

2019-2020 学年第 1 学期  
泛函分析作业

目录

1 第 1 周 . . . . .	1
2 第 2 周 . . . . .	3
3 第 3 周 . . . . .	8
4 第 4 周 . . . . .	12
5 第 5 周 . . . . .	14
6 第 6 周 . . . . .	20
7 第 7 周 . . . . .	20
8 第 8 周 . . . . .	22
9 第 9 周 . . . . .	25
10 第 10 周 . . . . .	30
11 第 11 周 . . . . .	32
12 第 12 周 . . . . .	33
13 第 13 周 . . . . .	39

第 1 周


定义 1.1. 等价距离

设集合  $X$  上有两种距离:  $d_1, d_2$ . 如果  $X$  中按距离  $d_1$  收敛的点列  $\{x_n\}$  都在距离  $d_2$  下收敛于同一点, 并且按距离  $d_2$  收敛的点列  $\{x_n\}$  都在距离  $d_1$  下收敛于同一点, 即

$$d_1(x_n, x) \rightarrow 0 \iff d_2(x_n, x) \rightarrow 0,$$

则称距离  $d_1$  和  $d_2$  等价.



 作业题 1.1 设  $d(x, y)$  是集合  $X$  上的距离, 令

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

证明:  $\tilde{d}(x, y)$  也是  $X$  上的距离, 并且  $\tilde{d}$  与  $d$  等价.

**证明** 显然, 对任意  $x, y \in X$ ,

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \in \mathbb{R}.$$

(i) 由距离  $d(x, y)$  的正定性可知  $\tilde{d}(x, y) \geq 0$ , 并且  $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 0$  等价于  $d(x, y) = 0$ , 进而等价于  $x = y$ .

(ii) 由距离  $d(x, y)$  的三角不等式可知, 对任意  $x, y, z \in X$ , 总有

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z),$$

从而, 根据函数

$$f(t) = \frac{t}{1+t}, \quad t \in [0, +\infty)$$

的单调递增性, 就有

$$\begin{aligned} \tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} &\leq \frac{d(x, z) + d(y, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} \\ &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} \\ &\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} \\ &= \tilde{d}(x, z) + \tilde{d}(y, z). \end{aligned}$$

综上,  $\tilde{d}(x, y)$  也是空间  $X$  上的距离.

注意到

$$0 \leq \tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} < 1,$$

于是

$$d(x, y) = \frac{\tilde{d}(x, y)}{1 - \tilde{d}(x, y)}. \quad (1.1)$$

若点列  $\{x_n\} \subset X$  和点  $x \in X$  满足

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

则根据数列极限的四则运算法则, 就有

$$\tilde{d}(x_n, x) = \frac{d(x_n, x)}{1 + d(x_n, x)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

若点列  $\{x_n\} \subset X$  和点  $x \in X$  满足

$$\tilde{d}(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

同样根据 (1.1) 式以及数列极限的四则运算法则, 就有

$$d(x_n, x) = \frac{\tilde{d}(x_n, x)}{1 - \tilde{d}(x_n, x)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

所以距离  $d$  和  $\tilde{d}$  等价. □

**注** 上述距离空间  $(X, \tilde{d})$  中任何两点的距离都小于 1, 从而任何子集都是有界集. 上述结论说明, 任何距离空间上  $(X, d)$  上都能够找到与  $d$  等价的“有界”距离  $\tilde{d}$ .

 **作业题 1.2** 在  $\mathbb{R}^N$  中可定义两种距离:

$$d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N |\xi_i - \eta_i|^2},$$

$$d_2(x, y) = \max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i - \eta_i|,$$

其中  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ ,  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N) \in \mathbb{R}^N$ . 证明:  $d_1$  和  $d_2$  等价.

**证明** 对任意  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ ,  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N) \in \mathbb{R}^N$ , 都有

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i - \eta_i|^2 \leq \sum_{i=1}^N |\xi_i - \eta_i|^2 \leq N \max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i - \eta_i|^2,$$

从而

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i - \eta_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^N |\xi_i - \eta_i|^2} \leq \sqrt{N} \max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i - \eta_i|,$$

即

$$d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \sqrt{N} d_2(x, y).$$

若点列  $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$  和点  $x \in \mathbb{R}^N$  满足

$$d_1(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

由 (1) 式的前半部分以及数列极限的迫敛性可知

$$d_2(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

若点列  $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$  和点  $x \in \mathbb{R}^N$  满足

$$d_2(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

由 (1) 式的后半部分以及数列极限的迫敛性可知

$$d_1(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$


综上,  $d_1$  和  $d_2$  等价. □

**注** 若距离空间  $X$  上的两种距离  $d_1$  和  $d_2$  满足

$$C_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C_2 d_1(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

其中  $C_1, C_2 > 0$  是正的常数, 则  $d_1$  与  $d_2$  一定等价.

## 第 2 周

 **作业题 2.1** 设  $P_r[a, b]$  是定义在闭区间  $[a, b]$  上的所有有理系数多项式函数的全体. 显然,  $(P_r[a, b], d)$  是连续函数空间  $(C[a, b], d)$  的距离子空间, 其中

$$d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|, \quad \forall f, g \in C[a, b].$$

证明:  $P_r[a, b]$  是  $C[a, b]$  的可数稠密子集, 从而  $C[a, b]$  可分.

**证明**

Step1. 对任意  $n \in \mathbb{N}$ , 设  $P_r^n[a, b]$  是定义在  $[a, b]$  上的所有有理系数  $n$  次多项式函数的全体, 则  $P_r^n[a, b]$  是可数集. 由于

$$P_r[a, b] = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_r^n[a, b],$$

则  $P_r[a, b]$  也是可数集.

Step2. 下证  $P_r[a, b]$  按距离  $d$  在  $P[a, b]$  中稠密.  
任取  $h \in P[a, b]$ ,

$$h(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n, \quad t \in [a, b],$$

其中  $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ . 令

$$M = \max_{1 \leq k \leq n} \max_{t \in [a, b]} |t|^k > 0.$$

根据有理数集  $\mathbb{Q}$  在实数集  $\mathbb{R}$  中的稠密性, 对任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $q_0, q_1, \cdots, q_n \in \mathbb{Q}$  使得

$$|a_0 - q_0| < \frac{1}{n+1}\epsilon, \quad |a_1 - q_1| < \frac{1}{(n+1)M}\epsilon, \quad \cdots, \quad |a_n - q_n| < \frac{1}{(n+1)M}\epsilon.$$

令

$$g(t) = q_0 + q_1 t + \cdots + q_n t^n, \quad t \in [a, b],$$

则  $g \in P_r[a, b]$ , 并且对任意  $t \in [a, b]$  都有

$$\begin{aligned} & |h(t) - g(t)| \\ & \leq |a_0 - q_0| + |a_1 - q_1| \cdot |t| + \cdots + |a_n - q_n| \cdot |t|^n \\ & \leq |a_0 - q_0| + |a_1 - q_1| M + \cdots + |a_n - q_n| M \\ & < \epsilon, \end{aligned}$$

从而

$$\max_{t \in [a, b]} |h(t) - g(t)| < \epsilon.$$

综上, 对任意  $h \in P[a, b]$  以及任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $g \in P_r[a, b]$  使得

$$d(h, g) = \max_{t \in [a, b]} |h(t) - g(t)| < \epsilon,$$

所以  $P_r[a, b]$  按距离  $d$  在  $P[a, b]$  中稠密.

Step3. 根据 Weierstrauss 逼近定理,  $P[a, b]$  按距离  $d$  在  $C[a, b]$  中稠密, 则对任意  $\epsilon > 0$  以及任意  $f \in C[a, b]$ , 存在  $h \in P[a, b]$  使得

$$d(f, h) < \frac{1}{2}\epsilon.$$

由 Step2 可知, 存在  $g \in P_r[a, b]$  使得

$$d(h, g) < \frac{1}{2}\epsilon,$$

从而  $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g) < \epsilon$ .

综上,  $P_r[a, b]$  是  $C[a, b]$  的可数稠密子集, 从而  $C[a, b]$  可分. □

## 作业题 2.2 按以下步骤证明

### 定理 2.1. Riemann-Lebesgue 引理

$f \in L[a, b]$ , 对应的 Fourier 系数为

$$a_n = \int_a^b f(x) \sin nx dx, \quad b_n = \int_a^b f(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

则  $a_n, b_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ .  $\mathbb{R}^n$



Step1 若  $f$  是  $[a, b]$  上的简单函数 (P80 定义 3), 证明上述结论成立.

Step2 设  $S[a, b]$  是定义在闭区间  $[a, b]$  上的简单函数的全体. 显然,  $S[a, b]$  是  $L[a, b]$  的距离子空间, 其中距离

$$d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt, \quad \forall f, g \in L[a, b].$$

证明:  $S[a, b]$  是  $L[a, b]$  的稠密子集.

