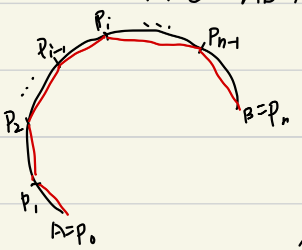
§10.3 平面曲线的弧长与曲率

一. 平面曲线的弧长

记号：P, Q 是平面中两点，$\overline{PQ}$ 表示联接 P, Q 的直线段，$|PQ|$ 表示该直线段长度，$\overset{\frown}{PQ}$ 表示联接 P, Q 的曲线(段)。

设 $C=\overset{\frown}{AB}$ 是一条不自交的非闭的平面曲线，在 C 上从 A 到 B 依次取



分点 $A=P_0, P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}, P_n=B$.

这些分点构成了平面曲线 C 的一个分割 T。

用直线段联接 T 中所有的相邻的两个分点，得到曲线 C 的一条内接折线。记

$\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}|P_{i-1}P_i|$，　$S_T=\sum\limits_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|$

<u>定义1.</u> 若存在某个确定的实数 S，s.t.

$$\lim_{\|T\|\to 0} S_T = S,$$

即对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, s.t. 对曲线 C 的任一满足 $\|T\|<\delta$ 的分割 T，都有 $|S_T-S|<\varepsilon$，则称曲线 C 是可求长的曲线，称 S 为曲线 C 的弧长。

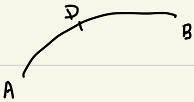
<u>定理1.</u> 设曲线 C 是一条不自交的非闭的平面曲线，由参数方程

$$x=x(t),\ y=y(t),\quad t\in[\alpha,\beta]$$

表示，若 $x(t), y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可导，则 C 可求长，且弧长为

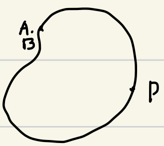
$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt \qquad (1)$$

性质：设 $\overset{\frown}{AB}$ 是一条不自交的非闭的可求长平面曲线，若 D是 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意一点，则 $\overset{\frown}{AD}$ 和 $\overset{\frown}{DB}$ 也是可求长的，



$$S_{\overset{\frown}{AB}}=S_{\overset{\frown}{AD}}+S_{\overset{\frown}{DB}}$$

定义2 设 $\overset{\frown}{AB}$ 是一条简单闭曲线，在 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取一点P，将 $\overset{\frown}{AB}$ 分为两段不自交的非闭曲线。若 $\overset{\frown}{AP}$ 和 $\overset{\frown}{PB}$ 都可求长，则称 $\overset{\frown}{AB}$ 可求长，并且定义 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长(周长)为



$$S_{\overset{\frown}{AB}}=S_{\overset{\frown}{AP}}+S_{\overset{\frown}{PB}}$$

注：定理1的结论可推广到含有自交点的(非)闭的平面曲线的情形。

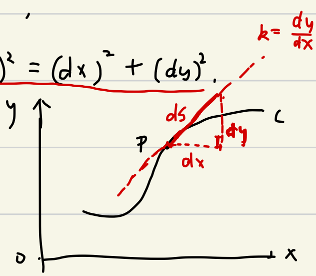
$C:\ x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta]$.

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

注：令 $s(t)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{x'^2(\tau)+y'^2(\tau)}\,d\tau$，$s(t)$ 是 $P(x(t_0),y(t_0))$ 到动点 $Q(x(t),y(t))$ 这一段曲线的弧长。

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

于是 $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$，即 $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$.



称微分 ds 为曲线C的弧微分。

弧长计算的方式：

1. 曲线 C：$x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$. 若 $x(t)$, $y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续可导,

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

2. 曲线 C：$y=f(x)$, $x\in[a,b]$, 其中 f 在 $[a,b]$ 上连续可导.

