2019-2020 学年第 1 学期

泛函分析作业

目录

第 1 周

定义 1.1. 等价距离

设集合 X 上有两种距离：d_1, d_2. 如果 X 中按距离 d_1 收敛的点列 $\{x_n\}$ 都在距离 d_2 下收敛于同一点, 并且按距离 d_2 收敛的点列 $\{x_n\}$ 都在距离 d_1 下收敛于同一点, 即

$$d_1(x_n, x) \to 0 \Longleftrightarrow d_2(x_n, x) \to 0,$$

则称距离 d_1 和 d_2 等价. ♣

✍ **作业题 1.1** 设 $d(x,y)$ 是集合 X 上的距离, 令

$$\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}.$$

证明: $\tilde{d}(x,y)$ 也是 X 上的距离, 并且 $\tilde{d}$ 与 d 等价.

证明 显然, 对任意 $x,y\in X$,

$$\tilde{d}(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\in\mathbb{R}.$$

(i) 由距离 $d(x,y)$ 的正定性可知 $\tilde{d}(x,y)\geq 0$, 并且 $\tilde{d}(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=0$ 等价于 $d(x,y)=0$, 进而等价于 $x=y$.

(ii) 由距离 $d(x,y)$ 的三点不等式可知，对任意 $x,y,z\in X$, 总有

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(y,z),$$

从而, 根据函数

$$f(t)=\frac{t}{1+t},\quad t\in[0,+\infty)$$

的单调递增性, 就有

$$\begin{aligned}\tilde{d}(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} &\leq \frac{d(x,z)+d(y,z)}{1+d(x,z)+d(y,z)}\\ &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(y,z)}+\frac{d(y,z)}{1+d(x,z)+d(y,z)}\\ &\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}+\frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}\\ &= \tilde{d}(x,z)+\tilde{d}(y,z).\end{aligned}$$

综上, $\tilde{d}(x,y)$ 也是空间 X 上的距离.

注意到

$$0\leq\tilde{d}(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}<1,$$

于是

$$d(x,y)=\frac{\tilde{d}(x,y)}{1-\tilde{d}(x,y)}. \tag{1.1}$$

若点列 $\{x_n\}\subset X$ 和点 $x\in X$ 满足

$$d(x_n,x)\to 0\quad(n\to\infty),$$

则根据数列极限的四则运算法则, 就有

$$\tilde{d}(x_n,x)=\frac{d(x_n,x)}{1+d(x_n,x)}\to 0\quad(n\to\infty).$$

若点列 $\{x_n\}\subset X$ 和点 $x\in X$ 满足

$$\tilde{d}(x_n,x)\to 0\quad(n\to\infty),$$

同样根据 (1.1) 式以及数列极限的四则运算法则, 就有

$$d(x_n,x)=\frac{\tilde{d}(x_n,x)}{1-\tilde{d}(x_n,x)}\to 0\quad(n\to\infty).$$

所以距离 d 和 $\tilde{d}$ 等价. □

注 上述距离空间 $(X,\tilde{d})$ 中任何两点的距离都小于 1, 从而任何子集都是有界集. 上述结论说明, 任何距离空间上 (X,d) 上都能够找到与 d 等价的" 有界" 距离 $\tilde{d}$.

✍ **作业题 1.2** 在 $\mathbb{R}^N$ 中可定义两种距离：

$$d_1(x,y)\ =\ \sqrt{\sum_{i=1}^{N}|\xi_i-\eta_i|^2},$$

$$d_2(x,y) = \max_{1\le i\le N} |\xi_i - \eta_i|,$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)\in\mathbb{R}^N$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_N)\in\mathbb{R}^N$. 证明：$d_1$ 和 d_2 等价.

证明 对任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)\in\mathbb{R}^N$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_N)\in\mathbb{R}^N$, 都有

$$\max_{1\le i\le N}|\xi_i-\eta_i|^2 \le \sum_{i=1}^N |\xi_i-\eta_i|^2 \le N\max_{1\le i\le N}|\xi_i-\eta_i|^2,$$

从而

$$\max_{1\le i\le N}|\xi_i-\eta_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^N |\xi_i-\eta_i|^2} \le \sqrt{N}\max_{1\le i\le N}|\xi_i-\eta_i|,$$

即

$$d_2(x,y)\le d_1(x,y)\le \sqrt{N}d_2(x,y).$$

若点列 $\{x_n\}\subset\mathbb{R}^N$ 和点 $x\in\mathbb{R}^N$ 满足

$$d_1(x_n,x)\to 0 \quad (n\to\infty),$$

由 (1) 式的前半部分以及数列极限的迫敛性可知

$$d_2(x_n,x)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

若点列 $\{x_n\}\subset\mathbb{R}^N$ 和点 $x\in\mathbb{R}^N$ 满足

$$d_2(x_n,x)\to 0 \quad (n\to\infty),$$

由 (1) 式的后半部分以及数列极限的迫敛性可知

$$d_1(x_n,x)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

综上, d_1 和 d_2 等价. □

注 若距离空间 X 上的两种距离 d_1 和 d_2 满足

$$C_1d_1(x,y)\le d_2(x,y)\le C_2d_1(x,y),\quad \forall x,y\in X,$$

其中 C_1, $C_2>0$ 是正的常数, 则 d_1 与 d_2 一定等价.

第 2 周

✍ **作业题 2.1** 设 $P_r[a,b]$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的所有**有理系数多项式函数**的全体. 显然, $(P_r[a,b],d)$ 是连续函数空间 $(C[a,b],d)$ 的距离子空间, 其中

$$d(f,g)=\max_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|,\quad \forall f,g\in C[a,b].$$

证明: $P_r[a,b]$ 是 $C[a,b]$ 的可数稠密子集, 从而 $C[a,b]$ 可分.

证明

Step1. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 设 $P_r^n[a,b]$ 是定义在 $[a,b]$ 上的所有**有理系数** n **次多项式函数**的全体, 则 $P_r^n[a,b]$ 是可数集. 由于

$$P_r[a,b]=\bigcup_{n=0}^\infty P_r^n[a,b],$$

则 $P_r[a,b]$ 也是可数集.

Step2. 下证 $P_r[a,b]$ 按距离 d 在 $P[a,b]$ 中稠密.
任取 $h \in P[a,b]$,

$$h(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n, \quad t \in [a,b],$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. 令

$$M = \max_{1 \le k \le n} \max_{t \in [a,b]} |t|^k > 0.$$

根据有理数集 $\mathbb{Q}$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 中的稠密性, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $q_0, q_1, \cdots, q_n \in \mathbb{Q}$ 使得

$$|a_0 - q_0| < \frac{1}{n+1}\epsilon, \quad |a_1 - q_1| < \frac{1}{(n+1)M}\epsilon, \quad \cdots, \quad |a_n - q_n| < \frac{1}{(n+1)M}\epsilon.$$

令

$$g(t) = q_0 + q_1 t + \cdots + q_n t^n, \quad t \in [a,b],$$

则 $g \in P_r[a,b]$, 并且对任意 $t \in [a,b]$ 都有

$$\begin{aligned} & |h(t) - g(t)| \\ \le\ & |a_0 - q_0| + |a_1 - q_1| \cdot |t| + \cdots + |a_n - q_n| \cdot |t|^n \\ \le\ & |a_0 - q_0| + |a_1 - q_1| M + \cdots + |a_n - q_n| M \\ <\ & \epsilon, \end{aligned}$$

从而

$$\max_{t \in [a,b]} |h(t) - g(t)| < \epsilon.$$

综上, 对任意 $h \in P[a,b]$ 以及任意 $\epsilon > 0$, 存在 $g \in P_r[a,b]$ 使得

$$d(h,g) = \max_{t \in [a,b]} |h(t) - g(t)| < \epsilon,$$

所以 $P_r[a,b]$ 按距离 d 在 $P[a,b]$ 中稠密.

Step3. 根据 Weierstrauss 逼近定理, $P[a,b]$ 按距离 d 在 $C[a,b]$ 中稠密, 则对任意 $\epsilon > 0$ 以及任意 $f \in C[a,b]$, 存在 $h \in P[a,b]$ 使得

$$d(f,h) < \frac{1}{2}\epsilon.$$

由 Step2 可知, 存在 $g \in P_r[a,b]$ 使得

$$d(h,g) < \frac{1}{2}\epsilon,$$

从而 $d(f,g) \le d(f,h) + d(h,g) < \epsilon$.

综上, $P_r[a,b]$ 是 $C[a,b]$ 的可数稠密子集, 从而 $C[a,b]$ 可分. □

作业题 2.2 按以下步骤证明

定理 2.1. Riemann-Lebesgue 引理

$f \in L[a,b]$, 对应的 Fourier 系数为

$$a_n = \int_a^b f(x) \sin nx \mathrm{d}x, \quad b_n = \int_a^b f(x) \cos nx \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N},$$

则 $a_n,\ b_n \to 0 \quad (n \to \infty)$. $\mathbb{R}^n$

Step1 若 f 是 $[a,b]$ 上的简单函数 (P80 定义 3), 证明上述结论成立.

Step2 设 $S[a,b]$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的简单函数的全体. 显然, $S[a,b]$ 是 $L[a,b]$ 的距离子空间, 其中距离

$$d(f,g)=\int_a^b |f(t)-g(t)|\mathrm{d}t,\quad \forall f,g\in L[a,b].$$

证明: $S[a,b]$ 是 $L[a,b]$ 的稠密子集.

Step3 利用稠密性, 证明 Riemann-Lebesgue 引理成立.

证明

Step0. 设 h 是 $[a,b]$ 上的一个阶梯函数,

$$h(x)=\begin{cases} c_1, & x\in(a_1,b_1),\\ c_2, & x\in(a_2,b_2),\\ \cdots & \cdots\\ c_k, & x\in(a_k,b_k),\\ 0, & x\in[a,b]\setminus\cup_{i=1}^k(a_i,b_i),\end{cases}$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 为常数, $(a_1,b_1),\cdots,(a_k,b_k)$ 是 $[a,b]$ 中互不相交的非空开子区间. 于是,

$$\begin{aligned}&\int_a^b h(x)\sin nxdx\\ =&\sum_{i=1}^k c_i\int_{a_i}^{b_i}\sin nxdx\\ =&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^k c_i(\cos na_i-\cos nb_i)\\ \to&0\quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

同理可证

$$\int_a^b h(x)\cos nxdx\to 0\quad (n\to\infty).$$

Step1. 设 E 是 $[a,b]$ 中的可测子集, χ 是 E 的特征函数, 即

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\in[a,b]\setminus E,\end{cases}$$

下证

$$\int_a^b \chi(x)\sin nxdx\to 0\quad (n\to\infty).$$

令 $\tilde{E}=E\cap(a,b)$, 则 $\tilde{E}$ 也可测并且 $m(E\setminus\tilde{E})=0$. 对任意 $\epsilon>0$, 存在开集 $G\subset[a,b]$ 使得 $\tilde{E}\subset G$ 并且

$$m(G\setminus\tilde{E})<\frac{1}{2}\epsilon.$$

另一方面, 根据 $\mathbb{R}^1$ 中开集的构造定理 (P44), G 可表为

$$G=\bigcup_{i=1}^\infty O_i,$$

其中 $O_i=(a_i,b_i)$ 是 G 的构成区间, 从而

$$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)=mG\le b-a<+\infty.$$

于是, 对上述 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}_+$ 使得

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}(b_i-a_i)<\frac{1}{2}\epsilon.$$

令 $V=\cup_{i=1}^{N}(a_i,b_i)$, 并定义阶梯函数

$$h(x)=\begin{cases}1, & x\in V,\\ 0, & x\in[a,b]\setminus V,\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}
&\int_a^b|\chi(x)-h(x)|dx\\
=&\left(\int_{E\setminus V}+\int_{V\setminus E}+\int_{[a,b]\setminus(E\cup V)}\right)|\chi(x)-h(x)|dx\\
=&\left(\int_{\tilde{E}\setminus V}+\int_{V\setminus\tilde{E}}+\int_{[a,b]\setminus(\tilde{E}\cup V)}\right)|\chi(x)-h(x)|dx\\
=&\int_{\tilde{E}\setminus V}|1-0|dx+\int_{V\setminus\tilde{E}}|0-1|dx+\int_{[a,b]\setminus(\tilde{E}\cup V)}|0-0|dx\\
=&m(\tilde{E}\setminus V)+m(V\setminus\tilde{E})\\
\le&m(G\setminus V)+m(G\setminus\tilde{E})\\
<&\frac{1}{2}\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon=\epsilon,
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
0\le&\left|\int_a^b\chi(x)\sin nxdx\right|\\
\le&\left|\int_a^b\big(\chi(x)-h(x)\big)\sin nxdx\right|+\left|\int_a^b h(x)\sin nxdx\right|\\
\le&\int_a^b|\chi(x)-h(x)|\,|\sin nx|dx+\left|\int_a^b h(x)\sin nxdx\right|\\
\le&\int_a^b|\chi(x)-h(x)|\,dx+\left|\int_a^b h(x)\sin nxdx\right|\\
<&\epsilon+\left|\int_a^b h(x)\sin nxdx\right|.
\end{aligned}$$

