2019-2020 学年第 1 学期

数学分析作业

目录

第 5 周

作业题 5.1 设 A, B 为非空有界数集, 并且 $A \subset B$, 证明

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

证明 显然, $\inf A \leq \sup A$. 下证 $\inf B \leq \inf A$ 并且 $\sup A \leq \sup B$.

假设 $\inf B > \inf A$, 则 $\inf B$ 不是集合 A 的下界, 从而存在 $x_0 \in A$ 使得 $\inf B > x_0$. 另一方面, 由于 $A \subset B$，从而也有 $x_0 \in B$, 于是

$$\inf B > x_0 \geq \inf B,$$

矛盾.

假设 $\sup A > \sup B$, 则 $\sup B$ 不是集合 A 的上界, 从而存在 $x_1 \in A$ 使得 $\sup B < x_1$. 另一方面, 由于 $A \subset B$，从而也有 $x_1 \in B$, 于是

$$\sup B < x_1 \leq \sup B,$$

矛盾.

综上, $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$. □

作业题 5.2 设 S 为非空有下界 (不一定有上界) 的数集, 并且 $\inf S > 0$, 证明集合

$$S^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in S\}$$

有界并且

$$\sup S^{-1} > 0, \quad \inf S^{-1} \geq 0, \quad \sup S^{-1} = \frac{1}{\inf S}.$$

证明 Step1. 任取 $y \in S^{-1}$, 令 $x = y^{-1}$, 则 $x \in S$,

$$x \geq \inf S > 0,$$

从而

$$0 < y \leq \frac{1}{\inf S}, \quad \forall y \in S^{-1}. \tag{5.1}$$

所以 0 是 S^{-1} 的一个下界, $\frac{1}{\inf S}$ 是 S^{-1} 的一个上界, 并且

$$\sup S^{-1} > 0, \quad \inf S^{-1} \geq 0.$$

Step2. 由 Step1 可知 $\sup S^{-1} \leq \frac{1}{\inf S}$. 下面排除 $\sup S^{-1} < \frac{1}{\inf S}$ 的情况. 反证法, 假设 $\sup S^{-1} < \frac{1}{\inf S}$ 成立, 由于 $\sup S^{-1} > 0$, 则

$$0 < \inf S < \frac{1}{\sup S^{-1}}.$$

所以 $\frac{1}{\sup S^{-1}}$ 不是 S 的下界, 存在 $x \in S$ 使得

$$0 < \inf S \leq x < \frac{1}{\sup S^{-1}}.$$

令 $y = x^{-1}$, 则 $y \in S^{-1}$,

$$0 < \frac{1}{y} = x < \frac{1}{\sup S^{-1}},$$

从而

$$\sup S^{-1} < y.$$

但是另一方面, 由于 $y \in S^{-1}$, 则一定有

$$y \leq \sup S^{-1},$$

矛盾. 所以

$$\sup S^{-1} = \frac{1}{\inf S}.$$

□

✍ **作业题 5.3** 证明以下等式和不等式:

(1) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|, \quad \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

(2) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+$ 且 $n \geq 2$, 则

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right),$$

(3) Bernoulli(伯努利) 不等式: 设 $h \geq -1$, $n \in \mathbb{N}_+$, 则

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

特别地, 如果还有 $h \geq 0$ 并且 $n \geq 2$, 则还成立

$$(1+h)^n > \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n^2h^2}{4}.$$

(4) 算术-几何平均值不等式: 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个非负实数, 则

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}.$$

如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正实数, 还成立几何-调和平均值不等式:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

(5)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3 = \left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

注意 $\sum\limits_{k=1}^{n} s_k$ 表示对 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 按下标 k 从 1 到 n 求和, 即 $\sum\limits_{k=1}^{n} s_k = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$.

(6) 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin x < x < \tan x$. 若 $x \in \mathbb{R}$, 则 $|\sin x| \leq |x|$.

证明 (1) 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 由绝对值不等式可得

$$\begin{aligned} |a-b| &\geq |a| - |b|, \\ |a-b| &= |b-a| \geq |b| - |a|, \end{aligned}$$

综合上述两式可得

$$-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|,$$

所以

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|.$$

由于

$$f(t) = \frac{t}{1+t}, \quad t > 0$$

是严格增函数, 并且

$$|a+b| \leq |a| + |b|,$$

则 $f(|a+b|) \leq f(|a| + |b|)$, 从而

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\ = & \left(a^n + a^{n-1}b + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}\right) \\ & - \left(a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n\right) \\ = & a^n - b^n. \end{aligned}$$

(3) 当 $n=1$ 时, $(1+h)^1 = 1+1\cdot h$, 结论成立.
假设当 $n=k$ 时, 成立

$$(1+h)^k \geq 1+kh.$$

由于 $h\geq -1$, 则当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}&(1+h)^{k+1} = (1+h)^k\cdot(1+h) \geq (1+kh)\cdot(1+h)\\ =\ & 1+(k+1)h+kh^2 \geq 1+(k+1)h.\end{aligned}$$

综上, 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$ 以及任意 $h\geq -1$ 都有

$$(1+h)^n \geq 1+nh.$$

当 $n\geq 2$ 时, 有

$$\frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{n^2}{4},$$

从而对任意 $h\geq 0$ 都有

$$\begin{aligned}(1+h)^n &= 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n\\ &> \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n^2h^2}{4}.\end{aligned}$$

