§11.3 瑕积分的性质与敛散判别

一. 瑕积分的性质

定理1（充要条件. Cauchy 收敛准则）

瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$（瑕点为 a）收敛 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, s.t.

$\forall u_1, u_2 \in (a, a+\delta)$, 有

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right| = \left|\int_{u_1}^{b} f(x)dx - \int_{u_2}^{b} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

（$F(u)=\int_u^b f(x)dx$ 在 $u\to a^+$ 时有极限存在的 Cauchy 收敛准则）

性质1.（线性性质）

设 $x=a$ 是 f_1 和 f_2 的瑕点, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. 若瑕积分 $\int_a^b f_1(x)dx$ 与 $\int_a^b f_2(x)dx$ 都收敛, 则瑕积分 $\int_a^b [k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]dx$ 必定收敛, 并且

$$\int_a^b [k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]dx = k_1\int_a^b f_1(x)dx + k_2\int_a^b f_2(x)dx.$$

性质2. 设 f 的瑕点为 $x=a$. 对 $\forall c\in(a,b)$, 瑕积分 $\int_a^c f(x)dx$ 与 $\int_a^b f(x)dx$ 一定同敛态, 并且

$$\underset{\text{瑕}}{\int_a^b f(x)dx} = \underset{\text{瑕}}{\int_a^c f(x)dx} + \underset{\text{定}}{\int_c^b f(x)dx}$$

定理2（充要条件）

瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$（瑕点为 a）收敛 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$. s.t.

对 $\forall u\in(a, a+\delta)$, 有

$$\left|\int_a^u f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

<u>性质3</u>. 设 f 的瑕点为 $x=a$. 对 $\forall u\in(a,b]$, f 在 $[u,b]$ 上可积.

若 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛, 并且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

证: 设 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛, 则由 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall \varepsilon>0$,

$\exists \delta>0$, s.t. $\forall u_1, u_2\in(a, a+\delta)$ 且 $u_2>u_1$, 有

$$\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|dx = \left|\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|dx\right| < \varepsilon.$$

由定积分的绝对值不等式, 可得

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right| \le \int_{u_1}^{u_2}|f(x)|dx < \varepsilon, \quad \forall u_1,u_2\in(a,a+\delta)\text{ 且 } u_2>u_1.$$

再由 Cauchy 收敛准则, 瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

由于对 $\forall u\in(a,b]$, 有

$$\left|\int_u^b f(x)dx\right| \le \int_u^b |f(x)|dx.$$

令 $u\to a^+$, 则由函数极限的保不等式性可得

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

<u>注</u>: 性质3中条件"对 $\forall u\in(a,b]$, f 在 $[u,b]$ 上可积"不可缺少.

<u>反例</u>. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x\in(0,1]\cap Q\\ -\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x\in(0,1]\cap Q^c\end{cases}$

对 $\forall u\in(0,1]$, f 在 $[u,b]$ 上不可积. $(\omega_i^f \ge 1)$

但是 $|f(x)|=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in(0,1]$, 瑕积分 $\int_0^1 |f(x)|dx$ 收敛.

<u>定义</u>：设 f 的瑕点为 a. 对 $\forall u\in(a,b]$, f 在 $[u,b]$ 上可积.

(i) 若 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛，则称 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛；

(ii) 若 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，但 $\int_a^b |f(x)|dx$ 发散，则称 $\int_a^b f(x)dx$ 条件收敛.

二. 非负函数瑕积分的敛散判别

<u>函数极限的单调有界定理</u>

若 F 在 $(a,b]$ 上减且有上界，则 $\lim\limits_{u\to a^+}F(u)$ 存在，并且

$$\lim_{u\to a^+}F(u)=\sup_{u\in(a,b]}F(u)$$

<u>定理3</u>（比较原则）

设 f 和 g 都是定义在 $(a,b]$ 上的非负函数，$x=a$ 为瑕点.

对 $\forall u\in(a,b]$，f 和 g 都在 $[u,b]$ 上可积.

$$0\le f(x)\le g(x),\quad \forall x\in(a,b].$$

则 (i) 当 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^b f(x)dx$ 也收敛，并且 $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

(ii) 当 $\int_a^b f(x)dx$ 发散时，$\int_a^b g(x)dx$ 也发散.

证：由于 f 和 g 为 $(a,b]$ 上的非负函数，则对 $\forall u\in(a,b]$，

$\int_u^b f(x)dx$ 和 $\int_u^b g(x)dx$ 在 $(a,b]$ 上连续，非负且递减.