Step3 利用稠密性, 证明 Riemann-Lebesgue 引理成立.

### 证明

Step0. 设  $h$  是  $[a, b]$  上的一个阶梯函数,

$$h(x) = \begin{cases} c_1, & x \in (a_1, b_1), \\ c_2, & x \in (a_2, b_2), \\ \cdots & \cdots \\ c_k, & x \in (a_k, b_k), \\ 0, & x \in [a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^k (a_i, b_i), \end{cases}$$

其中  $c_1, c_2, \dots, c_k$  为常数,  $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$  是  $[a, b]$  中互不相交的非空开区间. 于是,

$$\begin{aligned} & \int_a^b h(x) \sin nx dx \\ &= \sum_{i=1}^k c_i \int_{a_i}^{b_i} \sin nx dx \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k c_i (\cos na_i - \cos nb_i) \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

同理可证

$$\int_a^b h(x) \cos nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Step1. 设  $E$  是  $[a, b]$  中的可测子集,  $\chi$  是  $E$  的特征函数, 即

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \in [a, b] \setminus E, \end{cases}$$

下证

$$\int_a^b \chi(x) \sin nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

令  $\tilde{E} = E \cap (a, b)$ , 则  $\tilde{E}$  也可测并且  $m(E \setminus \tilde{E}) = 0$ . 对任意  $\epsilon > 0$ , 存在开集  $G \subset [a, b]$  使得  $\tilde{E} \subset G$  并且

$$m(G \setminus \tilde{E}) < \frac{1}{2}\epsilon.$$

另一方面, 根据  $\mathbb{R}^1$  中开集的构造定理 (P44),  $G$  可表为

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i,$$

其中  $O_i = (a_i, b_i)$  是  $G$  的构成区间, 从而

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) = mG \leq b - a < +\infty.$$

于是, 对上述  $\epsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}_+$  使得

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} (b_i - a_i) < \frac{1}{2}\epsilon.$$

令  $V = \cup_{i=1}^N (a_i, b_i)$ , 并定义阶梯函数

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in V, \\ 0, & x \in [a, b] \setminus V, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} & \int_a^b |\chi(x) - h(x)| dx \\ &= \left( \int_{E \setminus V} + \int_{V \setminus E} + \int_{[a, b] \setminus (E \cup V)} \right) |\chi(x) - h(x)| dx \\ &= \left( \int_{\tilde{E} \setminus V} + \int_{V \setminus \tilde{E}} + \int_{[a, b] \setminus (\tilde{E} \cup V)} \right) |\chi(x) - h(x)| dx \\ &= \int_{\tilde{E} \setminus V} |1 - 0| dx + \int_{V \setminus \tilde{E}} |0 - 1| dx + \int_{[a, b] \setminus (\tilde{E} \cup V)} |0 - 0| dx \\ &= m(\tilde{E} \setminus V) + m(V \setminus \tilde{E}) \\ &\leq m(G \setminus V) + m(G \setminus \tilde{E}) \\ &< \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_a^b \chi(x) \sin nx dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b (\chi(x) - h(x)) \sin nx dx \right| + \left| \int_a^b h(x) \sin nx dx \right| \\ &\leq \int_a^b |\chi(x) - h(x)| |\sin nx| dx + \left| \int_a^b h(x) \sin nx dx \right| \\ &\leq \int_a^b |\chi(x) - h(x)| dx + \left| \int_a^b h(x) \sin nx dx \right| \\ &< \epsilon + \left| \int_a^b h(x) \sin nx dx \right|. \end{aligned}$$

由于  $h$  是阶梯函数, 综合 Step0, 数列极限的迫敛性以及  $\epsilon > 0$  的任意性, 可得

$$\int_a^b \chi(x) \sin nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

设  $f$  是  $[a, b]$  上的简单函数,

$$f(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_i(x),$$

其中

- (i)  $[a, b] = \cup_{i=1}^k E_i$ ,  $E_1, E_2, \dots, E_k$  是  $[a, b]$  中互不相交的可测子集;  
(ii)  $c_1, c_2, \dots, c_k$  是非负常数;  
(iii)  $\chi_i(x)$  是  $E_i$  的特征函数, 即

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in E_i, \\ 0, & x \in [a, b] \setminus E_i. \end{cases}$$

由前面的结论可知

$$\int_a^b f(x) \sin nxdx = \sum_{i=1}^k c_i \int_a^b \chi_i(x) \sin nxdx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

同理可证

$$\int_a^b f(x) \cos nxdx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Step2. (P118) 设  $f \in L[a, b]$ , 则  $f^+$  和  $f^-$  也是  $[a, b]$  上的非负 L 可积函数, 从而, 根据非负可测函数 L 积分的定义 (P102, 定义 1), 对任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $[a, b]$  上的简单函数  $\phi_1, \phi_2$ , 使得

$$0 \leq \phi_1(x) \leq f^+(x), \quad 0 \leq \phi_2(x) \leq f^-(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

并且

$$\begin{aligned} \int_a^b f^+(x)dx - \frac{\epsilon}{2} &\leq \int_a^b \phi_1(x)dx \leq \int_a^b f^+(x)dx, \\ \int_a^b f^-(x)dx - \frac{\epsilon}{2} &\leq \int_a^b \phi_2(x)dx \leq \int_a^b f^-(x)dx. \end{aligned}$$

令  $\phi(x) = \phi_1(x) - \phi_2(x)$ , 则  $\phi$  也是  $[a, b]$  上的简单函数, 并且

$$\begin{aligned} d(f, \phi) &= \int_a^b |f(x) - \phi(x)|dx \\ &= \int_a^b |f^+(x) - f^-(x) - \phi_1(x) + \phi_2(x)|dx \\ &\leq \int_a^b |f^+(x) - \phi_1(x)|dx + \int_a^b |f^-(x) - \phi_2(x)|dx \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

综上,  $S[a, b]$  是  $L[a, b]$  的稠密子集.

Step3. 由 Step2, 对任意  $f \in L[a, b]$  以及任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $g \in S[a, b]$ , 使得

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx < \epsilon,$$

从而

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_a^b f(x) \sin nxdx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) \sin nxdx \right| + \left| \int_a^b g(x) \sin nxdx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)| |\sin nx|dx + \left| \int_a^b g(x) \sin nxdx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)|dx + \left| \int_a^b g(x) \sin nxdx \right| \\ &< \epsilon + \left| \int_a^b g(x) \sin nxdx \right|. \end{aligned}$$

另一方面, 根据 Step1, 就有

$$\int_a^b g(x) \sin nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

综上, 由以上两式, 结合数列极限的迫敛性以及  $\epsilon > 0$  的任意性, 可得


$$\int_a^b f(x) \sin nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

同理可证

$$\int_a^b f(x) \cos nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

### 第 3 周

 **作业题 3.1** 设  $(X, d)$  是度量空间,  $\{x_n\}$  是  $(X, d)$  中的 Cauchy 点列, 证明:  $\{x_n\}$  收敛当且仅当  $\{x_n\}$  存在收敛子列.

**证明** 必要性是显然的.

下证充分性. 设 Cauchy 点列  $\{x_n\}$  存在收敛子列  $\{x_{n_k}\}$  使得  $x_{n_k} \rightarrow x (k \rightarrow \infty)$ . 任取  $\epsilon > 0$ . 一方面, 由于  $\{x_n\}$  是 Cauchy 点列, 则存在  $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}_+$ , 使得

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\epsilon, \quad \forall m, n > N. \quad (3.1)$$


另一方面, 由于  $x_{n_k} \rightarrow x (k \rightarrow \infty)$ , 则存在  $K = K(\epsilon) \in \mathbb{N}_+$  使得

$$n_k > N \quad \text{并且} \quad d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{2}\epsilon, \quad \forall k > K. \quad (3.2)$$

综上, 由 (3.1)-(3.2) 式, 对任意  $n > N$ , 取  $k = K + 1$ , 就有

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon,$$

所以  $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$ . □

 **作业题 3.2** 设  $f$  是度量空间  $(X, d)$  到  $\mathbb{R}$  的连续映射,  $M$  是  $X$  中的紧集, 证明: 连续映射  $f$  在紧集  $M$  上能够取到最值, 即存在  $x_0, x_1 \in M$  使得

$$f(x_0) = \min_{x \in M} f(x), \quad f(x_1) = \max_{x \in M} f(x).$$

**证明** Step1. 设

$$l = \inf_{x \in M} f(x).$$

下证  $l \in \mathbb{R}$ .

