

4.3 关系的性质

- 自反性
- 反自反性
- 对称性
- 反对称性
- 传递性

定义 (自反的)

设 $R \subseteq X \times X$, $(\forall x)(x \in X \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$, 则称 R 在 X 上是自反的。

Remark:

1. R 是 X 上的自反关系, R 的关系矩阵 M_R 和关系图有什么特点?

关系矩阵主对角线全为1;

关系图中每一个结点上都有自回路。

2. R 是 X 上的自反关系 $\Leftrightarrow I_X \subseteq R$

设 $X=\{1,2,3\}$, X 上的二元关系

$$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle\}$$

R 是自反的, 它的关系图、关系矩阵如下:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

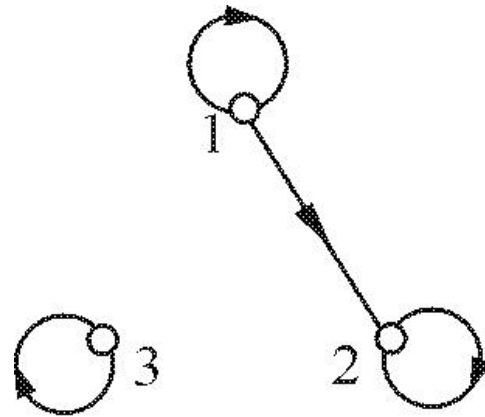


图 4.5

定义 (反自反的)

设 $R \subseteq X \times X$, $(\forall x)(x \in X \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$, 则称 R 在 X 上是反自反的。

Remark.

1. R 是 X 上的反自反关系, R 的关系矩阵和关系图有什么特点?

M_R 的主对角线全为 0; R 的关系图中每一个结点上都没有自回路。

2. R 是 X 上的反自反关系 $R \cap I_X = \emptyset$

设 $X=\{1,2,3\}$, X 上的二元关系 $R=\{<1,2>, <2,3>, <3,1>\}$, R 是反自反的, 它的关系图关系矩阵如下:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

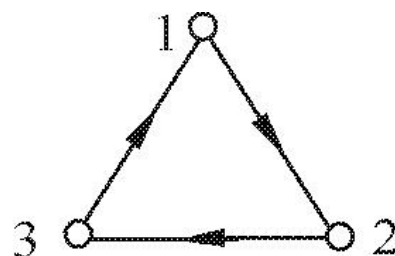


图 4.6

【例】 设 R 是实数集合,

$$> = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in R \wedge y \in R \wedge x > y \}$$

是实数集合上的大于关系。证明实数集合上的大于关系是反自反的。

证明: $\forall x \in R, x \not> x, \langle x, x \rangle \notin >$, 所以 $>$ 是反自反的。

【例】 设 $A=\{1,2,3\}$ ，定义 A 上的二元关系如下：

$$R=\{ \langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 1,3 \rangle \}$$

$$S=\{ \langle 1,3 \rangle \}$$

$$T=\{ \langle 1,1 \rangle \}$$

试说明 R ， S ， T 是否是 A 上的自反关系或反自反关系。

解：

R 是 A 上的自反关系，不是反自反关系。

S 是 A 上的反自反关系，不是自反关系。

T 不是 A 上的自反关系也不是 A 上的反自反关系。

定义（对称的）

设 $R \subseteq X \times X$,

$$(\forall x)(\forall y)(x \in X \wedge y \in X \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R),$$

则称 R 在 X 上是对称的。

Remark:

1. R 是 X 上的对称关系， R 的关系矩阵和关系图有什么特点？

关系矩阵 M_R 是对称阵。

关系图中，若两个不同的结点间有边，一定有方向相反的两条边。

2. R 是 X 上的对称关系 $\Leftrightarrow R = R^C$

设 $X=\{1,2,3\}$ ， X 上的二元关系 $R=\{<1,2>,<2,1>,<3,3>\}$ ， R 是对称的。它的关系图、关系矩阵如下：

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

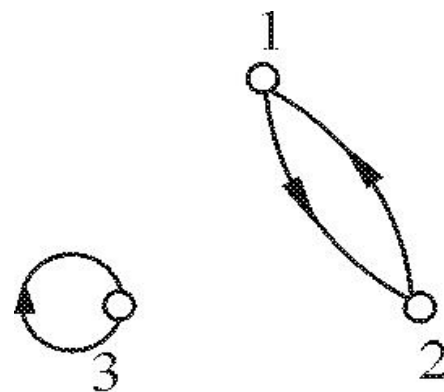


图 4.7

【例】设 $A=\{1,3,5,7\}$ ，定义 A 上的二元关系如下：

$$R=\{ \langle a,b \rangle | (a-b)/2 \text{ 是整数} \}$$

试证明 R 在 A 上是自反的和对称的。

证明：

自反的只需证明 $\forall a \in A, \langle a,a \rangle \in R$

对称的只需证明 $\forall a \in A, \forall b \in A$ ，若 $\langle a,b \rangle \in R$ ，则有 $\langle b,a \rangle \in R$

$\forall a \in A, (a-a)/2=0$ ，0是整数，所以 $\langle a,a \rangle \in R$ 。即 R 是自反的。

$\forall a \in A, \forall b \in A, \langle a,b \rangle \in R, (a-b)/2$ 是整数，因为整数的相反数也是整数，所以 $(b-a)/2=-(a-b)/2$ 是整数， $\langle b,a \rangle \in R$ 。即 R 是对称的。

定义（反对称的）

设 $R \subseteq X \times X$,

$(\forall x)(\forall y)(x \in X \wedge y \in X \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge (x \neq y) \rightarrow \langle y, x \rangle \notin R)$ 则称 R 在 X 上是反对称的。

Remark:

1. R 是 X 上的反对称关系，则其关系矩阵和关系图有下列特点：

M_R 中以主对角线为轴的对称位置上不能同时为1(主对角线除外)。

在 R 的关系图中每两个不同的结点间不能有方向相反的两条边。

2. R 是 X 上的反对称关系 $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_X$

设 $X = \{ 1, 2, 3 \}$, X 上的二元关系 $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$, R 是反对称的。它的关系图、关系矩阵如下:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

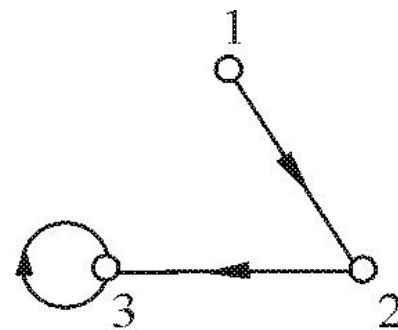


图 4. 8

【例】 设 $A=\{1,2,3\}$ ，定义 A 上的二元关系如下：
 $R=\{ \langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle \}$

$$S=\{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle \}$$

$$T=\{ \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle \}$$

$$U=\{ \langle 1,3 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle \}$$

试说明 R ， S ， T ， U 是否是 A 上的对称关系和反对称关系。

解：

R 是 A 上的对称关系，也是 A 上的反对称关系。

S 是 A 上的对称关系， S 不是 A 上的反对称关系。

T 不是 A 上的对称关系， T 是 A 上的反对称关系。

U 不是 A 上的对称关系，也不是 A 上的反对称关系。

定义（传递的）

设 $R \subseteq X \times X$,

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$$

则称 R 在 X 上是传递的。

R 是传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

【例】设 R 是实数集合，

$$S = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in R \wedge y \in R \wedge x = y \}$$

是实数集合上的等于关系。证明实数集合上的等于关系是传递的。

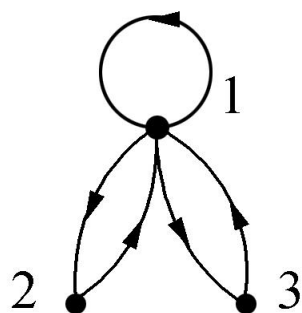
证明： $\forall x \in R, \forall y \in R, \forall z \in R,$
 $\langle x, y \rangle \in S$ 且 $\langle y, z \rangle \in S$ ，由 S 的定义有 $x = y$ 和 $y = z$ ，
由实数相等的概念得 $x = z$ 。

再根据 S 的定义， $\langle x, z \rangle \in S$ 。

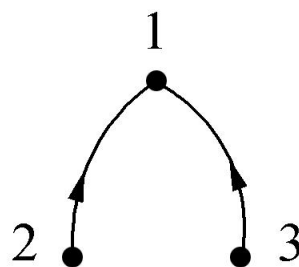
故实数集合上的等于关系 S 是传递的。

实例

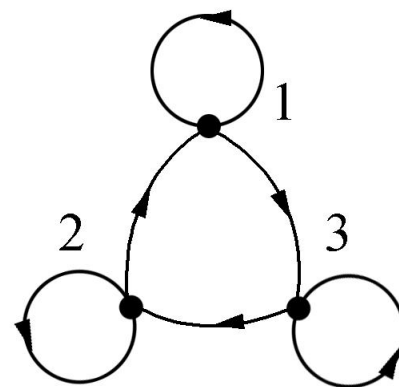
例 判断下图中关系的性质, 并说明理由.