又因为 $0\le f(x)\le g(x)$，则

$$0\le\int_u^b f(x)dx\le\int_u^b g(x)dx,\quad \forall u\in(a,b]. \qquad (1)$$

(i) 若 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛，则对 $\forall u\in(a,b]$，有

$$\int_u^b g(x)dx \le \sup_{u\in(a,b]}\int_u^b g(x)dx = \lim_{u\to a^+}\int_u^a g(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

从而，由(1)式可得

$$\int_u^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx, \quad \forall u\in(a,b]$$

由单调有界定理可知，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛 并且

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx,$$

(ii) 若 $\int_a^b f(x)dx$ 发散。由于 $\int_u^b f(x)dx$ 在 $(a,b]$ 上减，则必有

$$\lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)dx = +\infty.$$

从而 对 $\forall G>0, \exists \delta>0$, s.t. $\forall u\in(a, a+\delta)$, 有

$$\int_u^b f(x)dx > G.$$

从而 由(1)式，$\int_u^b g(x)dx \ge \int_u^b f(x)dx > G, \ \forall u\in(a,a+\delta)$,

所以，$\lim_{u\to a^+}\int_u^b g(x)dx = +\infty$，瑕积分 $\int_a^b g(x)dx$ 发散。

比较原则的推论：

<u>推论1</u>（比值判别法）

设　f 和 g 在 $(a,b]$ 上有定义。$x=a$ 是 f 和 g 的瑕点；

对 $\forall u\in(a,b]$，f 和 g 在 $[u,b]$ 上可积；

$f(x)\ge 0$，$g(x)>0$，$x\in(a,b]$，并且

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = C, \quad (\text{为} +\infty \text{或非负实数}.$$

则 (i) 当 $0<C<+\infty$ 时，瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛态；

(ii) 当 $c=0$ 时，若瑕积分 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛；

(iii) 当 $c=+\infty$ 时，若瑕积分 $\int_a^b g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^b f(x)dx$ 也发散。

证：(i) 若 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=c\in(0,+\infty)$，则 $\exists\delta>0$. s.t. $\forall x\in(a,a+\delta)$，有

$$0<\frac{1}{2}c<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{3}{2}c.$$

从而 $$0<\frac{1}{2}c\cdot g(x)<f(x)<\frac{3}{2}c\cdot g(x),\quad \forall x\in(a,a+\delta).$$

由比较原则以及性质2可知，$\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛态。

(ii) 若 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，则 $\exists\delta>0$, s.t. $\forall x\in(a,a+\delta)$，有

$$0\leq\frac{f(x)}{g(x)}<1.$$

从而 $$0\leq f(x)<g(x),\quad \forall x\in(a,a+\delta).$$

由比较原则以及性质2可知，当 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^b f(x)dx$ 也收敛。

(iii) 若 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$，则 $\exists\delta>0$, s.t. $\forall x\in(a,a+\delta)$，有

$$\frac{f(x)}{g(x)}>1,$$

从而 $$0<g(x)<f(x),\quad \forall x\in(a,a+\delta).$$

由比较原则以及性质2，当 $\int_a^b g(x)dx$ 发散时，$\int_a^b f(x)dx$ 也发散。

<u>推论2</u> (Cauchy 判别法)

设 f 在 $(a,b]$ 上有定义，$x=a$ 是瑕点，对 $\forall u\in(a,b]$，f 在 $[u,b]$ 上可积，

则 (i) 当 $0\leq f(x)\leq\frac{1}{(x-a)^p}$，并且 $0<p<1$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

(ii) 当 $f(x)\geq\frac{1}{(x-a)^p}>0$，并且 $p\geq1$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 发散。

推论3 (Cauchy 判别法)

设 f 在 $(a,b]$ 上是非负函数，$x=a$ 是瑕点，对 $\forall u\in(a,b]$，f 在 $[u,b]$ 上可积，若

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)=\lambda,$$

其中 λ 是非负实数或 $+\infty$，则

(i) 当 $0<p<1$ 且 $0\le\lambda<+\infty$，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

(ii) 当 $p\geqslant 1$ 且 $0<\lambda\le+\infty$，$\int_a^b f(x)dx$ 发散.

三、一般函数瑕积分的敛散判别

定理4 (Dirichlet 判别法)

设 (i) f 在 $(a,b]$ 上有定义，瑕点为 a；

(ii) $F(u)=\int_u^b f(x)dx$ 在 $(a,b]$ 上有界；

(iii) g 在 $(a,b]$ 上单调且 $\lim_{x\to a^+}g(x)=0$.

