



离散数学

2025年9月

联系方式

教师：

姓 名：袁堃

手 机：13914766289

E-mail: kyuan@seu.edu.cn

助教：

姓名：王宇轩

手机：15957400971

E-mail: 1952786494@qq.com

姓 名：张杰

手 机：18014340825

E-mail: 3315612351@qq.com

QQ群：2025离散数学
(824405472)



2025离散数学

群号: 824405472

复制



扫一扫二维码，加入群聊

考核方式

- 期末考试（闭卷）
- 平时作业（为了便于统计和批改，作业大部分是在QQ课程群在线提交）

教材与教学参考书

■ 教材：

- 耿素云、屈婉玲、张立昂，离散数学（第六版），清华大学出版社，**2021**.

■ 教学参考书：

- 屈婉玲、耿素云、张立昂，离散数学题解（第六版），清华大学出版社.
- **Kenneth H. Rosen**, 离散数学及其应用, 机械工业出版社, **2020**.

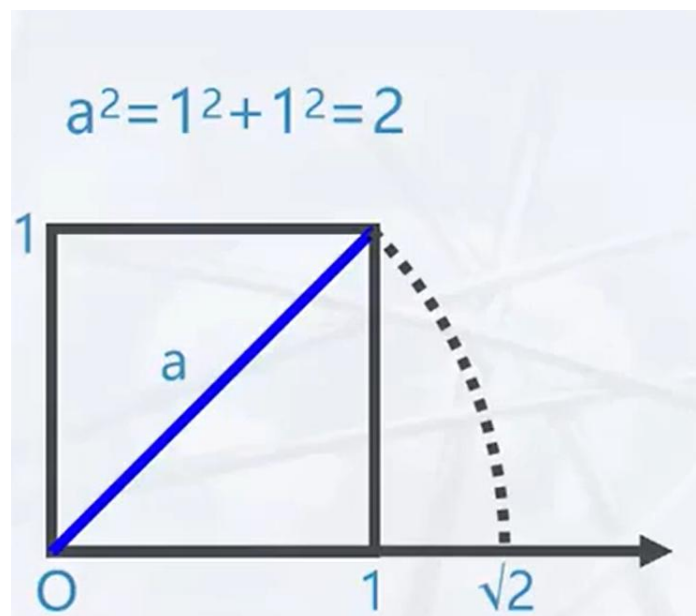
“离散”数学

- ❖ 离散数学 **Discrete Mathematics**;
- ❖ 关于“离散结构”的数学;
- ❖ 离散的含义：分离的、不连续的
separate, discontinuous
- ❖ 研究分立的对象之间所形成的关系;
- ❖ 离散结构源于人们对时间相继性的感知和原子性世界的经验。

连续VS离散

- 连续：通俗地说就是无限可分。
- “一尺之椎，日取其半，万世不竭。”《庄子》
- 物质世界本质是连续？还是离散？争论不休
.....时间和空间是连续的还是离散的？
- 在理性世界，从自然数有理数到实数，无限的连续已经被创造了。