反证法, 假设  $l = -\infty$ , 则对任意  $n \in \mathbb{N}_+$ , 存在  $x_n \in M$  使得

$$f(x_n) < -n,$$

于是

$$f(x_n) \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.3)$$



另一方面, 由于  $\{x_n\} \subset M$  并且  $M$  是紧集, 则存在  $\{x_n\}$  的子列  $\{x_{n_k}\}$  以及  $x \in M$  使得

$$x_{n_k} \rightarrow x \quad (k \rightarrow \infty).$$

根据映射  $f$  的连续性, 就有

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) \in \mathbb{R} \quad (k \rightarrow \infty).$$

这与 (3.3) 式矛盾. 所以  $l \in \mathbb{R}$ .

Step2. 根据下确界的定义, 存在  $\{x_n\} \subset M$  (称为极小化序列) 使得

$$f(x_n) \rightarrow l \quad (n \rightarrow \infty).$$

由于  $M$  是紧集, 则存在  $\{x_n\}$  的子列  $\{x_{n_k}\}$  以及  $x \in M$  使得

$$x_{n_k} \rightarrow x \quad (k \rightarrow \infty).$$

根据映射  $f$  的连续性, 就有

$$\inf_{x \in M} f(x) = l = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = f(x).$$

所以连续映射  $f$  在紧集  $M$  上可以取到最小值.

同理可证, 连续映射  $f$  在紧集  $M$  上可以取到最大值. □


**注** 上述结论才是数学分析中闭区间上的连续函数最值性的本质. 在一般的度量空间中, 有界闭集不一定是紧集, 有界闭集上的连续映射不一定有最值性.

### 作业题 3.3

#### 定义 3.1. Hölder 连续函数

设  $\alpha \in (0, 1]$ . 若  $f \in C[a, b]$  满足

$$[f]_\alpha = \sup_{\substack{x, y \in [a, b], \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty,$$

则称  $f$  是  $[a, b]$  上具有指数  $\alpha$  的 Hölder 连续函数.  $C[a, b]$  中所有具有指数  $\alpha$  的 Hölder 连续函数的全体记为  $C^{0, \alpha}[a, b]$ . 

(1) 令

$$\bar{d}(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| + [f - g]_\alpha, \quad \forall f, g \in C^{0, \alpha}[a, b],$$

证明  $(C^{0, \alpha}[a, b], \bar{d})$  是一个度量空间.

(2) 证明  $(C^{0, \alpha}[a, b], \bar{d})$  是完备的度量空间.

(3) 利用 Ascoli-Arezela 定理证明, 若  $M$  是  $(C^{0, \alpha}[a, b], \bar{d})$  中的有界集, 则  $M$  是  $(C[a, b], d)$  中的列紧集, 其中  $d$  是最大值距离, 即

$$d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|, \quad \forall f, g \in C[a, b].$$

**证明** (1) 任取  $f, g \in C^{0, \alpha}[a, b]$ , 对任意  $x, y \in [a, b]$  且  $x \neq y$ , 都有

$$\frac{|(f - g)(x) - (f - g)(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} + \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha} \\
&\leq [f]_\alpha + [g]_\alpha < +\infty,
\end{aligned}$$

从而

$$[f - g]_\alpha = \sup_{\substack{x, y \in [a, b], \\ x \neq y}} \frac{|(f - g)(x) - (f - g)(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq [f]_\alpha + [g]_\alpha < +\infty.$$

所以  $\bar{d}(f, g)$  的定义是合理的.

(i) 显然  $\bar{d}(f, g) \geq 0$ . 由于  $d(f, g) \leq \bar{d}(f, g)$ , 根据  $d(f, g)$  的正定性可知,  $\bar{d}(f, g) = 0$  等价于

$$f(t) = g(t), \quad \forall t \in [a, b],$$

从而等价于  $f = g$ .

(ii) 设  $f, g, h \in C^{0, \alpha}[a, b]$ , 则

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

另一方面, 对任意  $x, y \in [a, b]$  且  $x \neq y$ , 都有

$$\begin{aligned}
&\frac{|(f - g)(x) - (f - g)(y)|}{|x - y|^\alpha} \\
&= \frac{|[(f - h) + (h - g)](x) - [(f - h) + (h - g)](y)|}{|x - y|^\alpha} \\
&\leq \frac{|(f - h)(x) - (f - h)(y)|}{|x - y|^\alpha} + \frac{|(h - g)(x) - (h - g)(y)|}{|x - y|^\alpha},
\end{aligned}$$

从而

$$[f - g]_\alpha \leq [f - h]_\alpha + [h - g]_\alpha.$$

综上,

$$\bar{d}(f, g) \leq \bar{d}(f, h) + \bar{d}(h, g).$$

所以  $(C^{0, \alpha}[a, b], \bar{d})$  是一个度量空间.

(2) 设  $\{f_n\}$  是空间  $(C^{0, \alpha}[a, b], \bar{d})$  中的 Cauchy 点列. 由于  $C^{0, \alpha}[a, b] \subset C[a, b]$  并且

$$0 \leq d(f, g) \leq \bar{d}(f, g), \quad \forall f, g \in C^{0, \alpha}[a, b],$$

易证  $\{f_n\}$  也是  $(C[a, b], d)$  中的 Cauchy 点列. 根据  $(C[a, b], d)$  的完备性, 存在  $f \in C[a, b]$  使得

$$d(f_n, f) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

下证  $f \in C^{0, \alpha}[a, b]$  并且

$$\bar{d}(f_n, f) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

由于  $\{f_n\}$  是空间  $(C^{0, \alpha}[a, b], \bar{d})$  中的 Cauchy 点列, 从而是  $(C^{0, \alpha}[a, b], \bar{d})$  中的有界点列 (p219 第 14 题), 于是存在  $M > 0$  使得对任意  $x, y \in [a, b]$  并且  $x \neq y$  都有

$$\frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq [f_n]_\alpha = [f_n - 0]_\alpha \leq \bar{d}(f_n, 0) \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+. \quad (3.4)$$

由于函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $f$ , 那么也逐点收敛于  $f$ , 即对任意  $x \in [a, b]$ , 都有

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.5)$$

因此, 在 (3.4) 两端令  $n \rightarrow \infty$ , 可得

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq M, \quad \forall x, y \in [a, b], x \neq y,$$

从而  $[f]_\alpha < +\infty$ ,  $f \in C^{0,\alpha}[a, b]$ .

对任意  $\epsilon > 0$ , 由于  $\{f_n\}$  是空间  $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$  中的 Cauchy 点列, 则存在正整数  $N$ , 使得对任意  $m, n > N$ , 都有

$$\frac{|[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(y) - f_m(y)]|}{|x - y|^\alpha} \leq [f_n - f_m]_\alpha \leq \bar{d}(f_n, f_m) < \epsilon, \quad \forall x, y \in [a, b], x \neq y.$$

在上式中固定  $x, y$  以及  $n > N$ , 令  $m \rightarrow \infty$ , 结合 (3.5) 式可得

$$\frac{|[f_n(x) - f(x)] - [f_n(y) - f(y)]|}{|x - y|^\alpha} \leq \epsilon, \quad \forall n \geq N, \forall x, y \in [a, b], x \neq y,$$

所以

$$[f_n - f]_\alpha \leq \epsilon, \forall n > N.$$

综上

$$[f_n - f]_\alpha \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

从而

$$\bar{d}(f_n, f) = d(f_n, f) + [f_n - f]_\alpha \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

所以  $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$  是完备的度量空间.

(3) 设  $M$  在  $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$  中有界. 由于  $C^{0,\alpha}[a, b] \subset C[a, b]$  并且

$$0 \leq d(f, g) \leq \bar{d}(f, g), \quad \forall f, g \in C^{0,\alpha}[a, b],$$

所以  $M$  也在  $(C[a, b], d)$  中有界. 任取  $\{f_n\} \subset M$ , 则  $\{f_n\}$  既是  $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$  中的有界点列, 又是  $(C[a, b], d)$  中的有界点列, 从而函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上一致有界. 下证函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上等度连续.

由于  $\{f_n\}$  是  $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$  中的有界点列, 则存在  $M > 0$ , 使得

$$[f_n]_\alpha = [f_n - 0]_\alpha \leq \bar{d}(f_n, 0) \leq M.$$

从而

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+, \forall x, y \in [a, b]. \quad (3.6)$$

对任意  $\epsilon > 0$ , 取

$$\delta = \left(\frac{\epsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0,$$

则对任意  $x, y \in [a, b]$  且  $|x - y| < \delta$ , 根据  $\alpha \in (0, 1]$  以及 (3.6) 式可得

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x - y|^\alpha < M\delta^\alpha = \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

因此函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上等度连续.


根据 Ascoli-Arzelà 定理, 点列  $\{f_n\}$  在空间  $(C[a, b], d)$  中有收敛子列, 由此可知集合  $M$  是空间  $(C[a, b], d)$  中的列紧集.

