1 Notations asymptotiques

1.1 Définitions

Notation	Définition	càd
$f(s) = O(g(s)) \quad s \to s_0$ "f est grand O de g"	$\left\lvert\frac{f(s)}{g(s)}\right\rvert$ est bornée quand $s \to s_0$	$\exists$ voisinage $\mathcal{V}$ de s_0 et $C > 0$ tels que $\forall s \in \mathcal{V}$ $\left\lvert\frac{f(s)}{g(s)}\right\rvert \leq C$
$f(s) = o(g(s)) \quad s \to s_0$ "f est petit o de g"	$\left\lvert\frac{f(s)}{g(s)}\right\rvert \to 0$ quand $s \to s_0$	$\forall \epsilon > 0$ $\exists \mathcal{V}_\epsilon$ tels que $\forall s \in \mathcal{V}_\epsilon$ $\left\lvert\frac{f(x)}{g(s)} \leq \epsilon\right\rvert$
$f(s) \sim g(s) \quad s \to s_0$ "asymptotiquement équivalent"	$\left\lvert\frac{f(s)}{g(s)}\right\rvert \to 1$ quand $s \to s_0$	...

1.2 Remarques

1. Dans la définition de O, le quotient $\left\lvert\frac{f(s)}{g(s)}\right\rvert$ peut ne pas avoir de limite, mais doit être seulement borné.

2. Dans la définition de O, on peut prendre une région à la place d'un voisinage. Par exemple, dans $\mathbb{C}$ on verra des approximations de la forme

$$f(z) = O(g(z)) \quad (s \in S) \text{ avec } S = \{z = \rho e^{i\theta} : \alpha < \theta < \beta, r < \rho < +\infty\}.$$

Dans $\mathbb{R}$, on verra des approximations comme

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \geq x_0) \quad \text{et} \quad f(x) = O(g(x)) \quad (x < x_0).$$

3. On écrit

$$f(s) = g(s) + O(h(s)) \quad \text{quand} \quad f(s) - g(s) = O(h(s))$$

mais il faut noter que le signe $=$ ici ne satisfait pas les propriétés usuelles de l'égalité (lesquelles?).

1.3 Définitions additionnelles

- La notation Ω est définie par opposition à o comme suit.

$f(s) = \Omega(g(s)) \quad s \to s_0$ "f est oméga de g"	$\left\lvert\frac{f(s)}{g(s)}\right\rvert \not\to 0$ quand $s \to s_0$	$\limsup_{s \to s_0} \left\lvert\frac{f(s)}{g(s)}\right\rvert > 0$

- Dans le cas où un paramètre λ apparaît dans la définition de la fonction ou dans le domaine de l'estimation, on définit O_λ de la même manière que O seulement que constante C dépend de λ. Par exemple, pour $r < 1$

$$\log(1 + z) = O_r(|z|) \quad (z < r) \tag{1.1}$$

- On dit que l'estimation est uniforme en λ lorsqu'on peut choisir une constante C indépendante de λ.

1.4 Quelques règles avec O

- $O(kg(s)) = O(g(s))$ pour toute constante k
- $O(f(s)g(s)) = f(s)O(g(s))$
- $O(f(s)g(s)) = O(f(s))O(g(s))$

1.5 Quelques règles avec $\sim$

- $f_1 \sim g_1,\ f_2 \sim g_2 \;\Rightarrow\; \alpha f_1 + \beta f_2 \sim \alpha g_1 + \beta g_2$
- $f_1 \sim g_1,\ f_2 \sim g_2 \;\Rightarrow\; f_1 f_2 \sim g_1 g_2$

1.6 Exemples

- $n+1 \sim n \quad (n \to +\infty)$
- $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + O(z^5) \quad (z \to 0)$
- $\ln(1+z) = \dots \quad (z \to 0)$
- $\frac{1}{1-z} = \dots \quad (z \to 0)$
- $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n} \quad (n \to +\infty)$ (Formule de Stirling)
- Le reste du développement de Taylor au voisinage de z_0

