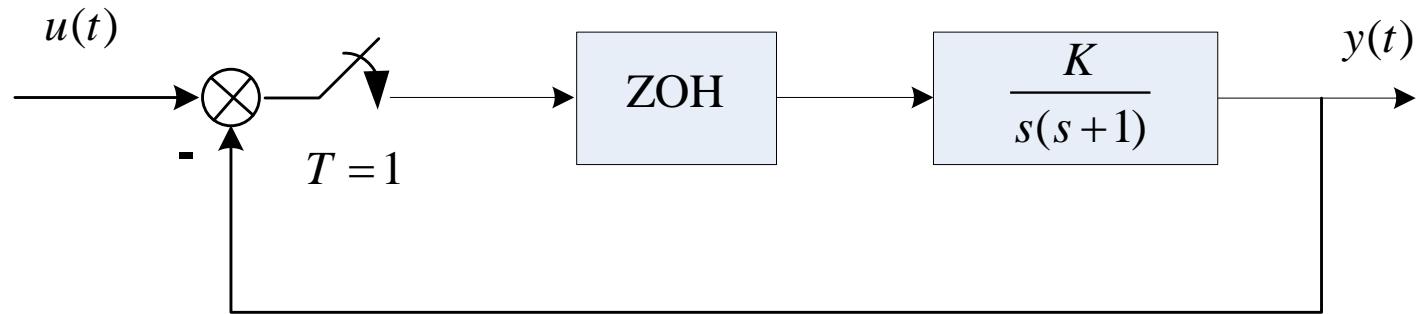
$$\bar{D}(s) = \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 + (9 - 11e^{-T})\left(\frac{s+1}{s-1}\right) + e^{-T} = 0$$

$$\bar{D}(s) = 10(1 - e^{-T})s^2 + 2(1 - e^{-T})s + (12e^{-T} - 8) = 0$$

$$1 - e^{-T} > 0$$

$$12e^{-T} - 8 > 0 \quad \longrightarrow \quad 0 < T < 0.405$$

思考题 试求图中闭环采用系统稳定时的K值范围



$$G(z) = \frac{\frac{K(0.368z + 0.264)}{(z-1)(z-0.368)}}{1 + \frac{K(0.368z + 0.264)}{(z-1)(z-0.368)}}$$

$$D(z) = z^2 + (0.368K - 1.368)z + (0.368 + 0.264K)$$

$$\bar{D}(s) = \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 + (0.368K - 1.368)\left(\frac{s+1}{s-1}\right) + (0.368 + 0.264K) = 0$$

$$0 < K < 2.394$$

## 朱利 (Jury) 判据: 直接在z域内应用的稳定性判据

$$D(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_n > 0$$

行\列	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$\cdots$	$z^{n-k}$	$\cdots$	$z^{n-2}$	$z^{n-1}$	$z^n$
1	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\cdots$	$a_{n-k}$	$\cdots$	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
2	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\cdots$	$a_k$	$\cdots$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
3	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$\cdots$	$b_{n-k}$	$\cdots$	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	
4	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$\cdots$	$b_{k-1}$	$\cdots$	$b_1$	$b_0$	
5	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$\cdots$	$c_{n-k}$	$\cdots$	$c_{n-2}$		
6	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$\cdots$	$c_{k-2}$	$\cdots$	$c_0$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						
$2n-5$	$l_0$	$l_1$	$l_2$	$l_3$					
$2n-4$	$l_3$	$l_2$	$l_1$	$l_0$					
$2n-3$	$m_0$	$m_1$	$m_2$						

(2n-3)  $\times$  (n+1)维的朱利阵

偶数行是将奇数行反序排列

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-k-1} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2$$

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-k-2} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n-3$$

•

•

•

朱利判据(充要条件):

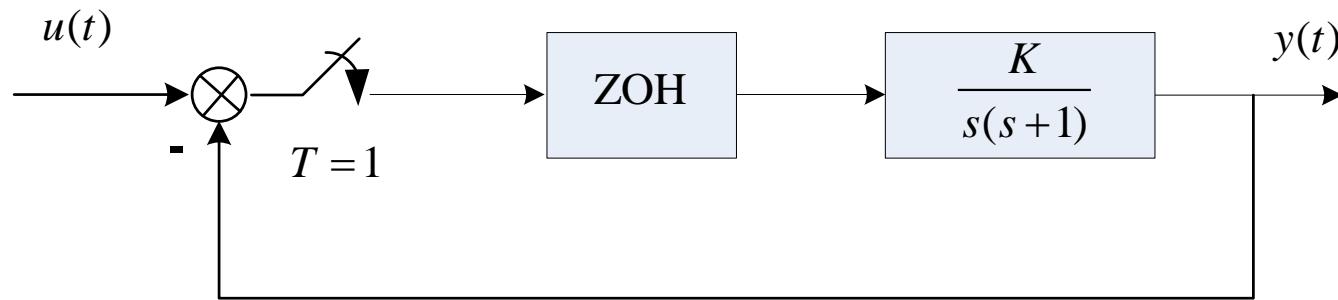
$$(1) \quad D(1) = D(z)|_{z=1} > 0 \quad \text{系数之和} > 0$$

$$(2) \quad (-1)^n D(-1) = (-1)^n D(z)|_{z=-1} > 0 \quad a_n - a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0 > 0$$

(3) 朱利阵中的元素满足下列(n-1)个约束条件

$$|a_0| < a_n; \quad |b_0| > |b_{n-1}|; \quad |c_0| > |c_{n-2}|; \cdots; \quad |l_0| > |l_3|; \quad |m_0| > |m_2|$$

## 例4.17 应用朱利判据确定采样系统稳定时K的取值范围



$$D(z) = z^2 + (0.368K - 1.368)z + (0.368 + 0.264K)$$

$$a_2 = 1, a_1 = 0.386K - 1.368, a_0 = 0.264 + 0.368$$

朱利判据

$$(1) D(1) = a_2 + a_1 + a_0 = 1 + (0.368K - 1.368) + (0.368 + 0.264K) > 0$$

$$\Rightarrow K > 0$$

$$(2) (-1)^n D(-1) = a_2 - a_1 + a_0 = 1 - (0.368K - 1.368) + (0.368 + 0.264K) > 0$$

$$\Rightarrow K < 26.31$$

$$(3) |a_0| < a_n \Rightarrow |0.368 + 0.264K| < 1 \Rightarrow K < 2.39$$

$$0 < K < 2.39$$

**例4.18** 离散时间系统的特征多项式如下，试判断系统稳定性

$$D(z) = 2z^4 + 7z^3 + 10z^2 + 4z + 1$$

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$
1	1	4	10	7	2
2	2	7	10	4	1
3	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$	$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10$	$\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = -10$	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -1$	
4	-1	-10	-10	-3	
5	$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 8$	$\begin{vmatrix} -3 & -10 \\ -1 & -10 \end{vmatrix} = 20$	$\begin{vmatrix} -3 & -10 \\ -1 & -10 \end{vmatrix} = 20$		

朱利判据

$$(1) D(1) = 2 + 7 + 10 + 4 + 1 > 0$$

不稳定

$$(2) (-1)^n D(-1) = 2 - 7 + 10 - 4 + 1 > 0$$

$$(3) |a_0| < a_4, yes \quad |b_0| > b_3, yes \quad |c_0| > c_2, no$$

思考题 离散时间系统的特征多项式如下，试判断系统稳定性

$$D(z) = z^3 + 2z^2 - 0.5z - 1$$

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$
1	-1	-0.5	2	1
2	1	2	-0.5	-1
3	$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = -1.5$	$\begin{vmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.5$	

不稳定

# 系统稳定性（代数判据）复习

名词解释：稳定，渐近稳定，临界稳定

E.X.1 闭环连续系统的极点分布如下，试判断系统的稳定性

A

$j\omega$

×

s平面

×

O

$\sigma$

×

渐近稳定

B

$j\omega$

×

s平面

×

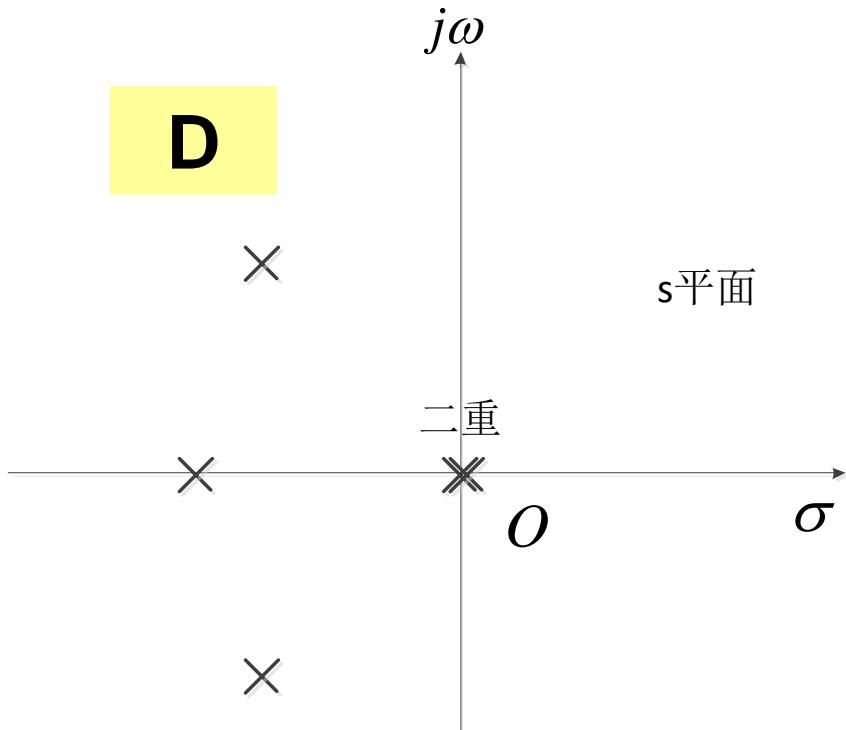
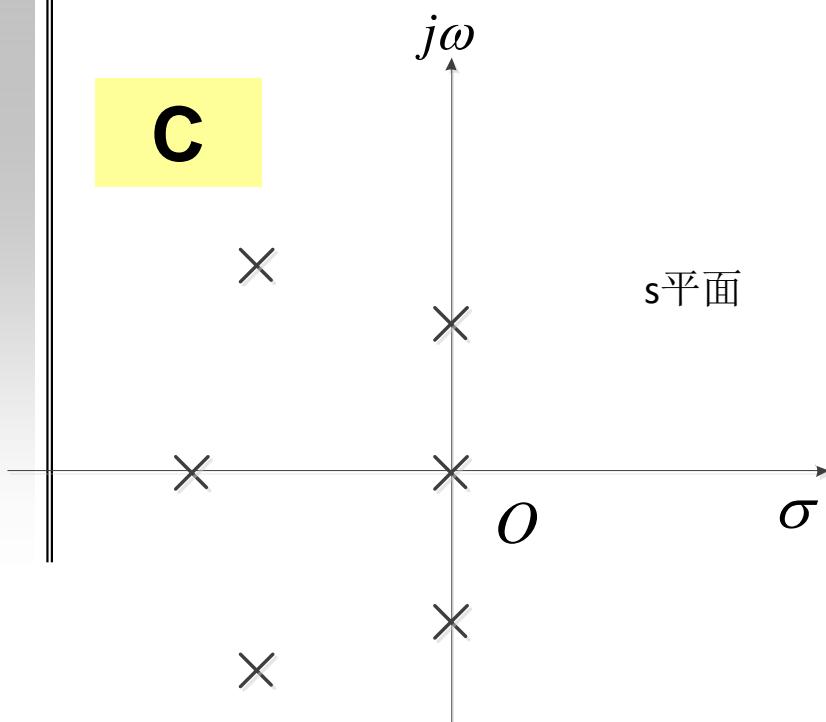
O

$\sigma$

×

临界稳定

## E.X.1 Contr.

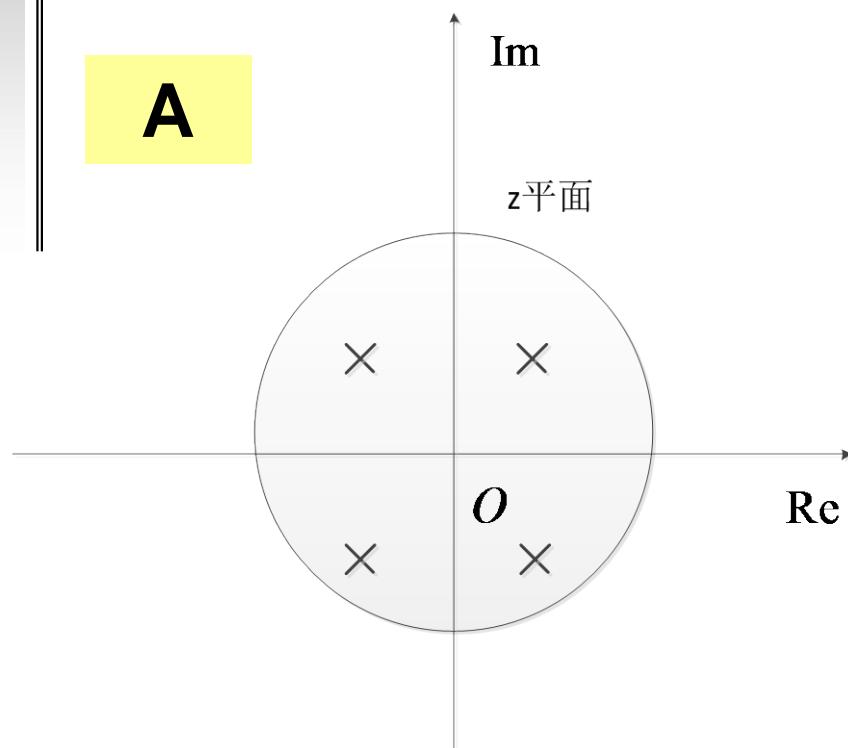


渐近稳定:iff特征根全部具有负实部

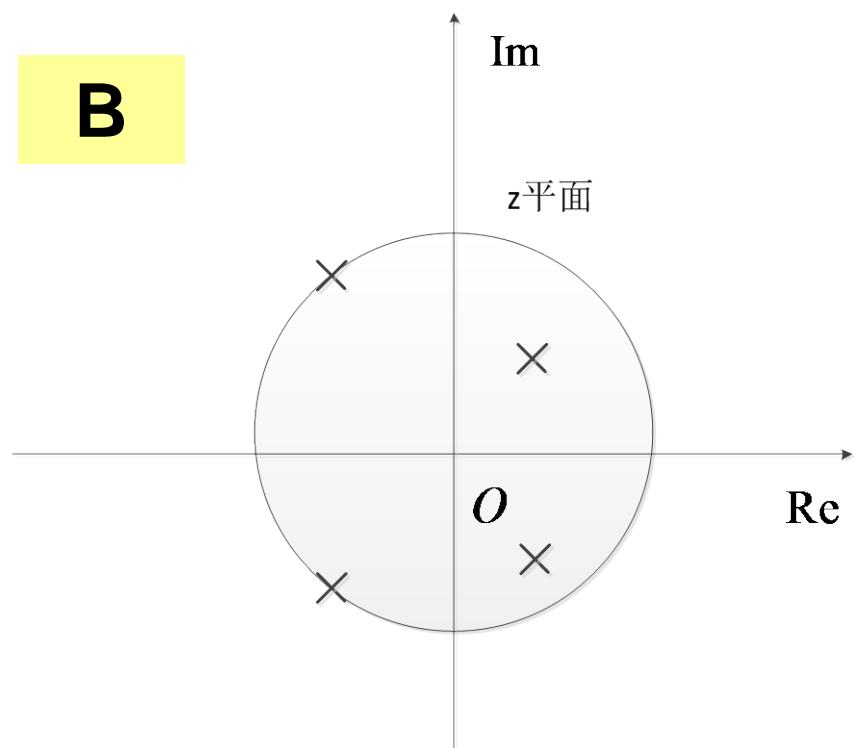
临界稳定:if虚轴上有单重特征根, 其他具有负实部。系统响应趋于常数 (或等幅振荡)

**E.X.2** 分别设计闭环采样系统的极点分布，使得  
**A)** 四阶渐进稳定系统； **B)** 四阶临界稳定系统  
**C)** 三阶临界稳定系统； **D)** 三阶不稳定系统

**A**

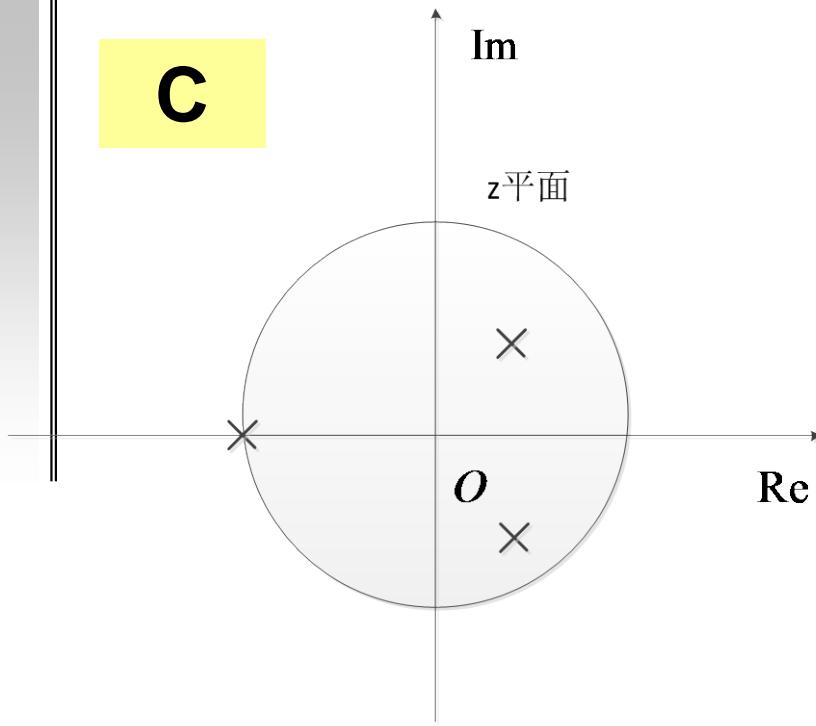


**B**



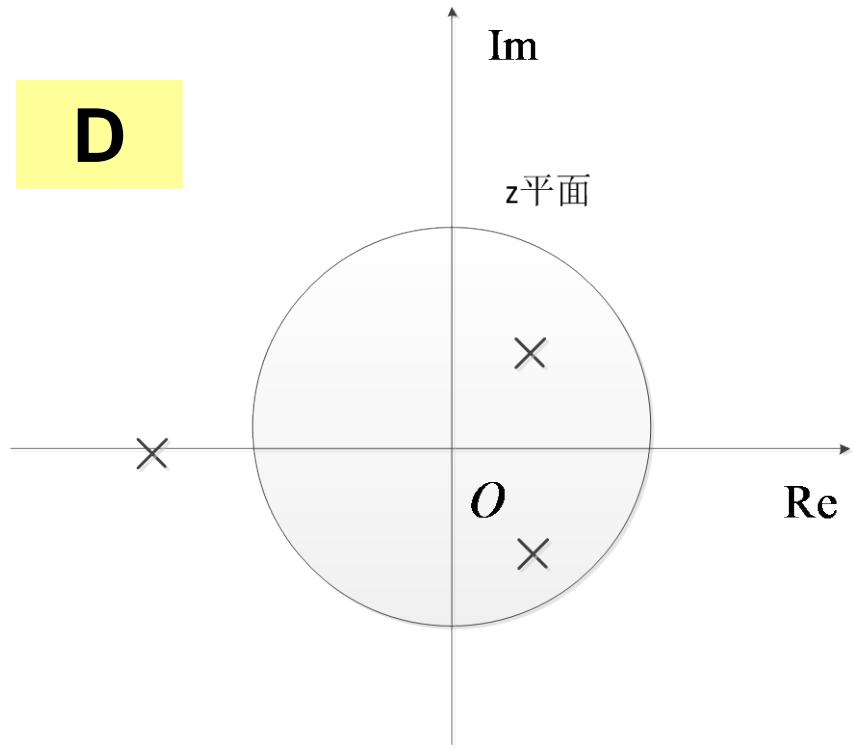
## E.X.2 Contr.

C



渐近稳定: iff特征根  
全部位于z平面以原点  
为中心的单位圆内

D



临界稳定: if z平面以原点  
为中心的单位圆上有单重  
特征根, 其他位于圆内

## 1. 劳斯判据判断系统渐进稳定的充要条件？

- a) 渐近稳定： iff 劳斯表的 **第一列** 的元素为 **正**
- b) 不稳定根的个数 = 劳斯表的第一列的元素符号改变的次数

## 2. 劳斯判据的特殊情况

- a) 某行首为0， 其他不全为0？
- b) 某行全为0？

- a) 虚轴有特征根， 利用小正数 or 负数代替
- b) 有对称虚轴的特征根， 构建辅助多项式

EX.3某系统的特征方程为

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

试判断系统在右半复平面内有C个特征根.

- (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3;

EX.4 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{s+2}{s^2(Ts+1)}$$

该系统是2型系统，为保证闭环系统渐进稳定，  
T的取值范围是 $0 < T < 0.5$ 。

**EX.6** 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K(s+1)}{s^3 + as^2 + 3s + 1}$$

分析闭环系统临界稳定时K,a的取值范围，并求对应的特征值

$$\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{K(s+1)}{s^3 + as^2 + (3+K)s + 1 + K}$$

$s^3$	1	$3+K$
$s^2$	$a$	$1+K$
$s^1$	$\frac{a(3+K)-(1+K)}{a}$	
$s^0$	$1+K$	

$$(1) \quad a \neq 1, 1+K \neq 0, \frac{a(3+K)-(1+K)}{a} = 0$$

$$a > 0, 1+K > 0$$

$$K = -3 + \frac{2}{a-1} \quad \rightarrow \quad K > 0, a > 0$$

$$as^2 + (1+K) = 0 \Rightarrow s = \pm i \sqrt{\frac{1+K}{a}}$$

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & 1 & 3+K \\
 s^2 & 3 & 3+K \\
 s^1 & 6+2K & \\
 s^0 & 3+K &
 \end{array}$$

$$(2) \quad a = 0, 1+K = 0$$

$$P(s) = s^3 + (3+K)s$$

$$P(s) = 0 \Rightarrow s = \pm i\sqrt{2}, 0$$

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & 1 & 3+K \\
 s^2 & a & 0 \\
 s^1 & 2 & \\
 s^0 & 0 &
 \end{array}$$

$$(3) \quad a > 0, 1+K = 0$$

$$P(s) = 2s$$

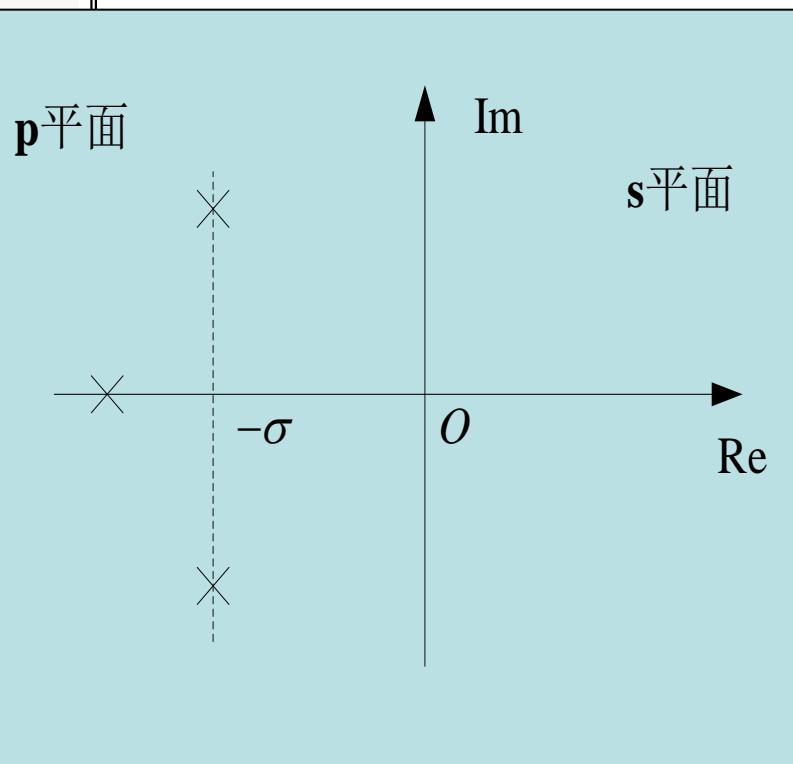
$$P(s) = 0 \Rightarrow s = 0$$

连续系统的相对稳定性（稳定裕度）：

以实部最大的特征根和虚轴之间的距离  $\sigma (\sigma > 0)$

图示：

如何判断？



$$s = p - \sigma$$

再用劳斯-霍尔维茨判据

EX.5单位闭环系统的开环传递函数为

$$\frac{(s + \alpha)(s + 4)}{s^2(s + 3)}$$

若要求闭环系统的极点均位于  $s = -\frac{1}{2}$  垂线的左边，确定  $\alpha$  的取值范围。

闭环特征方程:  $s^3 + 4s^2 + 4s + \alpha s + 4\alpha = 0$

令  $s = p - 0.5$        $p^3 + \frac{5}{2}p^2 + (\alpha + \frac{3}{4})p - 1.125 + 3.5\alpha = 0$

劳斯表

$s^3$	1	$\alpha + \frac{3}{4}$
-------	---	------------------------

$s^2$	$\frac{5}{2}$	$-1.125 + 3.5\alpha$
-------	---------------	----------------------

$s^1$	$(6\alpha + 0.75)/2.5$
-------	------------------------

$$\alpha > 0.3214$$

$s^0$	$-1.125 + 3.5\alpha$
-------	----------------------

# 朱利 (Jury) 阵的维数?

(2n-3) × (n+1)维的朱利阵

如何构建?

