§11.1 反常积分概念

一. 引入

定积分理论中对积分区间和被积函数的限制：

1. 积分区间为有限长度的闭区间；
2. 被积函数在积分区间上有界.

问题：能否将定积分理论进行推广，使之能够应用到无穷区间或无界函数的情形？

变限积分 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$，$\Phi(x)$ 作为 x 的函数，可以考虑函数极限问题，如 $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to b^-}\Phi(x)$.

二. 无穷积分

<u>定义1</u>. 设

(i) f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义；

(ii) 对 $\forall u\in[a,+\infty)$，f 在 $[a,u]$ 上可积.（从而可考虑变限积分 $\Phi(u)=\int_a^u f(x)dx$）

若存在极限

$$\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx=J\in\mathbb{R},$$

则称极限 J 为函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上的无穷积分，记作

$$J=\int_a^{+\infty}f(x)dx,$$

并且称无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛（于 J）.

反之，若极限 $\lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx$ 不存在，则称无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散.

类似地，可定义 f 在 $(-\infty, a]$ 上的无穷积分。

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{v\to-\infty}\int_{v}^{a} f(x)dx.$$

例1. $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 的敛散性.

解: $f(x)=\frac{1}{x^p}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有定义. 对 $\forall u\in[1,+\infty)$, f 在 $[1,u]$ 上可积，并且

$$\int_{1}^{u} f(x)dx = \int_{1}^{u}\frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \ln|x|\Big|_{1}^{u}, & p=1 \\ \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_{1}^{u}, & p\neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \ln u, & p=1, \\ \frac{1}{1-p}(u^{1-p}-1), & p\neq 1. \end{cases}$$

由于

$$\lim_{u\to+\infty}\int_{1}^{u} f(x)dx = \begin{cases} +\infty, & p=1 \\ +\infty, & p<1 \\ \frac{1}{1-p}(0-1)=\frac{1}{p-1}, & p>1 \end{cases}$$

所以，当 $p>1$ 时，$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 收敛于 $\frac{1}{p-1}$；

当 $p\leq 1$ 时，$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 发散于 $+\infty$.

例2. 敛散性:

(1) $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx$. (2) $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$; (3) $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx$.

解: (1) 对 $\forall u\in[2,+\infty)$, $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p}$ 在 $[2,u]$ 上可积，并且

$$\int_{2}^{u}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx \xlongequal{t=\ln x} \int_{\ln 2}^{\ln u}\frac{1}{t^p}dt = \begin{cases} \ln|\ln u| - \ln|\ln 2|, & p=1 \\ \frac{1}{1-p}\left[(\ln u)^{1-p}-(\ln 2)^{1-p}\right], & p\neq 1. \end{cases}$$

所以

$$\lim_{u\to+\infty}\int_{2}^{u}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx = \begin{cases} +\infty, & p\leq 1 \\ \frac{1}{p-1}(\ln 2)^{1-p}, & p>1. \end{cases}$$

即当 $p=1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx$ 发散于 $+\infty$；

当 $p>1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx$ 收敛于 $\frac{1}{p-1}(\ln 2)^{1-p}$.

(2) $\int\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$.

所以，对 $\forall\, u\in[0,+\infty)$，

$$\int_0^u\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^u = \arctan u,$$

$$\lim_{u\to+\infty}\int_0^u\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{u\to+\infty}\arctan u = \frac{\pi}{2},$$

所以 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ 收敛于 $\frac{\pi}{2}$.

(3) 对 $\forall\, v\in(-\infty,0)$，

$$\int_v^0\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_v^0 = -\arctan v,$$

$$\lim_{v\to-\infty}\int_v^0\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{v\to-\infty}(-\arctan v) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

所以 $\int_{-\infty}^0\frac{1}{1+x^2}dx$ 收敛于 $\frac{\pi}{2}$.

<u>定义2</u>. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，并且存在 $a\in\mathbb{R}$，s.t.

$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 都收敛，则称无穷积分

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，并且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx = \int_a^{+\infty}f(x)dx + \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

$$= \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx + \lim_{v\to-\infty}\int_v^a f(x)dx.$$

<u>例</u>. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ 收敛于 π.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^0\frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx.$$

<u>命题</u>: 若 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则对 $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$，$\int_b^{+\infty}f(x)dx$，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$，

$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ 都收敛.

$$\left(\begin{aligned} \int_a^u f(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^u f(x)dx. \\ \int_v^a f(x)dx &= \int_v^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx \end{aligned} \right)$$

定义3：设函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，并且对 $\forall u \geq 0$，f 在 $[-u, u]$ 上可积。若存在极限

$$\lim_{u\to+\infty} \int_{-u}^{u} f(x)dx = J,$$

则称极限 J 为函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的 Cauchy 主值积分，记作

$$J = \mathrm{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad (\mathrm{p.v.} = \text{primitive value})$$

并且称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 在 Cauchy 主值意义下收敛.

注：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛（定义2）$\Longrightarrow$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 在 Cauchy 主值意下收敛；反之不一定成立.