则 瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

证: 由 Cauchy 收敛准则，只需证

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$. s.t. $\forall u_1,u_2\in(a,a+\delta)$，有

$$\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)g(x)dx\right|<\varepsilon.$$

由条件(ii)，$\exists C>0$, s.t. $|F(u)|=\left|\int_u^b f(x)dx\right|<C$，$\forall u\in(a,b]$. (1)

由于 $\lim_{x\to a^+}g(x)=0$，则对于上述 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$. s.t. $\forall x\in(a,a+\delta)$，有

$$|g(x)| < \frac{1}{4C}\varepsilon. \qquad (2)$$

由于 g 在 $(a,b]$ 上单调，则由积分第二中值定理的推论，对 $\forall u_1, u_2 \in (a, a+\delta)$ 且 $u_2 > u_1$，$\exists \xi \in [u_1, u_2]$，s.t.

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)dx\right| = \left|g(u_1)\int_{u_1}^{\xi} f(x)dx + g(u_2)\int_{\xi}^{u_2} f(x)dx\right|$$

$$\le |g(u_1)|\cdot\left|\int_{u_1}^{\xi} f(x)dx\right| + |g(u_2)|\cdot\left|\int_{\xi}^{u_2} f(x)dx\right|$$

$$= |g(u_1)|\cdot\left|\int_{u_1}^{b} f(x)dx - \int_{\xi}^{b} f(x)dx\right| + |g(u_2)|\cdot\left|\int_{\xi}^{b} f(x)dx - \int_{u_2}^{b} f(x)dx\right|$$

$$\le |g(u_1)|\cdot\left(\left|\int_{u_1}^{b} f(x)dx\right| + \left|\int_{\xi}^{b} f(x)dx\right|\right)$$

$$+ |g(u_2)|\cdot\left(\left|\int_{\xi}^{b} f(x)dx\right| + \left|\int_{u_2}^{b} f(x)dx\right|\right)$$

$$< \frac{1}{4C}\cdot 2C + \frac{1}{4C}\cdot 2C = \varepsilon,$$

综上，由 Cauchy 收敛准则，$\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛。

<u>定理5</u> (Abel 判别法)

设 (i) f 在 $(a,b]$ 上有定义，$x=a$ 为瑕点；

(ii) 瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

(iii) g 在 $(a,b]$ 上单调且有界，

则瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛。

证：由 (iii)，$\exists C>0$，s.t. $|g(x)| \le C$，$\forall x \in (a,b]$ (1)

由于瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，则由 Cauchy 收敛准则，对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，s.t. $\forall \xi, \eta \in (a, a+\delta)$，有

$$\left|\int_{\xi}^{\eta} f(x)dx\right| < \frac{1}{2C}\cdot\varepsilon. \qquad (2)$$

由于 g 在 $(a,b]$ 上单调，则由积分第二中值定理的推论，

对 $\forall u_1, u_2 \in (a, a+\delta)$ 且 $u_2 > u_1$，$\exists \xi \in [u_1, u_2]$，s.t.

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)dx\right| = \left| g(u_1)\int_{u_1}^{\xi} f(x)dx + g(u_2)\int_{\xi}^{u_2} f(x)dx \right|$$

$$\le |g(u_1)| \cdot \left|\int_{u_1}^{\xi} f(x)dx\right| + |g(u_2)| \cdot \left|\int_{\xi}^{u_2} f(x)dx\right|$$

$$\overset{(1)(2)}{<} C \cdot \frac{1}{2C}\varepsilon + C \cdot \frac{1}{2C}\varepsilon = \varepsilon.$$

综上，由 Cauchy 收敛准则，$\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

例1. 瑕积分的敛散性.

(1) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ (2) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}dx$.

解：令 $f(x) = -\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$，$x \in (0,1]$，则 $f(x) \ge 0$. 并且 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$，

所以 $x=0$ 是 f 的瑕点.

$$\left(x^p \cdot \left(-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}-p}}, \quad \frac{(\ln x)'}{(-x^{\frac{1}{2}-p})'} = \frac{\frac{1}{x}}{(p-\frac{1}{2})x^{\frac{1}{2}-p-1}} = \frac{1}{(p-\frac{1}{2})\cdot x^{\frac{1}{2}-p}} \right.$$

$$\left. = \frac{1}{p-\frac{1}{2}} \cdot x^{p-\frac{1}{2}}, \quad \text{可以取 } p \in (\tfrac{1}{2}, 1) \text{ . s.t.} \right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^p \cdot \left(-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = 0.$$

取 $p = \frac{2}{3} \in (0,1)$，则

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{3}} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln x}{x^{-\frac{1}{6}}} = \lim_{x\to 0^+} 6x^{\frac{1}{6}} = 0. \quad (\lambda = 0,\ p = \tfrac{2}{3})$$

由 Cauchy 判别法可知 $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ 收敛.

