

自动控制原理

第6章 系统校正方法

东南大学 自动化学院

陈杨杨

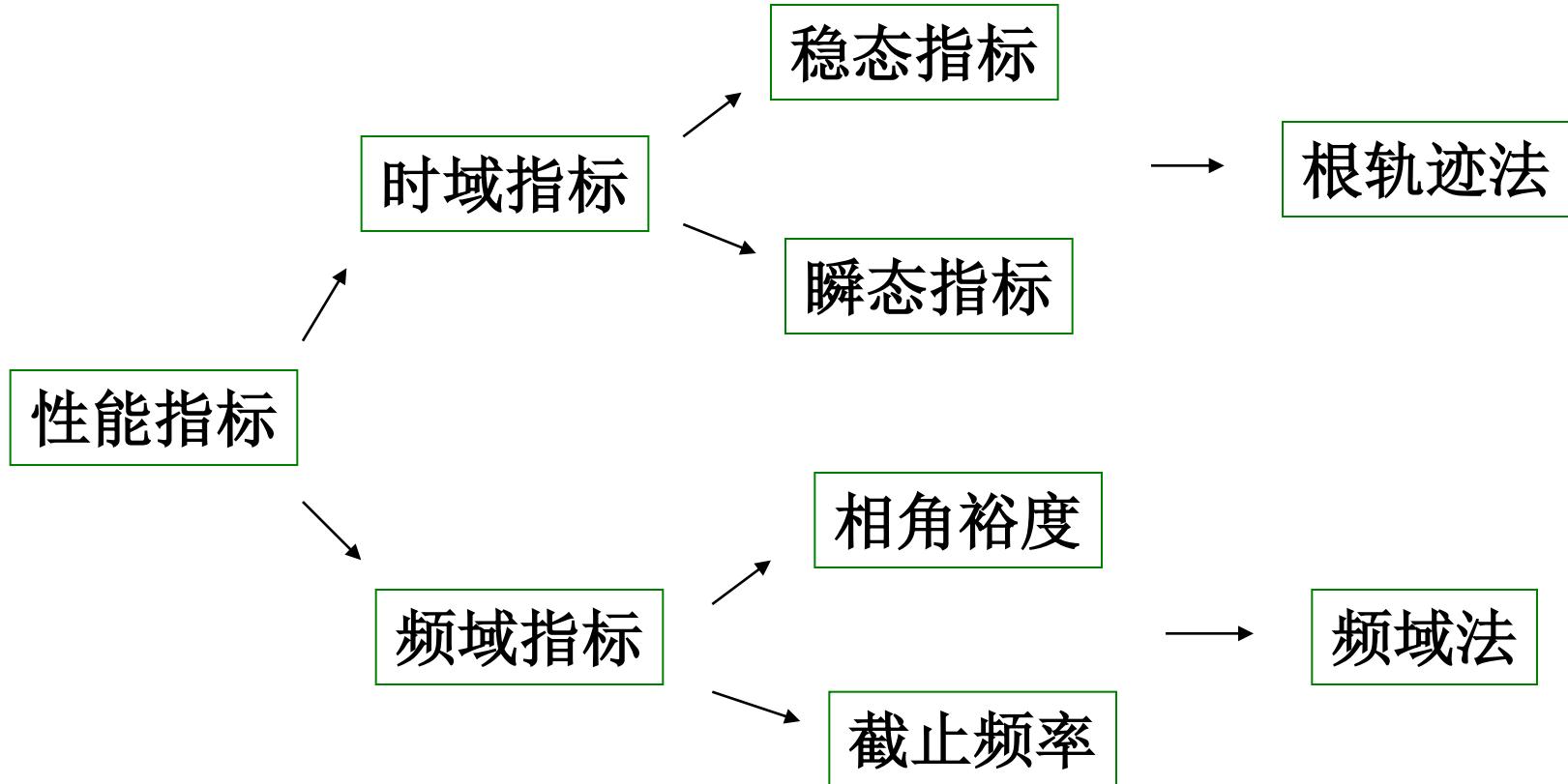
yychen@seu.edu.cn

6.1 引言

系统校正过程：



○性能指标



一阶系统

类 别	性能指标	计算公式
时域指标	超调量	$\delta\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%$
	调节时间 ($\Delta=5$)	$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$
频域指标	谐振峰值	$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, \zeta \leq 0.707 \quad \Leftarrow M(\omega_r)$
	谐振频率	$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}, \zeta \leq 0.707 \quad \Leftarrow \frac{dM(\omega)}{d\omega} = 0$
	带宽频率	$\omega_b = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2 + \sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}} \quad \Leftarrow M(\omega_b) = 0.707M(0)$
	截止频率	$\omega_c = \omega_n\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2}-2\zeta^2} \quad \Leftarrow M(\omega_c) = 1$
	相角裕度	$\gamma = \arctan \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2}-2\zeta^2}} \quad \Leftarrow 180^\circ + \angle G_0(j\omega_c)$
时频转换		$t_s = \frac{6}{\omega_c \tan \gamma}$
		$\delta\% = e^{-\pi(M_r - \sqrt{M_r^2 - 1})}, M_r \geq 1$

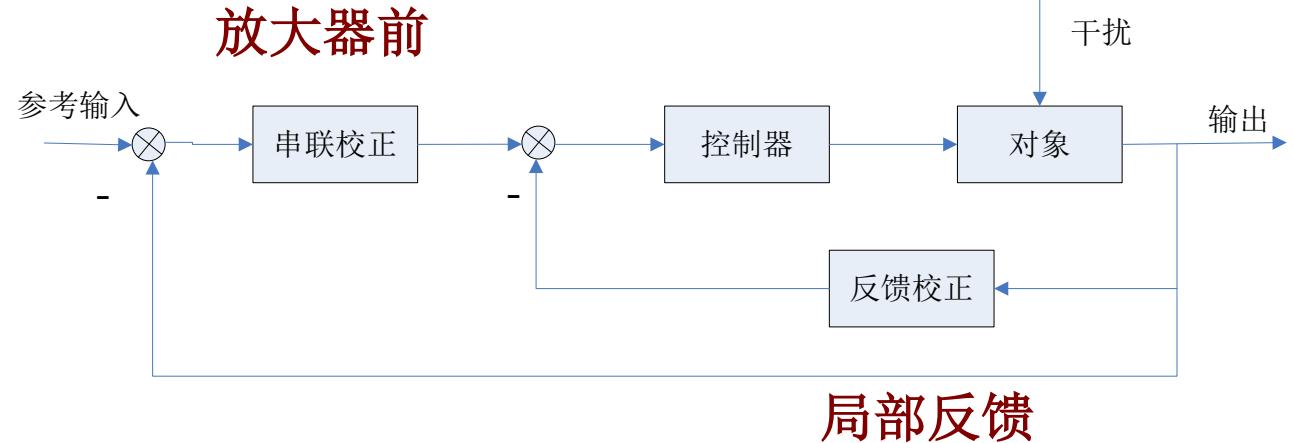
高阶系统

性能指标	经验公式
谐振峰值	$M_r = \frac{1}{\sin \gamma}$
超调量	$\delta\% = 0.16 + 0.4(M_r - 1), 1 \leq M_r \leq 1.8$
调节时间	$t_s = \frac{k\pi}{\omega_c}, k = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2, 1 \leq M_r \leq 1.8$

○校正方式

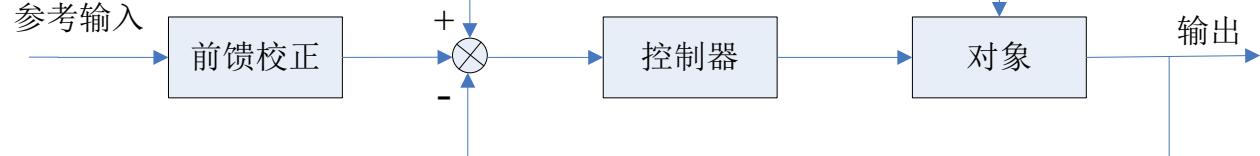
串联校正

反馈校正



前馈校正

整形滤波



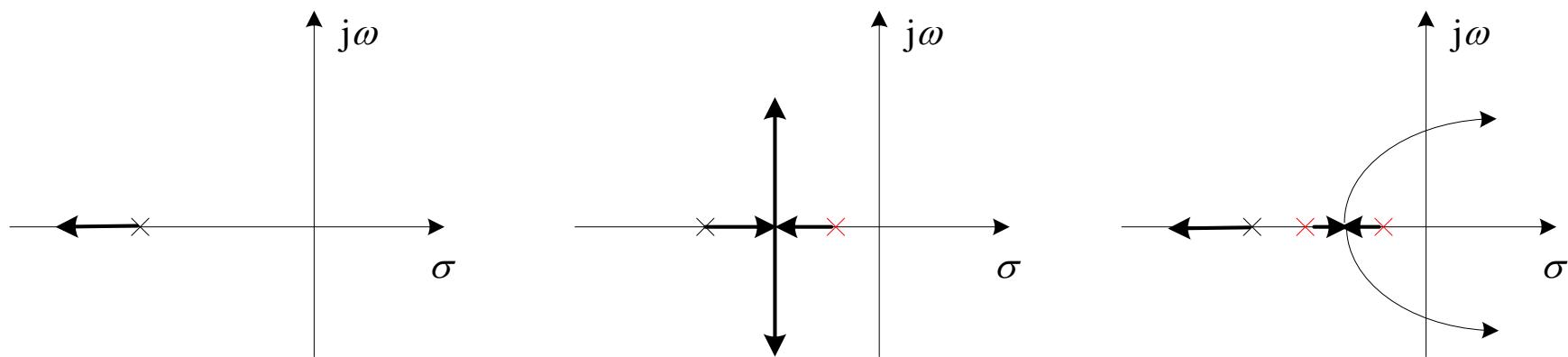
复合校正

串联（反馈）校正+前馈校正

6.2 系统校正的根轨迹法

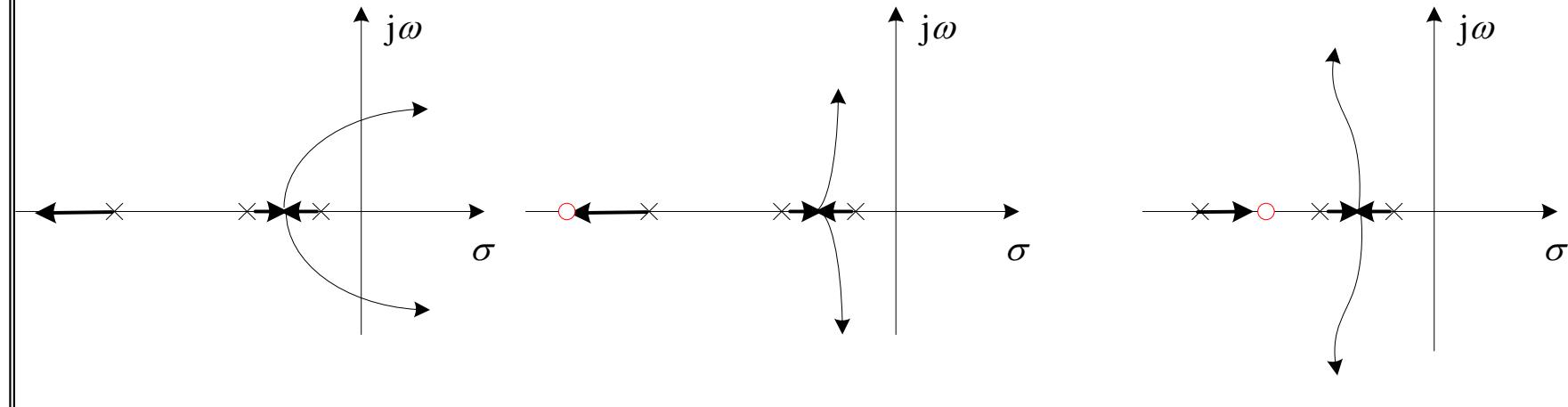
6.2.1 增加零、极点对根轨迹的影响

○增加极点



根轨迹右移，相对稳定性降低，调节时间增加

○增加零点



根轨迹左移，相对稳定性增加，调节时间减少

○增加开环偶极子

开环偶极子：相距很近的一对极点和零点
(和其他零极点相比)

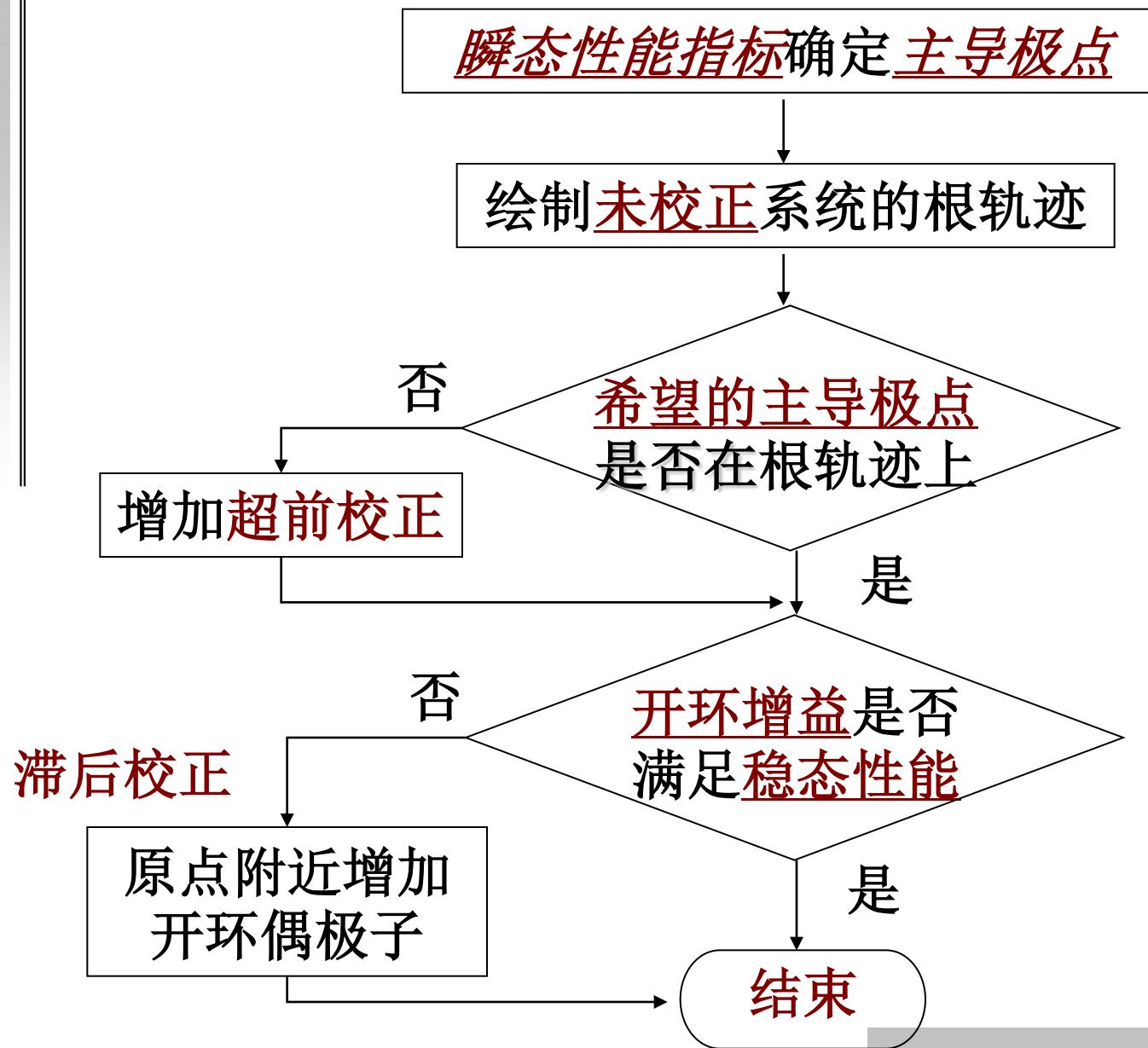
对根轨迹的影响：几乎不改变根轨迹的形状

$$G_0(s) = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \approx G'_0(s) = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \cdot \frac{(s + z_c)}{(s + p_c)}$$