(4) 如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有一个是 0, 则算术-几何平均值不等式成立. 下设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正的实数.
当 $n=1$ 时, 两个不等式显然都成立.
假设当 $n=k$ 时, 有

$$\frac{a_1+\cdots+a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1\cdot\cdots\cdot a_k}.$$

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}&\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\\ =\ & \frac{a_1+\cdots+a_k}{k}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)(a_1+\cdots+a_k)+\frac{a_{k+1}}{k+1}\\ =\ & \frac{a_1+\cdots+a_k}{k}+\frac{ka_{k+1}-(a_1+\cdots+a_k)}{k(k+1)}.\end{aligned}$$

令

$$A=\frac{a_1+\cdots+a_k}{k},\quad B=\frac{ka_{k+1}-(a_1+\cdots+a_k)}{k(k+1)},$$

则 $A>0$, $A+B>0$. 再令 $h=\frac{B}{A}$, 则 $1+h>0$, $h>-1$, 利用 Bernoulli 不等式可得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}\\ =\ & (A+B)^{k+1} = A^{k+1}\left(1+\frac{B}{A}\right)^{k+1} = A^{k+1}(1+h)^{k+1}\\ \geq\ & A^{k+1}[1+(k+1)h] = A^{k+1}\left[1+\frac{(k+1)B}{A}\right] = A^k[A+(k+1)B]\\ =\ & A^k\cdot a_{k+1}.\end{aligned}$$

根据 $n=k$ 时的假设条件, 有

$$A^k=\left(\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}\right)^k \geq a_1\cdot\cdots\cdot a_k,$$

从而

$$\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\geq a_1\cdot\cdots\cdot a_k\cdot a_{k+1}.$$

综上, 算术-几何平均值不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}$$

成立.

利用算术-几何平均值不等式可得

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}}>0,$$

对上式取倒数, 就得到几何-调和平均值不等式:

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

(5) 当 $n=1$ 时, 两不等式显然都成立.

假设当 $n=l$ 时,

$$\sum_{k=1}^{l}k^2=\tfrac{l(l+1)(2l+1)}{6},$$
$$\sum_{k=1}^{l}k^3=\left(\tfrac{l(l+1)}{2}\right)^2.$$

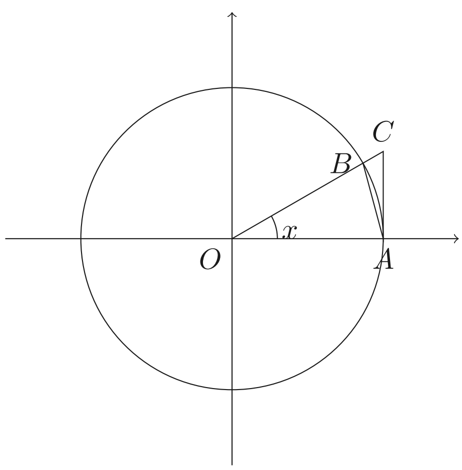
当 $n=l+1$ 时就有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{l+1}k^2&=\sum_{k=1}^{l}k^2+(l+1)^2\\&=\frac{l(l+1)(2l+1)}{6}+\frac{6(l+1)^2}{6}\\&=\frac{(l+1)[(l+1)+1][2(l+1)+1]}{6},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{l+1}k^3&=\sum_{k=1}^{l}k^3+(l+1)^3\\&=\left(\frac{l(l+1)}{2}\right)^2+(l+1)^3\\&=\left[\frac{(l+1)(l+2)}{2}\right]^2.\end{aligned}$$

综上, 两等式恒成立.

(6)



在以上单位圆周中, 角的弧度 x 满足 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 三角形 OAB 的面积

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x,$$

扇形 $\widehat{OAB}$ 的面积

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} x,$$

直角三角形 OAC 的两条直角边的长度分别为

$$OA = 1, \quad AC = \tan x,$$

所以直角三角形 OAC 的面积为

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x = \frac{1}{2} \tan x.$$

显然, $S_1 < S_2 < S_3$, 从而

$$0 < \sin x < x < \tan x.$$

当 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 时, 由上述结论可知

$$|\sin x| \le |x|.$$

当 $x > 1$ 时, 总有

$$|\sin x| \le 1 < x = |x|.$$

于是,

$$|\sin x| \le |x|, \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

当 $x < 0$ 时, $-x \in (0, +\infty)$, 由以上结论可得

$$|\sin x| = |\sin(-x)| \le |-x| = |x|.$$

综上,

$$|\sin x| \le |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

总结:

1. 作业不要抄袭. 字迹要清楚.
2. 以上参考答案保证正确, 但是不一定是最优的.
3. 确界相关的题目, 一定要紧扣确界的定义, 不要想当然的用一些错误结论. 上确界、下确界不一定是集合的最大值、最小值, 上确界、下确界也不一定属于集合. 大家自行总结课堂上、教材和作业中和确界有关的结论和题目, 分为**一般集合的确界问题**和**函数相关的确界问题**. 这些结论我们今后会用到.
4. 不了解数学归纳法的同学, 请自学.
5. 本次作业完成的比较好的同学: 王芹.
6. 各位同学要在学习上多花时间, 多动笔练习, 勤于思考, 多与其它同学讨论. 课前一定要预习教材内容, 课后及时复习.
7. 各位同学要积极找我答疑. 请提前通过 qq 联系我预约时间, 原则上我只当面答疑, 不接受在线答疑. 我的办公室是系楼 303 办公室后门 A 格, 走西面的门 (前门), 直接推门进入, 不要敲门.