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix},$$
$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

行 \ 列	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$\cdots$	$z^{n-k}$	$\cdots$	$z^{n-2}$	$z^{n-1}$	$z^n$
1	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\cdots$	$a_{n-k}$	$\cdots$	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
2	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\cdots$	$a_k$	$\cdots$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
3	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$\cdots$	$b_{n-k}$	$\cdots$	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	
4	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$\cdots$	$b_{k-1}$	$\cdots$	$b_1$	$b_0$	
5	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$\cdots$	$c_{n-k}$	$\cdots$	$c_{n-2}$		
6	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$\cdots$	$c_{k-2}$	$\cdots$	$c_0$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						
$2n-5$	$l_0$	$l_1$	$l_2$	$l_3$					
$2n-4$	$l_3$	$l_2$	$l_1$	$l_0$					
$2n-3$	$m_0$	$m_1$	$m_2$						

朱利判据(充要条件):

$$(1) \quad D(1) = D(z)|_{z=1} > 0 \quad \text{系数之和} > 0$$

$$(2) \quad (-1)^n D(-1) = (-1)^n D(z)|_{z=-1} > 0 \quad a_n - a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0 > 0$$

(3) 朱利阵中的元素满足下列(n-1)个约束条件

$$|a_0| < a_n; \quad |b_0| > |b_{n-1}|; \quad |c_0| > |c_{n-2}|; \cdots; \quad |l_0| > |l_3|; \quad |m_0| > |m_2|$$

**EX.7** 离散时间系统的特征多项式如下，试用朱利判据判断系统稳定性

$$D(z) = 2z^3 + 2z^2 - 0.5z - 2$$

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$
1	-2	-0.5	2	2
2	2	2	-0.5	-2

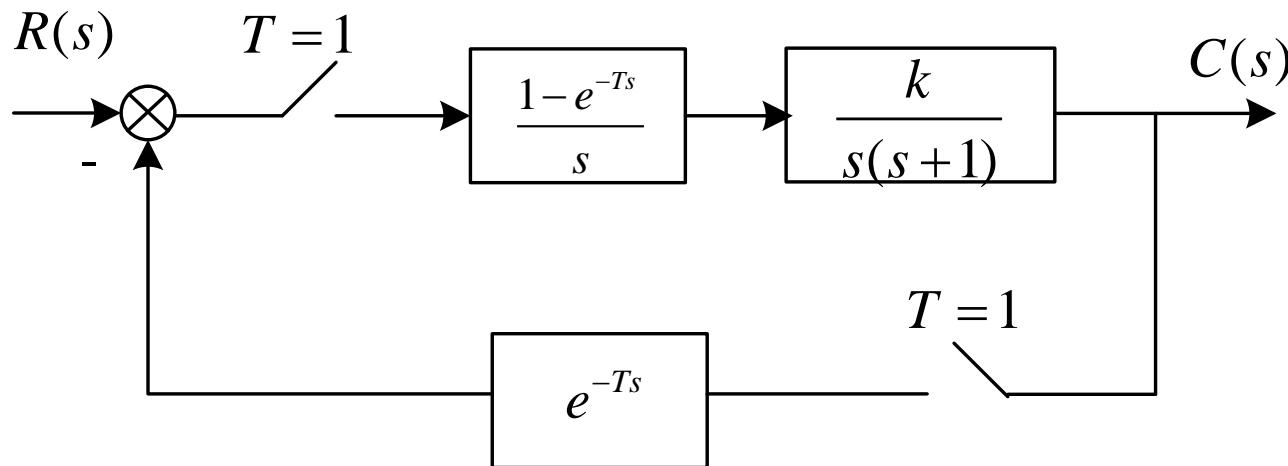
不稳定

## 如何应用劳斯-霍尔维茨判据判断离散系统的稳定性

- 1.求出离散系统的特征方程 $D(z)=0$
- 2.在 $D(z)$ 中令 $z=(s+1)/(s-1)$ , 得到  $\bar{D}(s) = 0$
- 3.再用劳斯-霍尔维茨判据

EX.8 如图所示的采样控制系统，其中采样周期  $T = 1(s)$ ，  
 $k > 0$ .

- (1) 求系统的闭环和开环脉冲传递函数。
- (2) 试用劳斯判据判断闭环系统稳定时  $K$  的取值范围  $e^{-1} = 0.368, e^1 = 2.71$



## EX.8 Contr.

$$G_1(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

$$G_2(s) = \frac{k}{s(s+1)}$$

$$G_3(s) = e^{-Ts}$$

$$G_1(s)G_2(s) = k(1 - e^{-Ts}) \left( +\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right) \Rightarrow G_1G_2(z) = k \frac{e^{-1}z + (1 - 2e^{-1})}{(z - e^{-1})(z - 1)} = k \frac{0.368z + 0.264}{(z - 0.368)(z - 1)}$$

$$G_3(s) = e^{-Ts} \Rightarrow G_3(z) = z^{-1}$$

开环:

$$G_0(z) = G_3(z)G_1G_2(z) = \frac{k(0.368z + 0.264)}{z(z - 0.368)(z - 1)}$$

闭环:

$$\begin{aligned} \frac{C(z)}{R(z)} &= \frac{G_1G_2(z)}{1 + G_3(z)G_1G_2(z)} = \frac{kz(0.368z + 0.264)}{z(z - 0.368)(z - 1) + k(0.368z + 0.264)} \\ &= \frac{kz(0.368z + 0.264)}{z^3 - 1.368z^2 + (0.368 + 0.368k)z + 0.264k} \end{aligned}$$

## EX.8 Contr.

闭环特征方程为

$$z^3 - 1.368z^2 + (0.368 + 0.368k)z + 0.264k = 0$$

令  $z = \frac{s+1}{s-1}$  则

$$(1.264 - 0.368k)s^2 + (4 - 0.368k)s + 2.736 + 0.632k = 0$$

$$1.264 - 0.368k > 0$$

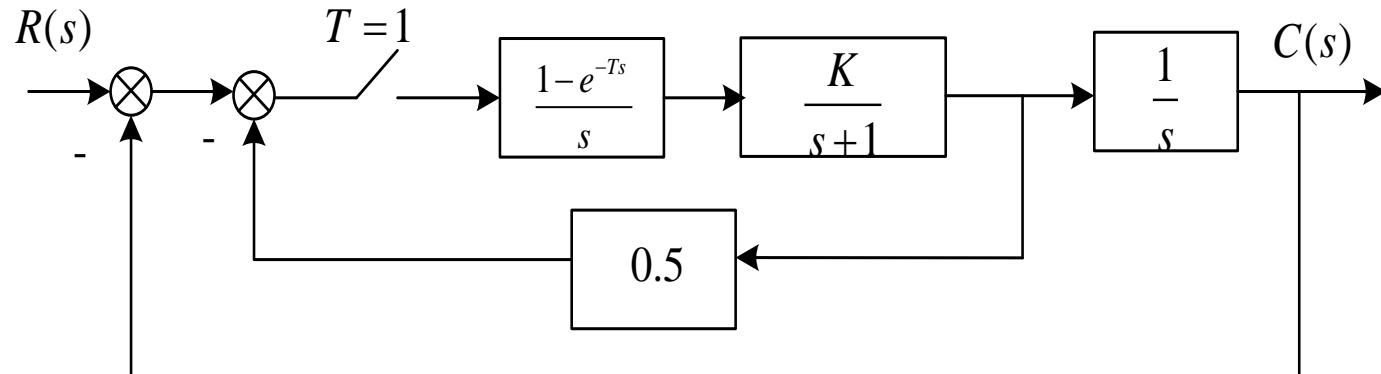
$$4 - 0.368k > 0$$

$$\Rightarrow 0 < k < 3.43$$

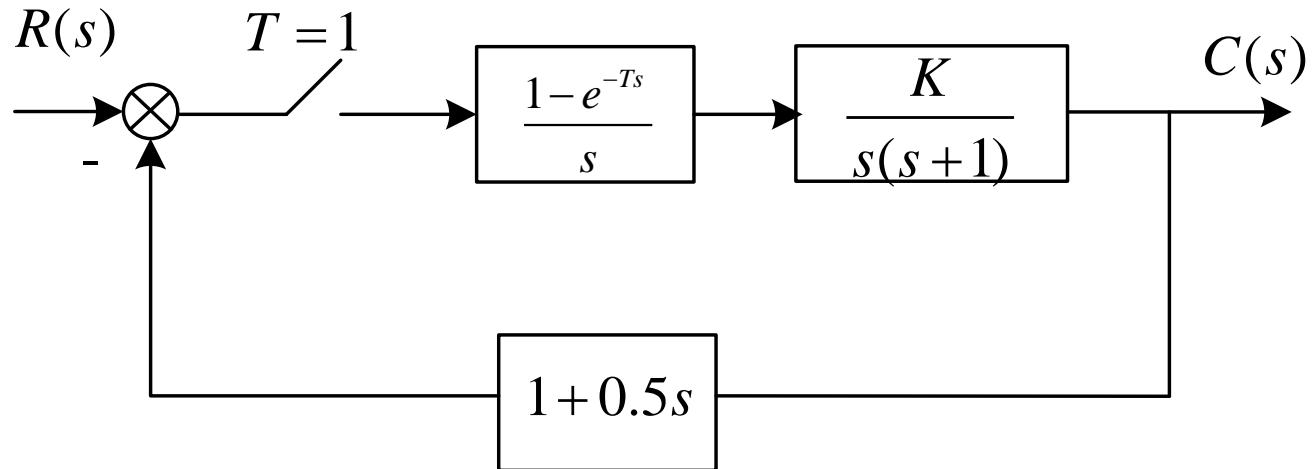
$$2.736 + 0.632k > 0$$

EX.9 如图所示的采样控制系统，其中  $K > 0$ .

- (1) 求系统的闭环和开环脉冲传递函数。
- (2) 试用劳斯判据判断闭环系统稳定时  $K$  的取值范围  $e^{-1} = 0.368, e^1 = 2.71$



## EX.9 Contr.



$$G_1(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

$$G_2(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

$$G_3(s) = 1 + 0.5s$$

$$G_1 G_2(z) = \frac{K(0.368z + 0.264)}{(z-1)(z-0.368)}$$

$$G_0(z) = G_1 G_2 G_3(z) = Z((1 - e^{-Ts}) \frac{K}{2} L^{-1} \left( \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right)) = \frac{1.368K}{2} \frac{z - 0.076}{(z-1)(z-0.368)}$$

$$G = \frac{G_1 G_2(z)}{1 + G_1 G_2 G_3(z)} = \frac{K(0.368z + 0.264)}{z^2 - (1.368 - 0.684K)z + (0.368 - 0.052K)}$$

## EX.9 Contr.

特征方程:

$$z^2 - (1.368 - 0.684K)z + (0.368 - 0.052K) = 0$$

$$z = \frac{s+1}{s-1}$$

$$0.632Ks^2 + (1.264 + 0.104K)s + 2.736 - 0.736K = 0$$

$$K > 0$$

$$1.264 + 0.104K > 0$$

$$2.736 - 0.736K > 0$$



$$3.717 > K > 0$$

稳定

**问题：如果系统的某个参数发生变化，  
特征根如何变化？  
系统的稳定性又如何？**

◇ 反复计算特征方程的根？

不现实，阶数 $>4$ ，无法精确求解。

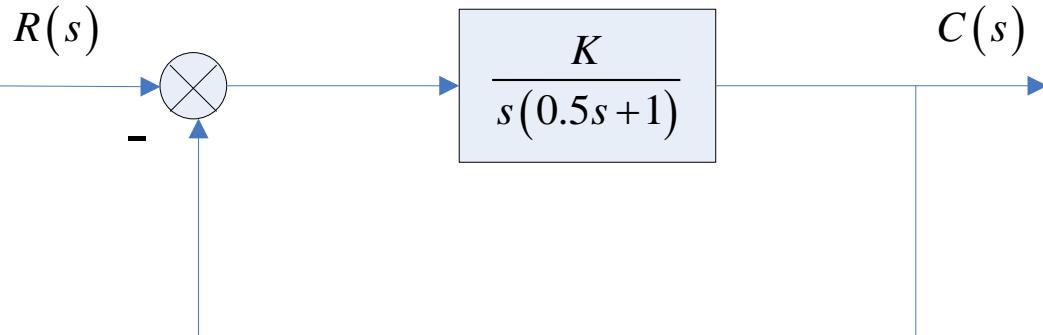
◇ 采用Routh-Hurwitz(Jury)判断？

只能判断系统的稳定性的变化，无法描述特征根的变化

采用伊万斯提出的图解法，根轨迹图

## 4.4 根轨迹图及系统稳定性分析

### 4.4.1 根轨迹图的基本概念



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2K}{s^2 + 2s + 2K}$$

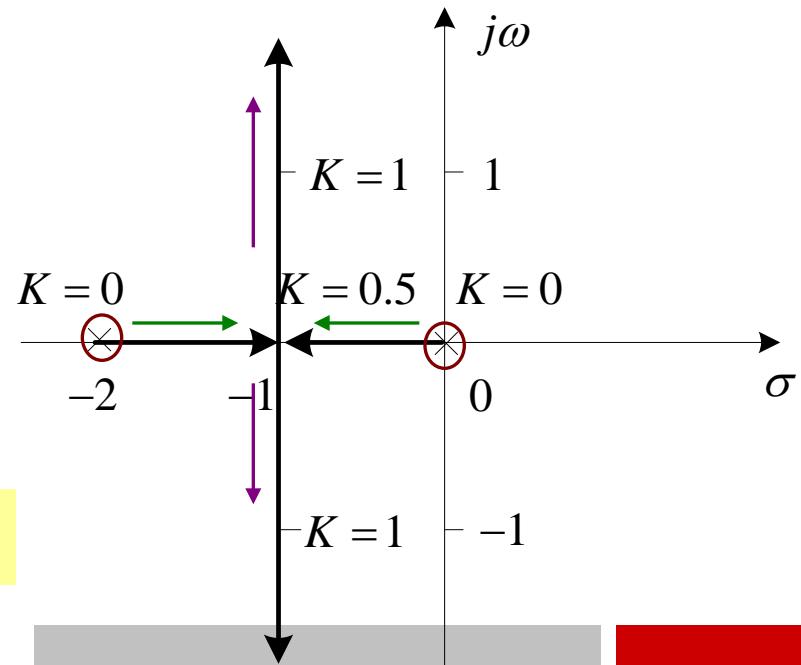
$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 2K}$$

$K=0$ 对应于开环极点

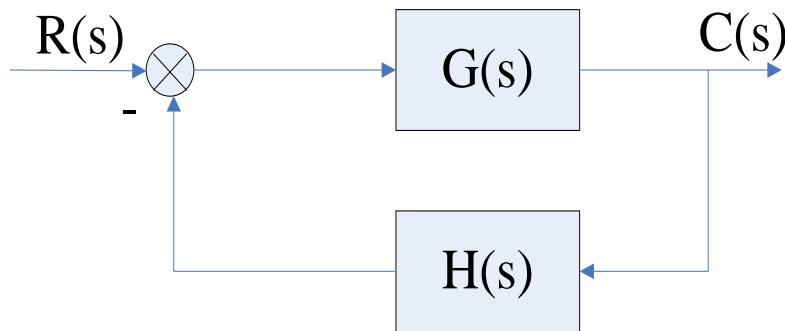
开环传函的极点和零点的分布



闭环的特征根随系统参数的变化轨迹



## 4.4.2 幅值条件与相角条件



闭环传函:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G_0(s)}$$

开环传函:

$$G_0(s) = G(s)H(s)$$

零、极点的形式:

$$G_0(s) = K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

根轨迹方程  $1 + G_0(s) = 0 \Rightarrow G_0(s) = -1 \Rightarrow K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = -1$

## 根轨迹方程

$$1 + G_0(s) = 0 \Rightarrow G_0(s) = -1 \Rightarrow K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = -1$$

## 幅值条件

$$K = K_g \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^n p_j}$$
$$\left|G_0(s)\right| = K_g \frac{\prod_{i=1}^m |s + z_i|}{\prod_{j=1}^n |s + p_j|} = 1$$

根轨迹增益

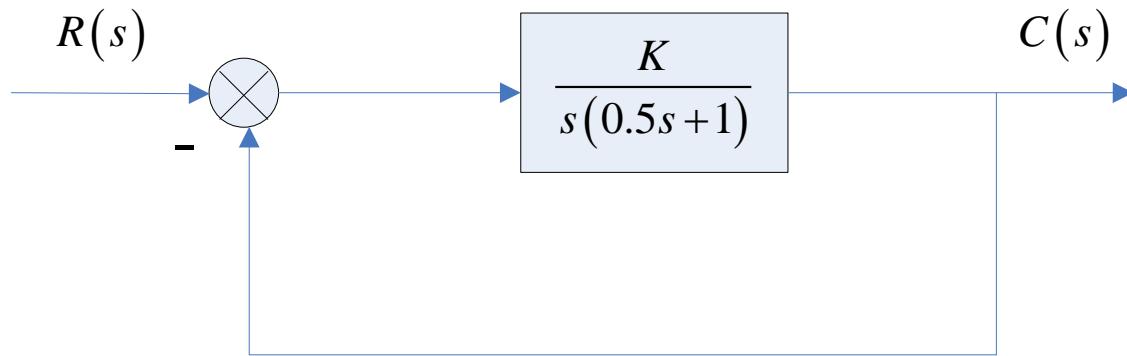
必要条件：满足幅值条件的点不一定是闭环的特征根

## 幅角条件

$$\angle G_0(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) = \pm 180^\circ (2k + 1), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

充要条件：可确定是否是根轨迹上的点

# 反例说明幅值条件是必要条件



$$G_0(s) = 2K \frac{1}{s(s+2)}$$

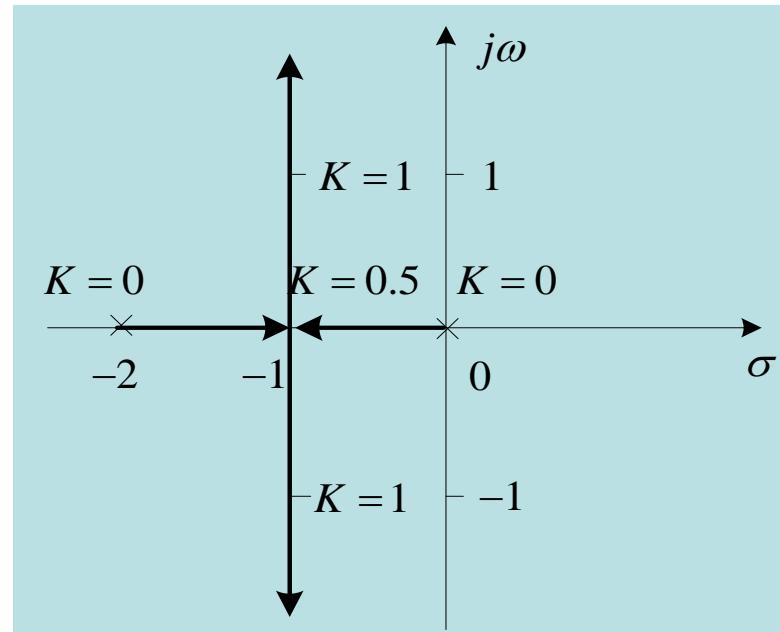
幅值条件

$$|G_0(s)| = 2K \frac{1}{|s||s+2|} = 1$$

$$\text{令 } s = \sigma + j\omega, K = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$(\sigma^2 + \omega^2)((\sigma + 2)^2 + \omega^2) = 10^2$$

$s = -3$



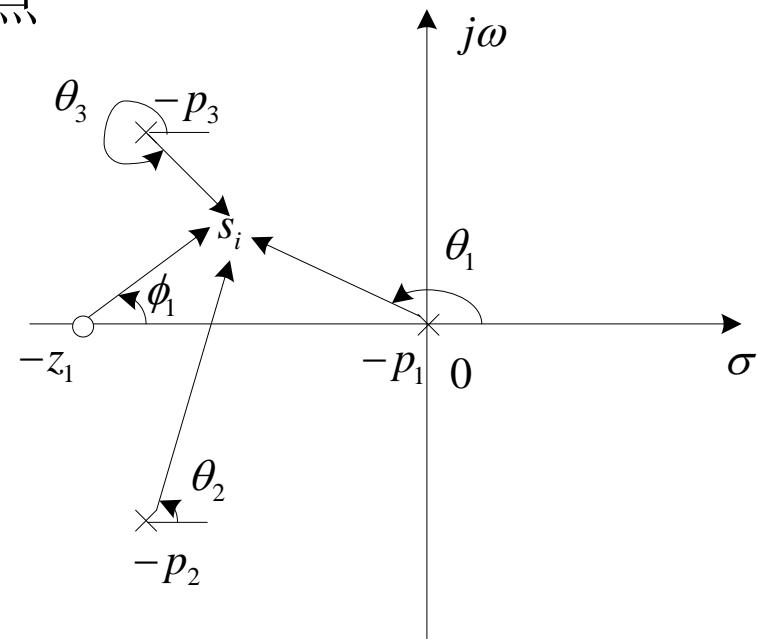
E.g.4.19  $G_0(s) = \frac{K_g(s + z_1)}{s(s + p_2)(s + p_3)}$  零、极点如图, 如何确定s

平面中的某点  $s_i$  是根轨迹上的一点

$-z_i s_i = s_i - (-z_i)$ : 零点到  $s_i$  的向量

$-p_i s_i = s_i - (-p_i)$ : 极点到  $s_i$  的向量

幅角逆时针为正



判断是否满足幅角条件

$$\angle -z_1 s_i - (\angle -p_1 s_i + \angle -p_2 s_i + \angle -p_3 s_i) = \phi_1 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \pm 180^\circ (2k+1), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

根轨迹增益求法

$$K_{g_i} = \frac{|-p_1 s_i| \cdot |-p_2 s_i| \cdot |-p_3 s_i|}{|-z_1 s_i|}$$

### 4.4.3 绘制根轨迹的基本法则 (以根轨迹增益为可变参数)

$$\frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = -\frac{1}{K_g}$$

①  $\infty$   
② 0

1. 根轨迹的起点( $K_g = 0$ )

