



2019-2020 学年第 1 学期泛函分析

学生之友

作者：孙奉龙

组织：曲阜师范大学 数学科学学院

时间：November 7, 2019

版本：1



Victory won't come to us unless we go to it. — M. Moore

目 录

| | | |
|-----------|-------------------------|-----------|
| 7 | 度量空间和赋范线性空间 | 1 |
| 7.1 | 教学计划 | 1 |
| 7.2 | 习题 | 2 |
| 8 | 有界线性算子和连续线性泛函 | 30 |
| 8.1 | 教学计划 | 30 |
| 8.2 | 习题 | 30 |
| 9 | 内积空间和 Hilbert 空间 | 38 |
| 10 | Banach 空间中的基本定理 | 39 |
| 11 | 线性算子的谱 | 40 |
| 12 | 补充专题 | 41 |

第7章 度量空间和赋范线性空间

7.1 教学计划

1. 导引.

距离空间的定义.

距离空间的一些具体例子.

验证距离的要点: Step 1. 验证 $d(x, y)$ 定义合理; Step 2. 验证正定性; Step 3. 验证三角不等式.

补充: 通过球极投影在扩充复平面 C_∞ 上定义距离, 来源: GTM11, Functions of One Complex Variable, 2nd ed., John B. Conway.

2. 有了距离就可以定义邻域 $U(x_0, \epsilon) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < \epsilon\}$, 特别强调 $x \in X$. 有了邻域既可以定义开集闭集等拓扑概念, 又可以引出收敛的概念.

专题: 度量空间中的拓扑概念. 从抽象距离空间的角度重新梳理教材第二章 2-3 节的概念和结论. 补充开集、闭集的等价定义 (重要!), 距离空间 and 相对拓扑的概念和结论. 离散度量空间中任何子集既开又闭. 本章课后题第 1 题.

3. 点列收敛的定义.

收敛点列的性质: (极限) 唯一性、有界性、子列性质. 度量空间中有界集的定义及等价定义.

收敛点列的具体例子: 各种不同的具体例子里不同形式的收敛都可以用统一的框架——度量空间中的点列收敛——来考察.

4. 稠密子集和可分空间的定义.

稠密子集和可分空间的具体例子. $P[a, b]$, $C[a, b]$, $L[a, b]$ 稠密性的关系. 不可分空间的一种判别方法.

5. Cauchy 点列和完备度量空间的定义. Cauchy 点列和收敛点列的关系.

完备度量空间和不完备度量空间的具体例子.

度量空间之间的等距同构, 不完备空间的完备化定理 (Cauchy 等价类方法, 证明略).

6. (列) 紧集的定义

(列) 紧集和有界 (闭) 集的关系. 紧集的拓扑定义——有限覆盖条件.

$C[a, b]$ 中列紧集的判别方法——Ascoli-Arzelà 定理 (A-A 定理).

7. 连续映射

- “在某点连续”: $\epsilon - \delta$ 定义, 点列定义, 邻域定义. 等价性证明.
- “在空间上连续”, 一般定义, 拓扑定义. 等价性证明.

连续映射的具体例子: Lipschitz 连续映射, Hölder 连续映射等.

8. 一种特殊的 Lipschitz 连续映射——压缩映射.

压缩映射原理 (又称 Banach 不动点定理).

应用: 证明隐函数定理, 证明常微分方程解的存在唯一性定理——Picard 定理.

9. 线性空间, 线性组合, 线性包, 线性无关等代数概念.

线性无关集与 Hamel 基.

专题: 半序关系、半序集与 Zorn 引理.

应用 Zorn 引理证明 Hamel 基的存在性. 证明一个线性空间上的不同 Hamel 基都是对等 (等势) 的, 从而可以定义线性空间的维数.

无穷维线性空间的例子—— $P[a, b]$.

10. 范数与赋范线性空间的定义.

范数与距离的关系, 默认赋范空间上的距离为范数导出的距离. 按范数收敛, 抽象级数收敛的定义. 按范数导出的距离完备的赋范线性空间——Banach 空间.

证明一个具体的空间是 Banach 空间: Step1. 验证是线性空间; Step2. 验证 $\|\cdot\|$ 是范数. Step3. 验证完备性.

具体的 Banach 空间的例子: $C[a, b]$, $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq \infty$), l^p ($1 \leq p \leq \infty$). 重要不等式: Young 不等式, 积分 (或无穷级数, 或有限和) 形式的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.


11. **专题:** 有限维赋范线性空间.

范数等价和拓扑同构——(i) 一个有限维赋范线性空间上不同的范数彼此等价; (ii) 具有相同维数的有限维赋范空间彼此拓扑同构; (iii) 有限维赋范线性空间都是 Banach 空间.

有限维赋范线性空间上的最佳逼近问题——最佳逼近元存在.

赋范空间 X 中的任何有界闭集都是紧集当且仅当 X 是有限维空间.

7.2 习题

 **练习 7.1** 设 (X, d) 是一个度量空间, $x_0 \in X$, $\epsilon > 0$. 令

$$U(x_0, \epsilon) = \{x \mid d(x, x_0) < \epsilon\},$$

$$S(x_0, \epsilon) = \{x \mid d(x, x_0) \leq \epsilon\},$$

问 $U(x_0, \epsilon)$ 的闭包是否等于 $S(x_0, \epsilon)$?

解 当 X 是一般的距离空间时, 结论不一定成立.

反例 1. 设 X 是离散度量空间, $\epsilon = 1$. 任取 $x_0 \in X$, 有

$$U(x_0, 1) = \{x \mid x \in X, d(x, x_0) < 1\} = \{x_0\},$$

$$S(x_0, 1) = \{x \mid x \in X, d(x, x_0) \leq 1\} = X.$$

易证, 离散度量空间中的任何点都是孤立点, 从而任何一个单点集 $\{x\}$ 的导集都是空集, 所以任何单点集 $\{x\}$ 都是闭集. 这样,

$$\overline{U(x_0, 1)} = \overline{\{x_0\}} = \{x_0\} \neq S(x_0, 1).$$

反例 2. 取 $X = [0, 1] \cup [2, 3]$, $d(x, y) = |x - y|$, 显然, X 在 $d(x, y)$ 下成距离空间. 由于 $[0, 1]$ 是空间 (\mathbb{R}, d) 中的闭集, 并且

$$[0, 1] = [0, 1] \cap X,$$

则 $[0, 1]$ 也是 (X, d) 中的开集 (参看点集拓扑教材里的拓扑子空间、相对开集、相对闭集的有关结论). 由于

$$U(1, 1) = \{x \in X \mid d(1, x) < 1\} = (0, 1] \subset [0, 1],$$

所以 $\overline{U(1, 1)} \subset \overline{[0, 1]} = [0, 1]$. 但是,

$$S(1, 1) = \{x \in X \mid d(1, x) \leq 1\} = [0, 1] \cap \{2\} \neq \overline{U(1, 1)}.$$

注 当 X 是赋范线性空间时, 结论成立.

练习 7.2 设 $C^\infty[a, b]$ 是区间 $[a, b]$ 上无限次可微函数的全体, 定义

$$d(f, g) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} \max_{a \leq t \leq b} \frac{|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)|}{1 + |f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)|}.$$

证明 $C^\infty[a, b]$ 按 $d(f, g)$ 成度量空间.

证明 (因为 $d(f, g)$ 是通过无穷级数来定义的, 所以在一开始有必要验证级数收敛, 从而保证 $d(f, g)$ 有意义) 对任意 $f, g \in C^\infty[a, b]$, 由于

$$0 \leq \frac{1}{2^r} \max_{a \leq t \leq b} \frac{|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)|}{1 + |f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)|} \leq \frac{1}{2^r},$$

所以级数

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} \max_{a \leq t \leq b} \frac{|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)|}{1 + |f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)|}$$

收敛, 从而 $d(f, g)$ 有意义.

显然, $d(f, g) \geq 0$. 若 $d(f, g) = 0$, 则对任意自然数 $r \in \mathbb{N}$, 都有

$$\max_{a \leq t \leq b} \frac{|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)|}{1 + |f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)|} = 0,$$

从而 $|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)| = 0$ 对任意 $t \in [a, b]$ 都成立, 于是 $f^{(r)} = g^{(r)}$, 特别地, $f = g \in C^\infty[a, b]$.
反之, 若 $f = g \in C^\infty[a, b]$, 则对任意自然数 $r \in \mathbb{N}$ 以及任意 $t \in [a, b]$, 都有 $f^{(r)}(t) = g^{(r)}(t)$, 从而

$$\max_{a \leq t \leq b} |f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)| = 0,$$

$$d(f, g) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} \max_{a \leq t \leq b} \frac{|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)|}{1 + |f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)|} = 0.$$

设 $h \in C^\infty[a, b]$, 则对任意自然数 $r \in \mathbb{N}$ 以及任意 $t \in [a, b]$, 都有

$$|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)| \leq |f^{(r)}(t) - h^{(r)}(t)| + |g^{(r)}(t) - h^{(r)}(t)|,$$


