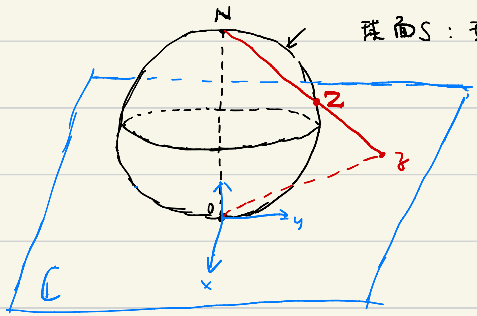
§1.4 复球面与无穷远点

一、球极投影



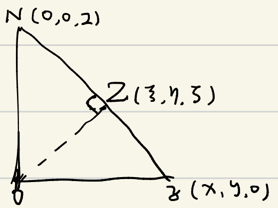
球面S：球心为$(0,0,\frac{1}{2})$，半径为$\frac{1}{2}$

对$\forall z\in\mathbb{C}$，连接北极点N与点z，所得线段与单位球面相交于唯一一点Z. 由此建立了球极投影映射

$$P:\ \mathbb{C}\longrightarrow S\setminus\{N\}$$

$$z=x+iy\longrightarrow Z=(\xi,\eta,\zeta).$$

x,y与ξ,η,ζ关系为何？



① N, Z, z 三点共线 $\Longrightarrow$

$$\frac{0-\xi}{0-x}=\frac{0-\eta}{0-y}=\frac{1-\zeta}{1-0}=t,$$

即 $\xi=tx,\ \eta=ty,\ \zeta=1-t$

② OZ垂直于Nz $\Longrightarrow$

$$(\xi,\eta,\zeta)\cdot(x,y,-1)=x\xi+y\eta-\zeta=0$$

由以上两式可得 $t=\frac{1}{x^2+y^2+1}$，从而

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2+1},\quad \eta=\frac{y}{x^2+y^2+1},\quad \zeta=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}. \qquad (1)$$

由于 $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$，$y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$，$x^2+y^2=|z|^2$，则

$$\xi=\frac{z+\bar{z}}{2(|z|^2+1)},\quad \eta=\frac{1}{i}\frac{z-\bar{z}}{2(|z|^2+1)},\quad \zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}. \tag{2}$$

另一方面，由 (2) 式中第 3 项可知 $0<\zeta<1$，并且

$$|z|^2=\frac{\zeta}{1-\zeta}$$

再结合 (2) 式中前两项可得

$$z=\frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}. \tag{3}$$

二. 复球面与扩充复平面 $\mathbb{C}_\infty$.

上一节定义的球极投影映射 P 是 $\mathbb{C}$ 到 $S\setminus\{N\}$ 的一一映射. 为了将北极点 N 包括进去，在 $\mathbb{C}$ 中引入额外的元素 a 与之对应，这也使得球极投影映射 P 延拓成了 $\mathbb{C}\cup\{a\}$ 到 S 的一一映射

$$\tilde{P}:\ \mathbb{C}\cup\{a\}\longrightarrow S$$

$$\begin{cases} z\in\mathbb{C}\longmapsto P(z)=\left(\frac{z+\bar{z}}{2(|z|^2+1)},\ \frac{1}{i}\frac{z-\bar{z}}{2(|z|^2+1)},\ \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\right) \\ a\longmapsto N(0,0,1) \end{cases}$$

对集合 $\mathbb{C}\cup\{a\}$ 中任意两点 z_1, z_2，定义

$$\rho_\infty(z_1,z_2)=\left|\tilde{P}(z_1)-\tilde{P}(z_2)\right|.$$

则 ρ_∞ 满足距离的三要素:

(1) 正定性: $\rho_\infty(z_1,z_2)\geq 0$, $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}\cup\{a\}$; $\rho_\infty(z_1,z_2)=0\Longleftrightarrow z_1=z_2$.

(2) 对称性：$\rho_\infty(z_1,z_2)=\rho_\infty(z_2,z_1)$，$\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}\cup\{a\}$.

(3) 三角不等式：$\rho_\infty(z_1,z_2)\le\rho_\infty(z_1,z_3)+\rho_\infty(z_3,z_2)$，$\forall z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}\cup\{a\}$.

所以 $\mathbb{C}\cup\{a\}$ 在距离 ρ_∞ 下成为距离空间，记为 $\mathbb{C}_\infty$.

问题：如何理解元素 a ？

(1) 复平面 $\mathbb{C}$ 上任何一条直线 l，经过球极投影映射作用，所得的像为直线 l 与北极点 N 所确定的平面截取球面 S 所得的圆周去掉北极点 N 的部分. 直线 l 上的点离原点越远，则对应的像点离点 N 越近.

(2) 对 $\forall z\in\mathbb{C}$，有

$$\rho_\infty(z,a)=|P(z)-N|$$

$$=\left|\left(\frac{z+\bar z}{2(|z|^2+1)},\ \frac{1}{i}\frac{z-\bar z}{2(|z|^2+1)},\ \frac{|z|^2}{|z|^2+1}\right)-(0,0,1)\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

设 $\{z_n\}\subset\mathbb{C}$，易证

$$|z_n|\to\infty\ (n\to\infty)\iff\lim_{n\to\infty}\rho_\infty(z_n,a)=0.$$

基于以上原因，将元素 a 理解为复平面 $\mathbb{C}$ 上的无穷远点，记为 ∞，复平面 $\mathbb{C}$ 上每一条直线都通过无穷远点 ∞. 集合 $\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 称为扩充复平面

利用 $\mathbb{C}_\infty$ 上的距离 ρ_∞ 可定义 $\mathbb{C}_\infty$ 上的邻域

$$U(z_0; r) = \{ z \in \mathbb{C}_\infty \mid \rho_\infty(z_0, z) < r \}, \quad z_0 \in \mathbb{C}_\infty.$$

进而可定义内点、聚点、开集、闭集等概念。

$\boxed{\text{规定}}$：复平面 $\mathbb{C}$ 上无穷远点 ∞ 的邻域规定为形如

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > R \} \quad (R\text{为足够大的实数})$$

的集合.