开环极点  $s = -p_j$

可实现系统  $n > m$

$n-m$  条根轨迹有起点，无终点零点

2. 根轨迹的终点( $K_g \rightarrow \infty$ )

开环零点  $s = -z_i$

无穷远零点

$$\left. \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \right|_{s \rightarrow \infty} \rightarrow \left( \frac{1}{s} \right)^{n-m} \rightarrow 0$$

### 3. 根轨迹的分支数

n个开环极点(起点), n个分支

### 4. 根轨迹的对称性

关于复平面实轴对称

### 5. 根轨迹的渐近线(如何趋向无穷远零点)

$$\frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = -\frac{1}{K_g} \quad s \rightarrow \infty$$

(The terms  $s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0$  and  $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$  are circled in red.)

$$s^{m-n} + (b_{m-1} - a_{n-1})s^{m-n-1} = -\frac{1}{K_g} \Rightarrow s(1 + \frac{b_{m-1} - a_{n-1}}{s})^{\frac{1}{m-n}} = (-\frac{1}{K_g})^{\frac{1}{m-n}}$$

牛顿二项式定理展开，近似

$$\Rightarrow s(1 + \frac{1}{m-n} \frac{b_{m-1} - a_{n-1}}{s})^{\frac{1}{m-n}} = (-\frac{1}{K_g})^{\frac{1}{m-n}}$$

$$\text{由 } -1 = e^{j180^\circ(2k+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow s = -\sigma + K_g^{\frac{1}{n-m}} \cdot e^{j180^\circ \frac{(2k+1)}{n-m}}$$

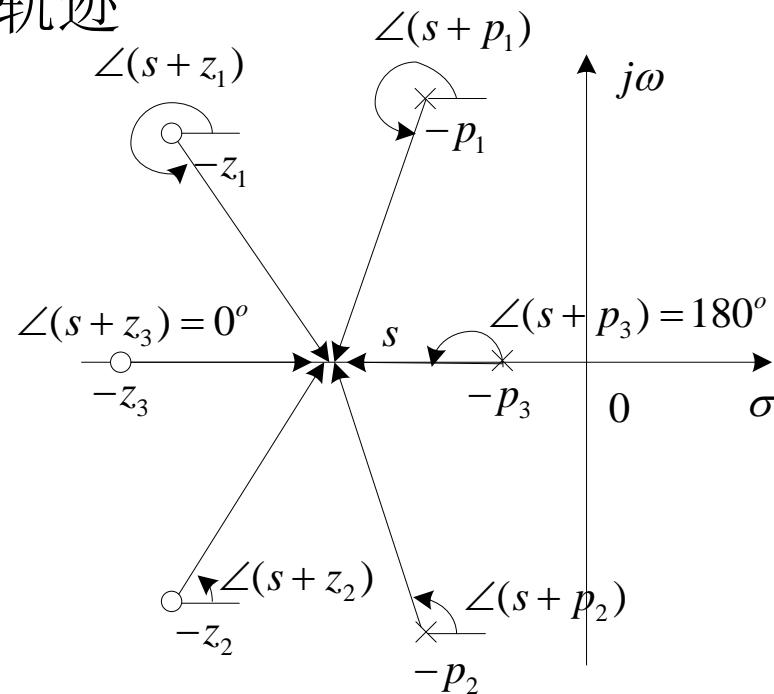
渐近线与实轴的交点

渐近线与实轴的夹角

$$b_{m-1} = \sum_{i=1}^m z_i \quad a_{n-1} = \sum_{j=1}^n p_j \quad -\sigma = -\frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$

k取到n-m-1即可

## 6. 实轴上的根轨迹



实轴上的一点，只要在它右方的开环零点、极点总和为奇数

共轭极点和零点

$$\angle(s + p_1) + \angle(s + p_2) = 360^\circ$$

实轴左侧极点和零点

$$\angle(s + z_3) = 0^\circ$$

实轴右侧极点和零点

$$\angle(s + p_3) = 180^\circ$$

E.g.4.20 开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+5)}$$

试确定根轨迹的数目、起点、终点、渐近线、实轴上根轨迹

数目:  $n = 3$

起点:  $-p_1 = 0, -p_2 = -1, -p_3 = -5$

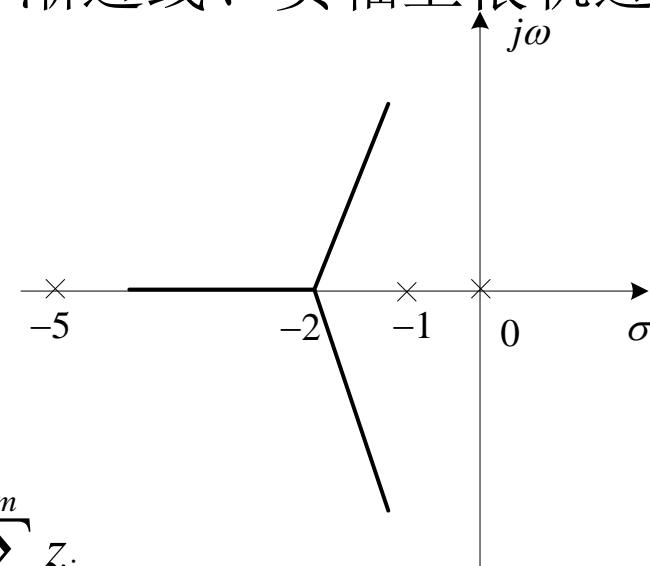
终点: 无穷远

渐近线与实轴的  
交点:

$$-\sigma = -\frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = -\frac{0+1+5}{3-0} = -2$$

渐近线的倾斜角:  $\theta = 180^\circ \frac{(2k+1)}{n-m} = 180^\circ \frac{(2k+1)}{3} \quad 60^\circ \ 180^\circ \ 300^\circ$

实轴上根轨迹:  $(-1, 0) \quad (-\infty, -5)$



E.x.4.1 开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K_g(s+2)}{s^2(s+1)(s+5)}$$

试确定根轨迹的数目、起点、终点、

数目:  $n = 4$

起点:  $-p_1 = 0, -p_2 = 0, -p_3 = -1, -p_4 = -5$

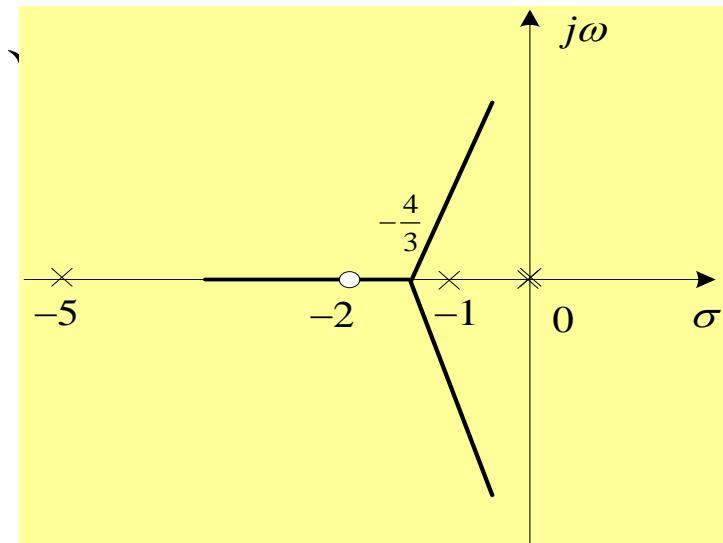
终点:  $-z_1 = -2$  无穷远

渐近线与实轴的  
交点:

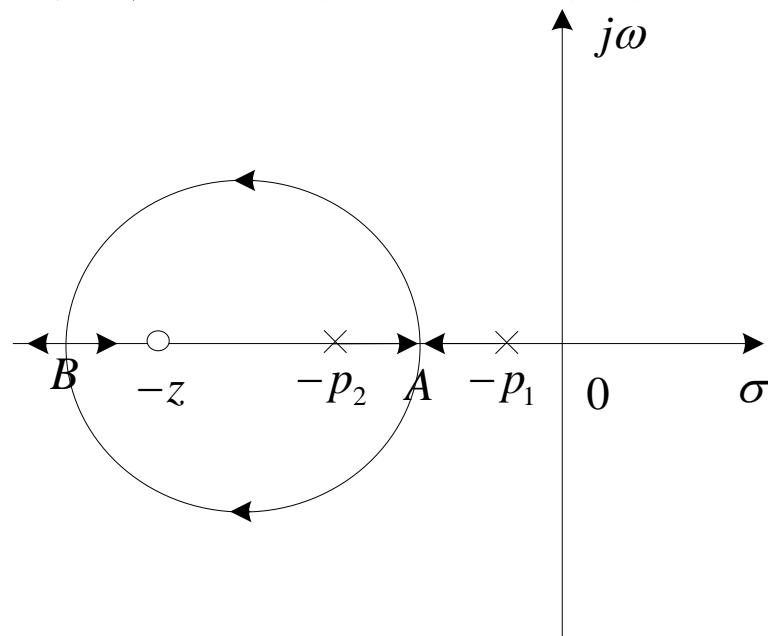
$$-\sigma = -\frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = -\frac{0+0+1+5-2}{4-1} = -\frac{4}{3}$$

渐近线的倾斜角:  $\theta = 180^\circ \frac{(2k+1)}{n-m} = 180^\circ \frac{(2k+1)}{3} \quad 60^\circ \quad 180^\circ \quad 300^\circ$

实轴上根轨迹:  $(-2, -1) \quad (-\infty, -5)$



## 7. 实轴上的根轨迹的分离点和汇合点



分离点：若干条根轨迹从实轴离开（A）

汇合点：若干条根轨迹进入实轴（B）

- 实轴上两个相邻开环极点间有根轨迹，则它们间有分离点
- 实轴上两个相邻开环零点间有根轨迹，则它们间有汇合点
- 实轴上相邻开环零点和极点间有根轨迹，则可有可无

分离角：分离点或汇合点处，根轨迹切线与实轴的夹角

$$\theta_d = \frac{180^\circ}{k}$$

分离点或汇合点处，  
根轨迹的根数

# 实轴上的根轨迹的分离点和汇合点求法

## a. 重根法

$$G_0(s) = K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = K_g \frac{N(s)}{D(s)}$$



$$1 + K_g \frac{N(s)}{D(s)} = 0 \Leftrightarrow D(s) + K_g N(s) = 0$$



$$\begin{aligned} K_{gd} &=? \\ D(-\sigma_d) + K_{gd} N(-\sigma_d) &= 0 \\ D'(-\sigma_d) + K_{gd} N'(-\sigma_d) &= 0 \end{aligned}$$



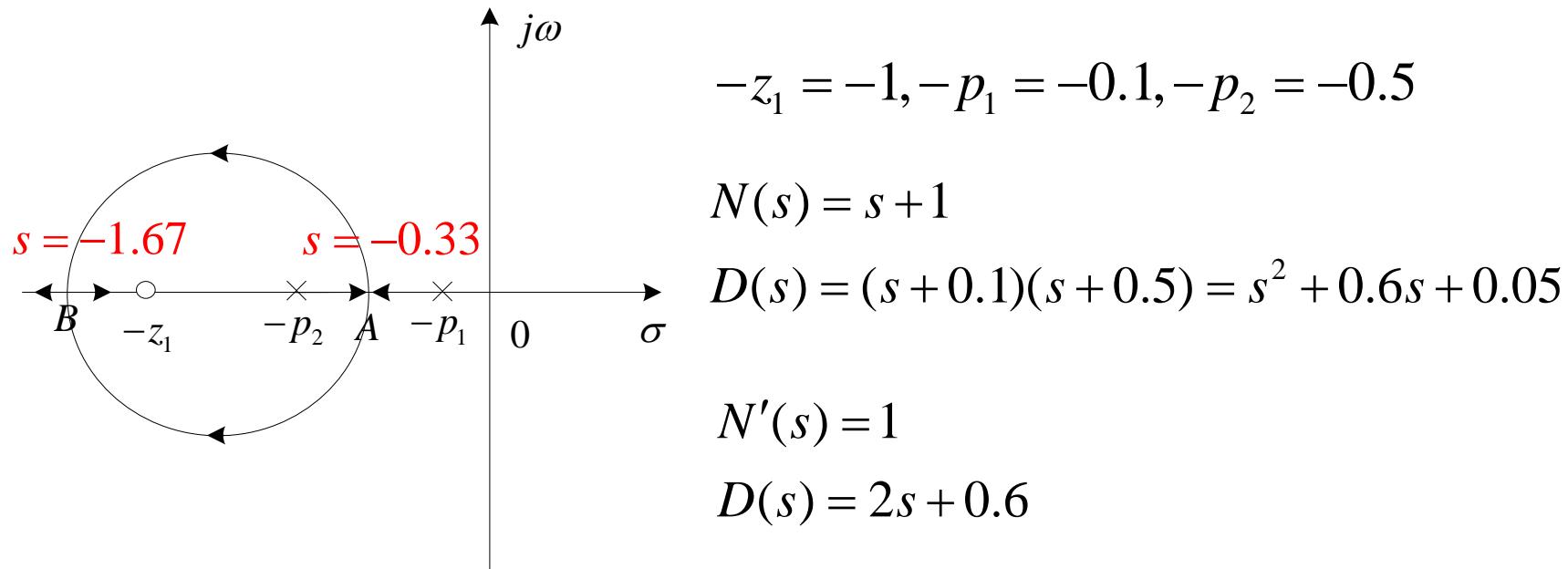
$$N(-\sigma_d)D'(-\sigma_d) - N'(-\sigma_d)D(-\sigma_d) = 0 \Rightarrow -\sigma_d = ?$$

$\sigma_d = ?$

## E.g. 4.22 重根法求解开环传递函数

$$G_0(s) = \frac{K_g(s+1)}{(s+0.1)(s+0.5)}$$

实轴上的根轨迹的分离点和汇合点。

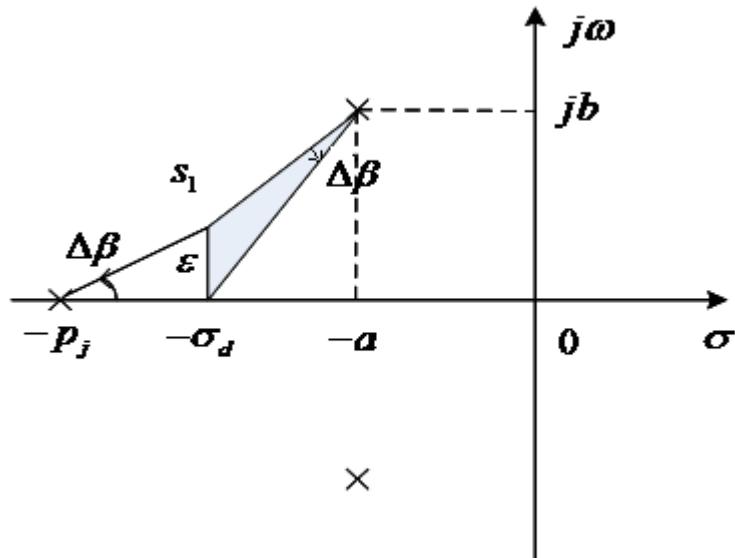


$$N(s)D'(s) - N'(s)D(s) = 0 \Rightarrow s^2 + 2s + 0.55 = 0 \Rightarrow s = -1.67 \text{ or } -0.33$$

$$D'(s) + K_{gd}N'(s) \Big|_{s=-1.67 \text{ or } -0.33} = 0 \Rightarrow K_{gd} = 0.06 \text{ or } 2.74$$

## b. 幅角条件法

$$\angle G_0(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) = \pm 180^\circ (2k+1), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



$-\sigma_d$ : Separation point

$s_1$ : a point on root locus

**原理:** 所有开环零、极点相对于这两点的幅角变化的总和应为0

$$\sum_{i=1}^m \Delta \angle(s_1 + z_i) - \sum_{j=1}^n \Delta \angle(s_1 + p_j) = 0$$

(1) 极点 (零点) 是实数

$$\Delta \beta = \Delta \angle(s_1 + p_j) = \arctan \frac{\varepsilon}{p_j - \sigma_d} \approx \frac{\varepsilon}{p_j - \sigma_d}$$

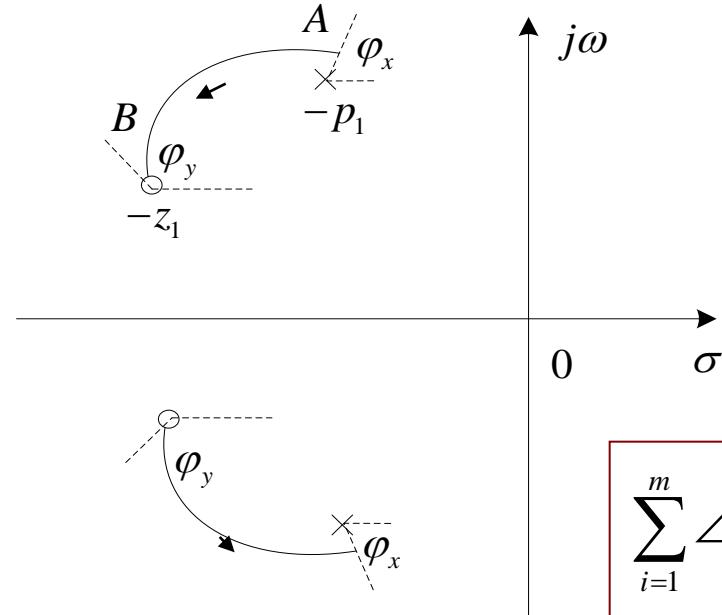
复极点 (零点) 无 or 离得远

(2) 一对共轭复极点 (零点)

$$\Delta \beta \approx \frac{2\varepsilon(a - \sigma_d)}{(a - \sigma_d)^2 + b^2}$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i - \sigma_d} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j - \sigma_d} = 0$$

## 8. 根轨迹的出射角和入射角(开环零、极点为复数)



出射角  $\varphi_x$ ：根轨迹离开复数极点的角

入射角  $\varphi_y$ ：根轨迹趋于复数零点的角

极点

$$\sum_{i=1}^m \angle(-p_1 + z_i) - \varphi_x - \sum_{j=2}^n \angle(p_1 + p_j) = \pm 180^\circ (2k+1)$$

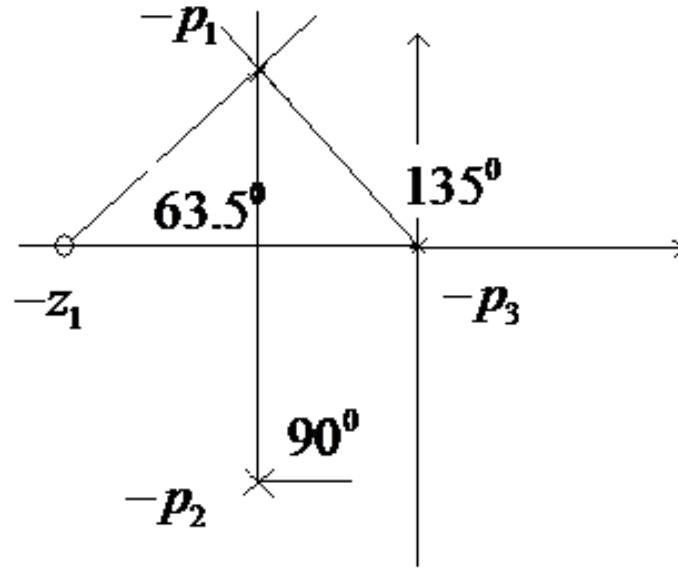
$$\sum_{i=2}^m \angle(-z_1 + z_i) + \varphi_y - \sum_{j=1}^n \angle(z_1 + p_j) = \pm 180^\circ (2k+1)$$

零点

$$\varphi_x = \mp 180^\circ (2k+1) + \sum_{i=1}^m \angle(-p_1 + z_i) - \sum_{j=2}^n \angle(p_1 + p_j)$$

$$\varphi_y = \pm 180^\circ (2k+1) + \sum_{j=1}^n \angle(z_1 + p_j) - \sum_{i=2}^m \angle(-z_1 + z_i)$$

## E.g.4.23 幅角条件法确定出射角



$$\varphi_x = \mp 180^\circ (2k+1) + \sum_{i=1}^m \angle(-p_i + z_i) - \sum_{j=2}^n \angle(p_1 + p_j)$$

$$= \mp 180^\circ + 63.5^\circ - 135^\circ - 90^\circ = \begin{cases} -341.5^\circ \\ 18.5^\circ \end{cases}$$

## 9. 根轨迹和虚轴的交点 $\omega$ 及临界根轨迹增益值 $K_{gp}$ (判断系统临界稳定性)

解法一：劳斯判据；

推荐

解法二：将 $s=j\omega$ 代入特征方程求解；

去伪存真

E.g.4.24

$$G_0 = \frac{K_g}{s(s+1)(s+2)}$$

试求根轨迹与虚轴的交点和临界根轨迹增益

解法二： $1 + G_0(s) = 0 \Rightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + K_g = 0$

$\rightarrow (j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K_g = 0 \Rightarrow (-3\omega^2 + K_g) + j(2\omega - \omega^3) = 0$

$\rightarrow -3\omega^2 + K_g = 0, 2\omega - \omega^3 = 0$

$\rightarrow \omega = \textcircled{0}, \pm\sqrt{2} \quad K_g = \textcircled{0}, 6 \quad \text{根轨迹的起点}$

## 10. 闭环极点之和、之积与开环极点和零点的关系

$$G_0 = K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = K_g \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

$$\begin{aligned} b_{m-1} &= \sum_{i=1}^m z_i & b_0 &= \prod_{i=1}^m z_i \\ a_{n-1} &= \sum_{j=1}^n p_j & a_0 &= \prod_{j=1}^n p_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + G_0(s) = 0 \Rightarrow s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 + K_g (s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0) &= 0 \\ (s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_n) &= s^n + (s_1 + s_2 + \dots + s_n)s^{n-1} + \dots + s_1s_2 \cdots s_n \end{aligned}$$

(1) 当  $n - m \geq 2$  时，闭环极点之和 = 开环极点之和 = 常数

$$-\sum_{j=1}^n s_j = -\sum_{j=1}^n p_j = -a_{n-1} \quad K_g \text{ 对 和 无影响}$$

(2) (-闭环极点) 之积 = (-开环极点) 之积 +  $K_g$  (-开环零点) 之积

$$\prod_{j=1}^n s_j = \prod_{j=1}^n p_j + K_g \prod_{i=1}^m z_i$$

E.g.4.24

$$G_0 = \frac{6}{s(s+1)(s+2)}$$

已知  $s = \pm\sqrt{2}j$  是闭环的两个极点，求闭环其他极点

$$n = 3, m = 0, n - m = 3 > 2$$

$$-\sum_{j=1}^n s_j = -\sum_{j=1}^n p_j \quad \longrightarrow \quad j\sqrt{2} - j\sqrt{2} + s_3 = 0 + (-1) + (-2) \Rightarrow s_3 = -3$$

# 根轨迹图绘制法则

起点和终点	起源于开环极点，终止于开环零点（无穷远零点）
分支和对称性	分支数=n个开环极点；对称与实轴
渐近线	<p>n-m条渐近线与实轴的交点：</p> $-\sigma = -\frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$ <p>夹角：</p> $\theta = 180^\circ \frac{(2k + 1)}{n - m}, k = 0, 1, \dots, n - m - 1$
实轴上的根轨迹	实轴上的一点，只要其右边的开环零点+极点=奇数
分离点与分离角	<p>分离点</p> $N(s)D'(s) - N'(s)D(s) = 0$ $\sum_{i=1}^m \Delta \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \Delta \angle(s + p_j) = 0$ <p>分离角</p> $\theta_a = \frac{180^\circ}{k}$
出射角和入射角	<p>出射角</p> $\varphi_x = \mp 180^\circ (2k + 1) + \sum_{i=1}^m \angle(-p_i + z_i) - \sum_{j=2}^n \angle(p_1 + p_j)$ <p>入射角</p> $\varphi_y = \pm 180^\circ (2k + 1) + \sum_{j=1}^n \angle(z_1 + p_j) - \sum_{i=2}^m \angle(-z_1 + z_i)$
与虚轴的交点	劳斯判据和代入法
闭环极点之和、之积	$-\sum_{j=1}^n s_j = -\sum_{j=1}^n p_j = -a_{n-1}, (n - m \geq 2)$ $\prod_{j=1}^n s_j = \prod_{j=1}^n p_j + K_g \prod_{i=1}^n z_i$