从而,

$$\begin{aligned} & \frac{|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)|}{1 + |f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)|} \\ & \leq \frac{|f^{(r)}(t) - h^{(r)}(t)| + |g^{(r)}(t) - h^{(r)}(t)|}{1 + |f^{(r)}(t) - h^{(r)}(t)| + |g^{(r)}(t) - h^{(r)}(t)|} \\ & = \frac{|f^{(r)}(t) - h^{(r)}(t)|}{1 + |f^{(r)}(t) - h^{(r)}(t)| + |g^{(r)}(t) - h^{(r)}(t)|} + \frac{|g^{(r)}(t) - h^{(r)}(t)|}{1 + |f^{(r)}(t) - h^{(r)}(t)| + |g^{(r)}(t) - h^{(r)}(t)|} \\ & \leq \frac{|f^{(r)}(t) - h^{(r)}(t)|}{1 + |f^{(r)}(t) - h^{(r)}(t)|} + \frac{|g^{(r)}(t) - h^{(r)}(t)|}{1 + |g^{(r)}(t) - h^{(r)}(t)|}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} \max_{a \leq t \leq b} \frac{|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)|}{1 + |f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)|} \\ &\leq \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} \max_{a \leq t \leq b} \frac{|f^{(r)}(t) - h^{(r)}(t)|}{1 + |f^{(r)}(t) - h^{(r)}(t)|} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} \max_{a \leq t \leq b} \frac{|h^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)|}{1 + |h^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)|} \\ &= d(f, h) + d(g, h). \end{aligned}$$

综上, $C^\infty[a, b]$ 按 $d(f, g)$ 成度量空间. □

 **练习 7.3** 设 B 是度量空间 X 中的闭集, 证明必有一列开集 $O_1, O_2, \dots, O_n, \dots$ 包含 B , 而且

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = B.$$


证明 对任意正整数 n , 令

$$O_n = \bigcup_{x \in B} U\left(x, \frac{1}{n}\right) = \left\{ y \in X \mid \text{存在 } x \in B \text{ 使得 } d(x, y) < \frac{1}{n} \right\},$$

显然, O_n 是开集并且 $B \subset O_n$, 所以

$$B \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n.$$

接下来, 我们证明 $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = B$. 利用反证法, 假设存在 $y \in X$ 满足 $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ 但 $y \notin B$. 根据 O_n 的定义, 对任意 n , 存在 $x_n \in B$ 使得 $d(x_n, y) < \frac{1}{n}$. 由此可知, y 是集合 B 的聚点, 即 $y \in B'$. 但是, 由于 B 是闭集, 所以 $B \supset B' \ni y$, 这与假设 $y \notin B$ 矛盾. \square

 **练习 7.4** 设 $d(x, y)$ 为空间 X 上的距离, 证明

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

也是 X 上的距离.

证明 对任意的 $x, y \in X$, 显然 $\tilde{d}(x, y) \geq 0$. 并且, $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 0$ 等价于 $d(x, y) = 0$, 进而等价于 $x = y$.


任给 $z \in X$, 由距离 $d(x, y)$ 的三点不等式可知

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z),$$

从而

$$\begin{aligned} \tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} &\leq \frac{d(x, z) + d(y, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} \\ &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} \\ &\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} \\ &= \tilde{d}(x, z) + \tilde{d}(y, z). \end{aligned}$$

综上, $\tilde{d}(x, y)$ 也是空间 X 上的距离. \square

 **练习 7.5** 证明点列 $\{f_n\}$ 练习题 7.2 中距离收敛于 $f \in C^\infty[a, b]$ 的充分必要条件为 f_n 的各阶导数在 $[a, b]$ 上一致收敛于 f 的各阶导数.

证明 (必要性) 设 $\{f_n\} \subset C^\infty[a, b]$, $f \in C^\infty[a, b]$ 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = 0$. 由于对任意的自然数 $r \in \mathbb{N}$, 都有

$$0 \leq \max_{a \leq t \leq b} \frac{|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)|}{1 + |f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)|} \leq 2^r d(f_n, f),$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq t \leq b} \frac{|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)|}{1 + |f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)|} = 0.$$

按照极限的 $\epsilon - \delta$ 定义, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在只依赖于 ϵ 和自然数 r 的正数 $N = N(\epsilon, r) > 0$,

使得当 $n > N$ 时,

$$0 \leq \frac{|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)|}{1 + |f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)|} \leq \max_{a \leq s \leq b} \frac{|f_n^{(r)}(s) - f^{(r)}(s)|}{1 + |f_n^{(r)}(s) - f^{(r)}(s)|} < \frac{\epsilon}{1 + \epsilon}$$

对任意 $t \in [a, b]$ 都成立. 于是, 当 $n > N$ 时,

$$|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)| < \epsilon$$

对任意 $t \in [a, b]$ 都成立. 所以函数列 $\{f_n^{(r)}\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f^{(r)}$.

(充分性) 假设对任意自然数 $r \in \mathbb{N}$, 函数列 $\{f_n^{(r)}\} \subset C[a, b]$ 在闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f^{(r)} \in C[a, b]$. 任给 $\epsilon > 0$. 一方面, 由于 $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r}$ 收敛并且

$$0 \leq \max_{a \leq t \leq b} \frac{|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)|}{1 + |f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)|} < 1,$$

则存在正整数 $R \in \mathbb{N}_+$ 使得

$$\sum_{r=R}^{\infty} \frac{1}{2^r} \max_{a \leq t \leq b} \frac{|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)|}{1 + |f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)|} \leq \sum_{r=R}^{\infty} \frac{1}{2^r} < \frac{1}{2}\epsilon.$$

另一方面, 当 $r \in \{0, 1, \dots, R-1\}$ 时, 函数列 $\{f_n^{(r)}\} \subset C[a, b]$ 在闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f^{(r)} \in C[a, b]$. 根据函数列一致收敛的定义, 存在只依赖于 ϵ 和自然数 r 的正数 $N(\epsilon, r) > 0$, 使得当 $n > N(\epsilon, r)$ 时,

$$0 \leq \frac{|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)|}{1 + |f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)|} < \frac{1}{4}\epsilon$$

对任意 $t \in [a, b]$ 都成立, 即

$$\max_{a \leq t \leq b} \frac{|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)|}{1 + |f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)|} < \frac{1}{4}\epsilon.$$


令 $N(\epsilon) = \max\{N(\epsilon, 0), N(\epsilon, 1), \dots, N(\epsilon, R-1)\}$, 则 $N(\epsilon)$ 只依赖于 ϵ , 并且当 $n > N(\epsilon)$ 时, 有

$$\sum_{r=0}^{R-1} \frac{1}{2^r} \max_{a \leq t \leq b} \frac{|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)|}{1 + |f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)|} < \sum_{r=0}^{R-1} \frac{1}{2^r} \frac{\epsilon}{4} < \frac{1}{2}\epsilon.$$

于是, 当 $n > N(\epsilon)$ 时, 我们最终有

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} \max_{a \leq t \leq b} \frac{|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)|}{1 + |f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)|} \\ &= \left(\sum_{r=0}^{R-1} + \sum_{r=R}^{\infty} \right) \frac{1}{2^r} \max_{a \leq t \leq b} \frac{|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)|}{1 + |f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)|} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

所以点列 $\{f_n\}$ 按距离收敛于 f . □


 **练习 7.6** 设 $B \subset [a, b]$, 证明度量空间 $C[a, b]$ 中的集

$$\{f \mid \text{当 } t \in B \text{ 时, } f(t) = 0\}$$

为 $C[a, b]$ 中的闭集, 而集

$$A = \{f \mid \text{当 } t \in B \text{ 时, } |f(t)| < \alpha\} \quad (\alpha > 0)$$

为开集的充要条件是 B 为闭集.

 **注意** 教材中此题有打印错误: 集合 A 应该改为

$$A = \{f \mid \text{当 } t \in B \text{ 时, } |f(t)| < \alpha\} \quad (\alpha > 0).$$

证明

1. 不妨记

$$D = \{f \in C[a, b] \mid \text{当 } t \in B \text{ 时, } f(t) = 0\}.$$

由于 $C[a, b]$ 在距离

$$d(f, g) = \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)|$$

下成完备度量空间, 所以 D 的导集 D' 包含在 $C[a, b]$ 中.

下证 $D' \subset D$. 任给 $f \in D'$, 由聚点的定义, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $g_\epsilon \in D$ 使得

$$\max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g_\epsilon(t)| = d(f, g_\epsilon) < \epsilon.$$

当 $t \in B$ 时, 当然有

$$|f(t) - g_\epsilon(t)| < \epsilon.$$

另一方面, 由于 $g_\epsilon \in D$, 则对任意 $t \in B$ 时, 都有

$$|f(t)| = |f(t) - g_\epsilon(t)| < \epsilon.$$

由于 $f(t)$ 与 ϵ 无关, 由上式可知 $f(t) = 0, \forall t \in B$. 所以 $f \in D$.

2. 不妨设 B 非空.

(必要性) 设 A 为开集. 利用反证法, 假设 B 不是闭集, 即存在 B 的聚点 t_0 满足 $t_0 \in$

$[a, b] \setminus B$. 按如下形式定义闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 f :

(i) 若 $t_0 \in (a, b)$, 令

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{t_0-a}t + a, & t \in [a, t_0], \\ \frac{\alpha}{b-t_0}(b-t), & t \in (t_0, b]. \end{cases}$$

(ii) 若 $t_0 = a$, 令 $f(t) = -\frac{\alpha}{b-a}(t-a) + \alpha, t \in [a, b]$.

(iii) 若 $t_0 = b$, 令 $f(t) = \frac{\alpha}{b-a}(t-a), t \in [a, b]$.

则 f 满足 $f(t_0) = \alpha > 0$; 当 $t \in [a, b] \setminus \{t_0\}$ 时, $0 \leq f(t) < \alpha$. 特别地, 当 $t \in B$ 时, $0 \leq f(t) < \alpha$, 所以 $f \in A$. 另一方面, 由于 $f \in C[a, b]$, t_0 是 B 的聚点, 所以对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $t_\epsilon \in B$, 使得 $f(t_\epsilon) > \alpha - \frac{1}{2}\epsilon$. 定义新函数 $f_\epsilon(t) = f(t) + \frac{1}{2}\epsilon, t \in [a, b]$, 则 $f_\epsilon \in U(f, \epsilon)$ 但是 $f_\epsilon(t_\epsilon) > \alpha$, 所以 $f_\epsilon \notin A$. 这说明 $f \in A$ 不是 A 的内点, 这与 A 为开集矛盾.