(a)



(b)



(c)

(a)不自反也不反自反; 对称, 不反对称; 不传递.

(b)反自反, 不是自反的; 反对称, 不是对称的;
是传递的.

(c)自反, 不反自反; 反对称, 不是对称; 不传递.

- 【例】 设 R, S 是 X 上的二元关系, 证明
- (1) 若 R, S 是自反的, 则 $R \cup S$ 和 $R \cap S$ 是自反的。
 - (2) 若 R, S 是对称的, 则 $R \cup S$ 和 $R \cap S$ 是对称的。
 - (3) 若 R, S 是传递的, 则 $R \cap S$ 也是传递的。

证明:

(1) 设 R, S 是自反的,

$$I_X \subseteq R, I_X \subseteq S,$$

$$\text{则 } I_X \subseteq R \cup S, I_X \subseteq R \cap S,$$

所以 $R \cup S$ 和 $R \cap S$ 也是自反的。

(2) 设 R, S 是对称的,

$$R = R^C, S = S^C,$$

则 $R \cup S = R^C \cup S^C = (R \cap S)^C$, $R \cap S = R^C \cap S^C = (R \cup S)^C$,
所以 $R \cup S$ 和 $R \cap S$ 也是对称的。

(3) 设 R, S 是传递的,

$$R \circ R \subseteq R, S \circ S \subseteq S,$$

$$\begin{aligned} (R \cap S) \circ (R \cap S) &\subseteq (R \circ R) \cap (R \circ S) \cap (S \circ R) \cap (S \circ S) \\ &\subseteq (R \circ R) \cap (S \circ S) \subseteq R \cap S \end{aligned}$$

$$\text{即 } (R \cap S) \circ (R \cap S) \subseteq R \cap S,$$

所以 $R \cap S$ 是传递的。

关系性质总结（关系矩阵和关系图的特点）

	自反	反自反	对称	反对称	传递
表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \emptyset$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R^\circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij}=1$, 且 $i \neq j$, 则 $r_{ji}=0$	对 M^2 中1所在位置, M 中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边, 是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边, 是一条有向边(无双向边)	如果顶点 x_i 连通到 x_k , 则从 x_i 到 x_k 有边

关系性质总结（集合表示上的特点）

设 R 为 A 上的关系, 则

- (1) R 在 A 上**自反**当且仅当 $I_A \subseteq R$
- (2) R 在 A 上**反自反**当且仅当 $R \cap I_A = \emptyset$
- (3) R 在 A 上**对称**当且仅当 $R = R^{-1}$
- (4) R 在 A 上**反对称**当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
- (5) R 在 A 上**传递**当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

自反性证明

证明模式 证明 R 在 A 上自反
任取 x ,

$x \in A$	\Rightarrow	\Rightarrow	$\langle x, x \rangle \in R$
前提		推理过程		结论

例 证明若 $I_A \subseteq R$, 则 R 在 A 上自反.

证 任取 x ,

$$x \in A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$$

因此 R 在 A 上是自反的.

对称性证明

证明模式 证明 R 在 A 上对称

任取 $\langle x, y \rangle$

$\langle x, y \rangle \in R$	\Rightarrow \Rightarrow	$\langle y, x \rangle \in R$
前提	推理过程	结论

例 证明若 $R=R^{-1}$, 则 R 在 A 上对称.

证 任取 $\langle x, y \rangle$

$$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R^{-1} \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R$$

因此 R 在 A 上是对称的.

反对称性证明

证明模式 证明 R 在 A 上反对称

任取 $\langle x, y \rangle$

$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \Rightarrow$	$\dots\dots\dots \Rightarrow$	$x=y$
前提	推理过程	结论

例6 证明若 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$, 则 R 在 A 上反对称.