由于  $\{f_n\}$  是  $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$  中的有界点列, 根据 (2) 的证明的前半部分可知, 上述收敛子列  $\{f_{n_k}\}$  的极限  $f$  也在  $C^{0,\alpha}[a, b]$  中. 然而, 虽然  $\{f_{n_k}\}$  在  $(C[a, b], d)$  中收敛, 但是却不能保证  $\{f_{n_k}\}$  是  $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$  的 Cauchy 点列, 因此我们无法像 (2) 的证明的后半部分那样证明

$$[f_{n_k} - f]_\alpha \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

□

## 第 4 周

 **作业题 4.1** 设  $X$  是完备的度量空间,  $T$  是  $X$  到  $X$  中的映射, 如果存在正整数  $m \in \mathbb{N}_+$  以及常数  $\alpha \in [0, 1)$  使得对所有的  $x, y \in X$ , 都有

$$d(T^m x, T^m y) \leq \alpha d(x, y),$$

其中  $T^m$  表示映射  $T$  作用  $m$  次, 则  $T$  在  $X$  中有且只有一个不动点  $x^*$ , 特别地, 迭代点列

$$x_0, x_1 = Tx_0, \dots, x_n = Tx_{n-1}, \dots,$$

在  $(X, d)$  中收敛于不动点  $x^*$ .

**证明** 由条件可知映射  $T^m : X \rightarrow X$  是压缩映射, 由于  $X$  完备, 根据压缩映射原理,  $T^m$  在  $X$  上存在唯一的不动点  $x^*$ , 即

$$x^* = T^m x^*. \quad (4.1)$$

下证  $x^*$  也是映射  $T$  在  $X$  上的唯一的不动点.

由(4.1)式可得

$$Tx^* = T(T^m x^*) = T^{m+1} x^* = T^m (Tx^*),$$

所以  $Tx^*$  也是  $T^m$  的不动点. 根据  $T^m$  的不动点的唯一性, 就有  $Tx^* = x^*$ , 所以  $x^*$  也是映射  $T$  的不动点. 若  $x \in X$  也是映射  $T$  的不动点, 则

$$x = Tx, x = Tx = T(Tx) = T^2 x, \dots, x = T^m x,$$

即  $x$  也是  $T^m$  的不动点. 根据  $T^m$  的不动点的唯一性, 就有  $x^* = x$ . 所以  $x^*$  是映射  $T$  在  $X$  上的唯一的不动点.

任取  $x_0 \in X$ . 通过映射  $T$  构造迭代点列

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \dots, x_n = Tx_{n-1}, \dots.$$

任取

$$s \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\},$$

令

$$\begin{aligned} y_0 &= T^s x_0 = x_s, \\ y_1 &= T^m y_0 = x_{m+s}, \\ y_2 &= T^m y_1 = x_{2m+s}, \\ &\dots, \\ y_n &= T^m y_{n-1} = x_{nm+s}, \\ &\dots. \end{aligned}$$

根据由于  $T^m$  是压缩映射,  $X$  完备, 则迭代点列  $y_n$  收敛于  $T^m$  的不动点  $x^*$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nm+s} = x^*, \quad \forall s \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}.$$

于是对任意  $\epsilon > 0$ , 以及任意  $s \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ , 邻域  $U(x^*, \epsilon)$  之外只含有点列  $\{x_{nm+s}\}_{n=0}^{\infty}$  中的有限多项, 将这些项的集合记为  $A_s$ . 由于

$$\bigcup_{s=0}^{m-1} \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x_{nm+s}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s=0}^{m-1} \{x_{nm+s}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x_n\},$$

于是点列  $\{x_n\}$  在邻域  $U(x^*, \epsilon)$  之外的项的全体为有限集

$$\bigcup_{s=0}^{m-1} A_s,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

□

**注** 该题中的映射  $T$  自身不一定是压缩映射. 证明过程后半部分用到了点列收敛的另外一种等价定义:

任给  $\epsilon > 0$ , 若点列  $\{x_n\}$  在邻域  $U(x, \epsilon)$  之外至多只有有限多项, 则称点列  $\{x_n\}$  收敛于  $x$ .

点列极限与其子列极限的转化思路, 可参考华东师大《数学分析 (第四版 · 上册)》P27 例 8 和 P35-P36 习题 7(2) 的证明.

**作业题 4.2** (Volterra 型线性积分方程解的存在唯一性问题) 设  $f \in C[a, b]$ , 二元函数  $k(t, s)$  在  $[a, b] \times [a, b]$  上连续. 利用上题的结论证明, 对任意  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 积分方程

$$\phi(t) - \lambda \int_0^t k(t, s)\phi(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b] \quad (4.2)$$

总存在唯一的连续函数解  $\phi \in C[a, b]$ .

**证明** 任取  $\phi \in C[a, b]$ , 定义  $[a, b]$  上的函数  $T\phi$ :

$$(T\phi)(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t, s)\phi(s) ds, \quad t \in [a, b]. \quad (4.3)$$

由于  $\phi, f \in C[a, b]$ ,  $k(t, s)$  在  $[a, b] \times [a, b]$  上连续, 由上式可知  $T\phi \in C[a, b]$ . 由此得到映射

$$\begin{aligned} T: C[a, b] &\rightarrow C[a, b], \\ \phi &\mapsto T\phi. \end{aligned}$$

显然, 积分方程(4.2)在  $[a, b]$  上的连续函数解等价于映射  $T$  在空间  $C[a, b]$  中的不动点.

(下面验证  $T$  是否是压缩映射, 若不是, 继续验证  $T^m$  是否是压缩映射)

对任意  $\phi_1, \phi_2 \in C[a, b]$  以及任意  $t \in [a, b]$ , 由(4.3)可得

$$\begin{aligned} & |(T\phi_1)(t) - (T\phi_2)(t)| \\ &= |\lambda| \cdot \left| \int_a^t k(t, s) [\phi_1(s) - \phi_2(s)] ds \right| \\ &\leq |\lambda| \cdot \int_a^t \max_{\substack{a \leq t \leq b \\ a \leq s \leq b}} |k(t, s)| \cdot \max_{t \in [a, b]} |\phi_1(s) - \phi_2(s)| ds \\ &= M|\lambda|(t-a) \cdot d(\phi_1, \phi_2), \end{aligned}$$

其中

$$M = \max_{\substack{a \leq t \leq b \\ a \leq s \leq b}} |k(t, s)| \geq 0.$$

(这样看  $T$  不一定是压缩映射)

利用上述结果, 继续计算可得

$$|(T^2\phi_1)(t) - (T^2\phi_2)(t)|$$

$$\begin{aligned}
&= |\lambda| \cdot \left| \int_a^t k(t, s) [(T\phi_1)(s) - (T\phi_2)(s)] ds \right| \\
&\leq |\lambda| \cdot \int_a^t M \cdot |(T\phi_1)(s) - (T\phi_2)(s)| ds \\
&\leq M^2 |\lambda|^2 \int_a^t (s - a) \cdot d(\phi_1, \phi_2) ds \\
&= \frac{[M|\lambda|(t - a)]^2}{2} d(\phi_1, \phi_2).
\end{aligned}$$

一直做下去, 对任意  $m \in \mathbb{N}_+$  就有

$$|(T^m \phi_1)(t) - (T^m \phi_2)(t)| \leq \frac{[M|\lambda|(t - a)]^m}{m!} d(\phi_1, \phi_2), \quad \forall t \in [a, b],$$

上式两端对  $t \in [a, b]$  取最大值可得


$$d(T^m \phi_1, T^m \phi_2) \leq \frac{[M|\lambda|(b - a)]^m}{m!} d(\phi_1, \phi_2).$$

对任意  $a \in \mathbb{R}$ , 都有  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a^m}{m!} = 0$ , 由该事实可知, 存在充分大的一个正整数  $m$  使得

$$\alpha = \frac{[M|\lambda|(b - a)]^m}{m!} \in [0, 1),$$

此时  $T^m$  就是完备度量空间  $C[a, b]$  上的压缩映射. 根据上一个问题的结论, 映射  $T$  在  $C[a, b]$  中存在唯一的不动点, 所以积分方程(4.2)在  $[a, b]$  上存在唯一的连续函数解.  $\square$

## 第 5 周

 **作业题 5.1** 设  $(X, \|\cdot\|)$  是一个赋范空间,  $x_0 \in X$ ,  $\epsilon > 0$ . 令

$$\begin{aligned}
U(x_0, \epsilon) &= \{x \mid \|x - x_0\| < \epsilon\}, \\
S(x_0, \epsilon) &= \{x \mid \|x - x_0\| \leq \epsilon\},
\end{aligned}$$

则

$$\overline{U(x_0, \epsilon)} = S(x_0, \epsilon).$$

**证明** 由于范数  $\|\cdot\|$  作为映射是赋范线性空间  $X$  上的连续映射, 则可证  $S(x_0, \epsilon)$  是空间  $X$  中的闭集. 由于  $U(x_0, \epsilon) \subset S(x_0, \epsilon)$ , 则  $\overline{U(x_0, \epsilon)} \subset S(x_0, \epsilon)$ . 下证  $S(x_0, \epsilon) \subset \overline{U(x_0, \epsilon)}$ .