(充分性) 设 B 为闭集. 由于闭集上的连续函数一定在该闭集上取到最大值, 所以对任意 $f \in A$, 存在 $t_0 \in B$, 使得 $\sup_{t \in B} |f(t)| = |f(t_0)| < \alpha$. 令 $\epsilon = \alpha - \sup_{t \in B} |f(t)| > 0$. 下证 $U(f, \epsilon) \subset A$. 事实上, 对任意 $g \in U(f, \epsilon)$ 以及任意 $t \in [a, b]$, 都有

$$\max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)| = d(f, g) < \epsilon.$$

特别地, 对任意 $t \in B$, 都有

$$|g(t)| < |f(t)| + \epsilon \leq \sup_{t \in B} |f(t)| + \epsilon = \alpha,$$

也就是说 $g \in A$. 于是 $U(f, \epsilon) \subset A$, 这说明 A 中任意点都是 A 的内点, 所以 A 是开集. \square

练习 7.7 设 E 及 F 是度量空间中两个集, 如果 $d(E, F) > 0$, 证明必有不相交开集 O 及 G 分别包含 E 及 F .

证明 令 $\epsilon = d(E, F) > 0$,

$$O = \bigcup_{x \in E} U\left(x, \frac{1}{3}\epsilon\right), \quad G = \bigcup_{y \in F} U\left(y, \frac{1}{3}\epsilon\right),$$

则 O, G 是开集并且 $E \subset O, F \subset G$. 下证 $O \cap G = \emptyset$.

假设 $O \cap G \neq \emptyset$, 则存在 $z \in O \cap G$. 根据 O 和 G 的构造, 存在 $x \in E$ 以及 $y \in F$ 使得

$$d(x, z) < \frac{1}{3}\epsilon, \quad d(y, z) < \frac{1}{3}\epsilon.$$


于是,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < \frac{2}{3}\epsilon,$$

这与

$$\inf_{\substack{x \in E \\ y \in F}} d(x, y) = d(E, F) = \epsilon$$

矛盾. 所以 $O \cap G = \emptyset$. □

 **练习 7.8** 设 $B[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 上实有界函数全体, 对 $B[a, b]$ 中任意两元素 $f, g \in B[a, b]$, 规定距离为

$$d(f, g) = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)|.$$

证明 $B[a, b]$ 不是可分空间.

证明 对任意 $c \in (a, b)$, 定义函数

$$f_c(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } t \in [a, c], \\ 0, & \text{当 } t \in (c, b]. \end{cases}$$

显然, $f_c \in B[a, b]$. 令

$$O_c = U\left(f_c, \frac{1}{3}\right) = \left\{ f \in B[a, b] \mid \sup_{a \leq t \leq b} |f_c(t) - f(t)| < \frac{1}{3} \right\},$$

显然, O_c 为非空开集. 下证当 $\tilde{c} \in (a, b)$ 且 $\tilde{c} \neq c$ 时, $d(f_c, f_{\tilde{c}}) \geq 1$. 事实上, 不妨设 $c > \tilde{c}$, 则总存在 $t_0 \in (\tilde{c}, c) \subset [a, b]$ 使得 $f_c(t_0) = 1$ 并且 $f_{\tilde{c}}(t_0) = 0$. 于是,

$$d(f_c, f_{\tilde{c}}) = \sup_{a \leq t \leq b} |f_c(t) - f_{\tilde{c}}(t)| \geq |f_c(t_0) - f_{\tilde{c}}(t_0)| = 1.$$


这说明 $U(f_c, \frac{1}{3})$ 与 $U(f_{\tilde{c}}, \frac{1}{3})$ 不相交, 也就是说, 当 $\tilde{c} \in (a, b)$ 且 $\tilde{c} \neq c$ 时, $O_c \cap O_{\tilde{c}} = \emptyset$, 从而 $\{O_c\}_{c \in (a, b)}$ 是不可数个两两不相交的非空开集的族, $B[a, b]$ 就是不可分的度量空间.

假设 $B[a, b]$ 是可分的, 则 $B[a, b]$ 存在可数稠密子集

$$M = \{g_1, g_2, \dots, g_i, \dots\}$$

使得 $\overline{M} = B[a, b]$. 于是, $\{O_c\}_{c \in (a, b)}$ 中的每一个开球 O_c 至少包含 M 中一点, $\{O_c\}_{c \in (a, b)}$ 中元素个数至多可数(因为不能“超过” M 中元素的个数), 矛盾.

综上, $B[a, b]$ 不可分. □

 **练习 7.9** 设 X 是可分距离空间, \mathcal{F} 为 X 的一个开覆盖, 即 \mathcal{F} 是一族开集, 使得对每一个 $x \in X$, 有 \mathcal{F} 中开集 O , 使 $x \in O$, 证明必可从 \mathcal{F} 中选出可数个集组成 X 的一个覆盖.

证明 设 $\mathcal{F} = \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是度量空间 X 的一个开覆盖. 则对任意 $x \in X$, 存在 $\lambda \in \Lambda$ 使得

$$x \in O_\lambda.$$

由于 O_λ 是开集, 则存在 $\epsilon_x > 0$ 使得

$$x \in U(x, \epsilon_x) \subset O_\lambda.$$

另一方面, 由于 X 是可分空间, 则 X 存在可数稠密子集 $D = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. 于是, 对于上述 $\epsilon_x > 0$, 存在 $e_i \in D$ 以及 $k \in \mathbb{N}_+$ 使得

$$d(x, e_i) < \frac{1}{k} < \frac{1}{2}\epsilon_x,$$

从而

$$x \in U\left(e_i, \frac{1}{k}\right) \subset U(x, \epsilon_x) \subset O_\lambda. \quad (7.2.1)$$


记

$$\mathcal{E} = \left\{ O_{i,k} \in \mathcal{F} \mid U\left(e_i, \frac{1}{k}\right) \subset O_{i,k}, i, k \in \mathbb{N}_+ \right\},$$

则 $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ 并且 \mathcal{E} (至多) 可数. 由 (7.2.1) 式, 对任意 $x \in X$, 存在 $i, k \in \mathbb{N}_+$ 使得

$$x \in U\left(e_i, \frac{1}{k}\right) \subset O_{i,k} \in \mathcal{E},$$

从而 \mathcal{E} 是空间 X 的一个可数覆盖. □

 **练习 7.10** 设 X 为距离空间, A 为 X 中子集, 令 $f(x) = \inf_{y \in A} d(x, y)$, $x \in X$, 证明 $f(x)$ 是 X 上连续函数.

证明 任取 $x, \tilde{x} \in X$ 以及 $y \in A$, 都有

$$d(x, y) \leq d(x, \tilde{x}) + d(\tilde{x}, y),$$

上式两端对 $y \in A$ 取下确界, 得

$$f(x) = \inf_{y \in A} d(x, y) \leq d(x, \tilde{x}) + \inf_{y \in A} d(\tilde{x}, y) = d(x, \tilde{x}) + f(\tilde{x}).$$

同理, 从 $d(\tilde{x}, y) \leq d(x, \tilde{x}) + d(x, y)$ 可得

$$f(\tilde{x}) \leq d(x, \tilde{x}) + f(x).$$

于是

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq d(x, \tilde{x}). \quad (7.2.2)$$


任取 $x \in X$, 若点列 $\{x_n\} \subset X$ 满足

$$x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty).$$

则对任意的 $\epsilon > 0$, 存在只依赖于 ϵ 的正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $d(x_n, x) < \epsilon$, 再根据 (7.2.2) 式, 可得

$$|f(x_n) - f(x)| < \epsilon,$$

所以 $f(x_n) \rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty)$, f 在 X 上连续. □

 **练习 7.11** 设 X 为距离空间, F_1, F_2 为 X 中不相交的闭集, 证明存在开集 G_1, G_2 , 使

得 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1 \supset F_1$, $G_2 \supset F_2$.

证明 对任意 $x \in X \setminus F_2$, 都有

$$d(x, F_2) = \inf_{y \in F_2} d(x, y) > 0.$$

事实上, 假设 $d(x, F_2) = 0$. 根据 $d(x, F_2)$ 的定义, 对任意自然数 n , 存在 $y_n \in F_2$ 使得

$$0 = d(x, F_2) \leq d(x, y_n) < d(x, F_2) + \frac{1}{n}.$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y_n) = 0$, 这表明闭集 F_2 中的点列 $\{y_n\}$ 收敛于点 x , 从而 $x \in F_2$, 矛盾. 同理可证, 对任意 $y \in X \setminus F_1$, 都有

$$d(y, F_1) = \inf_{x \in F_1} d(x, y) > 0.$$

对任意 $x \in F_1$, $y \in F_2$, 由于 F_1 与 F_2 是不相交的闭集, 则可以定义

$$\epsilon(x) = d(x, F_2) > 0, \quad \delta(y) = d(y, F_1) > 0.$$

再令

$$G_1 = \bigcup_{x \in F_1} U(x, \frac{1}{2}\epsilon(x)), \quad G_2 = \bigcup_{y \in F_2} U(y, \frac{1}{2}\delta(y)),$$

显然 G_1, G_2 都是开集并且 $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$. 下证 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. 反证法, 假设存在 $x_0 \in F_1$, $y_0 \in F_2$ 以及 $z \in G_1 \cap G_2$ 使得

$$z \in U(x_0, \epsilon(x_0)) \cap U(y_0, \delta(y_0)),$$

于是,

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, z) + d(y_0, z) < \frac{1}{2}\epsilon(x_0) + \frac{1}{2}\delta(y_0). \quad (7.2.3)$$

但是, 另一方面, 我们还有 $d(x_0, y_0) \geq \inf_{y \in F_2} d(x_0, y)$, $d(x_0, y_0) \geq \inf_{x \in F_1} d(x, y_0)$, 即

$$d(x_0, y_0) \geq \max\{\epsilon(x_0), \delta(y_0)\},$$

该不等式与(7.2.3)式矛盾. □

练习 7.12 设 X, Y, Z 为三个度量空间, f 是 X 到 Y 中的连续映射, g 是 Y 到 Z 中的连续映射, 证明复合映射 $(gf)(x) = g(f(x))$ 是 X 到 Z 中的连续映射.