## 4.4.4 根轨迹图的绘制与稳定性分析

E.g.4.25

$$G_0 = \frac{K_g(s+1)}{(s+0.1)(s+0.5)}$$

试绘制根轨迹图并判断闭环系统的稳定性

a. 条数，起点，终点

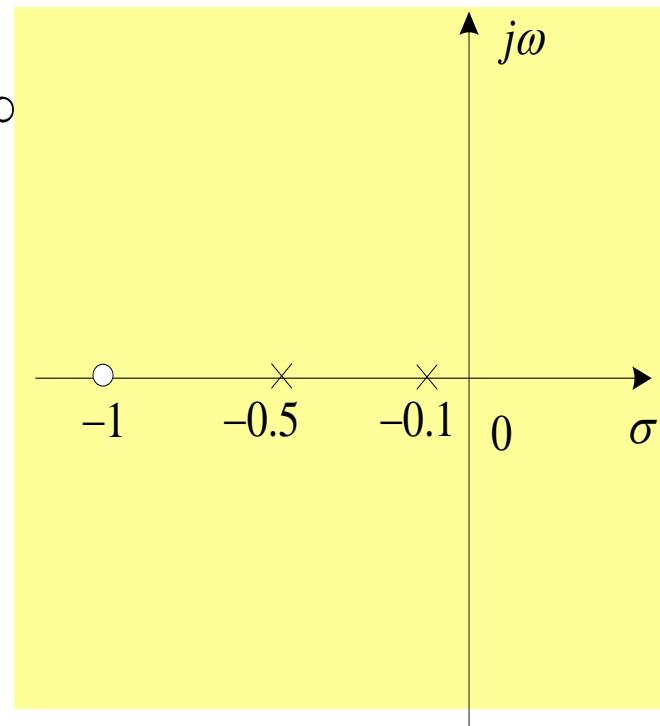
$$n = 2 \quad -p_1 = 0.1, \quad -p_2 = -0.5 \quad -z_1 = -1, \quad \infty$$

b. 渐近线

$$-\sigma = -\frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = 0.4, \quad \theta = \frac{180^\circ(2k+1)}{n-m} = 180^\circ$$

c. 实轴上的根轨迹

$$(-\infty, -1) \quad (-0.5, -0.1)$$



d. 分离点, 汇合点, 分离角

$$N(s)D'(s) - N'(s)D(s) = 0 \Rightarrow s^2 + 2s + 0.55 = 0 \Rightarrow s = -1.67 \text{ or } -0.33$$

$$\theta_d = \frac{180^\circ}{k} = 90^\circ$$

e. 复平面上的根轨迹为圆

$$\angle(s+1) - \angle(s+0.1) - \angle(s+0.5) = 180^\circ$$

$$\angle(\sigma + j\omega + 1) - \angle(\sigma + j\omega + 0.1) - \angle(\sigma + j\omega + 0.5) = 180^\circ$$

$$\arctan \frac{\omega}{1+\sigma} - \arctan \frac{\omega}{0.1+\sigma} = 180^\circ + \arctan \frac{\omega}{0.5+\sigma}$$

$$\arctan \frac{\omega}{1+\sigma} - \arctan \frac{\omega}{0.1+\sigma} = 180^\circ + \arctan \frac{\omega}{0.5+\sigma}$$

$$1 + \frac{\omega}{1+\sigma} \cdot \frac{\omega}{0.1+\sigma}$$

$$\frac{\omega}{1+\sigma} - \frac{\omega}{0.1+\sigma} = \frac{\omega}{0.5+\sigma}$$

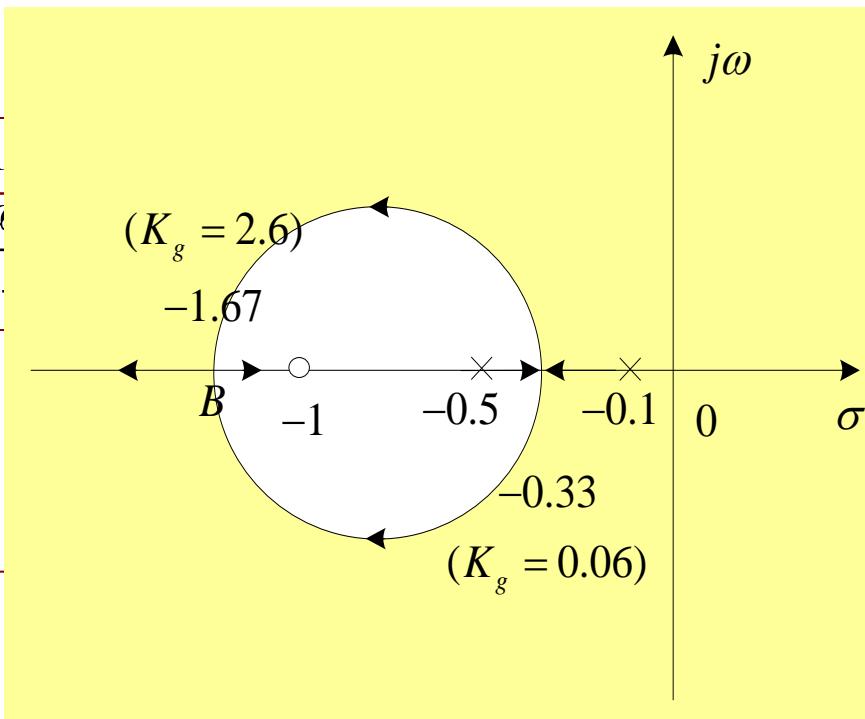
$$1 + \frac{\omega}{1+\sigma} \cdot \frac{\omega}{0.1+\sigma}$$

$$(\sigma + 1)^2 + \omega^2 = 0.67^2$$

汇合点

分离点

$$K_{gd} = 0.06 \text{ or } 2.74$$



## E.g.4.26

$$G_0 = \frac{K_g(s+2)}{s(s+3)(s^2 + 2s + 2)}$$

试绘制根轨迹图并判断闭环系统的稳定性

a. 条数，起点，终点

$$n = 4 \quad -p_1 = 0, \quad -p_2 = -3, \quad -p_{3,4} = -1 \pm j \quad -z_1 = -2, \infty(3)$$

b. 漐近线

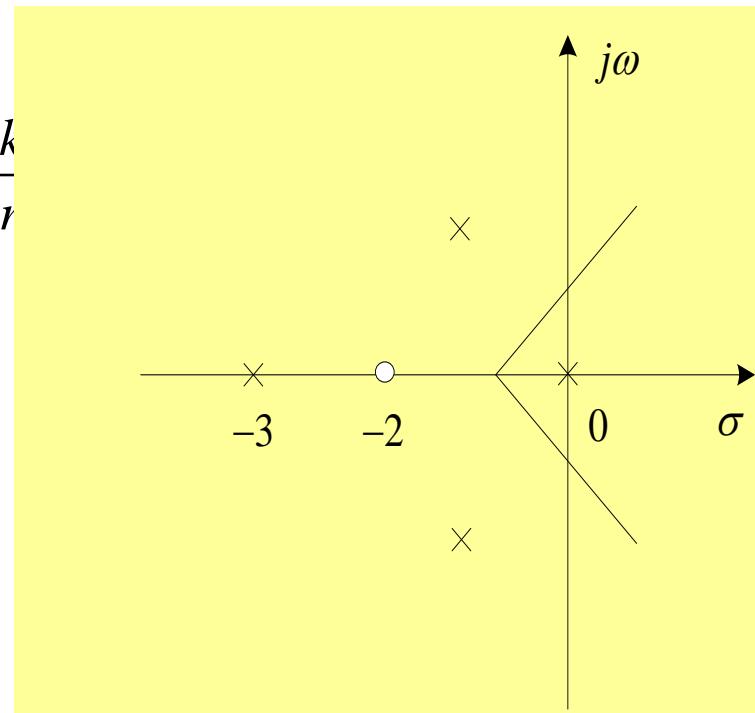
$$-\sigma = -\frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = -1, \theta = \frac{180^\circ(2k+1)}{n-m}$$

c. 实轴上的根轨迹

$$(-\infty, -3) \quad (-2, 0)$$

d. 分离点，汇合点，分离角

无



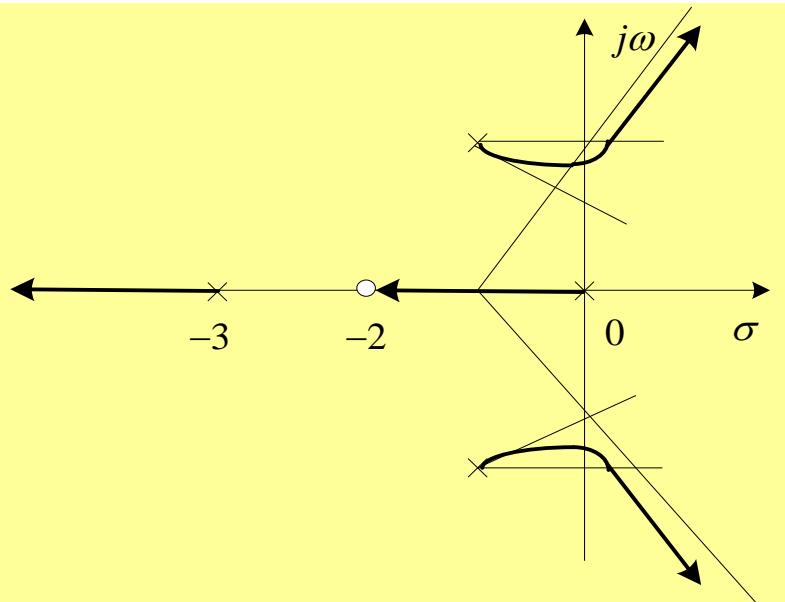
### e. 离开极点-1+j 的出射角

$$\begin{aligned}
 \varphi_x &= \mp 180^\circ(2k+1) + \angle(-p_3 + z_1) - \angle(-p_3 + p_1) - \angle(-p_3 + p_2) - \angle(-p_3 + p_4) \\
 &= \mp 180^\circ(2k+1) + \angle(-1+j+2) - \angle(-1+j+0) - \angle(-1+j+3) - \angle(-1+j+1+j) \\
 &= \mp 180^\circ(2k+1) + 45^\circ - 135^\circ - 26.6^\circ - 90^\circ = -26.6^\circ
 \end{aligned}$$

离开极点-1+j 的出射角?  $26.6^\circ$

### f. 与虚轴的交点

$$s(s+3)(s^2 + 2s + 2) + K_g(s+2) = 0 \Rightarrow s^4 + 5s^3 + 8s^2 + (6 + K_g)s + 2K_g = 0$$



$$6 + K_g - \frac{50K_g}{34 - K_g} = 0 \Rightarrow K_{gp} = 7$$

辅助多项式:

$$[40 - (6 + 7)]s^2 + 5 \times 2 \times 7 = 0$$

$$s = \pm j1.6$$

### E.g.4.28 (参数非根轨迹增益的情况)

$$G_0 = \frac{10(Ts + 1)}{s(s + 2)}$$

试绘制随T变化的根轨迹图并分析闭环系统的稳定性

零、极点的形式:

$$G_0(s) = K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

$$1 + \frac{10(Ts + 1)}{s(s + 2)} = 0 \Rightarrow s^2 + 2s + 10 + 10Ts = 1 + \frac{10Ts}{s^2 + 2s + 10}$$

$$G'_0(s) = \frac{10Ts}{s^2 + 2s + 10}$$

## E.g.4.28 (离散系统的情况)

$$y(k+1) = 2y(k) - Ku(k)$$

$$u(k) = y(k) - y(k-1)$$

$K > 0$  为控制增益，试绘制随  $K$  变化的根轨迹图并分析稳定性

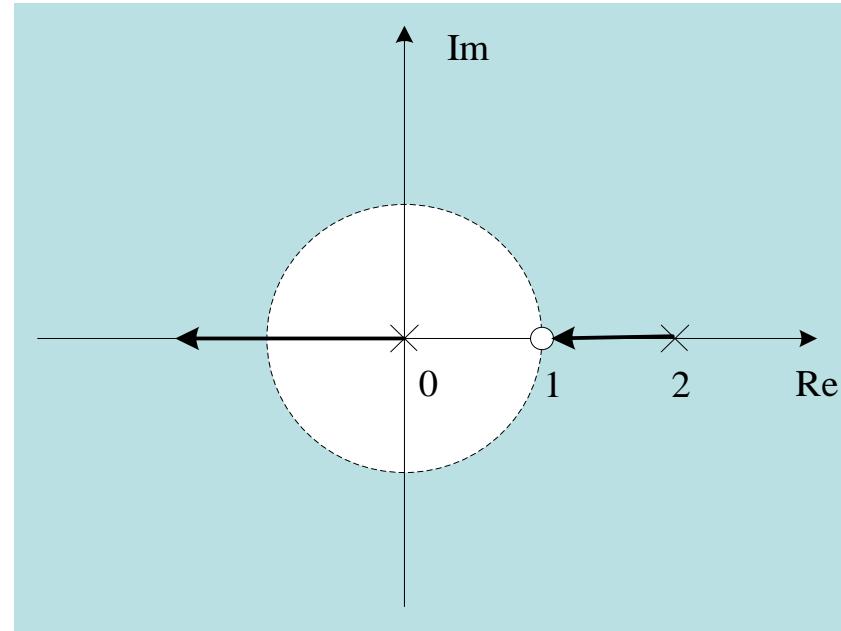
闭环差分方程  $y(k+1) - 2y(k) + K(y(k) - y(k-1)) = 0$

特征方程  $z - 2z + K(1 - z^{-1}) = 0$

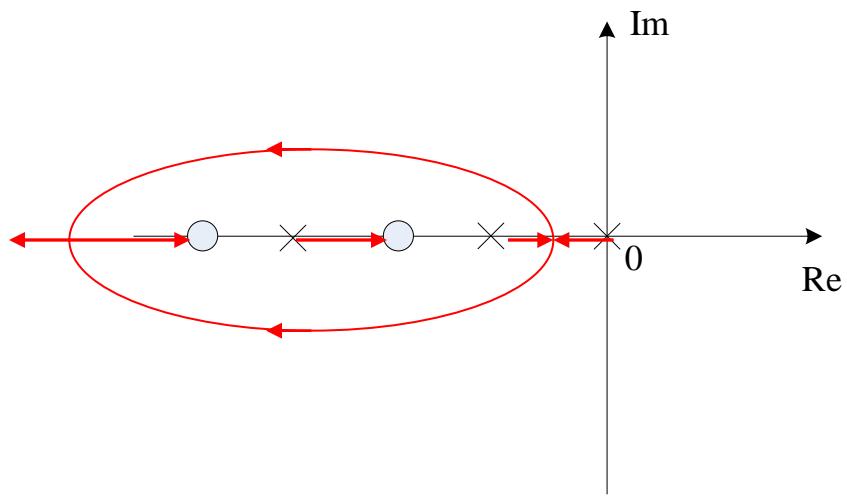
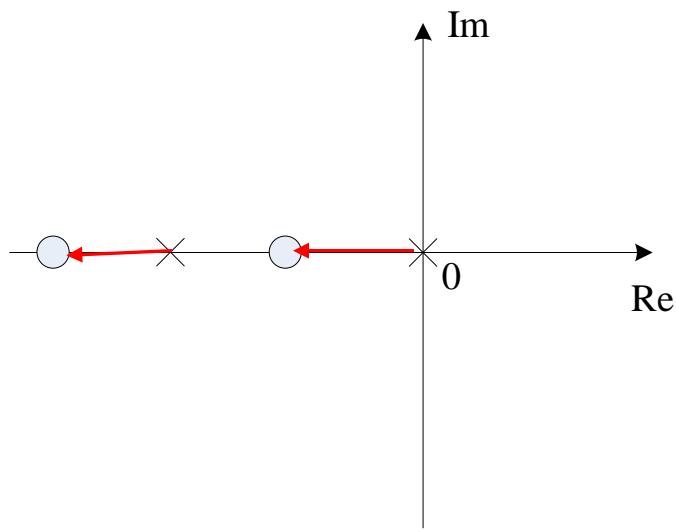
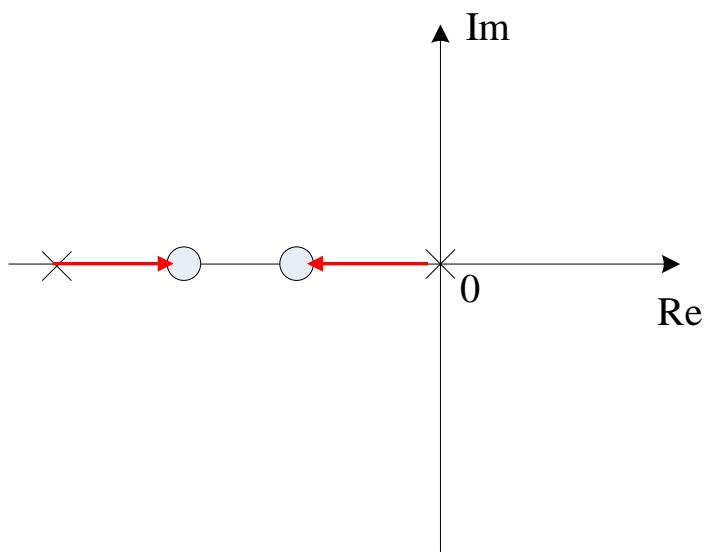
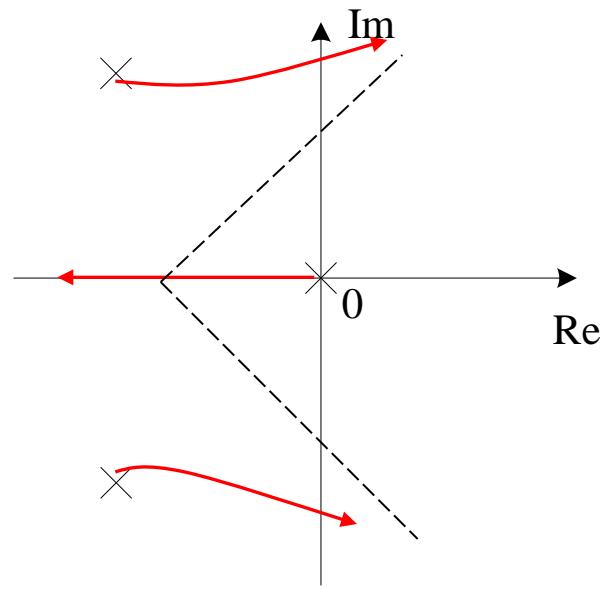
$$1 + \frac{K(z-1)}{z(z-2)} = 0$$

求临界稳定  $K$  的值

劳斯:  $z = \frac{s+1}{s-1} \rightarrow K_p, \omega j \rightarrow z$



## 思考题



# 思考题

$$G_0 = \frac{K_g(s+1)}{(s+2)(s-2)(s^2 + 2s + 2)}$$

试绘制根轨迹图并判断闭环系统的稳定性

a. 条数，起点，终点

$$n = 4 \quad -p_1 = -2, \quad -p_2 = 2, \quad -p_{3,4} = -1 \pm j \quad -z_1 = -1, \infty(3)$$

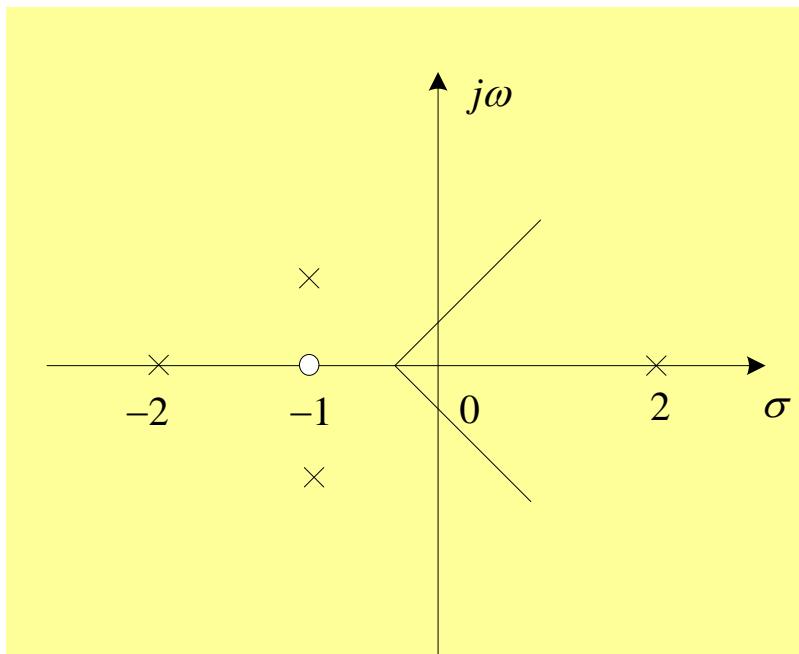
b. 漐近线

$$-\sigma = -\frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = -\frac{1}{3},$$

$$\theta = \frac{180^\circ(2k+1)}{n-m}, (k=0,1,2)$$

c. 实轴上的根轨迹

$$(-\infty, -2) \quad (-1, 2)$$



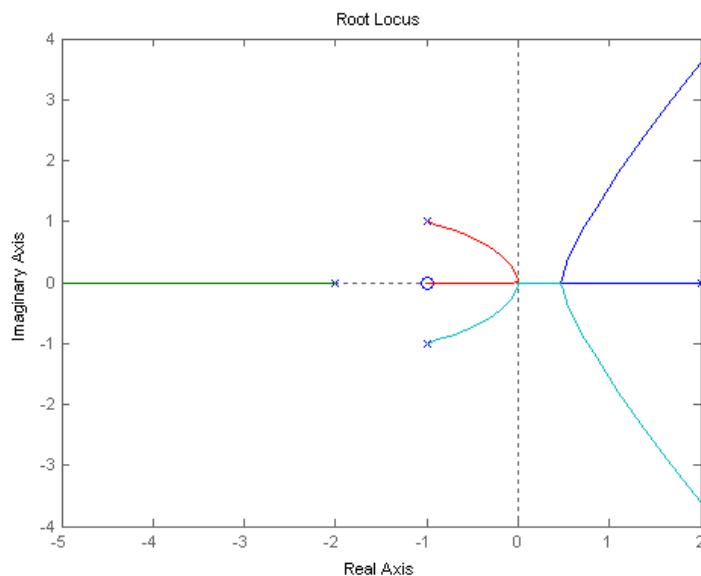
### d. 离开极点 $-1+j$ 的出射角

$$\begin{aligned}
 \varphi_x &= \mp 180^\circ (2k+1) + \angle(-p_3 + z_1) - \angle(-p_3 + p_1) - \angle(-p_3 + p_2) - \angle(-p_3 + p_4) \\
 &= \mp 180^\circ (2k+1) + \angle(-1+j+1) - \angle(-1+j+2) - \angle(-1+j-2) - \angle(-1+j+1+j) \\
 &= \mp 180^\circ 2k + 90^\circ - 45^\circ + 18.4^\circ - 90^\circ = -26.6
 \end{aligned}$$

离开极点 $-1-j$ 的出射角?  $26.6^\circ$

### e. 与虚轴的交点

$$(s+2)(s-2)(s^2 + 2s + 2) + K_g(s+1) = 0 \Rightarrow s^4 + 2s^3 - 2s^2 + (K_g - 8)s + K_g - 8 = 0$$



