Solution of 第三节课习题 (macOS 平台)

张吉祥

2018 年 3 月 13 日

1 习题说明

2 群的性质

1. {Z,+} 是群。验证：
   - 封闭性：$\forall a_1, a_2 \in Z, a_1 + a_2 \in Z$
   - 结合律：$\forall a_1, a_2, a_3 \in Z, (a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$
   - 幺元：$\exists a_0 (= 0) \in Z, s.t. \forall a \in Z, a_0 + a = a + a_0 = a$
   - 逆：$\forall a \in Z, \exists a^{-1} (= -a) \in Z, s.t. a + a^{-1} = a_0 (= 0)$
2. {N,+} 不是群。理由：虽然自然数集 {N,+} 满足封闭性、结合律、幺元，但是元素 {1,2,3,...} 的逆不存在。

3 验证向量叉乘的李代数性质

证明：记 $\mathbf{g}$=$(R^3, R, \times)$

- $\forall a, b \in R^3, a \times b \in R^3$, 故满足封闭性；
- $\forall$**a,b,c** $\in R^3, m, n \in R$, 有：
  $(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = m(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + n(\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \quad \mathbf{c} \times (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}) = m(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + n(\mathbf{c} \times \mathbf{b})$
  故满足双线性；
- $\forall a \in R^3, a \times a = \mathbf{0}$, 故满足自反性；
- $\forall a, b, c \in R^3$, 有
  $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) =$
  $b(a \cdot c) - c(a \cdot b) + c(b \cdot a) - a(b \cdot c) + a(c \cdot b) - b(c \cdot a) = \mathbf{0}$, 故满足雅可比等价. 综上有 $\mathbf{g}$=$(R^3, R, \times)$ 为李代数。

4 推导 $SE(3)$ 的指数映射

1. **SE(3) 指数映射推导**:

$$\exp(\xi^\wedge) = \exp(\begin{bmatrix}\phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0\end{bmatrix}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\begin{bmatrix}\phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0\end{bmatrix})^n = \mathbf{I}+\frac{1}{1!}\begin{bmatrix}\phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}\phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0\end{bmatrix}^2+\frac{1}{3!}\begin{bmatrix}\phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0\end{bmatrix}^3+\cdots$$

, 展开矩阵的幂有

$$\begin{bmatrix}\phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}(\phi^\wedge)^n & (\phi^\wedge)^{n-1}\rho \\ 0^T & 0\end{bmatrix}$$

, 故

$$\exp(\xi^\wedge) = \begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\phi^\wedge)^n & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n\rho \\ 0^T & 1\end{bmatrix}$$

2. **左雅可比推导**:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(\theta a^\wedge)^n = \mathbf{I} + \frac{1}{2!}(\theta a^\wedge) + \frac{1}{3!}(\theta a^\wedge)^2 + \frac{1}{4!}(\theta a^\wedge)^3 + \cdots \\
= (aa^T - (a^\wedge)^2) + \frac{1}{2!}\theta a^\wedge + \frac{1}{3!}\theta^2(a^\wedge)^2 + \frac{1}{4!}\theta^3(a^\wedge)^3 + \cdots \\
= aa^T + (\frac{1}{2!}\theta - \frac{1}{4!}\theta^3 + \cdots)a^\wedge - (1 - \frac{1}{3!}\theta^2 + \cdots)(a^\wedge)^2 \\
= aa^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta}a^\wedge - \frac{\sin\theta}{\theta}(a^\wedge)^2, \quad (a^\wedge)^2 = aa^T - \mathbf{I} \\
= \frac{\sin\theta}{\theta}\mathbf{I} + (1 - \frac{\sin\theta}{\theta}aa^T)aa^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta}a^\wedge = \mathbf{J}
\end{aligned}$$

5 伴随

1. **SO(3) 伴随性质证明**:

首先证明:

$$\forall a \in R^3, \quad Ra^\wedge R^T = (Ra)^\wedge \tag{1}$$

因为

$$\forall v \in R^3, \quad (Ra)^\wedge v = (Ra)\times v = (Ra)\times(RR^{-1}v) = R[a\times(R^{-1}v)] = Ra^\wedge R^{-1}v$$

, 且 $R^{-1} = R^T$, 故 (1) 式成立。

记 $p = \theta a$, 原式左边:

$$= R[\cos\theta\mathbf{I} + (1-\cos\theta)aa^T + \sin\theta a^\wedge]R^T = \cos\theta\mathbf{I} + (1-\cos\theta)R(aa^T)R^T + \sin\theta(Ra^\wedge R^T)$$

$$= \cos\theta \mathbf{I} + (1-\cos\theta)R(aa^T)R^T + \sin\theta(Ra)^\wedge$$

原式右边:

$$= \cos\theta \mathbf{I} + (1-\cos\theta)(Ra)(Ra)^T + \sin\theta(Ra)^\wedge = \cos\theta \mathbf{I} + (1-\cos\theta)R(aa^T)R^T + \sin\theta(Ra)^\wedge$$

. 故等式左边 = 右边, 即:

$$R\exp(p^\wedge)R^T = \exp((Rp)^\wedge) \tag{2}$$

故原式成立。■

2. **SE(3) 伴随性质证明**:
原式左边:

$$= \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_1 & \sum_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\sum_1 R^T & R\sum_1(-R^T t) + R\sum_2 + t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, 式中 $\sum_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\phi^\wedge)^n, \quad \sum_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n \rho$

原式右边:

$$= \exp(\begin{bmatrix} R\rho + (t^\wedge R)\phi \\ R\phi \end{bmatrix}^\wedge) = \begin{bmatrix} \sum_3 & \sum_4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, 式中 $\sum_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}((R\phi)^\wedge)^n, \quad \sum_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}((R\phi)^\wedge)^n [R\rho + t^\wedge R\phi]$.
故只需要证明:

$$\sum_3 = R\sum_1 R^T, \quad \sum_4 = R\sum_1(-R^T t) + R\sum_2 + t$$

, 其中 $\sum_3 = R\sum_1 R^T$ 显然成立。下面证明 $\sum_4 = R\sum_1(-R^T t) + R\sum_2 + t$:
原式等价于

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}((R\phi)^\wedge)^n [R\rho + t^\wedge R\phi] = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}((R\phi)^\wedge)^n t + R\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n \rho + t$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}((R\phi)^\wedge)^n [t^\wedge R\phi] = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}((R\phi)^\wedge)^n t + t$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}((R\phi)^\wedge)^n [-(R\phi)^\wedge t] = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}((R\phi)^\wedge)^n t + t$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}((R\phi)^\wedge)^{n+1} t = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}((R\phi)^\wedge)^n t + t$$

, 故等式成立。■

6 轨迹的描绘

1. T_{WC} 物理意义是相机坐标系 C 相对于世界坐标系 W 的姿态。因为刻画轨迹时把相机抽象为点，故只需要 T_{WC} 的平移部分。

2. 轨迹的描绘 (图 1)
   (注: macOS 上运行时，**使用 usleep() 需要添加 unistd.h 头文件**)