第 6 周

欢度国庆!

第 7 周

✍ **作业题 7.1** 证明: 对任意 $p>0$ 以及任意 $a>1$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0.$$

证明 方法 1. 令 $k=[p]+1$, $h=a-1>0$, 则当 $n>k$ 时,

$$\begin{aligned}a^n &= (1+h)^n\\ &= 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+C_n^k h^k+\cdots+h^n\\ &\geq C_n^k h^k=\left(\frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+1}{1}\right)h^k.\end{aligned}$$

由于 $n>k$, 则易证

$$\frac{n}{k},\frac{n-1}{k-1},\cdots,\frac{n-k+1}{1}\geq\frac{n}{k},$$

从而

$$\begin{aligned}a^n &= (1+h)^n\\ &\geq \left(\frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+1}{1}\right)h^k\\ &\geq \frac{n^k}{k^k}h^k.\end{aligned}$$

于是当 $n>k=[p]+1$ 时,

$$0\leq\frac{n^p}{a^n}\leq\frac{k^k}{h^k}\cdot\frac{1}{n^{k-p}}.$$

由于 $k-p>0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k-p}}=0,$$

由数列极限的迫敛性可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0.$$

方法 2. 令 $b=a^{\frac{1}{p}}$, 则 $b>1$, $b^p=a$ 并且

$$\frac{n^p}{a^n}=\left(\frac{n}{b^n}\right)^p.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{b^n}=0$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 都有

$$\left|\frac{n}{b^n}\right|<\varepsilon^{\frac{1}{p}},$$

从而

$$\left|\frac{n^p}{a^n}-0\right|=\left|\frac{n}{b^n}\right|^p<\varepsilon,\quad \forall n>N,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0.$$

□

✍ **作业题 7.2** 证明: 当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0.$$

证明 当 $a>1$, 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 有

$$a^{-\varepsilon}<1<a^{\varepsilon}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 则根据数列极限的保号性, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 都有

$$a^{-\varepsilon}<(n)^{\frac{1}{n}}<a^{\varepsilon},$$

对上式取底数为 a 的对数可得

$$-\varepsilon<\frac{\log_a n}{n}<\varepsilon,$$

即

$$\left|\frac{\log_a n}{n}\right|<\varepsilon.$$

根据数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0.$$

当 $0<a<1$ 时, 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 有

$$a^{\varepsilon}<1<a^{-\varepsilon}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 则根据数列极限的保号性, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 都有

$$a^{\varepsilon}<(n)^{\frac{1}{n}}<a^{-\varepsilon},$$

对上式取底数为 a 的对数可得

$$-\varepsilon<\frac{\log_a n}{n}<\varepsilon,$$

即

$$\left|\frac{\log_a n}{n}\right|<\varepsilon.$$

根据数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0.$$

□

✍ **作业题 7.3** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$.

证明 若 $a=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 有 $|a_n|<\varepsilon^3$, 从而

$$|\sqrt[3]{a_n}-0|=|\sqrt[3]{a_n}|<\varepsilon.$$

根据数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义就有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=0=\sqrt[3]{a}.$$

若 $a>0$, 则根据数列极限的保号性, 存在正整数 N 使得对任意 $n>N$ 都有 $a_n>0$, 此时

$$0 \le \left|\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{a}\right| = \frac{|a_n-a|}{\left(\sqrt[3]{a_n}\right)^2+\sqrt[3]{a_n}\cdot\sqrt[3]{a}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^2} < \frac{|a_n-a|}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n-a|}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2}=0,$$

根据迫敛性可得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{a}\right|=0,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$.

若 $a<0$, 则根据数列极限的保号性, 存在正整数 N 使得对任意 $n>N$ 都有 $a_n<0$, 此时仍有

$$0 \le \left|\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{a}\right| = \frac{|a_n-a|}{\left(\sqrt[3]{a_n}\right)^2+\sqrt[3]{a_n}\cdot\sqrt[3]{a}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^2} < \frac{|a_n-a|}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2}.$$

根据之前的讨论可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$.

□

✍ **作业题 7.4** 设 $\{a_n\}$ 为正数数列并且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$ (提示: 用保号性和迫敛性).

证明 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$, 根据数列极限的保号性, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$ 都有

$$0<\frac{1}{2}a<a_n<\frac{3}{2}a,$$

从而

$$0<\sqrt[n]{\frac{1}{2}a}<\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{\frac{3}{2}a},\quad \forall n>N.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}a}=1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3}{2}a},$$

根据迫敛性, 就有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1.$$

□

✍ **作业题 7.5** 在某些情况下, 非正常极限也具有类似于正常极限的一些性质. 利用 (正、负) 无穷大数列的严格定义证明以下结论

1. (类似于绝对值性质) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$.
2. (类似于保号性) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, 则对任何实数 $c\in\mathbb{R}$, 存在正整数 N, 使得对任何 $n>N$, 都有
$$a_n<c<b_n.$$
3. (类似于加法、乘法法则) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, 则
$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}a_nb_n=+\infty.$$

