§9.3. 可积条件.

- 可积的必要条件（可积 $\Rightarrow$ 有界）
- 可积的充分必要条件（Darbo和方法）
- 可积的充分条件（3类）

一. 可积的必要条件.

<u>定理1</u>. 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

证：反证法, 假设 f 在 $[a,b]$ 上无界.

由于 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, s.t. 对任何满足 $\|T\|<\delta$ 的分割 $T=\{\Delta_i\}$, 以及任意 $\xi_i\in\Delta_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

从而 $$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| < \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| + \varepsilon. \quad (1).$$

由于 f 在 $[a,b]$ 上无界, 则对于上述满足 $\|T\|<\delta$ 的分割 $T=\{\Delta_i\}$, f 必在其中某个小区间 Δ_k 上无界.

分析：
$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| = \left|f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{i\neq k}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right|$$
$$\geq \underbrace{|f(\xi_k)|}_{\text{非常大}}\cdot\underbrace{|\Delta x_k|}_{\text{正的常数}} - \underbrace{\left|\sum_{i\neq k}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right|}_{G}$$
$$\geq \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| + \varepsilon \quad (\text{只要保证 } |f(\xi_k)| \text{ 足够大})$$

$$|f(\xi_k)|\cdot|\Delta x_k| \geq G + \left|\int_a^b f(x)dx\right| + \varepsilon.$$
$$|f(\xi_k)| \geq \frac{G + \left|\int_a^b f(x)dx\right| + \varepsilon}{\Delta x_k}$$

当 $i\neq k$ 时, 任取 $\xi_i\in\Delta_i$, 令 $G=\left|\sum_{i\neq k}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right|$.

由于 f 在 Δ_k 上无界，则 $\exists \xi_k \in \Delta_k$, s.t.

$$|f(\xi_k)| \geq \frac{G + \left|\int_a^b f(x)dx\right| + \varepsilon}{\Delta x_k}.$$

从而 $$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| = \left|f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right|$$
$$\geq |f(\xi_k)|\cdot\Delta x_k - G$$
$$\geq \left|\int_a^b f(x)dx\right| + \varepsilon.$$

这与 (1) 式矛盾. 所以 f 在 $[a,b]$ 有界.

注: ① 若 f 在 $[a,b]$ 上无界，则 f 在 $[a,b]$ 上不可积.

② 若 f 在 $[a,b]$ 上有界，f 不一定在 $[a,b]$ 上可积.

反例. $D(x) = \begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q}, \\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c \end{cases}$ 在 $[0,1]$ 有界但是不可积.

证: 反证法. 假设 D 在 $[0,1]$ 上可积，令 $J = \int_0^1 D(x)dx$,

则对 $\forall \varepsilon: 0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, $\exists \delta>0$. s.t. 对任何满足 $\|T\|<\delta$ 的分割

$T=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$. 以及任何 $\xi_i \in \Delta_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 都有

$$\left|\sum_{i=1}^n D(\xi_i)\Delta x_i - J\right| < \varepsilon. \quad (1)$$

一方面，任取 $\xi_i \in \Delta_i \cap \mathbb{Q}$, 所得到的 Riemann 和为

$$\sum_{i=1}^n D(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 1-0 = 1,$$

代入 (1) 式可得 $|1-J|<\varepsilon$, 从而 $J>1-\varepsilon>\frac{1}{2}$.

另一方面，任取 $\xi_i \in \Delta_i \cap \mathbb{Q}^c$, 所得到的 Riemann 和为

$$\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = 0,$$

代入(1)式，可得 $|0-J|<\varepsilon$，从而 $J<\varepsilon<\frac{1}{2}$，矛盾.

所以 D 在 $[0,1]$ 上不可积.

二. 可积的充分必要条件.