令 $x=t$, $y=f(t)$, $t\in[a,b]$, 从而

$$S=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^b\sqrt{1+f'^2(t)}\,dt=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

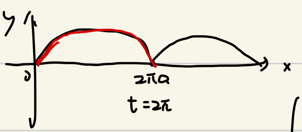
3. 曲线 C：$r=r(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$. (极坐标方程), 其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可导. 令

$$x=x(\theta)=r(\theta)\cos\theta,\quad y=y(\theta)=r(\theta)\sin\theta,\quad \theta\in[\alpha,\beta],$$

从而

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta.$$

例1. 摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(a>0)$ 的一拱的弧长.



解：$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$, $\frac{dy}{dt}=a\sin t$,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dy}\right)^2=a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t$$

$$=2a^2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2},\quad t\in[0,2\pi]$$

于是 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=2a\sin\frac{t}{2}$, $t\in[0,2\pi]$.

$$S=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}\,dt=8a$$

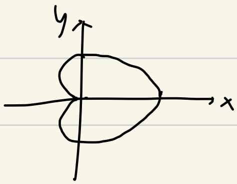
例2. 悬链线 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 从 $x=0$ 到 $x=a>0$ 一段的弧长.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\frac{(e^x-e^{-x})^2}{4}=\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}$.

于是 $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$,

$$s = \int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^a \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx = \frac{e^a-e^{-a}}{2}.$$

例3 心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 的周长



解: $r'(\theta) = -a\sin\theta$.

$$r^2(\theta)+r'^2(\theta) = a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta$$

$$= 2a^2(1+\cos\theta) = 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2},\quad \theta\in[0,2\pi]$$

$$S = \int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta - 2a\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= 8a.$$

Ex3 求 a.b 的值, s.t. 椭圆 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ 的周长等于正弦曲线 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 一段的弧长.

(注意. 椭圆无法用定积分的N-L公式求出周长)

解: 正弦曲线弧长

$$S_1 = \int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx.$$

椭圆周长

$$S_2 = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 x}\,dx.$$

当 $a=1$, $b=\sqrt{2}$ 或 $a=\sqrt{2}$, $b=1$ 时, 就有

$$S_1 = S_2.$$

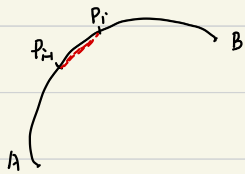
定理1. 曲线 $\widehat{AB}$ 是不自交的非闭的平面曲线，参数方程为

$$x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta],$$

其中 $x(t)$, $y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可导，$A=(x(\alpha),y(\alpha))$，$B=(x(\beta),y(\beta))$，

则 $\widehat{AB}$ 可求长，并且弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$



证：下证 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，s.t. 对曲线 $\widehat{AB}$ 的任一满足

$$\|T\|<\delta$$

的分割 $T=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$，由 T 产生的内接折线总长度 s_T 满足

$$\left|s_T-\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt\right|<\varepsilon.$$

Step1. 对曲线 $\widehat{AB}$ 的任一分割 $T=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$，其中 $P_0=A$，$P_n=B$，

P_i 对应参数 t_i $(i=0,1,2,\cdots,n)$，特别 $t_0=\alpha$，$t_n=\beta$.

按照曲线 $\widehat{AB}$ 上分点的选取顺序，得到 $[\alpha,\beta]$ 的一个分割

$$T'=\{t_0,t_1,\cdots,t_{n-1},t_n\}.$$

于是，线段 $\overline{P_{i-1}P_i}$ 的长度可表为

$$|P_{i-1}P_i|=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}=\sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2}$$

由于 $x(t)$, $y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可导，由 Lagrange 中值定理，

$$\exists\ \xi_i,\ \eta_i\in(t_{i-1},t_i),$$

s.t. $x(t_i)-x(t_{i-1})=x'(\xi_i)\Delta t_i$，$y(t_i)-y(t_{i-1})=y'(\eta_i)\Delta t_i$，

于是， $|P_{i-1}P_i| = \sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\eta_i)}\ \Delta t_i$

对应于分割 T 的内接折线总长度

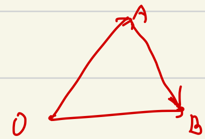
$$S_T = \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\eta_i)}\ \cdot \Delta t_i$$