由于 h 是阶梯函数, 综合 Step0, 数列极限的迫敛性以及 $\epsilon>0$ 的任意性, 可得

$$\int_a^b\chi(x)\sin nxdx\to 0\quad(n\to\infty).$$

设 f 是 $[a,b]$ 上的简单函数,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}c_i\chi_i(x),$$

其中

(i) $[a,b]=\cup_{i=1}^{k}E_i$, $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 是 $[a,b]$ 中互不相交的可测子集;

(ii) $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 是非负常数;

(iii) $\chi_i(x)$ 是 E_i 的特征函数, 即

$$\chi_i(x)=\begin{cases}1, & x\in E_i,\\ 0, & x\in[a,b]\setminus E_i.\end{cases}$$

由前面的结论可知

$$\int_a^b f(x)\sin nxdx=\sum_{i=1}^{k}c_i\int_a^b\chi_i(x)\sin nxdx\to 0\quad(n\to\infty).$$

同理可证

$$\int_a^b f(x)\cos nxdx\to 0\quad(n\to\infty).$$

Step2. (P118) 设 $f\in L[a,b]$, 则 f^+ 和 f^- 也是 $[a,b]$ 上的非负 L 可积函数, 从而, 根据非负可测函数 L 积分的定义 (P102, 定义 1), 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 上的简单函数 ϕ_1, ϕ_2, 使得

$$0\le\phi_1(x)\le f^+(x),\quad 0\le\phi_2(x)\le f^-(x),\quad\forall x\in[a,b],$$

并且

$$\int_a^b f^+(x)dx-\frac{\epsilon}{2}\le\int_a^b\phi_1(x)dx\le\int_a^b f^+(x)dx,$$
$$\int_a^b f^-(x)dx-\frac{\epsilon}{2}\le\int_a^b\phi_2(x)dx\le\int_a^b f^-(x)dx.$$

令 $\phi(x)=\phi_1(x)-\phi_2(x)$, 则 ϕ 也是 $[a,b]$ 上的简单函数, 并且

$$\begin{aligned}d(f,\phi)&=\int_a^b|f(x)-\phi(x)|dx\\&=\int_a^b|f^+(x)-f^-(x)-\phi_1(x)+\phi_2(x)|dx\\&\le\int_a^b|f^+(x)-\phi_1(x)|dx+\int_a^b|f^-(x)-\phi_2(x)|dx\\&<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.\end{aligned}$$

综上, $S[a,b]$ 是 $L[a,b]$ 的稠密子集.

Step3. 由 Step2, 对任意 $f\in L[a,b]$ 以及任意 $\epsilon>0$, 存在 $g\in S[a,b]$, 使得

$$d(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx<\epsilon,$$

从而

$$\begin{aligned}0&\le\left|\int_a^b f(x)\sin nxdx\right|\\&\le\left|\int_a^b\big(f(x)-g(x)\big)\sin nxdx\right|+\left|\int_a^b g(x)\sin nxdx\right|\\&\le\int_a^b|f(x)-g(x)||\sin nx|dx+\left|\int_a^b g(x)\sin nxdx\right|\\&\le\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx+\left|\int_a^b g(x)\sin nxdx\right|\\&<\epsilon+\left|\int_a^b g(x)\sin nxdx\right|.\end{aligned}$$

另一方面, 根据 Step1, 就有

$$\int_a^b g(x)\sin nx dx \to 0 \quad (n\to\infty).$$

综上, 由以上两式, 结合数列极限的迫敛性以及 $\epsilon>0$ 的任意性, 可得

$$\int_a^b f(x)\sin nx dx \to 0 \quad (n\to\infty).$$

同理可证

$$\int_a^b f(x)\cos nx dx \to 0 \quad (n\to\infty).$$

□

第 3 周

✍ **作业题 3.1** 设 (X,d) 是度量空间, $\{x_n\}$ 是 (X,d) 中的 Cauchy 点列, 证明: $\{x_n\}$ 收敛当且仅当 $\{x_n\}$ 存在收敛子列.

证明 必要性是显然的.

下证充分性. 设 Cauchy 点列 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $x_{n_k}\to x$ $(k\to\infty)$. 任取 $\epsilon>0$. 一方面, 由于 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 点列, 则存在 $N=N(\epsilon)\in\mathbb{N}_+$, 使得

$$d(x_n,x_m)<\frac{1}{2}\epsilon,\quad \forall m,n>N. \tag{3.1}$$

另一方面, 由于 $x_{n_k}\to x$ $(k\to\infty)$, 则存在 $K=K(\epsilon)\in\mathbb{N}_+$ 使得

$$n_k>N \quad 并且 \quad d(x_{n_k},x)<\frac{1}{2}\epsilon,\quad \forall k>K. \tag{3.2}$$

综上, 由 (3.1)-(3.2) 式, 对任意 $n>N$, 取 $k=K+1$, 就有

$$d(x_n,x)\le d(x_n,x_{n_k})+d(x_{n_k},x)<\frac{1}{2}\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon=\epsilon,$$

所以 $x_n\to x$ $(n\to\infty)$. □

✍ **作业题 3.2** 设 f 是度量空间 (X,d) 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射, M 是 X 中的紧集, 证明: 连续映射 f 在紧集 M 上能够取到最值, 即存在 $x_0,x_1\in M$ 使得

$$f(x_0)=\min_{x\in M}f(x),\quad f(x_1)=\max_{x\in M}f(x).$$

证明 Step1. 设

$$l=\inf_{x\in M}f(x).$$

下证 $l\in\mathbb{R}$.

反证法, 假设 $l=-\infty$, 则对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 存在 $x_n\in M$ 使得

$$f(x_n)<-n,$$

于是

$$f(x_n)\to-\infty \quad (n\to\infty). \tag{3.3}$$

另一方面, 由于 $\{x_n\}\subset M$ 并且 M 是紧集, 则存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 以及 $x\in M$ 使得

$$x_{n_k}\to x\quad (k\to\infty).$$

根据映射 f 的连续性, 就有

$$f(x_{n_k})\to f(x)\in\mathbb{R}\quad (k\to\infty).$$

这与 (3.3) 式矛盾. 所以 $l\in\mathbb{R}$.

Step2. 根据下确界的定义, 存在 $\{x_n\}\subset M$(称为极小化序列) 使得

$$f(x_n)\to l\quad (n\to\infty).$$

由于 M 是紧集, 则存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 以及 $x\in M$ 使得

$$x_{n_k}\to x\quad (k\to\infty).$$

根据映射 f 的连续性, 就有

$$\inf_{x\in M} f(x)=l=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right)=f(x).$$

所以连续映射 f 在紧集 M 上可以取到最小值.

同理可证, 连续映射 f 在紧集 M 上可以取到最大值. □

注 上述结论才是数学分析中闭区间上的连续函数最值性的本质. 在一般的度量空间中, 有界闭集不一定是紧集, 有界闭集上的连续映射不一定有最值性.

作业题 3.3

定义 3.1. Hölder 连续函数

设 $\alpha\in(0,1]$. 若 $f\in C[a,b]$ 满足

$$[f]_\alpha=\sup_{\substack{x,y\in[a,b],\\ x\neq y}}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<+\infty,$$

则称 f 是 $[a,b]$ 上具有指数 α 的 Hölder 连续函数. $C[a,b]$ 中所有具有指数 α 的 Hölder 连续函数的全体记为 $C^{0,\alpha}[a,b]$. ♣

(1) 令

$$\bar{d}(f,g)=\max_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|+[f-g]_\alpha,\quad \forall f,g\in C^{0,\alpha}[a,b],$$

证明 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar{d})$ 是一个度量空间.

(2) 证明 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar{d})$ 是完备的度量空间.

(3) 利用 Ascoli-Arezela 定理证明, 若 M 是 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar{d})$ 中的有界集, 则 M 是 $(C[a,b],d)$ 中的列紧集, 其中 d 是最大值距离, 即

$$d(f,g)=\max_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|,\quad \forall f,g\in C[a,b].$$

证明 (1) 任取 $f,g\in C^{0,\alpha}[a,b]$, 对任意 $x,y\in[a,b]$ 且 $x\neq y$, 都有

$$\frac{|(f-g)(x)-(f-g)(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

$$\begin{aligned} &\le \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}+\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ &\le [f]_\alpha+[g]_\alpha<+\infty, \end{aligned}$$

从而

$$[f-g]_\alpha=\sup_{\substack{x,y\in[a,b],\\ x\neq y}}\frac{|(f-g)(x)-(f-g)(y)|}{|x-y|^\alpha}\le [f]_\alpha+[g]_\alpha<+\infty.$$

所以 $\bar{d}(f,g)$ 的定义是合理的.

(i) 显然 $\bar{d}(f,g)\ge 0$. 由于 $d(f,g)\le \bar{d}(f,g)$, 根据 $d(f,g)$ 的正定性可知, $\bar{d}(f,g)=0$ 等价于

$$f(t)=g(t),\quad \forall t\in[a,b],$$

从而等价于 $f=g$.

(ii) 设 $f,g,h\in C^{0,\alpha}[a,b]$, 则

$$d(f,g)\le d(f,h)+d(h,g).$$

另一方面, 对任意 $x,y\in[a,b]$ 且 $x\neq y$, 都有

$$\begin{aligned} &\frac{|(f-g)(x)-(f-g)(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ =\ &\frac{\big|[(f-h)+(h-g)](x)-[(f-h)+(h-g)](y)\big|}{|x-y|^\alpha} \\ \le\ &\frac{|(f-h)(x)-(f-h)(y)|}{|x-y|^\alpha}+\frac{|(h-g)(x)-(h-g)(y)|}{|x-y|^\alpha}, \end{aligned}$$

从而

$$[f-g]_\alpha\le [f-h]_\alpha+[h-g]_\alpha.$$

综上,

$$\bar{d}(f,g)\le \bar{d}(f,g)+\bar{d}(h,g).$$

所以 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar{d})$ 是一个度量空间.

(2) 设 $\{f_n\}$ 是空间 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar{d})$ 中的 Cauchy 点列. 由于 $C^{0,\alpha}[a,b]\subset C[a,b]$ 并且

$$0\le d(f,g)\le \bar{d}(f,g),\quad \forall f,g\in C^{0,\alpha}[a,b],$$

易证 $\{f_n\}$ 也是 $(C[a,b],d)$ 中的 Cauchy 点列. 根据 $(C[a,b],d)$ 的完备性, 存在 $f\in C[a,b]$ 使得

$$d(f_n,f)\to 0\quad (n\to\infty).$$

下证 $f\in C^{0,\alpha}[a,b]$ 并且

$$\bar{d}(f_n,f)\to 0\quad (n\to\infty).$$

由于 $\{f_n\}$ 是空间 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar{d})$ 中的 Cauchy 点列, 从而是 $(C^{0,\alpha}[a,b],\bar{d})$ 中的有界点列 (p219 第 14 题), 于是存在 $M>0$ 使得对任意 $x,y\in[a,b]$ 并且 $x\neq y$ 都有

$$\frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{|x-y|^\alpha}\le [f_n]_\alpha=[f_n-0]_\alpha\le \bar{d}(f_n,0)\le M,\quad \forall n\in\mathbb{N}_+. \tag{3.4}$$

由于函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 那么也逐点收敛于 f, 即对任意 $x\in[a,b]$, 都有

$$f_n(x)\to f(x)\quad (n\to\infty). \tag{3.5}$$

因此, 在 (3.4) 两端令 $n\to\infty$, 可得

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\le M,\quad \forall x,y\in[a,b],\ x\neq y,$$

从而 $[f]_\alpha < +\infty$, $f \in C^{0,\alpha}[a,b]$.