定义1. (Darbo和)

设 f 在 $[a,b]$ 上有界，对 $[a,b]$ 的任一分割 $T=\{\Delta_i\}$，令

$$M_i=\sup_{x\in\Delta_i} f(x), \quad m_i=\inf_{x\in\Delta_i} f(x), \quad i=1,2,\cdots,n.$$

分别称

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i, \quad s(T)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i,$$

为函数 f 在 $[a,b]$ 上关于分割 T 的 Darbo 上和和 Darbo 下和，

注：Riemann 和和 Darbo 和的关系

$$s(T)\le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le S(T).$$

定理2 (可积准则)

f 在 $[a,b]$ 上可积 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$，存在分割 T，s.t.

$$S(T)-s(T)<\varepsilon.$$

设 $\omega_i = \overset{\text{定义1}}{\overline{M_i-m_i}}$，称为 f 在 Δ_i 上的振幅，则

$$S(T)-s(T)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{T}\omega_i\Delta x_i$$

定理2'. f在$[a,b]$上可积 $\Longleftrightarrow$ 对$\forall \varepsilon>0$. 存在分割T, s.t.

$$\sum_T \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

三. 可积函数类 (可积的充分条件)

定理3. 设f是定义在$[a,b]$上的有界函数. 若f满足以下三条件之一:

(1) f在$[a,b]$连续;

(2) f在$[a,b]$上只有有限多个间断点;

(3) f在$[a,b]$上单调.

则 f在$[a,b]$上可积.

证: (要点: ① 控制分割T的模$\|T\|$或某些小区间的长度

② 控制f在某些小区间上的振幅ω_i)

(1) 设f在$[a,b]$上连续. 则一致连续, 对$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, s.t.

$\forall x, \tilde{x} \in [a,b]$: $|x-\tilde{x}|<\delta$,

都有 $|f(x)-f(\tilde{x})|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.

对满足$\|T\|<\delta$的任意分割T, f在小区间Δ_i上的振幅

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(x) - \inf_{x\in\Delta_i} f(x)$$ (Ch1. 总练习. 16题)

$$= \sup_{x,\tilde{x}\in\Delta_i} |f(x)-f(\tilde{x})|$$

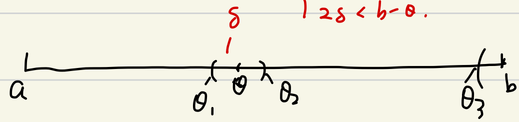
$$\le \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad i=1,2,\cdots,n,$$

从而 $\sum_T \omega_i \Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon$, 所以$f$在$[a,b]$上可积.

(2) 只考虑 f 只有 $\theta\in(a,b)$ 和 b 两个间断点的情形.

分析:

$\begin{cases}\delta<\theta-a\\ 2\delta<b-\theta.\end{cases}$



$\underbrace{[a,\theta_1]}_{f连续}$, $[\theta_1,\theta_2]$, $\underbrace{[\theta_2,\theta_3]}_{f连续}$, $[\theta_3,b]$

$\exists T_1 \to [a,\theta_1]$. s.t. $\sum_{T_1}\omega_i\Delta x_i<\frac{1}{3}\varepsilon$.

$\exists T_2 \to [\theta_2,\theta_3]$, s.t. $\sum_{T_2}\omega_i\Delta x_i<\frac{1}{3}\varepsilon$.

$T=T_1\cup[\theta_1,\theta_2]\cup T_3\cup[\theta_3,b]$

$$\sum_T\omega_i\Delta x_i=\sum_{T_1}\omega_i\Delta x_i+\sum_{[\theta_1,\theta_2]}\omega_i\Delta x_i+\sum_{T_2}\omega_i\Delta x_i+\sum_{[\theta_3,b]}\omega_i\Delta x_i$$

保证 $<\frac{1}{3}\varepsilon$

$<\frac{2}{3}\varepsilon$

对 $\forall\varepsilon>0$,

取 $0<\delta<\min\left\{\theta-a,\ \frac{1}{2}(b-\theta),\ \frac{M-m}{9}\varepsilon\right\}$, 其中 $M=\sup_{x\in[a,b]}f(x)$, $m=\inf_{x\in[a,b]}f(x)$,

令 $\theta_1=\theta-\delta$, $\theta_2=\theta+\delta$, $\theta_3=b-\delta$. 由于 f 在 $[a,b]$ 只有两个间断点, θ 和 b, 则 f 在 $[a,\theta_1]$ 和 $[\theta_2,\theta_3]$ 上连续, 从而可积. 存在 $[a,\theta_1]$ 的分割 T_1 和 $[\theta_2,\theta_3]$ 的分割 T_2, s.t.