证明 设点列 $\{x_n\} \subset X$, 点 $x \in X$ 且

$$x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty),$$

则 $f(x_n) \in Y$, $f(x) \in Y$, $(gf)(x_n) \in Z$, $(gf)(x) \in Z$. 由于 f 是 X 到 Y 的连续映射, 则在空


间 Y 中,

$$f(x_n) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty).$$

又因为 g 是 Y 到 Z 的连续映射, 所以在空间 Z 中

$$(gf)(x_n) \rightarrow (gf)(x) \quad (n \rightarrow \infty),$$

于是, 映射 gf 是 X 到 Z 的连续映射. □

 **练习 7.13** 设 X 是度量空间, f 是 X 上的实函数, 证明 f 是连续映射的充要条件是对每个实数 c , 集合

$$\{x \mid x \in X, f(x) \leq c\} \text{ 和集合 } \{x \mid x \in X, f(x) \geq c\}$$

都是闭集.

证明 为方便起见, 记

$$A = \{x \mid x \in X, f(x) \leq c\}, \quad B = \{x \mid x \in X, f(x) \geq c\}.$$

(必要性) 设 f 是度量空间 X 到 \mathbb{R} 的连续映射, $c \in \mathbb{R}$, 集合 A 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛于点 $x \in X$. 下证 $x \in A$, 从而 A 是闭集. 事实上, 对任意自然数 n , 都有 $f(x_n) \leq c$. 再根据连续映射的定义, 就有

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq c.$$

所以, $x \in A$. 同理可证 B 也是闭集.

(充分性) 设 f 是度量空间 X 到 \mathbb{R} 的映射, 对任意 $c \in \mathbb{R}$, 集合

$$\{x \mid x \in X, f(x) \leq c\}$$

和集合

$$\{x \mid x \in X, f(x) \geq c\}$$

都是闭集. 对任意的 $z \in X$ 以及 $\epsilon > 0$, 记

$$c_1 = f(z) - \epsilon, \quad c_2 = f(z) + \epsilon.$$

由条件可知, 集合

$$\{x \mid x \in X, f(x) > c_1\}$$

和

$$\{x \mid x \in X, f(x) < c_2\}$$


都是开集, 所以交集

$$O = \{x \in X \mid c_1 < f(x) < c_2\} = \{x \in X \mid |f(z) - f(x)| < \epsilon\}$$

也是开集. 显然 $z \in O$, 所以存在 $\delta > 0$ 使得

$$U(z, \delta) \subset O.$$

由连续映射的定义可知, f 在点 z 处连续. 由 $z \in X$ 的任意性可知 f 在 X 上连续. \square

 **练习 7.14** 证明柯西点列是有界点列.

证明 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 中的 Cauchy 点列, 记 $M = \{x_n\}$. 根据 Cauchy 点列的定义, 存在正整数 N , 使得当 $n \geq N$ 时,

$$d(x_N, x_n) < 1.$$


任取 $y \in X$, 则当 $n \geq N$ 时,

$$d(x_n, y) \leq d(x_N, y) + d(x_N, x_n) < d(x_N, y) + 1.$$

令 $c = \max\{d(x_1, y), d(x_2, y), \dots, d(x_{N-1}, y), d(x_N) + 1\}$, 则对任意 $x \in M$, 都有 $d(x, y) \leq c$, 所以

$$\inf_{x \in M} d(x, y) \leq c < \infty,$$

这表明集合 M 是有界集, 即 Cauchy 点列 $\{x_n\}$ 是有界点列. \square

 **练习 7.15** 证明教材 §7.1 中空间 $S, B(A)$ 以及离散度量空间都是完备的度量空间.

证明 (1) 证明度量空间 S 完备.

设 $\{x_n\}$ 是空间 S 中的 Cauchy 点列,

$$x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_i^{(n)}, \dots),$$

则

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} d(x_m, x_n) = 0.$$

对任意固定的指标 i , 都有

$$0 \leq \frac{|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|}{1 + |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|} \leq 2^i d(x_m, x_n),$$

于是, 由迫敛性可得

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| = 0,$$

这表明 $\{\xi_i^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ 是实数空间 \mathbb{R} 中的 Cauchy 数列. 由 Cauchy 收敛准则可知, 存在 $\xi_i \in \mathbb{R}$,

使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i$. 记

$$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_i, \cdots),$$

显然 $x \in S$. 下证, 在空间 S 中, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$. (事实上, 在 187 页的 (3) 中已经证明, $\{x_n\}$ 按距离收敛于 x 当且仅当对任意指标 i , $\xi_i^{(n)} \rightarrow \xi_i (n \rightarrow \infty)$. 为了本题解答的完整性, 我们仍然补充下面的证明)

任给 $\epsilon > 0$. 一方面, 由于 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ 收敛, 则存在正整数 $K = K(\epsilon)$, 使得

$$\sum_{i=K}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|} \leq \sum_{i=K}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2}\epsilon.$$

另一方面, 由于 $\xi_i^{(n)} \rightarrow \xi_i (n \rightarrow \infty)$, 则存在只依赖于 ϵ 和指标 i 的正整数 $N(\epsilon, i)$, 使得当 $n \geq N(\epsilon, i)$ 时, 有

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \frac{1}{2}\epsilon.$$

取 $N = \{N(\epsilon, 1), N(\epsilon, 2), \cdots, N(\epsilon, K-1)\}$, 则 N 只依赖于 ϵ , 并且当 $n \geq N$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{K-1} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|} < \sum_{i=1}^{K-1} \frac{1}{2^i} \frac{\frac{1}{2}\epsilon}{1 + \frac{1}{2}\epsilon} < \frac{1}{2}\epsilon.$$

综上, 存在只依赖于 ϵ 的正整数 N , 使得当 $n \geq N$ 时, 有

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{K-1} + \sum_{i=K}^{\infty} \right) \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$, 空间 S 完备.

(2) 证明度量空间 $B(A)$ 完备.

设 $\{f_n\}$ 是 $B(A)$ 中的 Cauchy 点列. 固定 $s \in A$, 对任意 $\epsilon > 0$, 都存在只依赖于 ϵ 的正整数 $N = N(\epsilon, s)$, 使得当 $m, n \geq N$ 时都有

$$|f_n(s) - f_m(s)| \leq \sup_{t \in A} |f_n(t) - f_m(t)| = d(f_n, f_m) < \epsilon. \quad (7.2.4)$$

所以 $\{f_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$ 是实数空间 \mathbb{R} 上的 Cauchy 数列. 根据 Cauchy 收敛准则, 存在唯一的 $y_s \in \mathbb{R}$ 使得 $f_n(s) \rightarrow y_s (n \rightarrow \infty)$. 这样就定义了 A 上的实函数

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \mapsto y_s.$$

下证 $f \in B(A)$ 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = 0$.

在(7.2.4)式中令 $m \rightarrow \infty$, 可知当 $n \geq N$ 时,

$$|f_n(s) - f(s)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(s) - f_m(s)| \leq \epsilon$$

对任意 $s \in A$ 都成立, 即

$$\sup_{t \in A} |f_n(s) - f(s)| \leq \epsilon. \quad (7.2.5)$$

一方面,

$$\sup_{s \in A} |f(s)| \leq |f_n(s)| + \epsilon < \infty,$$

这说明 $f \in B(A)$. 另一方面, 由(7.2.5)式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(s) - f(s)| = 0.$$

所以 $B(A)$ 是完备度量空间.

(3) 证明离散度量空间完备.


设 $\{x_n\}$ 是离散度量空间 X 中的 Cauchy 点列, 则存在正整数 N , 使得当 $n \geq N$ 时有


$$d(x_n, x_N) < \frac{1}{2}.$$

考虑到离散度量空间上距离的定义, 可知当 $n \geq N$, $x_n \equiv x_N$. 于是, 对任意 $\epsilon > 0$, 当 $n \geq N$ 时都有

$$d(x_n, x_N) = 0 < \epsilon,$$

即 $x_n \rightarrow x_N \in X (n \rightarrow \infty)$. 所以离散度量空间完备. □

 **练习 7.16** 证明 l^∞ 与 $C(0, 1]$ 的一个子空间等距同构.

 **注意** $C(0, 1]$ 表示 $(0, 1]$ 上连续并且有界的函数的全体, 这是一个线性空间. 对任意 $x \in C(0, 1]$, 函数的有界性保证

$$\|x\| = \sup_{t \in (0, 1]} |x(t)|$$

是 $C(0, 1]$ 上的范数.

证明 对任意 $x \in C(0, 1]$, 令

$$\alpha_x = \left(x(1), x\left(\frac{1}{2}\right), \dots, x\left(\frac{1}{n}\right), \dots \right). \quad (7.2.6)$$

由函数 x 的有界性易证 $\alpha_x \in l^\infty$, 由此得到映射 $\phi: C(0, 1] \rightarrow l^\infty$ 使得 $\phi(x) = \alpha_x$.

下证 ϕ 是等距同构映射.

