

Initiation à la recherche : "THE RATTLEBACK REVISITED"

Sylvain Finot

11 avril 2017

Dans ce document, nous allons tenter d'expliquer au mieux l'étude du rattleback menée par William Case et Sahar Jalal.

Leur article, *"The rattleback revisited"*, paru dans *The American Journal of Physics* en 2014 traite du mouvement surprenant du rattleback. Bien que de nombreuses études aient été réalisées sur le rattleback, les auteurs mentionnent le fait que leur approche est beaucoup plus directe que celles déjà existantes au moment de la publication.

Je vais donc essayer de traiter au mieux les points évoqués dans l'article et de synthétiser ce que j'ai compris avec mon niveau actuel de physique (3ème année de licence)

I INTRODUCTION

Un rattleback, aussi appelé anagyre ou "Celtic stone", est un objet généralement en forme de canoë, qui a la particularité d'avoir un sens de rotation stable et un sens instable autour de l'axe vertical.

Autrement dit, si on le met en rotation dans le "bon" sens, le mouvement continue jusqu'à immobilisation due aux forces de frottement. En revanche, si on le met en rotation dans le "mauvais" sens, très vite, l'objet oscille violemment ("rattle"), s'arrête, puis repart en sens inverse (i.e, le "bon" sens). Autre particularité, si on fait osciller le rattleback selon son petit axe (l'axe "pitching" Figure 1), il entre en rotation dans le bon sens de rotation.

Cet objet, par son mouvement paradoxal, est parfois retrouvé comme accessoire de magicien. Il a également fasciné grand nombre de physiciens et de mathématiciens. Les premières publications à ce sujet datent de 1896 par Gilbert Walker.

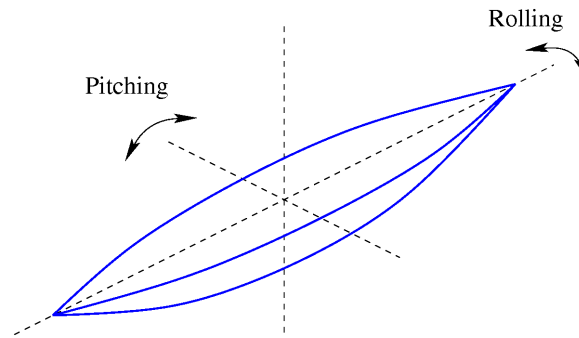


FIGURE 1 – Représentation simpliste d'un rattleback

La plupart des publications actuelles (XXI^e siècle) se basent sur les travaux de Sir Hermann Bondi, "The Rigid Body Dynamics of Unidirectional Spin" de 1986.

I.1 Un problème de symétrie.

Bien que le mouvement du rattleback soit surprenant et fascinant, il n'y a rien de magique dans cet objet. Ses propriétés sont dues à un problème de symétrie. En effet, le rattleback est un objet asymétrique.

Il existe deux manières de concevoir un rattleback : on peut décider de prendre une répartition de masse homogène, et dans ce cas, on brise la symétrie en modifiant le volume. On peut aussi choisir de conserver les symétries du volume et de "cacher" l'asymétrie en appliquant une répartition inhomogène de la masse avec par exemple des cavités. L'étude faite ici concerne le cas de répartition de masse homogène.

I.2 Démarche de l'étude

Afin de ne pas perdre le lecteur, je trouve important d'annoncer le plan de l'étude réalisée dans l'article.

Le problème étant complexe, il est judicieux de découper l'analyse. La première partie consiste à étudier comment, à partir de rotation autour de l'axe vertical, le rattleback se met à osciller. Ensuite, les auteurs s'intéressent au cas contraire, c'est-à-dire, comment à partir d'oscillations le rattleback passe-t-il en rotation.

C'est en réunissant les résultats des deux parties que l'on obtient une réponse relativement complète au problème.