第一次数学危机：无理数



第一次数学危机的解决及启示

最后在BC370由欧多克斯通过给比例（即分数）下新定义的方法所解决。

和1872年狄德金所给出的无理数的现代解释基本一致

第一次数学危机给我们的启示：

直觉和经验不一定靠得住，**推理和证明才是可靠的。**

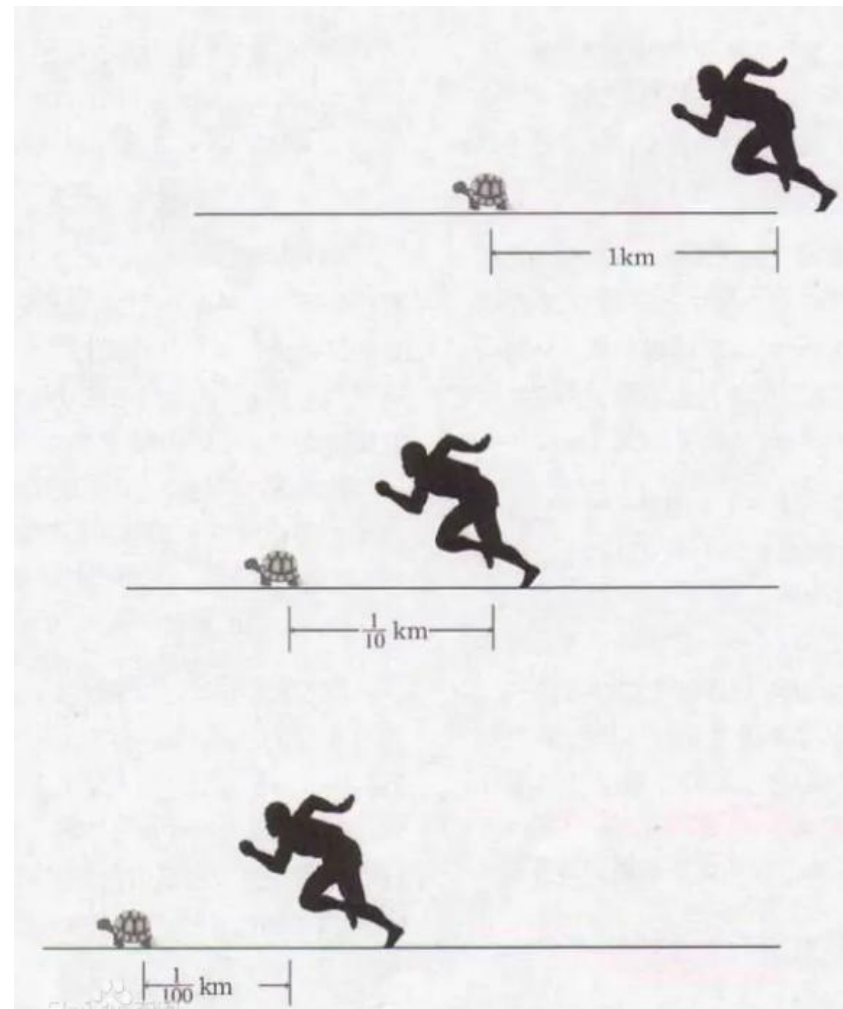
■ 第二次数学危机：无穷。

危机的潜伏：芝诺Zeno of Elea四个悖论
(~BC450)

