2019-2020 学年第 1 学期

数学分析作业

目录

第 5 周

作业题 5.1 设 A, B 为非空有界数集, 并且 $A \subset B$, 证明

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

证明 显然, $\inf A \leq \sup A$. 下证 $\inf B \leq \inf A$ 并且 $\sup A \leq \sup B$.

假设 $\inf B > \inf A$, 则 $\inf B$ 不是集合 A 的下界, 从而存在 $x_0 \in A$ 使得 $\inf B > x_0$. 另一方面, 由于 $A \subset B$，从而也有 $x_0 \in B$, 于是

$$\inf B > x_0 \geq \inf B,$$

矛盾.

假设 $\sup A > \sup B$, 则 $\sup B$ 不是集合 A 的上界, 从而存在 $x_1 \in A$ 使得 $\sup B < x_1$. 另一方面, 由于 $A \subset B$，从而也有 $x_1 \in B$, 于是

$$\sup B < x_1 \leq \sup B,$$

矛盾.

综上, $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$. □

作业题 5.2 设 S 为非空有下界 (不一定有上界) 的数集, 并且 $\inf S > 0$, 证明集合

$$S^{-1} = \left\{x^{-1} \mid x \in S\right\}$$

有界并且

$$\sup S^{-1} > 0, \quad \inf S^{-1} \geq 0, \quad \sup S^{-1} = \frac{1}{\inf S}.$$

证明 Step1. 任取 $y \in S^{-1}$, 令 $x = y^{-1}$, 则 $x \in S$,

$$x \geq \inf S > 0,$$

从而

$$0 < y \leq \frac{1}{\inf S}, \quad \forall y \in S^{-1}. \tag{5.1}$$

所以 0 是 S^{-1} 的一个下界, $\frac{1}{\inf S}$ 是 S^{-1} 的一个上界, 并且

$$\sup S^{-1} > 0, \quad \inf S^{-1} \geq 0.$$

Step2. 由 Step1 可知 $\sup S^{-1} \leq \frac{1}{\inf S}$. 下面排除 $\sup S^{-1} < \frac{1}{\inf S}$ 的情况. 反证法, 假设 $\sup S^{-1} < \frac{1}{\inf S}$ 成立, 由于 $\sup S^{-1} > 0$, 则

$$0 < \inf S < \frac{1}{\sup S^{-1}}.$$

所以 $\frac{1}{\sup S^{-1}}$ 不是 S 的下界, 存在 $x \in S$ 使得

$$0 < \inf S \leq x < \frac{1}{\sup S^{-1}}.$$

令 $y = x^{-1}$, 则 $y \in S^{-1}$,

$$0 < \frac{1}{y} = x < \frac{1}{\sup S^{-1}},$$

从而

$$\sup S^{-1} < y.$$

但是另一方面, 由于 $y \in S^{-1}$, 则一定有

$$y \leq \sup S^{-1},$$

矛盾. 所以

$$\sup S^{-1} = \frac{1}{\inf S}.$$

□

作业题 5.3 证明以下等式和不等式:

(1) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|, \quad \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

(2) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+$ 且 $n \geq 2$, 则

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right),$$

(3) Bernoulli(伯努利) 不等式: 设 $h \geq -1$, $n \in \mathbb{N}_+$, 则

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

特别地, 如果还有 $h \geq 0$ 并且 $n \geq 2$, 则还成立

$$(1+h)^n > \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n^2h^2}{4}.$$

(4) 算术-几何平均值不等式: 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个非负实数, 则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}.$$

如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正实数, 还成立几何-调和平均值不等式:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

(5)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 &= 1^2+2^2+3^2+\cdots n^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 &= 1^3+2^3+3^3+\cdots n^3 = \left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

注意 $\sum\limits_{k=1}^{n} s_k$ 表示对 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 按下标 k 从 1 到 n 求和, 即 $\sum\limits_{k=1}^{n} s_k = s_1+s_2+\cdots+s_n$.

(6) 若 $0<x<\frac{\pi}{2}$, 则 $\sin x<x<\tan x$. 若 $x \in \mathbb{R}$, 则 $|\sin x| \leq |x|$.

证明 (1) 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 由绝对值不等式可得

$$\begin{aligned}|a-b| &\geq |a|-|b|, \\ |a-b| &= |b-a| \geq |b|-|a|,\end{aligned}$$

综合上述两式可得

$$-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|,$$

所以

$$\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|.$$

由于

$$f(t)=\frac{t}{1+t}, \quad t>0$$

是严格增函数, 并且

$$|a+b| \leq |a|+|b|,$$

则 $f(|a+b|) \leq f(|a|+|b|)$, 从而

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leq \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right) \\ =\ &\left(a^n+a^{n-1}b+\cdots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}\right) \\ &-\left(a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n\right) \\ =\ &a^n-b^n.\end{aligned}$$

(3) 当 $n=1$ 时, $(1+h)^1=1+1\cdot h$, 结论成立.
假设当 $n=k$ 时, 成立
$$(1+h)^k\geq 1+kh.$$
由于 $h\geq -1$, 则当 $n=k+1$ 时,
$$\begin{aligned}&(1+h)^{k+1}=(1+h)^k\cdot(1+h)\geq(1+kh)\cdot(1+h)\\ =\;&1+(k+1)h+kh^2\geq 1+(k+1)h.\end{aligned}$$
综上, 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$ 以及任意 $h\geq -1$ 都有
$$(1+h)^n\geq 1+nh.$$
当 $n\geq 2$ 时, 有
$$\frac{n(n-1)}{2}\geq\frac{n^2}{4},$$
从而对任意 $h\geq 0$ 都有
$$\begin{aligned}(1+h)^n &= 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n\\ &> \frac{n(n-1)}{2}h^2\geq\frac{n^2h^2}{4}.\end{aligned}$$
(4) 如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有一个是 0, 则算术-几何平均值不等式成立. 下设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正的实数.
当 $n=1$ 时, 两个不等式显然都成立.
假设当 $n=k$ 时, 有
$$\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}\geq\sqrt[k]{a_1\cdot\cdots\cdot a_k}.$$
当 $n=k+1$ 时,
$$\begin{aligned}&\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\\ =\;&\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)(a_1+\cdots+a_k)+\frac{a_{k+1}}{k+1}\\ =\;&\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}+\frac{ka_{k+1}-(a_1+\cdots+a_k)}{k(k+1)}.\end{aligned}$$
令
$$A=\frac{a_1+\cdots+a_k}{k},\quad B=\frac{ka_{k+1}-(a_1+\cdots+a_k)}{k(k+1)},$$
则 $A>0$, $A+B>0$. 再令 $h=\frac{B}{A}$, 则 $1+h>0$, $h>-1$, 利用 Bernoulli 不等式可得
$$\begin{aligned}&\left(\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}\\ =\;&(A+B)^{k+1}=A^{k+1}\left(1+\frac{B}{A}\right)^{k+1}=A^{k+1}(1+h)^{k+1}\\ \geq\;&A^{k+1}[1+(k+1)h]=A^{k+1}\left[1+\frac{(k+1)B}{A}\right]=A^k[A+(k+1)B]\\ =\;&A^k\cdot a_{k+1}.\end{aligned}$$
根据 $n=k$ 时的假设条件, 有
$$A^k=\left(\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}\right)^k\geq a_1\cdot\cdots\cdot a_k,$$

从而

$$\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\geq a_1\cdot\cdots\cdot a_k\cdot a_{k+1}.$$

综上, 算术-几何平均值不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}$$

成立.

