§8.1 不定积分概念与基本公式

一、原函数与不定积分的概念

<u>定义1</u> 设函数 f 和 F 都在区间 I 上有定义，并且

$$F'(x)=f(x),\quad x\in I,$$

则称 F 为 f 在区间 I 上的原函数。

注：求原函数是求导的逆运算。

<u>问题1</u>. 给定区间 I 上的函数 f，它在 I 上原函数是否存在？

存在的话是否唯一？

<u>问题2</u>：已知 f 在区间 I 上存在原函数，如何求该原函数？

<u>存在性</u>

1. 若 f 在区间 I 连续，则 f 在区间 I 上存在原函数。

证：§9.5. 定理 9.10.

2. 若 f 在区间 I 上存在第一类间断点，则 f 在 I 上一定不存在原函数。

证：不妨设 f 在 (a,b) 上有定义，只在 $x_0\in(a,b)$ 间断且 x_0 是第一类间断点。

反证法，假设 f 在区间 (a,b) 上存在原函数 F，则

$$F'(x)=f(x),\quad \forall x\in(a,b).$$

特别地，$F'(x_0)=f(x_0)$，所以 $f(x_0)$ 有定义，x_0 为 f 的跳跃间断点。

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 均存在但不相等.

另一方面，根据单侧极限的洛必达法则，有

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = F'_+(x_0) = F'(x_0) = f(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = F'_-(x_0) = F'(x_0) = f(x_0).$$

由此可知，f 在点 x_0 既右连续又左连续，从而在点 x_0 连续，这与 x_0 是间断点矛盾.

3. 若 f 在区间 I 上存在第二类间断点，则 f 可能存在原函数，也可能不存在原函数.

例. (1) $F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

令 $f(x) = F'(x) = \begin{cases} -\cos\frac{1}{x} + 2x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

则 f 在 $\mathbb{R}$ 上存在原函数 F. 但是，f 在点 $x=0$ 间断，$x=0$ 是第二类间断点.

(2) $D(x) = \begin{cases} 1, & x\in \mathbb{Q} \\ 0, & x\in \mathbb{Q}^c \end{cases}$. 每一点都是第二类间断点.

假设 $D(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在原函数 F，根据 Darboux 定理(导函数的介值定理) (§6.1. 若 f 在 $[a,b]$ 上可导，$f'_+(a)\neq f'_-(b)$，k 介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的某个实数，则 $\exists \xi\in(a,b)$, s.t. $f'(\xi)=k$).

由于 $F'(0)=D(0)=1$，$F'(\pi)=D(\pi)=0$，由于 $\frac{1}{2}\in(0,1)$，则 $\exists \xi\in(0,\pi)$, s.t.

$D(\xi)=F'(\xi)=\frac{1}{2}$，这与 $D(x)$ 的定义矛盾.

4. f 在区间 I 上存在原函数的充要条件是什么?

Still Open.

唯一性.

设 F 是 f 在区间 I 上的一个原函数. 则

(1) 对 $\forall C\in\mathbb{R}$. $F+C$ 也是 f 在 I 上的原函数.

(2) 若 G 也是 f 在区间 I 上的一个原函数, 则

F 与 G 相差一个常数. 即 $F(x)\equiv G(x)+C$, $\forall x\in I$.

证: (1) ✓

(2) $F'(x)=f(x)$. $G'(x)=f(x)$. $\forall x\in I$, 从而

$[F(x)-G(x)]'\equiv 0$. $\forall x\in I$.

根据 Lagrange 定理, 对 $\forall x,y\in I$, 存在介于 x 与 y 之间的一个数 ξ,

$$\text{s.t.}\quad [F(x)-G(x)]-[F(y)-G(y)] = [F(x)-G(x)]'\Big|_{x=\xi}\cdot(x-y)$$
$$= 0\cdot(x-y)$$
$$=0$$

所以 $F(x)-G(x)\equiv$ 常数.

注: 在相差一个常数的意义下, 原函数唯一.

一旦给出 f 的某个原函数, 实际上就给出了 f 的所有原函数.

定义2（不定积分）

函数 f 在区间 I 上的全体原函数称为 f 在区间 I 上的不定积分.

（本质上是函数的集合）

记号 不定积分 $\int f(x)dx$

$\int$ —— 积分号

$f(x)$ —— 被积函数

$f(x)dx$ —— 被积表达式

x —— 积分变量

若 F 是 f 在区间 I 上的一个原函数，$\int f(x)dx = \{F+C \mid C\in\mathbb{R}\}$

为方便起见，记为 $\int f(x)dx = F(x)+C$，其中 C 称为积分常数.

"$\int f(x)dx = \int g(x)dx$" 理解为 f 与 g 的原函数相差一个常数.