(2) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = +\infty$，所以 $x=1$ 为瑕点.

取 $p=1$，则 $\lim_{x\to 1^+} (x-1)\cdot\frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x}\cdot\frac{x-1}{\ln x}\right) = 1\cdot 1 = 1$，$(\lambda = 1,\ p=1)$

由 Cauchy 判别法可知，$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}dx$ 发散.

例12. 反常积分

$$\Phi(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$$

的敛散性.

解：记 $I(\alpha)=\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$，$J(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$

(1) 当 $\alpha-1\geq 0$，即 $\alpha\geq 1$ 时，$\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 为定积分.

当 $\alpha-1<0$，即 $\alpha<1$ 时，$\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 为瑕点为 $x=0$ 的瑕积分.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1-\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x}=1$.

由 Cauchy 判别法，

当 $0<1-\alpha<1$，即 $0<\alpha<1$ 时，瑕积分 $\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 收敛；

当 $1-\alpha\geq 1$，即 $\alpha\leq 0$ 时，瑕积分 $\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 发散.

(2) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2-\alpha}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=1$.

由 Cauchy 判别法可知，

当 $2-\alpha>1$，即 $\alpha<1$ 时，无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 收敛；

当 $2-\alpha\leq 1$，即 $\alpha\geq 1$ 时，无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 发散.

综上，

α	$\alpha\leq 0$	$0<\alpha<1$	$\alpha\geq 1$
$I(\alpha)$	发散	收敛	定积分
$J(\alpha)$	收敛	收敛	发散

所以，对 $\forall\alpha\in(0,1)$，反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 收敛.

对 $\forall\alpha(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$，反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 发散.

Ex3. (1) $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx$

解：瑕点为 $x=1$。由于 $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx$ 发散，则 $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx$ 发散。

(2) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^{-\frac{1}{2}}\cdot \frac{\sin x}{x}\right) = +\infty$，所以 $x=0$ 是瑕点。

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}\cdot \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$，由 Cauchy 判别法可知，

瑕积分 $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ 收敛。

(3) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-2)x^{\frac{1}{2}} = 0$，

$\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x}\ln x = 0$，

所以 $x=0$ 和 $x=1$ 都是瑕点。

令 $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}\ln x}$，$x\in(0,1)$，则 $f(x)>0$。

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}\cdot f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-1}{\ln x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\cdot f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{x-1}{\ln x}\right) = 1$，

由 Cauchy 判别法可知，$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$ 发散，所以 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$ 发散。

(4) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$

解：令 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$，$x\in(0,1)$，则 $f(x)>0$。

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$，所以只有 $x=0$ 是瑕点。

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}\cdot f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\ln x}{x-1} = 0$，由 Cauchy 判别法，

瑕积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$ 收敛。

$1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$

(5) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1-x^3}dx$

解：瑕点为 $x=1$，由于

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)\cdot\frac{\arctan x}{1-x^3}=\lim_{x\to1^-}\frac{\arctan x}{1+x+x^2}=\frac{\pi}{12},$$

由 Cauchy 判别法可知，瑕积分 $\int_0^1\frac{\arctan x}{1-x^3}dx$ 发散.

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^m}dx$

解：当 $m\le 0$ 时，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^m}dx$ 是定积分.

当 $1<m\le 2$ 时，$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^m}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^m}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2}x^{2-m}\right)=\begin{cases}0, & 1<m<2\\ \frac{1}{2}, & m=1\end{cases}$

$x=0$ 不是瑕点，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^m}dx$ 是定积分.

当 $m>2$ 时，$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^m}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{m-2}}\right)=+\infty$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^m}dx$ 是瑕积分.

瑕点为 $x=0$.

当 $m>2$ 时，$\lim_{x\to0^+}x^{m-2}\cdot\frac{1-\cos x}{x^m}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

由 Cauchy 判别法可知，当 $0<m-2<1$，即 $2<m<3$ 时，瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^m}dx$ 收敛，当 $m-2\ge1$，即 $m\ge3$ 时，瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^m}dx$ 发散.