利用算术-几何平均值不等式可得

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}}>0,$$

对上式取倒数, 就得到几何-调和平均值不等式:

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

(5) 当 $n=1$ 时, 两不等式显然都成立.

假设当 $n=l$ 时,

$$\sum_{k=1}^{l}k^2=\tfrac{l(l+1)(2l+1)}{6},$$
$$\sum_{k=1}^{l}k^3=\left(\tfrac{l(l+1)}{2}\right)^2.$$

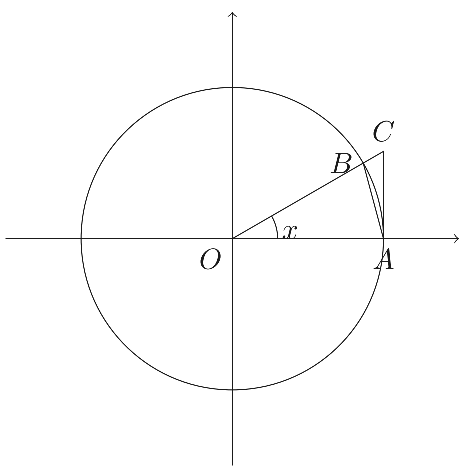
当 $n=l+1$ 时就有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{l+1}k^2&=\sum_{k=1}^{l}k^2+(l+1)^2\\&=\frac{l(l+1)(2l+1)}{6}+\frac{6(l+1)^2}{6}\\&=\frac{(l+1)[(l+1)+1][2(l+1)+1]}{6},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{l+1}k^3&=\sum_{k=1}^{l}k^3+(l+1)^3\\&=\left(\frac{l(l+1)}{2}\right)^2+(l+1)^3\\&=\left[\frac{(l+1)(l+2)}{2}\right]^2.\end{aligned}$$

综上, 两等式恒成立.

(6)



在以上单位圆周中, 角的弧度 x 满足 $0<x<\frac{\pi}{2}$, 三角形 OAB 的面积

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot\sin x=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin x=\frac{1}{2}\sin x,$$

扇形 $\widehat{OAB}$ 的面积

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot x=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot x=\frac{1}{2}x,$$

直角三角形 OAC 的两条直角边的长度分别为

$$OA=1,\quad AC=\tan x,$$

所以直角三角形 OAC 的面积为

$$S_3=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x=\frac{1}{2}\tan x.$$

显然, $S_1<S_2<S_3$, 从而

$$0<\sin x<x<\tan x.$$

当 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 时, 由上述结论可知

$$|\sin x|\le|x|.$$

当 $x>1$ 时, 总有

$$|\sin x|\le 1<x=|x|.$$

于是,

$$|\sin x|\le|x|,\quad\forall x\in[0,+\infty).$$

当 $x<0$ 时, $-x\in(0,+\infty)$, 由以上结论可得

$$|\sin x|=|\sin(-x)|\le|-x|=|x|.$$

综上,

$$|\sin x|\le|x|,\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

□

总结:

1. 作业不要抄袭. 字迹要清楚.
2. 以上参考答案保证正确, 但是不一定是最优的.
3. 确界相关的题目, 一定要紧扣确界的定义, 不要想当然的用一些错误结论. 上确界、下确界不一定是集合的最大值、最小值, 上确界、下确界也不一定属于集合. 大家自行总结课堂上、教材和作业中和确界有关的结论和题目, 分为**一般集合的确界问题**和**函数相关的确界问题**. 这些结论我们今后会用到.
4. 不了解数学归纳法的同学, 请自学.
5. 本次作业完成的比较好的同学: 王芹.
6. 各位同学要在学习上多花时间, 多动笔练习, 勤于思考, 多与其它同学讨论. 课前一定要预习教材内容, 课后及时复习.
7. 各位同学要积极找我答疑. 请提前通过 qq 联系我预约时间, 原则上我只当面答疑, 不接受在线答疑. 我的办公室是系楼 303 办公室后门 A 格, 走西面的门 (前门), 直接推门进入, 不要敲门.

第 6 周

欢度国庆！

第 7 周

✍ **作业题 7.1** 证明: 对任意 $p>0$ 以及任意 $a>1$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0.$$

证明 方法 1. 令 $k=[p]+1$, $h=a-1>0$, 则当 $n>k$ 时,

$$\begin{aligned}a^n &= (1+h)^n\\ &= 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+C_n^kh^k+\cdots+h^n\\ &\geq C_n^kh^k=\left(\frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+1}{1}\right)h^k.\end{aligned}$$

由于 $n>k$, 则易证

$$\frac{n}{k},\frac{n-1}{k-1},\cdots,\frac{n-k+1}{1}\geq\frac{n}{k},$$

从而

$$\begin{aligned}a^n &= (1+h)^n\\ &\geq \left(\frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+1}{1}\right)h^k\\ &\geq \frac{n^k}{k^k}h^k.\end{aligned}$$

于是当 $n>k=[p]+1$ 时,

$$0\leq\frac{n^p}{a^n}\leq\frac{k^k}{h^k}\cdot\frac{1}{n^{k-p}}.$$

由于 $k-p>0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k-p}}=0,$$

由数列极限的迫敛性可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0.$$

方法 2. 令 $b=a^{\frac{1}{p}}$, 则 $b>1$, $b^p=a$ 并且

$$\frac{n^p}{a^n}=\left(\frac{n}{b^n}\right)^p.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{b^n}=0$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 都有

$$\left|\frac{n}{b^n}\right|<\varepsilon^{\frac{1}{p}},$$

从而

$$\left|\frac{n^p}{a^n}-0\right|=\left|\frac{n}{b^n}\right|^p<\varepsilon,\quad\forall n>N,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0.$$

□

✍ **作业题 7.2** 证明: 当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0.$$

证明 当 $a>1$, 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 有

$$a^{-\varepsilon}<1<a^{\varepsilon}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 则根据数列极限的保号性, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 都有

$$a^{-\varepsilon}<(n)^{\frac{1}{n}}<a^{\varepsilon},$$

对上式取底数为 a 的对数可得

$$-\varepsilon<\frac{\log_a n}{n}<\varepsilon,$$

即

$$\left|\frac{\log_a n}{n}\right|<\varepsilon.$$

根据数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0.$$

当 $0<a<1$ 时, 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 有

$$a^{\varepsilon}<1<a^{-\varepsilon}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 则根据数列极限的保号性, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 都有

$$a^{\varepsilon}<(n)^{\frac{1}{n}}<a^{-\varepsilon},$$

对上式取底数为 a 的对数可得

$$-\varepsilon<\frac{\log_a n}{n}<\varepsilon,$$

即

$$\left|\frac{\log_a n}{n}\right|<\varepsilon.$$

根据数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0.$$

□

✍ **作业题 7.3** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$.