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0) z^k}{k!} = O(z)^N$$

2 Développements asymptotiques

2.1 Définitions, exemples, propriétés

Definition 2.1 Une suite de fonctions $\{\phi_n(z)\}_{n=1,2,\dots}$ est dite asymptotique quand $z \to z_0$ si elle satisfait

$$\phi_{n+1}(z) = o(\phi_{n+1}(z)) \qquad (z \to z_0)$$

Definition 2.2 (Développement asymptotique) Soit une suite asymptotique de fonctions $\{\phi_n\}_{n=1,2,\dots}$ (ϕ_n est appelée fonction de jauge) et une fonction f dont le domaine possède un point d'accumulation z_0 (un point limite) à l'intérieur ou sur le bord. On dit que f possède un développement asymptotique d'ordre N en z_0 s'il existe une suite de constantes $\{a_n\}_{1,2,\dots,N}$ telle que

$$f(z) = \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_k(z) + o(\phi_N(z)) \quad (z \to z_0)$$

Si la relation est vraie pour tout N, alors f admet un développement asymptotique en z_0 et on note

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(z) \quad (z \to z_0)$$

Exemple 2.1 Le développement de Taylor d'une fonction est asymptotique

$$f(x) \sim f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + o((z-z_0)^n) \quad (z \to z_0)$$

avec comme fonction de jauge $\phi(z) = (z-z_0)^n$.

Exemple 2.2 L'exemple vu au TD

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt}dt \sim \sum_0^\infty (-1)^n n! x^n \quad (x \to 0)$$

La série est divergente et pourtant

Exemple 2.3 (Suites asymptotiques de fonctions)

$$\left\{e^{-z}, e^{-z^2}, e^{-z^3}, \ldots\right\} \text{ pour } z_0 = +\infty$$
$$\left\{\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \frac{1}{z^3}, \ldots\right\} \text{ pour } z_0 = +\infty$$
$$\left\{x, \frac{2}{\sqrt{x}}, \frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots\right\} \text{ pour } z_0 = +\infty$$

Proposition 2.1 (Unicité étant donné la suite $\{\phi_n\}$) *Pour une suite asymptotique de fonctions $\{\phi_n\}_{n=1,2,\ldots}$, le développement asymptotique d'une fonction est unique et les constantes a_N sont données par*

$$\begin{aligned} a_1 &= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{\phi_1(z)} \\ a_2 &= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - a_1\phi_1(z)}{\phi_2(z)} \\ \vdots &= \qquad \vdots \\ a_N &= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\phi_k(z)}{\phi_n(z)} \end{aligned}$$

Une fonction peut avoir plus d'un développement asymptotique, avec des différentes suites de fonctions jauges.

Exemple 2.4 La fonction $\frac{1}{1+x}$ possède (au moins) deux développements asymptotiques, tous deux convergentes pour $|x| > 1$

$$\frac{1}{1+x} \sim \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} x^{-n} \quad (x \to \infty)$$
$$\frac{1}{1+x} \sim \sum_{n=1}^\infty (x-1) x^{-2n} \quad (x \to \infty)$$

Une fonction peut avoir un développement asymptotique convergent et un autre divergent.

2.2 Propriétés des séries asymptotiques

Propriétés des séries asymptotiques

2.3 Développement asymptotique des intégrales

sommer au dehors du rayon de convergence. Insérer un dans un intégral. Intégrer par partie. (si la deuxième partie devient de plus en plus petite) Les fonctions définies par intégrales sont omniprésentes

- Les fonctions spéciales
  - La fonction Gamma : $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$
  - La fonction d'Airy : $\mathrm{Ai}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \cos\left(xt + \frac{t^3}{3}\right)\mathrm{d}t$
  - La fonction d'erreur de Gauss : $\mathrm{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$
- Les solutions d'équations différentielles avec conditions initiales
  - La solution de l'équation différentielle

$$xy''' + 2y = 0 \quad (y(0) = 0, \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0) \tag{2.1}$$

    peut être exprimée par $y(x) = \displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-t - \frac{x}{\sqrt{t}}\right)dt.$
- Transformations intégrales (Fourier, Laplace, Hankel, ...)

2.4 Méthodes élémentaires de développement asymptotique

- **Intégration membre à membre**
  Lorsque $f(z,t) \to f_0(t) \quad (z \to z_0)$ uniformément pour $t \in [a,b]$ ($\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(t,x)}{f_0(t)}\right| = 1$ uniformément en t .

$$\int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t \sim \int_a^b f_0(t)\mathrm{d}t \quad (z \to z_0)$$

  Par exemple, $\int_0^1 \frac{\sin tz}{t}\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned} \frac{\sin tz}{t} &\sim z - \frac{t^2z^3}{3!} + \dots \\ \int_0^1 \frac{\sin tz}{t}\mathrm{d}t &\sim \int_0^1 \left(z - \frac{t^2z^3}{3!} + \dots\right)\mathrm{d}t \\ &\sim z - \frac{z^3}{3.3!} + \dots \quad (z \to z_0) \end{aligned}$$