几何意义

若 F 为 f 在区间 I 的一个原函数，则称 $y=F(x), x\in I$ 的图像为 f 的一条积分曲线. $\int f(x)dx$ 的图像就是 $y=F(x), x\in I$ 沿着纵轴（y 轴）上下移动所得的曲线族.

若给定初始条件 $F(x_0)=y_0$，则可以确定积分常数 C，$C=y_0-F(x_0)$，此时，原函数表达式就可以确定.

例. 作匀加速直线运动的质点. $a(t) \equiv a$.

$v'(t) = a$, 则

$$v(t) = \int a\,dt = at + C$$

若 $v(t_0) = v_0$, 代入上式可得 $C = v_0 - at_0$.

于是 $v(t) = at + v_0 - at_0$

$$= a(t - t_0) + v_0$$

由于 $s'(t) = v(t) = a(t - t_0) + v_0$, 则

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int [a(t - t_0) + v_0]\,dt$$

$$= \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_0 t + C$$

若 $s(t_0) = s_0$, 代入上式可得 $C = s_0 - v_0 t_0$

于是 $s(t) = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0$.

问题2：已知f存在原函数，如何求该原函数（不定积分）？

! 绝大多数函数（即使连续）的原函数无法用初等函数表示

$f(x)=e^{-x^2}$.　　正态分布

$f(x)=\frac{\sin x}{x}$.　　电子数学

$f(x)=\sqrt{1-k^2\sin^2 x}$,　　椭圆周长

二. 基本积分公式

1. $\int 0\,dx = 0+C = C.$

2. $\int a\,dx = ax + C.$　其中a为常数.

3. $\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C.$　　$(\alpha\neq -1,\ x>0)$

4. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C.$　　$(x\neq 0)$

适用于不含有坐标原点的区间.

证：当 $x>0$, $\ln|x| = \ln x$, $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

当 $x<0$, $\ln|x| = \ln(-x)$, $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$.

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$　　$(a>0$ 且 $a\neq 1)$

$(a^x)' = a^x \ln a$, 所以 $a^x = \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)'$

7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C.$　$(a\neq 0)$　$(\sin ax)' = a\cos ax$

8. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C.\quad (a\neq 0)$

9. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

10. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

11. $\int \sec x\cdot\tan x\,dx = \sec x + C$

12. $\int \csc x\cdot\cot x\,dx = -\csc x + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C.$

$= -\arccos x + C.$

14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$

$= -\operatorname{arccot} + C.$

$\int \tan x\,dx.\quad \int \ln x\,dx,\quad \int \arctan x\,dx.\quad \int \sec x\,dx$

定理1.（线性运算法则）

设 f 和 g 在区间 I 上存在原函数，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，则 $\alpha f+\beta g$ 在区间 I 也存在原函数，并且

$$\int(\alpha f+\beta g)\,dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx.$$

注：利用归纳法，可将2项的情形推广到n项.

例1. $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$.

$$\int p(x)\,dx = a_0\int x^n dx + a_1\int x^{n-1}dx + \cdots + a_{n-1}\int x\,dx + \int a_n\,dx$$

$$= \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \cdots + \frac{1}{2}a_{n-1}x + a_n x + C.$$

例2. $\int \frac{x^4+1}{x^2+1}dx$ $\qquad (x^2+1)(x^2-1) = x^4-1$

$$= \int \frac{x^4-1+2}{x^2+1}dx = \int \left(x^2-1+\frac{2}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int x^2dx - \int 1\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + 2\arctan x + C.$$

例3. $\int \frac{1}{\cos^2x\sin^2x}dx$

$$= \int \frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x\sin^2x}dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2x}+\frac{1}{\cos^2x}\right)dx$$

$$= \int \csc^2x\,dx + \int \sec^2x\,dx$$

$$= -\cot x + \tan x + C.$$

例4. $\int \cos 3x \sin x\,dx$ 三角函数 积化和差公式

$$= \int \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 4x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cos 4x - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x + C$$

$$= \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{8}\cos 4x + C.$$

例5. $\int (10^x-10^{-x})^2 dx$ $\qquad$ $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C.$

$$= \int \left(100^x - 2\cdot 10^x\cdot 10^{-x} + \left(\frac{1}{100}\right)^x\right) dx$$

$$= \int 100^x dx - 2\int 1 dx + \int \left(\frac{1}{100}\right)^x dx$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\ln 100}_{=2\ln 10}}\overset{10^{2x}}{100^x} - 2x + \frac{1}{\underbrace{\ln\frac{1}{100}}_{-2\ln 10}}\underbrace{\left(\frac{1}{100}\right)^x}_{10^{-2x}} + C$$

$$= \frac{1}{2\ln 10}(10^{2x}-10^{-2x}) - 2x + C.$$

例. ① $F(x)=|x|^p$, 其 $p>1$.

$$F(x)=\begin{cases}(-x)^p, & x<0\\ x^p & x\geq 0\end{cases}.$$

$$F'(x)=\begin{cases}-p(-x)^{p-1}, & x<0\\ 0, & x=0\\ px^{p-1}, & x>0\end{cases} = \begin{cases}p(-x)^{p-2}x, & x<0\\ 0, & x=0\\ px^{p-2}\cdot x, & x>0\end{cases}$$

$$= \begin{cases}p|x|^{p-2}x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

当 $p=2$ 时, $F(x)=|x|^2=x^2$. $F'(x)=2x$.