证明 若 $a=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 有 $|a_n|<\varepsilon^3$, 从而

$$|\sqrt[3]{a_n}-0|=|\sqrt[3]{a_n}|<\varepsilon.$$

根据数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义就有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=0=\sqrt[3]{a}.$$

若 $a>0$, 则根据数列极限的保号性, 存在正整数 N 使得对任意 $n>N$ 都有 $a_n>0$, 此时

$$0 \le \left|\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{a}\right| = \frac{|a_n-a|}{\left(\sqrt[3]{a_n}\right)^2+\sqrt[3]{a_n}\cdot\sqrt[3]{a}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^2} < \frac{|a_n-a|}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n-a|}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2}=0,$$

根据迫敛性可得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{a}\right|=0,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$.

若 $a<0$, 则根据数列极限的保号性, 存在正整数 N 使得对任意 $n>N$ 都有 $a_n<0$, 此时仍有

$$0 \le \left|\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{a}\right| = \frac{|a_n-a|}{\left(\sqrt[3]{a_n}\right)^2+\sqrt[3]{a_n}\cdot\sqrt[3]{a}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^2} < \frac{|a_n-a|}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2}.$$

根据之前的讨论可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$.

□

✍ **作业题 7.4** 设 $\{a_n\}$ 为正数数列并且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$ (提示: 用保号性和迫敛性).

证明 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$, 根据数列极限的保号性, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$ 都有

$$0<\frac{1}{2}a<a_n<\frac{3}{2}a,$$

从而

$$0<\sqrt[n]{\frac{1}{2}a}<\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{\frac{3}{2}a},\quad \forall n>N.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}a}=1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3}{2}a},$$

根据迫敛性, 就有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1.$$

□

✍ **作业题 7.5** 在某些情况下, 非正常极限也具有类似于正常极限的一些性质. 利用 (正、负) 无穷大数列的严格定义证明以下结论

1. (类似于绝对值性质) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$.

2. (类似于保号性) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, 则对任何实数 $c\in\mathbb{R}$, 存在正整数 N, 使得对任何 $n>N$, 都有

$$a_n<c<b_n.$$

3. (类似于加法、乘法法则) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}a_nb_n=+\infty.$$

4. (类似于减法、乘法法则) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty.$$

5. (类似迫敛性) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 数列 $\{b_n\}$ 满足

$$a_n \le b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

则 $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

6. (类似于子列性质) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 则 $\{a_n\}$ 的任何子列 $\{a_{n_k}\}$ 都满足

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty.$$

证明

1. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 则对任意 $M > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n > N$, 都有

$$a_n < -M < 0,$$

从而

$$|a_n| > M,$$

所以 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

2. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 则对任意 $c \in \mathbb{R}$, 存在正整数 N_1, N_2, 使得对任意 $n > N_1$ 都有 $a_n < c$; 对任意 $n > N_2$ 都有 $b_n > c$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $n > N$ 就有

$$a_n < c < b_n.$$

3. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

(1) 对任意 $M > 0$, 存在正整数 N_1, N_2, 使得对任意 $n > N_1$, 都有 $a_n > \frac{1}{2}M$; 对任意 $n > N_2$, 都有 $b_n > \frac{1}{2}M$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $n > N$ 就有

$$a_n + b_n > \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M = M,$$

所以 $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

(2) 对任意 $M > 0$, 存在正整数 N_1, N_2, 使得对任意 $n > N_1$, 都有 $a_n > \sqrt{M}$; 对任意 $n > N_2$, 都有 $b_n > \sqrt{M}$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $n > N$ 就有

$$a_n b_n > \sqrt{M} \cdot \sqrt{M} = M,$$

所以 $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = +\infty$.

4. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

(1) 对任意 $M > 0$, 存在正整数 N_1, N_2, 使得对任意 $n > N_1$, 都有 $a_n > \frac{1}{2}M$; 对任意 $n > N_2$, 都有 $b_n < -\frac{1}{2}M$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $n > N$ 就有

$$a_n - b_n > \frac{1}{2}M - \left(-\frac{1}{2}M\right) = M,$$

所以 $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = +\infty$.

(2) 对任意 $M<0$, 存在正整数 N_1, N_2, 使得对任意 $n>N_1$, 都有 $a_n>\sqrt{-M}$; 对任意 $n>N_2$, 都有 $b_n<-\sqrt{-M}$. 令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则对任意 $n>N$ 就有

$$a_nb_n<\sqrt{-M}\cdot\left(-\sqrt{-M}\right)=M,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=-\infty$.

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 则对任意 $M>0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 都有 $a_n>M$, 再根据条件可得

$$b_n\geq a_n>M,\quad \forall n>N.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$.

6. 设 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的任意一个子列, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 则对任意 $M>0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$ 都有 $a_n>M$. 对任意 $k>n_N$, 都有 $n_k\geq k>n_N\geq N$, 从而 $a_{n_k}>M$, 于是

$$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=+\infty.$$

□

✍ **作业题 7.6** 计算以下数列的极限.

1. $\left\{\sqrt[n]{n^2+1}\right\}$.
2. $a_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.
3. $\left\{(n!)^{\frac{1}{n^2}}\right\}$ (提示: 利用增长速度的顺序和迫敛性).
4. $\left\{\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\right\}$.
5. $\left\{\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right\}$ (提示: 利用第 5 周作业题中的平方和公式).
6. $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+\cdots+k^3}}$ (提示: 利用第 5 周作业题中的立方和公式).