特殊性：如偶极子靠近原点且 $|z_c| > |p_c|$ ，则
增大开环增益，影响稳态性能

$$K = \frac{K_g \prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^n p_j} \quad -z_c = -0.01 \text{ and } -p_c = -0.001 \quad K' = 10K \quad \longleftrightarrow \quad K' = \frac{K_g \prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^n p_j} \cdot \frac{z_c}{z_p}$$

○基于根轨迹校正的一般步骤

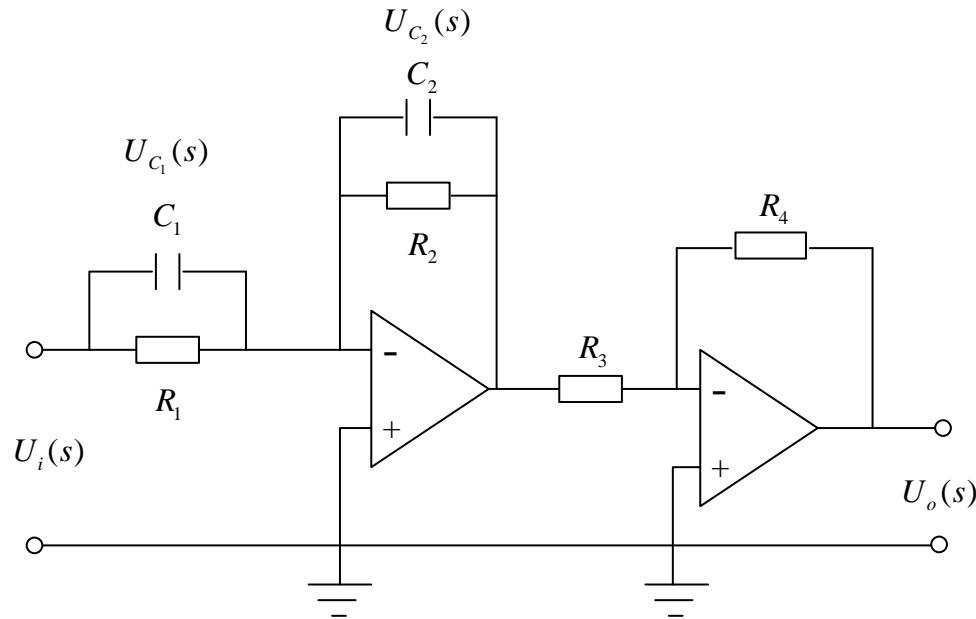


○超前校正

$$C(s) = \frac{s + z_c}{s + p_c}, |z_c| < |p_c|$$

效果：加入一个零点

目的：改善系统动态性能，使根轨迹左移



$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \cdot \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}}$$

$$R_1 C_1 > R_2 C_2$$

E.g.6.1 被控对象的传函

$$P(s) = \frac{K_g}{s(s+2)}$$

设计一串联校正环节 $C(s)$ ，使超调量 $\delta\% \leq 30\%$ ，调节时间 $t_s \leq 2s$ ，开环增益 $K \geq 5$ 。

STEP1:确定闭环主导极点

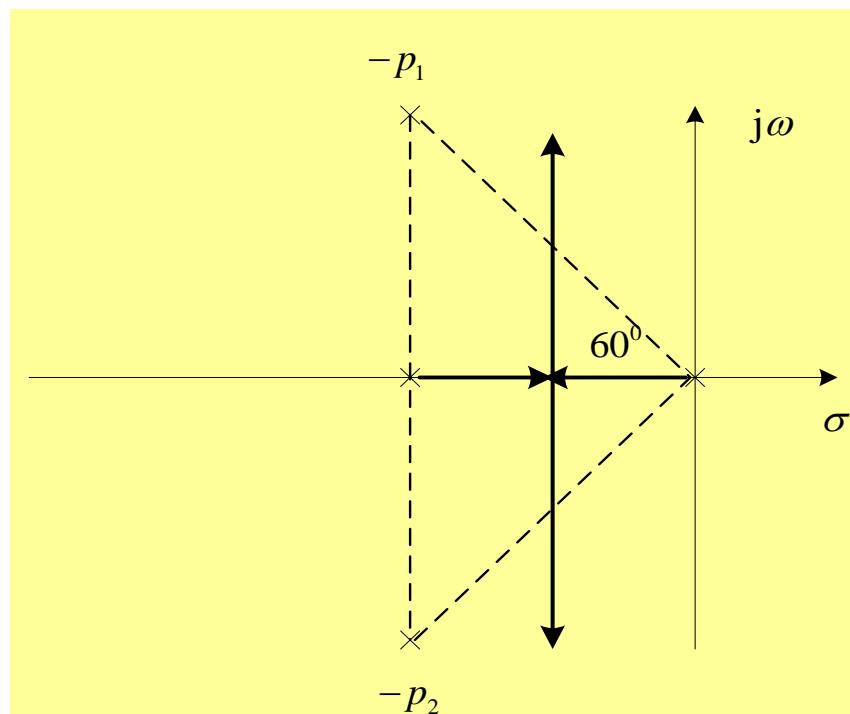
$$\delta\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 30\%$$

Choose $\zeta = 0.5$ $\varphi = 60^\circ$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \leq 2 \quad \text{Choose } \omega_n = 4$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -2 \pm j2\sqrt{3}$$

STEP2:画根轨迹



STEP3:设计超前环节

$$C(s) = \frac{s + z_c}{s + p_c}, |z_c| < |p_c|$$

校正后系统的开环传函

$$G_0(s) = \frac{K_g (s + z_c)}{s(s + 2)(s + p_c)}$$

由幅角条件

$$\angle(-p_1 + z_c) - \angle(-p_1) - \angle(-p_1 + 2) - \angle(-p_1 + p_c) = (2k + 1) \times 180^\circ$$

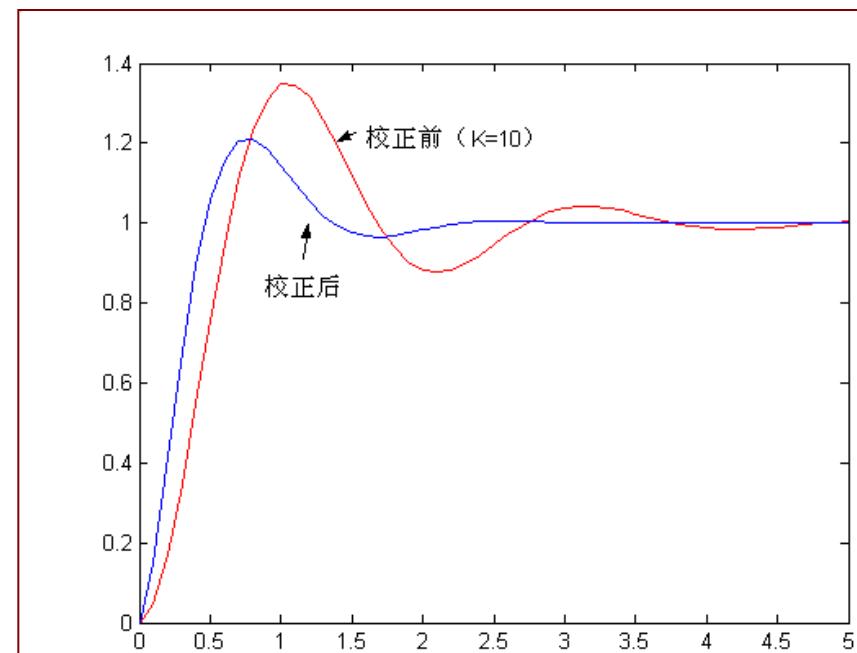
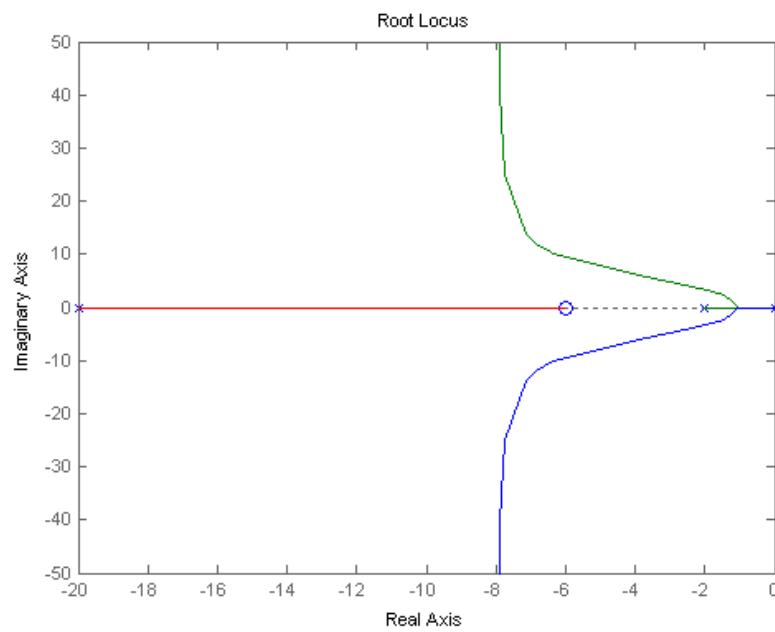
$$\angle(-p_1 + z_c) - \angle(-p_1 + p_c) = \alpha = 30^\circ$$

选择应远离闭环主导极点

$$-z_c = -6 \quad -p_c = -20$$

STEP4: 检验稳态指标

$$K_g \frac{|-p_1 + z_c|}{|-p_1||-p_1 + 2||-p_1 + p_c|} = 1 \Rightarrow K_g = 48 \Rightarrow K = \frac{48 \times 6}{2 \times 20} = 7.2$$



E.x.6.1 被控对象的传函

$$P(s) = \frac{K_g}{(s+1)(s+2)}$$

设计一串联校正环节 $C(s)$, 超调量 $\delta\% \leq 25\%$, 调节时间 $t_s \leq 2s$, 开环增益 $K \geq 5$ 。

STEP1:确定闭环主导极点

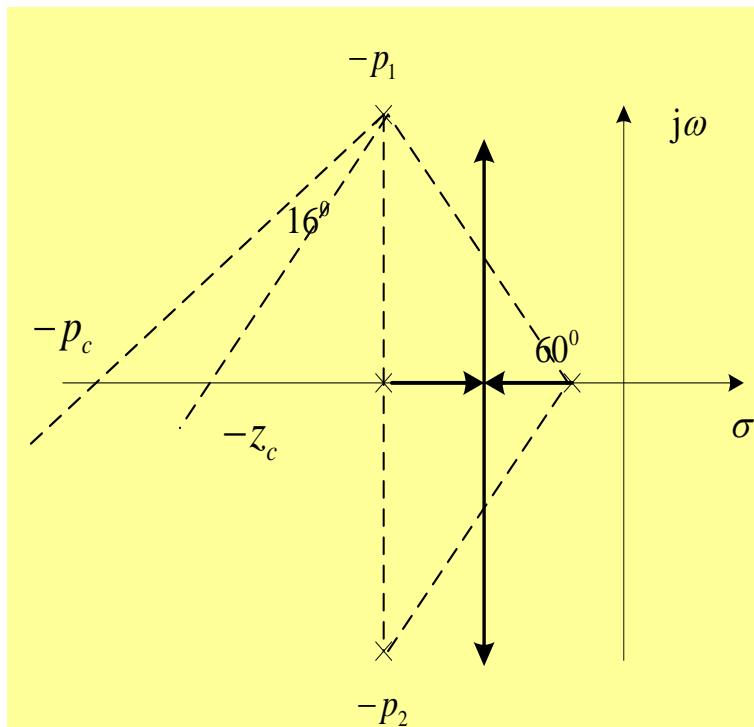
$$\delta\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 25\% \Rightarrow \zeta > \cos(66.2^\circ)$$

$$\text{Choose } \zeta = 0.5 \quad \varphi = 60^\circ$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \leq 2 \quad \text{Choose } \omega_n = 4$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -2 \pm j2\sqrt{3}$$

STEP2:画根轨迹



STEP3:设计超前环节

$$C(s) = \frac{s + z_c}{s + p_c}, |z_c| < |p_c|$$

$$G_0(s) = \frac{K_g (s + z_c)}{(s + 1)(s + 2)(s + p_c)}$$

由幅角条件

$$\angle(-p_1 + z_c) - \angle(-p_1 + 1) - \angle(-p_1 + 2) - \angle(-p_1 + p_c) = (2k + 1) \times 180^\circ$$

