Quadratic Penalty Method

Im Rahmen des Projekts zu „Numerical Optimization“ möchten wir uns mit der Quadratic Penalty Method beschäftigen. Diese fügt ein Vielfaches des Quadrates der Verletzung von jeder Nebenbedingung zu der Zielfunktion hinzu. Diese Methode wird aufgrund ihrer intuitiven Ausführung häufig in der Praxis verwendet, obgleich es einige Nachteile gibt. Folgender Algorithmus beschreibt die Methode:

Input: $\mu_0 > 0$, nonnegative sequence $\{\tau_k\}$ with $\tau_k \to 0$, starting point x^s_0
for $k = 0, 1, 2, \ldots$
  Find an approximate minimizer x_k of $Q(\cdot; \mu_k)$, starting at x^s_k and
  terminating when $\|\nabla_x Q(x_k; \mu_k)\| \le \tau_k$;
    if final convergence test satisfied
      stop with approximate solution x_k;
    end if
    Choose new penalty parameter $\mu_{k+1} > \mu_k$;
    Choose new starting point x^s_{k+1};
end for

In einer Einleitung stellen wir die allgemeine Penalty Method vor und gehen dabei insbesondere auf die Vor- und Nachteile der Quadratic Penalty Method ein.
Im Hauptteil untersuchen wir ihre Konvergenzrate, Präzision, Robustheit und allgemeine Performance mit Hilfe der Rastrigin- und der Ackley-Testfunktion im Vergleich zum CasADi IPOPT-Löser. Die Implementation des Algorithmus erfolgt auf Matlab.
Zum Schluss fassen wir unsere Ergebnisse zusammen und geben einen Ausblick auf weitere Methoden wie die Lagrangian Method, welche bspw. die schlechte Konditionierung der Quadratic Penalty Method vermeiden.

Literatur:

[1] W. Sun and Y. Yuan, Optimization Theory and Methods. Nonlinear Programming, New York 2006.

[2] J. Nocedal and S. J. Wright, Numerical Optimization, New York 1999.

[3] S. Mirjalili and A. Lewis, Novel frameworks for creating robust multi-objective benchmark problems, in: Information Sciences 300 (2015), pp. 158-192.

[4] M. Diehl, Numerical Optimization, Lecture Notes, Albert-Ludwigs-Universitaet Freiburg, 2020.

[5] R. Courant, Variational methods for the solution of problems with equilibrium and vibration, Bulletin of the American Mathematical Society 49 (1943), pp. 1-23.

[6] N. I. M. Gould, On the convergence of a sequential penalty function method for constrained minimization, SIAM Journal on Numerical Analysis 6 (1986), pp. 357-372.

[7] N. I. M. Gould, On the accurate determination of search directions for simple differentiable penalty functions, I. M. A. Journal on Numerical Analysis 6 (1986), pp. 357-372.

[8] H. Y. Benson, A. Sen, D. F. Shanno and R. J. Vanderbei, Interior-point algorithms, penalty methods and equilibrium problems, Technical Report ORFE-03-02, Operations Research and Financial Engineering, Princeton University, 2003.