反对空间时间无限可分的两个悖论：运动不存在和**阿基里斯追不上乌龟**；

反对空间时间有限可分的两个悖论：飞矢不动和游行队伍。

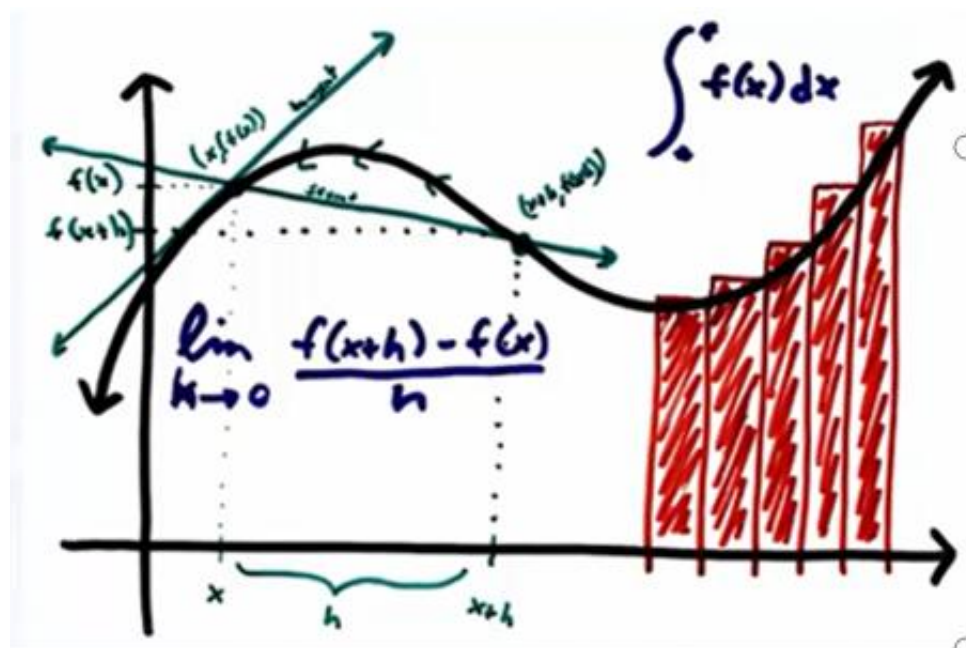
古希腊人已经认识到无穷小和“很小很小”的矛盾



■ 第二次数学危机：无穷。

微积分里的“无穷小”是什么？

- › 无穷小量究竟是不是零？两种答案都会导致矛盾。
- › 牛顿对它曾作过三种不同解释，但始终无法解决上述矛盾：
 - 1669年说它是一种常量；
 - 1671年又说它是一个趋于零的变量；
 - 1676年又说它是“两个正在消逝的量的最终比”。
- › 大主教贝克莱讽刺它是“消失了的量的鬼魂”



- 第二次数学危机：无穷。

无穷级数的求和

格兰迪级数(Grandi's series, 1703)

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots = ?$$

$$= 1/2 ?$$

$$= 1 ?$$

$$= 0 ?$$

第二次数学危机的解决：1820~1870

- 从波尔查诺、阿贝尔、柯西、狄利赫里等人对**连续**的定义和**极限论**的开始。
- 到维尔斯特拉斯、狄德金、康托等人独立地建立了实数理论，在**实数理论上建立极限论的基础**。

第二次数学危机的结果和启示

- 数学分析建立在实数理论的严格基础上；
- 数理逻辑和集合论诞生，由此把数学的无矛盾性问题归结为实数论的无矛盾性问题；
- 整个数学看来具备了严格的形式化的基础；
- 再次提醒人们直觉和经验是不可靠的，无限、无穷都已超出了人类的经验范围。

第三次数学危机：悖论

1901年5月，罗素Russell发现的悖论沉重打击了集合论和逻辑基础。

.....理发师困境

.....说谎的克利特人

悖论动摇了整个数学的根本

罗素提出类型论，策梅罗Zermelo提出公理化集合论来对朴素集合论进行限制，解决悖论问题。

形式系统

- 第三次数学危机解决以后，希尔伯特的形式化思想占统治地位；
- 数学建立在公理化集合论和数理逻辑两块基石上；
- 整个数学的基本理论是自然数的算术和实数理论，它们都已经公理化；
- 如果能证明形式系统的一致性和完备性，那么整个数学基础就比较牢靠了。

形式化的极限？

- 1928年，希尔伯特提出四个问题，希望能够把整个数学理论系统形式化，并证明无矛盾；
- 1930年，哥德尔宣布了不完全性定理，这是一个具有哲学意义的普适定理；
- 无矛盾的系统不完备，完备的系统却是存在自相矛盾的；
- 人们认识到对整个数学形式化的努力注定是要失败的。

“完美”的数学终结于“自我相关”