幅角缺额 $\angle(-p_1 + z_c) - \angle(-p_1 + p_c) = \alpha = 16^\circ$

选择 $-z_c = -6$ $-p_c = -9.4$

STEP4:检验稳态指标

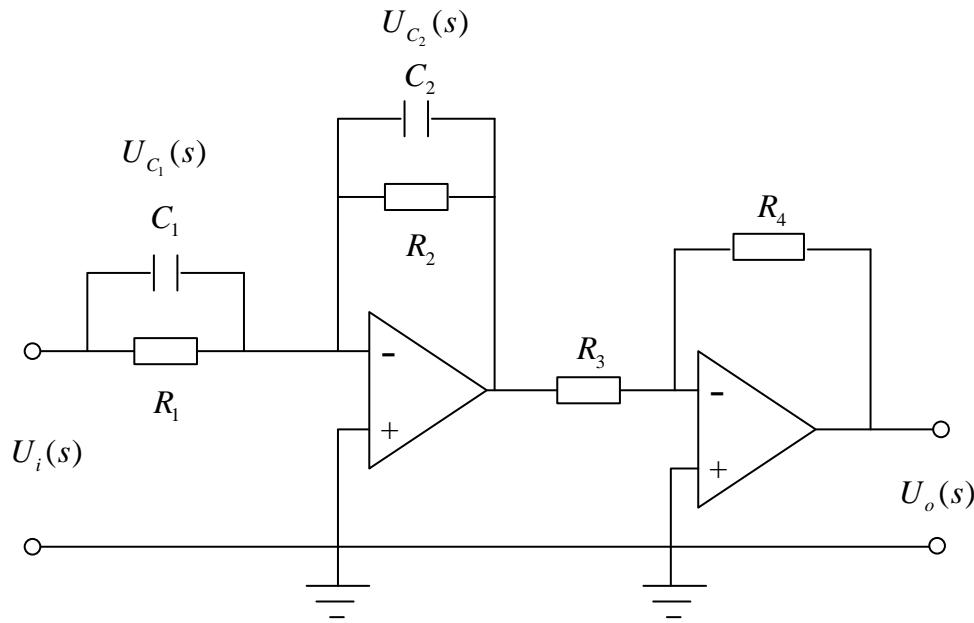
$$K_g \frac{|-p_1 + z_c|}{|-p_1 + 1||-p_1 + 2||-p_1 + p_c|} = 1 \Rightarrow K_g = 19.26 \Rightarrow K = 6$$

○滞后校正

$$C(s) = \frac{s + z_c}{s + p_c}, |z_c| > |p_c| \rightarrow 0$$

效果：增加偶极子

目的：在不改变系统动态性能的同时，改善稳态性能



$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \cdot \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}}$$

$$R_1 C_1 < R_2 C_2$$

E.g.6.2 被控对象的传函

$$P(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+2)}$$

要求闭环系统的主导极点参数为 $\zeta = 0.5$, $\omega_n \geq 0.6$, 静态速度误差系数 $K_v \geq 5$ 。

STEP1:画出根轨迹，确定主导极点

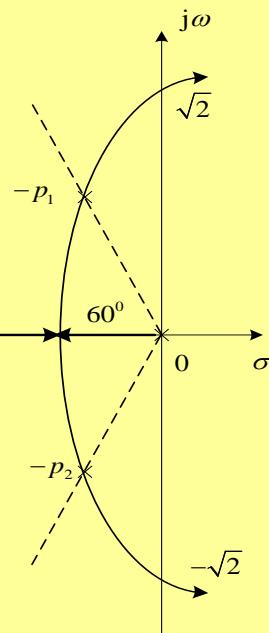
$\zeta = 0.5$ 主导极点 $-p_1$ 的 - 实部 / 虚部 = $1/\sqrt{3}$

特征方程得到实部为 $\alpha = -1/3$ (也可以由精确图得到)

$$-\zeta\omega_n = \alpha \Rightarrow \omega_n = 2/3$$

由模条件, 得到 $K_g = 1.04$

$$\text{静态误差系数 } K_v = K = \frac{K_g}{1 \times 2} = 0.52 < 5$$



STEP2:滞后校正环节

$$C(s) = \frac{s + z_c}{s + p_c}, |z_c| > |p_c|$$

由系统静态误差系数

$$|z_c| = 10|p_c|$$

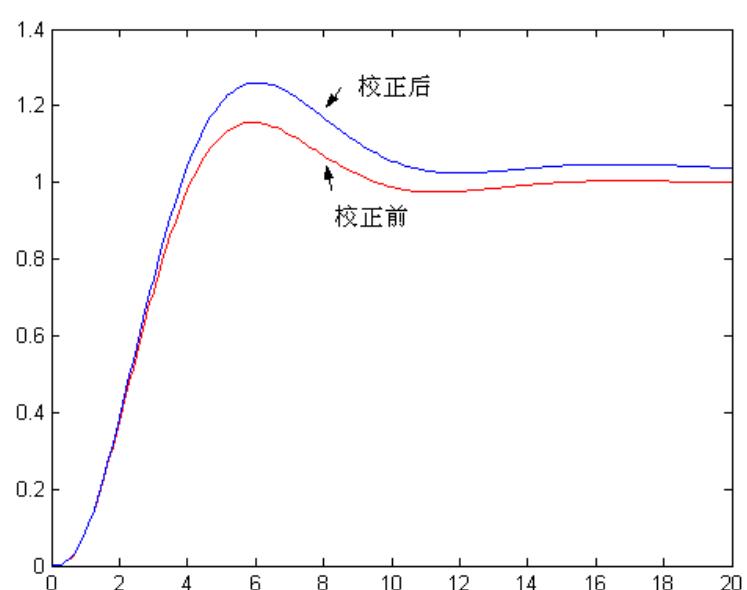
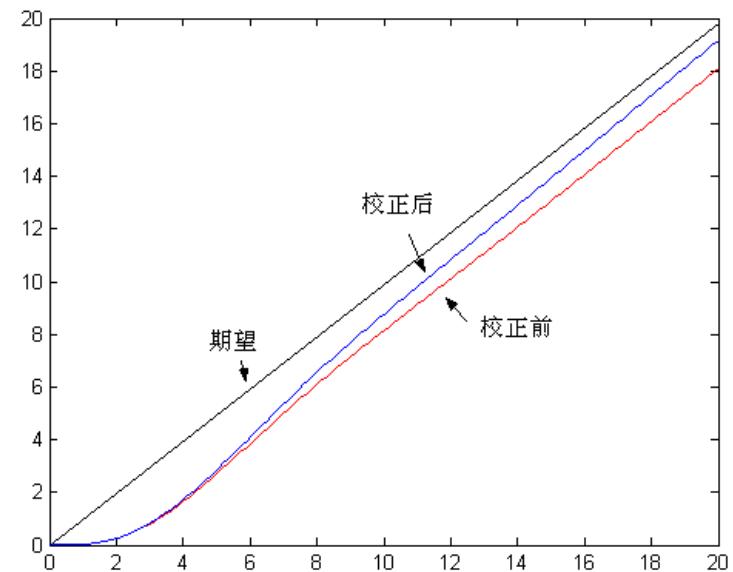
选择

$$z_c = 0.05, p_c = 0.005$$

$$C(s) = \frac{s + 0.05}{s + 0.005}$$

校正后

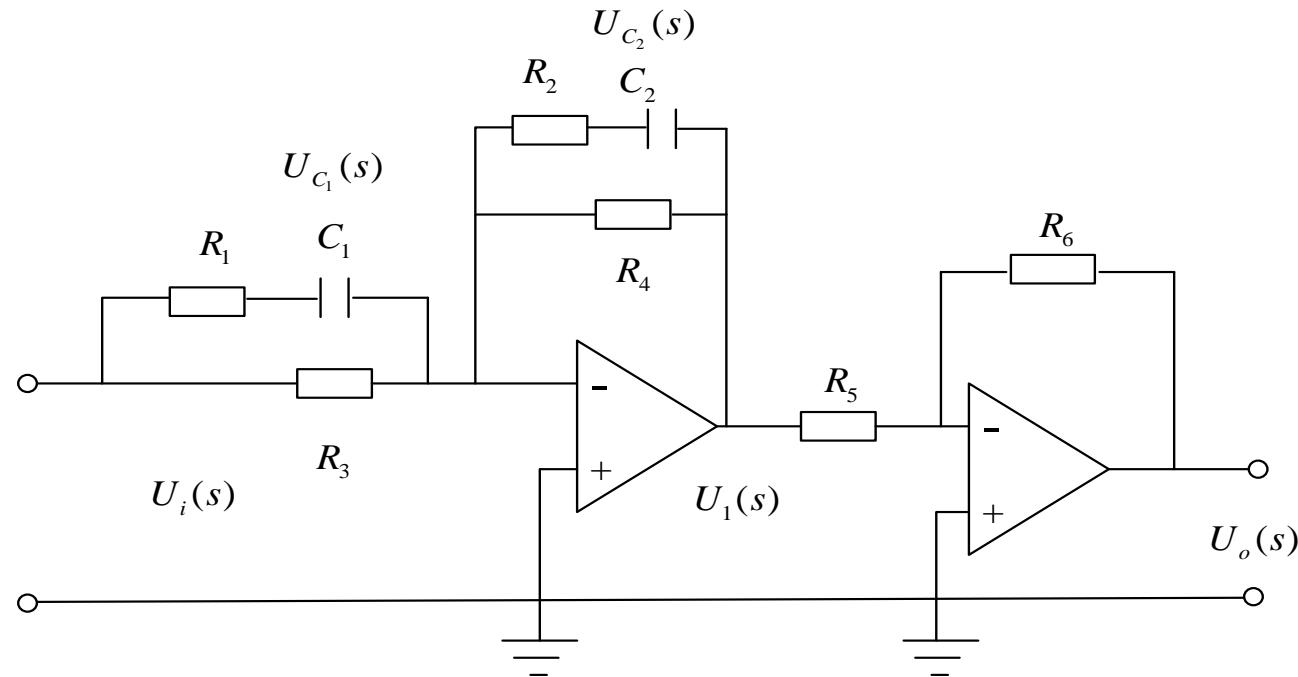
$$G_o(s) = \frac{1.04(s + 0.05)}{s(s + 1)(s + 2)(s + 0.005)}$$



○滞后-超前校正

同时改善系统的动态和稳态性能

$$C(s) = K_c \frac{(s + z_{c_1})(s + z_{c_2})}{(s + p_{c_1})(s + p_{c_2})}$$



$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R_4 R_6}{R_3 R_5} \left[\frac{(R_1 + R_3) C_1 s + 1}{R_1 C_1 s + 1} \right] \cdot \left[\frac{R_2 C_2 s + 1}{(R_2 + R_4) C_2 s + 1} \right]$$

设计步骤：

STEP1:由动态性能指标，确定希望的主导极点 s_d

STEP2:由幅角条件计算幅角的缺额 φ

$$\sum_{i=1}^m \angle(s_d + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s_d + p_j) + \varphi = (2k+1) \times 180^\circ$$

STEP3:幅角的缺额确定超前环节

$$\arg \left[\frac{s + z_{c_1}}{s + p_{c_1}} \right] = \angle(s_d + z_{c_1}) - \angle(s_d + p_{c_1}) \geq \varphi$$

STEP4:由模条件确定校正环节的增益 K_c

$$\left| K_c \frac{s_d + z_{c_1}}{s_d + p_{c_1}} P(s_d) \right| = 1$$

STEP5:由稳态性能指标确定滞后环节中的零极点的关系

$$K = K_c \frac{z_{c_1} z_{c_2}}{p_{c_1} p_{c_2}} P(0)$$

$$\beta = |z_{c_2} / p_{c_2}|$$

STEP6:由 β 在原点附近选择滞后环节中的零极点

$$\left| \frac{s_d + z_{c_2}}{s_d + p_{c_2}} \right| \approx 1$$

$$\arg \left[\frac{s_d + z_{c_2}}{s_d + p_{c_2}} \right] < 5^0$$

课后练习

6.2,

6.3

6.3 系统校正的频率特性法

6.3.1 开环频率特性与时域性能指标间的关系

○低频段

$$G_0(j\omega) = \frac{K(j\omega\tau_1 + 1)(j\omega\tau_2 + 1)\cdots}{(j\omega)^v(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)\cdots}$$

当 $\omega \rightarrow 0$

$$G_0(j\omega) \approx \frac{K}{(j\omega)^v}$$

对应的幅频特性

$$L(\omega) = 20 \lg K - v 20 \lg \omega$$

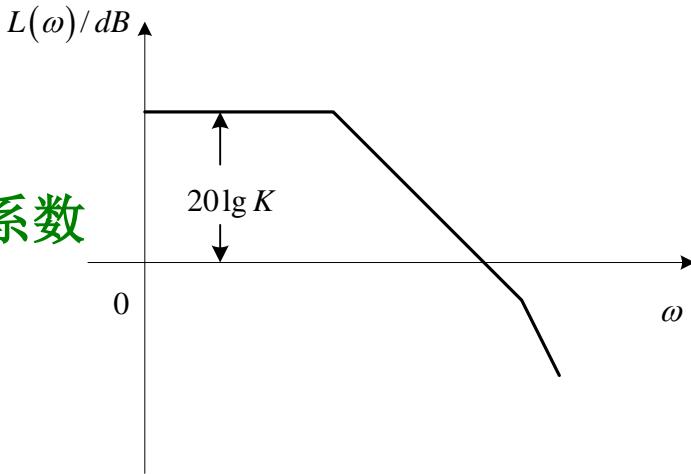
比例积分环节起作用

1) 0型系统

$$L(\omega) = 20 \lg K$$

低频段的高度确定系统的位置稳态误差系数

$$K_p = K$$



2) I型系统

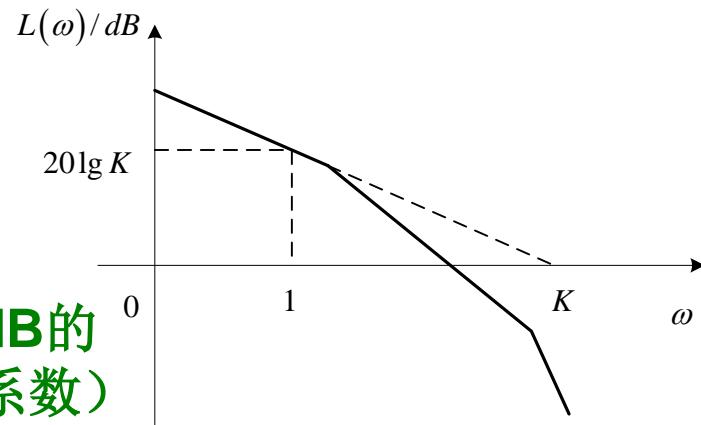
$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega$$