解

1. 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$1<\sqrt[n]{n^2+1}\leq\sqrt[n]{n^2+n^2}=\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}\right)=1,$$

再根据数列极限的迫敛性可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}=1.$$

2. 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$1\leq a_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\leq(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ 项}})^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 则根据数列极限的迫敛性可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

3. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0,$$

根据数列极限的保号性, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$ 都有

$$0<\frac{n!}{n^n}<1,$$

从而

$$1\le n!<n^n,\quad \forall n>N,$$
$$1\le (n!)^{\frac{1}{n^2}}<(n^n)^{\frac{1}{n^2}}=\sqrt[n]{n},\quad \forall n>N.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 则根据数列极限的迫敛性可得

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1.$$

4. 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$0\le\left|\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\right|\le\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}=\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n+1}=\frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}{1+\frac{1}{n}}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{0}{1+0}=0,$$

根据数列极限的迫敛性可得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\right|=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0.$$

5. 设

$$S_n=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

则

$$\begin{aligned}
&1^2+3^3+\cdots+(2n-1)^2\\
=\ &\left[1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n)^2\right]\\
&-\left[2^2+4^2+\cdots+(2n)^2\right]\\
=\ &S_{2n}-2^2\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)\\
=\ &S_{2n}-4S_n\\
=\ &\frac{4n^3-n}{3},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)\\
=\ &\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-n}{3n^3}\\
=\ &\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

6. 由于

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+\cdots+k^3}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 2.$$

□

总结:

1. 我们已经验证过许多极限等式: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0\ (\alpha>0)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$ 等, 这些可以直接用, 不需要再重复证明. 除非考试的时候要求你重新验证一遍.

2. 之前没有验证的极限等式, 一定要详细证明出来后才能使用. 如果你不确定是否验证过, 不妨重新验证一遍.

3. 用 $\varepsilon-N$ 定义验证极限时, 正整数 N 只能依赖于 ε, 不能依赖 n.

4. 我们课上讲的数列收敛的性质有一个大前提: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都收敛于实数. 在这个前提下才能使用收敛数列的性质, 例如四则运算法则. 某些特殊情况下, 无穷大数列也具有类似于收敛数列的性质, 例如本周作业第 5 大题. 但是这只是形式上类似, 并不能实质等同, 不要随便使用四则运算法则. 严格来讲, $0\cdot\infty$, $\infty\cdot\infty$ 等都是没有意义的.

5. 除了第 5 大题给出的结论外, 还有其它涉及无穷大数列的类似结论, 各位同学自行总结和证明. 当然, 也要总结不成立的情况, 例如:
   若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$, 则不一定有

   $$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=+\infty, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty.$$

   反例: $a_n=n=b_n$.

6. 学过的内容和题目要花大量时间反复看反复练习. 熟练之后, 原先很难的题目都会变成套路题, 就像你们现在已经熟悉的

   $$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$$

   求和这种.

7. 本次作业完成的比较好的同学, 一个也没有.

第 8 周

✍ **作业题 8.1** 证明

(1) 设 $\{a_n\}$ 是一列递增数列并且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则

$$a = \sup_n\{a_n\}.$$

特别地, 若 $\{a_n\}$ 还是一个严格增数列, 则

$$a_n < a, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

(2) 设 $\{a_n\}$ 是一列递减数列并且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则

$$a = \inf_n\{a_n\}.$$

特别地, 若 $\{a_n\}$ 还是一个严格减数列, 则

$$a_n > a, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

证明 (1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\{a_n\}$ 是有界数列. 又因为 $\{a_n\}$ 单调递增, 根据单调有界定理, 就有 (第一个等号就是单调有界定理的结论)

$$\sup_n\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

若 $\{a_n\}$ 还是严格增数列, 下证

$$a_n < a, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

反证法, 假设存在 $n_0 \in \mathbb{N}_+$ 使得 $a_{n_0} \geq a$, 则根据严格增性, 就有

$$a_{n_0+1} > a_{n_0} \geq a,$$

这与 $a = \sup\limits_n\{a_n\}$ 矛盾.

(2) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\{a_n\}$ 是有界数列. 又因为 $\{a_n\}$ 单调递减, 根据单调有界定理, 就有

$$\inf_n\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

若 $\{a_n\}$ 还是严格减数列, 下证

$$a_n > a, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

反证法, 假设存在 $n_0 \in \mathbb{N}_+$ 使得 $a_{n_0} \leq a$, 则根据严格减性, 就有

$$a_{n_0+1} < a_{n_0} \leq a,$$

这与 $a = \inf\limits_n\{a_n\}$ 矛盾. □

✍ **作业题 8.2** Cauchy 数列的几种等价形式:

(i) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $m, n > N$, 都有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

(ii) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n > N$ 以及任意 $m \geq n$, 都有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

(iii) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n > N$ 以及任意 $p \in \mathbb{N}$, 都有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

证明上述三种形式的等价性:

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 满足条件 (i), 则也满足 (ii);

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足条件 (ii), 则也满足 (iii);

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 满足条件 (iii), 则也满足条件 (i).

证明 (1) 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 (i), 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $m, n > N$, 都有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

于是对任意 $n > N$ 以及任意 $m' \geq n$, 有 $m', n > N$, 从而

$$|a_{m'} - a_n| < \varepsilon.$$

所以 $\{a_n\}$ 也满足条件 (ii).

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 (ii), 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n > N$ 以及任意 $m \geq n$, 都有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

于是, 对任意 $p \in \mathbb{N}$ 以及任意 $n > N$, 有 $n + p \geq n > N$, 从而

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

所以 $\{a_n\}$ 也满足条件 (iii).

(3) 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 (iii), 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n > N$ 以及任意 $p \in \mathbb{N}$, 都有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

对任意 $m, n > N$, 要么有 $m \geq n > N$, 要么有 $n > m > N$. 若 $m \geq n > N$, 令 $p = m - n$, 则 $p \in \mathbb{N}$, 从而

$$|a_m - a_n| = |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

若 $n > m > N$, 令 $p = n - m$, 则 $p \in \mathbb{N}$, 从而

$$|a_n - a_m| = |a_{m+p} - a_m| < \varepsilon.$$

所以 $\{a_n\}$ 也满足条件 (i).

□

✍ **作业题 8.3** 设 $\{a_n\}$ 是一个数列. 若存在正整数 N_0, 使得对任意 $m, n > N_0$, 都有

$$|a_m - a_n| \leq b_n,$$

其中 $\{b_n\}$ 是一个无穷小数列, 证明 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列.

证明 由条件可知 $b_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_1, 使得对任意 $n > N_1$, 都有

$$0 \leq b_n < \varepsilon.$$

令 $N = \max\{N_0, N_1\}$, 则对任意 $m, n > N$, 就有

$$|a_m - a_n| \le b_n < \varepsilon,$$

所以 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列. □

作业题 8.4 设 $c > 0$ 是一个正数, 数列 $\{a_n\}$ 满足:

$$a_1 \in \left(0, \frac{1}{c}\right), \quad a_{n+1} = a_n\left(2 - ca_n\right).$$

证明 $\{a_n\}$ 收敛, 并求出 $\{a_n\}$ 的极限.
(提示: 先让 a_1 取某个特定值, 例如 $a_1 = \frac{1}{2c}$, 据此寻找规律.)

