1.7 推理理论

- 推理的形式结构
- 判断推理是否正确的方法
- 推理定律与推理规则
- 构造证明

  直接证明法, 附加前提证明法, 归缪法

定义（蕴涵式）

设A和B是命题公式，若$A \rightarrow B$是重言式，

则称A蕴含B，记为$A \Rightarrow B$。

定义（前提和有效结论）

设A_1，A_2，…，A_n和B是$n+1$个命题公式，

若$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$，

则称C为A_1，A_2，…，A_n的有效结论，

A_1，A_2，…，A_n叫做B的一组前提。

推理的形式结构

定义 若对于每组赋值，或者$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 均为假，或者当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时，$B$也为真，则称由$A_1$, A_2, …, A_k推B的推理正确，否则推理不正确（错误）.

"$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推B" 的推理正确

当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式.

推理的形式结构：$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$ 或

前提： $A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论： B

若推理正确，则记作：$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$.

判断推理是否正确的方法

- 真值表法
- 等值演算法
- 主析取范式法
- 构造证明法（直接推理和间接推理）

判断推理是否正确

Remark：用前3个方法时需验证

“$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$”是否为重言式？

实例

例 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号，则明天是5号. 今天是1号. 所以明天是5号.

解 设 p：今天是1号，q：明天是5号.

推理的形式结构为: $(p\to q)\wedge p\to q$

证明（用等值演算法）

$$(p\to q)\wedge p\to q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee q \Leftrightarrow 1$$

得证推理正确

实例 (续)

(2) 若今天是1号，则明天是5号. 明天是5号. 所以今天是1号.

解 设p：今天是1号，q：明天是5号.

推理的形式结构为：$(p\to q)\wedge q\to p$

证明（用主析取范式法）

$$(p\to q)\wedge q\to p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge q\to p$$

$$\Leftrightarrow \neg\ ((\neg p\vee q)\wedge q)\vee p$$

$$\Leftrightarrow \neg q\vee p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee\ (p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_3$$

结果不含m_1, 故01是成假赋值，所以推理不正确.

推理定律——重言蕴涵式

重要的推理定律

$A \Rightarrow (A \vee B)$	附加律
$(A \wedge B) \Rightarrow A$	化简律
$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$	假言推理
$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	拒取式
$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$	析取三段论
$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$	假言三段论
$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$	等价三段论
$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$	构造性二难

推理定律 (续)

$(A \to B) \land (\neg A \to B) \Rightarrow B$　构造性二难（特殊形式）

$(A \to B) \land (C \to D) \land (\neg B \lor \neg D) \Rightarrow (\neg A \lor \neg C)$

破坏性二难

构造证明

构造证明的基本思想是：由一组前提出发，利用一些公认的规则，根据等值式（P9的24个）和推理定律（P23的8个），推演得到有效结论。公认的推理规则有4条：

P规则：

前提在推导过程中的任何时候都可以引入使用。

T规则：

推理中，如果一个或多个公式，蕴含了公式S，则公式S可以引入到以后的推理之中。

置换规则：

在推导过程的任何步骤上，命题公式中的子公式都可以用与之等价的公式置换。

合取引入规则：

任意两个命题公式A，B可以推出$A \wedge B$。

直接证明法举例一

例1.28：公安人员审查一件盗窃案，已知的事实如下：

（1）甲或乙盗窃了录音机；（2）若甲盗窃了录音机，则作案时间不能发生在午夜前；（3）若乙的证词正确，则午夜时屋里灯光未灭；（4）若乙的证词不正确，则作案时间发生在午夜前；（5）午夜时屋里灯光灭了。

那么到底时谁盗窃了录音机呢？

解 设 p：甲盗窃了录音机；q：乙盗窃了录音机，

r：作案时间发生在午夜前；s：乙的证词正确

t：午夜时屋里灯光灭了。

直接证明法举例二

例 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我就有课. 若有课，今天必备课. 我今天下午没备课. 所以，

明天不是星期一和星期三.

解 设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我有课，s：我备课

推理的形式结构为

前提：$(p\vee q)\rightarrow r$, $r\rightarrow s$, $\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

直接证明法 (续)

证明

① $r \rightarrow s$ 前提引入

② $\neg s$ 前提引入

③ $\neg r$ ①②拒取式

④ $(p \vee q) \rightarrow r$ 前提引入

⑤ $\neg(p \vee q)$ ③④拒取式

⑥ $\neg p \wedge \neg q$ ⑤置换

间接推理之一——附加前提证明法

欲证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：$C \to B$

等价地证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

结论：B

理由：
$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to (C \to B)$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B)$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \vee B$$
$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \to B$$

附加前提证明法 (续)

例 构造下面推理的证明:

2是素数或合数. 若2是素数，则$\sqrt{2}$是无理数. 若$\sqrt{2}$是无理数，则4不是素数. 所以，如果4是素数，则2是合数.

用附加前提证明法构造证明

解 设 p：2是素数，q：2是合数，

r：$\sqrt{2}$是无理数，s：4是素数

推理的形式结构

前提：$p \vee q$, $p \rightarrow r$, $r \rightarrow \neg s$

结论：$s \rightarrow q$

附加前提证明法 (续)

证明

① s 附加前提引入

② $p\to r$ 前提引入

③ $r\to\neg s$ 前提引入

④ $p\to\neg s$ ②③假言三段论

⑤ $\neg p$ ①④拒取式

⑥ $p\vee q$ 前提引入

⑦ q ⑤⑥析取三段论

请用直接证明法证明之

间接推理之二——归谬法(反证法)

欲证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

将$\neg B$加入前提，若推出矛盾，则得证推理正确.

理由:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

括号内部为矛盾式当且仅当 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B)$为重言式

归谬法 (续)

例 构造下面推理的证明

前提：$\neg(p\wedge q)\vee r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

证明（用归缪法）

① q 结论否定引入

② $r\rightarrow s$ 前提引入

③ $\neg s$ 前提引入

④ $\neg r$ ②③拒取式

归谬法 (续)

⑤ $\neg(p\wedge q)\vee r$	前提引入
⑥ $\neg(p\wedge q)$	④⑤析取三段论
⑦ $\neg p\vee\neg q$	⑥置换
⑧ $\neg p$	①⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p\wedge p$	⑧⑨合取

本小节学习目的：

1、理解“前提和有效结论”的概念。

2、学会用直接推理和间接推理（附加前提法和归谬法）进行推理。