低频段是斜率为-20dB/dec的直线

$$L(1) = 20 \lg K \quad L(K) = 0$$

低频段的对数幅频特性（或延长线）与0dB的交点处的频率=开环增益（速度稳态误差系数）

频率为1处高度为20lgK



3) II型系统

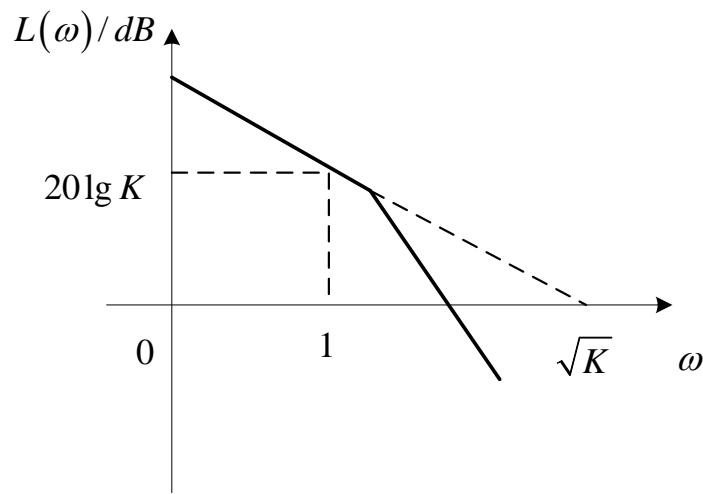
$$L(\omega) = 20 \lg K - 40 \lg \omega$$

低频段是斜率为**-40dB/dec**的直线，

$$L(1) = 20 \lg K$$

$$L(\sqrt{K}) = 0$$

低频段的对数幅频特性（或延长线）与**0dB**的交点处的频率 \sqrt{K}
 （速度稳态误差系数开根号），频率为1处高度为**20lgK**

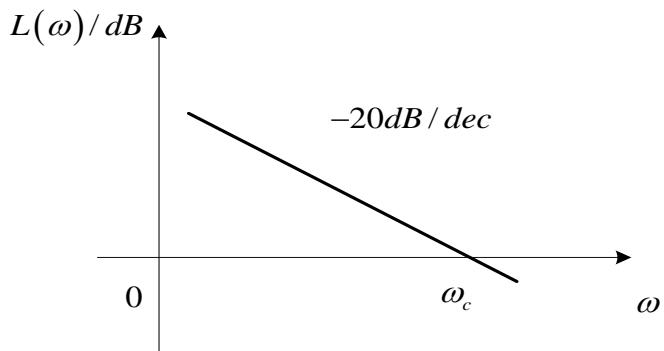


低频段都能反映系统的开环增益，
 表征了系统的稳态性能

○中频段：开环幅频特性曲线在截至频率附近的区域（最小相位系统）

1) 中频段幅频特性的斜率

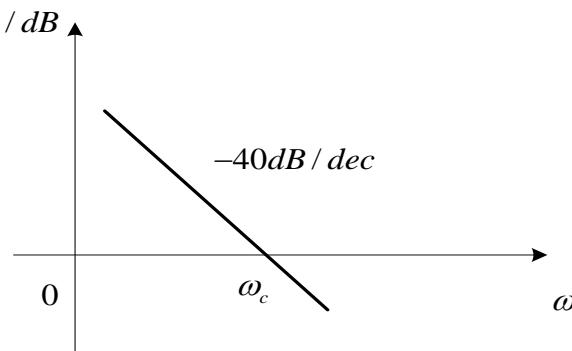
设计为**-20dB/dec**且占据一定的宽度，这样其他的环节对截至频率影响小，系统相角裕度越大，瞬时性能也好



斜率为**-20dB/dec**且频区很宽

开环传函

$$G_0(s) = \frac{1}{Ts} = \frac{\omega_c}{s}$$



斜率为**-40dB/dec**且频区很宽

$$G_0(s) = \frac{K}{s^2} = \frac{\omega_c^2}{s^2}, \omega_c = \sqrt{K}$$

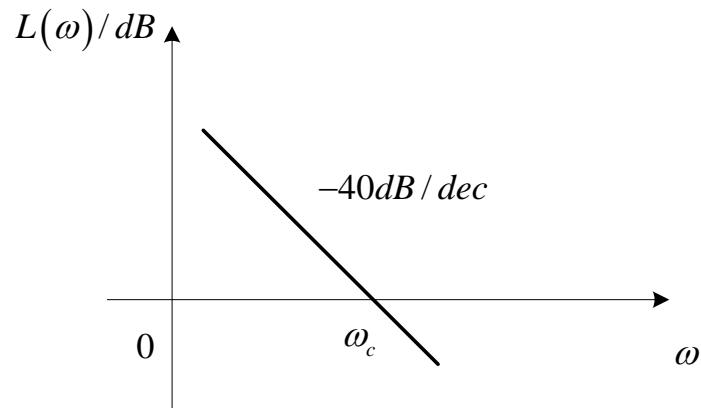
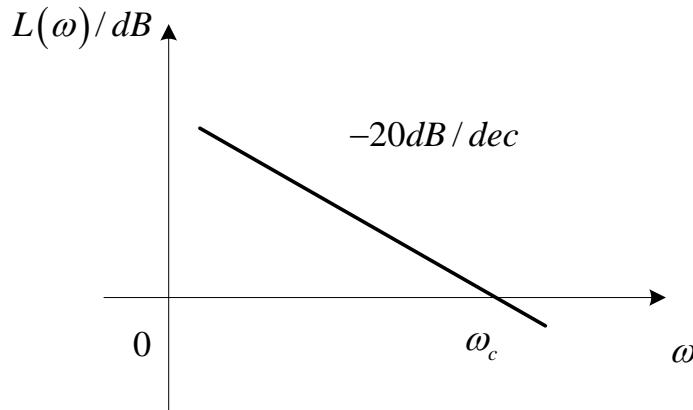
$$H(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \frac{\omega_c^2}{s^2}} = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \omega_c^2}$$

一阶惯性环节，系统稳定，无超调

二阶无阻尼等幅振荡，系统临界稳定

$$\text{单位负反馈闭环传函 } H(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_c}s + 1}$$

2) 截止频率与通频带宽



ω_c 越大对应的M(0)越大，进而 ω_b 越宽

从输出复现输入的角度而言， ω_c, ω_b 应该尽量大些，好处 $t_s = \frac{6}{\omega_c \tan \gamma} or \frac{k\pi}{\omega_c}$ 减少
 ω_c 非越大越好，太大会给系统带来过强的高频噪声

3) 相角裕度与瞬态性能

如果相角裕度很小， $G_0(j\omega_c) \approx -1$ $|H(s)| = \left| \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \right| \gg 1$ 有很大的谐振峰值。

中频段反映了系统动态性能

○高频段：离截至频率较远 ($\omega > 10\omega_c$) 的频段

- 1) 转折频率较大，对应的开环系统时间常数小，对系统的影响小
- 2) 实际系统中，高频增益通常很小，即 $L(\omega) \ll 0$ or $|G_0(j\omega)| \ll 1$

$$H(j\omega) = \frac{|G_0(j\omega)|}{|1 + G_0(j\omega)|} \approx |G_0(j\omega)|$$

这部分的开环频率特性直接反应了系统对高频噪声的抑制作用

6.3.2 频率特性校正举例

○超前校正

$$C(s) = K'_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = K'_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \text{ 其中 } 0 < \alpha < 1$$

其频率特性

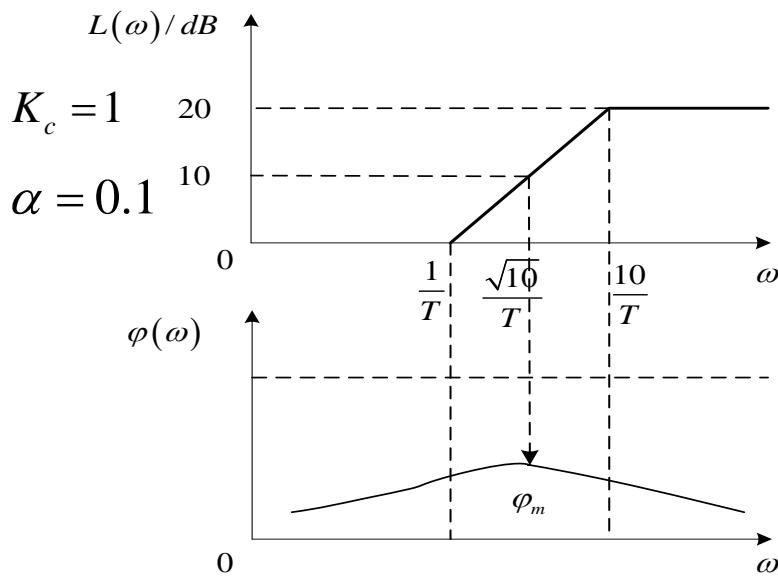
$$C(j\omega) = K'_c \alpha \frac{j\omega T + 1}{j\omega \alpha T + 1} = K_c \frac{j\omega T + 1}{j\omega \alpha T + 1}$$

对应的幅频特性

$$A(\omega) = |C(j\omega)| = \sqrt{\frac{(\omega T)^2 + 1}{(\alpha \omega T)^2 + 1}}$$

对应的相频特性

$$\varphi(\omega) = \angle C(j\omega) = \arctan \omega T - \arctan \alpha \omega T$$

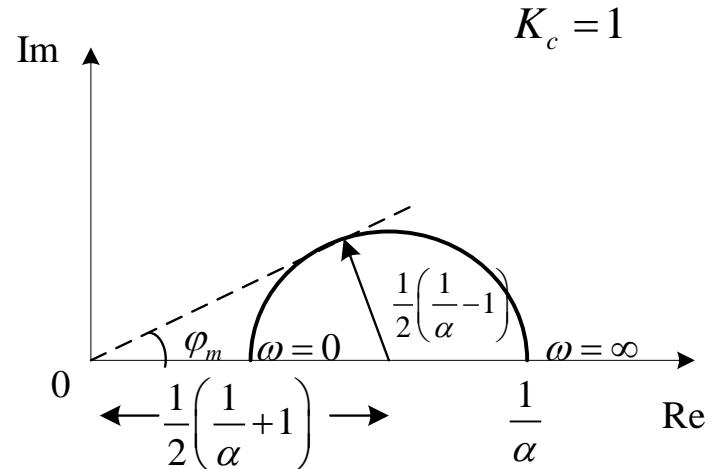


最大超前角位于

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}$$

最大超前角为

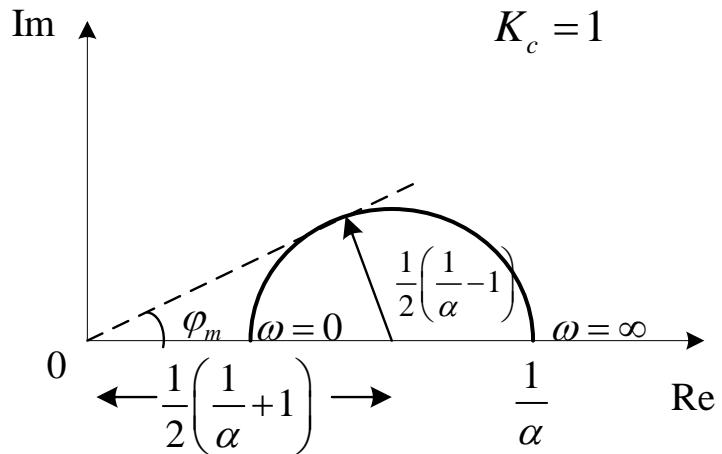
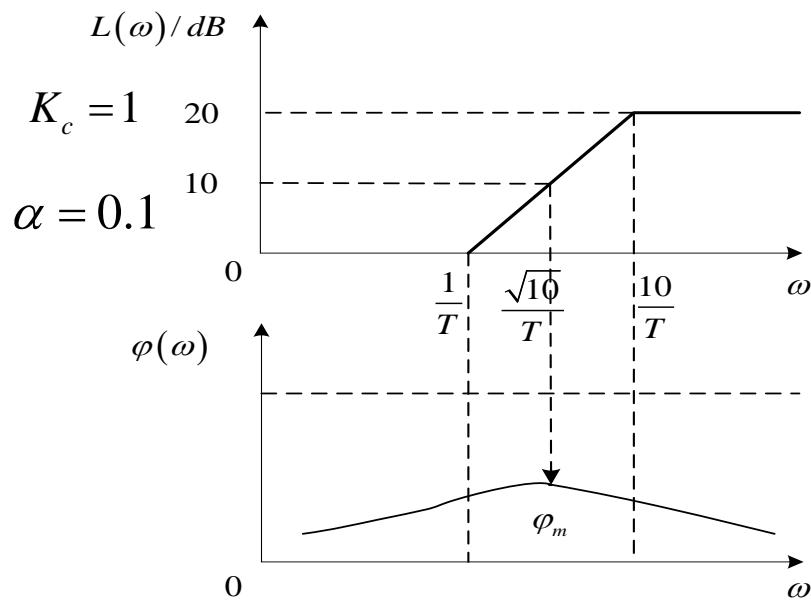
$$\varphi_m = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$



位于两个转折频率的
几何中心

理论上最大为**90度**, 实际上
 α 取大于**0.05**, 最大相位角
大约为**65度**

超前装置基本上是一个高通滤波器, 会增大开环截止频率和系统带宽

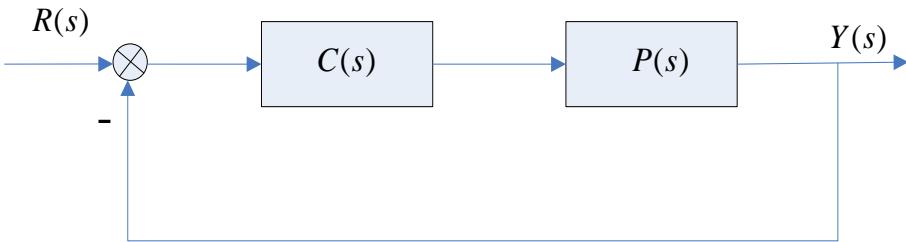


超前装置使得开环幅频特性在 $\omega = \omega_m$ 处提高

$$L_m = 20\lg K_c + 20\lg \sqrt{1 + (T\omega_m)^2} - 20\lg \sqrt{1 + (\alpha T\omega_m)^2} \Big|_{\omega_m=1/(\sqrt{\alpha}T)} = 20\lg(K_c / \sqrt{\alpha})$$