令

$$D = \{x \in X \mid \|x - x_0\| = \epsilon\},$$

则  $S(x_0, \epsilon) = U(x_0, \epsilon) \cup D$ . 显然,  $U(x_0, \epsilon) \subset \overline{U(x_0, \epsilon)}$ , 所以只需要证明  $D \subset \overline{U(x_0, \epsilon)}$ .

任取  $y_0 \in D$ . 对任意  $n \in \mathbb{N}$ , 令

$$x_n = y_0 + \frac{x_0 - y_0}{n\|x_0 - y_0\|} = y_0 + \frac{1}{n\epsilon}(x_0 - y_0), \text{ (赋范线性空间里可以做加法和数乘)}$$

则  $x_n \in X$ , 并且当  $n$  足够大时, 就有(下式还用到了范数的正齐次性)

$$\|x_n - x_0\| = \left\| \left( \frac{1}{n\epsilon} - 1 \right) (x_0 - y_0) \right\| = \left| \frac{1}{n\epsilon} - 1 \right| \|x_0 - y_0\| = \left| \frac{1}{n} - \epsilon \right| = \epsilon - \frac{1}{n} < \epsilon,$$

从而  $x_n \in U(x_0, \epsilon)$ . 另一方面,

$$\|x_n - y_0\| = \left\| \frac{1}{n\epsilon}(x_0 - y_0) \right\| = \frac{1}{n\epsilon} \|x_0 - y_0\| = \frac{1}{n},$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_0\| = 0$ ,  $y_0$  就是  $U(x_0, \epsilon)$  的聚点, 因此  $y_0 \in \overline{U(x_0, \epsilon)}$ . 综上,  $D \subset \overline{U(x_0, \epsilon)}$ .  
所以  $\overline{U(x_0, \epsilon)} = S(x_0, \epsilon)$ . □

### 作业题 5.2 利用 Hölder 不等式证明

#### 定理 5.1. 内插不等式

设  $1 \leq s \leq r \leq t < \infty$ ,  $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$ , 则  $u \in L^r(\Omega)$  并且

$$\|u\|_r \leq \|u\|_s^\theta \|u\|_t^{1-\theta},$$

其中  $\theta \in [0, 1]$  满足

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}.$$

**证明** 当  $r = s$  时, 取  $\theta = 1$ ; 当  $r = t$  时, 取  $\theta = 0$ . 在这两种情况下, 结论都成立. 下设

$$1 \leq s < r < t < \infty.$$

若存在  $m, n > 0$  使得  $r = \frac{s}{m} + \frac{t}{n}$ , 则

$$|u|^r = |u|^{\frac{s}{m}} \cdot |u|^{\frac{t}{n}}.$$

由于  $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$ , 则

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( |u|^{\frac{s}{m}} \right)^m dx &= \int_{\Omega} |u|^s dx < +\infty, \\ \int_{\Omega} \left( |u|^{\frac{t}{n}} \right)^n dx &= \int_{\Omega} |u|^t dx < +\infty, \end{aligned}$$

从而  $|u|^{\frac{s}{m}} \in L^m(\Omega)$ ,  $|u|^{\frac{t}{n}} \in L^n(\Omega)$ . 于是, 当  $m, n$  满足

$$\begin{cases} m, n > 0, \\ \frac{s}{m} + \frac{t}{n} = r, \\ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1, \end{cases}$$

即  $m = \frac{t-s}{t-r}$ ,  $n = \frac{t-s}{r-s}$  时, 利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^r dx &= \int_{\Omega} |u|^{\frac{s}{m}} \cdot |u|^{\frac{t}{n}} dx \leq \left[ \int_{\Omega} \left( |u|^{\frac{s}{m}} \right)^m dx \right]^{\frac{1}{m}} \cdot \left[ \int_{\Omega} \left( |u|^{\frac{t}{n}} \right)^n dx \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \left( \int_{\Omega} |u|^s dx \right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left( \int_{\Omega} |u|^t dx \right)^{\frac{1}{n}} = \|u\|_s^{\frac{s}{m}} \cdot \|u\|_t^{\frac{t}{n}} < \infty, \end{aligned}$$

所以  $u \in L^r(\Omega)$ , 并且

$$\|u\|_r^r = \int_{\Omega} |u|^r dx \leq \|u\|_s^{\frac{s}{m}} \cdot \|u\|_t^{\frac{t}{n}}.$$


令  $\theta = \frac{s}{rm}$ , 则  $\theta \in (0, 1)$ ,  $\frac{t}{rn} = 1 - \theta$ ,

$$\frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t} = \frac{1}{rm} + \frac{1}{rn} = \frac{1}{r},$$

并且

$$\|u\|_r \leq \|u\|_s^\theta \|u\|_t^{1-\theta}.$$

□

 **作业题 5.3** ( $L^p(\Omega)$  与  $L^\infty(\Omega)$  的联系) 设  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^n$  中的可测集并且  $m(\Omega) < +\infty$ , 证明

(1) 若  $p, q$  满足  $1 \leq p < q \leq \infty$ , 则

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega),$$

并且存在与  $m(\Omega), p$  和  $q$  相关的正常数  $C$  使得

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_q, \quad \forall f \in L^q(\Omega).$$

(2) 对任意  $f \in L^\infty(\Omega)$ , 都有

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

**证明** (1) Step1. 任取  $f \in L^\infty(\Omega)$ , 下证

$$f \in L^p(\Omega), \quad \forall p \geq 1.$$

由于  $f \in L^\infty(\Omega)$ , 则存在  $E_0 \subset \Omega$  使得  $m(E_0) = 0$  并且

$$|f(x)|^p \leq \|f\|_\infty^p, \quad \forall x \in \Omega \setminus E_0, \quad \forall p \geq 1.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)|^p dx &= \int_{\Omega \setminus E_0} |f(x)|^p dx + \int_{E_0} |f(x)|^p dx \\ &= \int_{\Omega \setminus E_0} |f(x)|^p dx \\ &\leq \int_{\Omega \setminus E_0} \|f\|_\infty^p dx \\ &\leq m(\Omega) \|f\|_\infty^p < +\infty, \end{aligned}$$

所以  $f \in L^p(\Omega)$  并且

$$\|f\|_p \leq [m(\Omega)]^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty. \quad (5.1)$$

□

Step2. 下证当  $p, q$  满足

$$1 \leq p < q < \infty$$

时结论成立.

任取  $f \in L^q(\Omega)$ , 令  $t = \frac{q}{p}$ ,  $s = \frac{t}{t-1}$ , 则  $t, s > 0$ ,  $\frac{1}{t} + \frac{1}{s} = 1$ , 并且

$$\int_{\Omega} (|f(x)|^p)^t dx = \int_{\Omega} |f(x)|^q dx < \infty,$$

即  $|f|^p \in L^t(\Omega)$ . 定义

$$g(x) \equiv 1, \quad x \in \Omega,$$

则  $g \in L^s(\Omega)$ . 利用 Hölder 不等式可得

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} 1 \cdot |f(x)|^p dx \\
&\leq \left( \int_{\Omega} 1^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \left( \int_{\Omega} (|f(x)|^p)^t dx \right)^{\frac{1}{t}} \\
&= [m(\Omega)]^{\frac{1}{s}} \left( \int_{\Omega} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{t}} \\
&= [m(\Omega)]^{\frac{q-p}{q}} \|f\|_q^p < +\infty,
\end{aligned}$$

所以  $f \in L^p(\Omega)$ , 并且

$$\|f\|_p \leq [m(\Omega)]^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_q.$$

(2) 当  $\|f\|_{\infty} = 0$  时, 由 (1) 部分的结论可知  $\|f\|_p \equiv 0, \forall p > 1$ , 此时结论显然成立. 下设  $\|f\|_{\infty} > 0$ .

