

Solution of 第 7 节课习题 (macOS 平台)

张吉祥

2018 年 4 月 14 日

1 习题说明

2 Bundle Adjustment

2.1 文献阅读

1. 原因是忽略了 BA 问题结构和稀疏性, 而采用文中建议的方法会让 BA 灵活、准确和高效。

The claimed slowness is almost always due to the unthinking use of a general-purpose optimization routine that completely **ignores the problem structure and sparseness**. Real bundle routines are much more efficient than this, and usually considerably more efficient and flexible than the newly suggested method.

2. BA 中需要注意参数化的地方有

- 奇异性 (Singularity)
- 内部约束 (Internal Constrain)
- 多余的内部自由度 (Unwanted Internal DoF)

而且, 不同的参数化会**影响数值计算的速度和可靠性**。合适的参数化需要在当前状态估计附近满足均匀一致性、有限和稳定的条件。Pose 和 Point 参数化方式和优缺点见表:

	参数化方式	优点	缺点
Point	(X,Y,Z)	直观	不能表示无穷远
	(X,Y,Z,W)	方便表示无穷远	内含约束
Rotation	Euler Angles	直观	奇异性
	四元数	无奇异性	内含约束，不直观
	旋转矩阵 R	便于计算	多个约束
	so(3)	存储变量少	存储变量多
	SO(3)	用于无约束优化	计算麻烦
Pose	se(3)	存储变量少	存储变量多
	SE(3)	用于无约束优化	计算麻烦
	变换矩阵 T	便于计算	存储变量多

3. 以下内容得到印证：

- (a) Exploit the problem structure \Rightarrow 稀疏和边缘化
- (b) Use factorization effectively \Rightarrow 稀疏分解
- (c) Network Structure \Rightarrow 图优化
- (d) Geometric Image Features \Rightarrow 特征点法
- (e) Intensity-based methods \Rightarrow 直接法