设计时通常将最大超前角频率 ω_m 选择在开环截止频率 ω_c 附近，增大相角裕度。由于开环截止频率和相角裕度增大，瞬态性能改善，调节时间变短，稳定性增加

○频率特性设计超前校正的步骤



1.根据系统的稳态误差要求,确定校正装置的增益 K_c ,并画出未校正系统 $K_c P(j\omega)$ 的伯德图;

求开环增
益, 画图

2.利用画出的伯德图求出未校正系统的相角裕度 γ' ,如果期望的相角裕度为 γ .若 $\gamma - \gamma' < 0$ or $\gamma - \gamma' > 65^0$, 均不适合超前校正;

判断

3.根据瞬态性能指标选择截止频率 ω_c ,并计算校正环节的时间常数 T 和 αT ;

求参数

由于校正环节的最大超前角频率 ω_m 和 ω_c 重合

$$L'(\omega_c) + 20 \lg(1/\sqrt{\alpha}) = 0 \Rightarrow \alpha = 10^{0.1L'(\omega_c)}$$

$$\omega_c = \omega_m = 1/(\sqrt{\alpha}T) \Rightarrow T = 1/(\sqrt{\alpha}\omega_c)$$

$$\varphi_m = \gamma - (180^0 + \varphi(\omega)) \text{ and } \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \sin \varphi_m \Rightarrow \alpha$$

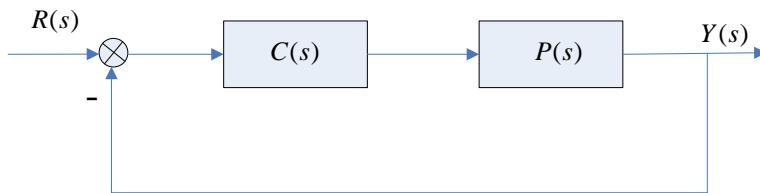
$$\omega_c = \omega_m = 1/(\sqrt{\alpha}T) \Rightarrow T = 1/(\sqrt{\alpha}\omega_c)$$

4.验算校正后的相角裕度和幅值裕度。

验证

E.g.6.3 被控对象的传函

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$



要求在单位斜坡输入下 $e_{ss} \leq 0.1$, 开环截止频率 $\omega_c \geq 4.4 rad/s$, 相角裕度 $\gamma \geq 45^\circ$, 幅值裕度 $L_g \geq 10 dB$, 设计校正环节 $C(s)$ 。

STEP1: 系统是I型系统。求开环增益, 画

图

$$e_{ss} = 1/K_v \leq 0.1 \Rightarrow K \geq 10$$

$$\text{Choose } K = 10 \Rightarrow K_c = 10$$

系统 $G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$ 的伯德图如下

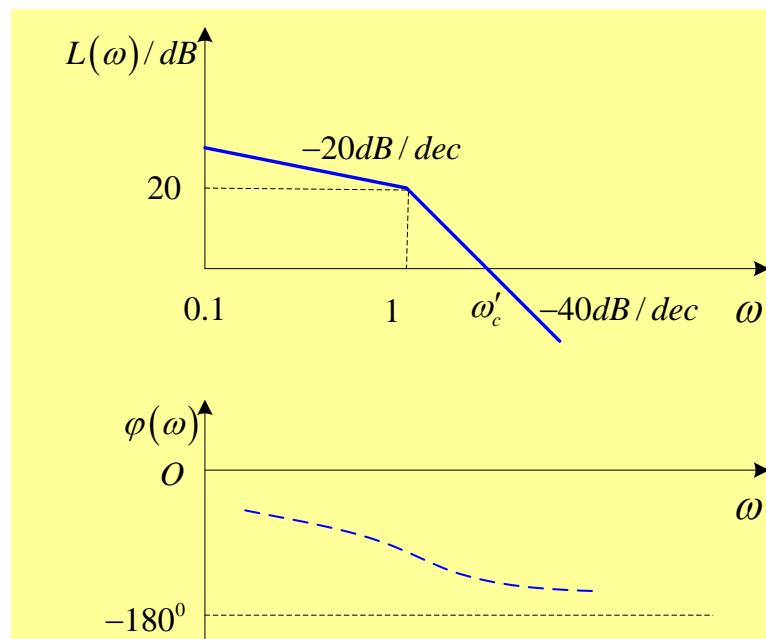
STEP2: 判断是否采用超前环节

$$20\lg K - 20\lg \omega'_c - 20\lg \omega_c' = 0$$

$$\Rightarrow \omega'_c = 3.1 < 4.4$$

$$\gamma' = 180^\circ + \angle G(j\omega'_c)$$

$$= 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega'_c = 17.9^\circ < 45^\circ$$



STEP3:求超前环节参数

抬高量

$$\omega_c = 4.4 \Rightarrow L'(\omega_c) = 20 \lg K - 20 \lg 4.4 - 20 \lg 4.4 = -5.74(dB)$$

参数 α

$$L'(\omega_c) + 20 \lg(1/\sqrt{\alpha}) = 0 \Rightarrow \alpha = 10^{0.1L'(\omega_c)} = 0.27$$

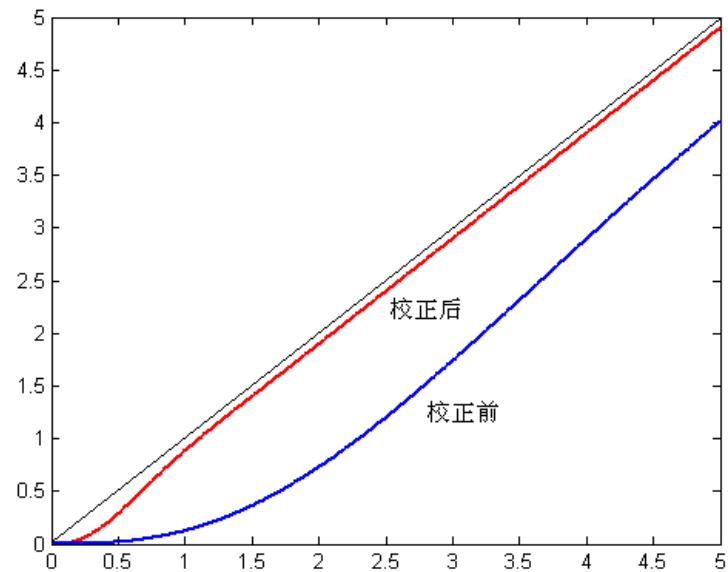
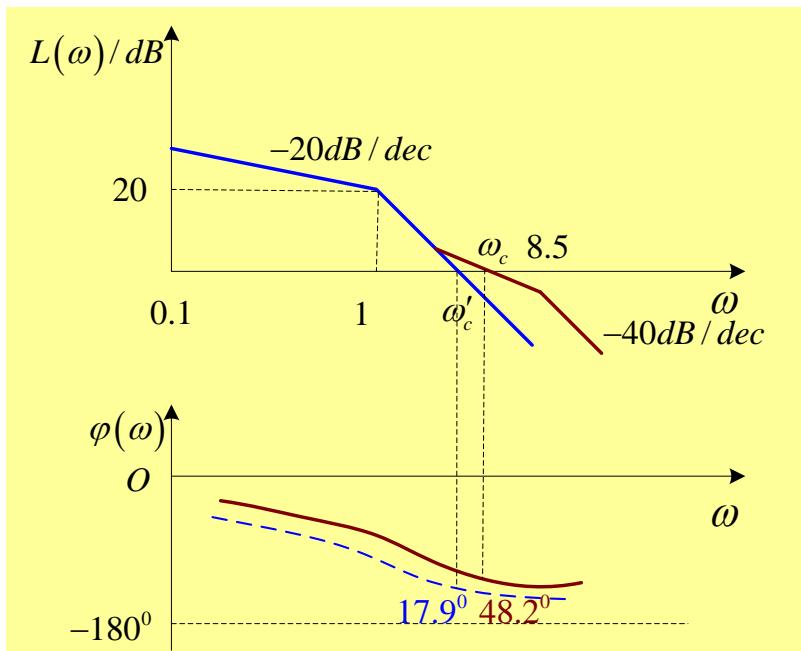
参数 T

$$T = 1/(\sqrt{\alpha} \omega_c) = 0.44$$

超前环节

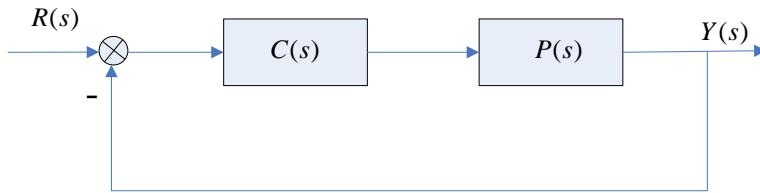
$$C(s) = K_c \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = \frac{10(0.44s+1)}{0.117s+1}$$

STEP4:验证 $\gamma = 48.2^0$ $L_g = \infty$



E.x.6.3 被控对象的传函

$$P(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$



要求在单位斜坡输入下 $e_{ss} \leq 0.1$, 开环截止频率 $\omega_c \geq 6rad/s$, 相角裕度 $\gamma \geq 45^0$, 幅值裕度 $L_g \geq 10dB$, 设计校正环节 $C(s)$ 。

STEP1: 系统是I型系统。求开环增益, 画

图

$$e_{ss} = 1/K_v \leq 0.1 \Rightarrow K \geq 10$$

$$\text{Choose } K = 10 \Rightarrow K_c = 20$$

系统 $G(s) = \frac{20}{s(s+2)}$ 的伯德图如下

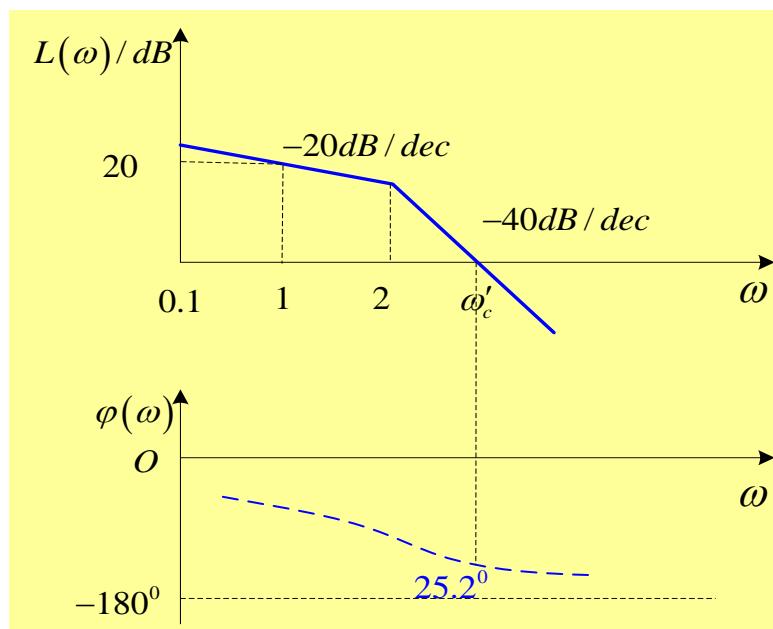
STEP2: 判断是否采用超前环节

$$20\lg 10 - 20\lg \omega'_c - 20\lg 0.5\omega'_c = 0$$

$$\Rightarrow \omega'_c = 4.47 < 6$$

$$\gamma' = 180^0 + \angle G(j\omega'_c)$$

$$= 180^0 - 90^0 - \arctan 0.5\omega'_c = 25.2^0 < 45^0$$



STEP3:求超前环节参数

抬高量

$$\omega_c = 6 \Rightarrow L'(\omega_c) = 20\lg 10 - 20\lg 6 - 20\lg 3 = -11.76(dB)$$

参数 α

$$L'(\omega_c) + 20\lg(1/\sqrt{\alpha}) = 0 \Rightarrow \alpha = 10^{0.1L'(\omega_c)} = 0.07$$

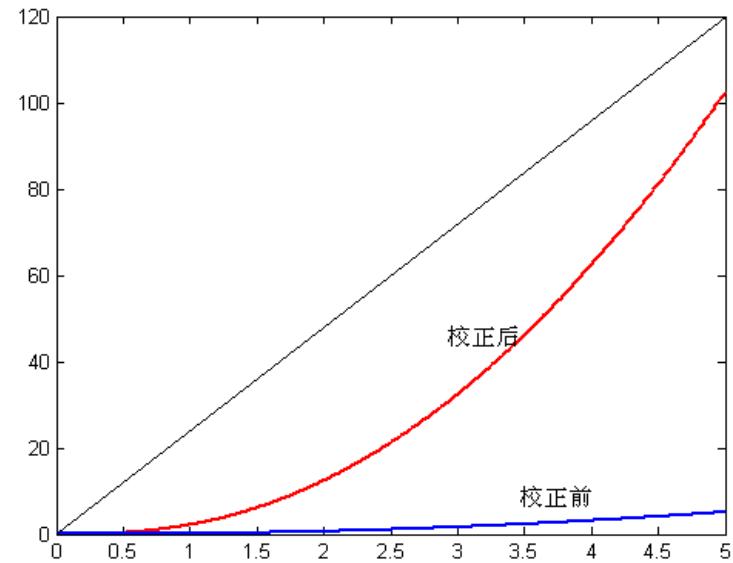
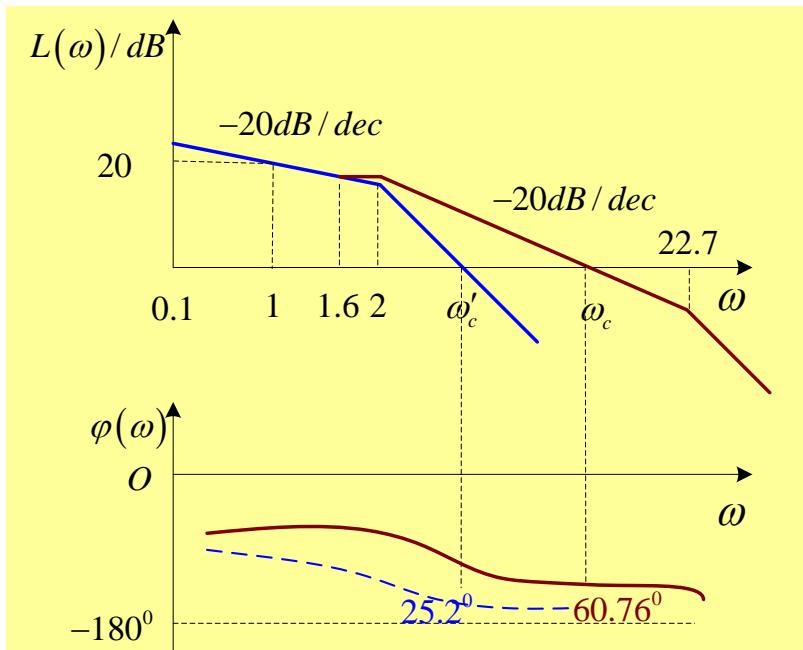
参数 T

$$T = 1/(\sqrt{\alpha}\omega_c) = 0.63$$

超前环节

$$C(s) = K_c \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = \frac{20(0.63s+1)}{0.044s+1}$$