去

$$-\frac{K_g(K_g - 8)}{4 - K_g} = 0 \Rightarrow K_{gp} = 0, 8$$

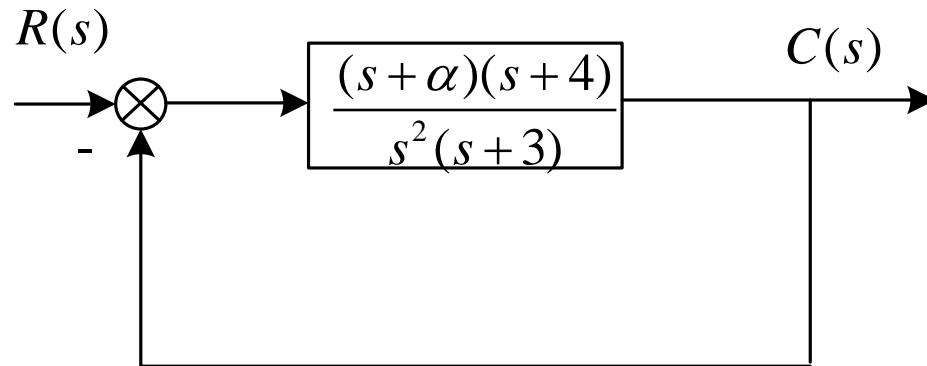
辅助多项式:  $-2s^2 + 0 = 0$

$$s = 0$$

### f. 分离点, 汇合点, 分离角

## 思考题

如图所示的闭环系统。绘制以为 $\alpha$  可变参数的根轨迹。

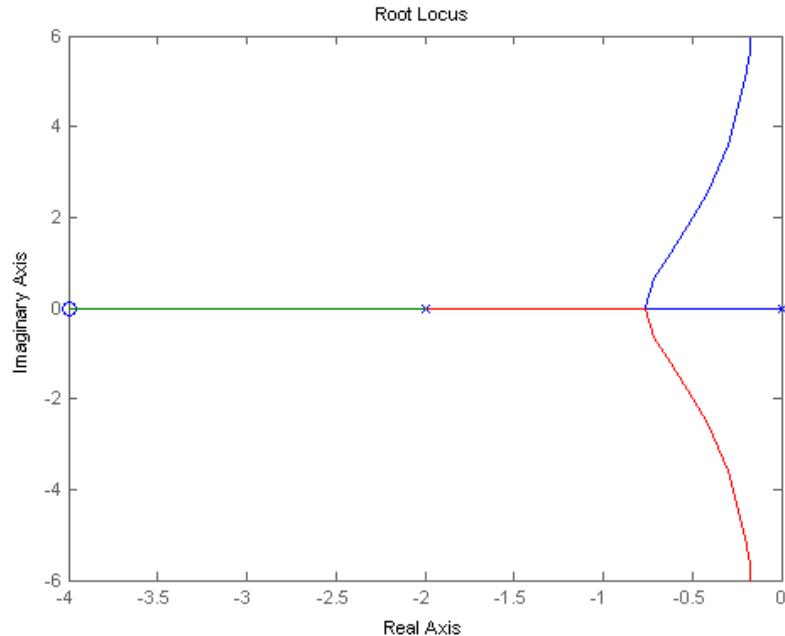


闭环特征方程：

$$s^3 + 4s^2 + 4s + \alpha s + 4\alpha = 0$$

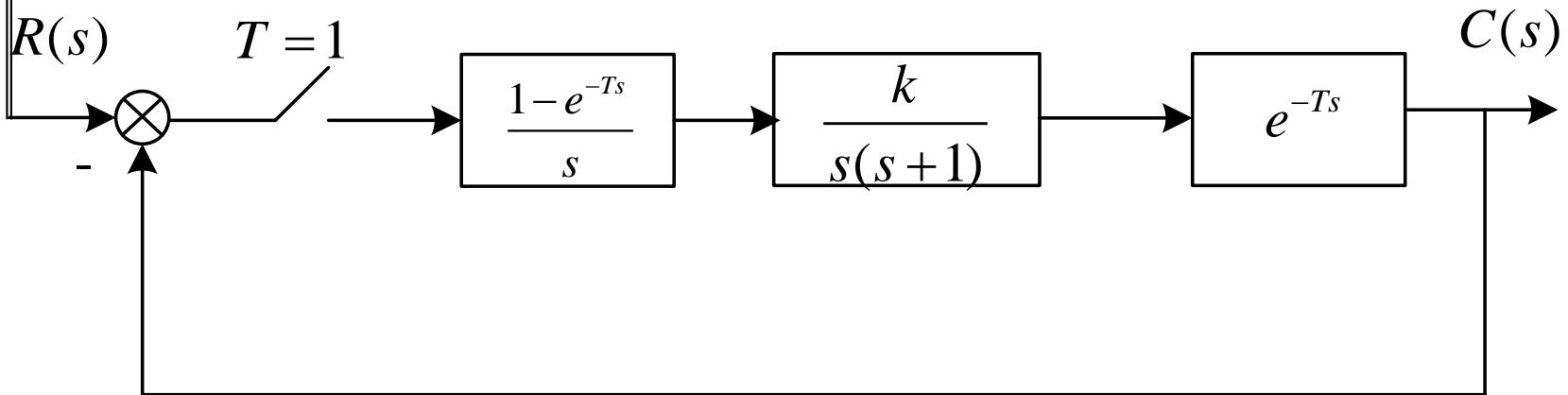
等效的开环传递函数：

$$G_0(z) = \frac{\alpha(s+4)}{s^3 + 4s^2 + 4s} = \frac{\alpha(s+4)}{s(s+2)^2}$$



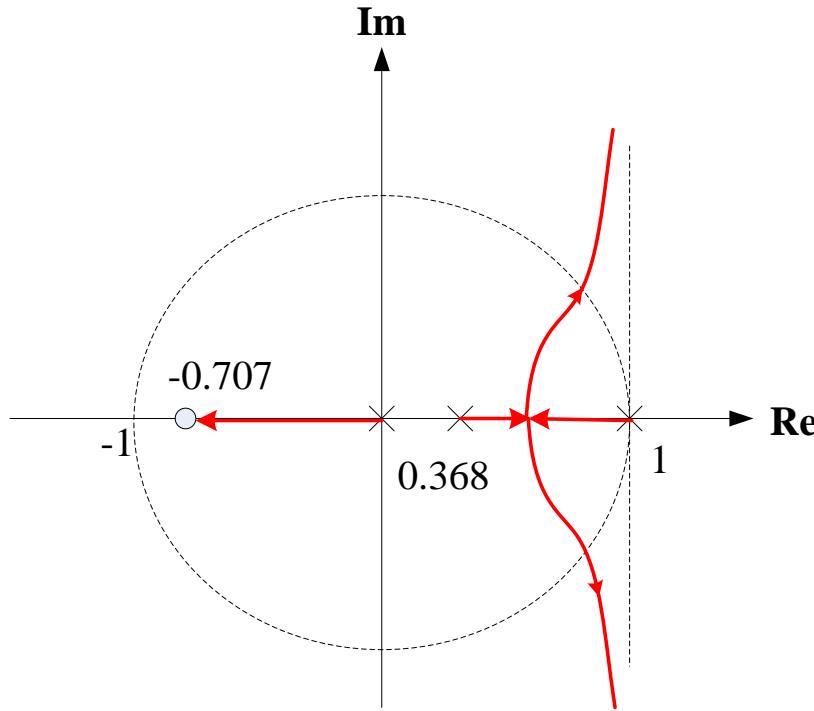
复习题.如图所示的采样控制系统，其中采样周期T=1s,k>0.

- (1) 求系统的闭环和开环脉冲传递函数。
- (2) 根据 (1) 的结果画出系统的在Z平面中的根轨迹。
- (3) 闭环系统稳定时k的取值范围。



$$G_0(z) = G_1 G_2 G_3(z) = 0.368k \frac{z + 0.717}{z(z - 1)(z - 0.368)}$$

$$G(z) = \frac{G_1 G_2 G_3(z)}{1 + G_1 G_2 G_3(z)}$$



闭环特征方程：

$$z^3 - 1.368z^2 + 0.368(k+1)z + 0.264k = 0$$

$$z = \frac{s+1}{s-1}$$

$$0.632ks^3 + (1.264 - 1.16k)s^2 + (4 + 0.424)s + (2.736 + 0.104k) = 0$$

$$s^3 : 0.632k \qquad \qquad \qquad 4 + 0.424k$$

$$s^2 : 1.264 - 1.16k \qquad \qquad \qquad 2.736 + 0.104k$$

$$s^1 : (5.06 - 5.83k - 0.558k^2) \times (k^2 + 1.3k + 4)$$

$$s^0 : 2.736 + 0.104k$$

$$0 < k < 0.8$$

问题：如果不知道系统的闭环传递函数和开环传递函数，如何判断系统的稳定性？

- ◇ Routh-Hurwitz(Jury)      系统的闭(开)环传递函数
- ◇ 根轨迹图                  系统的开环传递函数

作实验得到开环的频率特性图（Nyquist曲线），  
Nyquist利用这个图来分析系统的稳定性。

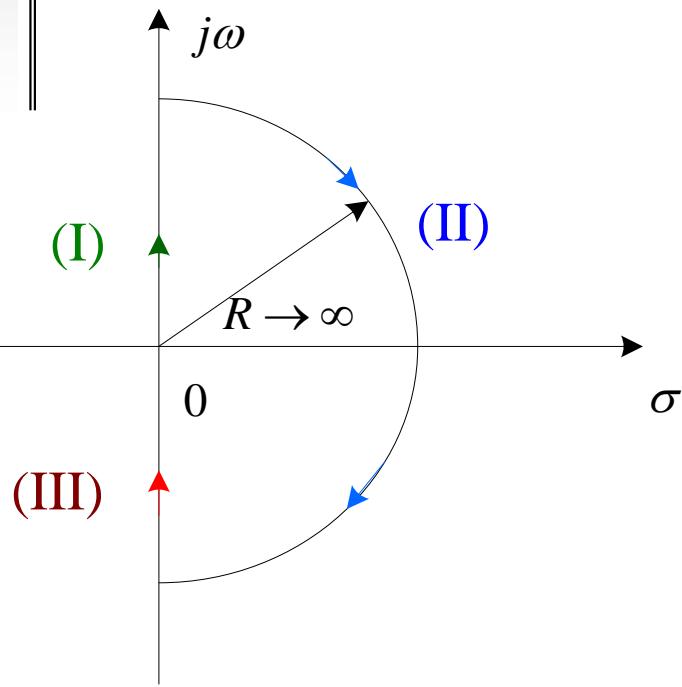
## 4.5 奈奎斯特稳定性判据

连续系统如何判断系统稳定性？

特征根都在左半平面



在右半平面没有特征根



Part 1

$$s = j\omega, (\omega : 0 \rightarrow \infty)$$

Part 2

$$s = \text{Re}^{j\theta}, (R \rightarrow \infty, \theta : \pi/2 \rightarrow -\pi/2)$$

Part 3

$$s = j\omega, (\omega : -\infty \rightarrow 0)$$

与奈奎斯特图有什么关系？

Part 1       $s = j\omega, (\omega : 0 \rightarrow \infty)$

$$G_0(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}$$

频率特性图

Part 3       $s = j\omega, (\omega : -\infty \rightarrow 0)$

负频率特性图

Part 2       $s = \text{Re}^{j\theta}, (R \rightarrow \infty, \theta : \pi/2 \rightarrow -\pi/2)$

$$G_0(\text{Re}^{j\theta}) \rightarrow \begin{cases} 0, n > m \\ \frac{K\tau_1\tau_2 \cdots \tau_m}{T_1 T_2 \cdots T_n}, n = m \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad G_0(j\omega) \rightarrow \begin{cases} 0, n > m \\ \text{端点 } (\omega \rightarrow \infty), n = m \end{cases}$$

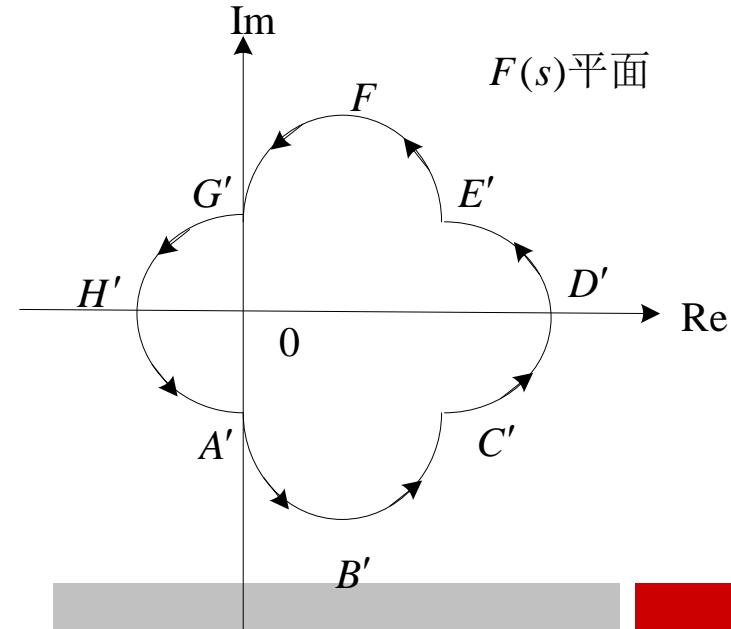
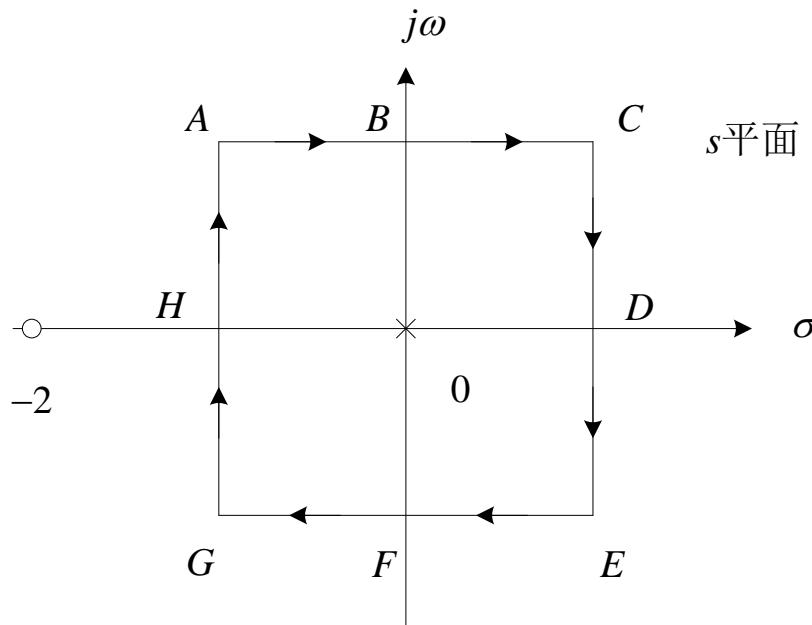
如何判稳?

柯西幅角定理

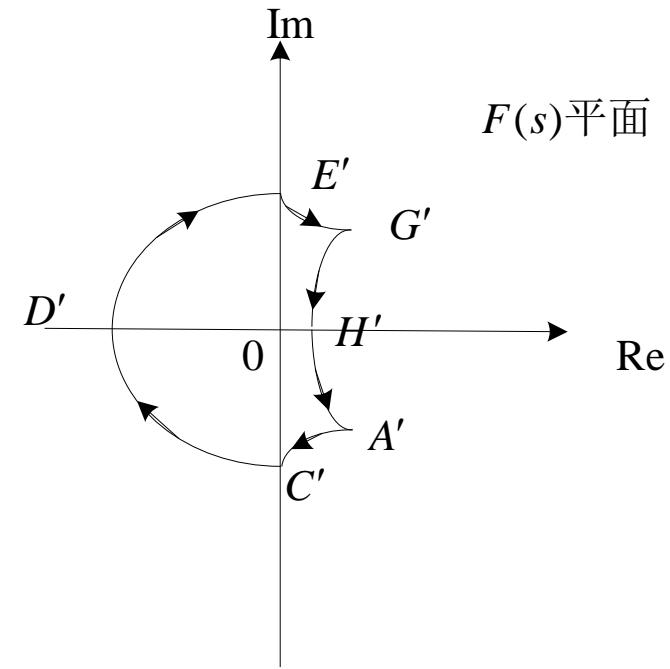
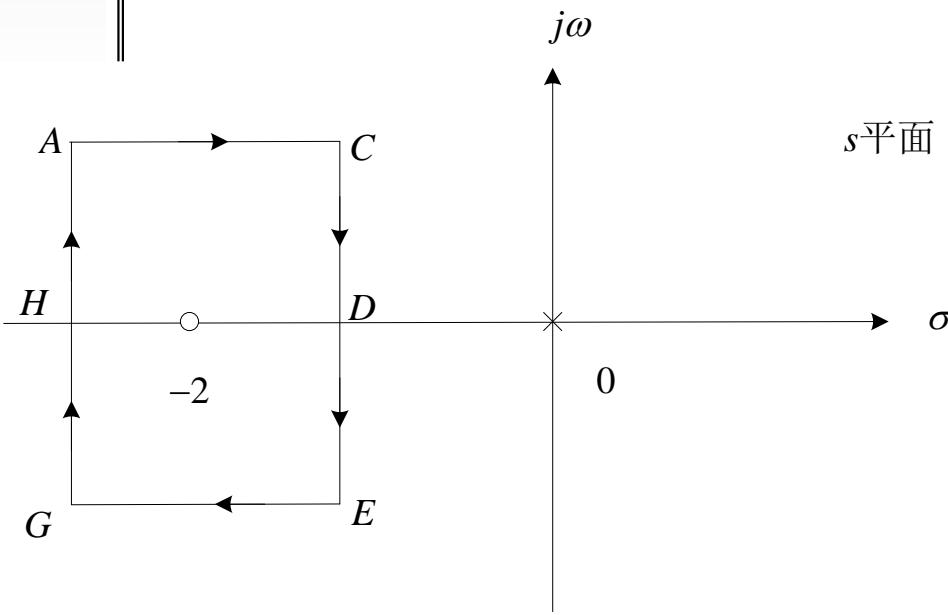
自变量  $s = \sigma + j\omega$  的复变函数:

$$F(s) = \frac{s+2}{s}$$

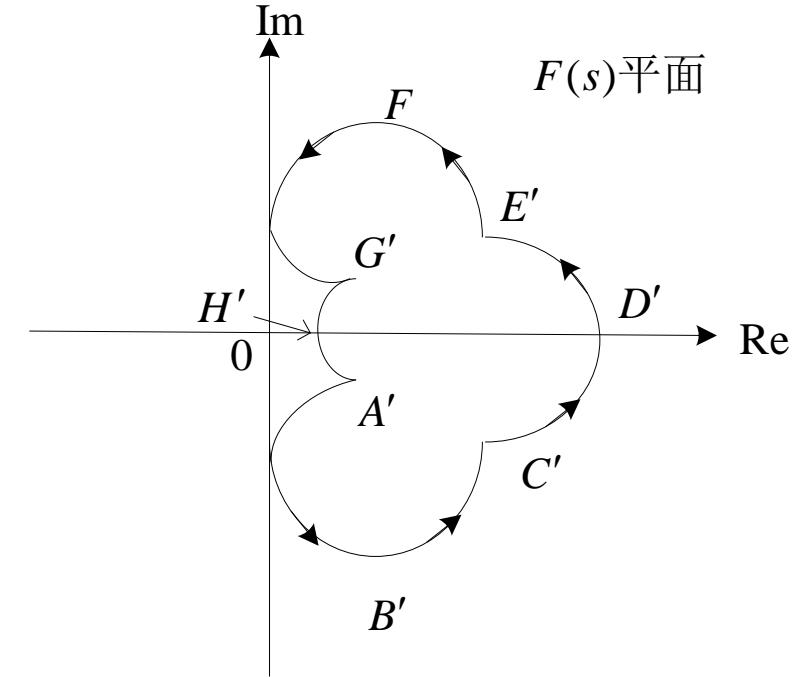
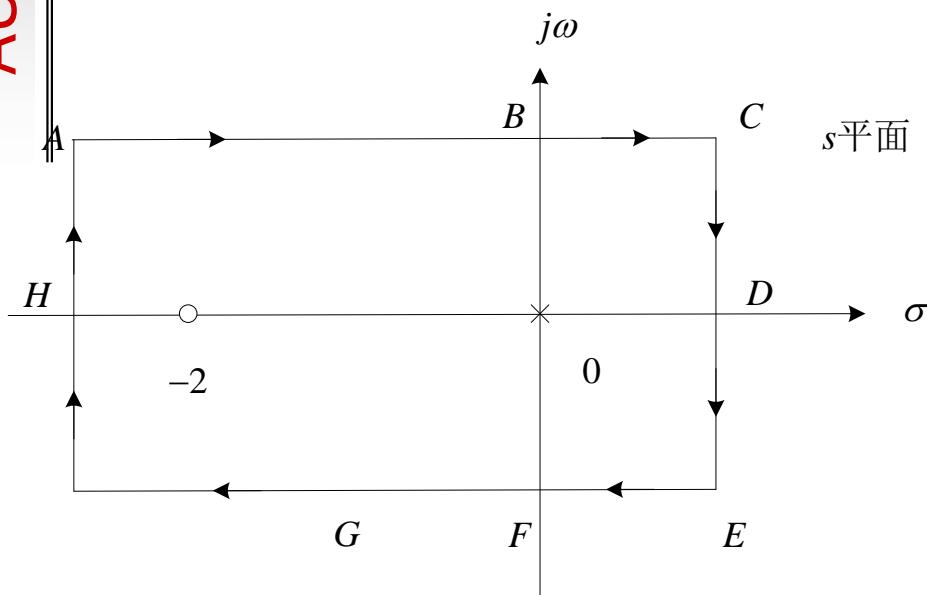
若  $s$  平面上自变量沿包围极点的围线顺时针变化,  
则映射点在  $F(s)$  平面上逆时针包围原点



若  $s$  平面上自变量包围零点的围线顺时针变化，  
则映射点在  $F(s)$  平面上逆时针包围原点

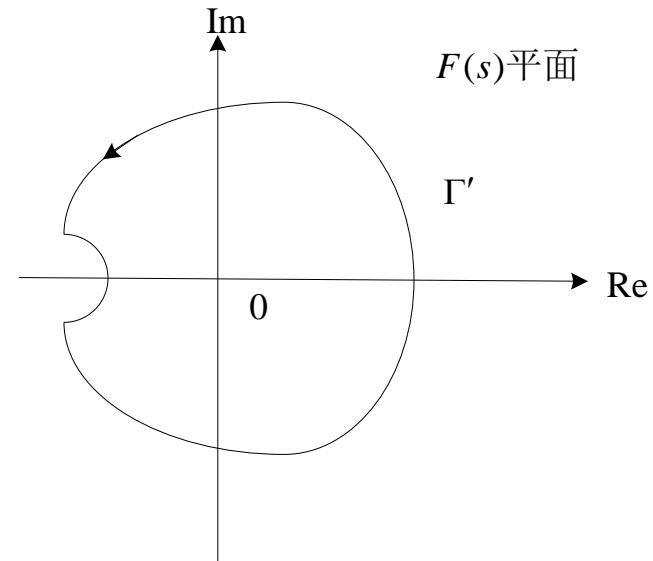
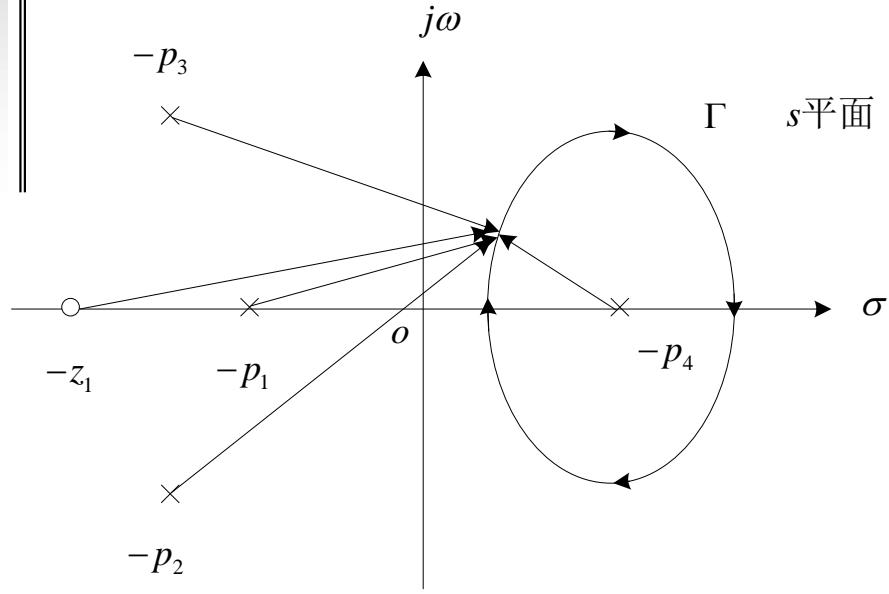