4. (类似于减法、乘法法则) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty.$$

5. (类似追敛性) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 数列 $\{b_n\}$ 满足

$$a_n \le b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

6. (类似于子列性质) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 则 $\{a_n\}$ 的任何子列 $\{a_{n_k}\}$ 都满足

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty.$$

证明

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 则对任意 $M > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n > N$, 都有

$$a_n < -M < 0,$$

从而

$$|a_n| > M,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 则对任意 $c \in \mathbb{R}$, 存在正整数 N_1, N_2, 使得对任意 $n > N_1$ 都有 $a_n < c$; 对任意 $n > N_2$ 都有 $b_n > c$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $n > N$ 就有

$$a_n < c < b_n.$$

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

(1) 对任意 $M > 0$, 存在正整数 N_1, N_2, 使得对任意 $n > N_1$, 都有 $a_n > \frac{1}{2}M$; 对任意 $n > N_2$, 都有 $b_n > \frac{1}{2}M$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $n > N$ 就有

$$a_n + b_n > \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M = M,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.

(2) 对任意 $M > 0$, 存在正整数 N_1, N_2, 使得对任意 $n > N_1$, 都有 $a_n > \sqrt{M}$; 对任意 $n > N_2$, 都有 $b_n > \sqrt{M}$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $n > N$ 就有

$$a_n b_n > \sqrt{M} \cdot \sqrt{M} = M,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty$.

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

(1) 对任意 $M > 0$, 存在正整数 N_1, N_2, 使得对任意 $n > N_1$, 都有 $a_n > \frac{1}{2}M$; 对任意 $n > N_2$, 都有 $b_n < -\frac{1}{2}M$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $n > N$ 就有

$$a_n - b_n > \frac{1}{2}M - \left(-\frac{1}{2}M\right) = M,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = +\infty$.

(2) 对任意 $M<0$, 存在正整数 N_1, N_2, 使得对任意 $n>N_1$, 都有 $a_n>\sqrt{-M}$; 对任意 $n>N_2$, 都有 $b_n<-\sqrt{-M}$. 令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则对任意 $n>N$ 就有

$$a_nb_n<\sqrt{-M}\cdot\left(-\sqrt{-M}\right)=M,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=-\infty$.

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 则对任意 $M>0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 都有 $a_n>M$, 再根据条件可得

$$b_n\geq a_n>M,\quad \forall n>N.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$.

6. 设 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的任意一个子列, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 则对任意 $M>0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$ 都有 $a_n>M$. 对任意 $k>n_N$, 都有 $n_k\geq k>n_N\geq N$, 从而 $a_{n_k}>M$, 于是

$$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=+\infty.$$

□

✍ **作业题 7.6** 计算以下数列的极限.

1. $\left\{\sqrt[n]{n^2+1}\right\}$.
2. $a_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.
3. $\left\{(n!)^{\frac{1}{n^2}}\right\}$ (提示: 利用增长速度的顺序和迫敛性).
4. $\left\{\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\right\}$.
5. $\left\{\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right\}$ (提示: 利用第 5 周作业题中的平方和公式).
6. $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+\cdots+k^3}}$ (提示: 利用第 5 周作业题中的立方和公式).

解

1. 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$1<\sqrt[n]{n^2+1}\leq\sqrt[n]{n^2+n^2}=\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}\right)=1,$$

再根据数列极限的迫敛性可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}=1.$$

2. 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$1\leq a_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\leq(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ 项}})^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 则根据数列极限的迫敛性可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

3. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0,$$

根据数列极限的保号性, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$ 都有

$$0<\frac{n!}{n^n}<1,$$

从而

$$1\le n!<n^n,\quad \forall n>N,$$
$$1\le (n!)^{\frac{1}{n^2}}<(n^n)^{\frac{1}{n^2}}=\sqrt[n]{n},\quad \forall n>N.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 则根据数列极限的迫敛性可得

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1.$$

4. 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$0\le\left|\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\right|\le\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}=\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n+1}=\frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}{1+\frac{1}{n}}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{0}{1+0}=0,$$

根据数列极限的迫敛性可得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\right|=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0.$$

5. 设

$$S_n=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

则

$$\begin{aligned}
&1^2+3^3+\cdots+(2n-1)^2\\
=\ &\left[1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n)^2\right]\\
&-\left[2^2+4^2+\cdots+(2n)^2\right]\\
=\ &S_{2n}-2^2\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)\\
=\ &S_{2n}-4S_n\\
=\ &\frac{4n^3-n}{3},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)\\
=\ &\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-n}{3n^3}\\
=\ &\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

6. 由于

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+\cdots+k^3}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 2.$$

□

总结:

1. 我们已经验证过许多极限等式: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0\ (\alpha > 0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ (a > 0)$ 等, 这些可以直接用, 不需要再重复证明. 除非考试的时候要求你重新验证一遍.

2. 之前没有验证的极限等式, 一定要详细证明出来后才能使用. 如果你不确定是否验证过, 不妨重新验证一遍.

3. 用 $\varepsilon - N$ 定义验证极限时, 正整数 N 只能依赖于 ε, 不能依赖 n.