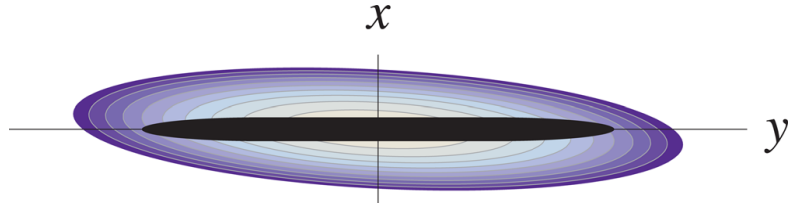
II OSCILLATIONS

Dans cette première partie de l'étude, sans doute la plus complexe, on considère que le rattleback est initialement en rotation selon l'axe vertical sans aucune oscillation. On cherche alors à expliquer pourquoi et comment ce mouvement se transforme en oscillation. En ce qui concerne l'aspect calculs, il faudra tenir compte du fait que le référentiel du centre de masse est en rotation par rapport au référentiel du laboratoire.

Le repère utilisé a pour origine le centre de masse et comme axes, les axes de

symétrie (en terme de distribution de masse).

FIGURE 2 – Le rattleback vu de dessus. La répartition de masse ne respecte pas la symétrie de la forme.



Crédit : Case & Jalal

L'étude commence en s'intéressant au point de contact entre le rattleback et le support. On indique cette position par le vecteur $\vec{r} = (x, y, z)$. Après calculs, et en supposant que x et y ne sont pas trop éloignés de l'origine, on peut trouver une expression de la composante z . Cette équation semble être tirée des travaux d'Hermann Bondi. Il s'agit d'un développement obtenu à partir de l'équation d'un ellipsoïde. Les paramètres de cette équation sont décrits plus bas.

$$z = a \left[1 - \frac{1}{2}p \left(\frac{x}{a} \right)^2 - q \frac{xy}{a^2} - \frac{1}{2}s \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right] \quad (1)$$

On définit également le vecteur \vec{u} qui est le vecteur unitaire normal à la surface, et qui est donc constant dans le référentiel du laboratoire. Concrètement, il s'agit "simplement" du vecteur unitaire définissant l'axe vertical dans le référentiel du laboratoire.

En exprimant ce vecteur dans le référentiel du centre de masse, on obtient l'expression suivante :

$$\vec{u} = - \left(\frac{px + qy}{a}, \frac{qx + sy}{a}, 1 \right) \quad (2)$$

Où :

- p courbure selon x (sans dimension)
- s courbure selon y (sans dimension)
- a distance entre le centre de masse et le point le plus bas du rattleback au repos
- q facteur représentant l'asymétrie de l'objet (sans dimension)

L'expression est un peu compliquée, en effet le rattleback étant plus ou moins un demi-ellipsoïde, il n'est pas choquant de retrouver ces paramètres dans l'expression de \vec{u} . Une piste sur l'obtention de ce vecteur est détaillée sous-section V.1

Par la suite, en utilisant la formule de Bour (3), et disant que \vec{u} est constant dans le référentiel du laboratoire (4), on peut trouver une expression de $\vec{\omega}$ (Calculs détaillés sous-section V.2)

$$\begin{array}{lcl}
\frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{\vec{A}} + \vec{\omega} \times \vec{A} & (3) & \\
\frac{d\vec{u}}{dt} = 0 & (4) & \vec{\omega} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} q\dot{x} + s\dot{y} - n(px + qy) \\ -p\dot{x} + q\dot{y} - n(qx + sy) \\ -na \end{pmatrix} \quad (5)
\end{array}$$

On peut alors trouver une expression de la vitesse, en effet : $\vec{v} = -\vec{r} \times \vec{\omega}$.

Remarques :

1. Pour garder uniquement les termes du 1er ordre, cela revient à prendre $\vec{r} = (x, y, a)$ puisque $z = a$ au premier ordre.
2. Si l'on veut être plus précis, la formule de Bour (3) s'écrit de la manière suivante :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{(R)} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{(R')} + \vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \vec{A}$$

Où R est le référentiel dit "fixe" (galiléen), R' le référentiel mobile et $\vec{\Omega}_{(R'/R)}$ le vecteur caractérisant la rotation entre R et R'.