一方面, 由(5.1)可得

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} [m(\Omega)]^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\infty} = \|f\|_{\infty}. \quad (5.2)$$

另一方面, 对任意  $\epsilon \in (0, \|f\|_{\infty})$ , 令

$$E_{\epsilon} = \{x \in \Omega \mid |f(x)| \geq \|f\|_{\infty} - \epsilon\},$$

下证  $m(E_{\epsilon}) > 0$ . 反证法, 假设  $m(E_{\epsilon}) = 0$ , 由  $\|f\|_{\infty}$  的定义可得

$$\sup_{x \in \Omega \setminus E_{\epsilon}} |f(x)| \geq \inf_{\substack{E_0 \subset \Omega \\ m(E_0)=0}} \left( \sup_{x \in \Omega \setminus E_0} |f(x)| \right) = \|f\|_{\infty}. \quad (5.3)$$

但是另一方面, 对任意  $x \in \Omega \setminus E_{\epsilon}$ , 有  $|f(x)| \leq \|f\|_{\infty} - \epsilon$ , 从而

$$\sup_{x \in \Omega \setminus E_{\epsilon}} |f(x)| \leq \|f\|_{\infty} - \epsilon,$$

这与(5.3)矛盾. 所以  $m(E_{\epsilon}) > 0$ . 于是

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |f(x)|^p dx &\geq \int_{E_{\epsilon}} |f(x)|^p dx \\
&\geq \int_{E_{\epsilon}} (\|f\|_{\infty} - \epsilon)^p dx \\
&= m(E_{\epsilon}) (\|f\|_{\infty} - \epsilon)^p,
\end{aligned}$$

进而

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq [m(E_{\epsilon})]^{\frac{1}{p}} (\|f\|_{\infty} - \epsilon),$$

$$\begin{aligned}
\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p &\geq \lim_{p \rightarrow +\infty} [m(E_{\epsilon})]^{\frac{1}{p}} (\|f\|_{\infty} - \epsilon) \\
&= \|f\|_{\infty} - \epsilon.
\end{aligned}$$

由  $\epsilon > 0$  的任意性可知

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_{\infty}. \quad (5.4)$$

综合(5.2)与(5.4)式, 可得

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_{\infty}.$$

#### 作业题 5.4 证明

**定理 5.2. Brezis-Lieb 引理**

设  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^n$  中的可测集,  $1 \leq p < \infty$ . 若  $L^p(\Omega)$  中的函数列  $\{u_n\}$  满足

- (1)  $\{u_n\}$  是  $L^p(\Omega)$  中的有界点列;
- (2)  $u_n(x) \rightarrow u(x)$  a.e.  $x \in \Omega$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

则  $u \in L^p(\Omega)$  并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) = \|u\|_p^p.$$



**证明** Step1. 由于  $\{u_n\}$  在  $L^p(\Omega)$  中有界, 则存在  $M > 0$ , 使得

$$\|u_n\|_p \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

由于

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ a.e. } x \in \Omega \quad (n \rightarrow \infty),$$

则

$$|u_n(x)|^p \rightarrow |u(x)|^p \text{ a.e. } x \in \Omega \quad (n \rightarrow \infty).$$

由 Fatou 引理 (P107) 可得

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx = \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} |u_n(x)|^p dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n(x)|^p dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_p^p \leq M^p < +\infty,$$

所以  $u \in L^p(\Omega)$ .

Step2. (为什么要有这一步? 从下面的(5.7)式最后一步估计可以看到端倪) 任取  $\epsilon > 0$ . 下证存在只与  $\epsilon$  和  $p$  有关的正常数  $C > 0$  使得

$$| |a+b|^p - |a|^p | \leq \epsilon |a|^p + C |b|^p, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

事实上, 当  $p = 1$  时,

$$| |a+b| - |a| | \leq |(a+b) - a| = |b| \leq \epsilon |a| + |b|,$$

结论成立. 当  $p > 1$  时, 由微分中值定理, 存在  $\theta \in [0, 1]$  使得

$$\begin{aligned} & | |a+b|^p - |a|^p | \\ &= | p|\theta a + (1-\theta)b|^{p-2}(\theta a + (1-\theta)b)b | \\ &= p|\theta a + (1-\theta)b|^{p-1}|b| \\ &\leq p2^{p-1}(|\theta a|^{p-1} + |(1-\theta)b|^{p-1})|b| \\ &\leq p2^{p-1}(|a|^{p-1} + |b|^{p-1})|b| \\ &= p2^{p-1}|a|^{p-1}|b| + p2^{p-1}|b|^p. \end{aligned} \tag{5.5}$$

令  $q = \frac{p}{p-1}$ , 则  $p > 1$  且  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . 由 Young 不等式可得

$$\begin{aligned} & p2^{p-1}|a|^{p-1}|b| \\ &= \left[ (q\epsilon)^{\frac{1}{q}} |a|^{p-1} \right] \cdot \left[ (q\epsilon)^{-\frac{1}{q}} p2^{p-1}|b| \right] \\ &\leq \frac{\left[ (q\epsilon)^{\frac{1}{q}} |a|^{p-1} \right]^q}{q} + \frac{\left[ (q\epsilon)^{-\frac{1}{q}} p2^{p-1}|b| \right]^p}{p} \end{aligned}$$

$$= \epsilon |a|^p + \left( \frac{2^p(p-1)}{\epsilon} \right)^{p-1} |b|^p \quad (5.6)$$

令

$$C = \left( \frac{2^p(p-1)}{\epsilon} \right)^{p-1} + p2^{p-1},$$

再将(5.6)式代入到(5.5)中可得

$$\left| |a+b|^p - |a|^p \right| \leq \epsilon |a|^p + C |b|^p.$$

Step3. 下证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) - \|u\|_p^p \right) = 0.$$

由 Step2 可得

$$\begin{aligned} & \left| |u_n(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p - |u(x)|^p \right| \\ & \leq \left| |u_n(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p \right| + |u(x)|^p \\ & = \left| |(u_n(x) - u(x)) + u(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p \right| + |u(x)|^p \\ & \leq \epsilon |u_n(x) - u(x)|^p + (C+1) |u(x)|^p. \end{aligned} \quad (5.7)$$

令

$$f_n^\epsilon(x) = \left| |u_n(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p - |u(x)|^p \right| - \epsilon |u_n(x) - u(x)|^p,$$

则由条件 (ii) 可知

$$f_n^\epsilon(x) \rightarrow 0 \quad a.e. \ x \in \Omega \quad (n \rightarrow \infty),$$

同样也有  $f_n^\epsilon$  的正部  $(f_n^\epsilon)^+$  也满足

$$(f_n^\epsilon)^+(x) \rightarrow 0, \quad a.e. \ x \in \Omega \quad (n \rightarrow \infty). \quad (5.8)$$

由(5.7)式可得

$$0 \leq (f_n^\epsilon)^+(x) \leq (C+1) |u(x)|^p, \quad \forall x \in \Omega. \quad (5.9)$$

由于  $u \in L^p(\Omega)$ , 则  $|u|^p \in L^1(\Omega)$ , 综合(5.8)和(5.9), 利用 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f_n^\epsilon)^+(x) dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n^\epsilon)^+(x) dx = 0. \quad (5.10)$$

再由(5.7)式可得

$$\begin{aligned} & \left| |u_n(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p - |u(x)|^p \right| \\ & = f_n^\epsilon(x) + \epsilon |u_n(x) - u(x)|^p \\ & \leq (f_n^\epsilon)^+(x) + \epsilon |u_n(x) - u(x)|^p, \end{aligned}$$

上式两端在  $\Omega$  上积分可得

$$\begin{aligned} & \left| (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) - \|u\|_p^p \right| \\ & \leq \int_{\Omega} \left| |u_n(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p - |u(x)|^p \right| dx \\ & \leq \int_{\Omega} (f_n^\epsilon)^+(x) dx + \epsilon \|u_n - u\|_p^p \\ & \leq \int_{\Omega} (f_n^\epsilon)^+(x) dx + (M^p + \|u\|_p^p) \epsilon, \end{aligned}$$

在上式两端令  $n \rightarrow \infty$  可得

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) - \|u\|_p^p \right| \\ & \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f_n^\epsilon)^+(x) \, dx + (M^p + \|u\|_p^p) \epsilon \\ & = (M^p + \|u\|_p^p) \epsilon \end{aligned}$$

再由  $\epsilon > 0$  的任意性可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) - \|u\|_p^p \right| = 0,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) - \|u\|_p^p \right) = 0,$$

即


$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) = \|u\|_p^p.$$

□

## 第 6 周

欢度国庆!

## 第 7 周

 **作业题 7.1** 设  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^n$  中的一个可测集,  $1 \leq p < \infty$ . 若  $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ ,  $f \in L^p(\Omega)$  并且

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

则函数列  $\{f_n\}$  在  $\Omega$  上依测度收敛于  $f$ .