4. 我们课上讲的数列收敛的性质有一个大前提: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都收敛于实数. 在这个前提下才能使用收敛数列的性质, 例如四则运算法则. 某些特殊情况下, 无穷大数列也具有类似于收敛数列的性质, 例如本周作业第 5 大题. 但是这只是形式上类似, 并不能实质等同, 不要随便使用四则运算法则. 严格来讲, $0\cdot\infty$, $\infty\cdot\infty$ 等都是没有意义的.

5. 除了第 5 大题给出的结论外, 还有其它涉及无穷大数列的类似结论, 各位同学自行总结和证明. 当然, 也要总结不成立的情况, 例如:
   若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 则不一定有

   $$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty.$$

   反例: $a_n = n = b_n$.

6. 学过的内容和题目要花大量时间反复看反复练习. 熟练之后, 原先很难的题目都会变成套路题, 就像你们现在已经熟悉的

   $$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$$

   求和这种.

7. 本次作业完成的比较好的同学, 一个也没有.

第 8 周

✍ **作业题 8.1** 证明

(1) 设 $\{a_n\}$ 是一列递增数列并且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则

$$a = \sup_n\{a_n\}.$$

特别地, 若 $\{a_n\}$ 还是一个严格增数列, 则

$$a_n < a, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

(2) 设 $\{a_n\}$ 是一列递减数列并且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则

$$a = \inf_n\{a_n\}.$$

特别地, 若 $\{a_n\}$ 还是一个严格减数列, 则

$$a_n > a, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

证明 (1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\{a_n\}$ 是有界数列. 又因为 $\{a_n\}$ 单调递增, 根据单调有界定理, 就有 (第一个等号就是单调有界定理的结论)

$$\sup_n\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

若 $\{a_n\}$ 还是严格增数列, 下证

$$a_n < a, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

反证法, 假设存在 $n_0 \in \mathbb{N}_+$ 使得 $a_{n_0} \geq a$, 则根据严格增性, 就有

$$a_{n_0+1} > a_{n_0} \geq a,$$

这与 $a = \sup\limits_n\{a_n\}$ 矛盾.

(2) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\{a_n\}$ 是有界数列. 又因为 $\{a_n\}$ 单调递减, 根据单调有界定理, 就有

$$\inf_n\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

若 $\{a_n\}$ 还是严格减数列, 下证

$$a_n > a, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

反证法, 假设存在 $n_0 \in \mathbb{N}_+$ 使得 $a_{n_0} \leq a$, 则根据严格减性, 就有

$$a_{n_0+1} < a_{n_0} \leq a,$$

这与 $a = \inf\limits_n\{a_n\}$ 矛盾. □

✍ **作业题 8.2** Cauchy 数列的几种等价形式:

(i) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $m, n > N$, 都有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

(ii) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n > N$ 以及任意 $m \geq n$, 都有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

(iii) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n > N$ 以及任意 $p \in \mathbb{N}$, 都有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

证明上述三种形式的等价性:

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 满足条件 (i), 则也满足 (ii);

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足条件 (ii), 则也满足 (iii);

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 满足条件 (iii), 则也满足条件 (i).

证明 (1) 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 (i), 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $m, n > N$, 都有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

于是对任意 $n > N$ 以及任意 $m' \geq n$, 有 $m', n > N$, 从而

$$|a_{m'} - a_n| < \varepsilon.$$

所以 $\{a_n\}$ 也满足条件 (ii).

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 (ii), 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n > N$ 以及任意 $m \geq n$, 都有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

于是, 对任意 $p \in \mathbb{N}$ 以及任意 $n > N$, 有 $n + p \geq n > N$, 从而

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

所以 $\{a_n\}$ 也满足条件 (iii).

(3) 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 (iii), 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n > N$ 以及任意 $p \in \mathbb{N}$, 都有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

对任意 $m, n > N$, 要么有 $m \geq n > N$, 要么有 $n > m > N$. 若 $m \geq n > N$, 令 $p = m - n$, 则 $p \in \mathbb{N}$, 从而

$$|a_m - a_n| = |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

若 $n > m > N$, 令 $p = n - m$, 则 $p \in \mathbb{N}$, 从而

$$|a_n - a_m| = |a_{m+p} - a_m| < \varepsilon.$$

所以 $\{a_n\}$ 也满足条件 (i). □

✍ **作业题 8.3** 设 $\{a_n\}$ 是一个数列. 若存在正整数 N_0, 使得对任意 $m, n > N_0$, 都有

$$|a_m - a_n| \leq b_n,$$

其中 $\{b_n\}$ 是一个无穷小数列, 证明 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列.

证明 由条件可知 $b_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_1, 使得对任意 $n > N_1$, 都有

$$0 \leq b_n < \varepsilon.$$

令 $N=\max\{N_0,N_1\}$, 则对任意 $m,n>N$, 就有

$$|a_m-a_n|\le b_n<\varepsilon,$$

所以 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列. □

✍ **作业题 8.4** 设 $c>0$ 是一个正数, 数列 $\{a_n\}$ 满足:

$$a_1\in\left(0,\frac{1}{c}\right),\quad a_{n+1}=a_n\left(2-ca_n\right).$$

证明 $\{a_n\}$ 收敛, 并求出 $\{a_n\}$ 的极限.
(提示: 先让 a_1 取某个特定值, 例如 $a_1=\frac{1}{2c}$, 据此寻找规律.)