$$\sum_{T_1}\omega_i\Delta x_i<\frac{1}{3}\varepsilon\qquad\sum_{T_2}\omega_i\Delta x_i<\frac{1}{3}\varepsilon.$$

令 $\boxed{T}=T_1\cup\{[\theta_1,\theta_2]\}\cup T_2\cup\{[\theta_3,b]\}$, 则 T 是 $[a,b]$ 的一个分割,

并且 $\sum_T\omega_i\Delta x_i$

$$=\sum_{T_1}\omega_i\Delta x_i+\left(\sup_{x\in[\theta_1,\theta_2]}f(x)-\inf_{x\in[\theta_1,\theta_2]}f(x)\right)\cdot(\theta_2-\theta_1)+\sum_{T_2}\omega_i\Delta x_i$$
$$+\left(\sup_{x\in[\theta_3,b]}f(x)-\inf_{x\in[\theta_3,b]}f(x)\right)\cdot(b-\theta_3)$$

$$< \frac{1}{3}\varepsilon + (M-m)\cdot 2\delta + \frac{1}{3}\varepsilon + (M-m)\cdot\delta$$

$$= \frac{2}{3}\varepsilon + \underbrace{(M-m)\cdot 3\delta}$$ 为了保证 $<\frac{1}{3}\varepsilon$，就需 $\delta < \frac{\varepsilon}{9(M-m)}$.

$$< \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

所以，f 在 $[a,b]$ 上可积.

(3) 不妨设 f 在 $[a,b]$ 上增，并且 $f(a)<f(b)$，则

对 $[a,b]$ 的任何分割 T，f 在小区间 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅

$$\omega_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(x) - \inf_{x\in\Delta_i} f(x) = f(x_i) - f(x_{i-1}),$$

从而，
$$\sum_T \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i)-f(x_{i-1})]\cdot\Delta x_i$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} [f(x_i)-f(x_{i-1})]\cdot\|T\|$$
$$= [f(b)-f(a)]\cdot\|T\|.$$

对 $\forall\varepsilon>0$，只要分割 T 满足 $\|T\| < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$，总有

$$\sum_T \omega_i \Delta x_i \le [f(b)-f(a)]\cdot\|T\| < \varepsilon,$$

所以，f 在 $[a,b]$ 上可积.

问题：设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的有界函数，并且 f 在 $[a,b]$ 上有无限多个间断点，f 在 $[a,b]$ 上是否可积？

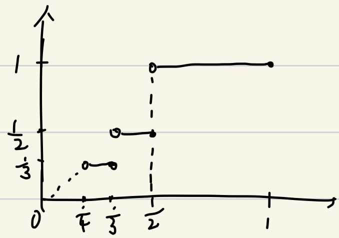
① 不可积的例：

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$$ 在 $[0,1]$ 上有界，有无限多个间断点，

但 D 在 $[0,1]$ 上不可积.

可积的例：

例12. $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n},\ n=1,2,\cdots\end{cases}$ 在$[0,1]$上有定义且有界.



方法1. 由于f在$[0,1]$上增. 所以f在$[0,1]$上可积.

方法2. （将$[0,1]$分为两个子区间. 其中一个子区间含有有限多个间断点. 从而f在其上可积. $\sum_{T_1}\omega_i\Delta x_i<\frac{1}{2}\varepsilon$.

另外一个子区间含有无限多个间断点, 但区间长度很小. 可使得 $\sum_{I}\omega_i\Delta x_i<\frac{1}{2}\varepsilon$.）

设 $x_0=0$, $x_n=\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N}_+)$ 是f在$[0,1]$上的所有间断点.

对$\forall\varepsilon: 0<\varepsilon<1$. 取 $N=\frac{2}{\varepsilon}$. 则对$\forall n>N$, 有

$$0<x_n=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}=\frac{1}{2}\varepsilon,$$

从而 x_0. x_n $(n>N)$ $\in[0,\frac{1}{2}\varepsilon]$, f在$[\frac{1}{2}\varepsilon,1]$上至多只有$N$个间断点.