对任意 $x \in C(0, 1]$, 由(7.2.6)式可知,

$$\|\phi(x)\|_\infty = \|\alpha_x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}_+} \left| x \left(\frac{1}{n} \right) \right| \leq \sup_{t \in (0, 1]} |x(t)| = \|x\| \quad (7.2.7)$$

由上式易证 ϕ 是单射.

反之, 对任意 $\alpha = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^\infty$, 定义 $(0, 1]$ 上的连续函数 x_ξ , 使得对任意 $t \in (0, 1]$, 当 $t \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$ ($n \in \mathbb{N}_+$) 时,

$$x_\xi(t) = \frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} \left(t - \frac{1}{n} \right) + \xi_n,$$

即函数 x_ξ 的图像时将点列 $(1, \xi_1), (2, \xi_2), \dots, \left(\frac{1}{n}, \xi_n \right), \dots$ 依此连接起来的折线, 于是

$$\sup_{t \in (0, 1]} |x_\xi(t)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}_+} \left| x \left(\frac{1}{n} \right) \right| = \sup_{n \in \mathbb{N}_+} |\xi_n| = \|\xi\|_\infty, \quad (7.2.8)$$


从而 $x_\xi \in C(0, 1]$ 并且 $\|x_\xi\| \leq \|\xi\|_\infty$. 根据映射 ϕ 的定义, $\phi(x_\xi) = \xi$. 由此可知 ϕ 是满射, 从而是一一映射. 再由(7.2.8)式可得

$$\|\phi^{-1}(\xi)\| \leq \|\xi\|, \quad \forall \xi \in l^\infty. \quad (7.2.9)$$

综合(7.2.7)(7.2.9)式, 考虑到 ϕ 是一一映射, 可得

$$\|x\| = \|\phi(x)\|_\infty, \quad \forall x \in C(0, 1].$$

综上, ϕ 是等距同构映射, l^∞ 与 $C(0, 1]$ 等距同构. □

 **练习 7.17** 设 F 是 n 维欧氏空间 \mathbb{R}^n 中有界闭集, A 是 F 到自身中的映射, 并且适合下列条件: 对任意 $x, y \in F$ ($x \neq y$), 有

$$d(Ax, Ay) < d(x, y),$$

证明映射 A 在 F 中存在唯一的不动点.

证明 (存在性) 定义 \mathbb{R}^n 上的函数

$$f(x) = d(Ax, x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

对任意 $x, y \in F$, 由条件可知

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |d(Ax, x) - d(Ay, y)| \\ &\leq d(Ax, Ay) + d(x, y) \\ &\leq 2d(x, y), \end{aligned}$$

所以 f 是 F 上的 Lipschitz 连续函数. 由于 F 是 \mathbb{R}^n 中的有界闭集, 则连续函数 f 可以在 F 上取到最小值, 即存在 $x_0 \in F$ 使得

$$d(Ax_0, x_0) = f(x_0) = \min_{x \in F} f(x) = \min_{x \in F} d(Ax, x).$$

下证 x_0 是 A 的不动点.

反证法, 假设 $Ax_0 \neq x_0$. 一方面, 由于 $x_0 \in F, A: F \rightarrow F$, 则 $Ax_0 \in F$, 从而

$$f(Ax_0) \geq \min_{x \in F} f(x) = f(x_0).$$

另一方面, 由条件,

$$f(Ax_0) = d(A(Ax_0), Ax_0) < d(Ax_0, x_0) = f(x_0).$$

矛盾. 所以 x_0 是 A 的不动点.

(唯一性) 设 $x, y \in F$ 满足 $Ax = x, Ay = y$. 假设 $x \neq y$, 则由条件,

$$d(x, y) = d(Ax, Ay) < d(x, y),$$

矛盾. 所以 $x = y$, 映射 A 在 F 中的不动点只有一个. □

 **练习 7.18** 设 X 为度量空间, A 是 X 到 X 中的映射, 记

$$a_n = \sup_{x \neq x'} \frac{d(A^n x, A^n x')}{d(x, x')}.$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, 则映射 A 有唯一不动点.

证明 (存在性) 任取 $x_0 \in X$, 作迭代列

$$x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

下证 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 点列.

事实上, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+, p \in \mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x_{n+p}, x_n) &\leq \sum_{k=0}^{p-1} d(x_{n+k+1}, x_{n+k}) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} d(A^{n+k} x_1, A^{n+k} x_0) \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_{n+k} \right) d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

由于 $a_n \geq 0$ 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 上式两端令 $p, n \rightarrow \infty$, 就可得到

$$d(x_{n+p}, x_n) \rightarrow 0, \quad n, p \rightarrow \infty.$$

所以 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 点列. 由于 X 是完备度量空间, 则存在 $x^* \in X$ 使得 $x_n \rightarrow x^*$ ($n \rightarrow \infty$).

下证 x^* 是映射 A 的不动点.

事实上, 由条件可知

$$d(Ax, Ax') \leq a_1 d(x, x'), \quad \forall x, x' \in X,$$

从而 A 是 X 上的连续映射, 所以

$$Ax^* = A\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*.$$


(唯一性) 注意到

$$A^n x^* = Ax^* = x^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

由于 $a_n \geq 0$ 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 则存在 $n_0 \in \mathbb{N}_+$ 使得 $0 \leq a_{n_0} < 1$. 设 $x, x' \in X$ 都是 A 的不动点, 则同样也是 A^{n_0} 的不动点. 假设 $x \neq x'$, 则

$$0 < d(x, x') = d(A^{n_0}x, A^{n_0}x') \leq a_{n_0} d(x, x') < d(x, x'),$$

矛盾. 所以 $x = x'$, 映射 A 在空间 X 上的不动点是唯一的. □

 **练习 7.19** 设 A 为从度量空间 X 到 X 中映射, 若存在开球 $U(x_0, r)$ ($r > 0$) 内满足

$$d(Ax, Ax') \leq \theta d(x, x'), \quad 0 < \theta < 1,$$

又 A 在闭球 $S(x_0, r) = \{x \mid d(x, x_0) \leq r\}$ 上连续, 并且

$$d(x_0, Ax_0) \leq \theta(1 - \theta).$$

证明: A 在 $S(x_0, r)$ 中有不动点.

证明

Step 1. 先证

$$A : S(x_0, \theta r) \rightarrow S(x_0, \theta r),$$

其中

$$S(x_0, \theta r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq \theta r\} \subset U(x_0, r) \subset S(x_0, r)$$

事实上, 对任意 $x \in S(x_0, \theta r)$, 由条件可知

$$\begin{aligned} d(Ax, x_0) &\leq d(Ax, Ax_0) + d(Ax_0, x_0) \\ &\leq \theta d(x, x_0) + \theta(1 - \theta)r \end{aligned}$$

任取 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 就有

$$\begin{aligned} |Tx - Ty| &= |(A - I)y - (A - I)x| \\ &= |(A - I)(x - y)| \\ &= |(a_{ij} - \delta_{ij})(x - y)| \\ &\leq \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} - \delta_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}} |x - y|. \end{aligned}$$

令


$$\alpha = \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} - \delta_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

由条件可知 $0 \leq \alpha < 1$, 因此

$$|Tx - Ty| \leq \alpha |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

T 是压缩映射.

Step3. 由于 \mathbb{R} 是 Banach 空间, 根据压缩映射原理, 不动点方程 $Tx = x$ 在 \mathbb{R}^n 中存在唯一的不动点, 因此原方程(7.2.10)存在唯一的解. \square

 **练习 7.21** 设 $BV[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 上右连续的有界变差函数全体, 其线性运算为通常函数空间中的运算. 在 $BV[a, b]$ 中定义范数

$$\|f\| = |f(a)| + V_a^b(f), \quad f \in BV[a, b].$$

证明 $BV[a, b]$ 是 Banach 空间.

定义 7.2.1. 有界变差函数, P149

设 f 为 $[a, b]$ 上的有限函数. 对 $[a, b]$ 的任何分割

$$T: a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

称有限和

$$\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

为函数 f 关于分割 T 的变差, 记为 $V(f, T)$.

若

$$\{V(f, T) \mid T \text{ 是 } [a, b] \text{ 的一个分割}\}$$

是有界数集, 则称 f 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 称

$$\sup \{V(f, T) \mid T \text{ 是 } [a, b] \text{ 的一个分割}\}$$

为 f 在 $[a, b]$ 上的全变差, 记作 $\overset{b}{V}_a(f)$.



证明 Step1. 不妨设数域 \mathbb{F} 是实数域 \mathbb{R} . 任取 $f, g \in BV[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$. 容易证明, $f + g$ 在 $[a, b]$ 上右连续, 并且对 $[a, b]$ 的任何一个分割 T , 总有

$$V(f + g, T) \leq V(f, T) + V(g, T) \leq \overset{b}{V}_a(f) + \overset{b}{V}_a(g) < +\infty,$$

从而 $f + g \in BV[a, b]$ 并且

$$\overset{b}{V}_a(f + g) \leq \overset{b}{V}_a(f) + \overset{b}{V}_a(g) < +\infty.$$

同样可证 $\alpha f \in BV[a, b]$ 并且

$$\overset{b}{V}_a(\alpha f) = |\alpha| \overset{b}{V}_a(f).$$

因此, $BV[a, b]$ 关于通常函数空间的加法和数乘封闭.

规定 $f = 0 \in BV[a, b]$ 当且仅当 $f(t) \equiv 0$, $t \in [a, b]$. 根据线性空间的定义, 易证 $BV[a, b]$ 关于通常函数空间的加法和数乘成为一个线性空间.

Step2. 下证

$$\|f\| = |f(a)| + \overset{b}{V}_a(f), \quad f \in BV[a, b]$$

是线性空间 $BV[a, b]$ 上的范数.