证明 Step1. 先证

$$0 < a_n < \frac{1}{c}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

当 $n = 1$ 时, 显然 $0 < a_1 < \frac{1}{c}$.
假设当 $n = k$ 时, $0 < a_k < \frac{1}{c}$, 则

$$0 < \left|a_k - \frac{1}{c}\right| < \frac{1}{c},$$

于是当 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k(2 - ca_k) \\ &= 2a_k - ca_k^2 \\ &= -c\left(a_k - \frac{1}{c}\right)^2 + \frac{1}{c} \\ &\in \left(0, \frac{1}{c}\right). \end{aligned}$$

结论得证.
Step2. 根据 Step1 的结论, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 就有

$$a_{n+1} = a_n(2 - ca_n) > a_n\left(2 - c \cdot \frac{1}{c}\right) = a_n,$$

所以 $\{a_n\}$ 严格增. 根据单调有界定理, $\{a_n\}$ 收敛, 存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n > 0.$$

Step3. 在等式

$$a_{n+1} = a_n(2 - ca_n)$$

两端取极限可得

$$a = a(2 - ca),$$

解得 $a = \frac{1}{c}$. 所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{c}.$$

□

注 该题提供了计算给定正数 c 的倒数的一种迭代算法.

作业题 8.5

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0$ 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

(提示：$[a_n] \le a_n < [a_n]+1$, $\{[a_n]\}$ 是 $\mathbb{N}_+$ 的子列, 用两个与 $[a_n]$ 有关的数列把 $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ “包” 起来.)

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n < -1$ 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e.$$

注意 虽然 $\{[a_n]\}$ 是正整数构成的数列, 但是它的单调性未知, $\{[a_n]\}$ 不一定是 $\mathbb{N}_+$ 的子列. 若 $\{[a_n]\}$ 是严格增的数列, 则 $\{[a_n]\}$ 才是 $\mathbb{N}_+$ 的子列.

证明 (1) Step1. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 则存在正整数 N_0, 使得

$$a_n > 1, \quad \forall n > N_0,$$

从而

$$1 \le [a_n] \le a_n < [a_n]+1, \quad \forall n > N_0, \tag{8.1}$$

进而

$$1+\frac{1}{[a_n]+1} < 1+\frac{1}{a_n} \le 1+\frac{1}{[a_n]}, \quad \forall n > N_0,$$

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} &\le \left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{a_n} \\
&< \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \\
&\le \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}, \quad \forall n > N_0.
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Step2. 下证以下一般性命题.

命题 8.1

设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 则 $\{f(n)\}$ 是一个数列. 若

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A,$$

则对任意一列无穷大正整数数列 $\{a_n\}$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A.$$

事实上, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_0, 使得对任意 $m > N_0$, 都有

$$|f(m)-A| < \varepsilon. \tag{8.3}$$

又因为 $\{a_n\}$ 是无穷大正整数数列, 则存在正整数 N, 使得对任意 $n > N$, 都有 $a_n > N_0$, 此时, 令 $m = a_n$ 并代入(8.3)式便得到

$$|f(a_n)-A| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

所以
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A.$$
命题得证.

Step3. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 根据(8.1)式可得
$$\lim_{n\to\infty} [a_n] = +\infty.$$
又因为
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = e,$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$
由 Step2 的结论可得
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} = e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}.$$
根据(8.2)式以及数列极限的迫敛性可得
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

(2) 设 $a_n = -b_n$, 由条件可知 $a_n > 1$ 并且
$$\lim_{n\to\infty}(a_n+1) = +\infty.$$
另一方面,
$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n}\\
=&\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{-a_n}\\
=&\left(\frac{a_n}{a_n-1}\right)^{a_n}\\
=&\left(1+\frac{1}{a_n-1}\right)^{a_n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{a_n-1}\right).
\end{aligned}$$
由本题 (1) 部分的结果可知
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n-1}\right)^{a_n-1} = e.$$
又因为
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n-1}\right) = 1+0 = 1,$$
所以
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e\cdot 1 = e.$$
□

注　Step2 中的命题提供了计算数列极限时一种常用技巧——变量代换技巧. 事实上, 还有其他类型的变量代换技巧: 命题中的 A 也可以是 $+\infty$, $-\infty$ 和 ∞(证明方法同学们自己总结).

总结:

1. 各位同学在写题目的证明过程或者解答过程时, 字迹和逻辑务必清晰, 让别人知道你到底在写什么.
2. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得 $\forall n > N$, 有 $a_n < a + \varepsilon$, 这并不能得出 $a_n \le a$, 因为 a_n 并不是固定的数. 反例 $a_n = \frac{1}{n}$, $a = 0$.
3. 第 2 题, 大家一定要清楚到底要证明什么, 仔细看一下我给出的参考答案的逻辑和思路.
4. 本次作业同学们的完成状况都非常差. 有些同学连极限的 $\varepsilon - N$ 定义都没有掌握, 存在符号 $\exists$ 写成 E, "$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$" 写成 "$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+$ ". 第 1 题里面, 根据收敛数列的有界性, $\{a_n\}$ 是有界数列. 这样一句话就得出 $\{a_n\}$ 有上界, 许多同学却没用这个结论, 自己去证明又是错误百出.
5. 有一些同学, 5 道题目只做了第 1 题 (还做错了), 其他题都空着. 有时间参加这个活动那个活动, 就没时间做做作业, 复习一下学过的内容吗?

第 9 周

✍ **作业题 9.1** 用 $\varepsilon - N$ 极限定义和无穷大数列的定义验证以下极限等式.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} = 1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n-\sqrt{n}} = +\infty$.

证明 (1) 方法 1. 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} - 1\right| &= \left|\frac{\sqrt{n^2+2n}-n}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\cdot\frac{(n^2+2n)-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}\right| \\ &< \frac{2}{(n+1)+n} < \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 令 $N = \frac{1}{\varepsilon}$, 则对任意 $n > N$, 有

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} - 1\right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \varepsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} = 1.$$

方法 2. 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$1 < \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} = \sqrt{1+\frac{2}{n}} < 1 + \frac{2}{n},$$

从而

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} - 1\right| < \frac{2}{n}.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 令 $N=\frac{2}{\varepsilon}$, 则对任意 $n>N$, 有

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n}-1\right|<\frac{2}{n}<\frac{2}{N}=\varepsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n}=1.$$

(2) 方法 1: 设 $h_n=\sqrt[n]{n+1}-1$, 则 $h_n>0$ $(n\in\mathbb{N}_+)$, 并且

$$n+1=(h_n+1)^n\geq 1+\frac{n^2h_n^2}{4},\quad \forall n\geq 2,$$

从而

$$0<h_n\leq\frac{2}{\sqrt{n}},\quad \forall n\geq 2.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 令 $N=\max\left\{2,\frac{4}{\varepsilon^2}\right\}$, 则对任意 $n>N$, 就有

$$\left|\sqrt[n]{n+1}-1\right|=|h_n|<\frac{2}{\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{N}}\leq\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1.$$