由定理3. f在$[\frac{1}{2}\varepsilon,1]$上可积. 再由定理2', 存在$[\frac{1}{2}\varepsilon,1]$的一个分割 T_1, s.t. $\sum_{T_1}\omega_i\Delta x_i<\frac{1}{2}\varepsilon$.

令 $T=\{[0,\frac{1}{2}\varepsilon]\}\cup T_1$, 则$T$是$[0,1]$的一个分割. 从而

$$\sum_{T} \omega_i \Delta x_i = \left(\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}\varepsilon]} f(x) - \inf_{x\in[0,\frac{1}{2}\varepsilon]} f(x)\right)\cdot \frac{1}{2}\varepsilon + \sum_{T_1}\omega_i \Delta x_i$$

$$\le 1\cdot\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

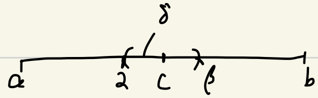
由定理2', f在$[0,1]$上可积.

Ex4. 设f在$[a,b]$上有界, $\{a_n\}\subset[a,b]$, $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

若f在$[a,b]$只有$a_n\ (n=1,2,\cdots)$为其间断点, 则

f在$[a,b]$上可积.

(分析:



)

证: 令 $M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$, $m=\inf_{x\in[a,b]} f(x)$. 不妨设

$c\in(a,b)$, $m<M$.

对$\forall\varepsilon>0$, 取

$$0<\delta<\min\left\{c-a,\ b-c,\ \frac{\varepsilon}{6(M-m)}\right\},$$

令 $\alpha=c-\delta$, $\beta=c+\delta$. 由于$\lim_{n\to\infty} a_n = c$, 则由数列极限的邻域定义, $\{a_n\}$只有有限多项含于$[a,\alpha]$和$[\beta,b]$中, 从而f在$[a,\alpha]$和$[\beta,b]$上可积. 由定理2', 存在$[a,\alpha]$的分割T_1和$[\beta,b]$的分割T_2, s.t.

$$\sum_{T_1}\omega_i\Delta x_i<\frac{1}{3}\varepsilon,\quad \sum_{T_2}\omega_i\Delta x_i<\frac{1}{3}\varepsilon.$$

令 $T=T_1\cup\{[\alpha,\beta]\}\cup T_2$, 则$T$是$[a,b]$的分割并且

$$\sum_{T}\omega_i\Delta x_i = \sum_{T_1}\omega_i\Delta x_i + \underbrace{\left(\sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) - \inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\right)}_{\le M-m}\cdot 2\delta + \sum_{T_2}\omega_i\Delta x_i$$

$\delta < \frac{\varepsilon}{6(M-m)}$

$$< \frac{1}{3}\varepsilon + (M-m)\cdot 2\delta + \frac{1}{3}\varepsilon < \varepsilon$$

由定理2'，f 在 $[a,b]$ 上可积.

专题：Riemann 函数的连续性与可积性.

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \quad (p, q \in \mathbb{N}_+, \frac{p}{q} \text{ 为既约真分数}) \\ 0, & x = 0, 1 \text{ 或 } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

1. $R(x)$ 只在 $x = \frac{1}{2}$ 处取得最大值 $\frac{1}{2}$.

2. 对 $\forall \varepsilon > 0$，集合

$$A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \mid R(x) \geq \varepsilon\}$$

是有限集合.

证：注意，$0, 1 \notin A_\varepsilon$，并且

$$A_\varepsilon = \left\{\frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{N}_+, \frac{p}{q} \text{ 为既约真分数}, \frac{1}{q} \geq \varepsilon\right\}$$

若 $\varepsilon > \frac{1}{2}$，则 $A_\varepsilon = \phi$，结论成立.

若 $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$，取 $q_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则 $q_0 \in \mathbb{N}_+$，$q_0 \geq 2$.

$$1 \leq \frac{1}{\varepsilon} - 1 < q_0 \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

① 当 $q \in \mathbb{N}_+$ 且 $q \leq q_0$ 时，有 $q \leq \frac{1}{\varepsilon}$，$\frac{1}{q} \geq \varepsilon$.

② 当 $q \in \mathbb{N}_+$ 且 $q > q_0$ 时，有 $q \geq q_0 + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$，$\frac{1}{q} < \varepsilon$.