- $\int_0^k = \int_0^\infty - \int_k^\infty$ pour $k \to \infty$, le terme $\int_0^\infty$ domine.
  Par exemple

$$\int_0^k t^{-1/2}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

  Trouver $\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\mathrm{d}t =?$

- $\int_k^\infty = \int_0^\infty - \int_0^k$ pour $k \to 0^+$, le terme $\int_0^\infty$ domine.
  Par exemple

$$\int_k^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

  Trouver $\int_k^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t =?$

2.5 Lemme de Watson et méthode de Laplace

La méthode de Laplace cherche une approximation asymptotique pour des intégrales de la forme

$$F(x) = \int_a^b f(t)e^{-x\phi(t)}\mathrm{d}t \quad \text{quand } x \to \infty$$

L'intégrande est essentiellement déterminée par le terme $e^{-x\phi(t)}$ puisque $x \to \infty$. Sous certaines conditions (en f), l'intégrale $F(x)$ est principalement constitué par l'intégration au voisinage d'un point $t = c$ qui donne le maximum pour $e^{-x\phi(t)}$ (c donne minimum pour ϕ). La méthode de Laplace consiste à approximer l'intégrale qui est de $[a, b]$ à une intégrale dans un petit intervalle $[c - \epsilon, c + \epsilon]$.

2.5.1 Un cas simple (changer ∞ en ϵ)

Montrons que

$$\int_0^\epsilon t^\alpha e^{-xt}\mathrm{d}t \sim \int_0^\infty t^\alpha e^{-xt}\mathrm{d}t \quad x \to \infty$$

Écrivons

$$\underbrace{\int_0^\epsilon t^\alpha e^{-xt}\mathrm{d}t}_{I_\epsilon(x)} = \underbrace{\int_0^\infty t^\alpha e^{-xt}\mathrm{d}t}_{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}} - \underbrace{\int_\epsilon^\infty t^\alpha e^{-xt}\mathrm{d}t}_{R_{\epsilon,\alpha}(x)}$$

En posant

$$\begin{aligned} u' &= e^{-xt} & v &= t^\alpha \\ u &= \frac{-1}{x}e^{-xt} & v' &= \alpha t^{\alpha-1} \end{aligned}$$

on obtient en intégrant par parties

$$\begin{aligned} R_{\epsilon,\alpha}(x) &= (-1/x)\, t^\alpha e^{-xt}\big|_\epsilon^\infty - (-\alpha/x)\int_\epsilon^\infty t^{\alpha-1}e^{-xt}\mathrm{d}t \\ &= (-1/x)\,\epsilon^\alpha e^{-x\epsilon} - (\alpha/x)\, R_{\epsilon,\alpha-1}(x) \\ &= (-1/x)\,\epsilon^\alpha e^{-x\epsilon} + o(R_{\epsilon,\alpha}(x)) \quad (x \to \infty) \end{aligned}$$

À cause du terme $e^{-x\epsilon}$, $R_{\epsilon,\alpha}(x)$ est exponentiellement plus petit que $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}$. D'où

$$\int_0^\epsilon t^\alpha e^{-\alpha t}\mathrm{d}t \sim \int_0^\infty t^\alpha e^{-\alpha t}\mathrm{d}t \quad (x \to \infty)$$

l'intégrale est essentiellement due au voisinage de 0, donc (asymptotiquement) on peut changer ∞ en ϵ.

2.5.2 Lemme de Watson

Soit $0 < T \leq \infty$ et

$$F(x) = \int_0^T e^{-xt}f(t)\mathrm{d}t, \tag{2.2}$$

si $f(t) \sim t^\alpha \sum_0^\infty a_n t^{\beta n} \quad (t \to 0^+)$ avec $\alpha > -1$, $\beta > 0$. Alors

$$I(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(\alpha + \beta n + 1)}{x^{\alpha + \beta n + 1}} \quad (x \to \infty) \tag{2.3}$$

Dans le cas où $T = \infty$, pour que l'intégrale soit convergente, on a besoin que $f(t) \ll Ke^{ct} \quad \forall t$ pour des constantes c, K ou que $\int_0^T |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$.