对任意 $\epsilon > 0$, 由于 $\{f_n\}$ 是空间 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 中的 Cauchy 点列, 则存在正整数 N, 使得对任意 $m, n > N$, 都有

$$\frac{\big|[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(y) - f_m(y)]\big|}{|x-y|^\alpha} \le [f_n - f_m]_\alpha \le \bar{d}(f_n, f_m) < \epsilon, \quad \forall x, y \in [a,b],\ x \ne y.$$

在上式中固定 x, y 以及 $n > N$, 令 $m \to \infty$, 结合 (3.5) 式可得

$$\frac{\big|[f_n(x) - f(x)] - [f_n(y) - f(y)]\big|}{|x-y|^\alpha} \le \epsilon, \quad \forall n \ge N,\ \forall x, y \in [a,b],\ x \ne y,$$

所以

$$[f_n - f]_\alpha \le \epsilon, \forall n > N.$$

综上

$$[f_n - f]_\alpha \to 0 \quad (n \to \infty),$$

从而

$$\bar{d}(f_n, f) = d(f_n, f) + [f_n - f]_\alpha \to 0 \quad (n \to \alpha).$$

所以 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 是完备的度量空间.

(3) 设 M 在 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 中有界. 由于 $C^{0,\alpha}[a,b] \subset C[a,b]$ 并且

$$0 \le d(f,g) \le \bar{d}(f,g), \quad \forall f, g \in C^{0,\alpha}[a,b],$$

所以 M 也在 $(C[a,b], d)$ 中有界. 任取 $\{f_n\} \subset M$, 则 $\{f_n\}$ 既是 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 中的有界点列, 又是 $(C[a,b], d)$ 中的有界点列, 从而函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界. 下证函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上等度连续.

由于 $\{f_n\}$ 是 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 中的有界点列, 则存在 $M > 0$, 使得

$$[f_n]_\alpha = [f_n - 0]_\alpha \le \bar{d}(f_n, 0) \le M.$$

从而

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le M|x-y|^\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,\ \forall x, y \in [a,b]. \tag{3.6}$$

对任意 $\epsilon > 0$, 取

$$\delta = \left(\frac{\epsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0,$$

则对任意 $x, y \in [a,b]$ 且 $|x-y| < \delta$, 根据 $\alpha \in (0,1]$ 以及(3.6)式可得

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le M|x-y|^\alpha < M\delta^\alpha = \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

因此函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上等度连续.

根据 Ascoli-Arezela 定理, 点列 $\{f_n\}$ 在空间 $(C[a,b], d)$ 中有收敛子列, 由此可知集合 M 是空间 $(C[a,b], d)$ 中的列紧集.

由于 $\{f_n\}$ 是 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$ 中的有界点列, 根据 (2) 的证明的前半部分可知, 上述收敛子列 $\{f_{n_k}\}$ 的极限 f 也在 $C^{0,\alpha}[a,b]$ 中. 然而, 虽然 $\{f_{n_k}\}$ 在 $(C[a,b], d)$ 中收敛, 但是却不能保证 $\{f_{n_k}\}$ 是 $(C^{0,\alpha}[a,b], \bar{d})$) 的 Cauchy 点列, 因此我们无法像 (2) 的证明的后半部分那样证明

$$[f_{n_k} - f]_\alpha \to 0 \quad (k \to \infty).$$

□

第 4 周

✍ **作业题 4.1** 设 X 是完备的度量空间, T 是 X 到 X 中的映射, 如果存在正整数 $m \in \mathbb{N}_+$ 以及常数 $\alpha \in [0,1)$ 使得对所有的 $x, y \in X$, 都有

$$d(T^m x, T^m y) \leq \alpha\, d(x,y),$$

其中 T^m 表示映射 T 作用 m 次, 则 T 在 X 中有且只有一个不动点 x^*, 特别地, 迭代点列

$$x_0,\ x_1 = Tx_0, \cdots, x_n = Tx_{n-1}, \cdots,$$

在 (X,d) 中收敛于不动点 x^*.

证明 由条件可知映射 $T^m : X \to X$ 是压缩映射, 由于 X 完备, 根据压缩映射原理, T^m 在 X 上存在唯一的不动点 x^*, 即

$$x^* = T^m x^*. \tag{4.1}$$

下证 x^* 也是映射 T 在 X 上的唯一的不动点.

由(4.1)式可得

$$Tx^* = T\left(T^m x^*\right) = T^{m+1} x^* = T^m\left(Tx^*\right),$$

所以 Tx^* 也是 T^m 的不动点. 根据 T^m 的不动点的唯一性, 就有 $Tx^* = x^*$, 所以 x^* 也是映射 T 的不动点. 若 $x \in X$ 也是映射 T 的不动点, 则

$$x = Tx,\ x = Tx = T(Tx) = T^2 x, \cdots, x = T^m x,$$

即 x 也是 T^m 的不动点. 根据 T^m 的不动点的唯一性, 就有 $x^* = x$. 所以 x^* 是映射 T 在 X 上的唯一的不动点.

任取 $x_0 \in X$. 通过映射 T 构造迭代点列

$$x_0,\ x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1, \cdots, x_n = Tx_{n-1}, \cdots.$$

任取

$$s \in \{0, 1, 2, \cdots, m-1\},$$

令

$$\begin{aligned}
&y_0 = T^s x_0 = x_s,\\
&y_1 = T^m y_0 = x_{m+2},\\
&y_2 = T^m y_1 = x_{2m+s},\\
&\cdots,\\
&y_n = T^m y_{n-1} = x_{nm+s},\\
&\cdots.
\end{aligned}$$

根据由于 T^m 是压缩映射, X 完备, 则迭代点列 y_n 收敛于 T^m 的不动点 x^*, 即

$$\lim_{n\to\infty} x_{nm+s} = x^*, \quad \forall s \in \{0, 1, 2, \cdots, m-1\}.$$

于是对任意 $\epsilon > 0$, 以及任意 $s \in \{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$, 邻域 $U(x^*, \epsilon)$ 之外只含有点列 $\{x_{nm+s}\}_{n=0}^{\infty}$ 中的有限多项, 将这些项的集合记为 A_s. 由于

$$\bigcup_{s=0}^{m-1}\bigcup_{n=0}^{\infty}\{x_{nm+s}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{s=0}^{m-1}\{x_{nm+s}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{x_n\},$$

于是点列 $\{x_n\}$ 在邻域 $U(x^*, \epsilon)$ 之外的项的全体为有限集

$$\bigcup_{s=0}^{m-1} A_s,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

□

注 该题中的映射 T 自身不一定是压缩映射. 证明过程后半部分用到了点列收敛的另外一种等价定义:

> 任给 $\epsilon > 0$, 若点列 $\{x_n\}$ 在邻域 $U(x,\epsilon)$ 之外至多只有有限多项, 则称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x.

点列极限与其子列极限的转化思路, 可参考华东师大《数学分析（第四版・上册）》P27 例 8 和 P35-P36 习题 7(2) 的证明.

✍ **作业题 4.2** (Volterra 型线性积分方程解的存在唯一性问题) 设 $f \in C[a,b]$, 二元函数 $k(t,s)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续. 利用上题的结论证明, 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, 积分方程

$$\phi(t) - \lambda \int_0^t k(t,s)\phi(s)\,\mathrm{d}s = f(t), \quad t \in [a,b] \tag{4.2}$$

总存在唯一的连续函数解 $\phi \in C[a,b]$.

证明 任取 $\phi \in C[a,b]$, 定义 $[a,b]$ 上的函数 $T\phi$:

$$(T\phi)(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t,s)\phi(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [a,b]. \tag{4.3}$$

由于 $\phi, f \in C[a,b]$, $k(t,s)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续, 由上式可知 $T\phi \in C[a,b]$. 由此得到映射

$$\begin{aligned} T: \ C[a,b] &\to C[a,b], \\ \phi &\mapsto T\phi. \end{aligned}$$

显然, 积分方程(4.2)在 $[a,b]$ 上的连续函数解等价于映射 T 在空间 $C[a,b]$ 中的不动点.

(下面验证 T 是否是压缩映射, 若不是, 继续验证 T^m 是否是压缩映射)

对任意 $\phi_1, \phi_2 \in C[a,b]$ 以及任意 $t \in [a,b]$, 由(4.3)可得

$$\begin{aligned} & |(T\phi_1)(t) - (T\phi_2)(t)| \\ = \ & |\lambda| \cdot \left| \int_a^t k(t,s)\left[\phi_1(s) - \phi_2(s)\right] \mathrm{d}s \right| \\ \le \ & |\lambda| \cdot \int_a^t \max_{\substack{a\le t\le b\\ a\le s\le b}} |k(t,s)| \cdot \max_{t\in[a,b]} |\phi_1(s) - \phi_2(s)|\,\mathrm{d}s \\ = \ & M|\lambda|(t-a)\cdot d(\phi_1,\phi_2), \end{aligned}$$

其中

$$M = \max_{\substack{a\le t\le b\\ a\le s\le b}} |k(t,s)| \ge 0.$$

(这样看 T 不一定是压缩映射)

利用上述结果, 继续计算可得

$$\left|(T^2\phi_1)(t) - (T^2\phi_2)(t)\right|$$

$$\begin{aligned}
&= |\lambda| \cdot \left| \int_a^t k(t,s)\left[(T\phi_1)(s) - (T\phi_2)(s)\right] \mathrm{d}s \right| \\
&\leq |\lambda| \cdot \int_a^t M \cdot |(T\phi_1)(s) - (T\phi_2)(s)| \,\mathrm{d}s \\
&\leq M^2|\lambda|^2 \int_a^t (s-a) \cdot d(\phi_1,\phi_2)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{\left[M|\lambda|(t-a)\right]^2}{2} d(\phi_1,\phi_2).
\end{aligned}$$

一直做下去, 对任意 $m \in \mathbb{N}_+$ 就有

$$|(T^m\phi_1)(t) - (T^m\phi_2)(t)| \leq \frac{\left[M|\lambda|(t-a)\right]^m}{m!} d(\phi_1,\phi_2), \quad \forall t \in [a,b],$$

上式两端对 $t \in [a,b]$ 取最大值可得

$$d\left(T^m\phi_1, T^m\phi_2\right) \leq \frac{\left[M|\lambda|(b-a)\right]^m}{m!} d(\phi_1,\phi_2).$$

对任意 $a \in \mathbb{R}$, 都有 $\lim_{m\to\infty} \frac{a^m}{m!} = 0$, 由该事实可知, 存在充分大的一个正整数 m 使得

$$\alpha = \frac{\left[M|\lambda|(b-a)\right]^m}{m!} \in [0,1),$$

此时 T^m 就是完备度量空间 $C[a,b]$ 上的压缩映射. 根据上一个问题的结论, 映射 T 在 $C[a,b]$ 中存在唯一的不动点, 所以积分方程(4.2)在 $[a,b]$ 上存在唯一的连续函数解. □

第 5 周

✍ **作业题 5.1** 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间, $x_0 \in X$, $\epsilon > 0$. 令

$$\begin{aligned}
U(x_0,\epsilon) &= \{x \mid \|x - x_0\| < \epsilon\}, \\
S(x_0,\epsilon) &= \{x \mid \|x - x_0\| \leq \epsilon\},
\end{aligned}$$

则

$$\overline{U(x_0,\epsilon)} = S(x_0,\epsilon).$$

证明 由于范数 $\|\cdot\|$ 作为映射是赋范线性空间 X 上的连续映射, 则可证 $S(x_0,\epsilon)$ 是空间 X 中的闭集. 由于 $U(x_0,\epsilon) \subset S(x_0,\epsilon)$, 则 $\overline{U(x_0,\epsilon)} \subset S(x_0,\epsilon)$. 下证 $S(x_0,\epsilon) \subset \overline{U(x_0,\epsilon)}$.

令

$$D = \{x \in X \mid \|x - x_0\| = \epsilon\},$$

则 $S(x_0,\epsilon) = U(x_0,\epsilon) \cup D$. 显然, $U(x_0,\epsilon) \subset \overline{U(x_0,\epsilon)}$, 所以只需要证明 $D \subset \overline{U(x_0,\epsilon)}$.

任取 $y_0 \in D$. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$x_n = y_0 + \frac{x_0 - y_0}{n\|x_0 - y_0\|} = y_0 + \frac{1}{n\epsilon}(x_0 - y_0),$$ (赋范线性空间里可以做加法和数乘)

则 $x_n \in X$, 并且当 n 足够大时, 就有(下式还用到了范数的正齐次性)

$$\|x_n - x_0\| = \left\|\left(\frac{1}{n\epsilon} - 1\right)(x_0 - y_0)\right\| = \left|\frac{1}{n\epsilon} - 1\right| \|x_0 - y_0\| = \left|\frac{1}{n} - \epsilon\right| = \epsilon - \frac{1}{n} < \epsilon,$$

从而 $x_n \in U(x_0,\epsilon)$. 另一方面,

$$\|x_n - y_0\| = \left\|\frac{1}{n\epsilon}(x_0 - y_0)\right\| = \frac{1}{n\epsilon}\|x_0 - y_0\| = \frac{1}{n},$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\|x_n - y_0\| = 0$, y_0 就是 $U(x_0,\epsilon)$ 的聚点, 因此 $y_0 \in \overline{U(x_0,\epsilon)}$. 综上, $D \subset \overline{U(x_0,\epsilon)}$.