方法 2: 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$ 并且 $n>2$, 利用算术-几何平均值不等式可得

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n+1} &= \sqrt[n]{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+1}\cdot\underbrace{1\cdots1}_{n-2}}\\
&\leq \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}+\overbrace{1+\cdots+1}^{n-2}}{n}\\
&= \frac{2\sqrt{n+1}}{n}+1-\frac{2}{n}\\
&< \frac{2\sqrt{n+n}}{n}+1\\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}+1,
\end{aligned}$$

从而

$$\left|\sqrt[n]{n+1}-1\right|<\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}},\quad \forall n>2.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 令 $N=\max\left\{\frac{8}{\varepsilon^2},2\right\}$, 则对任意 $n>N$, 就有

$$\left|\sqrt[n]{n+1}-1\right|<\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}<\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{N}}\leq\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1.$$

(3) 反正切函数

$$y=\arctan x,\quad x\in\mathbb{R}$$

是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 在 $\mathbb{R}$ 上严格增并且值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 总有

$$-\frac{\pi}{2}<\arctan n<\frac{\pi}{2},$$

从而

$$\left|\arctan n - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2} - \arctan n.$$

对任意 $\varepsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 令 $N = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) > 0$, 则对任意 $n > N$, 由反正切函数 $y = \arctan x$ 的单调性可知

$$\arctan n > \arctan N = \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

从而

$$\left|\arctan n - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2} - \arctan n < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

对任意 $\varepsilon \geq \frac{\pi}{2}$, 任取 $N \in \mathbb{N}_+$, 则对任意 $n > N$, 都有

$$\left|\arctan n - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2} - \arctan n \leq \varepsilon.$$

综上

$$\lim_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}.$$

(4) 方法 1: 当 $n \geq 4$ 时, $n \geq 2\sqrt{n}$, 从而 $n - \sqrt{n} \geq \sqrt{n}$,

$$\sqrt{n - \sqrt{n}} \geq n^{\frac{1}{4}}, \quad \forall n \geq 4.$$

对任意 $M > 0$, 令 $N = \max\left\{4, M^4\right\} > 0$, 则对任意 $n > N$, 有

$$\sqrt{n - \sqrt{n}} \geq n^{\frac{1}{4}} > N^{\frac{1}{4}} \geq M,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n - \sqrt{n}} = +\infty.$$

方法 2: 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 都有 $\sqrt{n} - 1 \geq 0$, 从而

$$n - \sqrt{n} \geq (n - \sqrt{n}) - (\sqrt{n} - 1) = n - 2\sqrt{n} + 1 = (\sqrt{n} - 1)^2,$$

$$\sqrt{n - \sqrt{n}} \geq \sqrt{n} - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

对任意 $M > 0$, 令 $N = (M+1)^2$, 则对任意 $n > N$, 有

$$\sqrt{n - \sqrt{n}} \geq \sqrt{n} - 1 > \sqrt{N} - 1 = M,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n - \sqrt{n}} = +\infty.$$

□

作业题 9.2 计算以下数列的极限.

(1) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

(2) $a_n = \left(1 - \frac{1}{1+2}\right)\left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}\right)$. (提示: 先通分最后一个因子, 然后耐心多算几项就可以发现规律.)

(3) $a_n = \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. (提示:$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{k+2} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{k+2}\right)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{k(k+2)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$)

(4) $a_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdots\frac{n+1}{2n+1}$.

(5) $a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}$.

解 (1) 对任意 $k \in \mathbb{N}_+$, 有

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n}.$$

当 $n \geq 3$ 时, 就有

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\cdots\frac{n-2}{n-1}\frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

(2) 对任意 $k \in \mathbb{N}_+$ 并且 $k \geq 5$, 有

$$1 - \frac{1}{1+2+3+\cdots+k} = 1 - \frac{2}{k(k+1)} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)},$$

从而

$$\begin{aligned} &\frac{(k-4)(k-1)}{(k-3)(k-2)} \cdot \frac{(k-3)k}{(k-2)(k-1)} \cdot \frac{(k-2)(k+1)}{(k-1)k} \cdot \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} \\ =\ &\frac{k-4}{k-2} \cdot \frac{k+2}{k}. \end{aligned}$$

利用归纳法可证, 当 $n \in \mathbb{N}_+$ 并且 $n \geq 5$ 时,

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}\right) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n}. \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3}.$$

(3) 对任意 $k \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ =\ &\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{k+2} \\ =\ &\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) - \left(1-\frac{1}{k+2}\right)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ =\ &\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) - \left(1-\frac{1}{k+2}\right)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ =\ &\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{k(k+2)} \\ =\ &\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right). \end{aligned}$$

由归纳法可证,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}.$$

(4) 显然, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_+$. 另一方面,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)+1} < 1.$$

所以 $\{a_n\}$ 单调递减, 并且有下界 0. 根据单调有界定理, $\{a_n\}$ 收敛, 存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0.$$

由于

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)+1} a_n,$$

在上式两端令 $n\to\infty$, 可得 $a = \frac{1}{2}a$, 从而 $a = 0$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(5) 显然, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_+$. 另一方面, 当 $n \geq 10$ 时,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)+9}{2(n+1)-1} < 1.$$

所以去掉前 10 项后, $\{a_n\}$ 单调递减且有下界 0. 根据单调有界定理, $\{a_n\}$ 收敛, 存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0.$$

由于

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)+9}{2(n+1)-1} a_n, \quad \forall n \geq 10,$$

在上式两端令 $n\to\infty$, 可得 $a = \frac{1}{2}a$, 从而 $a = 0$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

注 上面的 (4)(5) 两小题, 也可以看作教材 P38 页第 7 题的特例. 若 $a_n > 0$, 并且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{a_{n+1}} = l > 1,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

作业题 9.3 用闭区间套定理证明确界原理.

证明 设 S 是有上界的实数集, M 是 S 的一个上界. 若任取 $x \in S$, x 都是 S 的上界, 此时 S 中只有一个元素 x, 从而 S 的上确界存在, 并且 $\sup S = x$. 下设存在 $m \in S$, 使得 m 不是 S 的上界.

记 $a_1 = m$, $b_1 = M$. 则 a_1 不是 S 的上界, b_1 是 S 的上界, 并且 $b_1 - a_1 = M - m$.

令 $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. 若 c_1 是 S 的上界, 则记 $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$; 若 c_1 不是 S 的上界, 则记 $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$. 总之, a_2 不是 S 的上界, b_2 是 S 的上界, 并且 $b_2 - a_2 = \frac{M-m}{2}$.

令 $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$. 若 c_2 是 S 的上界, 则记 $a_3 = a_2$, $b_3 = c_2$; 若 c_2 不是 S 的上界, 则记 $a_3 = c_2$, $b_3 = b_2$. 总之, a_3 不是 S 的上界, b_3 是 S 的上界, 并且 $b_3 - a_3 = \frac{M-m}{2^2}$.

