习题 9.5

Ex15. 若 f 在 $[a,b]$ 上连续可导，则存在 $[a,b]$ 上连续可导的增函数 g 和连续可导的减函数 h, s.t.

$$f(x)=g(x)+h(x),\quad x\in[a,b]$$

证：

$$f(x)=\int_a^x f'(t)\,dt+f(a)$$

$$f'(x)=\underbrace{g'(x)}_{\geq 0}+\underbrace{h'(x)}_{\leq 0}$$

可令 ① $g'(x)=f'(x)+|f'(x)|$, $h'(x)=-|f'(x)|$

② $g'(x)=\frac{1}{2}(f'(x)+|f'(x)|)$, $h'(x)=\frac{1}{2}(f'(x)-|f'(x)|)$

由于 f 在 $[a,b]$ 上连续可导，则

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_a^x f'(t)\,dt+f(a) \\ &= \int_a^x \left[(f'(t)+|f'(t)|)+(-|f'(t)|)\right]dt+f(a) \\ &= \int_a^x (f'(t)+|f'(t)|)\,dt+\int_a^x(-|f'(t)|)\,dt+f(a). \end{aligned}$$

令 $g(x)=\int_a^x (f'(t)+|f'(t)|)\,dt$, $h(x)=\int_a^x(-|f'(t)|)\,dt+f(a)$,

则 $f(x)=g(x)+h(x)$, $x\in[a,b]$.

另一方面，由于 f 在 $[a,b]$ 上连续可导，则 g 和 h 也在 $[a,b]$ 上连续可导，

并且 $g'(x)=f'(x)+|f'(x)|\geq 0$,

$h'(x)=-|f'(x)|\leq 0$,

所以 g 在 $[a,b]$ 上增，h 在 $[a,b]$ 上减.

Ex16.（积分第二中值定理推论的加强形式）

若 f 在 $[a,b]$ 上连续，g 为 $[a,b]$ 上的连续可导的单调函数，

则 $\exists\, \xi \in [a,b]$，s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx$$

证：由于 f 在 $[a,b]$ 上连续，令 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$，$x\in[a,b]$，则

$$F'(x)=f(x),\quad x\in[a,b].$$

又因为 g 在 $[a,b]$ 上连续可导，则由分部积分公式，

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)g(x)\,dx \\
&= \int_a^b g(x)\,dF(x) = g(x)F(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx \\
&= \big(g(b)F(b)-g(a)F(a)\big) - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx \\
&= g(b)\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx
\end{aligned}$$

由推广的积分第一中值定理，$\exists\, \xi\in(a,b)$，s.t.

$$\begin{aligned}
\int_a^b F(x)g'(x)\,dx &= F(\xi)\int_a^b g'(x)\,dx = F(\xi)\big(g(b)-g(a)\big) \\
&= \int_a^{\xi} f(x)\,dx \cdot \big(g(b)-g(a)\big).
\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= g(b)\int_a^b f(x)\,dx - \big(g(b)-g(a)\big)\int_a^{\xi} f(x)\,dx \\
&= g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\left(\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^{\xi} f(x)\,dx\right) \\
&= g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

第九章总练习题

（Ex1. Ex3. Ex4. 已讲）

Ex2 (1) 若 f 在 $[a,b]$ 上连续增,

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)dt, & x\in(a,b]\\ f(a), & x=a.\end{cases}$$

则 F 在 $[a,b]$ 上增.

证: 由于 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$, 从而

对 $\forall x\in(a,b]$,

$$F'(x)=\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt\right)'=\frac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}$$

由积分第一中值定理, $\exists\xi\in(a,x)$, s.t.

$$\int_a^x f(t)dt=f(\xi)(x-a),$$

又因为 f 在 $[a,b]$ 上连续增, 则 $f(a)\le f(\xi)\le f(x)$. 从而

$$f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt=\left(f(x)-f(\xi)\right)\cdot(x-a)\geq 0,$$

$F'(x)\geq 0$. $\forall x\in(a,b]$.

由洛必达法则可得

$$\lim_{x\to a^+}F(x)=\lim_{x\to a^+}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{1}=\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)=F(a).$$

所以 F 在 $[a,b]$ 上连续, 从而 F 在 $[a,b]$ 上增.

(2) 若 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $f(x)>0$, 则

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt},\quad x\in(0,+\infty)$$

为 $(0,+\infty)$ 上的严格增函数. 若使 φ 在 $[0,+\infty)$ 上严格增, 应如何补充 $\varphi(0)$ 的定义?

证: 由于 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 则

$$\left(\int_0^x tf(t)\,dt\right)' = xf(x),\quad \left(\int_0^x f(t)\,dx\right)' = f(x).$$

从而, 对 $\forall x>0$,

$$\varphi'(x) = \frac{xf(x)\int_0^x f(t)\,dt - f(x)\int_0^x tf(t)\,dt}{\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2}$$

$$= \frac{f(x)\cdot\int_0^x (x-t)f(t)\,dt}{\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2}.$$

由于 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续且 $f(x)>0$, 则对 $\forall x>0$, 有

$$\int_0^x f(t)\,dt>0,\quad \int_0^x (x-t)f(t)\,dt>0,$$

从而 $\varphi'(x)>0$, $x\in(0,+\infty)$. 于是 φ 在 $(0,+\infty)$ 上严格增.