所以 $\overline{U(x_0,\epsilon)} = S(x_0,\epsilon)$. □

作业题 5.2 利用 Hölder 不等式证明

定理 5.1. 内插不等式

设 $1 \le s \le r \le t < \infty$, $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$, 则 $u \in L^r(\Omega)$ 并且

$$\|u\|_r \le \|u\|_s^\theta \|u\|_t^{1-\theta},$$

其中 $\theta \in [0,1]$ 满足

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}.$$

证明 当 $r = s$ 时, 取 $\theta = 1$; 当 $r = t$ 时, 取 $\theta = 0$. 在这两种情况下, 结论都成立. 下设

$$1 \le s < r < t < \infty.$$

若存在 $m, n > 0$ 使得 $r = \frac{s}{m} + \frac{t}{n}$, 则

$$|u|^r = |u|^{\frac{s}{m}} \cdot |u|^{\frac{t}{n}}.$$

由于 $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$, 则

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(|u|^{\frac{s}{m}}\right)^m \mathrm{d}x &= \int_\Omega |u|^s \,\mathrm{d}x < +\infty,\\ \int_\Omega \left(|u|^{\frac{t}{n}}\right)^n \mathrm{d}x &= \int_\Omega |u|^t \,\mathrm{d}x < +\infty,\end{aligned}$$

从而 $|u|^{\frac{s}{m}} \in L^m(\Omega)$, $|u|^{\frac{t}{n}} \in L^n(\Omega)$. 于是, 当 m, n 满足

$$\begin{cases} m, n > 0,\\ \frac{s}{m} + \frac{t}{n} = r,\\ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1,\end{cases}$$

即 $m = \frac{t-s}{t-r}$, $n = \frac{t-s}{r-s}$ 时, 利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |u|^r \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |u|^{\frac{s}{m}} \cdot |u|^{\frac{t}{n}} \,\mathrm{d}x \le \left[\int_\Omega \left(|u|^{\frac{s}{m}}\right)^m \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{m}} \cdot \left[\int_\Omega \left(|u|^{\frac{t}{n}}\right)^n \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}\\ &= \left(\int_\Omega |u|^s \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\int_\Omega |u|^t \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \|u\|_s^{\frac{s}{m}} \cdot \|u\|_t^{\frac{t}{n}} < \infty,\end{aligned}$$

所以 $u \in L^r(\Omega)$, 并且

$$\|u\|_r^r = \int_\Omega |u|^r \,\mathrm{d}x \le \|u\|_s^{\frac{s}{m}} \cdot \|u\|_t^{\frac{t}{n}}.$$

令 $\theta = \frac{s}{rm}$, 则 $\theta \in (0,1)$, $\frac{t}{rn} = 1 - \theta$,

$$\frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t} = \frac{1}{rm} + \frac{1}{rm} = \frac{1}{r},$$

并且

$$\|u\|_r \leq \|u\|_s^{\theta}\|u\|_t^{1-\theta}.$$

□

✍ **作业题 5.3** ($L^p(\Omega)$ 与 $L^\infty(\Omega)$ 的联系) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集并且 $m(\Omega) < +\infty$, 证明

(1) 若 p, q 满足 $1 \leq p < q \leq \infty$, 则

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega),$$

并且存在与 $m(\Omega), p$ 和 q 相关的正常数 C 使得

$$\|f\|_p \leq C\|f\|_q, \quad \forall f \in L^q(\Omega).$$

(2) 对任意 $f \in L^\infty(\Omega)$, 都有

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

证明 (1) Step1. 任取 $f \in L^\infty(\Omega)$, 下证

$$f \in L^p(\Omega), \quad \forall p \geq 1.$$

由于 $f \in L^\infty(\Omega)$, 则存在 $E_0 \subset \Omega$ 使得 $m(E_0) = 0$ 并且

$$|f(x)|^p \leq \|f\|_\infty^p, \quad \forall x \in \Omega \setminus E_0, \quad \forall p \geq 1.$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x &= \int_{\Omega\setminus E_0} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x + \int_{E_0} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega\setminus E_0} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\Omega\setminus E_0} \|f\|_\infty^p \,\mathrm{d}x \\
&\leq m(\Omega)\|f\|_\infty^p < +\infty,
\end{aligned}$$

所以 $f \in L^p(\Omega)$ 并且

$$\|f\|_p \leq [m(\Omega)]^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty. \tag{5.1}$$

□

Step2. 下证当 p, q 满足

$$1 \leq p < q < \infty$$

时结论成立.

任取 $f \in L^q(\Omega)$, 令 $t = \frac{q}{p}$, $s = \frac{t}{t-1}$, 则 $t, s > 0$, $\frac{1}{t} + \frac{1}{s} = 1$, 并且

$$\int_\Omega (|f(x)|^p)^t \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f(x)|^q \,\mathrm{d}x < \infty,$$

即 $|f|^p \in L^t(\Omega)$. 定义

$$g(x) \equiv 1, \quad x \in \Omega,$$

则 $g \in L^s(\Omega)$. 利用 Hölder 不等式可得

$$\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega 1\cdot|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\\
&\le \left(\int_\Omega 1^s\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}\left(\int_\Omega (|f(x)|^p)^t\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{t}}\\
&= [m(\Omega)]^{\frac{1}{s}}\left(\int_\Omega |f(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{t}}\\
&= [m(\Omega)]^{\frac{q-p}{q}}\,\|f\|_q^p < +\infty,
\end{aligned}$$

所以 $f\in L^p(\Omega)$, 并且

$$\|f\|_p \le [m(\Omega)]^{\frac{q-p}{pq}}\,\|f\|_q.$$

(2) 当 $\|f\|_\infty = 0$ 时, 由 (1) 部分的结论可知 $\|f\|_p\equiv 0$, $\forall p>1$, 此时结论显然成立. 下设 $\|f\|_\infty>0$.

一方面, 由(5.1)可得

$$\varlimsup_{p\to+\infty}\|f\|_p \le \varlimsup_{p\to+\infty}[m(\Omega)]^{\frac{1}{p}}\,\|f\|_\infty = \|f\|_\infty. \tag{5.2}$$

另一方面, 对任意 $\epsilon\in(0,\|f\|_\infty)$, 令

$$E_\epsilon = \{x\in\Omega \mid |f(x)|\ge \|f\|_\infty-\epsilon\},$$

下证 $m(E_\epsilon)>0$. 反证法, 假设 $m(E_\epsilon)=0$, 由 $\|f\|_\infty$ 的定义可得

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E_\epsilon}|f(x)| \ge \inf_{\substack{E_0\subset\Omega\\ m(E_0)=0}}\left(\sup_{x\in\Omega\setminus E_0}|f(x)|\right) = \|f\|_\infty. \tag{5.3}$$

但是另一方面，对任意 $x\in\Omega\setminus E_\epsilon$, 有 $|f(x)|\le\|f\|_\infty-\epsilon$, 从而

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E_\epsilon}|f(x)| \le \|f\|_\infty-\epsilon,$$

这与(5.3)矛盾. 所以 $m(E_\epsilon)>0$. 于是

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathrm{d}x &\ge \int_{E_\epsilon}|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\\
&\ge \int_{E_\epsilon}(\|f\|_\infty-\epsilon)^p\,\mathrm{d}x\\
&= m(E_\epsilon)\left(\|f\|_\infty-\epsilon\right)^p,
\end{aligned}$$

进而

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \ge [m(E_\epsilon)]^{\frac{1}{p}}\left(\|f\|_\infty-\epsilon\right),$$

$$\begin{aligned}
\varliminf_{p\to+\infty}\|f\|_p &\ge \varliminf_{p\to+\infty}[m(E_\epsilon)]^{\frac{1}{p}}\left(\|f\|_\infty-\epsilon\right)\\
&= \|f\|_\infty-\epsilon.
\end{aligned}$$

由 $\epsilon>0$ 的任意性可知

$$\varliminf_{p\to+\infty}\|f\|_p \ge \|f\|_\infty. \tag{5.4}$$

综合(5.2)与(5.4)式, 可得

$$\lim_{p\to+\infty}\|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

作业题 5.4 证明

定理 5.2. Brezis-Lieb 引理

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, $1 \le p < \infty$. 若 $L^p(\Omega)$ 中的函数列 $\{u_n\}$ 满足

(1) $\{u_n\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的有界点列;

(2) $u_n(x) \to u(x)\ a.e.x \in \Omega \quad (n \to \infty)$.

则 $u \in L^p(\Omega)$ 并且

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p\right) = \|u\|_p^p.$$

♡

证明 Step1. 由于 $\{u_n\}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中有界, 则存在 $M > 0$, 使得

$$\|u_n\|_p \le M, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

由于

$$u_n(x) \to u(x)\ a.e.x \in \Omega \quad (n \to \infty),$$

则

$$|u_n(x)|^p \to |u(x)|^p\ a.e.x \in \Omega \quad (n \to \infty).$$

由 Fatou 引理 (P107) 可得

$$\int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varliminf_{n\to\infty} |u_n(x)|^p \,\mathrm{d}x \le \varliminf_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n(x)|^p \,\mathrm{d}x = \varliminf_{n\to\infty} \|u_n\|_p^p \le M^p < +\infty,$$

所以 $u \in L^p(\Omega)$.

Step2. (为什么要有这一步？从下面的(5.7)式最后一步估计可以看到端倪) 任取 $\epsilon > 0$. 下证存在只与 ϵ 和 p 有关的正常数 $C > 0$ 使得

$$\Big||a+b|^p - |a|^p\Big| \le \epsilon|a|^p + C|b|^p, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

事实上, 当 $p = 1$ 时,

$$\Big||a+b| - |a|\Big| \le |(a+b) - a| = |b| \le \epsilon|a| + |b|,$$

结论成立. 当 $p > 1$ 时, 由微分中值定理, 存在 $\theta \in [0,1]$ 使得

$$\begin{aligned}
&\Big||a+b|^p - |a|^p\Big| \\
=\ & \Big|p|\theta a + (1-\theta)b|^{p-2}(\theta a + (1-\theta)b)b\Big| \\
=\ & p|\theta a + (1-\theta)b|^{p-1}|b| \\
\le\ & p2^{p-1}\left(|\theta a|^{p-1} + |(1-\theta)b|^{p-1}\right)|b| \\
\le\ & p2^{p-1}\left(|a|^{p-1} + |b|^{p-1}\right)|b| \\
=\ & p2^{p-1}|a|^{p-1}|b| + p2^{p-1}|b|^p.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

令 $q = \frac{p}{p-1}$, 则 $p > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 由 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}
& p2^{p-1}|a|^{p-1}|b| \\
=\ & \left[(q\epsilon)^{\frac{1}{q}}|a|^{p-1}\right] \cdot \left[(q\epsilon)^{-\frac{1}{q}}\, p2^{p-1}|b|\right] \\
\le\ & \frac{\left[(q\epsilon)^{\frac{1}{q}}|a|^{p-1}\right]^q}{q} + \frac{\left[(q\epsilon)^{-\frac{1}{q}}\, p2^{p-1}|b|\right]^p}{p}
\end{aligned}$$

$$= \epsilon|a|^p + \left(\frac{2^p(p-1)}{\epsilon}\right)^{p-1}|b|^p \tag{5.6}$$

令

$$C = \left(\frac{2^p(p-1)}{\epsilon}\right)^{p-1} + p2^{p-1},$$

再将(5.6)式代入到(5.5)中可得

$$\Big||a+b|^p - |a|^p\Big| \le \epsilon|a|^p + C|b|^p.$$

Step3. 下证

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\left(\|u_n\|_p^p - \|u_n-u\|_p^p\right) - \|u\|_p^p\Big) = 0.$$

由 Step2 可得

$$\begin{aligned}
& \Big||u_n(x)|^p - |u_n(x)-u(x)|^p - |u(x)|^p\Big| \\
\le\ & \Big||u_n(x)|^p - |u_n(x)-u(x)|^p\Big| + |u(x)|^p \\
=\ & \Big||(u_n(x)-u(x))+u(x)|^p - |u_n(x)-u(x)|^p\Big| + |u(x)|^p \\
\le\ & \epsilon|u_n(x)-u(x)|^p + (C+1)|u(x)|^p.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

令

$$f_n^\epsilon(x) = \Big||u_n(x)|^p - |u_n(x)-u(x)|^p - |u(x)|^p\Big| - \epsilon|u_n(x)-u(x)|^p,$$