Preuve Il nous faut montrer

$$R_N(x) = \left| I(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{\Gamma(\alpha + \beta n + 1)}{x^{\alpha + \beta n + 1}} \right| = o\left(\frac{1}{x^{\alpha + \beta n + 1}}\right) \quad (x \to \infty) \tag{2.4}$$

On utilise le développement asymptotique de $f(t)$ en 0, en prenant un intervalle $[0, \epsilon]$ assez petit, on va approximer $I(x)$ par $I_\epsilon(x) = \int_0^\epsilon f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t$.

Soit $K > 0$, alors $\exists \epsilon$ tel que pour $0 \le t \le \epsilon$

$$\left| f(t) - t^\alpha \sum_{n=0}^{N} a_n t^{\beta n} \right| \le K t^{\alpha + \beta(N+1)} e^{-xt}$$

alors

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\epsilon f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t - \int_0^\epsilon e^{-xt} t^\alpha \sum_{n=0}^{N} a_n t^{\beta n} \mathrm{d}t \right| &\le K \int_0^\epsilon t^{\alpha + \beta(N+1)} e^{-xt}\mathrm{d}t \\
\left| \int_0^\epsilon f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t - \sum_0^N a_n \int_0^\epsilon t^{\alpha + \beta n} e^{-xt} \right| &\le K \int_0^\epsilon t^{\alpha + \beta(N+1)} e^{-xt}\mathrm{d}t \\
&\le K \int_0^\infty t^{\alpha + \beta(N+1)} e^{-xt}\mathrm{d}t \\
&\le K \frac{\Gamma(\alpha + \beta(N+1) + 1)}{x^{\alpha + \beta(N+1) + 1}}
\end{aligned}$$

L'erreur induit en replaçant les intégrales $\int_0^\epsilon$ par $\int_0^\infty$ est exponentiellement petit comme dans le cas précédent

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\infty f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t - \sum_0^N a_n \int_0^\infty t^{\alpha + \beta n} e^{-xt} \right| &\le K \frac{\Gamma(\alpha + \beta(N+1) + 1)}{x^{\alpha + \beta(N+1) + 1}} \\
\left| I(x) - \sum_0^N a_n \frac{\Gamma(\alpha + \beta n + 1)}{x^{\alpha + \beta n + 1}} \right| &\le K \frac{\Gamma(\alpha + \beta(N+1) + 1)}{x^{\alpha + \beta(N+1) + 1}}
\end{aligned}$$

D'où (2.4) .

On considère

$$F(x) = \int_a^b f(t)e^{-x\phi(t)}\mathrm{d}t \quad \text{avec} x \to \infty \tag{2.5}$$

Supposons que $\phi(t)$ admet un minimum global c dans $[a, b]$. Assumant certaines conditions pour f, l'intégrale est essentiellement contribuée par un voisinage de c à cause du terme $e^{-x\phi(t)}$.

2.5.3 Méthode de Laplace 1er cas : $c \in]a, b[$, $\phi'(c) = 0$, et $\phi''(c) > 0$

On utilise les approximations suivantes dans [c-ϵ,c+ϵ]

$$f(t) \sim f(c)$$
$$\phi(t) \sim \phi(c) + 0 + \frac{\phi''(c)}{2}(t-c)^2$$

Alors on a

$$I(x) = \int_a^b f(t)e^{-x\phi(t)}\mathrm{d}t \sim \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} f(c)e^{-x\left(\phi(c)+\frac{\phi''(c)}{2}(t-c)^2\right)}\mathrm{d}t$$
$$\sim f(c)e^{-x\phi(c)}\int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} e^{-x\frac{\phi''(c)}{2}(t-c)^2}\mathrm{d}t$$

On procède à un changement de variable pour obtenir une intégrale Gaussienne (mais avec des bornes finies).

$$s = \sqrt{x\phi''(c)}(t-c)$$
$$\mathrm{d}s = \sqrt{x\phi''(c)}$$

On obtient

$$F(x) \sim \frac{f(c)e^{-x\phi(c)}}{\sqrt{x\phi''(c)}}\int_{-\sqrt{x\phi''(c)}\epsilon}^{\sqrt{x\phi''(c)}\epsilon} e^{-\frac{s^2}{2}}\mathrm{d}s$$

Les bornes de l'intégrale peuvent être étendu (asymptotiquement) quand $x \to \infty$. (Voir les méthodes élémentaires).

$$F(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x\phi''(c)}}f(c)e^{-x\phi(c)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}$$
$$F(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x\phi''(c)}}f(c)e^{-x\phi(c)}\mathrm{d}t \quad x \to \infty$$