“自我相关”的逻辑悖论

下面这句话是错的

上面这句话是对的

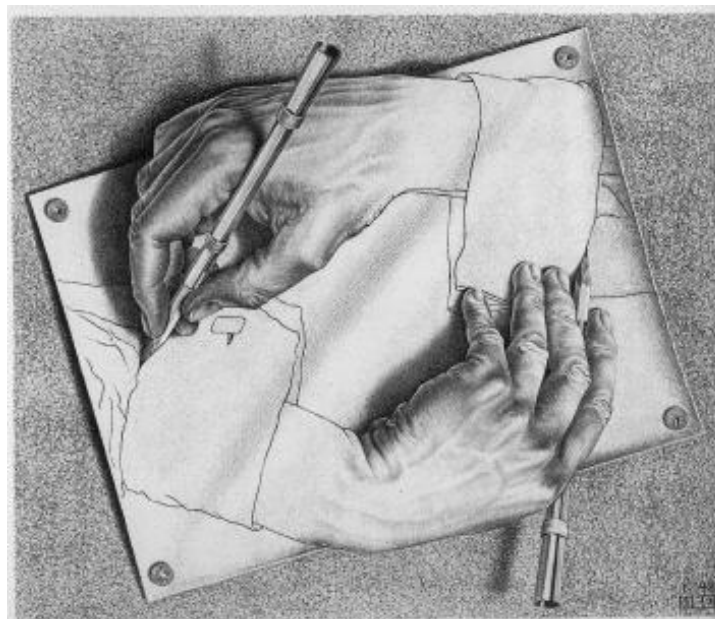
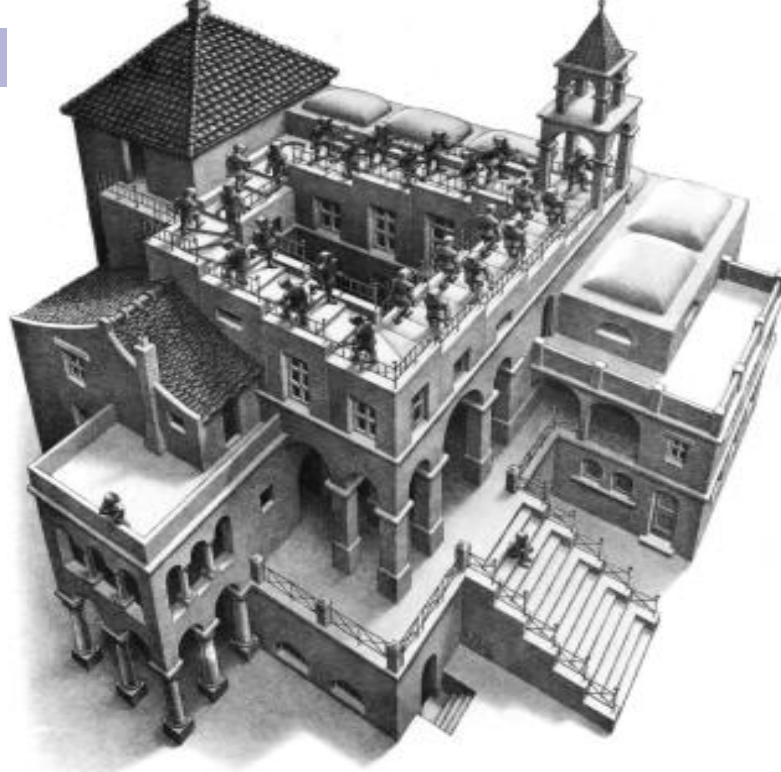
哥德尔不完全性定理也运用“自我相关”

证明了一切包含了自然数定义的形式系统，

要么**不完备**（不能证明所有真理），要么不**一致**（包含自相矛盾）。

“自我相关，层次缠绕”的怪圈无处不在

埃舍尔的版画



巴赫 J.S.Bach 《音乐的奉献Musical Offering》

卡农canon：一种**重复演奏**同一主题的音乐形式，通常用**不同的音部**来重复，每个音部都比前一个**延迟**一段时间。

主题中的每个音符都必须**巧妙**和延迟的音部中同一主题的其它音符**保持和谐**。

《音乐的奉献》里运用了一种特殊的卡农技巧构成自我相关的怪圈，

用不同音部首尾相接的变调使听众有一种不断增调的感觉。



- 哥德尔、艾舍尔、巴赫：集异璧之大成
原作名: Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid
作者: [\[美\] 侯世达](#)
译者: [郭维德 等](#)
出版社: 商务印书馆
出版年: 1996-8
页数: 1053
定价: 69.90元
ISBN: 9787100013239



集异璧 - GEB, 是数学家[哥德尔](#)、版画家[艾舍尔](#)、音乐家[巴赫](#)三个名字的前缀。本书是在英语世界中有极高评价的科普著作。曾获得[普利策文学奖](#)。它通过对哥德尔的数理逻辑，艾舍尔的版画和巴赫的音乐三者的综合阐述，引人入胜地介绍了[数理逻辑学](#)、可计算理论、[人工智能学](#)、语言学、遗传学、音乐、绘画的理论等方面，构思精巧、含义深刻、视野广阔、富于哲学韵味。本书中译本前后费时十余年，译者都是数学和哲学的专家，还得到原作者的直接参与，译文严谨通达，特别是在原作者的帮助下，把西方的文化典故和说法，尽可能转换为中国文化的典故和说法，使这本译本甚至可看作是一部新的创作，也是中外翻译史上的一个创举。

以有限把握无穷

- 人能理解的概念和调动的资源都是有限的
- 以少数的规则包含无限多的事实；从有限的推导抓住无限丰富的未知。
- **自我相关**，是一种在有限中包含无限的概念，一种以有限体现无限的过程；
- 如果把自我相关称作“递归”，大家就很熟悉。