则由条件 (ii) 可知

$$f_n^\epsilon(x) \to 0 \quad a.e.\ x\in\Omega \quad (n\to\infty),$$

同样也有 f_n^ϵ 的正部 $(f_n^\epsilon)^+$ 也满足

$$(f_n^\epsilon)^+(x) \to 0, \quad a.e.\ x\in\Omega \quad (n\to\infty). \tag{5.8}$$

由(5.7)式可得

$$0 \le (f_n^\epsilon)^+(x) \le (C+1)|u(x)|^p, \quad \forall x\in\Omega. \tag{5.9}$$

由于 $u\in L^p(\Omega)$, 则 $|u|^p\in L^1(\Omega)$, 综合(5.8)和(5.9), 利用 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (f_n^\epsilon)^+(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \lim_{n\to\infty}(f_n^\epsilon)^+(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{5.10}$$

再由(5.7)式可得

$$\begin{aligned}
& \Big||u_n(x)|^p - |u_n(x)-u(x)|^p - |u(x)|^p\Big| \\
=\ & f_n^\epsilon(x) + \epsilon|u_n(x)-u(x)|^p \\
\le\ & (f_n^\epsilon)^+(x) + \epsilon|u_n(x)-u(x)|^p,
\end{aligned}$$

上式两端在 Ω 上积分可得

$$\begin{aligned}
& \Big|\left(\|u_n\|_p^p - \|u_n-u\|_p^p\right) - \|u\|_p^p\Big| \\
\le\ & \int_\Omega \Big||u_n(x)|^p - |u_n(x)-u(x)|^p - |u(x)|^p\Big|\,\mathrm{d}x \\
\le\ & \int_\Omega (f_n^\epsilon)^+(x)\,\mathrm{d}x + \epsilon\|u_n-u\|_p^p \\
\le\ & \int_\Omega (f_n^\epsilon)^+(x)\,\mathrm{d}x + \left(M^p + \|u\|_p^p\right)\epsilon,
\end{aligned}$$

在上式两端令 $n\to\infty$ 可得

$$\begin{aligned}
&\varlimsup_{n\to\infty}\left|\left(\|u_n\|_p^p-\|u_n-u\|_p^p\right)-\|u\|_p^p\right| \\
\le\ & \varlimsup_{n\to\infty}\int_\Omega (f_n^\epsilon)^+(x)\,\mathrm{d}x+\left(M^p+\|u\|_p^p\right)\epsilon \\
=\ & \left(M^p+\|u\|_p^p\right)\epsilon
\end{aligned}$$

再由 $\epsilon>0$ 的任意性可得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\left(\|u_n\|_p^p-\|u_n-u\|_p^p\right)-\|u\|_p^p\right|=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\left(\|u_n\|_p^p-\|u_n-u\|_p^p\right)-\|u\|_p^p\Big)=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|u_n\|_p^p-\|u_n-u\|_p^p\right)=\|u\|_p^p.$$

□

第 6 周

欢度国庆!

第 7 周

作业题 7.1 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个可测集, $1\le p<\infty$. 若 $\{f_n\}\subset L^p(\Omega)$, $f\in L^p(\Omega)$ 并且

$$\|f_n-f\|_p\to 0\quad (n\to\infty),$$

则函数列 $\{f_n\}$ 在 Ω 上依测度收敛于 f.

证明 对任意 $\sigma>0$, 都有

$$\begin{aligned}
\|f_n-f\|_p^p &= \int_\Omega |f_n(x)-f(x)|^p\,\mathrm{d}x \\
&\ge \int_{\Omega[|f_n-f|\ge\sigma]} |f_n(x)-f(x)|^p\,\mathrm{d}x \\
&\ge \int_{\Omega[|f_n-f|\ge\sigma]} \sigma^p\,\mathrm{d}x \\
&= \sigma^p\mathrm{m}\left(\Omega[|f_n-f|\ge\sigma]\right).
\end{aligned}$$

由于

$$\|f_n-f\|_p\to 0\quad (n\to\infty),$$

则

$$\mathrm{m}\left(\Omega[|f_n-f|\ge\sigma]\right)\to 0\quad (n\to\infty),$$

从而函数列 $\{f_n\}$ 在 Ω 上依测度收敛于 f. □

作业题 7.2 证明

引理 7.1. Risez 引理

设 $(X,\|\cdot\|)$ 是一个赋范线性空间, X_0 是 X 的一个真闭子空间, 则对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $y\in X$ 使得

(i) $\|y\|=1$,

(ii) $\forall x\in X_0$, 有 $\|y-x\|>\varepsilon$.

证明 由于 X_0 是 X 的真闭子空间, 则存在非零向量 $\bar{y}\in X\setminus X_0$. 由于 X_0 是闭集, 则

$$d=d(\bar{y},X_0)=\inf_{x\in X_0}\|\bar{y}-x\|>0.$$

由于 $\varepsilon\in(0,1)$, 则 $d<\frac{d}{\varepsilon}$, 从而存在 $x_0\in X_0$, 使得

$$d\le\|\bar{y}-x_0\|<\frac{d}{\varepsilon}. \tag{7.1}$$

令 $y=\frac{\bar{y}-x_0}{\|\bar{y}-x_0\|}$, 则 $\|y\|=1$. 对任意 $x\in X_0$, 都有

$$\begin{aligned} y-x &= \frac{\bar{y}-x_0}{\|\bar{y}-x_0\|}-x \\ &= \frac{1}{\|\bar{y}-x_0\|}\Big[\bar{y}-(x_0+\|\bar{y}-x_0\|x)\Big]. \end{aligned}$$

由于 $x_0,x\in X_0$, X_0 是 X 的子空间, 则

$$x_0+\|\bar{y}-x_0\|x\in X_0,$$

从而

$$\Big\|\bar{y}-(x_0+\|\bar{y}-x_0\|x)\Big\|\ge\inf_{x\in X_0}\|\bar{y}-x\|=d,$$

由(7.1)式可得

$$\|y-x\|=\left\|\frac{1}{\|\bar{y}-x_0\|}\Big[\bar{y}-(x_0+\|\bar{y}-x_0\|x)\Big]\right\|\ge\frac{d}{\|\bar{y}-x_0\|}>\varepsilon.$$

□

✍ 作业题 7.3

定义 7.1. 严格凸

设 $(X,\|\cdot\|)$ 是一个赋范线性空间. 如果对任意

$$x,y\in S=\{x\in X\mid\|x\|=1\},\quad \text{并且}\quad x\neq y,$$

都有

$$\|\alpha x+\beta y\|<1\quad(\forall\alpha,\beta>0,\ \alpha+\beta=1)$$

则称 $(X,\|\cdot\|)$ 是严格凸的赋范线性空间.

设 $(X,\|\cdot\|)$ 是严格凸的赋范线性空间, $M=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}\subset X$, 则对任意 $x\in X$, 证明存在唯一的 $y_0\in\operatorname{span}M$, 使得

$$\|x-y_0\|=\min_{y\in\operatorname{span}M}\|x-y\|.$$

(我们在课上已经证明了最佳逼近元 y_0 的存在性. 这里只需要证明, 在严格凸的条件下, 最佳逼近元是唯一的.)

证明 任取 $x \in X$, 假设存在 $y_0, y_1 \in\in \operatorname{span}M$ 并且 $y_0 \neq y_1$, 使得

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in \operatorname{span}M} \|x - y\| = \|x - y_1\|.$$

令 $d = \min_{y \in \operatorname{span}M} \|x - y\|$, 则 $d \geq 0$.

若 $d > 0$, 令

$$z_0 = \frac{x - y_0}{d}, \quad z_1 = \frac{x - y_1}{d},$$

则 $\|z_0\| = \|z_1\| = 1$ 并且 $z_0 \neq z_1$. 根据赋范空间 X 的严格凸性, 对任意 $\alpha, \beta > 0$ 且 $\alpha + \beta = 1$ 就有

$$\begin{aligned} 1 &> \|\alpha z_0 + \beta z_1\| \\ &= \frac{1}{d}\|\alpha(x - y_0) + \beta(x - y_1)\| \\ &= \frac{1}{d}\|x - (\alpha y_0 + \beta y_1)\|. \end{aligned}$$

由于 $y_0, y_1 \in \operatorname{span}M$, 则 $\alpha y_0 + \beta y_1 \in \operatorname{span}M$, 从而

$$1 > \frac{1}{d}\|x - (\alpha y_0 + \beta y_1)\| \geq \frac{1}{d} \cdot d = 1,$$

矛盾.

若 $d = 0$, 则 $\|x - y_0\| = \|x - y_1\| = 0$, 从而 $y_0 = x = y_1$, 这与 $y_0 \neq y_1$ 矛盾.

综上, 必有 $y_0 = y_1$. 所以 x 的最佳逼近元必定唯一. □

第 8 周

作业题 8.1 设 $(X, \|\cdot\|_1)$ 是 n 维赋范线性空间, $(Y, \|\cdot\|_2)$ 是 m 维赋范线性空间，数域均为实数域 $\mathbb{R}$. 证明 X 到 Y 上的任何线性算子都是有界线性算子.

证明 Step1.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift left, "\phi"] & Y \arrow[d, shift left, "\psi"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, shift left, "\phi^{-1}"] \arrow[r, "\mathbb{A}"] & \mathbb{R}^m \arrow[u, shift left, "\psi^{-1}"] \end{tikzcd}$$

设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 n 维空间 X 的一组 Hamel 基, $\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$ 是 m 维空间 Y 的一组 Hamel 基. 对任意 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in X$, 定义映射 $\phi : X \to \mathbb{R}^n$, 使得

$$\phi(x) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n;$$

对任意 $y = \sum\limits_{j=1}^{m} \eta_j f_j \in Y$, 定义映射 $\psi : Y \to \mathbb{R}^m$, 使得

$$\psi(y) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m.$$

易证 ϕ 和 ψ 都是拓扑同构映射, 从而 $\phi, \phi^{-1}, \psi, \psi^{-1}$ 都是有界性性算子.

Step2. 设 $T : X \to Y$ 是一个线性算子, 则 T 与 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性算子

$$\mathbb{A} = \psi \circ T \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

一一对应. 下证 $\mathbb{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是有界线性算子.

根据线性代数的知识可知, 存在一个 $n\times m$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times m}$, 使得对任意 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$, 都有

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}\xi=\xi A &= (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{pmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \xi_i a_{i1}, \sum_{i=1}^n \xi_i a_{i2}, \cdots, \sum_{i=1}^n \xi_i a_{im}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \xi_i\left(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{im}\right),
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{A}\xi|_m \\
=& \left|\sum_{i=1}^n \xi_i\left(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{im}\right)\right|_m \\
\le& \sum_{i=1}^n |\xi_i|\cdot|(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{im})|_m \\
\le& \left(\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2\right)^{\frac12}\cdot\left(\sum_{i=1}^n|(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{im})|_m^2\right)^{\frac12} \\
=& |\xi|_n\cdot\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m|a_{ij}|^2\right)^{\frac12},
\end{aligned}$$

所以 $\mathbb{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是有界线性算子.

Step3. 由于

$$T=\psi^{-1}\circ\mathbb{A}\circ\phi,$$

$\psi,\mathbb{A},\phi$ 都是有界线性算子, 则 T 也是有界线性算子. □

作业题 8.2 设 $D=[a,b]\times[a,b]\subset\mathbb{R}^2$ 是一个正方形区域, 三元函数 $k(x,y,u)$ 在 $D\times\mathbb{R}^1$ 上连续. 令

$$(K\phi)(x)=\int_a^b k\left(x,y,\phi(y)\right)dy,\quad \phi\in C[a,b].$$

证明 K 是从 $C[a,b]$ 映入 $C[a,b]$ 的全连续算子. (提示: 证明紧性需要用到 Ascoli-Arezela 定理.)

证明 Step1. 由于 $k(x,y,u)$ 在 $D\times\mathbb{R}^1$ 上连续, 则对任意 $\phi\in C[a,b]$, $K\phi$ 也在 $[a,b]$ 上连续, 即 $K\phi\in C[a,b]$.

Step2. 下证 $K:C[a,b]\to C[a,b]$ 是紧算子.

设 S 是 $C[a,b]$ 中的有界集:

$$\|\phi\|\le C,\quad \forall\phi\in S,$$

其中 $C>0$ 是正的常数. 则对任意 $x\in[a,b]$ 以及任意 $\phi\in S$, 有 $|\phi(x)|\le C$, 从而

$$|(K\phi)(x)|=\left|\int_a^b k(x,y,\phi(y))\,\mathrm{d}y\right|\le\int_a^b M\,\mathrm{d}y=M(b-a),$$

其中

$$M=\max_{\substack{(x,y)\in D\\|u|\le C}}|k(x,y,u)|.$$

所以 $\|k\phi\| \le M(b-a)$, $\forall \phi \in S$, 即 $K(S)$ 中的函数在 $[a,b]$ 上一致有界.