若  $s$  平面上自变量同时包围极点和零点的围线顺时针变化，则映射点在  $F(s)$  平面上不包围原点

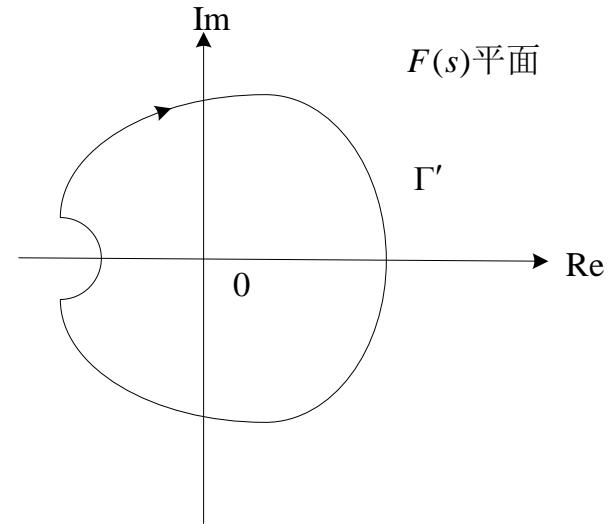
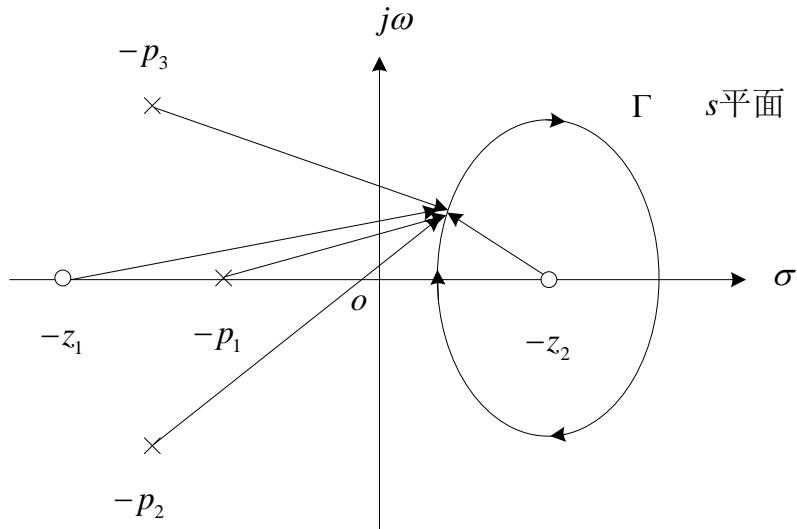


自变量  $s = \sigma + j\omega$  的复变函数：

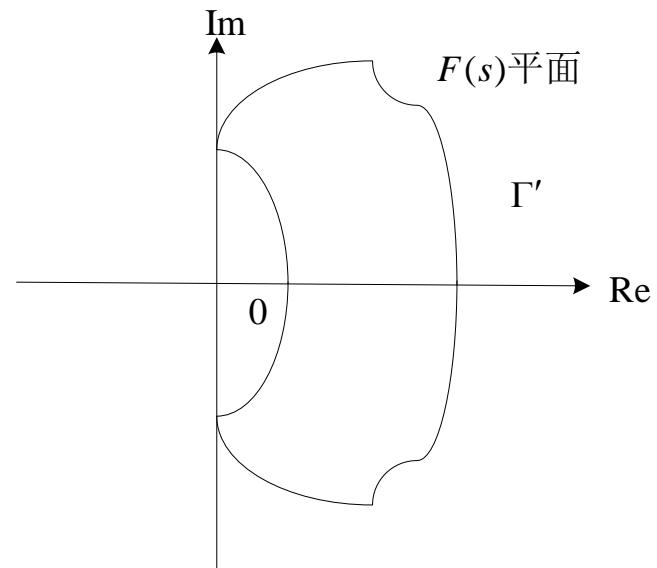
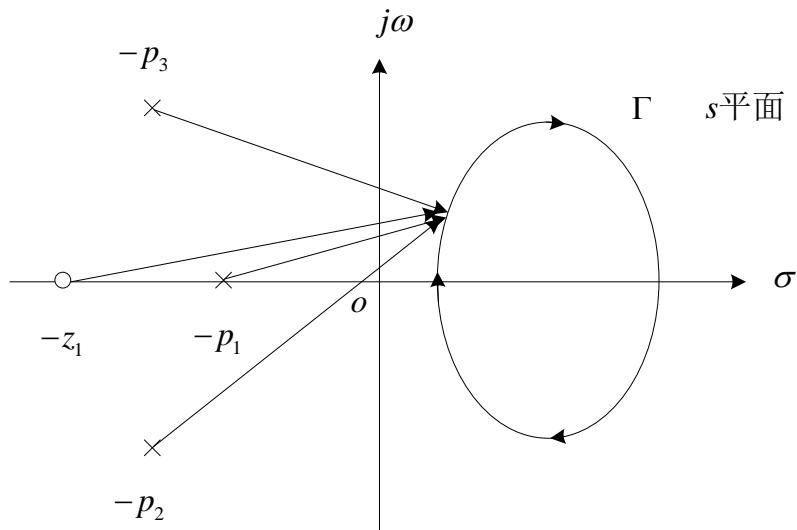
$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$



$\Gamma$  以内的极点对应的幅角贡献为360度



$\Gamma$ 以内的零点对应的幅角贡献为-360度



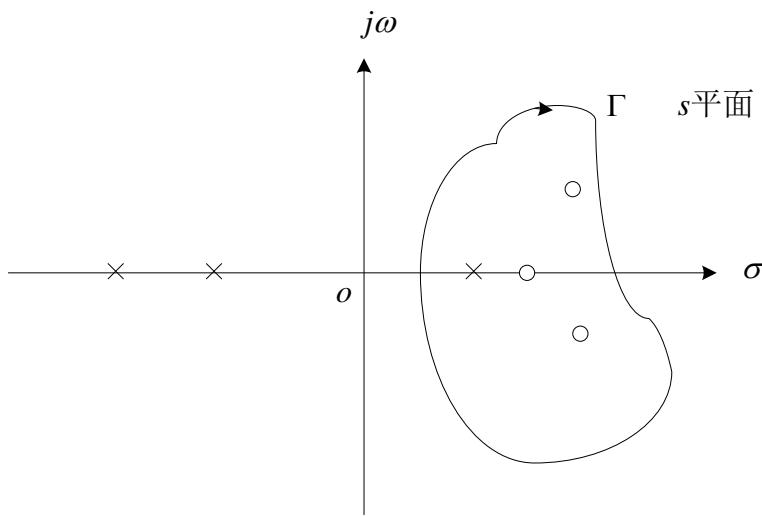
$\Gamma$ 以外的极点、零点对应的幅角贡献为0

## 柯西幅角定理：

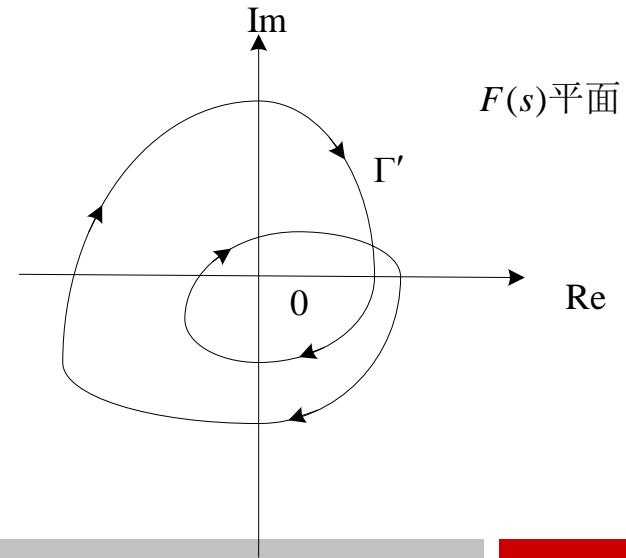
设  $F(s)$  在  $\Gamma$  上及  $\Gamma$  内除了有限个数的点外是处处解析的，  
 $F(s)$  在  $\Gamma$  上既无极点也无零点，则当  $\Gamma$  走向为顺时针时，  
 映射围线  $\Gamma'$  包围  $F(s)$  平面原点的次数为

$$N = Z - P$$

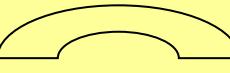
其中， $Z$  是  $F(s)$  在  $\Gamma$  内的零点个数， $N$  是  $F(s)$  在  $\Gamma$  内的极点个数。



$$N = 3 - 1 = 2$$



## 4.5.2 奈奎斯特稳定性判据

辅助函数的构建：闭环极点  开环极点（零点）

开环传函： $G_0(s) = G(s)H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$

特征方程： $1 + G_0(s) = 0$

辅助函数： $F(s) = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)} = 1 + G_0(s)$

闭环极点   
开环极点 

$F(s)$ 的零点=闭环极点  
 $F(s)$ 的极点=开环极点

如何运用柯西幅角定理？

第一步：构造能包围整个右半s平面的封闭围线

第二步：由开环频率特性曲线确定映射围线包围的原点的圈数N

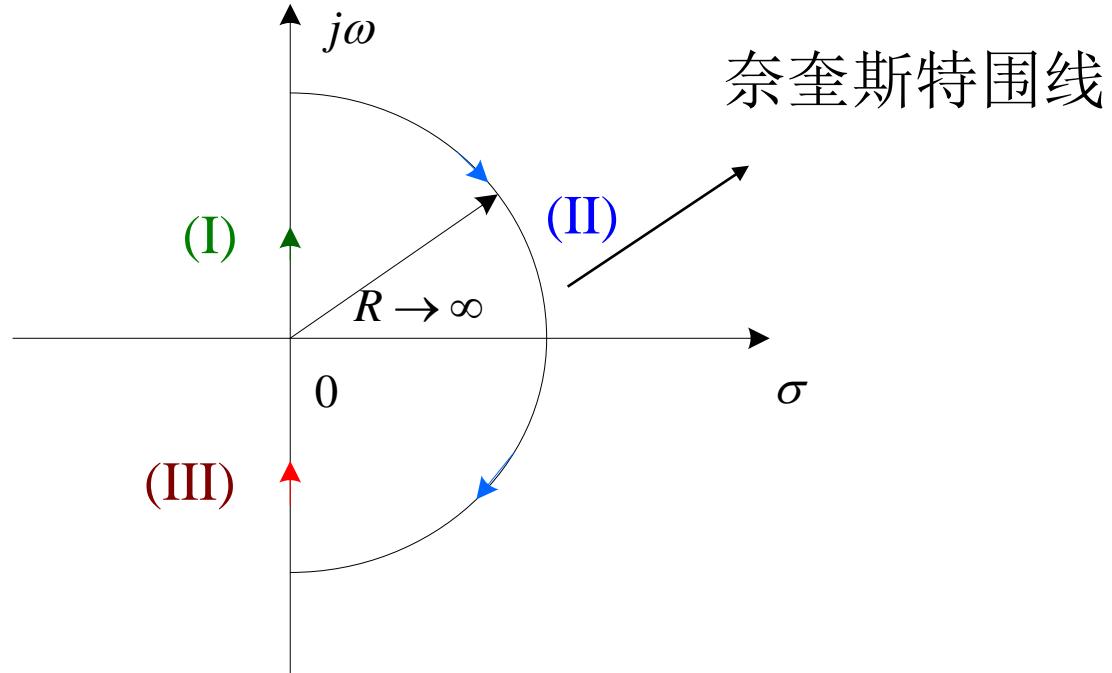
奈奎斯特稳定性判据

$$\text{数} \quad \leftarrow N = \frac{\text{闭环右极点}}{\text{开环右极点}} \rightarrow \text{已知}$$



0, 稳定; 否则, 不稳定

## 第一步



奈奎斯特围线

如果  $F(s)$  在虚轴上无零、极点

Part 1

$$s = j\omega, (\omega : 0 \rightarrow \infty)$$

Part 2

$$s = Re^{j\theta}, (R \rightarrow \infty, \theta : \pi/2 \rightarrow -\pi/2)$$

Part 3

$$s = j\omega, (\omega : -\infty \rightarrow 0)$$

## 第二步（已知）

Part 1  $s = j\omega, (\omega : 0 \rightarrow \infty)$

$$G_0(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}$$

频率特性图

Part 3  $s = j\omega, (\omega : -\infty \rightarrow 0)$

负频率特性图

Part 2  $s = \text{Re}^{j\theta}, (R \rightarrow \infty, \theta : \pi/2 \rightarrow -\pi/2)$

$$G_0(\text{Re}^{j\theta}) \rightarrow \begin{cases} 0, n > m \\ \frac{K\tau_1\tau_2 \cdots \tau_m}{T_1 T_2 \cdots T_n}, n = m \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad G_0(j\omega) \rightarrow \begin{cases} 0, n > m \\ \text{端点 } (\omega \rightarrow \infty), n = m \end{cases}$$

## 第二步（于是）

奈奎斯特围线对  $F(s)$  的映射 = 对  $G_0(s)$  的映射 + 1 (右移 1 单位)



$F(s)$  平面内对原点的包围  $\Leftrightarrow G_0(s)$  平面内对  $(-1, j0)$  点的包围

### 奈奎斯特稳定性判据

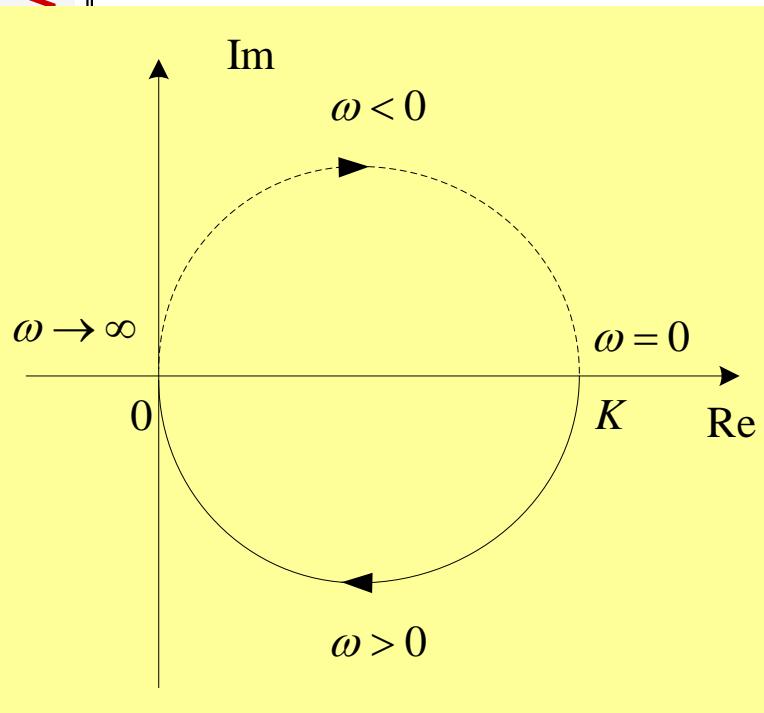
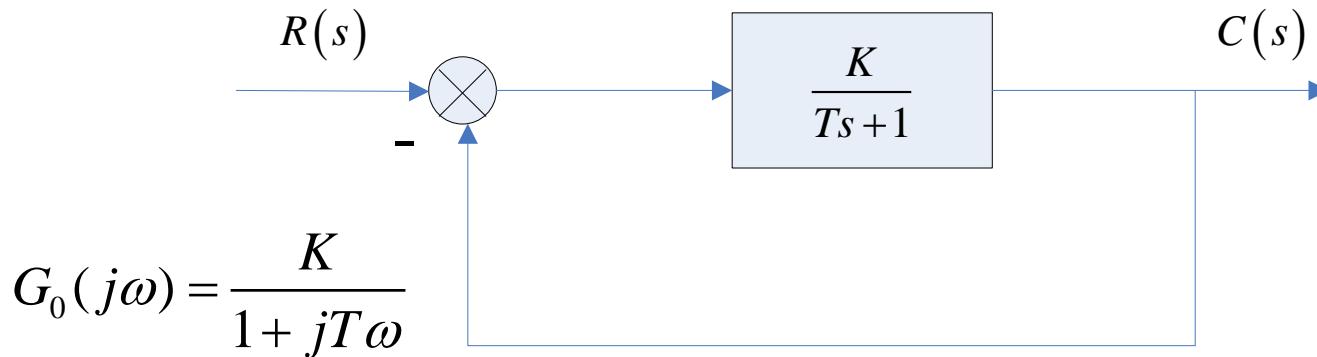
数  $\leftarrow$   $N = \text{闭环右极点} - \text{开环右极点}$   $P \rightarrow$  已知



$G_0(j\omega)$  与  $\text{实轴}$  的交点

0, 稳定; 否则, 不稳定

## E.g.4.30 试用奈奎斯特稳定性判据判别其稳定性



起点  $\omega = 0, G_0(0) = K$

终点  $\omega \rightarrow \infty, G_0(\infty) \rightarrow 0 \angle -90^\circ$

中间点（与负实轴的交点）

**找几个 $\omega$ 值带入求点，画大致趋势**

$Z = N + P = 0 + 0 = 0$  稳定

## E.g.4.31 试用奈奎斯特稳定性判据判别其稳定性

$$G_0(s) = \frac{52}{(s+2)(s^2 + 2s + 5)}$$

$$G_0(j\omega) = \frac{52/2/5}{(1 + j\frac{\omega}{2})(-\frac{\omega^2}{5} + j\frac{2\omega}{5} + 1)}$$

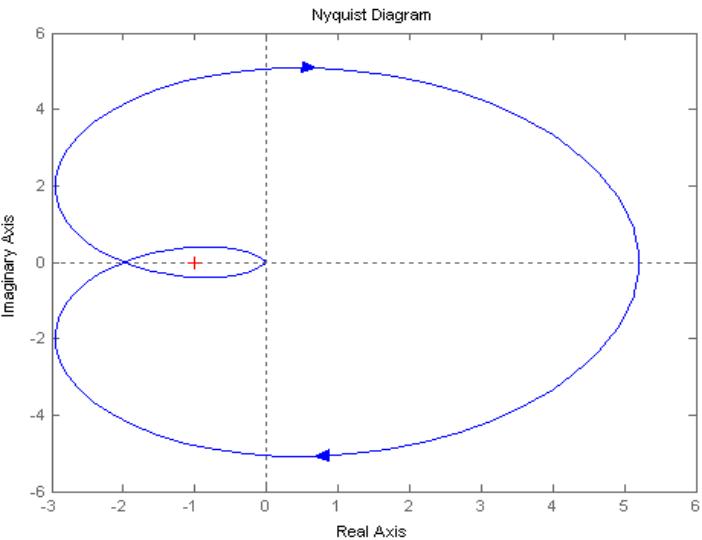
$Z = N + P = 2 + 0 = 2$  不稳定

起点  $\omega = 0, G_0(0) = 5.2$

终点  $\omega \rightarrow \infty, G_0(\infty) \rightarrow 0 \angle -270^\circ$

与负虚轴的交点（中间点）

$$\omega = 2.5, G_0(j2.5) = 0 - j5.06$$



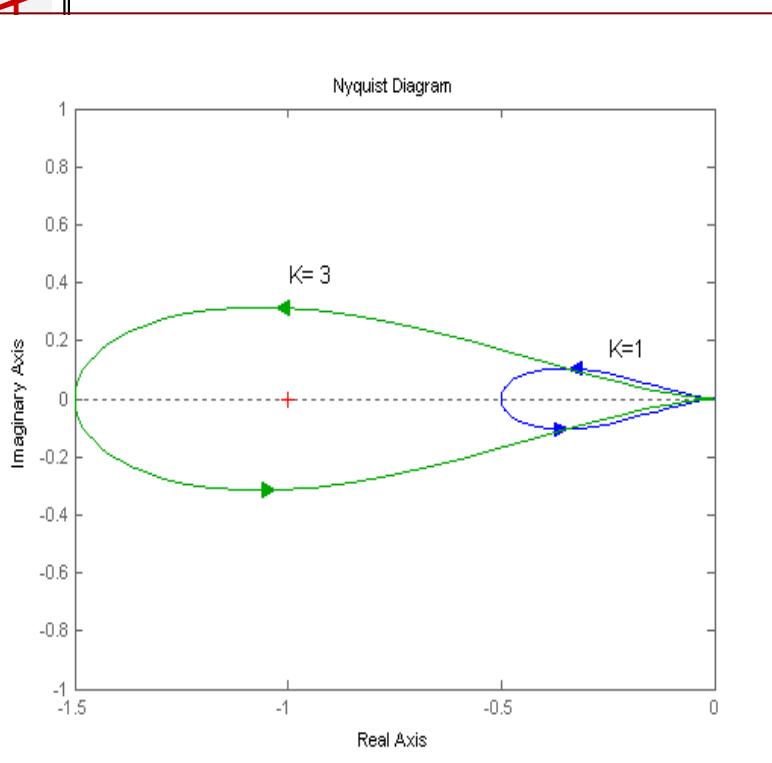
与负实轴的交点（中间点）

$$\omega = 3, G_0(j3) = -2 + j0$$

## E.X 4.3 试用奈奎斯特稳定性判据讨论其稳定性

$$G_0(s) = \frac{K}{(s-1)(s+2)}$$

$$G_0(j\omega) = \frac{K/2}{(-1+j\omega)(1+j\omega/2)} = \frac{K/2}{(-1-\omega^2/2)+j\omega/2} = \frac{-K[(2+\omega^2)+j\omega]}{(2+\omega^2)^2+\omega^2}$$



起点  $\omega = 0, G_0(0) = -K/2$

终点  $\omega \rightarrow \infty, G_0(\infty) \rightarrow 0 \angle 0^\circ$

中间点  $\omega = 2, G_0(j2) = \frac{-K(3+j)}{20}$

$K < 2, Z = N + P = 0 + 1 = 1$ , instability

$K > 2, Z = N + P = -1 + 1 = 0$ , stability

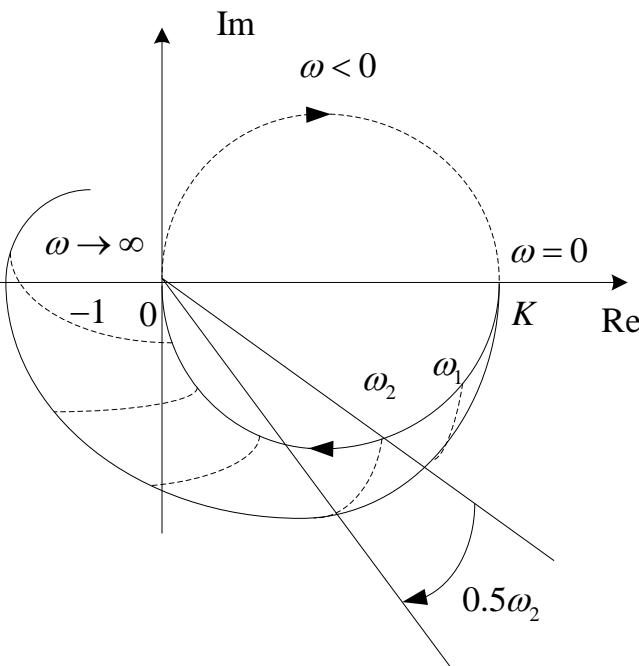
$K = 2$ , Critical stability

E.g.4.32 单位反馈系统的开环传函为

$$G_0(s) = \frac{10e^{-0.5s}}{s+1}$$

试判断系统的稳定性

$$G_0(j\omega) = \frac{10}{1+j\omega} e^{-0.5j\omega} = \left| \frac{10}{1+j\omega} \right| e^{j \left( \angle \left( \frac{10}{1+j\omega} \right) + \angle(e^{-0.5j\omega}) \right)} = \left| \frac{10}{1+j\omega} \right| e^{j \left( \angle \left( \frac{10}{1+j\omega} \right) - 0.5\omega \right)}$$