……

上述过程一致重复下去, 就得到一列闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$, 满足

(i) $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$;

(ii) $b_n-a_n=\frac{M-m}{2^{n-1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}_+$;

(iii) 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, a_n 不是 S 的上界, b_n 是 S 的上界.

由 (i)(ii) 可知, $\{[a_n,n_n]\}$ 是一列闭区间套, 根据闭区间套定理, 存在唯一的 $\xi\in\mathbb{R}$ 使得

$$\xi\in[a_n,b_n],\quad \forall n\in\mathbb{N}_+,$$

并且

$$\xi=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 有

$$[a_n,b_n]\subset U(\xi,\varepsilon)=(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon). \tag{9.1}$$

下证 $\xi=\sup S$.

由于 b_n $(n\in\mathbb{N}_+)$ 都是 S 的上界, 则对任意 $x\in S$, 有

$$x\le b_n,\quad \forall n\in\mathbb{N}_+.$$

由数列极限的保不等式性可得

$$x\le\lim_{n\to\infty}b_n=\xi,$$

所以 ξ 是 S 的一个上界. 设 $\alpha<\xi$ 并令 $\varepsilon=\xi-\alpha$, 则 $\varepsilon>0$ 并且 $\alpha=\xi-\varepsilon$. 于是, 根据(9.1), 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 都有

$$a_n>\xi-\varepsilon=\alpha.$$

由于 a_n 不是 S 的上界, 则 α 也不是 S 的上界.

综上, S 的上确界存在并且 $\sup S=\xi$.

同理可证, 任何有下界的实数集必有下确界. □

总结:

1. 第 1 大题题干要求用数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义和无穷大数列的定义来验证极限等式, 这里就不能用收敛数列的迫敛性等性质, 要严格按照定义寻找合适的正整数 N.
2. 三角函数和反三角函数的定义域、值域、单调性、周期性和图像从网上均可查到.
3. 本次作业完成的比较好的同学: 孙景祯

第 10 周

✍ **作业题 10.1** 设 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+2}-a_n)=a$, 证明

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{a}{2}$; (提示: 利用 Cauchy 命题分别算一下 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 的偶数子列和奇数子列的极限)

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{n}=0$.

证明 (1) 令 $b_n=a_{2n-1}$, $c_n=a_{2n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+2}-a_n)=0,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n)=a=\lim_{n\to\infty}(c_{n+1}-c_n).$$

再令

$$\tilde{b}_1=b_1,\quad \tilde{b}_n=b_n-b_{n-1}\ (n\geq 2);$$
$$\tilde{c}_1=c_1,\quad \tilde{c}_n=c_n-c_{n-1}\ (n\geq 2),$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{b}_n=a=\lim_{n\to\infty}\tilde{c}_n$$

并且

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\tilde{b}_n,\quad c_n=\sum_{k=1}^{n}\tilde{c}_n,\quad \forall n\geq 2.$$

利用 Cauchy 命题就可得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=a=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{n},$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}a,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{2n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{n}=\frac{1}{2}a,$$

即数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 的奇数子列和偶数子列的极限均为 $\frac{1}{2}a$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}a.$$

(2) 由于

$$\frac{a_{n+1}}{n}=\frac{a_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n},$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{a}{2}\cdot 1=\frac{a}{2},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{n}=\frac{a}{2}-\frac{a}{2}=0.$$

□

作业题 10.2 证明

定理 10.1. $\frac{0}{0}$ 型 Stolz 定理

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是无穷小数列, 并且 $\{a_n\}$ 严格减. 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l,$$

其中 l 可以是实数、$+\infty$ 或 $-\infty$(不能是 ∞), 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l.$$

♡

证明 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 并且 $\{a_n\}$ 严格减, 则

$$a_n>0,\quad \forall n\in\mathbb{N}_+.$$

I. 当 $l \in \mathbb{R}$ 时, 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n} = l,$$

则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $k \geq N$, 都有

$$\left| \frac{b_{k+1}-b_k}{a_{k+1}-a_k} - l \right| < \varepsilon,$$

即

$$l - \varepsilon < \frac{b_{k+1}-b_k}{a_{k+1}-a_k} < l + \varepsilon, \quad \forall k \geq N.$$

由于 $a_{k+1} - a_k < 0$ $(\forall k \in \mathbb{N}_+)$, 因此

$$(l+\varepsilon)(a_{k+1}-a_k) < b_{k+1}-b_k < (l-\varepsilon)(a_{k+1}-a_k), \quad k \geq N. \tag{10.1}$$

对任意 $m > n \geq N$, 有 $a_m - a_n < 0$ 并且

$$a_m - a_n = \sum_{k=n}^{m-1}(a_{k+1}-a_k), \quad b_m - b_n = \sum_{k=n}^{m-1}(b_{k+1}-b_k),$$

结合(10.1)式就可得

$$(l+\varepsilon)(a_m-a_n) < b_m-b_n < (l-\varepsilon)(a_m-a_n), \quad \forall m,n > N.$$

从而

$$l - \varepsilon < \frac{b_m-b_n}{a_m-a_n} < l + \varepsilon,$$

即

$$\left| \frac{b_m-b_n}{a_m-a_n} - l \right| < \varepsilon, \quad \forall m,n > N. \tag{10.2}$$

由于

$$\lim_{m\to\infty} a_m = 0 = \lim_{m\to\infty} b_m,$$

固定(10.2)式中的 n, 并令 $m \to \infty$ 可得

$$\left| \frac{b_n}{a_n} - l \right| = \left| \frac{0-b_n}{0-a_n} - l \right| \leq \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = l.$$

II. 当 $l = +\infty$ 时, 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n} = +\infty,$$

则存在正整数 N_0, 使得对任意 $n \geq N_0$, 都有

$$\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n} > 0,$$

从而

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} > 0, \ \forall n \geq N_0 \quad \text{并且} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = 0. \tag{10.3}$$

由于 $a_{n+1} - a_n < 0$, 则

$$b_{n+1} - b_n < 0, \quad \forall n \geq N_0,$$

即 $n \geq N_0$ 时, $\{b_n\}$ 是严格减的无穷小数列并且 $b_n > 0$. 根据(10.3)式以及上一步的结论可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = 0.$$

又因为

$$a_n > 0, \quad b_n > 0, \quad \forall n \geq N_0,$$

则易证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty.$$

III. 当 $l = -\infty$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n} = -\infty.$$

令 $c_n = -b_n$, 则易证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}-c_n}{a_{n+1}-a_n} = +\infty.$$

由上一步的结论可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = +\infty,$$

由此可证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = -\infty.$$

□

作业题 10.3 利用 Stolz 定理计算以下数列的极限:

(1) $a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^\alpha}$, 其中 $\alpha > 0$.