另一方面, 对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 $k(x,y,u)$ 在 $D\times[-C,C]$ 上一致连续, 则存在只依赖于 ε 的正数 $\delta > 0$, 使得对任意 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$, 有

$$|k(x_1,y,u) - k(x_2,y,u)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \forall u \in [a,b],\ |t| \le C.$$

于是对任意 $\phi \in S$, 有

$$\begin{aligned} & |(K\phi)(x_1) - (K\phi)(x_2)| \\ = & \left|\int_a^b [k(x_1,y,\phi(y)) - k(x_2,y,\phi(y))]\,\mathrm{d}y\right| \\ < & \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}y = \varepsilon. \end{aligned}$$

所以 $K(S)$ 中的函数在 $[a,b]$ 上等度连续. 根据 Ascoli-Arezela 定理, $K(S)$ 是 $C[a,b]$ 中的列紧集, 从而 $K: C[a,b]\to C[a,b]$ 是紧算子.

Step3. 下证 K 是连续算子.

设 $\{\phi_n\} \subset C[a,b]$, $\phi_0 \in C[a,b]$ 并且 $\|\phi_n - \phi_0\| \to 0$ $(n\to\infty)$, 则 $\{\phi_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中的有界点列, 令

$$L = \sup\left\{\|\phi_0\|, \|\phi_1\|, \|\phi_2\|, \cdots, \|\phi_n\|, \cdots\right\}.$$

由于 $k(x,y,u)$ 在 $D\times[-L,L]$ 上一致连续, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在只依赖于 ε 的正数 $\delta>0$, 使得对任意 $u_1,u_2\in[-L,L]$ 且 $|u_1-u_2|<\delta$, 有

$$|k(x,y,u_1) - k(x,y,u_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

由于 $\|\phi_n - \phi_0\| \to 0$ $(n\to\infty)$, 则存在正整数 N, 使得对任意 $n > N$ 有

$$\begin{aligned} & |(K\phi_n)(x) - (K\phi_0)(x)| \\ = & \left|\int_a^b [k(x,y,\phi_n(y)) - k(x,y,\phi_0(y))]\,\mathrm{d}y\right| \\ < & \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}y = \varepsilon, \end{aligned}$$

从而

$$\|K\phi_n - K\phi_0\| = \max_{x\in[a,b]} |(K\phi_n)(x) - (K\phi_0)(x)| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \|K\phi_n - K\phi_0\| = 0,$$

$K: C[a,b]\to C[a,b]$ 是连续算子.

综上, $K: C[a,b]\to C[a,b]$ 是全连续算子.

□

作业题 8.3 设 X 是一个 Banach 代数, 则对任意 $x\in X$, 极限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

存在, 并且等于 $\inf\limits_{n\ge1} \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

证明 令 $r = \inf\limits_{n\ge1} \sqrt[n]{\|x^n\|}$, 根据下极限的定义, 显然

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \ge r.$$

下证

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \le r.$$

根据下确界的定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 m 使得

$$r \le \sqrt[m]{\|x^m\|} < r+\varepsilon. \tag{8.1}$$

另一方面, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 存在非负整数 $k_n, l_n \in \mathbb{N}$, 使得 $0 \le l_n < m$ 并且

$$n = k_n m + l_n.$$

由于

$$\|x^k\| \le \|x\|^k, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

则利用赋范代数的定义和(8.1)式, 就有

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\|x^n\|} = \sqrt[n]{\|x^{l_n} x^{k_n m}\|} &\le \sqrt[n]{\|x\|^{l_n} \cdot \|x^m\|^{k_n}} \\ = \quad \|x\|^{\frac{l^n}{n}} \cdot \|x^m\|^{\frac{k_n}{n}} &< \|x\|^{\frac{l_n}{n}} \cdot (r+\varepsilon)^{\frac{mk_n}{n}}.\end{aligned}$$

由于

$$0 \le \frac{l_n}{n} < \frac{m}{n} \to 0 \ (n\to\infty), \quad 1 \ge \frac{mk_n}{n} = \frac{n-l_n}{n} = 1 - \frac{l_n}{n} > 1 - \frac{m}{n} \to 1 \ (n\to\infty),$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{mk_n}{n} = 1,$$

从而

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \le \varlimsup_{n\to\infty} \left(\|x\|^{\frac{l_n}{n}} \cdot (r+\varepsilon)^{\frac{mk_n}{n}} \right) = \|x\|^0 \cdot (r+\varepsilon)^1 = r+\varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性可知

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \le r.$$

综上, 极限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

存在, 并且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \inf_{n\ge 1} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

□

第 9 周

作业题 9.1 (**连续线性算子的保范延拓**) 设 X 是赋范线性空间, Y 是 Banach 空间, D 是 X 的线性子空间, 算子

$$T : D \to Y$$

是连续线性算子. 证明 T 能唯一地延拓到 $\overline{D}$ 上成为连续线性算子

$$T_1 : \overline{D} \to Y,$$

使得 $\|T_1\| = \|T\|$ 并且

$$T_1 x = Tx, \quad \forall x \in D.$$

证明 Step1. 任取 $x \in \overline{D}$, 总存在点列 $\{x_n\} \subset D$, 使得

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

由于 $T: D \to Y$ 是连续线性算子, 从而也是有界线性算子, 存在常数 $C > 0$ 使得

$$\|Tx\| \le C\|x\|, \quad \forall x \in D. \tag{9.1}$$

于是对任意 $m, n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\|Tx_m - Tx_n\| \le C\|x_m - x_n\|. \tag{9.2}$$

由于 $\{x_n\}$ 在 X 中收敛, 根据(9.2)式可知 $\{Tx_n\}$ 就是 Y 中的 Cauchy 点列. 又因为 Y 是 Banach 空间, 所以 $\{Tx_n\}$ 在空间 Y 中收敛, 设

$$y = \lim_{n\to\infty} Tx_n,$$

下证 y 与点列 $\{x_n\}$ 的选取无关. 若存在点列 $\{z_n\} \subset D$ 使得

$$x = \lim_{n\to\infty} z_n,$$

按上述过程同样可证 $\{Tz_n\}$ 是 Y 中的收敛点列, 从而存在 $z \in Y$, 使得

$$z = \lim_{n\to\infty} Tz_n.$$

由于

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_n\| = 0.$$

根据 T 的线性、有界性以及范数的连续性, 就有

$$\|y - z\| = \left\| \lim_{n\to\infty} Tx_n - \lim_{n\to\infty} Tz_n \right\| = \lim_{n\to\infty} \|T(x_n - z_n)\| \le \|T\| \cdot \lim_{n\to\infty} \|x_n - z_n\|,$$

因此 $z = y$.

这样就得到了 X 的闭子空间 $\overline{D}$ 到 Y 的算子 $T_1 : \overline{D} \to Y$, 使得

$$T_1 x = y = \lim_{n\to\infty} Tx_n, \tag{9.3}$$

其中 $\{x_n\}$ 是 D 中收敛于 x 的任意点列. 当 $x \in D$ 时, 令 $x_n \equiv x$, $n \in \mathbb{N}_+$, 于是

$$T_1 x = \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx.$$

Step2. 下证 $T_1 : \overline{D} \to Y$ 是连续线性算子.

对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, 任意 $x, z \in \overline{D}$, 存在 $\{x_n\}, \{z_n\} \subset D$ 使得

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad z = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

于是

$$\alpha x_n + \beta z_n \in D, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

$$\alpha x + \beta z = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n + \beta \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (\alpha x_n + \beta z_n),$$

从而根据 T 的线性和连续性就有

$$T_1(\alpha x + \beta z)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} T(\alpha x_n+\beta z_n)\\
&= \alpha \lim_{n\to\infty} Tx_n+\beta \lim_{n\to\infty} Tz_n\\
&= \alpha T_1x+\beta T_1 z,
\end{aligned}
$$

所以 T_1 是线性算子. 再根据范数的连续性就有

$$
\|T_1x\|=\left\|\lim_{n\to\infty} Tx_n\right\|=\lim_{n\to\infty}\|Tx_n\|\le \|T\|\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|T\|\|x\|,
$$

所以 T_1 是有界线性算子, 并且 $\|T_1\|\le\|T\|$.

Step3. 由 Step2 已证 $\|T_1\|\le\|T\|$. 另一方面,

$$
\|T\|=\sup_{\substack{x\in D\\ x\neq 0}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{\substack{x\in D\\ x\neq 0}}\frac{\|T_1x\|}{\|x\|}\le \sup_{\substack{x\in \overline{D}\\ x\neq 0}}\frac{\|T_1x\|}{\|x\|}=\|T_1\|.
$$

因此 $\|T\|=\|T_1\|$.

Step4. 设连续线性算子 $\tilde{T}:\overline{D}\to Y$ 也满足 $\tilde{T}x=Tx$ $(x\in D)$ 并且 $\|T\|=\|\tilde{T}\|$. 对任意 $x\in\overline{D}$, 存在点列 $\{x_n\}\subset D$ 使得 $x_n\to x$ $(n\to\infty)$, 利用范数的连续性可知

$$
\begin{aligned}
0 &\le \|T_1x-\tilde{T}x\|\\
&= \left\|\left(\lim_{n\to\infty} T_1x_n\right)-\left(\lim_{n\to\infty}\tilde{T}x_n\right)\right\|\\
&= \left\|\left(\lim_{n\to\infty} Tx_n\right)-\left(\lim_{n\to\infty} Tx_n\right)\right\|\\
&= \lim_{n\to\infty}\|Tx_n-Tx_n\|=0,
\end{aligned}
$$

从而 $T_1x=\tilde{T}x$. 由 $x\in\overline{D}$ 的任意性可知 $T=\tilde{T}$.

综上, T 能唯一地延拓到 $\overline{D}$ 上成为连续线性算子

$$
T_1:\overline{D}\to Y,
$$

使得 $\|T_1\|=\|T\|$ 并且

$$
T_1x=Tx,\quad \forall x\in D.
$$

□

作业题 9.2 设 $k\in C[a,b]$. 定义 $C[a,b]$ 上的线性泛函

$$
f(x)=\int_a^b k(t)x(t)\mathrm{d}t,\quad \forall x\in C[a,b].
$$

证明 f 是 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函, 并求出泛函 f 的范数 $\|f\|$.

证明 Step1. 显然, f 是 $C[a,b]$ 上的线性泛函. 对任意 $x\in C[a,b]$, 有

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= \left|\int_a^b k(t)x(t)\,\mathrm{d}t\right|\\
&\le \int_a^b |k(t)||x(t)|\,\mathrm{d}t\\
&\le \int_a^b |k(t)|\max_{t\in[a,b]}|x(t)|\,\mathrm{d}t\\
&= \left(\int_a^b |k(t)|\,\mathrm{d}t\right)\|x\|,
\end{aligned}
$$

所以 f 是 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函，并且

$$\|f\| \le \int_a^b |k(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Step2. 令 $x(t) = signk(t)$, $t \in [a,b]$, 则

$$|k(t)| = k(t)x(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

由于 $k \in C[a,b]$, 则 x 是 $[a,b]$ 上的可测函数, 并且 $\sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| \le 1$.

由 Lusin 定理, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 村子闭集 $F_n \subset [a,b]$ 以及 $x_n \in C[a,b]$ 使得

(i) $m\left([a,b] \setminus F_n\right) \le \frac{1}{n}$;

(ii) $x_n(t) = x(t)$, $\forall t \in F_n$;

(iii) $\|x_n\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x_n(t)| \le \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| \le 1$.