证明 Step1. 先证

$$0<a_n<\frac{1}{c},\quad \forall n\in\mathbb{N}_+.$$

当 $n=1$ 时, 显然 $0<a_1<\frac{1}{c}$.
假设当 $n=k$ 时, $0<a_k<\frac{1}{c}$, 则

$$0<\left|a_k-\frac{1}{c}\right|<\frac{1}{c},$$

于是当 $n=k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=a_k(2-ca_k)\\&=2a_k-ca_k^2\\&=-c\left(a_k-\frac{1}{c}\right)^2+\frac{1}{c}\\&\in\left(0,\frac{1}{c}\right).\end{aligned}$$

结论得证.
Step2. 根据 Step1 的结论, 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 就有

$$a_{n+1}=a_n(2-ca_n)>a_n\left(2-c\cdot\frac{1}{c}\right)=a_n,$$

所以 $\{a_n\}$ 严格增. 根据单调有界定理, $\{a_n\}$ 收敛, 存在 $a\in\mathbb{R}$ 使得

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n=\sup_n a_n>0.$$

Step3. 在等式

$$a_{n+1}=a_n(2-ca_n)$$

两端取极限可得

$$a=a(2-ca),$$

解得 $a=\frac{1}{c}$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{c}.$$

□

注 该题提供了计算给定正数 c 的倒数的一种迭代算法.

✍ **作业题 8.5**

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0$ 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

(提示: $[a_n] \le a_n < [a_n]+1$, $\{[a_n]\}$ 是 $\mathbb{N}_+$ 的子列, 用两个与 $[a_n]$ 有关的数列把 $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ "包" 起来.)

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n < -1$ 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e.$$

注意 虽然 $\{[a_n]\}$ 是正整数构成的数列, 但是它的单调性未知, $\{[a_n]\}$ 不一定是 $\mathbb{N}_+$ 的子列. 若 $\{[a_n]\}$ 是严格增的数列, 则 $\{[a_n]\}$ 才是 $\mathbb{N}_+$ 的子列.

证明 (1) Step1. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 则存在正整数 N_0, 使得

$$a_n > 1, \quad \forall n > N_0,$$

从而

$$1 \le [a_n] \le a_n < [a_n]+1, \quad \forall n > N_0, \tag{8.1}$$

进而

$$1+\frac{1}{[a_n]+1} < 1+\frac{1}{a_n} \le 1+\frac{1}{[a_n]}, \quad \forall n > N_0,$$

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} \le \left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{a_n} \\
<& \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \\
\le& \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}, \quad \forall n > N_0.
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Step2. 下证以下一般性命题.

命题 8.1

设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 则 $\{f(n)\}$ 是一个数列. 若

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A,$$

则对任意一列无穷大正整数数列 $\{a_n\}$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A.$$

事实上, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_0, 使得对任意 $m > N_0$, 都有

$$|f(m) - A| < \varepsilon. \tag{8.3}$$

又因为 $\{a_n\}$ 是无穷大正整数数列, 则存在正整数 N, 使得对任意 $n > N$, 都有 $a_n > N_0$, 此时, 令 $m = a_n$ 并代入(8.3)式便得到

$$|f(a_n) - A| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

所以
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A.$$
命题得证.

Step3. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 根据(8.1)式可得
$$\lim_{n\to\infty} [a_n] = +\infty.$$
又因为
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = e,$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$
由 Step2 的结论可得
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} = e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}.$$
根据(8.2)式以及数列极限的迫敛性可得
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

(2) 设 $a_n = -b_n$, 由条件可知 $a_n > 1$ 并且
$$\lim_{n\to\infty} (a_n+1) = +\infty.$$
另一方面,
$$\begin{aligned} & \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \\ = & \left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{-a_n} \\ = & \left(\frac{a_n}{a_n-1}\right)^{a_n} \\ = & \left(1+\frac{1}{a_n-1}\right)^{a_n-1} \cdot \left(1+\frac{1}{a_n-1}\right). \end{aligned}$$
由本题 (1) 部分的结果可知
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n-1}\right)^{a_n-1} = e.$$
又因为
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n-1}\right) = 1+0 = 1,$$
所以
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e\cdot 1 = e.$$
□

注 Step2 中的命题提供了计算数列极限时一种常用技巧——变量代换技巧. 事实上, 还有其他类型的变量代换技巧: 命题中的 A 也可以是 $+\infty$, $-\infty$ 和 ∞(证明方法同学们自己总结).

总结:

1. 各位同学在写题目的证明过程或者解答过程时, 字迹和逻辑务必清晰, 让别人知道你到底在写什么.
2. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得 $\forall n > N$, 有 $a_n < a + \varepsilon$, 这并不能得出 $a_n \le a$, 因为 a_n 并不是固定的数. 反例 $a_n = \frac{1}{n}$, $a = 0$.
3. 第 2 题, 大家一定要清楚到底要证明什么, 仔细看一下我给出的参考答案的逻辑和思路.
4. 本次作业同学们的完成状况都非常差. 有些同学连极限的 $\varepsilon - N$ 定义都没有掌握, 存在符号 $\exists$ 写成 E, "$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}_+$" 写成 "$\exists \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}_+$ ". 第 1 题里面, 根据收敛数列的有界性, $\{a_n\}$ 是有界数列. 这样一句话就得出 $\{a_n\}$ 有上界, 许多同学却没用这个结论, 自己去证明又是错误百出.
5. 有一些同学, 5 道题目只做了第 1 题 (还做错了), 其他题都空着. 有时间参加这个活动那个活动, 就没时间做做作业, 复习一下学过的内容吗?