STEP4:验证 $\gamma = 65.76^0$ $L_g = \infty$



课后练习

6.5, 6.6

○滞后校正

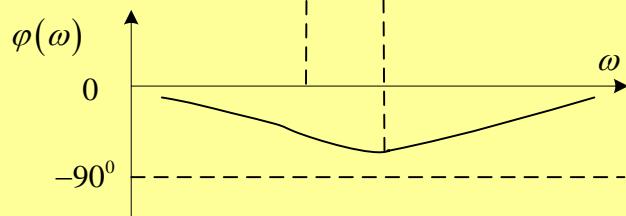
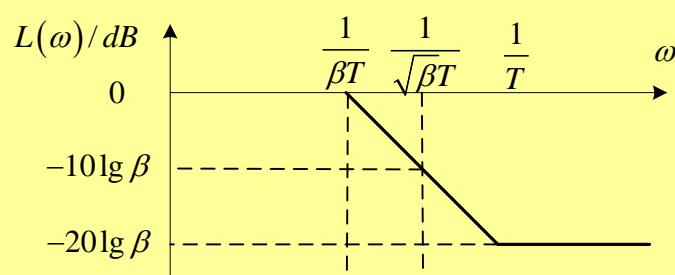
$$C(s) = K'_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K'_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}, \text{ 其中 } \beta > 1$$

其频率特性

$$C(j\omega) = K'_c \beta \frac{j\omega T + 1}{j\omega \beta T + 1} = K_c \frac{j\omega T + 1}{j\omega \beta T + 1}$$

对应的幅频特性

$$A(\omega) = |C(j\omega)| = \sqrt{\frac{(\omega T)^2 + 1}{(\beta \omega T)^2 + 1}}$$



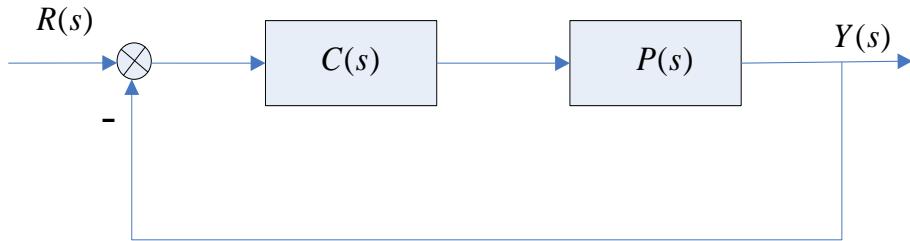
对应的相频特性

$$\varphi(\omega) = \angle C(j\omega) = \arctan \omega T - \arctan \beta \omega T$$

△低通滤波器，高频衰减

△在不降低系统精度的情况下，
截止频率减小，相角裕度增加

△由于最大滞后角频率被安排在
低频段，远离截止频率，其对
系统的瞬态性能影响很小



○频率特性设计滞后校正的步骤

1. 根据系统的稳态误差要求, 确定校正装置的增益 K_c , 并画出未校正系统 $K_c P(j\omega)$ 的伯德图;

2. 根据相角裕度的要求选择新的截止频率 ω_c .

$$\angle K_c P(j\omega_c) = -180^\circ + \gamma + (5^\circ \sim 12^\circ)$$

3. 计算系统 $K_c P(j\omega)$ 在 ω_c 处的幅值 $L(\omega_c)$, 该幅值即为滞后环节应衰减的幅值, 求 β

$$L(\omega_c) - 20\lg(\beta T \omega_c) + 20\lg(T \omega_c) = 0 \Rightarrow 20\lg \beta = L(\omega_c) \Rightarrow \beta$$

4. 为了防止滞后环节相位滞后对系统影响, 选择 $1/T = 0.1\omega_c$, 延后环节为

$$C(s) = K_c \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}$$

5. 验算校正后的相角裕度和幅值裕度。

E.g.6.4 被控对象的传函

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

要求静态误差系数 $K_v = 5$, 相角裕度 $\gamma \geq 40^\circ$, 幅值裕度 $L_g \geq 10dB$, 设计滞后校正环节 $C(s)$.

STEP1: 求校正环节增益, 画图

$$C(s) = K_c \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}$$

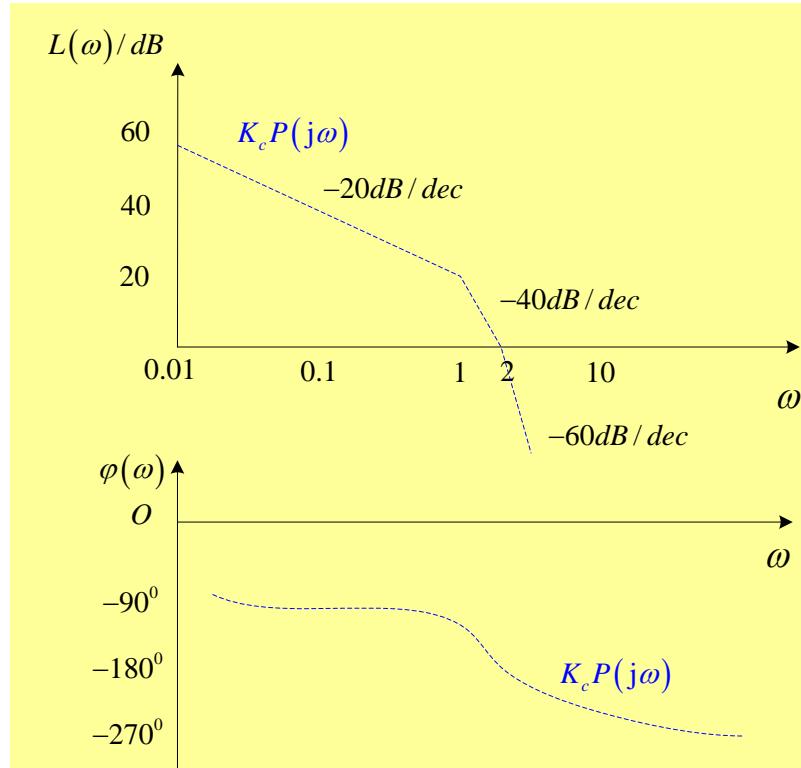
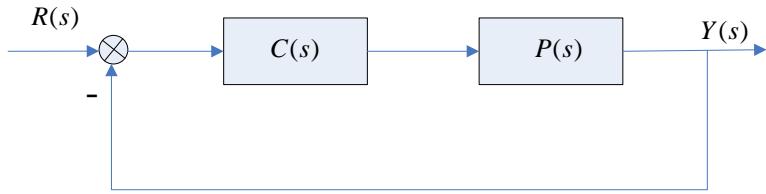
$$G_0(s) = K_c \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} P(s)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = K_c = 5$$

系统

$$K_c P(j\omega) = \frac{5}{j\omega(j\omega+1)(0.5j\omega+1)}$$

的伯德图如右



STEP2: 算出未校正系统的新的截止频率以及该处的相角值

相角值

$$\angle K_c P(j\omega_c) = -180^\circ + 40^\circ + 12^\circ = -128^\circ$$

新截止频率 ω_c

$$\angle K_c P(j\omega_c) = -90^\circ - \arctan \omega_c - \arctan 0.5\omega_c = -128^\circ \Rightarrow \omega_c \approx 0.5 \text{ rad/s}$$

STEP3: 算出滞后环节应衰减掉的幅值进而求 β

衰减幅值

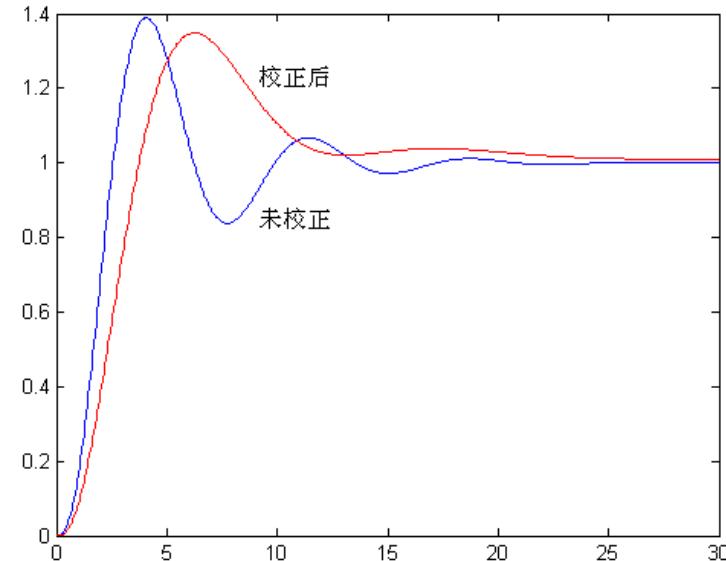
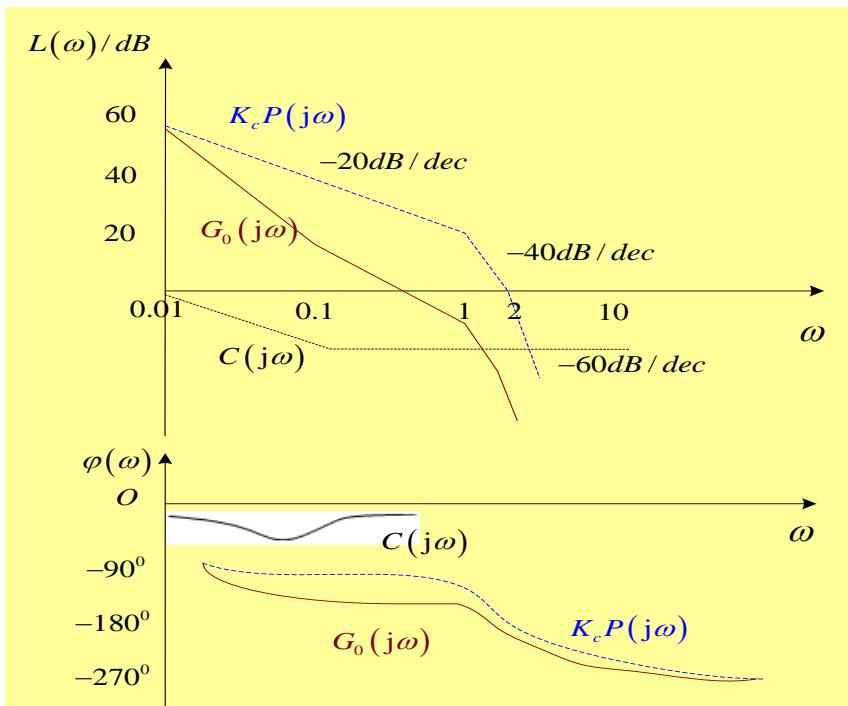
$$L(\omega_c) \approx 20 \lg 5 - 20 \lg \omega_c = 20 \text{ dB}$$

参数 β

$$20 \lg \beta = 20 \Rightarrow \beta = 10$$

STEP4: 选择参数 $1/T = 0.2 \omega_c = 0.1$

STEP5: 验证 $\gamma = 40^\circ L_g = 11 \text{ dB}$



○超前校正与滞后校正比较

超前校正

1. 超前校正利用超前角来增大相位裕度，超前校正的最大超前角频率应选在期望截止频率附近
2. 超前校正增大中高频幅值，使得校正后的截止频率比校正前的大，增大了系统的通频带宽，使得系统的快速性更好，改善动态性能
3. 超前校正的增加的超前角一般不大于65度

滞后校正

1. 滞后校正利用的是中高频幅值的衰减特性，使得校正后的系统的截止频率下降，达到增大相位裕度。挖掘原系统潜能
2. 为了减少滞后角的影响，最大滞后角频率应选在低频段，远离期望的截止频率
3. 滞后校正的实质是改善系统的稳态性能，容许较大的开环增益

○滞后-超前校正

$$C(s) = K_c \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(\alpha T_1 s + 1)(\beta T_2 s + 1)}, \quad \beta \geq \alpha^{-1} > 1, T_2 > T_1$$