证 任取 $\langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in R^{-1} \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \cap R^{-1} \Rightarrow \langle x, y \rangle \in I_A \Rightarrow x=y \end{aligned}$$

因此 R 在 A 上是反对称的.

传递性证明

证明模式 证明 R 在 A 上传递

任取 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle$

$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R$	\Rightarrow	\Rightarrow	$\langle x, z \rangle \in R$
前提		推理过程		结论

例7 证明若 $R \circ R \subseteq R$, 则 R 在 A 上传递.

证 任取 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle$

$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \circ R \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$

因此 R 在 A 上是传递的.

运算与性质的关系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

本小节学习目标

- 理解掌握关系五种性质（自反、反自反、对称、反对称、传递）的定义；
- 会根据关系矩阵、关系图、集合表示等来判定关系的性质。

4.4 关系的闭包（不讲）

- 闭包定义
- 闭包的构造方法
 - 集合表示
 - 矩阵表示
 - 图表示
- 闭包的性质

闭包定义

定义 设 R 是非空集合 A 上的关系, R 的**自反** (**对称或传递**) **闭包**是 A 上的关系 R' ,使得 R' 满足以下条件:

- (1) R' 是自反的 (对称的或传递的)
- (2) $R \subseteq R'$
- (3) 对 A 上任何包含 R 的自反 (对称或传递) 关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.

一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$, 对称闭包记作 $s(R)$, 传递闭包记作 $t(R)$.

闭包的构造方法

定理1 设 R 为 A 上的关系, 则有

$$(1) r(R) = R \cup R^0$$

$$(2) s(R) = R \cup R^{-1}$$

$$(3) t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

说明:

- 对于有穷集合 A ($|A|=n$) 上的关系, (3)中的并最多不超过 R^n .
- 若 R 是自反的, 则 $r(R)=R$; 若 R 是对称的, 则 $s(R)=R$; 若 R 是传递的, 则 $t(R)=R$.

闭包的构造方法（续）

设关系 R , $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系矩阵分别为 M , M_r , M_s 和 M_t , 则

$$M_r = M + E$$

$$M_s = M + M'$$

$$M_t = M + M^2 + M^3 + \dots$$

E 是和 M 同阶的单位矩阵, M' 是 M 的转置矩阵.
注意在上述等式中矩阵的元素相加时使用逻辑加.

闭包的构造方法（续）

设关系 R , $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图分别记为 G , G_r , G_s , G_t , 则 G_r , G_s , G_t 的顶点集与 G 的顶点集相等. 除了 G 的边以外, 以下述方法添加新边:

考察 G 的每个顶点, 如果没有环就加上一个环, 最终得到 G_r . 考察 G 的每条边, 如果有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i \neq j$, 则在 G 中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边, 最终得到 G_s . 考察 G 的每个顶点 x_i , 找从 x_i 出发的每一条路径, 如果从 x_i 到路径中任何结点 x_j 没有边, 就加上这条边. 当检查完所有的顶点后就得到图 G_t .

实例

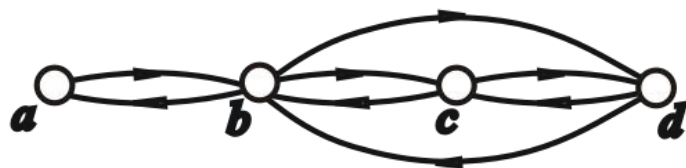
例1 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>, <b,a>, <b,c>, <c,d>, <d,b>\}$, R 和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图如下图所示.



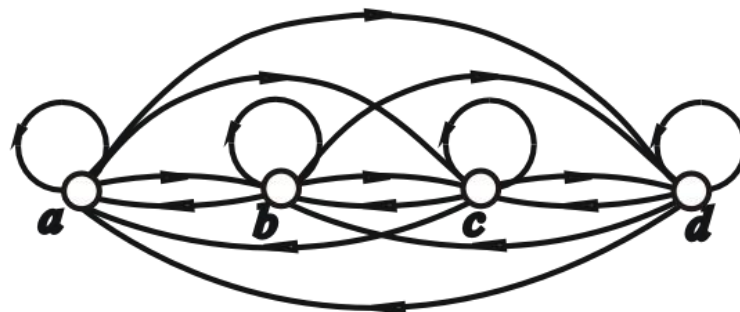
R



$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$