**证明** 对任意  $\sigma > 0$ , 都有

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_p^p &= \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \\ &\geq \int_{\Omega[|f_n - f| \geq \sigma]} |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \\ &\geq \int_{\Omega[|f_n - f| \geq \sigma]} \sigma^p \, dx \\ &= \sigma^p m(\Omega[|f_n - f| \geq \sigma]). \end{aligned}$$

由于

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

则

$$m(\Omega[|f_n - f| \geq \sigma]) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

从而函数列  $\{f_n\}$  在  $\Omega$  上依测度收敛于  $f$ .

□

 **作业题 7.2** 证明

### 引理 7.1. Risez 引理

设  $(X, \|\cdot\|)$  是一个赋范线性空间,  $X_0$  是  $X$  的一个真闭子空间, 则对任意  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 存在  $y \in X$  使得

- (i)  $\|y\| = 1$ ,  
(ii)  $\forall x \in X_0$ , 有  $\|y - x\| > \varepsilon$ .



**证明** 由于  $X_0$  是  $X$  的真闭子空间, 则存在非零向量  $\bar{y} \in X \setminus X_0$ . 由于  $X_0$  是闭集, 则

$$d = d(\bar{y}, X_0) = \inf_{x \in X_0} \|\bar{y} - x\| > 0.$$

由于  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 则  $d < \frac{d}{\varepsilon}$ , 从而存在  $x_0 \in X_0$ , 使得

$$d \leq \|\bar{y} - x_0\| < \frac{d}{\varepsilon}. \quad (7.1)$$

令  $y = \frac{\bar{y} - x_0}{\|\bar{y} - x_0\|}$ , 则  $\|y\| = 1$ . 对任意  $x \in X_0$ , 都有

$$\begin{aligned} y - x &= \frac{\bar{y} - x_0}{\|\bar{y} - x_0\|} - x \\ &= \frac{1}{\|\bar{y} - x_0\|} [\bar{y} - (x_0 + \|\bar{y} - x_0\|x)]. \end{aligned}$$

由于  $x_0, x \in X_0$ ,  $X_0$  是  $X$  的子空间, 则

$$x_0 + \|\bar{y} - x_0\|x \in X_0,$$

从而

$$\|\bar{y} - (x_0 + \|\bar{y} - x_0\|x)\| \geq \inf_{x \in X_0} \|\bar{y} - x\| = d,$$

由(7.1)式可得

$$\|y - x\| = \left\| \frac{1}{\|\bar{y} - x_0\|} [\bar{y} - (x_0 + \|\bar{y} - x_0\|x)] \right\| \geq \frac{d}{\|\bar{y} - x_0\|} > \varepsilon.$$

□

### 作业题 7.3

#### 定义 7.1. 严格凸

设  $(X, \|\cdot\|)$  是一个赋范线性空间. 如果对任意

$$x, y \in S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}, \quad \text{并且} \quad x \neq y,$$

都有

$$\|\alpha x + \beta y\| < 1 \quad (\forall \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1)$$

则称  $(X, \|\cdot\|)$  是严格凸的赋范线性空间.



设  $(X, \|\cdot\|)$  是严格凸的赋范线性空间,  $M = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset X$ , 则对任意  $x \in X$ , 证明存在唯一的  $y_0 \in \text{span}M$ , 使得

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in \text{span}M} \|x - y\|.$$

(我们在课上已经证明了最佳逼近元  $y_0$  的存在性. 这里只需要证明, 在严格凸的条件下, 最佳逼近元是唯一的.)

**证明** 任取  $x \in X$ , 假设存在  $y_0, y_1 \in \text{span}M$  并且  $y_0 \neq y_1$ , 使得

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in \text{span}M} \|x - y\| = \|x - y_1\|.$$

令  $d = \min_{y \in \text{span}M} \|x - y\|$ , 则  $d \geq 0$ .

若  $d > 0$ , 令

$$z_0 = \frac{x - y_0}{d}, \quad z_1 = \frac{x - y_1}{d},$$

则  $\|z_0\| = \|z_1\| = 1$  并且  $z_0 \neq z_1$ . 根据赋范空间  $X$  的严格凸性, 对任意  $\alpha, \beta > 0$  且  $\alpha + \beta = 1$  就有

$$\begin{aligned} 1 &> \|\alpha z_0 + \beta z_1\| \\ &= \frac{1}{d} \|\alpha(x - y_0) + \beta(x - y_1)\| \\ &= \frac{1}{d} \|x - (\alpha y_0 + \beta y_1)\|. \end{aligned}$$

由于  $y_0, y_1 \in \text{span}M$ , 则  $\alpha y_0 + \beta y_1 \in \text{span}M$ , 从而

$$1 > \frac{1}{d} \|x - (\alpha y_0 + \beta y_1)\| \geq \frac{1}{d} \cdot d = 1,$$

矛盾.

若  $d = 0$ , 则  $\|x - y_0\| = \|x - y_1\| = 0$ , 从而  $y_0 = x = y_1$ , 这与  $y_0 \neq y_1$  矛盾.

综上, 必有  $y_0 = y_1$ . 所以  $x$  的最佳逼近元必定唯一. □

## 第 8 周

**作业题 8.1** 设  $(X, \|\cdot\|_1)$  是  $n$  维赋范线性空间,  $(Y, \|\cdot\|_2)$  是  $m$  维赋范线性空间, 数域均为实数域  $\mathbb{R}$ . 证明  $X$  到  $Y$  上的任何线性算子都是有界线性算子.

**证明** Step1.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \phi^{-1} \uparrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathbb{A}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

设  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  是  $n$  维空间  $X$  的一组 Hamel 基,  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  是  $m$  维空间  $Y$  的一组 Hamel 基. 对任意  $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \in X$ , 定义映射  $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 使得

$$\phi(x) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n;$$

对任意  $y = \sum_{j=1}^m \eta_j f_j \in Y$ , 定义映射  $\psi: Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 使得

$$\psi(y) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m.$$

易证  $\phi$  和  $\psi$  都是拓扑同构映射, 从而  $\phi, \phi^{-1}, \psi, \psi^{-1}$  都是有界线性算子.

Step2. 设  $T: X \rightarrow Y$  是一个线性算子, 则  $T$  与  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^m$  的线性算子

$$\mathbb{A} = \psi \circ T \circ \phi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

一一对应. 下证  $\mathbb{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  是有界线性算子.

根据线性代数的知识可知, 存在一个  $n \times m$  矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times m}$ , 使得对任意  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ , 都有

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\xi = \xi A &= (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \xi_i a_{i1}, \sum_{i=1}^n \xi_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^n \xi_i a_{im} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}), \end{aligned}$$

从而


$$\begin{aligned} &|\mathbb{A}\xi|_m \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \xi_i (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}) \right|_m \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\xi_i| \cdot |(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})|_m \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n |(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})|_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\xi|_n \cdot \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

所以  $\mathbb{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  是有界线性算子.

Step3. 由于

$$T = \psi^{-1} \circ \mathbb{A} \circ \phi,$$

$\psi, \mathbb{A}, \phi$  都是有界线性算子, 则  $T$  也是有界线性算子. □

 **作业题 8.2** 设  $D = [a, b] \times [a, b] \subset \mathbb{R}^2$  是一个正方形区域, 三元函数  $k(x, y, u)$  在  $D \times \mathbb{R}^1$  上连续. 令

$$(K\phi)(x) = \int_a^b k(x, y, \phi(y)) dy, \quad \phi \in C[a, b].$$

证明  $K$  是从  $C[a, b]$  映入  $C[a, b]$  的全连续算子. (提示: 证明紧性需要用到 Ascoli-Arezela 定理.)

**证明** Step1. 由于  $k(x, y, u)$  在  $D \times \mathbb{R}^1$  上连续, 则对任意  $\phi \in C[a, b]$ ,  $K\phi$  也在  $[a, b]$  上连续, 即  $K\phi \in C[a, b]$ .

Step2. 下证  $K : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  是紧算子.

设  $S$  是  $C[a, b]$  中的有界集:

$$\|\phi\| \leq C, \quad \forall \phi \in S,$$

其中  $C > 0$  是正的常数. 则对任意  $x \in [a, b]$  以及任意  $\phi \in S$ , 有  $|\phi(x)| \leq C$ , 从而

$$|(K\phi)(x)| = \left| \int_a^b k(x, y, \phi(y)) dy \right| \leq \int_a^b M dy = M(b-a),$$

其中

$$M = \max_{\substack{(x,y) \in D \\ |u| \leq C}} |k(x, y, u)|.$$

所以  $\|k\phi\| \leq M(b-a)$ ,  $\forall \phi \in S$ , 即  $K(S)$  中的函数在  $[a, b]$  上一致有界.