相当于在  $\frac{10}{1+j\omega}$  的奈奎斯特曲线上的  
每一点顺时针旋转  $0.5\omega$

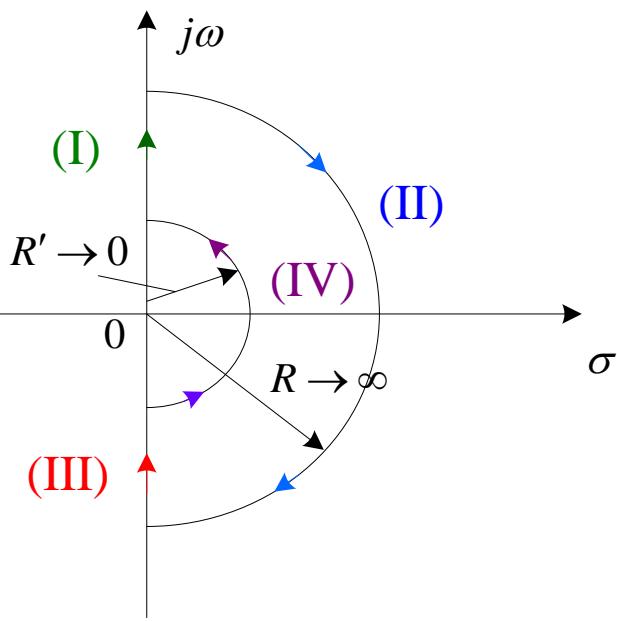
曲线包围  $(-1, j0)$ ,  $N \neq P = 0$ , 不稳定

4.5.2 基于的假设:  $F(s)$  在虚轴上无零、极点

$\iff$  开环系统无0极点和虚轴上的零、极点

情况1: 开环系统含积分环节

$$G_0(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^\nu \prod_{j=1}^{n-\nu} (T_j s + 1)}, \nu \geq 1$$



Part 1  $s = j\omega, (\omega: 0^+ \rightarrow \infty)$

Part 2  $s = Re^{j\theta}, (R \rightarrow \infty, \theta: \pi/2 \rightarrow -\pi/2)$

Part 3  $s = j\omega, (\omega: -\infty \rightarrow 0^-)$

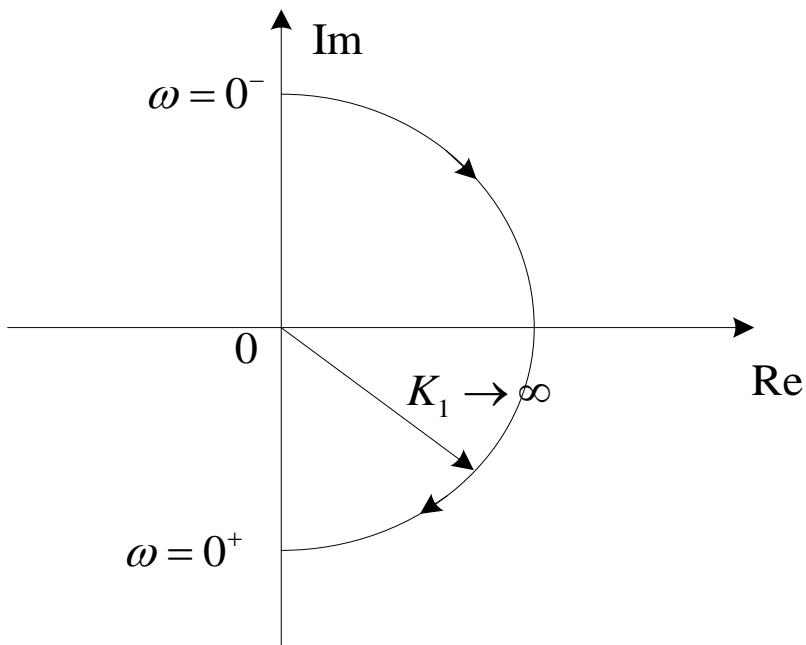
Part 4  $s = R'e^{j\theta'}, (R' \rightarrow 0, \theta': -\pi/2 \rightarrow \pi/2)$

$\nu = 1$  (I型系统)

$$\text{代入 } s = R'e^{j\theta'} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \frac{K}{R'e^{j\theta'}} = K_1 e^{j\theta_1}$$

半径无穷的右半圆

$$K_1 = \frac{K}{R'} \rightarrow \infty, \theta_1 = -\theta' : +\frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$



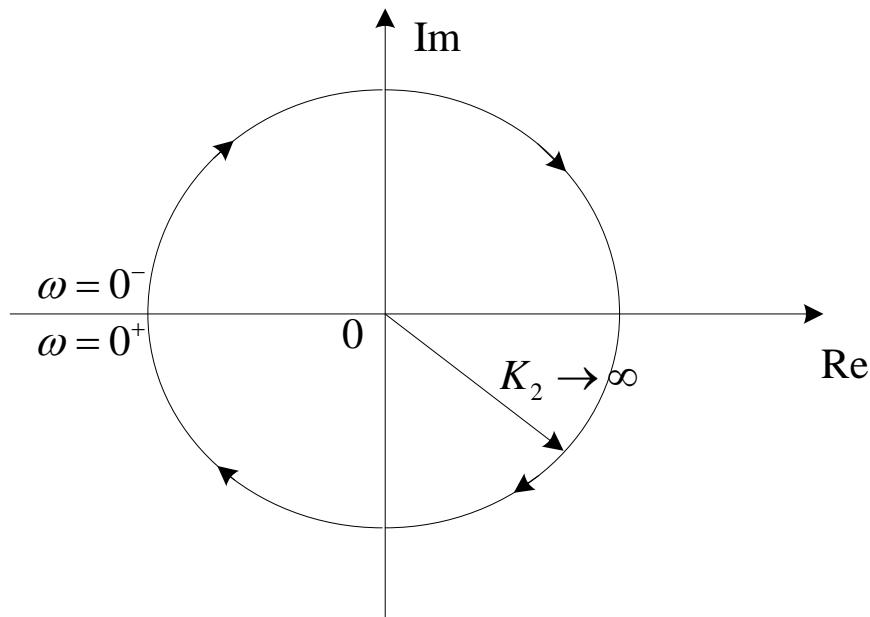
奈奎斯特曲线  $\omega \in (-\infty, \infty)$   
逆时针补画半圆

$v = 2$  (II型系统)

$$\text{代入 } s = R'e^{j\theta'} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \frac{K}{(R'e^{j\theta'})^2} = K_2 e^{j\theta_2}$$

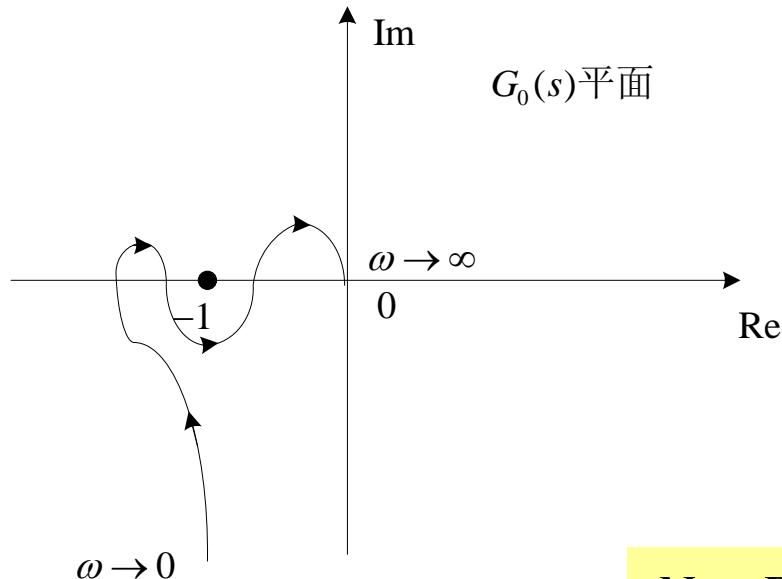
半径无穷的圆

$$K_2 = \frac{K}{(R')^2} \rightarrow \infty, \theta_2 = -2\theta' : +\pi \rightarrow -\pi$$



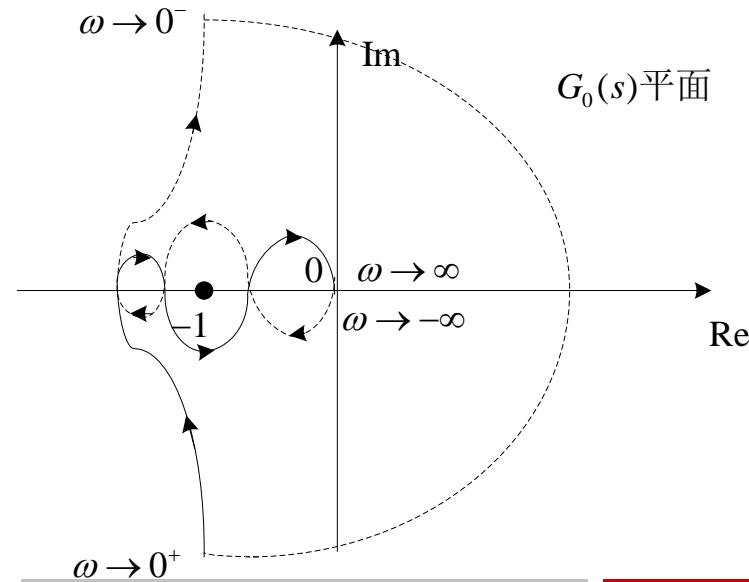
奈奎斯特曲线  $\omega \in (-\infty, \infty)$   
逆时针补画整圆

E.g.4.34 设开环系统的频域特性曲线如下，开环系统在右半s平面无极点，试判断系统的稳定性。

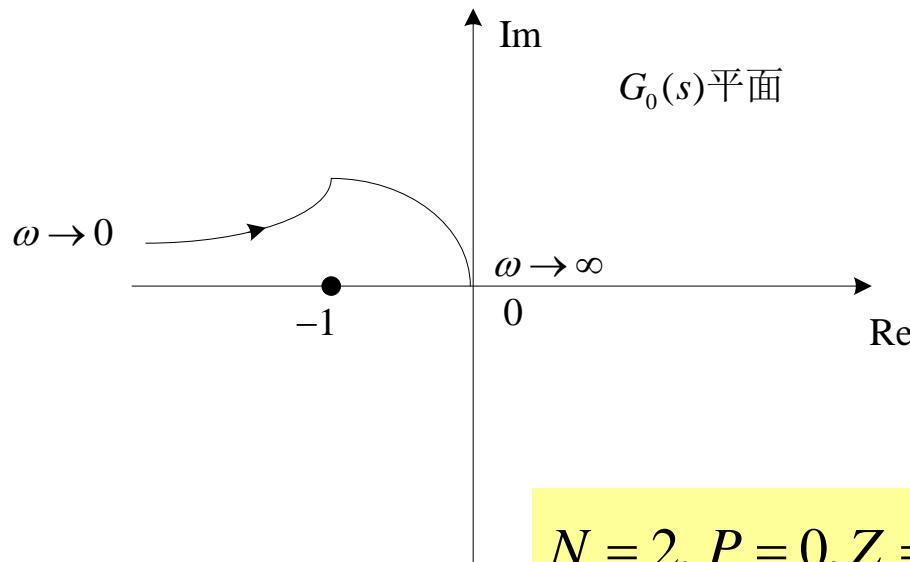


判断型别： I型

$$N = P = 0$$

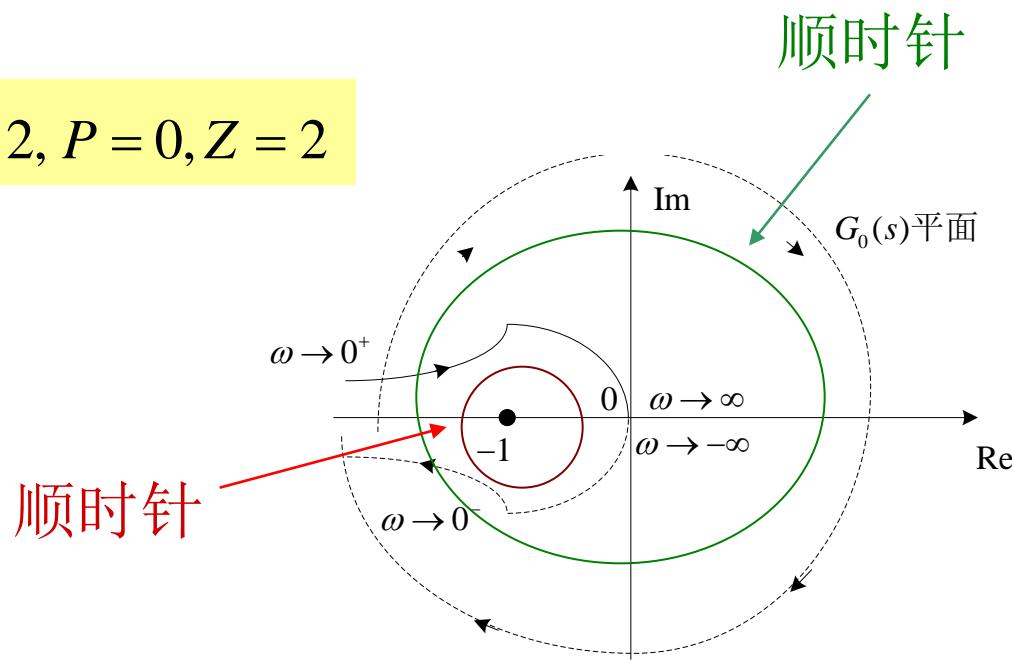


E.g.4.35 设开环系统的频域特性曲线如下，开环系统在右半s平面无极点，试判断系统的稳定性。



判断型别： II型

$$N = 2, P = 0, Z = 2$$

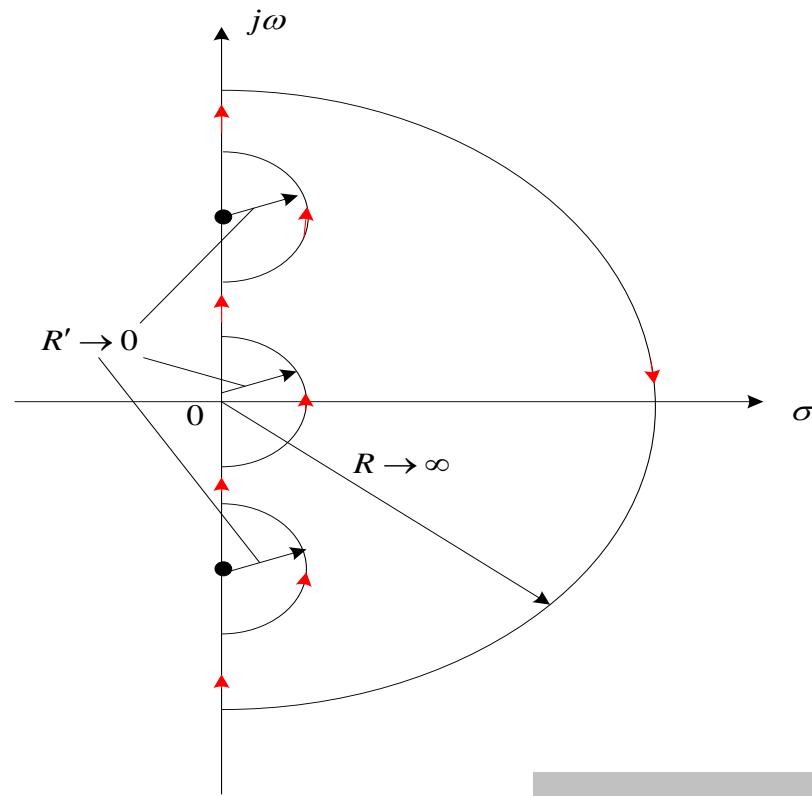


## 其他情况的应用

$v \geq 3$  系统

实际系统很少，分析过程类似I、II型系统

开环系统在虚轴上有零点or极点



## 奈奎斯特稳定性判据的简化

直接利用  $\omega: 0 \rightarrow \infty$  频率特性曲线

$$Z = 2N' + P$$

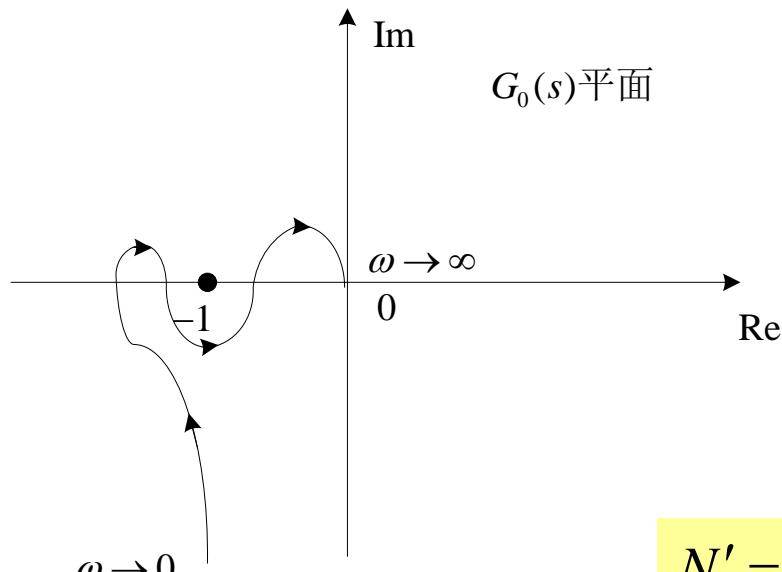
对于I型系统

逆时针加1/4圈

对于II型系统

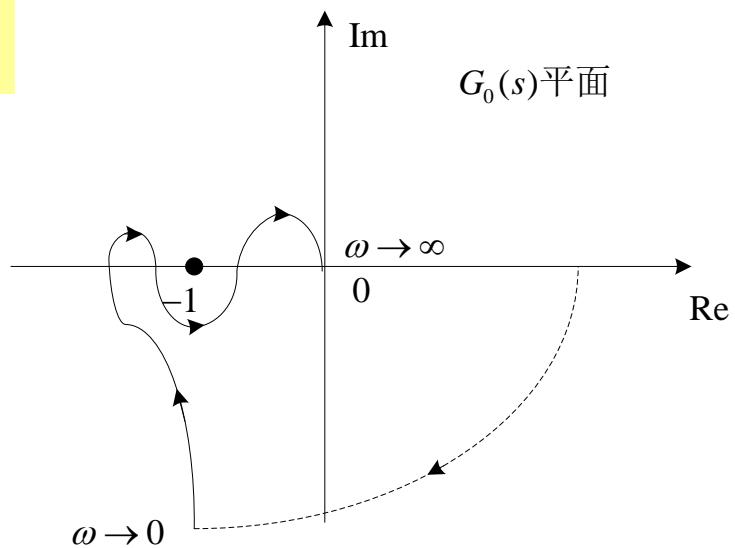
逆时针加1/2圈

E.g.4.34 设开环系统的频域特性曲线如下，开环系统在右半s平面无极点，试判断系统的稳定性。

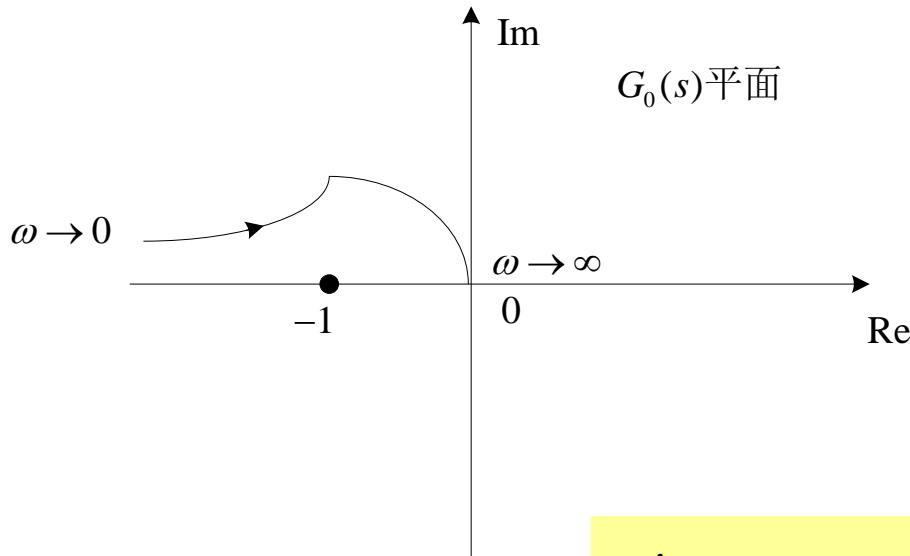


判断型别： I型

$$N' = P = 0$$

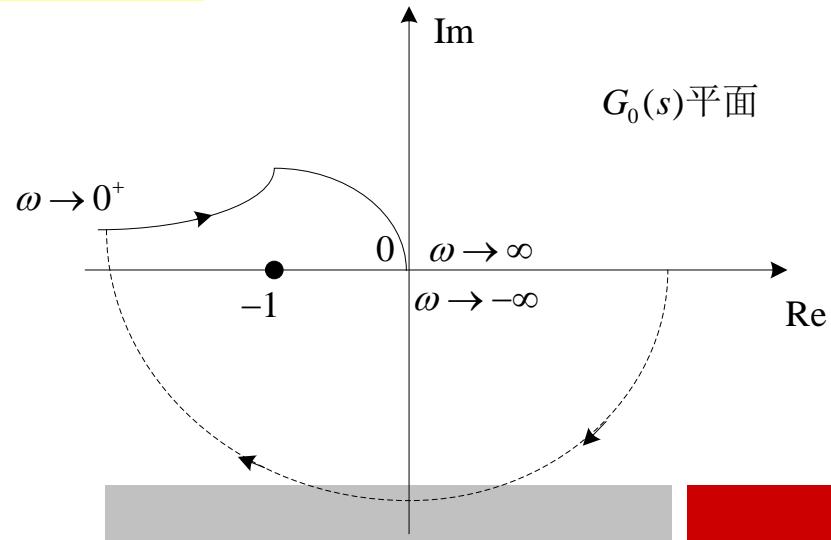


E.g.4.35 设开环系统的频域特性曲线如下，开环系统在右半s平面无极点，试判断系统的稳定性。



判断型别： II型

$$N' = 1, P = 0, Z = 2$$



思考题 单位反馈系统的开环传函为

$$G_0(s) = \frac{10e^{-\tau s}}{s}, \tau > 0$$

试判断系统的稳定性

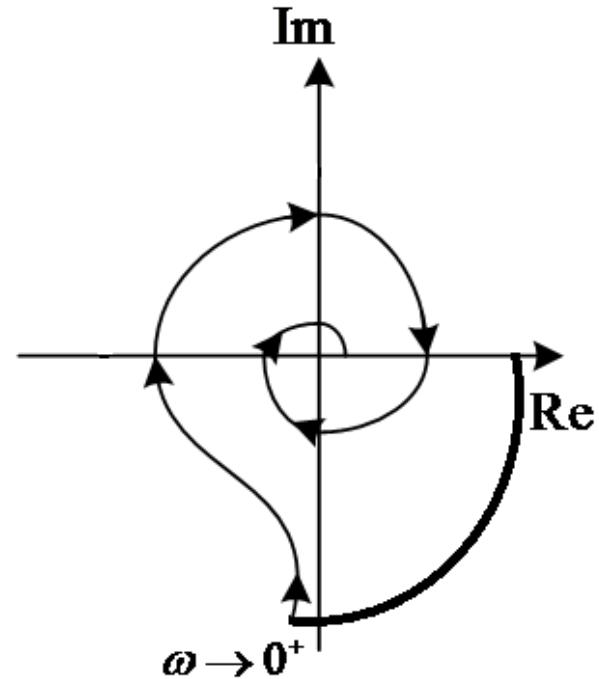
$$G_0(j\omega) = \frac{10e^{-j\tau\omega}}{j\omega}, \quad A(\omega) = \frac{10}{\omega}, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \tau\omega$$