Step2. 由于 $x(t)$, $y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续可导，则 $\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积，

由 Riemann 积分的定义，对上述 $\varepsilon>0$，$\exists\, \delta_1>0$, s.t. 对 $[\alpha,\beta]$ 的任一满足 $\|T'\|<\delta_1$ 的分割 T'，以及 $\forall\, \xi_i \in \Delta_i = [t_{i-1}, t_i]$，都有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\xi_i)}\ \Delta t_i - \int_a^b \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\, dt \right| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Step3. 令 $\sigma_i = \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)} - \sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\xi_i)}$,



利用三角形边长不等式，可得

$$|\sigma_i| \le \sqrt{[x'(\xi_i)-x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)-y'(\xi_i)]^2}$$
$$= |y'(\eta_i) - y'(\xi_i)|.$$

由于 $y'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，从而一致连续. 对于上述 $\varepsilon>0$,

$\exists\, \delta_2>0\ (<\delta_1)$, s.t. $\forall\, \xi, \eta \in [\alpha,\beta]: |\xi-\eta|<\delta_2$，就有

$$|y'(\eta) - y'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}.$$

Step2.

综上，对 $[\alpha, \beta]$ 的任一满足 $\|T'\|<\delta_2$ 的分割 T'，存在 $\xi_i, \eta_i \in \Delta_i$.

s.t. $|\xi_i-\eta_i| \le \Delta t_i \le \|T'\| < \delta_2 < \delta_1$,

从而 $\left| S_T - \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\, dt \right|$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| - \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\, dt \right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \left| \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)} - \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i)} \right| \cdot \Delta t_i$$

$$+ \left| \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\xi_i)}\, \Delta t_i - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\, dt \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\sigma_i|\, \Delta t_i + \left| \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\xi_i)}\, \Delta t_i - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\, dt \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i}_{=\beta-\alpha} + \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$= \varepsilon.$$

Step4. 下证 $\exists \delta>0$, s.t. 对曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的任一满足 $\|T\|<\delta$ 的分割 T, 对应的 $[\alpha,\beta]$ 的分割 T' 总满足

$$\|T'\| < \delta_2. \qquad \lim_{\|T\|\to 0} \|T'\| = 0.$$

反证法. 假设对 $\forall \delta>0$, 总存在曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的一个满足

$$\|T\| < \delta$$

的分割 $T=\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$, s.t. 对应的 $[\alpha,\beta]$ 的分割 $T'=\{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$, 满足 $\|T'\| \geqslant \delta_2$.

特别地, 对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$, 存在曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的分割 T_k, s.t. $\|T_k\|<\frac{1}{k}$, 但对应的 $[\alpha,\beta]$ 的分割 T_k' 满足 $\|T_k'\| \geqslant \delta_2 > 0$.

于是, 在 T_k 中存在相邻的两分点 Q_k' 和 Q_k'', 对于 T_k' 中的两个分点 t_k' 和 t_k'', s.t.

$|Q_k' Q_k''| \le \|T_k\| < \frac{1}{k}$, 并且 $|t_k' - t_k''| = \|T_k'\| \geqslant \delta_2 > 0$.

由致密性定理，$\{t_k'\}$和$\{t_k''\}$存在收敛子列，不妨仍记为 $\{t_k'\}$和$\{t_k''\}$，记 $t^* = \lim\limits_{k\to\infty} t_k'$，$t^{**} = \lim\limits_{k\to\infty} t_k''$，于是

$$|t^* - t^{**}| = \lim_{k\to\infty} |t_k' - t_k''| \geq \delta_2 > 0.$$

从而 $t^* \neq t^{**}$。

但另一方面，设 t^* 对应曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 上的点 Q^*，t^{**} 对应曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 上的点 Q^{**}，则

$$|Q^*Q^{**}| = \sqrt{[x(t^*)-x(t^{**})]^2 + [y(t^*)-y(t^{**})]^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sqrt{[x(t_k')-x(t_k'')]^2 + [y(t_k')-y(t_k'')]^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty} |Q_k' Q_k''| \qquad \left(|Q_k'Q_k''| < \frac{1}{k} \right)$$

$$= 0$$

于是 Q^* 与 Q^{**} 重合，所以曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 在 Q^* 自相交，矛盾。