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x tf(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt} = \lim_{x\to0^+}\frac{xf(x)}{f(x)} = \lim_{x\to0^+}x = 0.$$

定义 $\varphi(0)\le 0$, 则 φ 在 $[0,+\infty)$ 上严格增.

<u>Ex5</u>. 连续的奇函数的一切原函数均为偶函数;

连续的偶函数的原函数中只有一个是奇函数.

证: ① 设 f 为 $[-a,a]$ 上的连续奇函数, 则原函数均可表为

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt + C, \quad x \in [-a, a]$$

由于 $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,dt + C$

$$\overset{s=-t}{=\!=\!=} \int_0^x f(-s)\cdot(-1)\,ds + C$$

$$= \int_0^x f(s)\,ds + C$$

$$= \int_0^x f(t)\,dt + C$$

$$= F(x),$$

则 F 总是偶函数.

② 若 f 是 $[-a, a]$ 上的连续的偶函数，则原函数均可表为

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt + C, \quad x \in [-a, a].$$

由于 $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,dt + C$

$$\overset{s=-t}{=\!=\!=} \int_0^x f(-s)\cdot(-1)\,ds + C$$

$$= -\int_0^x f(s)\,ds + C$$

$$= -(F(x) - C) + C$$

$$= -F(x) + 2C,$$

显然，只有 $C=0$ 时，$F(-x) = -F(x)$，即 F 为 $[-a, a]$ 的奇函数.

Ex6. Schwarz 不等式:

若 f 和 g 在 $[a, b]$ 上可积，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

证: 对 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$，总有

$$0 \le \int_a^b [\lambda f(x) + g(x)]^2 \, dx$$

$$= \int_a^b \left(\lambda^2 f^2(x) + 2\lambda f(x) g(x) + g^2(x)\right) dx$$

$$= \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\lambda^2 + 2\left(\int_a^b f(x) g(x)\,dx\right)\lambda + \int_a^b g^2(x)\,dx$$

所以 $\Delta = 4\left(\int_a^b f(x) g(x)\,dx\right)^2 - 4 \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx \le 0$,

即 $\left(\int_a^b f(x) g(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx$.

Ex]. (1) 若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

证: $\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_a^b 1 \cdot f(x)\,dx\right)^2$

$$\le \int_a^b 1^2\,dx \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx$$

$$= (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

(2) 若 f 在 $[a,b]$ 上可积 并且 $\underline{f(x) \ge m > 0}$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx \ge (b-a)^2.$$

证: Step1. 由于 f 在 $[a,b]$ 上可积 且 $f(x) \ge m > 0$，下证

$\sqrt{f}$ 和 $\frac{1}{f}$ 均在 $[a,b]$ 上可积

对 $[a,b]$ 的任一分割 $T = \{\Delta_i\}$.

$$\omega_i^{\sqrt{f}} = \sup_{x,x' \in \Delta_i} \left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x')}\right|$$

$$= \sup_{x,x' \in \Delta_i} \left|\frac{f(x) - f(x')}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x')}}\right|$$

$$= \sup_{x,x' \in \Delta_i} \frac{|f(x) - f(x')|}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x')}} \le \frac{1}{2\sqrt{m}} \underbrace{\sup_{x,x' \in \Delta_i} |f(x) - f(x')|}_{=\omega_i^f} = \frac{1}{2\sqrt{m}}\,\omega_i^f$$

$$\omega_i^{\frac{1}{f}} = \sup_{x,x'\in\Delta_i}\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x')}\right|$$

$$= \sup_{x,x'\in\Delta_i}\frac{|f(x)-f(x')|}{f(x)f(x')}$$

$$\le \frac{1}{m^2}\sup_{x,x'\in\Delta_i}|f(x)-f(x')| = \frac{1}{m^2}\omega_i^f.$$

由于 f 在 $[a,b]$ 上可积，利用可积的充要条件，$\sqrt{f}$ 和 $\frac{1}{f}$ 均在 $[a,b]$ 上可积、

Step 2. $$(b-a)^2 = \left(\int_a^b 1\,dx\right)^2$$

$$= \left(\int_a^b \sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,dx\right)^2$$

$$\le \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx$$

(3) 若 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积，则成立 Minkowski 不等式：

$$\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

证： $$\int_a^b [f(x)+g(x)]^2dx$$

$$= \int_a^b \left(f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x)\right)dx$$

$$= \int_a^b f^2(x)dx + 2\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx$$

$$\le \int_a^b f^2(x)dx + 2\cdot\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \int_a^b g^2(x)dx$$

$$= \left[\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

于是，$$\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ex 8. 若 f 在 $[a,b]$ 上连续，并且 $f(x)>0$，则

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \ge \frac{1}{b-a}\ln\left(\int_a^b f(x)dx\right)$$

证：由于 $g(t) = -\ln t$，$t\in(0,+\infty)$ 在 $(0,+\infty)$ 是连续的凸函数，则

由积分形式的Jensen不等式，就有

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \le \frac{1}{b-a} g\left(\int_a^b f(x)dx\right).$$

于是 $\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \ge \frac{1}{b-a}\ln\left(\int_a^b f(x)dx\right)$.