第 9 周

✍ **作业题 9.1** 用 $\varepsilon - N$ 极限定义和无穷大数列的定义验证以下极限等式.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} = 1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n-\sqrt{n}} = +\infty$.

证明 (1) 方法 1. 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} - 1\right| &= \left|\frac{\sqrt{n^2+2n}-n}{n}\right| = \left|\frac{1}{n} \cdot \frac{(n^2+2n)-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}\right| \\ &< \frac{2}{(n+1)+n} < \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 令 $N = \frac{1}{\varepsilon}$, 则对任意 $n > N$, 有

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} - 1\right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \varepsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} = 1.$$

方法 2. 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$1 < \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} = \sqrt{1+\frac{2}{n}} < 1 + \frac{2}{n},$$

从而

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} - 1\right| < \frac{2}{n}.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 令 $N = \frac{2}{\varepsilon}$, 则对任意 $n > N$, 有

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} - 1\right| < \frac{2}{n} < \frac{2}{N} = \varepsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} = 1.$$

(2) 方法 1: 设 $h_n = \sqrt[n]{n+1} - 1$, 则 $h_n > 0$ $(n \in \mathbb{N}_+)$, 并且

$$n+1 = (h_n+1)^n \geq 1 + \frac{n^2 h_n^2}{4}, \quad \forall n \geq 2,$$

从而

$$0 < h_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad \forall n \geq 2.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 令 $N = \max\left\{2, \frac{4}{\varepsilon^2}\right\}$, 则对任意 $n > N$, 就有

$$\left|\sqrt[n]{n+1} - 1\right| = |h_n| < \frac{2}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{N}} \leq \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1.$$

方法 2: 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 并且 $n > 2$, 利用算术-几何平均值不等式可得

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n+1} &= \sqrt[n]{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+1}\cdot\underbrace{1\cdots1}_{n-2}} \\
&\leq \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}+\overbrace{1+\cdots+1}^{n-2}}{n} \\
&= \frac{2\sqrt{n+1}}{n} + 1 - \frac{2}{n} \\
&< \frac{2\sqrt{n+n}}{n} + 1 \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + 1,
\end{aligned}$$

从而

$$\left|\sqrt[n]{n+1} - 1\right| < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}, \quad \forall n > 2.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 令 $N = \max\left\{\frac{8}{\varepsilon^2}, 2\right\}$, 则对任意 $n > N$, 就有

$$\left|\sqrt[n]{n+1} - 1\right| < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \leq \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1.$$

(3) 反正切函数

$$y = \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}$$

是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 在 $\mathbb{R}$ 上严格增并且值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 总有

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan n < \frac{\pi}{2},$$

从而
$$\left|\arctan n-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\arctan n.$$
对任意 $\varepsilon\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 令 $N=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)>0$, 则对任意 $n>N$, 由反正切函数 $y=\arctan x$ 的单调性可知
$$\arctan n>\arctan N=\frac{\pi}{2}-\varepsilon,$$
从而
$$\left|\arctan n-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\arctan n<\varepsilon,\quad \forall n>N.$$
对任意 $\varepsilon\geq\frac{\pi}{2}$, 任取 $N\in\mathbb{N}_+$, 则对任意 $n>N$, 都有
$$\left|\arctan n-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\arctan n\leq\varepsilon.$$
综上
$$\lim_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}.$$
(4) 方法 1: 当 $n\geq 4$ 时, $n\geq 2\sqrt{n}$, 从而 $n-\sqrt{n}\geq\sqrt{n}$,
$$\sqrt{n-\sqrt{n}}\geq n^{\frac{1}{4}},\quad \forall n\geq 4.$$
对任意 $M>0$, 令 $N=\max\left\{4,M^4\right\}>0$, 则对任意 $n>N$, 有
$$\sqrt{n-\sqrt{n}}\geq n^{\frac{1}{4}}>N^{\frac{1}{4}}\geq M,$$
所以
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n-\sqrt{n}}=+\infty.$$
方法 2: 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 都有 $\sqrt{n}-1\geq 0$, 从而
$$n-\sqrt{n}\geq(n-\sqrt{n})-(\sqrt{n}-1)=n-2\sqrt{n}+1=(\sqrt{n}-1)^2,$$
$$\sqrt{n-\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}-1,\quad \forall n\in\mathbb{N}_+.$$
对任意 $M>0$, 令 $N=(M+1)^2$, 则对任意 $n>N$, 有
$$\sqrt{n-\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}-1>\sqrt{N}-1=M,$$
所以
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n-\sqrt{n}}=+\infty.$$
□

作业题 9.2 计算以下数列的极限.

(1) $a_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

(2) $a_n=\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}\right)$. (提示: 先通分最后一个因子, 然后耐心多算几项就可以发现规律.)

(3) $a_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. (提示: $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{k+2}=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\left(1-\frac{1}{k+2}\right)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{k(k+2)}=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$)

(4) $a_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdots\frac{n+1}{2n+1}$.

(5) $a_n = \frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}$.

