§2.2 初等解析函数

一. 初等单值解析函数

1. 幂函数 $w=z^n\ (n\in\mathbb{N}_+)$ 是整函数，并且 $(z^n)'=nz^{n-1}$.

2. 指数函数 $w=e^z$ 是整函数，并且 $(e^z)'=e^z$.

证：
$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$$
$$=e^x\cos y+i\cdot e^x\sin y,$$

显然 $u(x,y)=e^x\cos y$，$v(x,y)=e^x\sin y$ 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上处处可微.

由于
$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x},\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

则 C-R 方程成立. 所以 $w=e^z$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处解析，并且
$$(e^z)'=\frac{\partial u}{\partial x}-i\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=e^x\cos y+i\cdot e^x\sin y.$$

3. (1) 三角函数 $\cos z$ 和 $\sin z$ 都是整函数，并且
$$(\cos z)'=-\sin z,\quad (\sin z)'=\cos z.$$

证：$(iz)'=i$，$(-iz)'=-i$，从而
$$(e^{iz})'=ie^{iz},\quad (e^{-iz})'=-ie^{-iz}$$
$$(\cos z)'=\left[\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})\right]'=\frac{1}{2}ie^{iz}-\frac{1}{2}ie^{-iz}$$
$$=\frac{1}{2i}(-e^{iz}+e^{-iz})=-\sin z,$$
$$(\sin z)'=\left[\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})\right]'=\frac{1}{2}e^{iz}+\frac{1}{2}e^{-iz}=\cos z.$$

(2) 三角函数 $\tan z$, $\sec z$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{(k+\frac{1}{2})\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ 上解析.

三角函数 $\cot z$, $\csc z$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ 上解析.

$(\tan z)' = \sec^2 z$, $(\sec z)' = \tan z\cdot\sec z$,

$(\cot z)' = -\csc^2 z$, $(\csc z)' = -\cot z\cdot\csc z$.

二. 初等多值解析函数.

定义1 (单值解析分支)

设 $F(z)$ 是 $D\subset\mathbb{C}$ 上的多值函数. 若存在 D 上的单值解析函数 $f(z)$,

s.t. $\forall z\in D$, 有 $f(z)\in F(z)$, 则称 $f(z)$ 为多值函数 $F(z)$ 在区域 Ω 上的

单值解析分支.

1. 对数函数 $w=\mathrm{Ln}\, z$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

每个单值函数

$$w=\varphi_k(z)=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi) \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

都是 $w=\mathrm{Ln}\, z$ 在单连通区域

$$\Omega: \ -\pi<\arg z<\pi$$

上的单值解析分支, 并且 $\varphi_k'(z)=\frac{1}{z}$, $z\in\Omega$.

证: 设 $z=re^{i(\theta+2k\pi)}$, $\theta\in(-\pi,\pi)$, 则

$$w=\varphi_k(z)=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$$

$$=\ln r+i(\theta+2k\pi)=u(r,\theta)+iv(r,\theta).$$

其中 $u(r,\theta)=\ln r$，$v(r,\theta)=\theta+2k\pi$。

显然，u, v 在区域 Ω 上处处可微，并且

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r},\quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial \theta}=1,$$

则 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$$

成立，所以 $w=\varphi_k(z)$ 在 Ω 上解析并且

$$\varphi_k'(z)=\frac{\partial \varphi_k}{\partial z}(z)=e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{r}{z}\left(\frac{1}{r}+0\right)=\frac{1}{z}.$$

注：幅角函数 $w=\operatorname{Arg} z$，$z\in\mathbb{C}$ 的单值分支

$$w=(\operatorname{Arg} z)_k=\arg z+2k\pi$$

在 $\Omega: -\pi<\arg z<\pi$ 上不解析.（极坐标形式的 C-R 方程不成立）

2. 根式函数 $w=\sqrt[n]{z}$，$z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $(n\geq 2)$.

每个单值函数

$$w=\varphi_k(z)=r^{\frac{1}{n}}e^{i\cdot\frac{\arg z+2k\pi}{n}}\qquad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

都是根式函数 $w=\sqrt[n]{z}$ 在单连通区域

$$\Omega: -\pi<\arg z<\arg z$$

上的单值解析分支，并且 $\varphi_k'(z)=\frac{1}{n}\cdot\frac{\varphi_k(z)}{z}$.

证：设 $z=re^{i(\theta+2k\pi)}$，$\theta\in(-\pi,\pi)$，则

$$w=\varphi_k(z)=r^{\frac{1}{n}}e^{i\cdot\frac{\arg z+2k\pi}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

$$=r^{\frac{1}{n}}\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\cdot r^{\frac{1}{n}}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}=u(r,\theta)+iv(r,\theta),$$

其中

$$u(r,\theta)=r^{\frac{1}{n}}\cos\frac{\theta+2k\pi}{n},\quad v(r,\theta)=r^{\frac{1}{n}}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}.$$

显然 u, v 均在 $\Omega: -\pi<\arg z<\pi$ 上可微，并且

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{n}r^{\frac{1}{n}-1}\cos\frac{\theta+2k\pi}{n},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=\frac{1}{n}r^{\frac{1}{n}-1}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{1}{n}r^{\frac{1}{n}}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n},\quad \frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{1}{n}r^{\frac{1}{n}}\cos\frac{\theta+2k\pi}{n},$$

Cauchy - Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$$

成立，所以 $w=\varphi_k(z)$ 在 Ω 上解析，并且

$$\begin{aligned}\varphi_k'(z)&=e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)\\&=\frac{1}{n}r^{\frac{1}{n}-1}\cdot e^{-i\theta}\cdot\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\cdot\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\\&=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{re^{i\theta}}\cdot r^{\frac{1}{n}}e^{i\cdot\frac{\theta+2k\pi}{n}}\\&=\frac{1}{n}\frac{\varphi_k(z)}{z}.\end{aligned}$$