Step5. 综上，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，s.t. 对曲线 C 的任一满足 $\|T\| < \delta$ 的分割 T，对应 $[\alpha, \beta]$ 的分割 T' 就满足

$$\|T'\| < \delta_2, \qquad \text{(Step 4)}.$$

从而对应的内接折线总长度 s_T 就满足 (Step3)

$$\left| s_T - \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt \right| < \varepsilon.$$

所以，$\overset{\frown}{AB}$ 可求长，并且弧长

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

二、光滑曲线的向量表示.

定义3（光滑曲线）

设曲线 C 由参数方程 $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta]$ 给出，若 $x(t)$ 与 $y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可导，并且 $x'(t)$ 与 $y'(t)$ 不同时为 0，即

$$x'^2(t)+y'^2(t)>0,\quad \forall t\in[\alpha,\beta],$$ （切线总存在）

则称 C 为光滑曲线.

- 曲线 C: $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta]$ 可用向量式方程表示

$$\vec{r}(t)=\big(x(t),\ y(t)\big),\quad t\in[\alpha,\beta]$$

$\vec{r}(t)$ 是向量值函数：自变量 t 是实数，函数值是向量.

- 记号 $|\vec{r}(t)|=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$,

$\vec{r}\,'(t)=\big(x'(t),\ y'(t)\big)$，称为曲线 C 在点 $(x(t),y(t))$ 的切向量.

于是 $|\vec{r}\,'(t)|=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}>0$. 曲线弧长

$$s_0=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt=\int_\alpha^\beta|\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

- 曲线 C 的自然参数表示.

引入自然参数 s，与原先的参数 t 满足

$$s=\varphi(t)=\int_\alpha^t|\vec{r}\,'(\tau)|\,d\tau,\quad t\in[\alpha,\beta].$$

则 $\dfrac{ds}{dt}=\varphi'(t)=|\vec{r}\,'(t)|>0$，从而 φ 存在反函数

$$t=\varphi^{-1}(s),\quad s\in[0,s_0].$$

满足 $\dfrac{dt}{ds}=(\varphi^{-1})'(s)=\dfrac{1}{\varphi'(t)}=\dfrac{1}{|\vec{r}\,'(t)|}>0.$

从而 $\vec{r}(t)$ 可转化为

$$\vec{r}(s) = \left(x(\varphi^{-1}(s)),\ y(\varphi^{-1}(s)) \right)$$

称为曲线 C 的自然参数表示.

记 $\dot{\vec{r}}(s) = \left(\frac{d}{ds} x(\varphi^{-1}(s)),\ \frac{d}{ds} y(\varphi^{-1}(s)) \right)$

$$= \left(\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds},\ \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} \right) = \left(x'(t)\frac{dt}{ds},\ y'(t)\frac{dt}{ds} \right)$$

$$= \vec{r}'(t)\,\frac{dt}{ds}$$

命题1. $\vec{r}'(t)$ 与 $\dot{\vec{r}}(s)$ 同向 (切向量的方向不依赖于参数的选择)

命题2. 在自然参数表示上，曲线的切向量总是单位向量，即 $|\dot{\vec{r}}(s)| \equiv 1$.

证: $|\dot{\vec{r}}(s)|^2 = |\vec{r}'(t)|^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = |\vec{r}'(t)|^2 \cdot \frac{1}{|\vec{r}'(t)|^2} \equiv 1$.

命题3. 若 $|\vec{r}(t)| \equiv R$ (常数)，则 $\vec{r}(t) \perp \vec{r}'(t)$. (圆周运动速度总垂直于向径)

证: $R^2 = |\vec{r}(t)|^2 = \vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t) = x^2(t) + y^2(t)$，于是

$$0 \equiv \left[x^2(t) + y^2(t) \right]' = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 2\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t)$$

所以 $\vec{r}(t) \perp \vec{r}'(t)$.