2.2 BAL-dataset

代码见 **g2o-BAL** 文件夹。实验结果：初始值 (图 1) 和优化值 (图 2)。

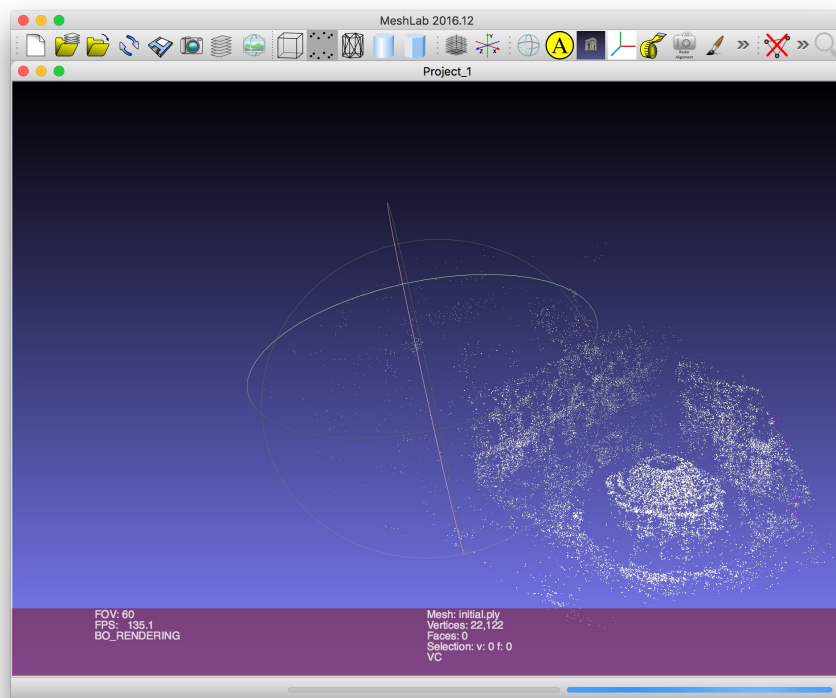


图 1: 初始值

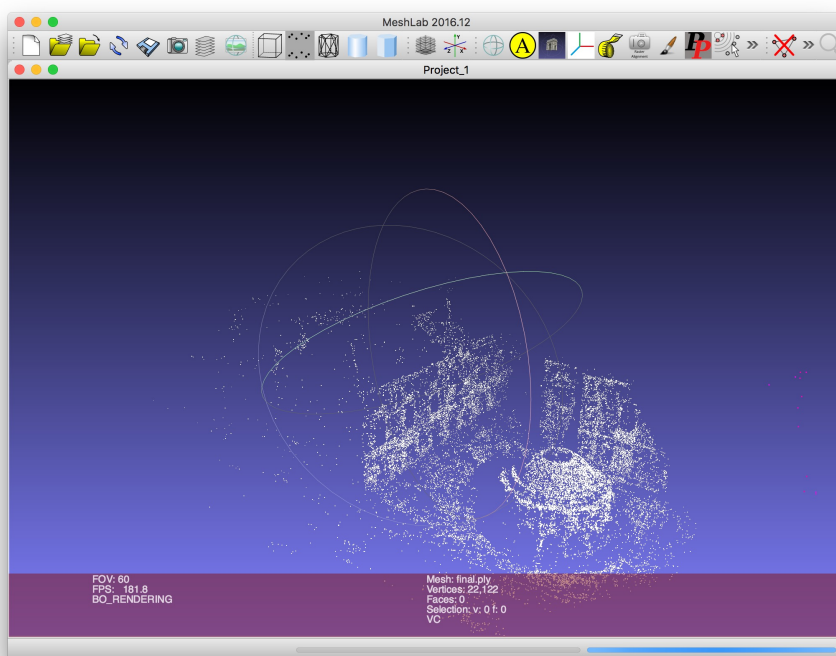


图 2: 优化值

3 直接法的 Bundle Adjustment

3.1 数学模型

1. error 描述：空间点固有灰度值 (16 维向量) 与空间点在图像上投影的灰度值 (16 维向量) 的差，即

$$error = I(p_i) - I_j(\pi(T_j p_i))$$

2. 每个 error 关联两个优化变量：相机位姿 T 和三维空间点 p_i 。
3. 假设点周围保持灰度不变，且它们在优化中共享中间点的深度，则误差对相机位姿 ξ 的雅可比矩阵为 (扰动模型)：

$$J = - \begin{bmatrix} \frac{\partial I_j}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \delta \xi} \\ \dots \\ \frac{\partial I_j}{\partial u_{16}} \frac{\partial u_{16}}{\partial \delta \xi} \end{bmatrix}_{16 \times 6} \quad (1)$$

误差对三维空间点 p_i 的雅可比矩阵为：

$$J = - \begin{bmatrix} \frac{\partial I_j}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial p_i} \\ \dots \\ \frac{\partial I_j}{\partial u_{16}} \frac{\partial u_{16}}{\partial p_i} \end{bmatrix}_{16 \times 3} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial I_j}{\partial u_1} K T_j \\ \dots \\ \frac{\partial I_j}{\partial u_{16}} K T_j \end{bmatrix}_{16 \times 3} \quad (2)$$

其中 $\frac{\partial I}{\partial u}$ 为 u 处的像素梯度， $\frac{\partial u}{\partial \delta \xi} = \begin{bmatrix} \frac{f_x}{Z} & 0 & -\frac{f_x X}{Z'^2} & -\frac{f_x XY}{Z'^2} & f_x + \frac{f_x X^2}{Z'^2} & -\frac{f_x Y}{Z} \\ 0 & \frac{f_y}{Z} & -\frac{f_y Y}{Z'^2} & -f_y - \frac{f_y Y'^2}{Z'^2} & \frac{f_y XY}{Z'^2} & \frac{f_y X}{Z} \end{bmatrix}$ 。

3.2 实现

实验结果如图 3。

1. 能，可以采用**逆深度参数化**。
2. patch 取**大一点**的优化效果更好。
3. 不同点：误差 error 类型不一样；雅可比导数不一样。
4. Huber 的阈值选取方法：**取决于误差平方的分布**。如果误差是**标准高斯分布**，那么误差平方就是**卡方分布**，取**置信度**为 0.95，则 2 自由度下阈值就是 5.991。

The value of the threshold b is chosen approximately to equal the outlier threshold.