(1) 对任意 $f \in BV[a, b]$, 总有 $0 \leq \overset{b}{V}_a < \infty$, 所以 $\|x\|$ 的定义合理并且 $\|f\| \geq 0$. 若 $f = 0 \in BV[a, b]$, 则

$$f(t) \equiv 0, \quad t \in [a, b],$$

从而 $\overset{b}{V}_a(f) = 0$, $\|f\| = |f(a)| + \overset{b}{V}_a(f) = 0$.

设 $\|f\| = 0$, 则 $f(a) = 0$ 并且 $\overset{b}{V}_a(f) = 0$. 下证 $f(t) = 0$, $\forall t \in [a, b]$.

对任意 $t \in [a, b]$, $[a, b]$ 的任意一个分割 $T = \{a, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, b\}$, 令 $T' = T \cup \{t\}$, 则 T' 也是 $[a, b]$ 的一个分割, 从而

$$0 \leq V(f, T') \leq \overset{b}{V}_a(f) = 0.$$

根据变差的定义, 就有

$$f(t) = f(t_1) = f(t_2) = \dots = f(b) = f(a) = 0..$$

综上 $\|\cdot\|$ 满足正定性.

(2) 根据 Step1 中的结果, 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$ 以及任意 $f \in BV[a, b]$ 都有

$$\|\alpha f\| = |\alpha f(a)| + \overset{b}{V}_a(\alpha f) = |\alpha| |f(a)| + |\alpha| \overset{b}{V}_a(f) = |\alpha| \|f\|,$$



所以 $\|\cdot\|$ 满足正齐次性.

(3) 对任意 $f, g \in BV[a, b]$, 总有

$$|f(a) + g(a)| \leq |f(a)| + |g(a)|.$$

根据 Step1 的结果, 还有

$$\overset{b}{V}_a(f + g) \leq \overset{b}{V}_a(f) + \overset{b}{V}_a(g) < +\infty.$$

从而,

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$

$\|\cdot\|$ 满足三角不等式.

综上, $\|\cdot\|$ 是线性空间 $BV[a, b]$ 上的范数, $(BV[a, b], \|\cdot\|)$ 成为赋范线性空间.

Step3. 下证 $(BV[a, b], \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

(1) 下证对任意 $f \in BV[a, b]$, 都有

$$\sup_{t \in [a, b]} |f(t)| \leq \|f\|.$$

对任意 $t \in [a, b]$, 作 $[a, b]$ 的分割 $T = \{a, t, b\}$, 则

$$V(f, T) = |f(t) - f(a)| + |f(b) - f(t)| \leq \overset{b}{V}_a(f),$$

从而

$$|f(t)| \leq |f(a)| + |f(t) - f(a)| \leq |f(a)| + \overset{b}{V}_a(f) = \|f\|.$$

由 $t \in [a, b]$ 的任意性可得

$$\sup_{t \in [a, b]} |f(t)| \leq \|f\|.$$

(2) 设 $\{f_n\}$ 是 $BV[a, b]$ 中的一列 Cauchy 点列, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N 使得

$$\|f_m - f_n\| < \varepsilon, \quad \forall m, n > N, \quad (7.2.13)$$

对任意 $t \in [a, b]$, 有

$$|f_m(t) - f_n(t)| = |(f_m - f_n)(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |(f_m - f_n)(t)| \leq \|f_m - f_n\| < \varepsilon, \quad \forall m, n > N, \quad (7.2.14)$$

因此 $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ 就是 \mathbb{R} 中的 Cauchy 数列, 从而存在 $f(t) \in \mathbb{R}$ 使得

$$f_n(t) \longrightarrow f(t) \in \mathbb{R} \quad (n \rightarrow \infty), \quad \forall t \in [a, b], \quad (7.2.15)$$

由此得到函数 $f(t), t \in [a, b]$.

(3) 下证 f 在 $[a, b]$ 上右连续, 即对任意 $t \in [a, b]$, $f(t) = f(t+0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$.



在(7.2.14)式中令 $m \rightarrow \infty$, 得

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall n > N,$$

从而

$$\sup_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

所以函数列 $\{f_n\}$ 在闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 f . 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, f_n 都是 $[a, b]$ 上得右连续函数, 根据一致收敛与连续性的关系可知极限函数 f 也在 $[a, b]$ 上右连续 (仿照华师大《数学分析》第4版下册 P39-P40 并利用 $\frac{1}{3}\varepsilon$ 法则).

(4) 下证 f 是 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 从而 $f \in BV[a, b]$.

由于 $\{f_n\}$ 是 $BV[a, b]$ 中的 Cauchy 点列, 从而 $\{f_n\}$ 在 $BV[a, b]$ 中有界, 存在 $M > 0$ 使得

$$\|f_n\| = |f_n(a)| + V_a^b(f_n) \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

作 $[a, b]$ 的任意一个分割

$$T: a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b,$$

则由(7.2.15)式可得

$$\begin{aligned} V(f, T) &= \sum_{i=1}^k |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |f_n(t_i) - f_n(t_{i-1})| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} V(f_n, T) \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} V_a^b(f_n) \\ &\leq M. \end{aligned}$$

由分割 T 的任意性可知

$$V_a^b(f) \leq M < +\infty,$$

所以 $f \in BV[a, b]$.

(5) 由(7.2.15)式可得 $|(f_n - f)(a)| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 下证 $\|f_n - f\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

对任意 $m, n > N$ 以及 $[a, b]$ 的任意一个分割

$$T: a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b,$$

都有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k |(f_n - f_m)(t_i) - (f_n - f_m)(t_{i-1})| \\ &= V(f_n - f_m, T) \\ &\leq \frac{b}{a} V(f_n - f_m) < \varepsilon, \end{aligned}$$

上式两端令 $m \rightarrow \infty$, 结合(7.2.15)式可得

$$V(f_n - f, T) = \sum_{i=1}^k |(f_n - f)(t_i) - (f_n - f)(t_{i-1})| \leq \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

由分割 T 的任意性可得


$$\frac{b}{a} V(f_n - f) \leq \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{a} V(f_n - f) = 0$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

综上, $(BV[a, b], \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

□

 **练习 7.22** 设 X_1, X_2, \dots 是一列 Banach 空间,

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

是一列元素, 其中 $x_n \in X_n, n = 1, 2, \dots$, 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$, 这种元素列的全体记为 X , 类似通常数列的加法和数乘, 在 X 中引入线性运算. 若令

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

证明: 当 $p \geq 1$ 时, X 是 Banach 空间.

证明

Step 1. 对任意 $x = (x_1, x_2, \dots) \in X, y = (y_1, y_2, \dots) \in X$ 以及任意数 α, β , 都有

$$\begin{aligned} & \|\alpha x + \beta y\|^p \\ &\leq (\|\alpha x\| + \|\beta y\|)^p \\ &\leq 2^p (|\alpha|^p \|x\|^p + |\beta|^p \|y\|^p), \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha x_n + \beta y_n\|^p \leq 2^p \left(|\alpha|^p \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p + |\beta|^p \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^p \right) < +\infty,$$

也就是说, $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots) \in X$. 易证 X 是线性空间.

Step 2. 设 $p \geq 1$.



1°. 对任意 $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$, 显然 $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$. 当 $x = 0 = (0, 0, \dots)$ 时, 有 $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|0\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$. 反之, 若 $\|x\| = 0$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $x_n = 0$, 从而 $x = (0, 0, \dots) = 0 \in X$.

2°. 对任意 $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$ 以及任意数 α , 都有

$$\|\alpha x_n\|^p = |\alpha|^p \|x_n\|^p, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

从而

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\alpha|^p \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\alpha| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|x\|. \end{aligned}$$

3°. 对任意 $x = (x_1, x_2, \dots) \in X, y = (y_1, y_2, \dots) \in X$, 由空间 X_n 上范数的三角不等式可得

$$\|x_n + y_n\| \leq \|x_n\| + \|y_n\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

根据级数形式的 Minkowski 不等式, 就有

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\|x_n\| + \|y_n\|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

综上, 当 $p \geq 1$ 时, $\|\cdot\|$ 就是线性空间 X 上的范数, X 是赋范线性空间.

Step 3. 设 $\{x^m\}$ 是 X 中的 Cauchy 点列, 其中

$$x^m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots).$$

则对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对 $m, n > N$ 以及任意指标 i , 都有

$$\left\|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\right\| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x^m - x^n\| < \epsilon, \quad (7.2.16)$$

则 $\{x_i^{(m)}\}_{i=1}^{\infty}$ 也是 Banach 空间 X_i 中的 Cauchy 点列, 于是, 存在 $x_i \in X_i$ 使得

$$\xi_i = \lim_{m \rightarrow \infty} x_i^{(m)}.$$

令 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, 下证 $\xi \in X$ 并且 $\|x^m - \xi\| \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$.

由于 $\{x^m\}$ 是 X 中的 Cauchy 点列, 则 $\{x^m\}$ 在 X 中有界, 即存在 $M > 0$, 使得对任

意 $n \in \mathbb{N}_+$ 都有 $\|x^m\| \leq M$. 于是, 对任意指标 $k \in \mathbb{N}$ 都有

$$\left(\sum_{i=1}^k \|x_i^{(m)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^{(m)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x^m\| \leq M.$$

在上式两端令 $m \rightarrow \infty$, 得

$$\left(\sum_{i=1}^k \|\xi_i^{(m)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq M.$$

再由 k 的任意性, 可知

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i^{(m)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq M < +\infty,$$

所以 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in X$.

当 $m, n > N$ 时, 由(7.2.16)式得


$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon,$$

在上式中令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$\|x^m - \xi\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^{(m)} - \xi_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

所以 $\|x^m - \xi\| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$).