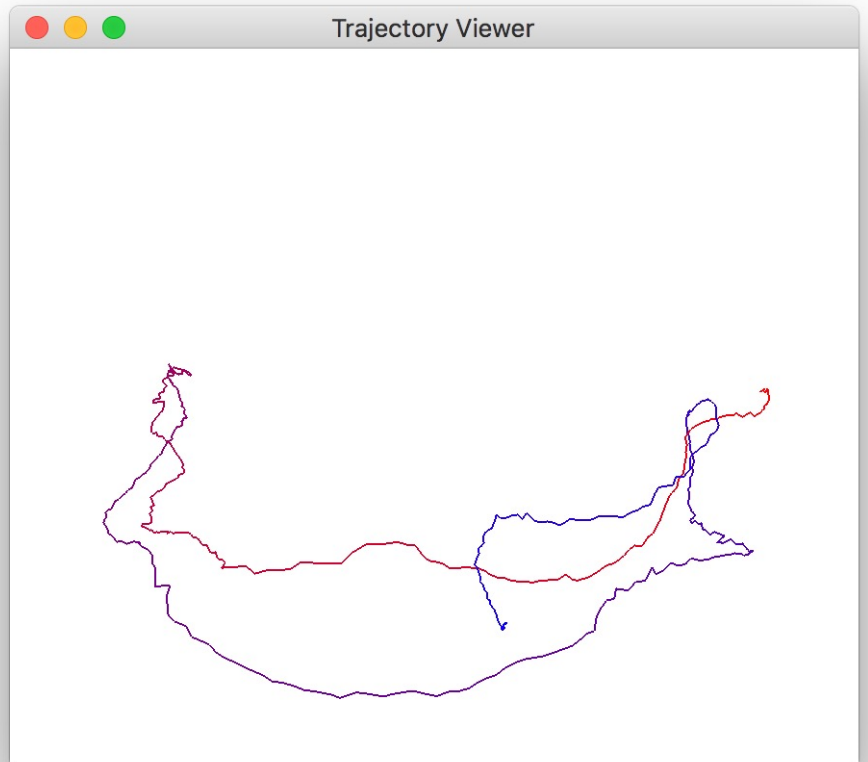

图 1: 轨迹的描绘

7 轨迹的误差

计算结果 (图 2,3):

$$RMSE = 2.20728$$

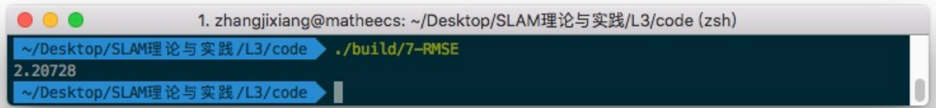

图 2: RMSE 计算结果

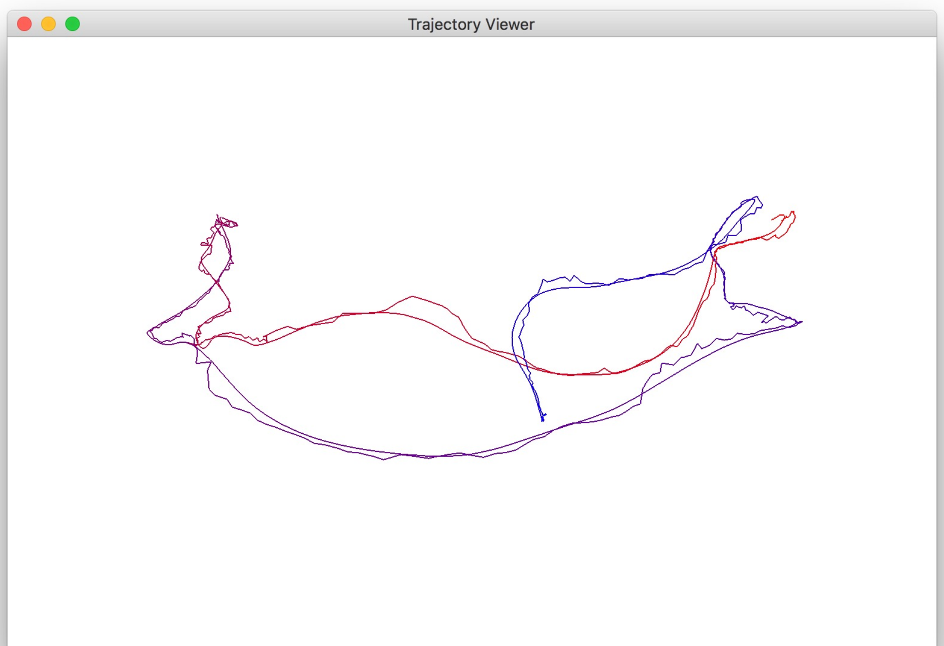

图 3: 估计轨迹和真实轨迹