<u>Ex9</u>. f 在 $(0,+\infty)$ 上连续减，$f(x)>0$，

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx$$

则 $\{a_n\}$ 收敛.

证：由于 f 在 $(0,+\infty)$ 连续减且 $f(x)>0$，

一方面，
$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1} f(k) + f(n)\right) - \int_1^n f(x)dx \\
&= f(n) + \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(k)dx - \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)dx \\
&= f(n) + \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} (\underbrace{f(k)-f(x)}_{\ge 0})dx \\
&\ge f(n) > 0.
\end{aligned}$$

所以 $\{a_n\}$ 有下界0.

另一方面，
$$\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx \\
&= \int_n^{n+1} f(n+1)dx - \int_n^{n+1} f(x)dx \\
&= \int_n^{n+1} (\underbrace{f(n+1)-f(x)}_{\le 0})dx \\
&\le 0.
\end{aligned}$$

所以 $\{a_n\}$ 减.

由单调有界定理，$\{a_n\}$ 收敛.

Ex10. 若 f 在 $[0,a]$ 上连续可导，且 $f(0)=0$，则

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|\,dx \le \frac{a}{2}\int_0^a [f'(x)]^2 dx.$$

证：由于 f 在 $[0,a]$ 上连续可导，且 $f(0)=0$，则

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt + f(0) = \int_0^x f'(t)dt,\quad \forall x\in[0,a],$$

于是 $$|f(x)|=\left|\int_0^x f'(t)dt\right| \le \int_0^x |f'(t)|dt,\quad \forall x\in[0,a]. \quad (1)$$

令 $g(x)=\int_0^x |f'(t)|dt$，$x\in[0,a]$，则 $g'(x)=|f'(x)|$，$x\in[0,a]$，

$$\begin{aligned}|f(x)f'(x)| = |f(x)|\cdot|f'(x)| &\overset{(1)}{\le} \int_0^x |f'(t)|dt \cdot |f'(x)| \\ &\le g(x)\cdot g'(x) \\ &= \left[\frac{1}{2}g^2(x)\right]'.\end{aligned}$$

于是，
$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)f'(x)|dx &\le \frac{1}{2}\int_0^a [g^2(x)]'dx \\ &= \frac{1}{2}\left(g^2(a)-g^2(0)\right) \\ &= \frac{1}{2}g^2(a) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^a |f'(t)|dt\right)^2 \\ &\overset{\text{Ex 7.(1)}}{\le} \frac{a}{2}\int_0^a |f'(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

命题：π 是无理数.

- 第一个严格证明：1761 Lambert. 连分数方法.
- Ivan Niven,

  美国数学学会公报

  Bulletin of The American Mathematical Society. Bull. Amer. Math. Soc.

  Volum 53, Number 6, 1947, page 509.

rational 有理(数)的

无理(数)的

A SIMPLE PROOF THAT π IS IRRATIONAL

IVAN NIVEN

商 正的 整数 多项式

Let $\pi = a/b$, the quotient of positive integers. We define the polynomials

多的

展开式中x的次 最高为2n, 最低为n.

$$f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!},$$

x的最高次为2n, 最低次 0.

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x),$$

① n. 积分 ② adj. 整数的

the positive integer n being specified later. Since $n!f(x)$ has integral coefficients and terms in x of degree not less than n, $f(x)$ and its derivatives $f^{(j)}(x)$ have integral values for $x = 0$; also for $x = \pi = a/b$, since $f(x) = f(a/b - x)$. By elementary calculus we have

系数

$f^{(k)}(x) = (-1)^{(k)} f^{(k)}(\frac{a}{b}-x)$, $f^{(k)}(\pi) = f^{(k)}(\frac{a}{b}) = (-1)^k f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$

$$\frac{d}{dx}\{F'(x)\sin x - F(x)\cos x\} = F''(x)\sin x + F(x)\sin x = f(x)\sin x$$

$f^{(2n+1)}(x) \equiv 0$, $f^{(2n+2)}(x) \equiv 0$.

and

$$(1)\qquad \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = [F'(x)\sin x - F(x)\cos x]_0^\pi = F(\pi) + F(0).$$

Now $F(\pi) + F(0)$ is an *integer*, since $f^{(j)}(\pi)$ and $f^{(j)}(0)$ are integers. But for $0 < x < \pi$,

$< \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!}$ $\quad 0 < \int_0^\pi f(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!}\cdot\pi < 1$ 当n很大

$$0 < f(x) \underbrace{\sin x}_{\leq 1} < \frac{\pi^n a^n}{n!},$$

$\to 0.\ (n \to \infty)$

so that the integral in (1) is *positive, but arbitrarily small* for n sufficiently large. Thus (1) is false, and so is our assumption that π is rational.

PURDUE UNIVERSITY

Received by the editors November 26, 1946, and, in revised form, December 20, 1946.