所以 A_ε 中的元素都是以满足条件

$$q \in \mathbb{N}_+ \text{ 且 } q \leq q_0$$

的正整数 q 作为分母的既约真分数。由于分母为 q 的既约真分数至多有 $q-1$ 个，所以 A_ε 中元素个数至多为

$$(2-1)+(3-1)+\cdots+(q_0-1).$$

即 A_ε 是有限集合。

3. 对 $\forall x_0\in[0,1]$，有 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$。（$x_0=0$ 或 $x_0=1$ 为单侧极限）

证：$\forall\ \varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$，令

$$A_\varepsilon=\{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\mid R(x)\geqslant\varepsilon\},$$

则 A_ε 是有限集合，不妨设

$$A_\varepsilon=\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}.$$

任取 $x_0\in[0,1]$。

若 $x_0\in A_\varepsilon$，不妨设 $x_0=r_k\in A_\varepsilon$，则令

$$\delta=\min\underbrace{\{|x_0-r_1|,|x_0-r_2|,\cdots,|x_0-r_{k-1}|,|x_0-r_{k+1}|,\cdots,|x_0-r_n|\}}_{n-1\text{ 项}}>0;$$

若 $x_0\notin A_\varepsilon$，则令

$$\delta=\min\underbrace{\{|x_0-r_1|,\cdots,|x_0-r_n|\}}_{n\text{ 项}}>0.$$

下证对 $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta)$，有 $|R(x)-0|=R(x)<\varepsilon$. (1)

当 $x\in\mathbb{Q}^c\cap U^\circ(x_0;\delta)$，有 $R(x)=0$，(1)式显然成立。

当 $x\in\mathbb{Q}\cap U^\circ(x_0;\delta)$，由 δ 的定义，$x\notin A_\varepsilon$，从而 $R(x)<\varepsilon$，(1)式也成立。

综上，$\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$.

推论：$R(x)$ 在 $[0,1]$ 中的所有无理点处都连续，在 $(0,1)$ 中所有有理点处都不连续，在 $x_0=0$ 或 $x_0=1$ 单侧连续。

4. $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，并且 $\int_0^1 R(x)\,dx = 0$.

证：$\forall \varepsilon \in (0,1)$，令

$$A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \mid R(x) \geq \frac{1}{2}\varepsilon\},$$

则 A_ε 是有限集合，不妨设

$$A_\varepsilon = \{r_1, r_2, \cdots, r_N\}.$$

取 $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{N}$，则对任一满足 $\|T\| < \delta$ 的分割

$T = \{\Delta_i\}$，T 中的小区间可分为两类：$\{\Delta_i'\}$ 和 $\{\Delta_i''\}$，

其中 $\{\Delta_i'\}$ 中为含有 A_ε 中的点的小区间全体（至多有 N 个），

$\{\Delta_i''\}$ 中为不含有 A_ε 中的点的小区间全体，即对 $\forall x \in \Delta_i''$，

有 $x \notin A_\varepsilon$，从而 $0 \leq R(x) < \frac{1}{2}\varepsilon$.　　$\frac{1}{2}N\delta < \frac{1}{2}\varepsilon$,

于是，$\sum \omega_i' \Delta x_i' \leq \sum \frac{1}{2}\cdot\|T\| \leq \frac{1}{2}N\cdot\|T\| < \frac{1}{2}\varepsilon$,

$$\sum \omega_i''\cdot\Delta x_i'' \leq \sum \frac{1}{2}\varepsilon\cdot\Delta x_i'' \leq \frac{1}{2}\varepsilon\cdot 1 = \frac{1}{2}\varepsilon$$

综上，$\sum_1^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. 由定理2'，$R(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，

将 $[0,1]$ 等分为 n 个小区间，

$$T = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\}.$$

任取 $\xi_i \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \cap \mathbb{Q}^c$，则 $R(\xi_i) = 0$，

$\sum_{i=1}^n R(\xi_i)\cdot\frac{1}{n} \equiv 0$，从而

$$\int_0^1 R(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n R(\xi_i)\cdot\frac{1}{n} = 0.$$