以有限把握无穷


- 人类思维过程和认知概念中包含着大量的自我相关和层次缠绕；
- 自省、自指；
- 对逻辑的研究，对智能的模拟
(以逻辑研究逻辑，以智能模拟智能)
- 自我相关是产生思维 and 智能很重要的基础？
- 但，哥德尔不完全性定理指出自我相关恰恰就是限制形式系统的“幽灵”。

欢迎来到《离散数学》

- 尽管人类一思考，上帝就发笑；尽管人类在追求完美和追求真理的过程中可能会陷入“一条蛇想吞掉自己”的怪圈；
- 但，我们不必悲观，首先来学习一下我们人类已经取得辉煌成就；
- 欢迎大家来到《离散数学》。

主要内容

- 数理逻辑（第一、二章）
- 集合论（第三、四章）
- 图论（第五、六、七章，有重点讲）
- 组合分析初步（第八章，不讲）
- 抽象代数（第九章，略讲）
- 形式语言和自动机初步（第十章，不讲）

- 
- 离散数学是计算机科学的基础理论。
 - 关于离散结构的基础知识和逻辑思维的形式化是信息技术相关专业的基本功。
 - 离散数学的基本概念是理工科学生进行计算机类课程学习的重要基础。

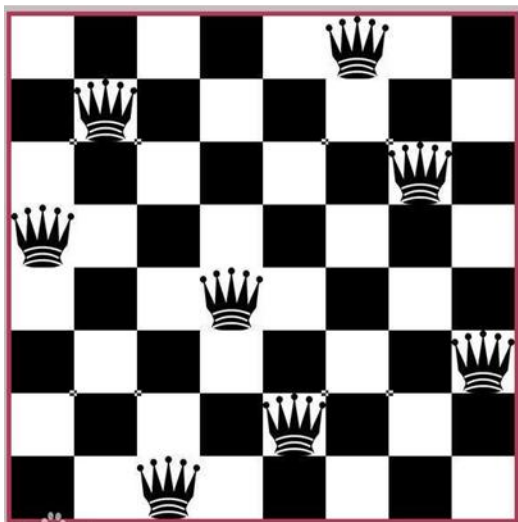
谁需要/可以学这门课程？

- 这是一门面向非计算机专业本科生的计算机理论基础课；
- 如果你的专业涉及到不少计算机类课程；
- 那么，本课程适合你。

课程的内容？

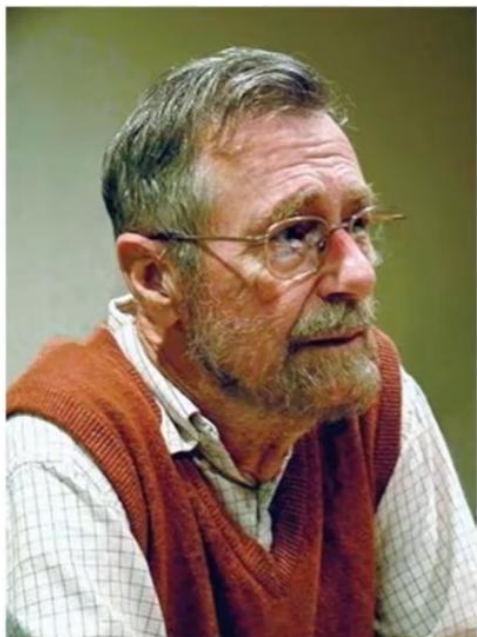
第一部分——数理逻辑：把啰嗦的推理过程写成简洁的公式。

学过数理逻辑你就可以建模解决8皇后问题、数独问题。你是否觉得汉语里面的“或”和数学里面的加法、汉语里面的“与”和数学里面的乘法很相似呢？



| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| R1 | | | 8 | | | | 2 | | |
| R2 | | 3 | | 8 | | 2 | | 6 | |
| R3 | 7 | | | | 9 | | | | 5 |
| R4 | | 5 | | | | | | 1 | |
| R5 | | | 4 | | | | 6 | | |
| R6 | | 2 | | | | | | 7 | |
| R7 | 4 | | | | 8 | | | | 6 |
| R8 | | 7 | | 1 | | 3 | | 9 | |
| R9 | | | 1 | | | | 8 | | |