当 $p>2$ 时. $F'(x)=p|x|^{p-2}x$, $x\in\mathbb{R}$.

当 $1<p<2$ 时. $F'(x)=\begin{cases}p|x|^{p-2}x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

所以，当 $p>2$ 时，$\int |x|^{p-2}x\,dx = \frac{1}{p}|x|^p + C$

当 $p>0$ 时，$\int |x|^p x\,dx = \frac{1}{p+2}|x|^{p+2} + C$.

② $F(x) = |x|^p x$，$p>0$.

$$F(x) = \begin{cases} (-1)^p x^{p+1}, & x<0 \\ x^{p+1}, & x\geq 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} (-1)^p\cdot(p+1)\cdot x^p, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ (p+1)x^p, & x>0 \end{cases} = \begin{cases} (p+1)|x|^p, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$= (p+1)|x|^p$$

所以，当 $p>0$，$\int |x|^p dx = \frac{1}{p+1}|x|^p x + C$

特别地，当 $p=1$ 时，$\int |x|\,dx = \frac{1}{2}|x|x + C$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sgn} x + C.$$

（因为 $|x| = x\cdot \operatorname{sgn} x$）

<u>例16</u>. $\int |x-1|\,dx$

解：（方法1）. 令 $g(t) = |t|$，则

$$\int |t|\,dt = \frac{1}{2}|t|t + C$$

令 $F(x) = \frac{1}{2}|x-1|(x-1)$，则

$F'(x) = |x-1|$.

所以 $\int |x-1|\,dx = \frac{1}{2}|x-1|(x-1) + C = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-1)^2 + C, & x\leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)^2 + C, & x>1. \end{cases}$

(方法2). $f(x)=|x-1|=\begin{cases} 1-x, & x\le 1 \\ x-1, & x>1. \end{cases}$

设 F 为 f 的原函数。由于

$$\int(1-x)\,dx = x-\frac{1}{2}x^2+C. \quad \int(x-1)\,dx=\frac{1}{2}x^2-x+C.$$

则 $\exists\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, s.t.

当 $x\le 1$ 时, $F(x)=x-\frac{1}{2}x^2+C_1$.

当 $x>1$ 时. $F(x)=\frac{1}{2}x^2-x+C_2$.

由于 F 在 R 上连续, 则 $\lim\limits_{x\to1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=F(1)$, 从而,

$$1-\frac{1}{2}+C_1=F(1)=\lim_{x\to1^+}F(x)=\frac{1}{2}-1+C_2,$$

即 $C_1=-1+C_2$

从而 $F(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{2}x^2-1+C_2, & x\le 1, \\ \frac{1}{2}x^2-x+C_2. & x>1, \end{cases}$

是 $f(x)$ 的原函数, 从而

$$\int f(x)\,dx=\begin{cases} x-\frac{1}{2}x^2-1+C. & x\le 1 \\ \frac{1}{2}x^2-x+C, & x>1 \end{cases}$$

(方法1) $\Rightarrow \int f(x)\,dx=\begin{cases} -\frac{1}{2}(x-1)^2+C, & x\le 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)^2+C, & x>1 \end{cases}$

验证: $x\le 1$ 时. $\left[-\frac{1}{2}(x-1)^2\right]-\left(x-\frac{1}{2}x^2-1\right)=\frac{1}{2}$

$x>1$ 时. $\left[\frac{1}{2}(x-1)^2\right]-\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)=\frac{1}{2}.$

Ex 6. 求不定积分

(1) $\int e^{-|x|}dx$　　(2) $\int |\sin x|\, dx$

解：(1) 由于 $f(x)=e^{-|x|}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，则 f 在 $\mathbb{R}$ 上存在原函数 F, s.t.

$$F'(x)=f(x)=e^{-|x|}=\begin{cases} e^{x}, & x<0, \\ e^{-x}, & x\geq 0. \end{cases}$$

由于 $\int e^{x}dx=e^{x}+C$，$\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C$，则

当 $x<0$ 时，$\exists C_1\in\mathbb{R}$, s.t. $F(x)=e^{x}+C_1$；

当 $x\geq 0$ 时，$\exists C_2\in\mathbb{R}$. s.t. $F(x)=-e^{-x}+C_2$.