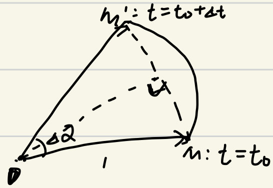
- 记 $\Delta\alpha$ 为向量 $\vec{r}(t)$ 从 $t=t_0$ 到 $t=t_0+\Delta t$ 转过的角度，即 $\vec{r}(t_0)$ 与 $\vec{r}(t_0+\Delta t)$ 的夹角. $\Delta\alpha$ 是 Δt 的连续函数，从而 $\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\alpha = 0$.

  称 $\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right|$ 为 $\vec{r}$ 在 $[t_0, t_0+\Delta t]$ 上的平均角速度，

  若 $\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right|$ 存在，则称该极限为 $\vec{r}(t)$ 在 $t=t_0$ 的角速度.

命题4. 若 $|\vec{r}(t)| \equiv 1$，则 $\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right| = |\vec{r}'(t_0)|$.

证:



$S_{\widehat{MM'}} = 1\cdot\Delta\alpha = \Delta\alpha$

$$\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right| = \frac{S_{\widehat{MM'}}}{\Delta t} = \frac{|MM'|}{\Delta t}\cdot\frac{S_{\widehat{MM'}}}{|MM'|} = \left|\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}\right|\cdot\left|\frac{\Delta\alpha}{2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}\right|$$

由于 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta\alpha=0$，则

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha}{2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}} = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta\alpha}{2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}} = 1.$$

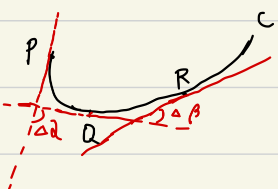
另一方面，$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(\dfrac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t},\ \dfrac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t}\right)$

$$= \left(x'(t_0),\ y'(t_0)\right) = \vec{r}\,'(t_0).$$

所以 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right| = |\vec{r}\,'(t_0)|\cdot 1 = |\vec{r}(t_0)|.$

三. 曲率

1. 如何刻画曲线的弯曲程度?

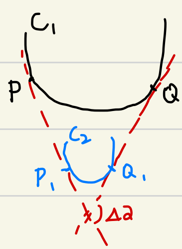


$\widehat{PQ}$的弧长 = $\widehat{QR}$的弧长.

$\widehat{PQ}$的弯曲程度 > $\widehat{QR}$的弯曲程度

$\Delta\alpha > \Delta\beta$

曲线的弯曲程度与切线转过的角度正相关.



在曲线C_1上从P运动到Q 切线转过角度为$\Delta\alpha$.

在曲线C_2上从P_1运动到Q_1切线转过角度为$\Delta\alpha$.

$\widehat{PQ}$的弯曲程度 < $\widehat{P_1Q_1}$的弯曲程度

$\widehat{PQ}$的弧长 > $\widehat{P_1Q_1}$的弧长

曲线的弯曲程度与弧长负相关.

定义4(平均曲率)

设光滑曲线C上的弧段$\overset{\frown}{PQ}$的弧长为Δs. 动点从P点运动至Q点切线转过的角度为$\Delta\alpha$. 称

$$\bar{K} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

为弧段$\overset{\frown}{PQ}$的平均曲率.

注: 平均曲率刻画了弧段的弯曲程度.

2. 如何定量刻画切线转过的角度$\Delta\alpha$?

光滑曲线C: $\vec{r}(t)=(x(t), y(t))$, $t\in[\alpha,\beta]$.

P点对应参数t_0, 坐标为$(x(t_0), y(t_0))$.

Q点对应参数$t_0+\Delta t$, 坐标为$(x(t_0+\Delta t), y(t_0+\Delta t))$.