解 (1) 对任意 $k\in\mathbb{N}_+$, 有

$$1-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n}.$$

当 $n\geq 3$ 时, 就有

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\cdots\frac{n-2}{n-1}\frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

(2) 对任意 $k\in\mathbb{N}_+$ 并且 $k\geq 5$, 有

$$1-\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}=1-\frac{2}{k(k+1)}=\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)},$$

从而

$$\begin{aligned} &\frac{(k-4)(k-1)}{(k-3)(k-2)}\cdot\frac{(k-3)k}{(k-2)(k-1)}\cdot\frac{(k-2)(k+1)}{(k-1)k}\cdot\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} \\ =\ &\frac{k-4}{k-2}\cdot\frac{k+2}{k}. \end{aligned}$$

利用归纳法可证, 当 $n\in\mathbb{N}_+$ 并且 $n\geq 5$ 时,

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}\right) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n}. \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n}=\frac{1}{3}.$$

(3) 对任意 $k\in\mathbb{N}_+$, 有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ =\ &\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{k+2} \\ =\ &\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\left(1-\frac{1}{k+2}\right)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ =\ &\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\left(1-\frac{1}{k+2}\right)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ =\ &\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{k(k+2)} \\ =\ &\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right). \end{aligned}$$

由归纳法可证,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}.$$

(4) 显然, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_+$. 另一方面,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)+1} < 1.$$

所以 $\{a_n\}$ 单调递减, 并且有下界 0. 根据单调有界定理, $\{a_n\}$ 收敛, 存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0.$$

由于

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)+1} a_n,$$

在上式两端令 $n\to\infty$, 可得 $a = \frac{1}{2}a$, 从而 $a = 0$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(5) 显然, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_+$. 另一方面, 当 $n \geq 10$ 时,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)+9}{2(n+1)-1} < 1.$$

所以去掉前 10 项后, $\{a_n\}$ 单调递减且有下界 0. 根据单调有界定理, $\{a_n\}$ 收敛, 存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0.$$

由于

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)+9}{2(n+1)-1} a_n, \quad \forall n \geq 10,$$

在上式两端令 $n\to\infty$, 可得 $a = \frac{1}{2}a$, 从而 $a = 0$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

注 上面的 (4)(5) 两小题, 也可以看作教材 P38 页第 7 题的特例. 若 $a_n > 0$, 并且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{a_{n+1}} = l > 1,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

作业题 9.3 用闭区间套定理证明确界原理.

证明 设 S 是有上界的实数集, M 是 S 的一个上界. 若任取 $x\in S$, x 都是 S 的上界, 此时 S 中只有一个元素 x, 从而 S 的上确界存在, 并且 $\sup S = x$. 下设存在 $m \in S$, 使得 m 不是 S 的上界.

记 $a_1 = m$, $b_1 = M$. 则 a_1 不是 S 的上界, b_1 是 S 的上界, 并且 $b_1 - a_1 = M - m$.

令 $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. 若 c_1 是 S 的上界, 则记 $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$; 若 c_1 不是 S 的上界, 则记 $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$. 总之, a_2 不是 S 的上界, b_2 是 S 的上界, 并且 $b_2 - a_2 = \frac{M-m}{2}$.

令 $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$. 若 c_2 是 S 的上界, 则记 $a_3 = a_2$, $b_3 = c_2$; 若 c_2 不是 S 的上界, 则记 $a_3 = c_2$, $b_3 = b_2$. 总之, a_3 不是 S 的上界, b_3 是 S 的上界, 并且 $b_3 - a_3 = \frac{M-m}{2^2}$.

······

上述过程一致重复下去, 就得到一列闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$, 满足

(i) $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$;

(ii) $b_n-a_n=\frac{M-m}{2^{n-1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}_+$;

(iii) 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, a_n 不是 S 的上界, b_n 是 S 的上界.

由 (i)(ii) 可知, $\{[a_n,n_n]\}$ 是一列闭区间套, 根据闭区间套定理, 存在唯一的 $\xi\in\mathbb{R}$ 使得

$$\xi\in[a_n,b_n],\quad \forall n\in\mathbb{N}_+,$$

并且

$$\xi=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 有

$$[a_n,b_n]\subset U(\xi,\varepsilon)=(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon). \tag{9.1}$$

下证 $\xi=\sup S$.

由于 b_n $(n\in\mathbb{N}_+)$ 都是 S 的上界, 则对任意 $x\in S$, 有

$$x\le b_n,\quad \forall n\in\mathbb{N}_+.$$

由数列极限的保不等式性可得

$$x\le\lim_{n\to\infty}b_n=\xi,$$

所以 ξ 是 S 的一个上界. 设 $\alpha<\xi$ 并令 $\varepsilon=\xi-\alpha$, 则 $\varepsilon>0$ 并且 $\alpha=\xi-\varepsilon$. 于是, 根据(9.1), 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 都有

$$a_n>\xi-\varepsilon=\alpha.$$

由于 a_n 不是 S 的上界, 则 α 也不是 S 的上界.

综上, S 的上确界存在并且 $\sup S=\xi$.

同理可证, 任何有下界的实数集必有下确界. □

总结:

1. 第 1 大题题干要求用数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义和无穷大数列的定义来验证极限等式, 这里就不能用收敛数列的迫敛性等性质, 要严格按照定义寻找合适的正整数 N.
2. 三角函数和反三角函数的定义域、值域、单调性、周期性和图像从网上均可查到.
3. 本次作业完成的比较好的同学: 孙景祯