滞后作用于
低频段，
超前作用于
中高频段

超前作用

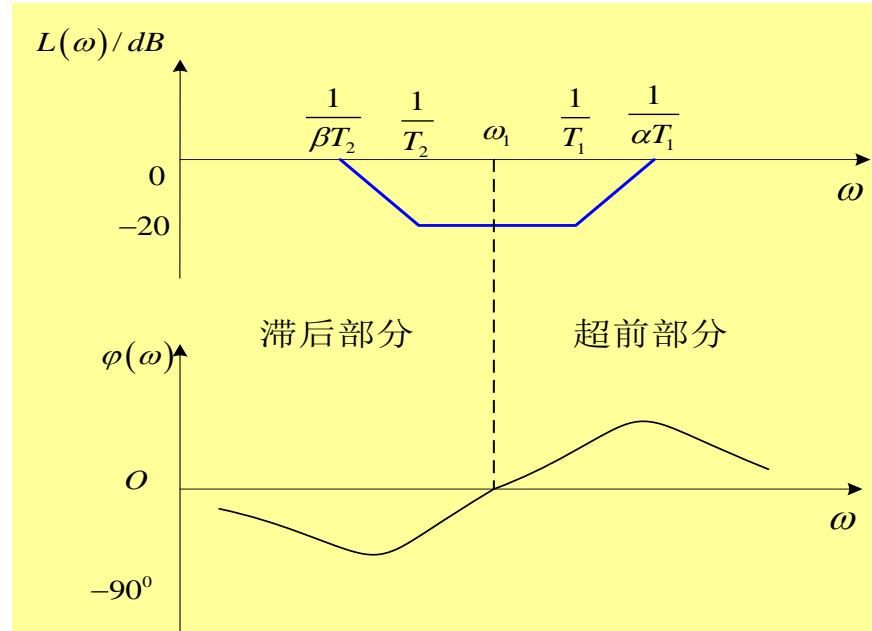
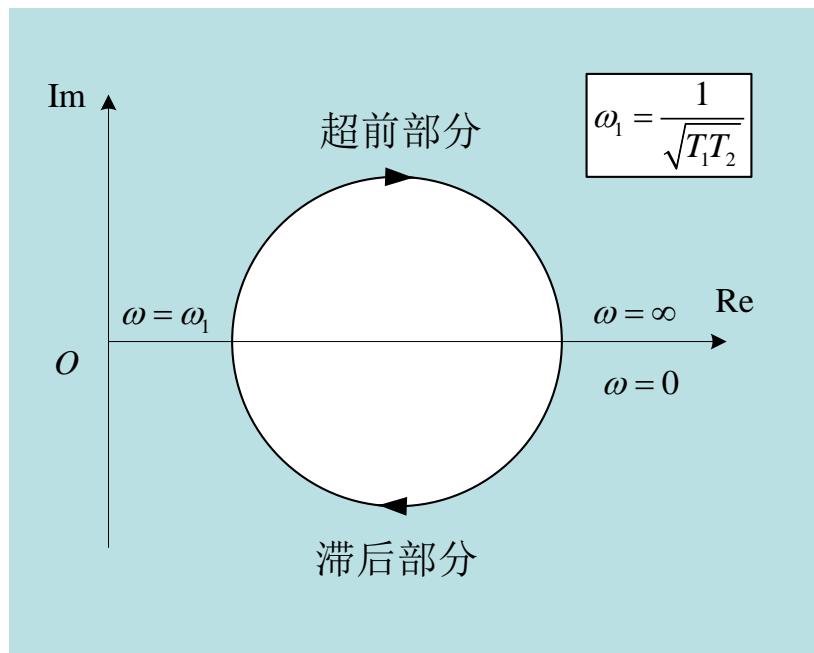
$$\frac{1}{\alpha} \frac{s + 1/T_1}{s + 1/(\alpha T_1)}$$

$$\frac{1}{\beta} \frac{s + 1/T_2}{s + 1/(\beta T_2)}$$

滞后作用

当 $K_c = 1, \alpha^{-1} = \beta$ 时，
其极坐标图如下

当 $K_c = 1, \alpha^{-1} = \beta = 10$ 时，
其极坐标图如下



E.g.6.4 被控对象的传函

$$P(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$$

要求静态误差系数 $K_v \geq 100$, 相角裕度 $\gamma \geq 40^\circ$, 截止频率 $\omega_c = 20 \text{ rad/s}$, 试设计串联校正环节。

STEP1: 求校正环节增益, 画图

$$K = K_v \geq 100$$

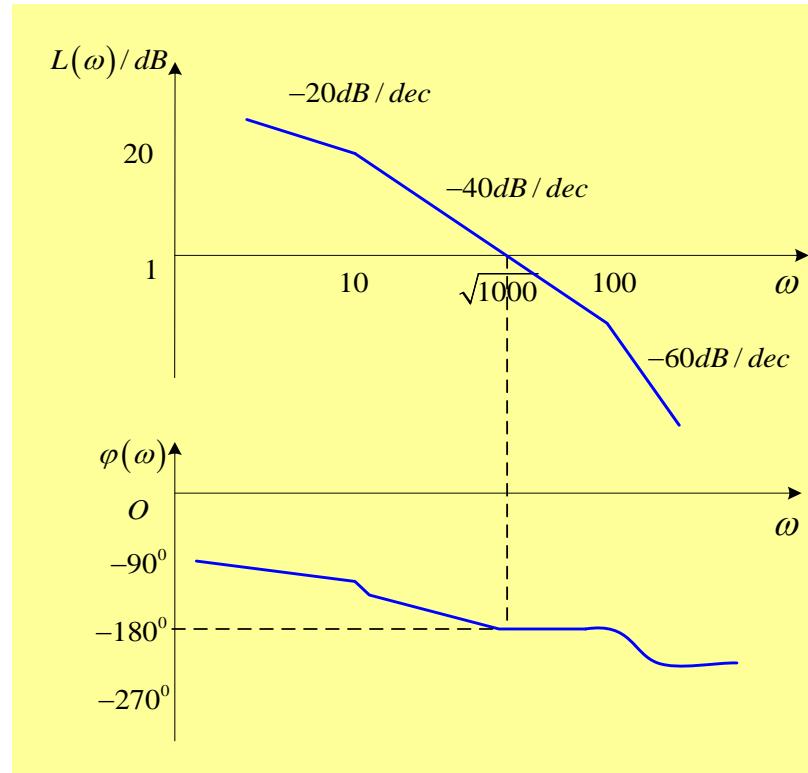
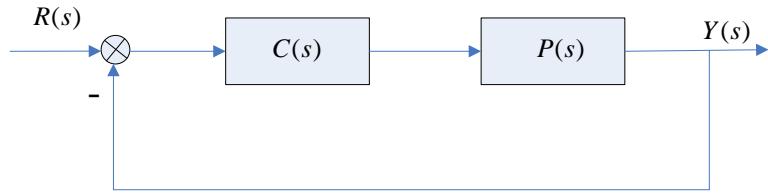
STEP2: 判断采用校正环节

$$20\lg K - 20\lg \omega'_c - 20\lg 0.1\omega'_c = 0$$

$$\Rightarrow \omega'_c = 31$$

$$\begin{aligned} \gamma' &= 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.1\omega'_c \\ &\quad - \arctan 0.01\omega'_c \approx 0 \end{aligned}$$

由于 $\omega'_c > \omega_c$, 故不宜采用超前校正



STEP2: 判断采用校正环节

$$\angle KP(j\omega_c) = -90^\circ - \arctan 0.1\omega_c - \arctan 0.01\omega_c \approx -165^\circ$$

单纯采用滞后环节校正仅能得到的相角裕度为

$$\gamma = 180^\circ - 165^\circ - 6^\circ = 9^\circ$$

与 $\gamma \geq 40^\circ$ 相差很远。故得采用超前-滞后校正。

STEP3: 确定超前校正环节参数

$$\text{Choose } \varphi_m = 40^\circ$$

参数 α

$$\varphi_m = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1-\sin \varphi_m}{1+\sin \varphi_m} = 0.22$$

参数 T

$$\omega_c = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \omega_c} \approx 0.1$$

超前环节

$$C_1(s) = \frac{0.1s + 1}{0.022s + 1}$$

STEP4:确定滞后校正环节参数

未校正系统的幅频特性

$$L(\omega_c) = 20\lg 100 - 20\lg 20 - 20\lg 2 \approx 8dB$$

超前环节的幅值

$$20\lg \alpha^{-1/2} \approx 6dB$$

滞后环节衰减量

$$20\lg \beta = 14dB$$

参数 β

$$\beta = 5$$

参数 T

$$\frac{1}{T_2} = 0.2\omega_c \Rightarrow T_2 = \frac{1}{0.2\omega_c} = 0.25$$

滞后环节

$$C_2(s) = \frac{0.25s + 1}{1.25s + 1}$$

超前-滞后环节

$$C(s) = \frac{(0.1s + 1)(0.25s + 1)}{(0.022s + 1)(1.25s + 1)}$$

STEP5:验算校正的系统的相角裕度满足设计要求

○频率特性设计超前-滞后校正的步骤

1. 根据**稳态性能要求**确定开环**增益** K_c

2. 在此**K**值下画出未校正 $KP(j\omega)$ 频率特性图，计算校正前的截止频率 ω'_c 和相角裕度 γ' ，并判断采用何种校正环节

3. 确定超前环节的参数

$$\alpha = \frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \omega_m} = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \omega_c}$$

4. 确定滞后环节的参数

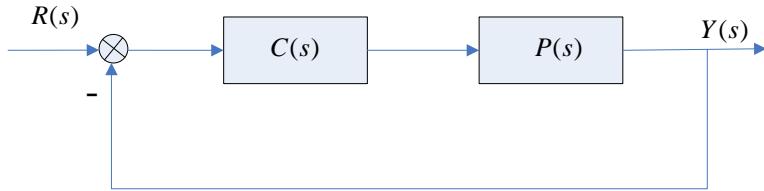
$$\Delta L = L(\omega_c) + 10 \lg \alpha^{-1}$$

$$20 \lg \beta = \Delta L$$

$$\frac{1}{T_2} = \left(\frac{1}{10} \sim \frac{1}{5} \right) \omega_c$$

E.x.6.4 被控对象的传函

$$P(s) = \frac{K}{s(\frac{s}{10} + 1)(\frac{s}{60} + 1)}$$



要求单位速度信号输入时的静态速度误差 $e_{ss} \leq 1/126$, 相角裕度 $\gamma \geq 35^0$, 截止频率 $\omega_c = 20 \text{ rad/s}$, 试设计串联校正环节。

STEP1: 求校正环节增益, 画图

$$K = 1/e_{ss} \geq 126 \quad \text{Choose } K = 126$$

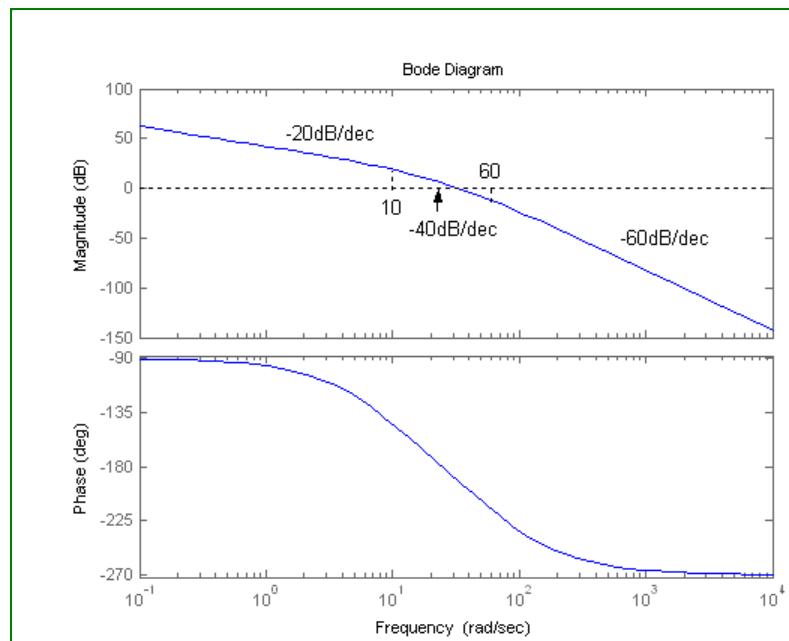
STEP2: 判断采用校正环节

$$20\lg K - 20\lg(\omega'_c / 10) = 0$$

$$\Rightarrow \omega'_c = 36$$

$$\begin{aligned} \gamma' &= 90^\circ - \arctan 0.1\omega'_c - \arctan(\omega'_c / 60) \\ &= -15.4 \end{aligned}$$

由于 $\omega'_c > \omega_c$, 故不宜采用超前校正



STEP2: 判断采用校正环节

$$\angle KP(j\omega_c) = -90^\circ - \arctan 0.1\omega_c - \arctan 0.01\omega_c \approx -171.8^\circ$$

单纯采用滞后环节校正仅能得到的相角裕度为

$$\gamma = 180^\circ - 171.8^\circ - 6^\circ = 2.2^\circ$$

与 $\gamma \geq 35^\circ$ 相差很远。故得采用超前-滞后校正。

STEP3: 确定超前校正环节参数

$$\text{Choose } \varphi_m = 32.8^\circ$$

参数 α

$$\varphi_m = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1-\sin \varphi_m}{1+\sin \varphi_m} = 1.8$$

参数 T

$$\omega_c = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \omega_c} \approx 0.037$$

超前环节

$$C_1(s) = \frac{0.037s+1}{0.067s+1}$$

STEP4:确定滞后校正环节参数

未校正系统的幅频特性

$$L(\omega_c) = 20\lg 126 - 20\lg 20 - 20\lg 2 \approx 23dB$$

超前环节的幅值

$$20\lg \alpha^{-1/2} \approx -6dB$$

滞后环节衰减量

$$20\lg \beta = 17dB$$

参数 β

$$\beta = 2.34$$

参数 T

$$\frac{1}{T_2} = 0.2\omega_c \Rightarrow T_2 = \frac{1}{0.2\omega_c} = 0.25$$

滞后环节

$$C_2(s) = \frac{0.25s + 1}{0.59s + 1}$$

超前-滞后环节

$$C(s) = \frac{(0.037s + 1)(0.25s + 1)}{(0.067s + 1)(0.59s + 1)}$$

STEP5:验算校正的系统的相角裕度满足设计要求

6.4 基本控制规律分析

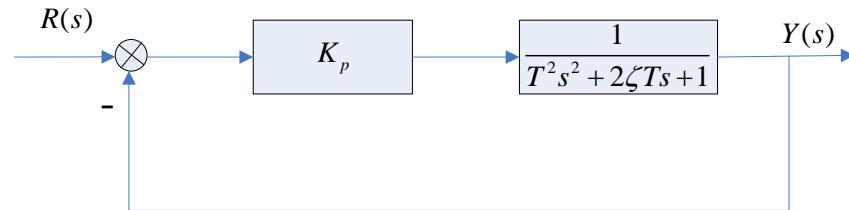
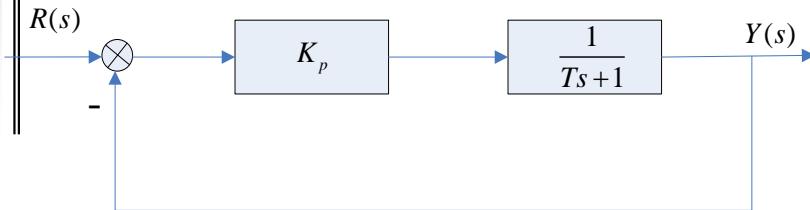
超前校正
滞后校正
超前-滞后校正