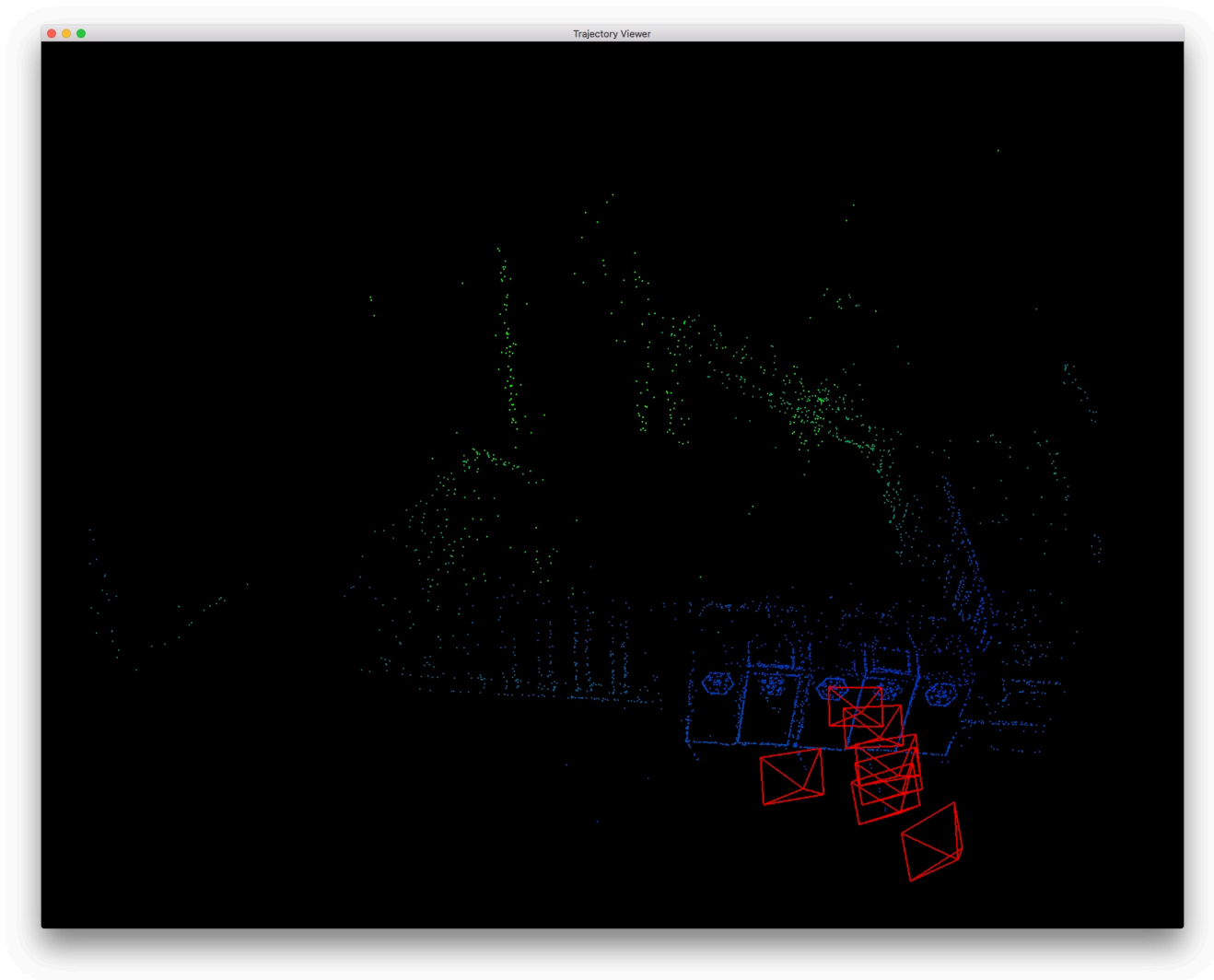


图 3: 优化后的相机位置与点云