反例. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$，$x \in \mathbb{R}$. f 为 $\mathbb{R}$ 上的连续奇函数，则对 $\forall u \geq 0$，有 $\int_{-u}^{u} f(x)dx = 0$，从而

$$\lim_{u\to+\infty} \int_{-u}^{u} f(x)\,dx = 0. \quad \text{即} \quad \mathrm{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

另一方面，由于 $\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \ln(x^2+1) + C$，则对 $\forall a \in \mathbb{R}$，以及 $\forall u \geq a$，$\forall v \leq a$，有

$$\int_a^u \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln(u^2+1) - \ln(a^2+1), \quad \int_v^a \frac{2x}{1+x^2}dx = \ln(a^2+1) - \ln(v^2+1),$$

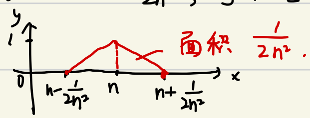
从而 $\lim\limits_{u\to+\infty} \int_a^u \frac{2x}{1+x^2}dx = +\infty$，$\lim\limits_{v\to-\infty} \int_v^a \frac{2x}{1+x^2}dx = -\infty$. 所以 $\int_a^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}dx$ 与 $\int_{-\infty}^{a} \frac{2x}{1+x^2}dx$ 都发散，从而 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}dx$ 发散.

Ex4. 举例说明：$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，并且 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，不一定有
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

反例. 定义 $[0,+\infty)$ 上的连续函数 f，s.t.

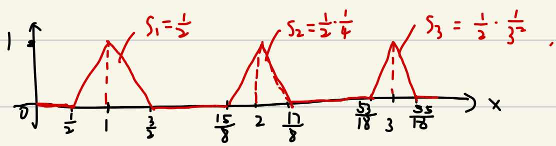
(i) 对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$，$f(n)=1$，$f\left(n-\frac{1}{2n^2}\right)=f\left(n+\frac{1}{2n^2}\right)=0$.

并且 f 在 $\left[n-\frac{1}{2n^2},\,n\right]$ 和 $\left[n,\,n+\frac{1}{2n^2}\right]$ 上都是线性函数.



(ii) 若 $x\in[0,+\infty)$ 但 x 不属于 $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$，$\left[\frac{15}{8},\frac{17}{8}\right]$，$\left[\frac{53}{18},\frac{55}{18}\right]$
$\left[n-\frac{1}{2n^2},\,n+\frac{1}{2n^2}\right]$，$n=1,2,\cdots$，

则 $f(x)=0$.



对 $\forall u>2$，令 $k=[u]$，则 $\lim\limits_{u\to+\infty} k=+\infty$.

$$\int_0^{k-\frac{1}{2k^2}} f(x)\,dx \le \int_0^{k} f(x)\,dx \le \int_0^{u} f(x)\,dx \le \int_0^{k+1} f(x)\,dx \le \int_0^{(k+1)+\frac{1}{2(k+1)^2}} f(x)\,dx$$

由于 $\int_0^{k-\frac{1}{2k^2}} f(x)\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(k-1)^2}$
$= \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(k-1)^2}\right]$

$$\int_0^{(k+1)+\frac{1}{2(k+1)^2}} f(x)\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}\right].$$

§2.3. 例1. $a_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ $(2>1)$,

$\{a_n\}$ 收敛. 记 $\zeta(2)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

所以 $\lim\limits_{k\to+\infty}\left[1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(k-1)^2}\right]=\zeta(2)=\lim\limits_{k\to+\infty}\left[1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}\right]$

从而 $\lim\limits_{u\to+\infty}\int_0^u f(x)dx=\zeta(2)$.

就说明 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

取 $x_n=n$, $y_n=n+\frac{1}{n^2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$,

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} f(n+\frac{1}{n^2})=0$.

由归结原则可知, 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在.

<u>命题</u>: 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 并且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

证: 对 $\boxed{\forall\varepsilon>0}$, $\exists\delta>0$, s.t. $\forall x_1,x_2\in[a,+\infty)$: $|x_1-x_2|\le\delta$, 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}\varepsilon, \quad (1)$$

由于 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+\delta} f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\left[\int_a^{x+\delta} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right]$$

$$=\int_a^{+\infty} f(x)dx-\int_a^{+\infty} f(x)dx=0.$$

从而 $\boxed{\exists M>0}$, s.t. $\forall x>M$, 有

$$\left|\int_x^{x+\delta} f(t)dt\right|<\frac{1}{2}\delta\varepsilon, \quad (2).$$

当 $t\in[x,x+\delta]$ 时, 在 (1) 式令 $x_1=t$, $x_2=x$, 则有

$$|f(t)-f(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon,$$

即 $$-\frac{1}{2}\varepsilon < f(t) - f(x) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

上式两边在 $[x, x+\delta]$ 上对变量 t 作定积分，可得

$$-\frac{1}{2}\varepsilon\delta \leq \int_x^{x+\delta} f(t)\,dt - f(x)\delta \leq \frac{1}{2}\delta\varepsilon,$$

从而 $$|f(x)\delta| \leq \left|\int_x^{x+\delta} f(t)\,dt\right| + \frac{1}{2}\delta\varepsilon$$

$$\overset{(2)}{<} \frac{1}{2}\delta\varepsilon + \frac{1}{2}\delta\varepsilon$$

$$= \delta\varepsilon, \quad \forall x > M.$$

即 $$|f(x)| < \varepsilon, \ \boxed{\forall x > M}.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

Ex5. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛. 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则 $A=0$.