À partir de ce stade, la procédure devient plus "classique". On effectue un bilan des forces.

En appliquant la deuxième loi de Newton :

$$\begin{aligned}
\Sigma \vec{F} &= m\vec{a} \\
\iff \vec{F}_c + \vec{P} &= m \frac{d\vec{v}}{dt}
\end{aligned}$$

Où encore :

$$\iff \vec{F}_c - mg\vec{u} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

En prenant le produit vectoriel de l'expression ci-dessus avec \vec{r} on obtient :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + g\vec{r} \times \vec{u}) \quad (6)$$

Mais en utilisant la formule de Bour (3), on peut également obtenir :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Ainsi, on obtient

$$m(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + g\vec{r} \times \vec{u}) = \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (7)$$

On a alors deux expressions de $d\vec{L}/dt$.

En calculant les deux termes, on obtient deux équations différentielles (couplées) correspondant aux égalités des composantes x et y des deux termes.

La composante z de $d\vec{L}/dt$ étant égale à 0 au premier ordre, on n'obtient pas d'équation.

Les auteurs ont donc réussi à obtenir des équations du mouvement.

Après un peu de mise en forme :

$$(q\ddot{x} + s\ddot{y})\alpha - n(p\dot{x} + q\dot{y})(\alpha + \beta - \gamma) + n\dot{x} = \frac{g}{a}(-y(1-s) + qx) \quad (8)$$

$$-(p\ddot{x} + q\ddot{y})\alpha - n(q\dot{x} + s\dot{y})(\alpha + \beta - \gamma) + n\dot{y} = \frac{g}{a}(x(1-p) - qy) \quad (9)$$

Où les paramètres α, β, γ sont des paramètres sans dimension ayant pour expressions :

$$\alpha = \frac{I_x}{ma^2} + 1 \quad \beta = \frac{I_y}{ma^2} + 1 \quad \gamma = \frac{I_z}{ma^2}$$

Avec I_x, I_y, I_z les moments d'inertie du solide.

Ces équations étant assez fastidieuses à obtenir, on peut contrôler qu'elles sont cohérentes d'un point de vue dimensionnel (sous-section V.4).

Concernant la résolution, dans un premier temps les auteurs de l'article considèrent que le rattleback est au repos et qu'il ne possède pas d'asymétrie. (i.e $q = n = 0$). Cela a pour effet de découpler les équations. On peut alors les résoudre plus simplement pour trouver :

(résolution sous-section V.5)

$$\Omega_x^2 = \frac{g(1-s)}{as\alpha} \quad (10)$$

$$\Omega_y^2 = \frac{g(1-p)}{ap\alpha} \quad (11)$$

Par la suite, on reprend les équations différentielles en considérant l'asymétrie et la rotation. Le point le plus important pour les auteurs n'est pas la précision sur les pulsations, mais de mettre en évidence les termes qui déstabilisent les oscillations.

Cette partie semble être relativement compliquée, après beaucoup de calculs (non détaillés dans l'article), les auteurs arrivent à deux résultats :

III ÉNERGIE TOTALE

Dans la partie précédente, on a vu que la rotation autour de l'axe z entraîne des oscillations autour des axes y et x (pitching et rolling sur Figure 1).

Simplement en tenant compte du fait que l'énergie du système est conservée ou éventuellement dissipée par frottement pour tenir compte de la réalité, l'énergie d'oscillation provient donc de l'énergie de rotation.