与负实轴第一次的相交对应的频率

$$-\frac{\pi}{2} - \tau\omega_g = -\pi \Rightarrow \omega_g = \frac{\pi}{2\tau}$$

与负实轴第一次的相交对应的幅值

$$A(\omega_g) = \frac{20\tau}{\pi} \quad \frac{20\tau}{\pi} \leq 1 \Rightarrow 0 < \tau \leq \frac{\pi}{20}$$

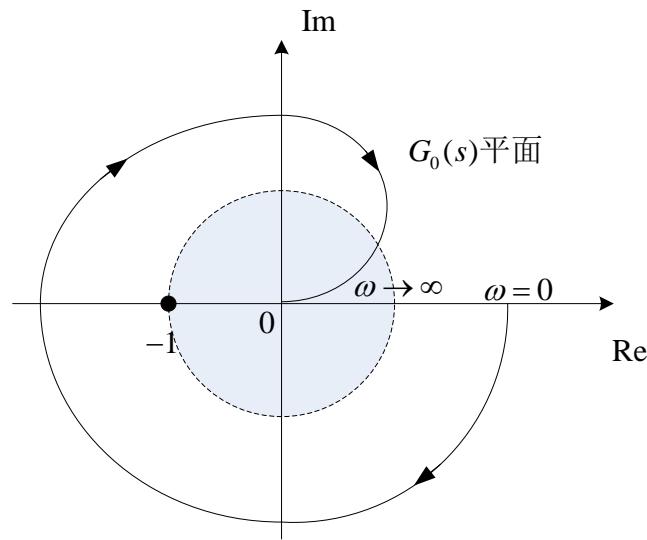


#### 4.5.4 奈奎斯特稳定性判据在伯德图中的表示形式

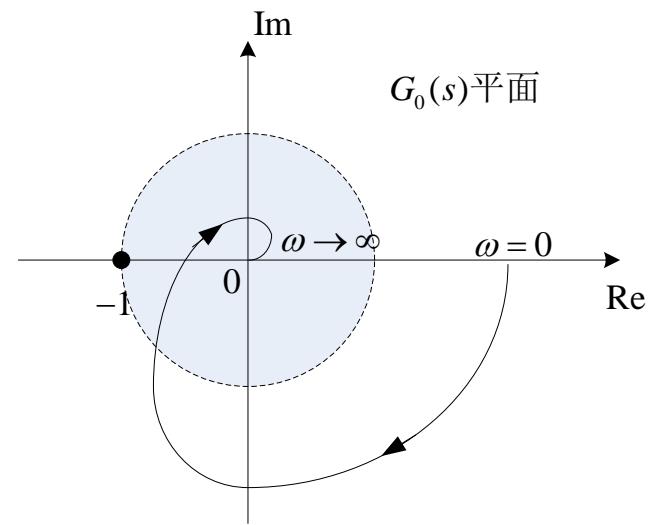
目的？

- ◇ 伯德图更易画出；
- ◇ 伯德图更易表示某环节or参数变化对稳定性的影响；

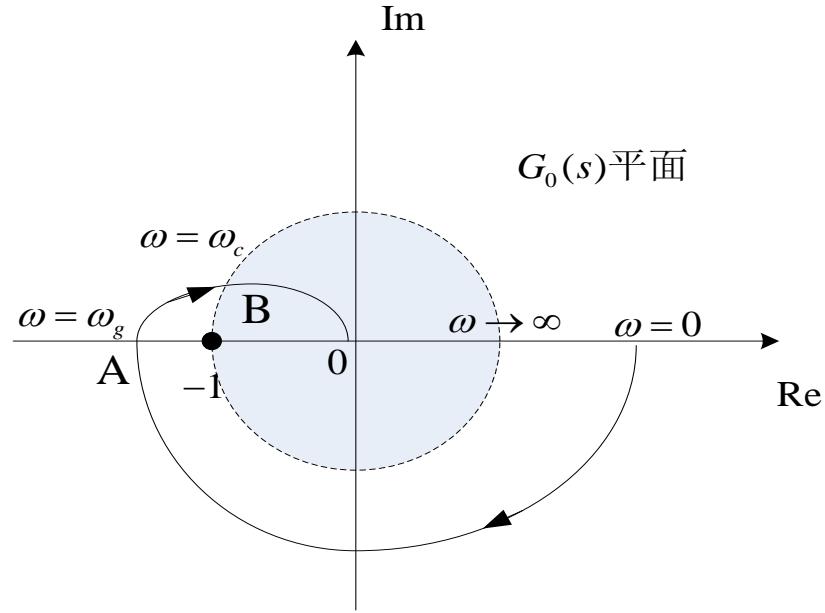
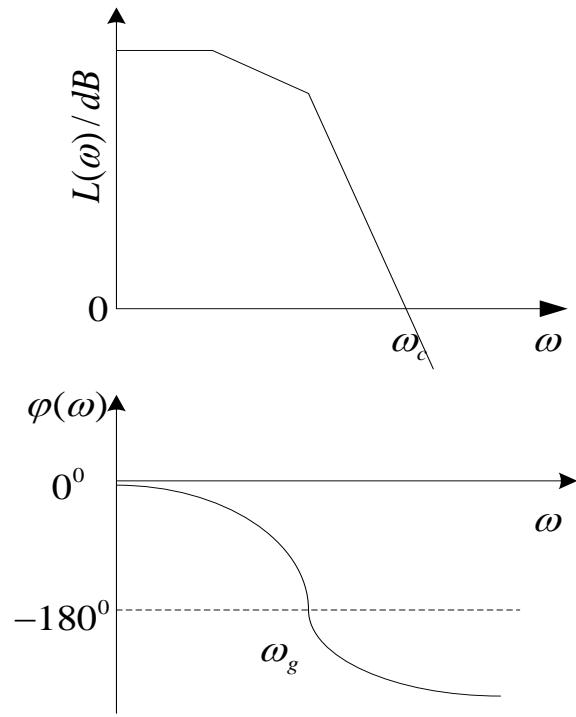
如何翻译？（伯德图中描述奈式曲线包围(-1,j0)点）



稳定

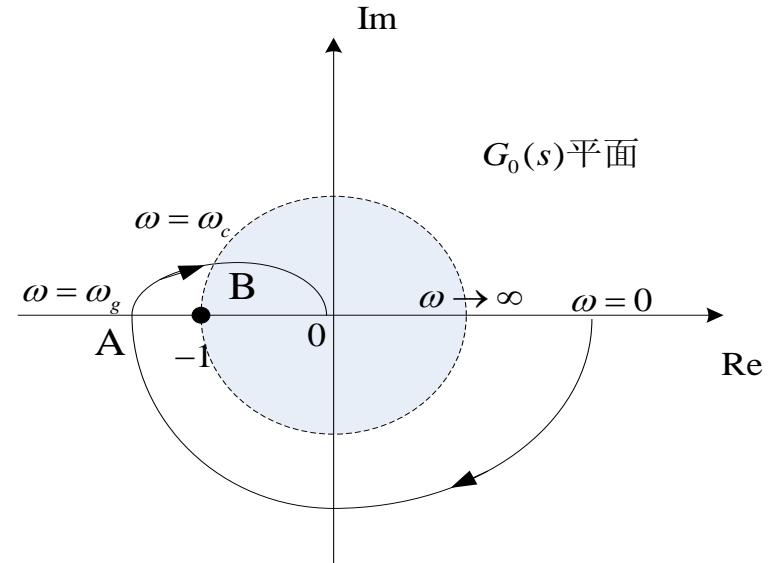
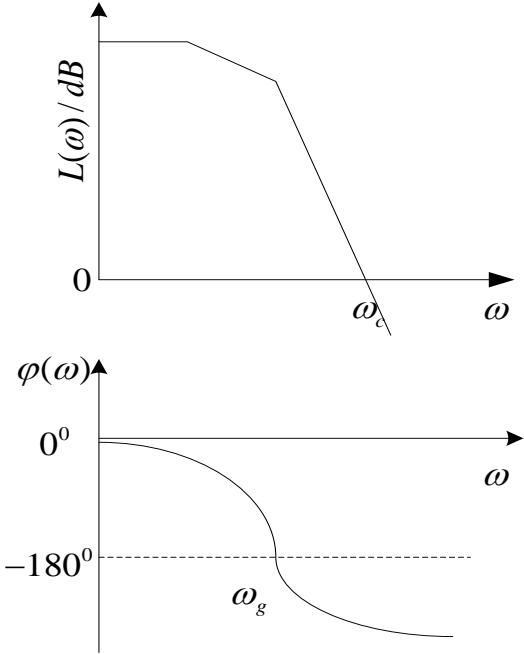


不稳定



$|G_0(j\omega)| > 1 \Rightarrow L(\omega) > 0$ : 在单位圆外

正(负)穿越-180°相位线



前提  $L(w)>0$

为负穿越次数-正穿越的次数



稳定性判据:  $Z = 2N' + P,$

开环传函含有积分环节

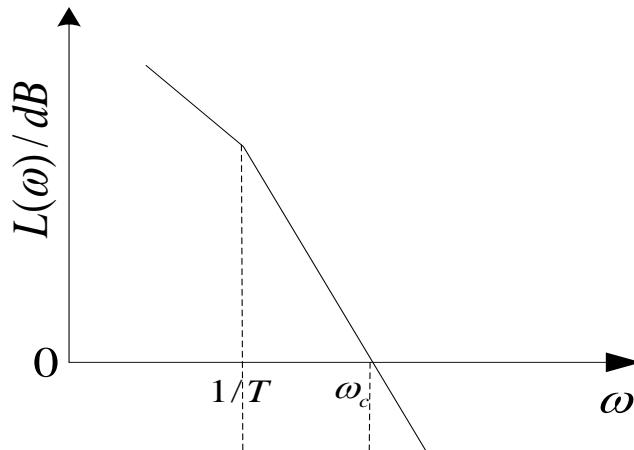
补画虚线

$$\angle G(j0^+) + v \cdot 90^\circ$$

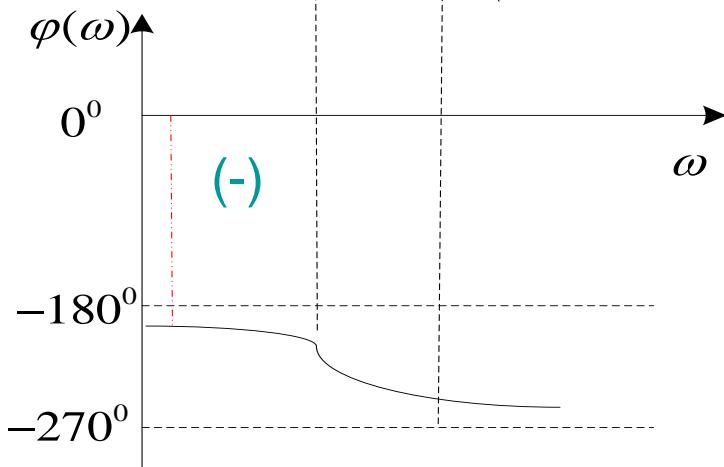
E.g.4.36 某反馈系统的开环传函为

$$G_0(s) = \frac{K}{s^2(Ts + 1)}$$

试判断系统的稳定性。

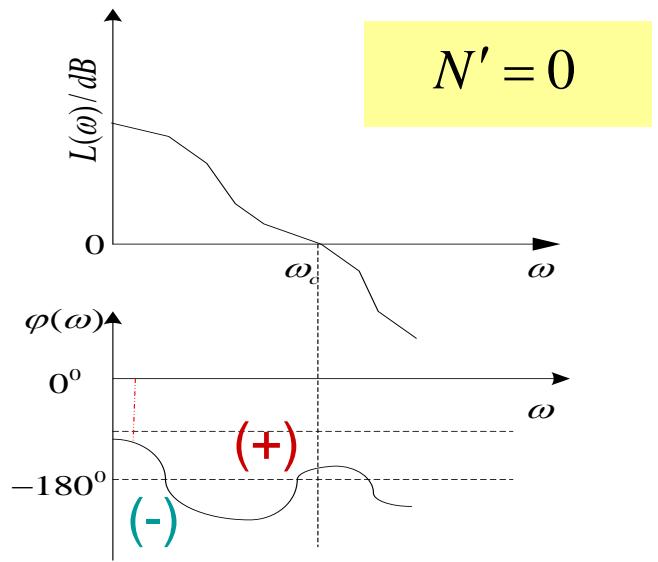
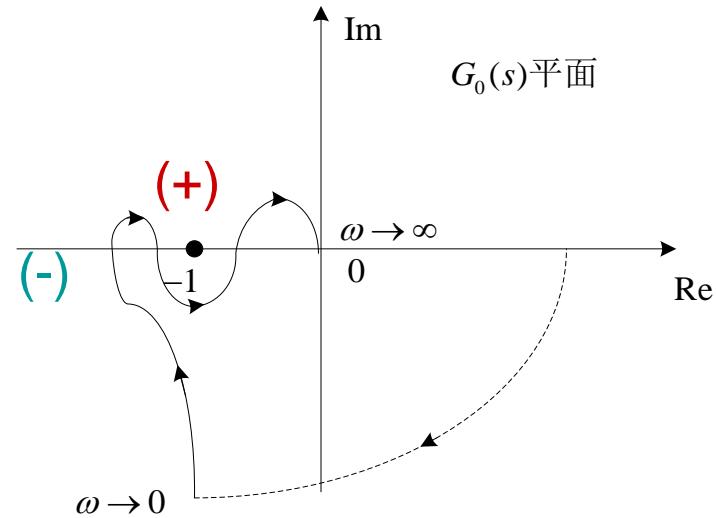
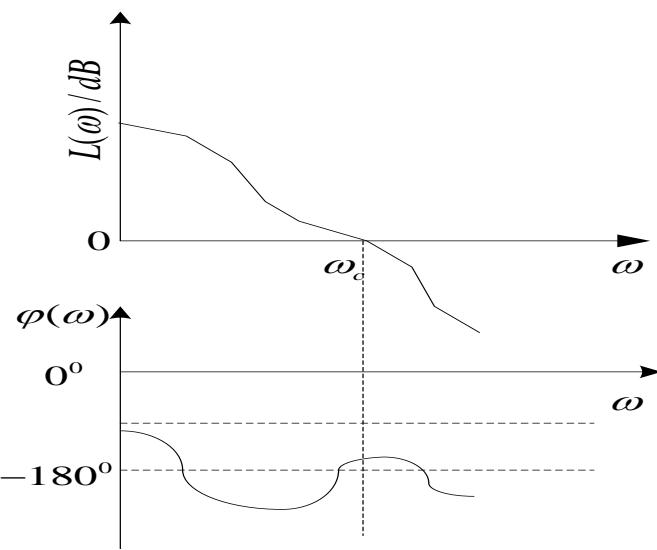
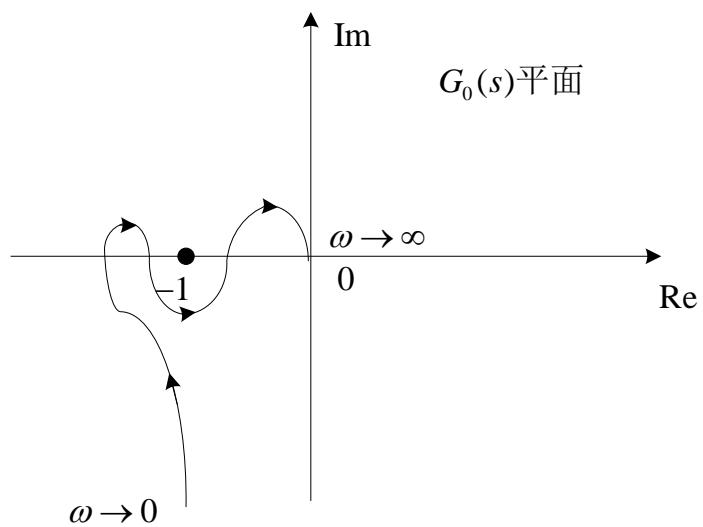


$$N' = 1$$

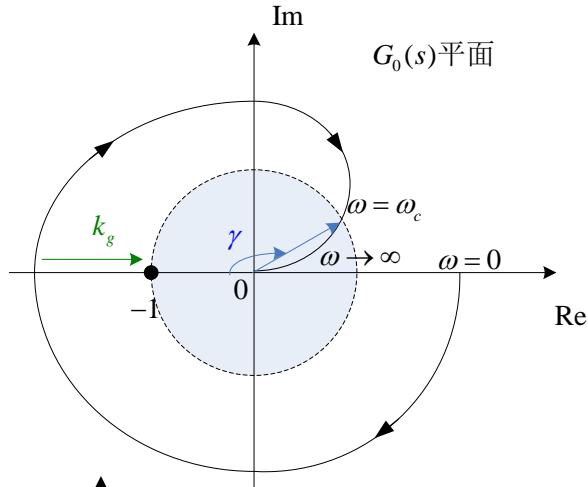


$$Z = 2N' + P = 2 + 0 = 2$$

E.X.4.4 设开环系统的频域特性曲线，开环系统在右半s平面无极点，试大致画出其伯德图来判断系统的稳定性。



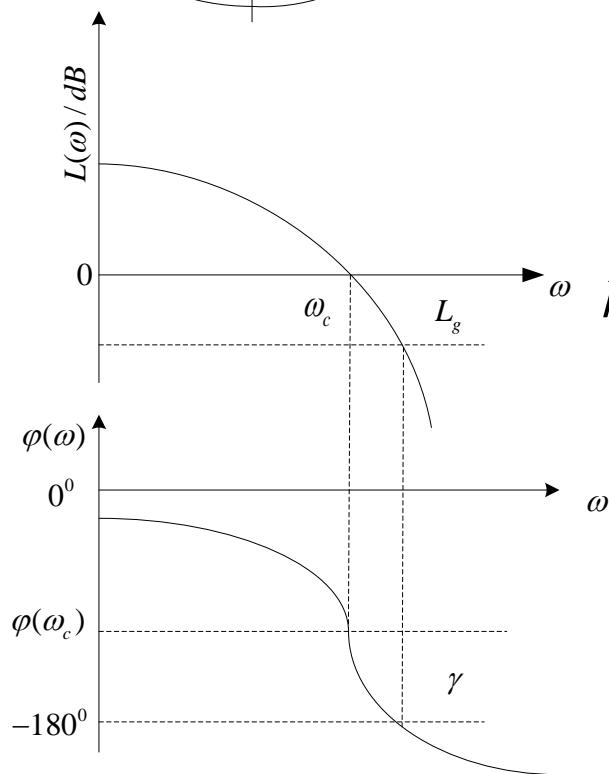
## 4.5.4 稳定裕度（鲁棒性）



相位稳定裕度（相位裕度）

$$-180^0 + \gamma = \angle G_0(j\omega_c) \Rightarrow \gamma = 180^0 + \angle G_0(j\omega_c)$$

$$\text{截止频率 } \omega_c : |G_0(j\omega)| = 1$$



幅值稳定裕度（幅值裕度）

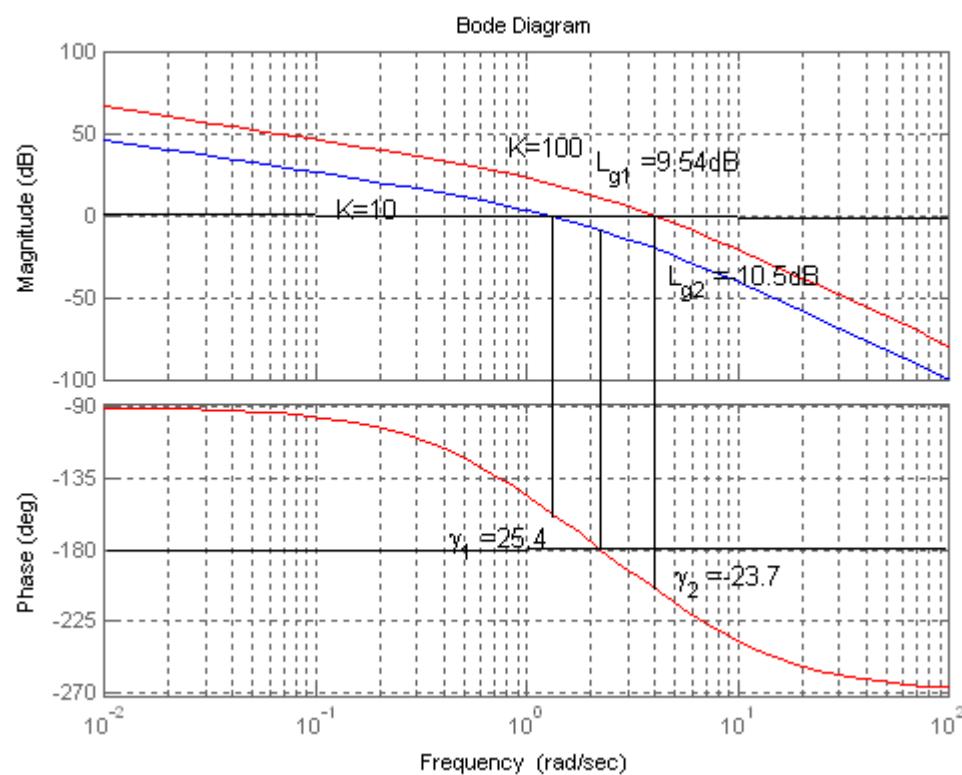
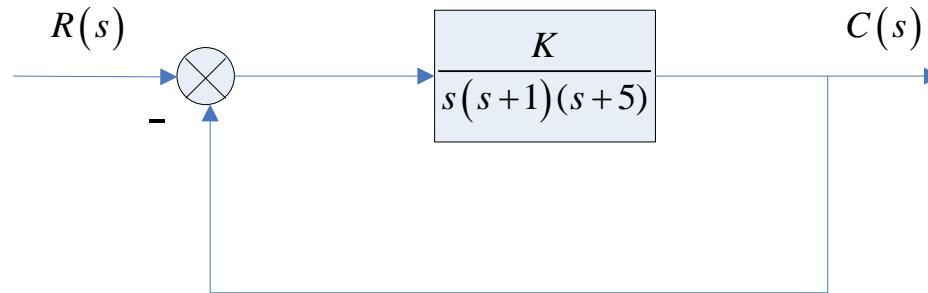
$$k_g = \frac{1}{|G_0(j\omega_g)|} \Rightarrow L_g = 20 \lg k_g = -20 \lg |G_0(j\omega_g)|$$

$$\omega_g : \angle G_0(j\omega) = -180^0$$

对最小相位系统，系统稳定，若

$$k_g > 1 \text{ or } L_g > 0$$

E.g.4.37 某控制系统如下图。当K=10or100时，分析闭环系统的稳定性并指出相位裕度和幅值裕度。



最小相位系统

$K=10$  稳定

$K=100$  不稳定

## 课后作业

4.14

4.15

4.17 (1) (5) (8)