关系

比例、积分、微分组合控制

6.4.1 比例控制律（P控制器）

$$G_c(s) = K_p$$



$$W(s) = \frac{K_p}{Ts + 1 + K_p} = \frac{K_p}{1 + K_p} \frac{1}{\frac{T}{1 + K_p} s + 1}$$

$$T' = \frac{T}{1 + K_p}$$

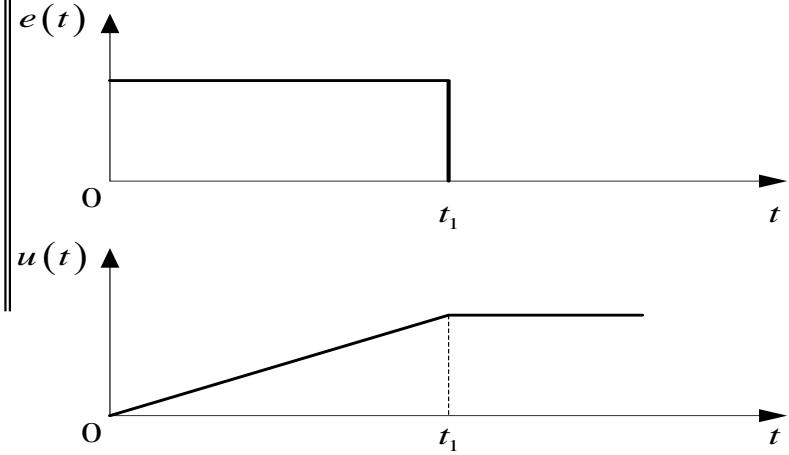
$$W(s) = \frac{K_p}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + K_p + 1} = \frac{K_p}{1 + K_p} \frac{K_p}{\frac{T^2}{1 + K_p} s^2 + \frac{2\zeta T}{1 + K_p} s + 1}$$

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 + K_p}} \quad \zeta' = \frac{\zeta}{\sqrt{1 + K_p}}$$

调整开环增益, 提高稳态精度, 加快响应速度, 稳定裕度变小

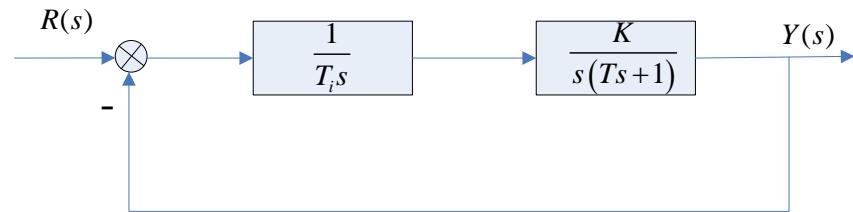
6.4.2 积分控制律（I控制器）

$$G_c(s) = \frac{1}{T_i s}$$



$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau$$

输入信号为0,输出依然不为0，有利于消除误差



$$W(s) = \frac{K}{Ts^2 + s + K}$$

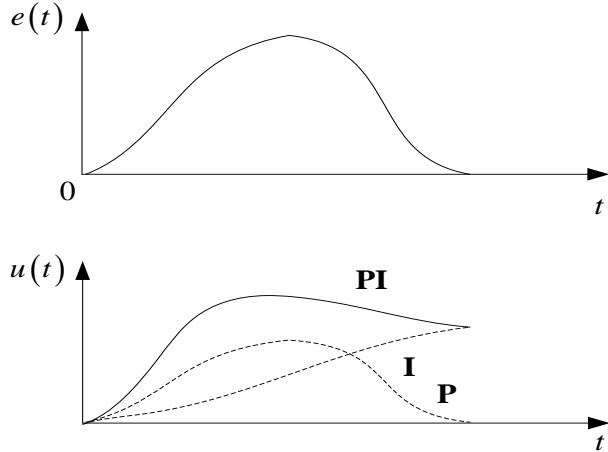
稳定

$$W(s) = \frac{K}{T_i Ts^3 + Ts^2 + K}$$

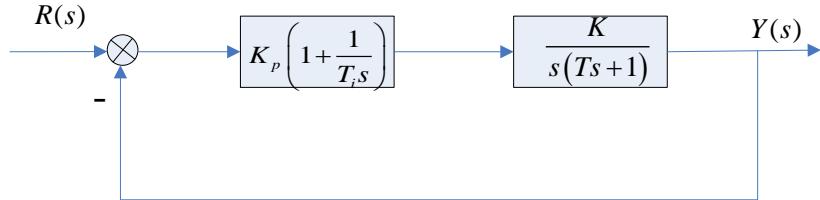
不稳定

不利于系统的稳定性

6.4.3 比例积分控制律（PI控制器）



$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

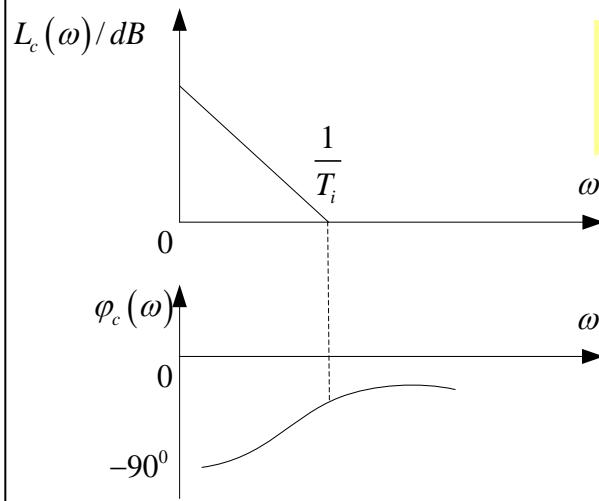


$$W(s) = \frac{K}{T_i T s^3 + T_i s^2 + T_i K_p K s + K_p K}$$

调节 K_p, T_i , 系统可稳定

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau$$

开始比例起主要作用
输入为0, 积分依然起作用



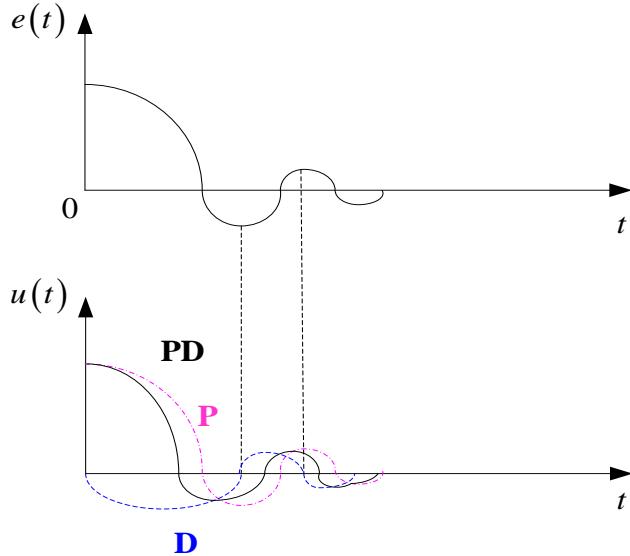
作用于低频段
提高了系统的类别

中高频影响小
保持原稳态裕度
和响应速度

滞后校正

6.4.4 比例微分控制律 (PD控制器)

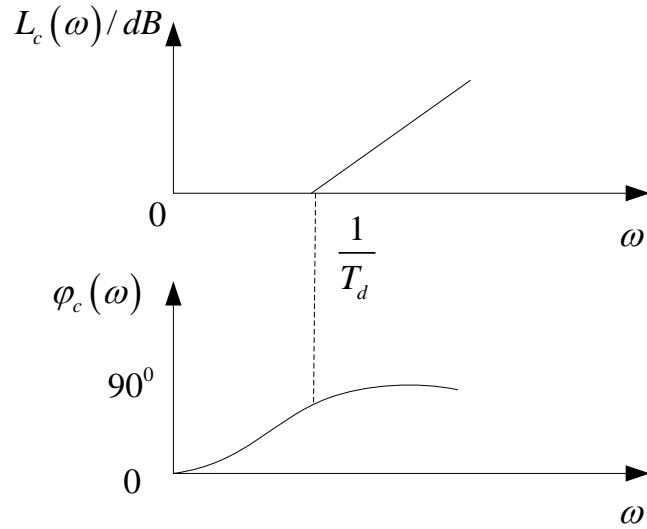
$$G_c(s) = K_p(1 + T_d s)$$



$$u(t) = K_p \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

微分只有在有变化时才起作用，
不能单独使用

提前作用,响应变快,超调减小



超前校正

6.4.5比例积分微分控制律（PID控制器）

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

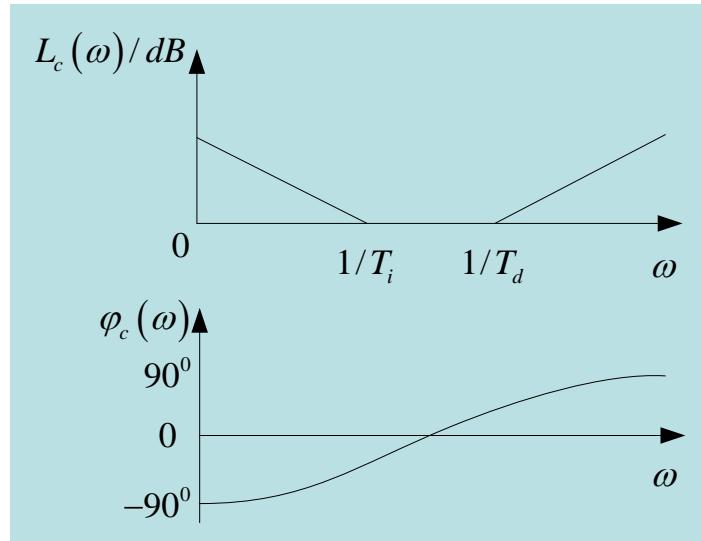
$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad u(k) = K_p \left(e(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{j=0}^k e(j) + \frac{T_d}{T} [e(K) - e(k-1)] \right)$$

令 $K_p = 1$, 则 $G_c(s)$ 的对数频率特性为

$$L_c(\omega) = 20 \lg \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_i \omega_d} \right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_i^2}} - 20 \lg \frac{\omega}{\omega_i}$$

$$\varphi_c(\omega) = \arctan \frac{\frac{\omega^2}{\omega_i \omega_d} - 1}{\frac{\omega}{\omega_i}}$$

其中 $\omega_i = \frac{1}{T_i}$ < $\omega_d = \frac{1}{T_d}$



超前-滞后校正

低频段, PI作用

中高频段, PD作用

6.4.6PID控制器的参数调整

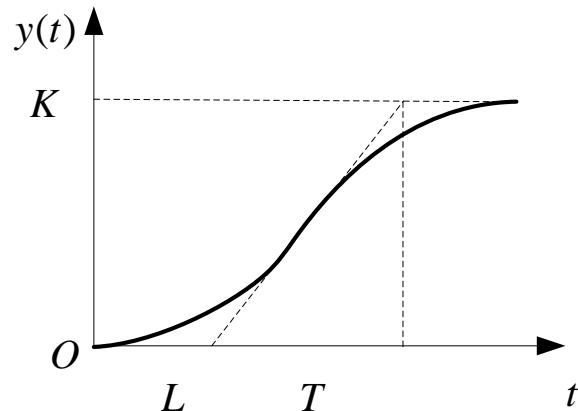
阶跃响应或脉冲响应曲线

调整参数

超调量为25%

○ S曲线法

对象不包含积分器，又没主导共轭复极点
单位阶跃响应曲线看起来像一条S曲线



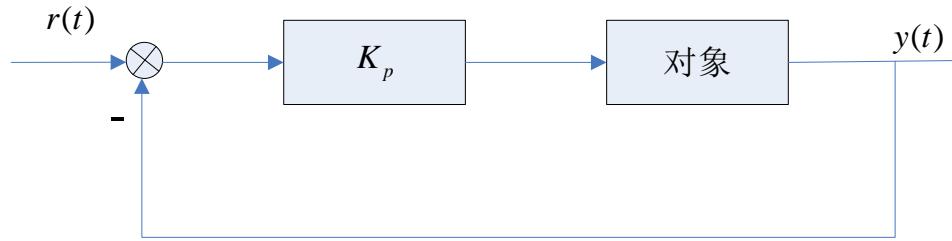
参数调整的S曲线法

控制器类别	K_p	T_i	T_d
P	T / L	∞	0
PI	$0.9T / L$	$L / 0.3$	0
PID	$1.2T / L$	$2L$	$0.5L$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1}$$

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = 0.6T \frac{(s + 1/L)^2}{s}$$

○ 振荡法

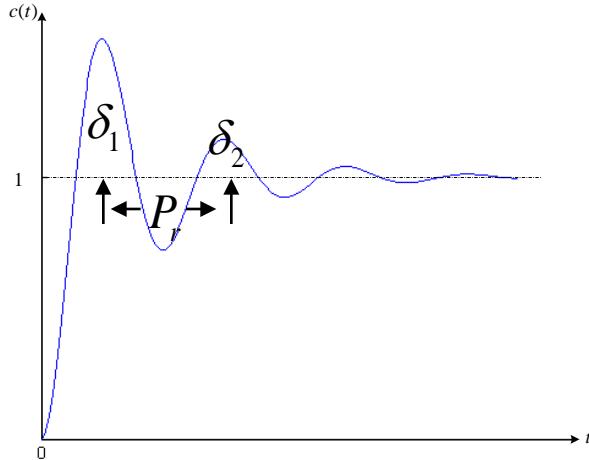


参数调整的振荡法

控制器类别	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_r$	∞	0
PI	$0.45K_r$	$\frac{1}{1.2}P_r$	0
PID	$0.6K_r$	$0.5P_r$	$0.125P_r$

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = 0.75 K_r P_r \frac{(s + 4/P_r)^2}{s}$$

○ 衰减曲线法



参数调整的振荡法

控制器类别	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_r$	∞	0
PI	$0.45K_r$	$\frac{1}{1.2}P_r$	0
PID	$0.6K_r$	$0.5P_r$	$0.125P_r$

$$\begin{aligned}
 C(s) &= K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\
 &= 1.25K_r \frac{0.03P_r s^2 + 0.3P_r s + 1}{0.3P_r s}
 \end{aligned}$$