À terme, toute l'énergie de rotation est convertie en énergie d'oscillation. Le rattleback a donc cessé sa rotation autour de z et n'est plus qu'en oscillation.

$$E_{rot} + E_x + E_y = cst \quad (12)$$

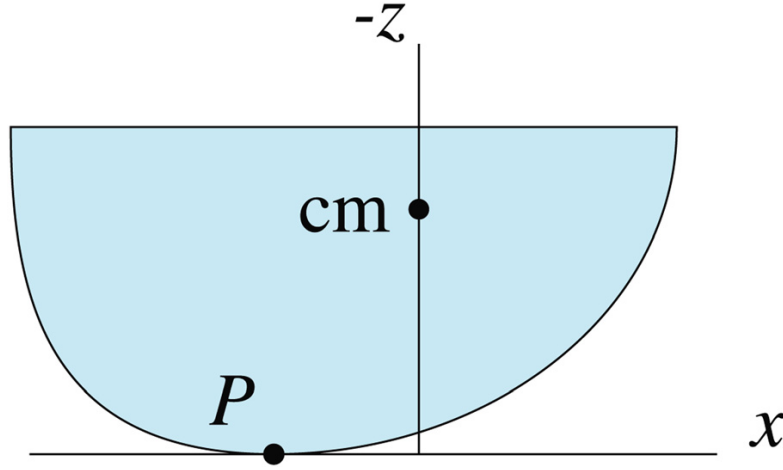


FIGURE 3 – Vu en coupe du rattleback pendant une oscillation autour de l'axe x
Crédit : Case & Jalal

Avec les expressions obtenues par les auteurs, on peut montrer que l'énergie est essentiellement convertie en oscillation autour de x . Ce qui nous amène à la partie suivante de l'analyse.

IV ROTATION ENGENDRÉE PAR DES OSCILLATIONS

Expliquer la rotation engendrée par des oscillations est plus simple que considérer l'inversement du sens de rotation.

Pour expliquer ce phénomène, il faut considérer un mouvement d'oscillation autour de l'axe x , et aucune rotation autour de l'axe z . Le centre de masse n'ayant pas la même abscisse selon les x , le poids de celui-ci crée un couple au point de contact. Voir figure 3. Ce couple tend à mettre en rotation le rattleback selon l'axe y .

L'expression de ce couple au point P est donnée par :

$$\frac{dL_{py}}{dt} = -mgx = \frac{mgqy}{p} \quad (13)$$

Dans le référentiel du centre de masse, au centre de masse (i.e à l'origine) et au premier ordre, on a :

$$v_x = a\omega_y \quad (14)$$

D'où

$$\frac{dv_x}{dt} = a \frac{d\omega_y}{dt} \quad (15)$$

L'accélération du centre de masse est équivalente à une force. Le couple produit par cette force tend à mettre en rotation le rattleback autour de l'axe z .

Remarque : Un point pouvant prêter à confusion dans l'article est qu'il semblerait que les auteurs aient changé d'axe z en cours de route. En effet dans cette section, les résultats énoncés correspondent à des composantes z de vecteur en

orientant celui-ci vers le haut.

En considérant ce changement d'axe, on peut calculer la composante du couple tendant à mettre en rotation le rattleback autour de l'axe z. On obtient l'expression suivante :

$$\tau = \frac{mgqy^2}{\beta pa}$$

V EXPLICATIONS ET VÉRIFICATIONS DES CALCULS

Dans cette section, on essaie de retrouver une partie des expressions données par les auteurs, en détaillant au possible les méthodes et les hypothèses pour y parvenir.

Par alléger l'écriture, on pose la définition suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \partial_x$$

V.1 Vecteur normal

La formule (1) est liée à la forme d'ellipsoïde. Je n'ai pas compris pourquoi, mais on trouve le vecteur normal \vec{u} (2) en prenant le gradient de (1). En effet :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot z &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot a \left(1 - \frac{1}{2}p \left(\frac{x}{a} \right)^2 - q \frac{xy}{a^2} - \frac{1}{2}s \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right) \\ &= - \left(\frac{px + qy}{a}, \frac{qx + sy}{a}, 1 \right) \end{aligned}$$

Remarque : Il est dit dans l'article que \vec{u} est le vecteur normal unitaire.