证：由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists M \geq a$，s.t. $\forall x > M$, 有

$$|f(x) - A| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

即 $$A - \frac{1}{2}\varepsilon < f(t) < A + \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall t > M.$$

从而 $$A - \frac{1}{2}\varepsilon \leq \int_x^{x+1} f(t)\,dt \leq A + \frac{1}{2}\varepsilon. \quad \forall x > M, \quad (1)$$

另一方面，由于 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)\,dt = 0$,

从而 $\exists M' \geq M$, s.t. $\forall x > M'$, 有

$$\left|\int_x^{x+1} f(t)\,dt\right| < \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (2)$$

结合 (1) (2) 式，对 $\forall x > M'$, 有

$$|A| \overset{(1)}{\leq} \left|\int_x^{x+1} f(t)\,dt\right| + \frac{1}{2}\varepsilon \overset{(2)}{<} \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，可知 $A=0$.

Ex6. 若 f 在 $[a,+\infty)$ 上可导，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 都收敛，则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

证：对 $\forall u \geq a$,

$$\int_a^u f'(x)dx = f(u) - f(a),$$

即 $$f(u) = f(a) + \int_a^u f'(x)dx.$$

由于 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 收敛，所以

$$\lim_{u\to+\infty} f(u) = f(a) + \int_a^{+\infty} f'(x)dx.$$

又因为 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛，由 Ex5 的结论可知，$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

三. 瑕积分.

定义4. 设

(i) 函数 f 在 $(a,b]$ 上有定义，在点 a 的任何去心邻域上都无界；

(ii) 对 $\forall u \in (a,b]$，f 在 $[u,b]$ 上可积。 (称 a 为 f 的瑕点)

若存在极限

$$\lim_{u\to a^+} \int_u^b f(x)dx = J \in \mathbb{R},$$

则称极限 J 为无界函数 f 在 $(a,b]$ 上的瑕积分，记作

$$J = \int_a^b f(x)dx,$$

并且称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛（于 J）.

若极限 $\lim\limits_{u\to a^+}\int_u^b f(x)dx$ 不存在，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

类似地可定义 $[a,b)$ 上瑕点为 b 的无界函数 f 的瑕积分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{v\to b^-}\int_a^v f(x)dx.$$

例13. 求 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

解: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $[0,1)$ 上连续, $x=1$ 是 f 的瑕点.

对 $\forall u\in[0,1)$, f 在 $[0,u]$ 上可积, 且

$$\int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x\Big|_0^u = \arcsin u.$$

由于 $\lim\limits_{u\to 1^-}\int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim\limits_{u\to 1^-}\arcsin u = \frac{\pi}{2}$,

所以 瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 收敛, 并且 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}$.

例14. 瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ $(p>0)$ 的敛散性. （$p\le 0$时,不是瑕积分,是标准的定积分）

解: 对 $\forall u\in(0,1]$,

$$\int_u^1 \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \ln|x|\Big|_u^1 = -\ln u, & p=1 \\ \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_u^1 = \frac{1}{p-1}(u^{1-p}-1), & p>0 \text{且} p\ne 1, \end{cases}$$

则 $$\lim_{u\to 0^+}\int_u^1\frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} +\infty, & p=1 \\ \frac{1}{1-p}, & 0<p<1 \\ +\infty, & p>1. \end{cases}$$

所以, 当 $0<p<1$ 时, 瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ 收敛于 $\frac{1}{1-p}$;

当 $p\ge 1$ 时, 瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ 发散于 $+\infty$.

Ex 3. 举例说明：瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛时，$\int_a^b f^2(x)dx$ 不一定收敛.

反例. $f(x)=\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$，$x\in(0,1]$，$f^2(x)=\dfrac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$，$x\in(0,1]$，

则 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛，但 $\int_0^1 f^2(x)dx$ 发散.

定义5. 若 f 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 上有定义，在点 c 的任何去心邻域上无界，若瑕积分 $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都收敛，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，并且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim_{u\to c^-}\int_a^u f(x)dx+\lim_{v\to c^+}\int_v^b f(x)dx$$

类似地可定义在 (a,b) 上瑕点为 $x=a$ 和 $x=b$ 的无界函数的瑕积分.

定义6 设 f 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 上有定义，在点 c 的任何去心邻域上无界，并且对 $\forall\varepsilon>0$ $(<\min\{c-a,b-c\})$，f 在 $[a,c-\varepsilon]$ 和 $[c+\varepsilon,b]$ 上都可积. 若存在极限

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right)=J\in\mathbb{R},$$

则称极限 J 为瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的 Cauchy 主值积分，记作

$$J=\mathrm{P.V.}\int_a^b f(x)dx,$$

并且称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 在 Cauchy 主值意义下收敛.

注：瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛（定义5）$\Longrightarrow$ 瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 在 Cauchy 主值意义下收敛；反之不一定成立.