于是

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b k(t)x_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b k(t)x(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
\le\ & \int_a^b |k(t)|\cdot|x_n(t)-x(t)|\,\mathrm{d}t \\
=\ & \left(\int_{F_n} + \int_{[a,b]\setminus F_n}\right) |k(t)|\cdot|x_n(t)-x(t)|\,\mathrm{d}t \\
=\ & \int_{[a,b]\setminus F_n} |k(t)|\cdot|x_n(t)-x(t)|\,\mathrm{d}t \\
\le\ & \int_{[a,b]\setminus F_n} \max_{t\in[a,b]} |k(t)|\cdot\left(\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)| + \sup_{t\in[a,b]}|x(t)|\right)\mathrm{d}t \\
\le\ & \frac{1}{n}\cdot 2K,
\end{aligned}$$

其中 $K = \max\limits_{t\in[a,b]} |k(t)|$, 从而

$$\begin{aligned}
\int_a^b |k(t)|\,\mathrm{d}t &= \left|\int_a^b |k(t)|\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b k(t)x(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le \left|\int_a^b k(t)x_n(t)\,\mathrm{d}t\right| + \frac{2K}{n} = |f(x_n)| + \frac{2K}{n} \\
&\le \|f\|\|x_n\| + \frac{2K}{n} \le \|f\| + \frac{2K}{n},
\end{aligned}$$

由 $n \in \mathbb{N}_+$ 的任意性可得

$$\int_a^b |k(t)|\,\mathrm{d}t \le \|f\|.$$

综上,

$$\|f\| = \int_a^b |k(t)|\,\mathrm{d}t.$$

□

✍ 作业题 9.3

定义 9.1. Schauder 基

设 X 是一个赋范线性空间, $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}_+\}$ 是 X 中的可数向量列. 如果对任意 $x \in X$, 存在唯一的一列数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \cdots \in \mathbb{F}$, 使得

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k,$$

则称 $\{e_k\}$ 是 X 的一组 Schauder 基. 如果还有 $\|e_k\| = 1$ $(\forall k \in \mathbb{N}_+)$, 则称 $\{e_k\}$ 是 X 的一组标准 Schauder 基. ♣

设 $1 \le p < \infty$. 对任意 $k \in \mathbb{N}_+$, 取

$$e_k = (0, \cdots, 0, \overset{k}{1}, 0, \cdots) \in l^p,$$

证明 $\{e_k\}$ 是 l^p 的一组标准 Schauder 基.

注意 原题中 $1 \le p \le \infty$ 是错误的.

证明 Step1. 显然

$$\|e_k\|_p = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}_+.$$

对任意

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots) \in l^p$$

以及任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 令

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, 0, 0, \cdots),$$

则 $x_n \in l^p$, 并且

$$\|x - x_n\|_p^p = \|(0, \cdots, 0, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \cdots)\|_p^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k|^p.$$

由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p < +\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\|_p^p = 0$, 从而

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

Step2. 设存在数列 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n, \cdots \in \mathbb{F}$, 使得

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e_k.$$

令 $\tilde{x}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k e_k = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n, \cdots)$, 则 $\tilde{x}_n \in l^p$ 并且 $\tilde{x}_n \to x$ $(n \to \infty)$, 于是存在 $M > 0$, 使得

$$\sum_{k=1}^{n} |\beta_n|^p \le \|\tilde{x}_n\|_p^p \le M, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

从而级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^p$ 收敛, 即

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n, \cdots) \in l^p.$$

令 $\gamma_k = \alpha_k - \beta_k$ $(k \in \mathbb{N}_+)$, $z = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n, \cdots)$, 则 $z \in l^p$. 另一方面, 按照 Step1 的过程可证

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k,$$

从而

$$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n, \cdots) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k) e_k = \lim_{n\to\infty} (x_n - \tilde{x}_n) = 0,$$

于是

$$\alpha_k = \beta_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_+.$$

□

第 10 周

✍ **作业题 10.1** 设 X 是一个内积空间, M 是 X 中的闭凸子集, $x \in X$. 证明: $y_0 \in M$ 是 x 在 M 中的最佳逼近元, 即

$$\|x - y_0\| = d(x, M),$$

当且仅当

$$Re\langle x - y_0, y_0 - y\rangle \geq 0, \quad \forall y \in M.$$

证明 (充分性) 设 $y_0 \in M$ 满足

$$\mathrm{Re}\langle x - y_0, y_0 - y\rangle \geq 0, \quad \forall y \in M,$$

则对任意 $y \in M$, 有

$$\begin{aligned}
\|x - y\|^2 &= \|(x - y_0) - (y - y_0)\|^2 \\
&= \|x - y_0\|^2 + \|y - y_0\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x - y_0, y - y_0\rangle \\
&\geq \|x - y_0\|^2,
\end{aligned}$$

所以

$$\|x - y_0\| = \inf_{y\in M} \|x - y\| = d(x, M).$$

(必要性) 设 $y_0 \in M$ 是向量 x 在 M 中的最佳逼近元, 则对任意 $y \in M$, 任意 $t \in [0, 1]$, 就有

$$\bar{y} = (1 - t)y_0 + ty \in M,$$

并且

$$\begin{aligned}
\|x - y_0\| &\leq \|x - \bar{y}\| \\
&= \|x - [(1 - t)y_0 + ty]\| \\
&= \|(x - y_0) - t(y - y_0)\|,
\end{aligned}$$

从而

$$\|x - y_0\|^2 \leq \|(x - y_0) - t(y - y_0)\|^2.$$

按照内积空间中范数的定义将上式展开可得

$$t^2\|x - y_0\|^2 \geq 2t\mathrm{Re}\langle x - y_0, y - y_0\rangle, \quad \forall t \in [0, 1],$$

从而

$$t\|x - y_0\|^2 \geq 2\mathrm{Re}\langle x - y_0, y - y_0\rangle, \forall t \in (0, 1].$$

上式中令 $t \to 0$ 可得

$$\mathrm{Re}\langle x-y_0, y-y_0\rangle \le 0, \quad \forall y \in M,$$

即

$$\mathrm{Re}\langle x-y_0, y_0-y\rangle \ge 0, \quad \forall y \in M.$$

□

作业题 10.2 设 X 是一个内积空间, $x_0 \in X$, 实数 $r > 0$. 令

$$M = \{x \in X \mid \|x-x_0\| \le r\}.$$

证明:
(1) M 是 X 中的闭凸子集;
(2) 对任意 $x \in X$, 令

$$y = \begin{cases} x_0 + r\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}, & x \notin M, \\ x, & x \in M. \end{cases}$$

则 y 是 x 在 M 中的最佳逼近元.

证明 (1) 根据范数的连续性可知, 映射

$$x \mapsto \|x-x_0\|$$

是 X 上的连续映射, 所以

$$M = \{x \in X \mid \|x-x_0\| \le r\}$$

是 X 中的闭集. 对任意 $x, y \in M$, 任意 $t \in [0,1]$, 都有

$$\begin{aligned} \|tx+(1-t)y\| &\le t\|x\| + (1-t)\|y\| \\ &\le tr + (1-t)r = r, \end{aligned}$$

所以 M 是 X 中的凸集.

综上, M 是 X 中的闭凸集.

(2) 当 $x \in M$ 时, 显然 $y = x$ 是 x 在 M 中的最佳逼近元.

下设 $x \notin M$, 则

$$\|x-x_0\| > r.$$

此时令

$$y = x_0 + r\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}.$$

对任意 $\bar{y} \in M$, 就有

$$\begin{aligned} &\langle x-y, y-\bar{y}\rangle \\ =& \left\langle x-x_0-r\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}, x_0+r\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}-\bar{y}\right\rangle \\ =& \left\langle \left(1-\frac{r}{\|x-x_0\|}\right)(x-x_0), (x_0-\bar{y}) + \frac{r}{\|x-x_0\|}(x-x_0)\right\rangle \\ =& \left(1-\frac{r}{\|x-x_0\|}\right)\left\langle x-x_0, (x_0-\bar{y}) + \frac{r}{\|x-x_0\|}(x-x_0)\right\rangle \\ =& \left(1-\frac{r}{\|x-x_0\|}\right)\left[\langle x-x_0, x_0-\bar{y}\rangle + r\|x-x_0\|\right]. \end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式可得

$$|\mathrm{Re}\,\langle x-x_0, x_0-\bar{y}\rangle| \le \|x-x_0\|\|x_0-\bar{y}\| \le r\|x-x_0\|,$$

从而

$$\operatorname{Re}\langle x-x_0, x_0-\bar{y}\rangle + r\|x-x_0\| \geq -(r\|x-x_0\|) + r\|x-x_0\| = 0.$$

综上,

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\langle x-y, y-\bar{y}\rangle\\ =\ &\left(1-\frac{r}{\|x-x_0\|}\right)[\operatorname{Re}\langle x-x_0, x_0-\bar{y}\rangle + r\|x-x_0\|] \geq 0,\end{aligned}$$

所以 y 也是 x 在 M 中的最佳逼近元.

□

第 11 周

作业题 11.1 证明:

定理 11.1. Riesz-Fischer 定理

设 $\{e_i\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的规范正交系, 则对任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$, 存在 $f\in L^2(\Omega)$, 使得 $\|f\|_2=\|x\|_2$ 并且

$$\langle f, e_i\rangle = \xi_i, \quad i=1,2,\cdots.$$

证明 对任意 $k\in\mathbb{N}_+$, 令

$$S_k=\sum_{i=1}^{k}\xi_i e_i\in L^2(\Omega).$$

对任意 $p\in\mathbb{N}_+$, 由于 $\{e_i\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的规范正交系, 则有

$$\|S_{k+p}-S_k\|_2^2=\left\|\sum_{i=k+1}^{k+p}\xi_i e_i\right\|_2^2=\sum_{i=k+1}^{k+p}|\xi|^2.$$

由于 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$, 根据上式可知 $\{S_k\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的 Cauchy 点列. 由于 $L^2(\Omega)$ 是 Banach 空间, 则存在 $f\in L^2(\Omega)$ 使得

$$f=\lim_{k\to\infty}S_k=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\xi_i e_i=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i.$$

对任意 $j\in\mathbb{N}_+$, 根据内积对第一变元的连续性和线性, 就有

$$\langle f, e_j\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i, e_j\right\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\langle e_i, e_j\rangle=\xi_j.$$

对任意 $k\in\mathbb{N}_+$, 由于

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}\xi_i e_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{k}|\xi_i|^2,$$

根据范数的连续性以及 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$ 就有

$$\|f\|_2^2=\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i\right\|^2=\lim_{k\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{k}\xi_i e_i\right\|^2=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}|\xi_k|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2=\|x\|_2^2,$$

从而 $\|f\|_2=\|x\|_2$.

□

第 12 周

设 $e_0(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}$, $e_1(t) = \cos t$, $e_2(t) = \sin t$, $e_3(t) = \cos 2t$, $e_4(t) = \sin 2t$, $\cdots$, $e_{2n-1}(t) = \cos nt$, $e_{2n}(t) = \sin nt$, $\cdots$. 令 $M = \{e_i\}_{i=0}^{\infty}$, 我们已经知道, M 是 Hilbert 空间

$$L^2[-\pi,\pi], \quad \langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t, \ f,g \in L^2[-\pi,\pi]$$

中的规范正交系.

按以下步骤证明, 三角函数系 M 是 $L^2[a,b]$ 中的完全规范正交系.

Step1. 证明

定理 12.1. Weierstrauss 三角逼近定理

设 $f \in C[-\pi,\pi]$, 并且 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在三角多项式

$$T(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad t \in [-\pi,\pi],$$

使得

$$\max_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t) - T(x)| < \varepsilon.$$

Step2. 设 T 是 $[-\pi,\pi]$ 上的一个三角多项式, 则 $T \in C[-\pi,\pi]$, 同时也有 $T \in L^2[-\pi,\pi]$. 证明: T 关于三角函数系 M 满足 Parseval 等式, 即

$$\|T\|^2 = \sum_{e\in M} |\langle T,e\rangle|^2.$$

(提示：根据三角函数系的两两正交性, 上述等式右边的级数其实是一个有限和. 计算三角多项式 T 的范数时也要利用三角函数系的两两正交性.)

Step3. 利用 Steklov 定理 (教材 P255 推论 2), 证明 M 是 $L^2[a,b]$ 中的完全规范正交系.

证明 **Step1.** (Fejér 核方法) 由于 $f \in C[-\pi,\pi]$, 则 $f \in L^2[-\pi,\pi]$. 对任意 $e_k \in M$, f 关于 e_k 的 Fourior 系数为

$$a_k = \langle f, e_k\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} f(t)\,\mathrm{d}t, & k = 0, \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t, & k = 2n-1, \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t, & k = 2n. \end{cases}$$

记 f 的 Fourior 级数的前 n 项部分和为

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \langle f, e_k\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k,$$

则 $S_n \in C[-\pi,\pi] \subset L^2[-\pi,\pi]$, 并且 $S_n(-\pi) = S_n(\pi)$. 将 Fourior 系数代入, 得

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1}\cos nt + a_{2k}\sin nt) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos ks\,\mathrm{d}s\right)\cos kt+\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin ks\,\mathrm{d}s\right)\sin kt\right]\\
=&\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos ks\cos kt+\sin ks\sin kt)\right]\mathrm{d}s\\
=&\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(s-t)\right]\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

将 $S_n(t)$ 和 $f(t)$ 延拓成 $\mathbb{R}$ 上的以 2π 为周期的连续函数, 并令 $\tau=s-t$, 则

$$
S_n(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(t+\tau)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\tau\right]\mathrm{d}\tau.
$$

注意到上式右端积分中的被积函数也是以 2π 为周期的连续函数, 因此在 $[-\pi-t,\pi-t]$ 上的积分等于 $[-\pi,\pi]$ 上的积分, 从而

$$
S_n(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+\tau)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\tau\right]\mathrm{d}\tau,\quad t\in[-\pi,\pi].
$$

注意到 (积化和差)

$$
\cos kx\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right],
$$

则

$$
\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x,
$$

于是

$$
S_n(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+\tau)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau}{2\sin\frac{\tau}{2}}\,\mathrm{d}\tau,\quad t\in[-\pi,\pi].
$$

令

$$
\begin{aligned}
\sigma_n(t)&=\frac{S_0(t)+S_1(t)+\cdots+S_{n-1}(t)}{n}\\
&=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\tau}{\sin\frac{\tau}{2}}\right]f(t+\tau)\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

显然, σ_n **也是一个三角多项式**. 注意到 (积化和差)

$$
\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\cdot\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos kx-\cos(k+1)x\right],
$$

则

$$
\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x=\frac{1-\cos nx}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.
$$

令 (称为 Fejér 核)

$$
\Phi_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\left[\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}\right],
$$

于是

$$
\sigma_n(t)=\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(\tau)f(t+\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{12.1}
$$

下证 Fejér 核 $\Phi_n(t)$ 满足以下 3 条性质:

(i) $\Phi_n(x) \geq 0$;

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

(iii) 对任意固定的 $\delta \in (0,\pi)$, 记

$$\eta_n(\delta) = \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n(\delta) = 0$.