«upward-pointing unit normal u at that point is given, to first order in x and y, by...»

Or, simplement en constatant que $u_z = 1$, on en déduit que le vecteur n'est pas normé. Il faudrait prendre :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\vec{u}}{||u||} \\ &= \frac{\vec{u}}{\sqrt{\left(\frac{px + qy}{a} \right)^2 + \left(\frac{qx + sy}{a} \right)^2 + 1}} \end{aligned}$$

Cette petite "erreur" n'a pas d'importance sur la suite des calculs puisque la suite découle des équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \dot{\vec{A}} + \vec{\omega} \times \vec{A} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

il vient alors :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}}{dt} &= \dot{\vec{v}} + \vec{\omega} \times \vec{v} \\ &= \alpha \dot{\vec{u}} + \vec{\omega} \times \alpha \vec{u} \\ &= \alpha(\dot{\vec{u}} + \vec{\omega} \times \vec{u})\end{aligned}$$

D'où

$$\dot{\vec{u}} + \vec{\omega} \times \vec{u} = 0 \iff \dot{\vec{v}} + \vec{\omega} \times \vec{v} = 0$$

V.2 Vecteur rotation $\vec{\omega}$

Pour trouver une expression de $\vec{\omega}$ nous avons besoin d'une propriété sur le produit vectoriel.

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (16)$$

Selon les équations (3) et (4) on a :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{u}} + \vec{\omega} \times \vec{u} &= 0 \\ \vec{u} \times (\dot{\vec{u}} + \vec{\omega} \times \vec{u}) &= 0 \\ \vec{u} \times \dot{\vec{u}} + \vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) &= 0 \\ \vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) &= -\vec{u} \times \dot{\vec{u}} \\ \vec{\omega}(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{\omega}) &= \dot{\vec{u}} \times \vec{u}\end{aligned}$$

En prenant $||\vec{u}|| = 1$ et en posant $\vec{u} \cdot \vec{\omega} \equiv n$

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{u}} \times \vec{u} + n\vec{u}$$

L'idée de poser $\vec{u} \cdot \vec{\omega} \equiv n$ m'a posé pas mal de problèmes de compréhension. Je me demandais quel en était l'intérêt, jusqu'à ce que je calcule explicitement $\vec{\omega}$.

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \dot{\vec{u}} \times \vec{u} + n\vec{u} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{p\dot{x} + q\dot{y}}{a} \\ \frac{q\dot{x} + s\dot{y}}{a} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{px + qy}{a} \\ \frac{qx + sy}{a} \\ 1 \end{pmatrix} - n \begin{pmatrix} \frac{px + qy}{a} \\ \frac{qx + sy}{a} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{q\dot{x} + s\dot{y}}{a} - n \frac{px + qy}{a} \\ -\frac{p\dot{x} + q\dot{y}}{a} - n \frac{qx + sy}{a} \\ \left(\frac{p\dot{x} + q\dot{y}}{a}\right) \left(\frac{qx + sy}{a}\right) - \left(\frac{q\dot{x} + s\dot{y}}{a}\right) \left(\frac{px + qy}{a}\right) - n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Il semblerait que les auteurs aient fait une hypothèse simplificatrice, les termes sous forme de fraction sont d'ordre 1. On a donc $\omega_z \approx -n$.

D'où

$$\vec{\omega} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} q\dot{x} + s\dot{y} - n(px + qy) \\ -p\dot{x} - q\dot{y} - n(qx + sy) \\ -na \end{pmatrix} \quad (17)$$

Vérifions si on peut considérer les hypothèses comme valides :

On rappelle que x et y représentent les coordonnées horizontales et verticales du point de contact par rapport au centre de masse. On se convint assez facilement que cet écart au centre de masse est petit par rapport aux dimensions de l'objet. On prendra en ordre de grandeur le millimètre.