由于 F 在点 $x=0$ 连续，则

$$F(0)=\lim_{x\to 0^-}F(x)=\lim_{x\to 0^-}(e^{x}+C_1)=1+C_1,$$

$$F(0)=\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}(-e^{-x}+C_2)=-1+C_2,$$

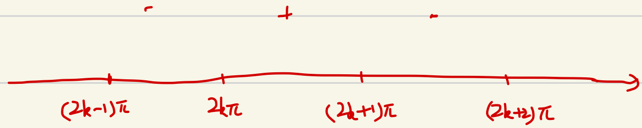
从而　$C_2=2+C_1$,

$$F(x)=\begin{cases} e^{x}+C_1, & x<0, \\ -e^{-x}+2+C_1, & x\geq 0. \end{cases}$$

综上，$$\int e^{-|x|}dx=\begin{cases} e^{x}+C, & x<0, \\ -e^{-x}+2+C, & x\geq 0. \end{cases}$$

(2) 由于 $f(x)=|\sin x|$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，则 f 在 $\mathbb{R}$ 上存在原函数 F, s.t.

$$F'(x)=f(x)=|\sin x|=\begin{cases} \sin x, & x\in[2k\pi, (2k+1)\pi), \\ -\sin x, & x\in[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi). \end{cases}\quad (k\in\mathbb{Z})$$



由 $\int \sin x\,dx = \underline{-\cos x} + C$, $\int(-\sin x)\,dx = \underline{\cos x} + C$.

对 $\forall k \in \mathbb{Z}$,

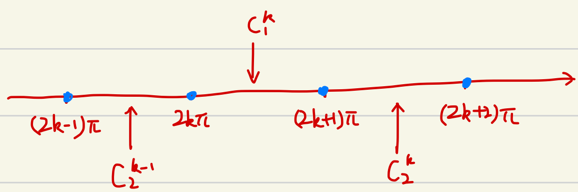
当 $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi)$, 存在 $C_1^k \in \mathbb{R}$, s.t.

$$F(x) = -\cos x + C_1^k. \quad (1)$$

当 $x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, 存在 $C_2^k \in \mathbb{R}$, s.t.

$$F(x) = \cos x + C_2^k. \quad (2)$$

由 F 在 $\mathbb{R}$ 上连续，则 F 在 $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 点连续.



对于点 $x = 2k\pi$,

$$F(2k\pi) = \lim_{x \to (2k\pi)^-} F(x) = \lim_{x \to (2k\pi)^-} (\cos x + C_2^{k-1}) = 1 + C_2^{k-1},$$

$$F(2k\pi) = \lim_{x \to (2k\pi)^+} F(x) = \lim_{x \to (2k\pi)^+} (-\cos x + C_1^k) = -1 + C_1^k,$$

所以 $C_1^k = 2 + C_2^{k-1}$. (3)

对于点 $x = (2k+1)\pi$,

$$F((2k+1)\pi) = \lim_{x \to [(2k+1)\pi]^-} F(x) = \lim_{x \to [(2k+1)\pi]^-} (-\cos x + C_1^k) = 1 + C_1^k,$$

$$F((2k+1)\pi) = \lim_{x \to [(2k+1)\pi]^+} F(x) = \lim_{x \to [(2k+1)\pi]^+} (\cos x + C_2^k) = -1 + C_2^k,$$

所以 $C_2^k = 2 + C_1^k = 4 + C_2^{k-1}$. (4)

综上，以 C_2^0 作为基点，由(4)式可得

$C_2^1=4+C_2^0$，$C_2^{-1}=-4+C_2^0$，$C_2^2=8+C_2^0$，$C_2^{-2}=-8+C_2^0$，…，

$C_2^k=4k+C_2^0$，$\forall k\in\mathbb{Z}$.

由(3)式可得

$$C_1^k=2+C_2^{k-1}=2+4(k-1)+C_2^0=4k-2+C_2^0,\ \forall k\in\mathbb{Z}.$$

所以，

$$F(x)=\begin{cases}-\cos x+C_1^k=-\cos x+4k-2+C_2^0, & x\in[2k\pi,(2k+1)\pi),\\ \cos x+C_2^k=\cos x+4k+C_2^0, & x\in[(2k+1)\pi,(2k+2)\pi).\end{cases}$$

综上，

$$\int|\sin x|\,dx=\begin{cases}-\cos x+4k-2+C, & x\in[2k\pi,(2k+1)\pi),\\ \cos x+4k+C, & x\in[(2k+1)\pi,(2k+2)\pi).\end{cases}$$

注：① 可导的周期函数，其导函数仍是周期函数，周期不变.

② 若一个周期函数存在原函数，则该原数是否也是周期函数？不一定. 反例(2).