性质 (i) 显然成立.

注意到 Fejér 核 $\Phi_n(t)$ 和函数 f 无关. 当 $f(t) \equiv 1$ 时, f 关于 $e_k \in M$ 的 Fourior 系数为

$$a_0 = \sqrt{2}; \quad a_k = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_+.$$

所以

$$S_n(t) \equiv S_0(t) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

从而

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,\mathrm{d}t = \sigma_n(t) = \frac{S_0(t) + S_1(t) + \cdots + S_{n-1}(t)}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

性质 (ii) 得证.

当 $0 < \delta \leq x \leq \pi$ 时, $\sin\frac{x}{2} \geq \sin\frac{\delta}{2} > 0$, 从而

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\left[\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}\right] \leq \frac{1}{2n\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}},$$

$$0 \leq \eta_n(\delta) \leq \frac{\pi-\delta}{2\pi\sin^2\frac{\delta}{2}} \cdot \frac{1}{n},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n(\delta) = 0$. 性质 (iii) 得证.

现在 f 已经延拓成了 $\mathbb{R}$ 上的 2π 周期函数, 则 f 在 $\mathbb{R}$ 上有界并且一致连续, 即存在 $M > 0$ 使得

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\forall x', x'' \in \mathbb{R} \ :\ |x' - x''| < \delta,$$

都有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

利用上述 $\delta > 0$ 以及 Fejér 核 $\Phi_n(t)$ 的性质 (ii), 我们有

$$\begin{aligned} f(t) - \sigma_n(t) &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) f(t) - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau f(t+\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(\tau)\left[f(t) - f(t+\tau)\right]\mathrm{d}\tau \\ &=: J_- + J_0 + J_+, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} J_- &= \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(\tau)\left[f(t) - f(t+\tau)\right]\mathrm{d}\tau, \\ J_0 &= \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(\tau)\left[f(t) - f(t+\tau)\right]\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

$$J_+ \quad = \quad \int_\delta^\pi \Phi_n(\tau)\,[f(t)-f(t+\tau)]\,\mathrm{d}\tau,$$

利用 Fejér 核 $\Phi_n(t)$ 的性质 (iii) 以及函数 f 的有界性和一致连续性, 就有

$$|J_-| \le 2M\eta_n(\delta), \quad |J_+| \le 2M\eta_n(\delta), \quad |J_0| \le \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n(\delta)=0$, 则存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 都有

$$2M\eta_n(\delta) < \frac{1}{4}\varepsilon,$$

从而

$$|f(t)-\sigma_n(t)| < \varepsilon, \quad \forall t\in\mathbb{R}, \quad \forall n>N.$$

令 $T(t)=\sigma_n(t)$, $n>N$, 则 T 是 $[-\pi,\pi]$ 上的三角多项式并且

$$\max_{t\in[-\pi,\pi]}|f(t)-T(t)| < \varepsilon.$$

Step2. 设 T 是 $[-\pi,\pi]$ 上的三角多项式,

$$T(t)=a_0+\sum_{k=1}^m (a_k\cos kt+b_k\sin kt)=\sum_{i=0}^{2m}c_ie_i(t), \quad t\in[-\pi,\pi],$$

其中

$$c_i=\begin{cases} a_0, & i=0,\\ a_k, & i=2k-1\\ b_k, & i=2k.\end{cases}$$

由于 $M=\{e_i\}_{i=0}^\infty$ 是 $L^2[-\pi,\pi]$ 中的规范正交系, 则

$$\|T\|^2=\sum_{i=0}^{2m}\|c_ie_i\|^2=\sum_{i=0}^{2m}|c_i|^2.$$

另一方面, 对任意 $l\in\mathbb{N}$, 由 $L^2[-\pi,\pi]$ 中内积的定义, 就有

$$\begin{aligned}&\langle T,e_l\rangle\\ =\ &\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{i=0}^{2m}c_ie_i(t)\right]\overline{e_l(t)}\,\mathrm{d}t\\ =\ &\sum_{i=0}^{2m}c_i\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e_i(t)\overline{e_l(t)}\right]\mathrm{d}t\\ =\ &\sum_{i=0}^{2m}c_i\langle e_i,e_l\rangle\end{aligned}$$

由于 $M=\{e_i\}_{i=0}^\infty$ 是 $L^2[-\pi,\pi]$ 中的规范正交系, 则

$$\begin{cases}\langle T,e_l\rangle=c_l, & l\le 2m,\\ \langle T,e_l\rangle=0, & l>2m.\end{cases}$$

综上,

$$\sum_{e\in M}|\langle T,e\rangle|^2=\sum_{i=0}^\infty|\langle T,e_i\rangle|^2=\sum_{i=0}^{2m}|c_i|^2=\|T\|^2.$$

Step3. 将 $[-\pi,\pi]$ 上的三角多项式全体集合记为 $\mathrm{Tri}[-\pi,\pi]$, 将 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(-\pi)=f(\pi)$ 的连续函数全体集合记为 $C(\mathbb{T})$, 显然 $\mathrm{Tri}[-\pi,\pi]\subset C(\mathbb{T})\subset L^2[-\pi,\pi]$, 并且 $\mathrm{Tri}[-\pi,\pi]$ 和 $C(\mathbb{T})$ 在 L^2-范数

$$\|f\|=\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}$$

下都是 $L^2[-\pi,\pi]$ 的赋范线性子空间. 由 Step1, 对任意 $f\in C(\mathbb{T})$ 以及任意 $\varepsilon>0$, 存在 $T\in\mathrm{Tri}[-\pi,\pi]$ 使得

$$\max_{t\in[-\pi,\pi]}|f(t)-T(t)|<\sqrt{\pi}\varepsilon,$$

从而

$$\begin{aligned}\|f-T\| &= \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-T(t)|^2\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\le \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\max_{t\in[-\pi,\pi]}|f(t)-T(t)|^2\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{Tri}[-\pi,\pi]$ 按照 L^2-范数在 $C(\mathbb{T})$ 中稠密.

下证 $C(\mathbb{T})$ 按 L^2-范数在 $C[-\pi,\pi]$ 中稠密.

对任意 $f\in C[-\pi,\pi]$, 以及任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 令

$$\phi_n(t)=\begin{cases}f(t), & t\in\left[-\pi,\pi-\frac{2\pi}{n}\right]\\ k_n(t-\pi)+f(-\pi), & t\in\left(\pi-\frac{2\pi}{n},\pi\right],\end{cases}$$

其中

$$k_n=\frac{f(-\pi)-f\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)}{\pi-\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)},$$

显然, $\phi_n\in C(\mathbb{T})$. 令 $C=\max\limits_{t\in[-\pi,\pi]}|f(t)|$, 则 $\max\limits_{t\in[-\pi,\pi]}|\phi_n(t)|\le C$, 从而

$$\begin{aligned}&\|f-\phi_n\|^2\\ =\ &\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-\phi_n(t)|^2\,\mathrm{d}t\\ =\ &\frac{1}{\pi}\int_{\pi-\frac{2\pi}{n}}^{\pi}|f(t)-\phi_n(t)|^2\,\mathrm{d}t\\ \le\ &\frac{1}{\pi}\int_{\pi-\frac{2\pi}{n}}^{\pi}4C^2\,\mathrm{d}t\\ =\ &\frac{C^2}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{n}=\frac{2C^2}{n}\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

所以 $C(\mathbb{T})$ 按 L^2-范数在 $C[-\pi,\pi]$ 中稠密.

将 $[-\pi,\pi]$ 上的有界可测函数全体集合记为 $M_b[-\pi,\pi]$, 显然在 L^2 范数下 $M_b[-\pi,\pi]$ 也是 $L^2[-\pi,\pi]$ 的赋范线性子空间. 下证 $C[-\pi,\pi]$ 按 L^2-范数在 $M_b[-\pi,\pi]$ 中稠密.

任取 $f\in M_b[-\pi,\pi]$, 设

$$|f(x)|\le K,\quad a.e.\ x\in[-\pi,\pi].$$

对任意 $\varepsilon>0$, 由 Lusin 定理, 存在 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数 g 以及闭集 $F\subset[-\pi,\pi]$ 使得

(i) $f(t)=g(t),\ \forall t\in F$;

(ii) $m\left([-\pi,\pi]\setminus F\right)<\frac{\varepsilon^2}{4K^2}$;

(iii) $\max\limits_{t\in[-\pi,\pi]}|g(t)|\le K$.

于是,

$$\begin{aligned}
&\|f-g\|^2\\
=\ &\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-g(t)|^2\,\mathrm{d}t\\
=\ &\int_{[-\pi,\pi]\setminus F}|f(t)-g(t)|^2\,\mathrm{d}t\\
\le\ &4K^2m\left([-\pi,\pi]\setminus F\right)\\
<\ &\varepsilon^2,
\end{aligned}$$

即 $\|f-g\|<\varepsilon$. 所以 $C[-\pi,\pi]$ 按 L^2-范数在 $M_b[-\pi,\pi]$ 中稠密.

下证 $M_b[-\pi,\pi]$ 按 L^2-范数在 $L^2[-\pi,\pi]$ 中稠密.

任取 $f\in L^2[-\pi,\pi]$, 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 令

$$f_n(t)=\begin{cases}f(t), & |f(t)|\le n,\\ 0, & |f(t)|>n,\end{cases}$$

则 $f_n\in M_b[-\pi,\pi]$, 并且

$$\|f_n-f\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}|f_n(x)-f(x)|^2\,\mathrm{d}t=\int_{\{t\in[-\pi,\pi]\ |\ |f(t)|>n\}}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t,$$

从而

$$\|f\|^2\ge\int_{\{t\in[-\pi,\pi]\ |\ |f(t)|>n\}}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t\ge n^2m\{t\in[-\pi,\pi]\ |\ |f(t)|>n\},$$

即

$$m\{t\in[-\pi,\pi]\ |\ |f(t)|>n\}\le\frac{1}{n^2}\|f\|^2,\quad\forall n\in\mathbb{N}_+.\tag{12.2}$$

由于 $|f|^2\in L^1[-\pi,\pi]$, 由积分的绝对连续性 (教材 P113), 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于任意的可测集 $A\subset[-\pi,\pi]$ 且 $m(A)<\delta$, 都有

$$\int_A|f(t)|^2\,\mathrm{d}t<\varepsilon^2.$$

另一方面, 根据(12.2)式, 对上述 $\delta>0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 都有

$$m\{t\in[-\pi,\pi]\ |\ |f(t)|>n\}<\delta,$$

从而

$$\|f_n-2\|^2=\int_{\{t\in[-\pi,\pi]\ |\ |f(t)|>n\}}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t<\varepsilon^2,$$

即

$$\|f_n-f\|<\varepsilon,\quad\forall n>N.$$

所以 $M_b[-\pi,\pi]$ 按 L^2-范数在 $L^2[-\pi,\pi]$ 中稠密.

综上, 按照稠密性的传递关系, $\mathrm{Tri}[-\pi,\pi]$ 按照 L^2-范数在 $L^2[-\pi,\pi]$ 中稠密. 由 Step2 可知, 对任意 $f\in\mathrm{Tri}[-\pi,\pi]$, f 关于规范正交系 M 成立 Parseval 等式. 根据 Steklov 定理 (教材 P255 推论 2), M 是 $L^2[\pi,\pi]$ 中的完全规范正交系.

□