Nous n'avons pas d'information particulière sur les \dot{x} et \dot{y} . Cependant les auteurs souhaitent résoudre le problème pour de petites vitesses.

$$\begin{aligned} x &\approx y \approx 10^{-3}m & \frac{qx + sy}{a} &\approx 0,06 \\ p &= 0,923 \\ s &= 0,034 \\ q &= 0,1 & \frac{px + qy}{a} &\approx 0,27 \\ a &= 7,1 \cdot 10^{-3}m \end{aligned}$$

On peut supposer que les termes en \dot{x} et \dot{y} sont également du même ordre.

On peut considérer que $|\omega_z| \approx \pi$ (i.e 1/2 tour par seconde).

L'hypothèse de considérer $\omega_z \approx -n$ semble alors plausible.

V.3 Moment cinétique et moments de force

On cherche à obtenir une relation entre moments de forces (exprimés au barycentre) et moment cinétique. Les quantités sont exprimées dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On part de :

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ \iff \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \\ \iff \frac{d\vec{L}}{dt} &= \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \end{aligned}$$

Or \vec{p} et $\dot{\vec{r}}$ sont colinéaires $\implies \dot{\vec{r}} \times \vec{p} = 0$

$$\iff \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

De plus $\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F}$ (2^{ème} loi de Newton)

$$\iff \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \Sigma \vec{F} \quad (18)$$

On retrouve en fait le théorème du moment cinétique.

V.4 Équations différentielles couplées

Vérifions que les équations (8) et (9) sont cohérentes d'un point de vue dimensionnel.

On rappelle que les paramètres p, s, q sont sans dimension.

Il en est de même pour les paramètres α, β, γ .

En effet, ils s'écrivent sous la forme $\frac{I}{ma^2}$

$$\implies [\alpha] = [\beta] = [\gamma] = \frac{M.L^2}{M.L^2} = 1$$

On rappelle également que n est par définition (V.2) une vitesse angulaire $[n] = T^{-1}$.

Ainsi chaque terme de (8) et (9) est homogène à une accélération.

V.5 Pulsations propres

Dans le cas où l'on considère l'objet au repos ($n = 0$) et parfaitement symétrique ($q = 0$), les équations (8) et (9) deviennent :

$$\begin{cases} s\ddot{y}\alpha = \frac{g}{a}(-y(1-s)) \\ -p\ddot{x}\alpha = \frac{g}{a}(x(1-p)) \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y} + \frac{g}{as\alpha}(1-s)y = 0 \\ \ddot{x} + \frac{g}{ap\alpha}(1-p)x = 0 \end{cases}$$

On rappelle que par construction/définition : $0 < p < 1$ et $0 < s < 1$ et de même g, a, α sont strictement positifs.

On peut donc poser

$$\Omega_x^2 = \frac{g(1-s)}{as\alpha}$$

$$\Omega_y^2 = \frac{g(1-p)}{ap\alpha}$$

On reconnaît alors les équations bien connues (oscillateurs harmoniques)

$$\begin{cases} \ddot{y} + \Omega_y^2 y = 0 \\ \ddot{x} + \Omega_x^2 x = 0 \end{cases}$$

Et donc Ω_x et Ω_y sont les pulsations propres de l'objet.

VI CONCLUSION

Pour conclure, ce travail d'analyse d'article scientifique m'a permis d'un certain nombre de choses.

Tout d'abord, la façon dont est construite l'étude menée sur le rattleback me semble relativement naturelle. Je pense que cela vient du fait que nous nous familiarisons avec cette démarche scientifique dans nos études, quel que soit le domaine étudié. Ayant suivi qu'une brève introduction à la mécanique du solide, il m'a fallu admettre certains résultats, mais qui je trouve n'a pas été très gênant dans la compréhension de l'article. Cela m'a fait réaliser qu'avec les bases de physique acquises à la fin de la licence on peut comprendre ce qui est fait, suivre les étapes de calculs sans forcément être capable de les faire soi-même de A à Z.