综上, X 是 Banach 空间. □

 **练习 7.23** 设 X 为赋范线性空间, $X \times X$ 为两个 X 的笛卡尔乘积空间, 对每个 $(x, y) \in X \times X$, 定义

$$\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2},$$

则 $X \times X$ 成为赋范线性空间. 证明 $X \times X$ 到 X 的映射 $(x, y) \mapsto x + y$ 是连续映射.

证明 设 $\{(x_n, y_n)\} \subset X \times X$, $(x, y) \in X \times X$ 并且

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

由于 $(x_n, y_n) - (x, y) = (x_n - x, y_n - y)$, 则

$$0 \leq \|x_n - x\| \leq \sqrt{\|x_n - x\|^2 + \|y_n - y\|^2} = \|(x_n, y_n) - (x, y)\|,$$

$$0 \leq \|y_n - y\| \leq \sqrt{\|x_n - x\|^2 + \|y_n - y\|^2} = \|(x_n, y_n) - (x, y)\|.$$

由数列极限的迫敛性可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y\|.$$

另一方面, 由于

$$0 \leq \|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|,$$

由数列极限的迫敛性可知

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

即

$$x_n + y_n \rightarrow x + y \quad (n \rightarrow \infty).$$

所以 $X \times X$ 到 X 的映射: $(x, y) \mapsto x + y$ 是连续映射. □

 **练习 7.24** 设 Λ 是实 (复) 数域, X 为赋范线性空间, 对每个 $(\alpha, x) \in \Lambda \times X$, 定义

$$\|(\alpha, x)\| = \sqrt{|\alpha|^2 + \|x\|^2},$$

则 $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ 是 $\Lambda \times X$ 到 X 中的连续映射.

证明

设 $\{(\alpha_n, x_n)\} \subset \Lambda \times X$, $(\alpha, x) \in \Lambda \times X$ 并且

$$\|(\alpha_n, x_n) - (\alpha, x)\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

与 23 题的证明类似, 可以得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n - \alpha| = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|.$$

另一方面, 由于

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\alpha_n x_n - \alpha x\| \\ &= \|\alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha x\| \\ &\leq \|\alpha_n x_n - \alpha x_n\| + \|\alpha x_n - \alpha x\| \\ &= |\alpha_n - \alpha| \|x_n\| + |\alpha| \|x_n - x\|, \end{aligned}$$


注意到 $\|x_n\|$ 是有界量, 则由数列极限的迫敛性, 就有

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

即

$$\alpha_n x_n \rightarrow \alpha x \quad (n \rightarrow \infty).$$

所以 $\Lambda \times X$ 到 X 的映射: $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ 是连续映射. \square

 **练习 7.25** 设 C 为一切收敛数列所组成的空间, 其中的线性运算与通常序列空间相同. 在 C 中令

$$\|x\| = \sup_i |\xi_i|, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in C,$$

证明 C 是可分的 Banach 空间.

证明 Step1. 设 $0 \in C$ 当且仅当

$$0 = (0, 0, \dots, 0, \dots).$$

易证 C 按常序列空间的加法和数乘成为线性空间. 并且

$$\|x\| = \sup_i |\xi_i|, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in C$$

是空间 C 上的范数. 根据教材 P194, 收敛数列空间 C 按范数 $\|\cdot\|$ 导出的距离是完备的, 因此 $(C, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

Step2. 下证 C 是可分空间.

令

$$E = \{x \in C \mid x = (r_1, r_2, \dots, r_n, \dots), r_i \in \mathbb{Q}, \forall i \in \mathbb{N}_+\},$$

则 E 是 C 的可数子集.

任取 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in C$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 任意 $i \in \mathbb{N}_+$, 存在有理数 $r_i \in \mathbb{Q}$, 使得

$$|\xi_i - r_i| < \frac{1}{2^i} \varepsilon.$$

对任意 $i, j \in \mathbb{N}_+$, 都有

$$|r_i - r_j| \leq |r_i - \xi_i| + |\xi_i - \xi_j| + |\xi_j - r_j| \leq \frac{1}{2^i} \varepsilon + |\xi_i - \xi_j| + \frac{1}{2^j} \varepsilon. \quad (7.2.17)$$

由于 $\{\xi_n\}$ 是收敛数列, 从而是 Cauchy 数列, 存在正整数 N , 使得对任意 $i, j > N$ 都有

$$|\xi_i - \xi_j| < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

根据(7.2.17)式, 对任意 $i, j > N$, 就有

$$|r_i - r_j| < \frac{1}{2^i} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2^j} \varepsilon < \varepsilon,$$

于是 $\{r_n\}$ 是 Cauchy 数列, 从而是收敛数列. 令 $y = (r_1, r_2, \dots, r_n, \dots)$, 则 $y \in E$ 并且

$$\|x - y\| = \sup_i |\xi_i - r_i| \leq \sup_i \frac{1}{2^i} \varepsilon < \varepsilon.$$

所以 E 是 C 的可数稠密子集, C 是可分的 Banach 空间.

□

第 8 章 有界线性算子和连续线性泛函

8.1 教学计划

1. 算子的一系列概念: (1) 算子 $T: D \rightarrow Y$, 定义域 $D(T)$, 值域 $R(T)$, 核 $N(T)$ (线性算子的零子空间), 特殊的算子——泛函; (2) 线性算子; (3) 连续算子; (4) 有界算子; (5) 紧算子, 全连续算子 (即连续的紧算子).

算子的联系: 紧算子和有界算子; 教材中 有界线性算子 的定义. 具体的算子的例子.

线性算子的有界性等价于连续性, 线性泛函的连续性和零子空间的关系.

2. **专题:** 有界线性算子空间 $B(X \rightarrow Y)$.

(1) 在 $B(X \rightarrow Y)$ 中引入线性结构 (零向量, 加法和数乘) 使之成为线性空间; (2) 定义有界线性算子的范数并验证, $B(X \rightarrow Y)$ 成为赋范线性空间; (3) 当 Y 是 Banach 空间时, $B(X \rightarrow Y)$ 也是 Banach 空间; (4) 引入算子乘法, 由此引出赋范代数和 Banach 代数的概念.

对全连续线性算子空间也可以作类似的讨论.

3. 有界线性算子的范数的定义及等价定义. 一些具体的算子范数的计算 (教材中的例 7 和例 8 积分算子的结论应记住).


无界算子的重要例子: 微分算子 $T: P[a, b] \rightarrow P[a, b]$.


4. 赋范线性空间 X 的共轭空间 X' . 在逻辑上, X' 是一个完全确定的 Banach 空间, 它的元素就是 X 上的有界线性泛函, 似乎不存在 “求出” X' 的问题. 然而, X' 缺乏某种直观形象, 以致难以有效的思考与运用, 那么我们实际上会把它当成一种未知的东西. 这就提出一个问题: 如何讲 X' 具体表示出来? 为此引入 保距算子 与 赋范线性空间之间的同构 的概念, 这样一些抽象的空间就获得了具体的表示.

表示定理: $(l^p)' \cong l^q$, $[L^p(\Omega)]' \cong L^q(\Omega)$, 其中

$$q = \begin{cases} \infty, & \text{当 } p = 1, \\ \frac{p}{p-1}, & \text{当 } 1 < p < +\infty. \end{cases}$$

8.2 习题

 **练习 8.1** 距离说明有界线性算子的值域不一定是闭线性子空间.

 **练习 8.2** 求 $C[-1, 1]$ 上线性泛函

$$f(x) = \int_{-1}^0 x(t) dt - \int_0^1 x(t) dt$$

的范数.

解 对任意 $x \in C[-1, 1]$, 有

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_{-1}^0 x(t) dt - \int_0^1 x(t) dt \right| \\ &\leq \int_{-1}^0 |x(t)| dt + \int_0^1 |x(t)| dt \\ &\leq \int_{-1}^0 \|x\| dt + \int_0^1 \|x\| dt \\ &= 2\|x\|, \end{aligned}$$

所以线性泛函 f 有界, 并且 $\|f\| \leq 2$.

(分析: 令

$$x_0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 0], \\ -1, & t \in (0, 1]. \end{cases}$$

形式上, 就有 $f(x_0) = 1 + 1 = 2$. 但是 x_0 并不是连续函数. 目标: 以 x_0 为出发点, 构造 x_0 的一列连续的近似函数 x_n , 使得 $f(x_n) \rightarrow 2$.)

另一方面, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 令

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, -\frac{1}{n}], \\ -nt, & t \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \\ -1, & t \in (\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$$

则 $x_n \in C[-1, 1]$,


$$\|x_n\| = \max_{t \in [-1, 1]} |x_n(t)| = 1,$$

从而

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \\ &\geq |f(x_n)| \\ &= \left| \int_{-1}^0 x_n(t) dt - \int_0^1 x_n(t) dt \right| \\ &= \left| \left[\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} dt + \int_{-\frac{1}{n}}^0 (-nt) dt \right] - \left[\int_0^{\frac{1}{n}} (-nt) dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 (-1) dt \right] \right| \\ &= 2 - \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

由 $n \in \mathbb{N}$ 的任意性可得 $\|f\| \geq 2$.

综上, $\|f\| = 2$.

 **练习 8.3** 设无穷阵 (a_{ij}) , $i, j = 1, 2, \dots$, 满足 $\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty$. 作 l^∞ 到 l^∞ 中算子如下: 若 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$, $Tx = y$, 则

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j, \quad i = 1, 2, \dots.$$

证明 $\|T\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$.

证明

显然, $T: l^\infty \rightarrow l^\infty$ 是线性算子.

对 $\forall x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^\infty$, 由于 $\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty$, 则

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|y\| = \sup_i |\eta_i| = \sup_i \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j \right| \\ &\leq \sup_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| |\xi_j| \right) \leq \sup_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \cdot \sup_j |\xi_j| \right) = \left(\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \right) \cdot \|x\|, \end{aligned}$$

所以 T 是有界线性算子并且 $\|T\| \leq \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$.