(2) $a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$.

(3) $a_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$.

(4) $a_n = n\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right)$, 其中 k 为正整数.

注意 本题第 (1) 题处理 $0 < \alpha < 1$ 的情形的方法稍微超纲, 同学们可以学完第 6 章第 1 节后再看.

解 (1) 显然 $\{n^\alpha\}$ 是严格增的正无穷大列.

(i) 当 $\alpha \geq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{\frac{1}{n+1}}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} \\ &= \frac{1}{(n+1)n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right]} \\ &\leq \frac{1}{(n+1)n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right]} \\ &= \frac{1}{n^\alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &< \frac{1}{n^\alpha}. \end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, 则由数列极限的迫敛性可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} = 0 \quad (\alpha \geq 1).$$

(ii) 当 $0<\alpha<1$ 时, 根据微分中值定理, 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}=\alpha(n+\theta)^{\alpha-1}=\frac{\alpha}{(n+\theta)^{1-\alpha}}>\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}},$$

从而

$$0<\frac{\frac{1}{n+1}}{(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}}<\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}}}=\frac{\alpha}{(n+1)^{\alpha}}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{(n+1)^{\alpha}}=0,$$

则由数列极限的迫敛性可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}}=0\quad(0<\alpha<1).$$

综上, 利用 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}}=0.$$

(2) 易证 $\{\ln n\}$ 是严格增的正无穷大数列. 对任意 $n\in\mathbb{N}_{+}$, 有

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{n}{n+1}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$, 根据数列极限的保号性, 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, 都有

$$e^{1-\varepsilon}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e^{1+\varepsilon},$$

从而

$$1-\varepsilon<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<1+\varepsilon,\quad\forall n>N,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1$. 又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=1.$$

根据 Stolz 定理, 就有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=1.$$

(3) 由于

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)!-n!}=\frac{n+1}{(n+1)-1}=\frac{n+1}{n},$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)!-n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)!-n!}=1.$$

(4) 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 有

$$a_n=n\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{(k+1)(1^k+2^k+\cdots+n^k)-n^{k+1}}{(k+1)n^k}.$$

设

$$b_n=(k+1)(1^k+2^k+\cdots+n^k)-n^{k+1},\quad c_n=(k+1)n^k,$$

则

$$\begin{aligned}
&b_{n+1}-b_n\\
=\;&(k+1)(n+1)^k-(n+1)^{k+1}+n^{k+1}\\
=\;&(k+1)\left(n^k+kn^{k-1}+\cdots+1\right)-\left[n^{k+1}+(k+1)n^k+\frac{k(k+1)}{2}n^{k-1}+\cdots+1\right]+n^{k+1}\\
=\;&\frac{k(k+1)}{2}n^{k-1}+\cdots+k,
\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}
&c_{n+1}-c_n\\
=\;&(k+1)(n+1)^k-(k+1)n^k\\
=\;&(k+1)\left[n^k+kn^{k-1}+\cdots+1\right]-(k+1)n^k\\
=\;&k(k+1)n^{k-1}+\cdots+(k+1),
\end{aligned}$$

于是 $b_{n+1}-b_n$ 和 $c_{n+1}-c_n$ 都是关于 n 的 $k-1$ 次多项式, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}-c_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{k(k+1)}{2}n^{k-1}+\cdots+k}{k(k+1)n^{k-1}+\cdots+(k+1)}=\frac{1}{2}.$$

由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}-c_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{1}{2}.$$

□

作业题 10.4 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2^ka_2+3^ka_3+\cdots+n^ka_n}{n^{k+1}}=\frac{a}{k+1}$, 其中 k 为非负整数.

证明 (1) 设 $b_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n$, $c_n=n^2$, 则

$$b_{n+1}-b_n=(n+1)a_{n+1},\quad c_{n+1}-c_n=(n+1)^2-n^2=2n+1,$$

从而

$$\frac{b_{n+1}-b_n}{c_{n+1}-c_n}=\frac{n+1}{2n+1}\cdot a_{n+1}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{c_{n+1}-c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\frac{1}{2}a.$$

根据 Stolz 定理就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{c_{n+1}-c_n}=\frac{a}{2}.$$

(2) 当 $k=0$ 时, 由 Cauchy 命题可知结论成立; 当 $k=1$ 时, 由本题 (1) 可知结论也成立. 下面假设 $k\geq 2$. 设 $b_n=a_1+2^ka_2+3^ka_3+\cdots+n^ka_n$, $c_n=n^{k+1}$, 则

$$b_{n+1}-b_n=(n+1)^ka_{n+1},$$

$$c_{n+1}-c_n=(n+1)^{k+1}-n^{k+1}=(k+1)n^k+\frac{k(k+1)}{2}n^{k-1}+\cdots+1.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{c_{n+1}-c_n}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(k+1)n^k+\frac{k(k+1)}{2}n^{k-1}+\cdots+1}\cdot\lim_{n\to\infty}a_{n+1}\\=&\frac{1}{k+1}\cdot a.\end{aligned}$$

根据 Stolz 定理就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{c_{n+1}-c_n}=\frac{a}{k+1}.$$

□

✍ **作业题 10.5** 给出以下函数极限等式的严格定义.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$;

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$;

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

(第 1 步，先指明函数 f 在哪种形式的范围内有定义.)

解 (1) 设函数 f 在 $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ 内有定义. 若对任意 $M<0$, 存在 $N>0$, 使得 $N\geq b$, $-N\leq a$ 并且对任意 $x:|x|>N$, 都有

$$f(x)<M,$$

则

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty.$$

(2) 设函数 f 在 $(-\infty,a)$ 内有定义. 若对任意 $M>0$, 存在 $N\leq a$, 使得对任意 $x<N$, 都有

$$|f(x)|>M,$$

则

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty.$$

(3) 设函数 f 在 $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ 内有定义. 若对任意 $M>0$, 存在 $N>0$, 使得 $N\geq b$, $-N\leq a$ 并且对任意 $x:|x|>N$, 都有

$$|f(x)|>M,$$

则

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty.$$

(4) 设函数 f 在 x_0 的某去心邻域 $U^\circ(x_0;\delta')$ 内有定义. 若对任意 $M<0$, 存在正数 $\delta\ (<\delta')$, 使得

$$\forall x: 0<|x-x_0|<\delta,$$

都有

$$f(x)<M,$$

则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty.$$

□

总结:

1. 许多同学对课本内容掌握不熟, 例如 P30 例 4 有理分式求极限的问题, 该题的结论可以直接用 (但是要注意前提条件).
2. 只有极限存在时, 才能用四则运算法则, 先确定极限是否存在, 再去做加减乘除.
3. 求极限时, 最好不要一开始就写极限符号 "lim", 先处理要求极限的数列或函数, 处理完后再用极限符号.