$\overset{\frown}{PQ}$的弧长

$$\Delta s = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\, dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} |\vec{r}'(t)|\, dt$$

$\Delta\alpha$可表为 P点切向量$\vec{r}'(t_0)$与Q点切向量$\vec{r}'(t_0+\Delta t)$的夹角.

$$\Delta\alpha = \arccos\frac{\vec{r}'(t_0)\cdot\vec{r}'(t_0+\Delta t)}{|\vec{r}'(t_0)|\cdot|\vec{r}'(t_0+\Delta t)|}.$$

3. 如何定量刻画曲线在某点(附近)的弯曲程度?

当$|\Delta t|$很小时, P与Q非常接近, 可以近似地用$\overset{\frown}{PQ}$的平均曲率来刻画曲线C在P点的弯曲程度.

定义5 (曲率)

若 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 存在，则称

$$K=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

为曲线C在点P $(t=t_0)$ 的曲率.

- 光滑曲线 C 由自然参数 s 的方程给出，

$$C: \vec{r}=\vec{r}(s),\quad s\in[s_0, s_0+\Delta s],$$

由命题2，$|\dot{\vec{r}}(s)|=1$，设 $\Delta\alpha$ 为切向量 $\dot{\vec{r}}(s)$ 从 s_0 至 $s_0+\Delta s$ 转过的角度，由命题4，可得

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=|\ddot{\vec{r}}(s)|$$

所以 $K=|\ddot{\vec{r}}(s)|$

- 光滑曲线 C 由一般参数 t 的方程给出

$$C: x=x(t),\ y=y(t),\quad t\in[\alpha,\beta].$$

转为向量式 $\vec{r}(t)=(x(t), y(t))$，$t\in[\alpha,\beta]$.

将参数 t 转化为自然参数

$$s=\varphi(t)=\int_\alpha^t|\vec{r}'(\tau)|d\tau$$

点P对应自然参数为 $s_0=\varphi(t_0)$，点Q对应的自然参数为

$$s_0+\Delta s=\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}|\vec{r}'(t)|dt.$$

据命题1和命题2，

$$\vec{r}'(t) = |\vec{r}'(t)|\dot{\vec{r}}(s) = \dot{\vec{r}}(s)\frac{ds}{dt},$$

从而 $\vec{r}''(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}'(t)$

$$= \left(\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}(s)\right)\frac{ds}{dt} + \dot{\vec{r}}(s)\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

$$= \left(\ddot{\vec{r}}(s)\frac{ds}{dt}\right)\frac{ds}{dt} + \dot{\vec{r}}(s)\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$= \ddot{\vec{r}}(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \dot{\vec{r}}(s)\frac{d^2s}{dt^2}$$

所以 $\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$

$$= \left(\dot{\vec{r}}(s)\frac{ds}{dt}\right) \times \left[\ddot{\vec{r}}(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \dot{\vec{r}}(s)\frac{d^2s}{dt^2}\right]$$

$$= \left(\dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s)\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^3$$

由于 $|\dot{\vec{r}}(s)| \equiv 1$，由命题3，$\dot{\vec{r}}(s) \perp \ddot{\vec{r}}(s)$，从而

$$|\dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s)| = |\dot{\vec{r}}(s)| \cdot |\ddot{\vec{r}}(s)| = k\,|\vec{r}(s)| = k$$

所以 $k = |\dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s)|$

$$= \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}$$

$$= \boxed{\frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{[x'^2(t) + y'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}}$$

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$

$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$

$\vec{r}''(t) = (x''(t), y''(t))$

$\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$

前提：光滑曲线 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$.

$x(t)$, $y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上二阶可导.

特例：(1) 光滑曲线 C 由方程

$$y=f(x),\quad x\in[a,b]$$

给出，并且 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，则

$$K=\frac{|f''|}{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\left(\begin{cases}x=t\\ y=f(t)\end{cases},\quad x'\equiv 1,\ x''=0.\quad y'=f'(t),\ y''=f''(t)\right)$

(2) 光滑曲线 C 由极坐标方程

$$r=r(\theta),\quad \alpha\le\theta\le\beta,$$

$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\ y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}$

并且 $r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上二阶可导，则

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}\qquad(\text{Ex}5)$$