2.5.4 Méthode de Laplace 2ème cas : $c = a$, $\phi'(a) = 0$, et $\phi''(a) > 0$

Cette méthode s'applique aussi pour $c = b$. En utilisant les mêmes approximations que précédemment

$$f(t) \sim f(a)$$
$$\phi(t) \sim \phi(a) + 0 + \frac{\phi''(a)}{2}(t-a)^2$$

On obtient la moitié de l'approximation, parce que seule l'intervalle $[a, a+\epsilon]$ est mis à contribution, $[a-\epsilon, a]$ n'est pas contenu dans $[a, b]$.

$$F(x) \sim \frac{f(a)e^{-x\phi(a)}}{\sqrt{x\phi''(a)}}\int_0^{\sqrt{x\phi''(a)}\epsilon} e^{-\frac{s^2}{2}}\mathrm{d}s$$
$$F(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x\phi''(a)}}f(a)e^{-x\phi(a)}\int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}$$
$$F(x) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{x\phi''(a)}}f(a)e^{-x\phi(a)}\mathrm{d}t \quad x \to \infty$$

2.5.5 Méthode de Laplace 3ème cas : $c = a$, $\phi'(a) > 0$

Cette méthode s'applique aussi pour $c = b$. On utilise les approximations suivantes

$$\begin{aligned} f(t) &\sim f(a) \\ \phi(t) &\sim \phi(a) + 0 + \phi'(a)(t-a) \end{aligned}$$

et on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &\sim f(c)e^{-x\phi(a)} \int_a^{a+\epsilon} e^{-x\phi'(a)(t-a)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(c)e^{-x\phi(a)}}{x\phi'(a)} \int_0^{x\phi'(a)\epsilon} e^{-s}\mathrm{d}s \\ F(x) &\sim \frac{f(c)e^{-x\phi(a)}}{x\phi'(a)} \quad (x \to \infty) \end{aligned}$$

2.5.6 Méthode de Laplace pour trouver des termes supplémentaires

Pour trouver plus de terme que le terme dominant, on utilise des approximations plus précises. Par exemple dans le premier cas, on utilisera

$$\begin{aligned} f(t) &\sim f(c) + f'(c)(t-c) + \frac{1}{2}f''(c)(t-c)^2 \\ \phi(t) &\sim \phi(c) + 0 + \frac{1}{2}\phi''(c)(t-c)^2 + \frac{1}{6}\phi'''(c)(t-c)^3 + \frac{1}{24}\phi''''(c)(t-c)^4 \end{aligned}$$

Exemple 2.5 (Stirling's Formula pour Γ (cas réel))

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^x\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-t}e^{x\log t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-x(t/x-\log t)}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{t}{x} - \log t \\ \phi'(t) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{t} \\ \phi''(t) &= \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

Donc $\phi'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{t} = 0 \Leftrightarrow t = x$, $t = x$ est un minimum intérieur pour ϕ. En utilisant la méthode de Laplace (1er cas).

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x\phi''(x)}}e^{-x\phi(x)}$$

Avec $\phi''(x) = 1/x^2$, $e^{-x\phi(x)} = e^{-x}x^x$

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}e^{-x}x^x$$

2.5.7 Méthode de Laplace cas général avec $c \in]a, b[$

- Si $\phi'(c) = 0, \phi''(c) = 0$, et $\phi'''(c) \neq 0$ alors on utilise l'approximation

$$\phi(t) \sim \phi(c) + \frac{1}{3!}\phi'''(c)(t-c)^3$$

- Si $\phi'(c) = \phi''(c) = \phi'''(c) = \ldots = \phi^{(n-1)}(c) = 0$, et $\phi^{(n)}(c)$ alors on utilise l'approximation

$$\phi(t) \sim \phi(c) + \frac{\phi^{(n)}(c)}{p!}(t-c)^p$$

Remarque 2.1

- Nous avons utilisé la méthode de Laplace pour donner seulement le terme dominant du développement asymptotique de $F(x)$. Alors que le Lemme de Watson nous donne le développement asymptotique complet dans le cas où $\phi(t) = t$.
- De manière analogue, on peut trouver le second-terme dominant et ainsi de suite.
- Même si ϕ admet d'autre minimum locaux dans $[a, b]$, leur contribution est exponentiellement plus petite que celle du minimum global c.

Remarque 2.2 En résumé, la méthode de Laplace consiste à:

- Négliger les intégrales en dehors de $[c-\epsilon, c+\epsilon]$
- Rapprocher l'intégrale par une intégrale gaussienne.
- Compléter l'intégrale gaussienne.