Edsger Wybe Dijkstra 简介

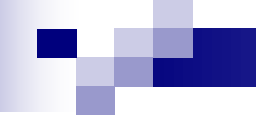


1972年图灵奖获得者


- ✓ 提出“goto有害论”；
- ✓ 提出信号量和PV原语；
- ✓ 解决了“哲学家聚餐”问题；
- ✓ 最短路径算法和银行家算法的创造者；
- ✓ 第一个Algol 60编译器的设计者和实现者；
- ✓ THE操作系统的设计者和开发者；

著名计算机科学家、图灵奖获得者E. W. Dijkstra曾经这样说：

“我现在年纪大了，搞了这么多年软件，错误不知犯了多少，现在觉悟了。我想，假如我早年在数理逻辑上好好下点功夫的话，我就不会犯这么多错误。不少东西逻辑学家早就说了，可我不知道。要是我能年轻20岁的话，就要回去学逻辑。”可见数理逻辑与计算机科学的关系非常密切。



正如著名的物理学家劳厄所说：“重要的不是获得知识，而是发展思维能力。教育是一切已学过的东西都遗忘的时候，剩下的就是思维能力，它可以长期起作用。”



第二部分——集合论：用集合和逻辑为基础来描述二元关系，并在此基础上重点分析等价关系、偏序关系。等价关系与“物以类聚，人以群分”？偏序关系与“长幼有序、等级森严”？

第三部分——图论：除了数据结构里面提到的图论，还有代数图论（引入各种矩阵）。

复杂动态网络环境下控制理论遇到的问题与挑战

陈关荣

顺便提及，图论、特别是有向图论是传统控制理论不太利用的数学工具。在复杂动态网络环境下去做控制理论，例如研究同步和稳定性问题，这些工具显得特别重要和有用——它们常常能够给出常规控制理论得不到的结果和判据[23]。

- [23] G. R. Chen and Z. S. Duan, Network synchronizability analysis: a graph-theoretic approach, Chaos, 18: 037102, 2008

A、B、C、D四人传球6次，从A开始，最终回到A手里，有多少种传法？

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^6 = \begin{pmatrix} 183 & 182 & 182 & 182 \\ 182 & 183 & 182 & 182 \\ 182 & 182 & 183 & 182 \\ 182 & 182 & 182 & 183 \end{pmatrix}$$

所以答案是183种。

如果你理解了图的邻接矩阵的定义，
这个题变得非常简单。

第四部分——抽象代数/近世代数：总觉得乘法和加法有点儿像，为什么？这里有答案。还会回答一个困扰你很久的问题，什么样的方程有解，其解又是什么呢？（此部分略降，只讲基本概念；此部分内容可以成为你学习通讯、密码学、网络安全技术的基础）

密码转换实例

$A = 0, B = 1, C = 2, \dots, Z = 25$


■ Bob要传一个消息给Alice:

WE WILL MEET AT MIDNIGHT

安全性差，平均13次猜测即可破译。

Example ($K = 11$):

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| W | E | W | I | L | L | M | E | E | T | A | T | M | I | D | N | I | G | H | T |
| 22 | 4 | 22 | 8 | 11 | 11 | 12 | 4 | 4 | 19 | 0 | 19 | 12 | 8 | 3 | 13 | 8 | 6 | 7 | 19 |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 7 | 15 | 7 | 19 | 22 | 22 | 23 | 15 | 15 | 4 | 11 | 4 | 23 | 19 | 14 | 24 | 19 | 17 | 18 | 4 |
| H | P | H | T | W | W | X | P | P | E | L | E | X | T | O | Y | T | R | S | E |



第五部分——形式语言与自动机：计算机的本质？

机器的能力有极限吗？人类的知识有边界吗？
（由于课时的限制，此部分不讲）

课程的难度和深度怎么样？

- 本课程的目标重点在于**基本概念的理解和掌握**，不涉及太多数学证明和解题技巧。
- 培养采用形式化方法分析问题，并能自觉运用**逻辑分析、结构层次分析和同构类比**等思想方法解决问题的能力。
- 也帮助你理解和欣赏像《名侦探柯南》、《I, Robot》等侦探类或者科幻类的影视作品。