另一方面, 对任意 $k \in \mathbb{N}_+$, 令

$$e_k = (\xi_1^k, \xi_2^k, \dots, \xi_j^k, \dots),$$

其中 $\xi_j^k = \text{sign}(a_{kj})$, 则 $e_k \in l^\infty$, $\|e_k\| \leq 1$ 并且

$$Te_k = (\eta_1^k, \eta_2^k, \dots, \eta_i^k, \dots),$$

其中

$$\eta_k^k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \xi_j^k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \cdot \text{sign}(a_{kj}) = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| \geq 0.$$


于是,

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \geq \|Te_k\| = \sup_i |\eta_i^k| \geq |\eta_k^k| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}|, \quad \forall k \in \mathbb{N}_+.$$

由 k 的任意性, 就有

$$\|T\| \geq \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|.$$

综上, $\|T\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$. □

 **练习 8.4** 设 $\sup_{n \geq 1} |\alpha_n| < \infty$, 在 l^p ($p \geq 1$) 中定义线性算子:

$$y = Tx, \quad \eta_i = \alpha_i \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

期中

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots),$$

证明 T 是有界线性算子, 并且 $\|T\| = \sup_{n \geq 1} |\alpha_n|$.

证明

显然, 算子 T 是线性算子.

任取 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^p$. 由于 $\sup_{n \geq 1} |\alpha_n| < \infty$, 则对任意 $i \in \mathbb{N}$, 都有

$$|\eta_i|^p = |\alpha_i \xi_i|^p = |\alpha_i|^p |\xi_i|^p \leq \left(\sup_{n \geq 1} |\alpha_n| \right)^p |\xi_i|^p,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p \leq \left(\sup_{n \geq 1} |\alpha_n| \right)^p \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p = \left(\sup_{n \geq 1} |\alpha_n| \right)^p \|x\|_p^p.$$

于是, $y = Tx \in l^p$, 并且

$$\|Tx\|_p \leq \left(\sup_{n \geq 1} |\alpha_n| \right) \|x\|_p.$$

所以算子 $T: l^p \rightarrow l^p$ 是有界线性算子, 并且 $\|T\| \leq \sup_{n \geq 1} |\alpha_n|$.

下证 $\|T\| = \sup_{n \geq 1} |\alpha_n|$. 对任意 $k \in \mathbb{N}_+$, 定义 $e_k = (0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, \dots)$, 则 $e_k \in l^p$ 并且 $\|e_k\|_p = 1$. 另一方面,

$$\|Te_k\|_p = \|(0, \dots, 0, \alpha_k, 0, \dots)\|_p = \|\alpha_k e_k\|_p = |\alpha_k|,$$


所以就有

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in l^p \\ \|x\|_p = 1}} \|Tx\|_p \geq \|Te_k\|_p = |\alpha_k|,$$

由 k 的任意性, 就有

$$\|T\| \geq \sup_{k \geq 1} |\alpha_k|.$$

最终, $\|T\| = \sup_{n \geq 1} |\alpha_n|$. □

 **练习 8.5** 设 X 是 n 维向量空间, 在 X 中取一组基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $(t_{\mu\nu})$ 是 $n \times n$ 矩阵, 作 X 到 X 中算子如下: 当 $x = \sum_{\nu=1}^n x_{\nu} e_{\nu}$ 时,


$$y = Tx = \sum_{\mu=1}^n y_{\mu} e_{\mu},$$


其中

$$y_{\mu} = \sum_{\nu=1}^n t_{\mu\nu} x_{\nu}, \quad \mu = 1, 2, \dots, n.$$

若规定向量的范数为 $\|x\| = \left(\sum_{v=1}^n |x_v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, 证明上述算子的范数满足

$$\max_v \left(\sum_{\mu=1}^n |t_{\mu v}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|T\| \leq \left(\sum_{\mu=1}^n \sum_{v=1}^n |t_{\mu v}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

 **练习 8.6** 设 T 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的线性算子, 若 T 的零子空间是闭集, T 是否一定有界?

 **练习 8.7** 作 l^p ($1 < p < +\infty$) 中算子 T 如下: 当

$$x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^p \text{ 时, } Tx = (y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots),$$

其中

$$y_n = \sum_{m=1}^{\infty} t_{nm} x_m, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |t_{nm}|^q \right)^{\frac{p}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

证明: T 是有界线性算子.

证明 (算子 T 是通过级数来定义的, 所以需要证明算子 T 是良定义的) 由于 $p > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则对任意 $m, n \in \mathbb{N}_+$, 由 Young 不等式得

$$|t_{mn}| |x_m| \leq \frac{1}{q} |t_{mn}|^q + \frac{1}{p} |x_m|^p.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |t_{mn}|^q \right)^{\frac{p}{q}} < \infty$, 则当 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^p$ 时, 就有

$$y_n = \sum_{m=1}^{\infty} t_{nm} x_m \leq \sum_{m=1}^{\infty} |t_{nm}| |x_m| \leq \frac{1}{q} \sum_{m=1}^{\infty} |t_{mn}|^q + \frac{1}{p} \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p < \infty,$$

所以算子 T 的定义是合理的. 易证 T 是线性算子.

另一方面, 利用级数形式的 Hölder 不等式可得(一开始并不知道算子 T 将 x 映入那个空间, 不能直接写 $\|Tx\| = \cdots$)

$$\begin{aligned} |y_n|^p &= \left| \sum_{m=1}^{\infty} t_{nm} x_m \right|^p \\ &\leq \left[\sum_{m=1}^{\infty} |t_{nm}| |x_m| \right]^p \\ &\leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} |t_{nm}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p \right) \\ &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} |t_{nm}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \|x\|_p^p, \end{aligned}$$

因此


$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |t_{mn}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right] \|x\|_p^p,$$

从而 $Tx = (y_1, y_2, \dots) \in l^p$, 并且

$$\|Tx\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |t_{mn}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \|x\|_p,$$

这说明 $T: l^p \rightarrow l^p$ 是有界算子.

综上, $T: l^p \rightarrow l^p$ 是有界线性算子. \square

 **练习 8.8** \mathbb{R}^n 按范数 $\|x\| = \max_j |\xi_j|$, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 成赋范线性空间, 问此赋范线性空间的共轭空间是什么?

证明 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 的共轭空间与 l^1 的子空间

$$X = \{\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \mid \eta_k \in \mathbb{R}, \forall k = 1, 2, \dots, n\}$$

同构 \square

 **练习 8.9** 设 C_0 表示极限为 0 的实数列全体, 按通常的加法和数乘, 以及

$$\|x\| = \sup_i |\xi_i|, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$$

构成 Banach 空间, 证明: $(C_0)' = l^1$.

证明

Step 1. 令 $e_k = (0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, \dots)$, $k \in \mathbb{N}_+$, 则 $e_k \in C_0$ 并且 $\|e_k\| = 1$. 对任意 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in C_0$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$, 则对 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $N = N(\epsilon)$, 使得对 $\forall n > N$, 都有 $|\xi_n| < \epsilon$, 从而

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right\| = \|(0, \dots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots)\| = \sup_{i \geq n+1} |\xi_i| \leq \epsilon.$$

于是 $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$.

Step 2. 对任意 $f \in (C_0)'$, 令 $\eta_k = f(e_k)$, $k \in \mathbb{N}_+$. 下证

$$y = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in l^1.$$

事实上, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\sum_{i=1}^n |\eta_i| = \sum_{i=1}^n (\text{sig } \eta_i) \eta_i$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n (\text{sign } \eta_i) f(e_i) \\
&= f\left(\sum_{i=1}^n (\text{sign } \eta_i) e_i\right) \\
&\leq \|f\| \cdot \left\|\sum_{i=1}^n (\text{sign } \eta_i) e_i\right\| \\
&\leq \|f\|,
\end{aligned}$$

因此 $\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|$ 收敛, 从而 $y = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in l^1$.
这样就定义了算子

$$\begin{aligned}
T: (C_0)' &\longrightarrow l^1, \\
f &\longmapsto y = (\eta_1, \eta_2, \dots) = (f(e_1), f(e_2), \dots).
\end{aligned}$$

易证 T 是线性算子, 并且对 $\forall f \in (C_0)'$, 有 $\|Tf\| = \|y\| \leq \|f\|$.

Step 3. 下证 T 是满射.

任取 $y = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in l^1$, 对 $\forall x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in C_0$, 由于

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \xi_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i| \cdot \sup_i |\xi_i| < \infty,$$

从而可以定义 C_0 上的泛函 $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \xi_i$. 易证 f 是有界线性泛函, 即 $f \in (C_0)'$, 并且

$$f(e_k) = \eta_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_+.$$

由算子 T 的定义, 就有

$$Tf = (f(e_1), f(e_2), \dots) = (\eta_1, \eta_2, \dots) = y.$$

所以 T 是满射.

Step 4. 下证 T 是保距算子.

对任意 $f \in (C_0)'$, 由 Step 2 可知

$$\|Tf\| \leq \|f\|, \quad \forall f \in (C_0)'.$$

反之, 对任意 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in C_0$, 根据 Step 1 以及 f 的连续线性, 就有

$$|f(x)| = \left| f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \xi_i e_i\right) \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |\xi_i| \cdot |f(e_i)| \leq \sup_i |f(e_i)| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| = \|Tf\| \cdot \|x\|,$$

从而 $\|f\| \leq \|Tf\|$.

综上, $(C_0)'$ 与 l^1 等距同构.

□

第 9 章 内积空间和 Hilbert 空间



第 10 章 Banach 空间中的基本定理



第 11 章 线性算子的谱



第 12 章 补充专题