另一方面, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 由于  $k(x, y, u)$  在  $D \times [-C, C]$  上一致连续, 则存在只依赖于  $\varepsilon$  的正数  $\delta > 0$ , 使得对任意  $x_1, x_2 \in [a, b]$  且  $|x_1 - x_2| < \delta$ , 有

$$|k(x_1, y, u) - k(x_2, y, u)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \forall u \in [a, b], |t| \leq C.$$

于是对任意  $\phi \in S$ , 有

$$\begin{aligned} & |(K\phi)(x_1) - (K\phi)(x_2)| \\ &= \left| \int_a^b [k(x_1, y, \phi(y)) - k(x_2, y, \phi(y))] dy \right| \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dy = \varepsilon. \end{aligned}$$

所以  $K(S)$  中的函数在  $[a, b]$  上等度连续. 根据 Ascoli-Arezela 定理,  $K(S)$  是  $C[a, b]$  中的列紧集, 从而  $K : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  是紧算子.

Step3. 下证  $K$  是连续算子.

设  $\{\phi_n\} \subset C[a, b]$ ,  $\phi_0 \in C[a, b]$  并且  $\|\phi_n - \phi_0\| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 则  $\{\phi_n\}$  是  $C[a, b]$  中的有界点列, 令

$$L = \sup \{\|\phi_0\|, \|\phi_1\|, \|\phi_2\|, \dots, \|\phi_n\|, \dots\}.$$

由于  $k(x, y, u)$  在  $D \times [-L, L]$  上一致连续, 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在只依赖于  $\varepsilon$  的正数  $\delta > 0$ , 使得对任意  $u_1, u_2 \in [-L, L]$  且  $|u_1 - u_2| < \delta$ , 有

$$|k(x, y, u_1) - k(x, y, u_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

由于  $\|\phi_n - \phi_0\| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 则存在正整数  $N$ , 使得对任意  $n > N$  有

$$\begin{aligned} & |(K\phi_n)(x) - (K\phi_0)(x)| \\ &= \left| \int_a^b [k(x, y, \phi_n(y)) - k(x, y, \phi_0(y))] dy \right| \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dy = \varepsilon, \end{aligned}$$

从而

$$\|K\phi_n - K\phi_0\| = \max_{x \in [a, b]} |(K\phi_n)(x) - (K\phi_0)(x)| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K\phi_n - K\phi_0\| = 0,$$

$K : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  是连续算子.

综上,  $K : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  是全连续算子.

□

 **作业题 8.3** 设  $X$  是一个 Banach 代数, 则对任意  $x \in X$ , 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

存在, 并且等于  $\inf_{n \geq 1} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ .

**证明** 令  $r = \inf_{n \geq 1} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ , 根据下极限的定义, 显然

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \geq r.$$



下证

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq r.$$

根据下确界的定义, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $m$  使得

$$r \leq \sqrt[m]{\|x^m\|} < r + \varepsilon. \quad (8.1)$$

另一方面, 对任意  $n \in \mathbb{N}_+$ , 存在非负整数  $k_n, l_n \in \mathbb{N}$ , 使得  $0 \leq l_n < m$  并且

$$n = k_n m + l_n.$$

由于

$$\|x^k\| \leq \|x\|^k, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

则利用赋范代数的定义和(8.1)式, 就有

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\|x^n\|} &= \sqrt[n]{\|x^{l_n} x^{k_n m}\|} \leq \sqrt[n]{\|x\|^{l_n} \cdot \|x^m\|^{k_n}} \\ &= \|x\|^{\frac{l_n}{n}} \cdot \|x^m\|^{\frac{k_n}{n}} < \|x\|^{\frac{l_n}{n}} \cdot (r + \varepsilon)^{\frac{mk_n}{n}}. \end{aligned}$$

由于

$$0 \leq \frac{l_n}{n} < \frac{m}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad 1 \geq \frac{mk_n}{n} = \frac{n - l_n}{n} = 1 - \frac{l_n}{n} > 1 - \frac{m}{n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{mk_n}{n} = 1,$$

从而

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \|x\|^{\frac{l_n}{n}} \cdot (r + \varepsilon)^{\frac{mk_n}{n}} \right) = \|x\|^0 \cdot (r + \varepsilon)^1 = r + \varepsilon.$$

由  $\varepsilon > 0$  的任意性可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq r.$$

综上, 极限


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

存在, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \inf_{n \geq 1} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

□

## 第 9 周

 **作业题 9.1** (连续线性算子的保范延拓) 设  $X$  是赋范线性空间,  $Y$  是 Banach 空间,  $D$  是  $X$  的线性子空间, 算子

$$T : D \rightarrow Y$$

是连续线性算子. 证明  $T$  能唯一地延拓到  $\overline{D}$  上成为连续线性算子

$$T_1 : \overline{D} \rightarrow Y,$$

使得  $\|T_1\| = \|T\|$  并且

$$T_1 x = T x, \quad \forall x \in D.$$

**证明** Step1. 任取  $x \in \overline{D}$ , 总存在点列  $\{x_n\} \subset D$ , 使得

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

由于  $T : D \rightarrow Y$  是连续线性算子, 从而也是有界线性算子, 存在常数  $C > 0$  使得

$$\|Tx\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in D. \quad (9.1)$$

于是对任意  $m, n \in \mathbb{N}_+$ , 有

$$\|Tx_m - Tx_n\| \leq C\|x_m - x_n\|. \quad (9.2)$$

由于  $\{x_n\}$  在  $X$  中收敛, 根据(9.2)式可知  $\{Tx_n\}$  就是  $Y$  中的 Cauchy 点列. 又因为  $Y$  是 Banach 空间, 所以  $\{Tx_n\}$  在空间  $Y$  中收敛, 设

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n,$$

下证  $y$  与点列  $\{x_n\}$  的选取无关. 若存在点列  $\{z_n\} \subset D$  使得

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n,$$

按上述过程同样可证  $\{Tz_n\}$  是  $Y$  中的收敛点列, 从而存在  $z \in Y$ , 使得

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} Tz_n.$$

由于

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_n\| = 0.$$

根据  $T$  的线性、有界性以及范数的连续性, 就有

$$\|y - z\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n - \lim_{n \rightarrow \infty} Tz_n \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n - z_n)\| \leq \|T\| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_n\|,$$

因此  $z = y$ .

这样就得到了  $X$  的闭子空间  $\overline{D}$  到  $Y$  的算子  $T_1 : \overline{D} \rightarrow Y$ , 使得

$$T_1 x = y = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n, \quad (9.3)$$

其中  $\{x_n\}$  是  $D$  中收敛于  $x$  的任意点列. 当  $x \in D$  时, 令  $x_n \equiv x, n \in \mathbb{N}_+$ , 于是

$$T_1 x = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx.$$

Step2. 下证  $T_1 : \overline{D} \rightarrow Y$  是连续线性算子.

对任意  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ , 任意  $x, z \in \overline{D}$ , 存在  $\{x_n\}, \{z_n\} \subset D$  使得

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

于是

$$\alpha x_n + \beta z_n \in D, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

$$\alpha x + \beta z = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta z_n),$$

从而根据  $T$  的线性和连续性就有

$$T_1(\alpha x + \beta z)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} T(\alpha x_n + \beta z_n) \\
&= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T x_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} T z_n \\
&= \alpha T_1 x + \beta T_1 z,
\end{aligned}$$

所以  $T_1$  是线性算子. 再根据范数的连续性就有

$$\|T_1 x\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T x_n \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T x_n\| \leq \|T\| \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|T\| \|x\|,$$

所以  $T_1$  是有界线性算子, 并且  $\|T_1\| \leq \|T\|$ .

Step3. 由 Step2 已证  $\|T_1\| \leq \|T\|$ . 另一方面,

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in D \\ x \neq 0}} \frac{\|T_1 x\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x \in \overline{D} \\ x \neq 0}} \frac{\|T_1 x\|}{\|x\|} = \|T_1\|.$$

因此  $\|T\| = \|T_1\|$ .

Step4. 设连续线性算子  $\tilde{T} : \overline{D} \rightarrow Y$  也满足  $\tilde{T}x = Tx$  ( $x \in D$ ) 并且  $\|T\| = \|\tilde{T}\|$ . 对任意  $x \in \overline{D}$ , 存在点列  $\{x_n\} \subset D$  使得  $x_n \rightarrow x$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 利用范数的连续性可知

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|T_1 x - \tilde{T}x\| \\
&= \left\| \left( \lim_{n \rightarrow \infty} T_1 x_n \right) - \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}x_n \right) \right\| \\
&= \left\| \left( \lim_{n \rightarrow \infty} T x_n \right) - \left( \lim_{n \rightarrow \infty} T x_n \right) \right\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \|T x_n - T x_n\| = 0,
\end{aligned}$$

从而  $T_1 x = \tilde{T}x$ . 由  $x \in \overline{D}$  的任意性可知  $T = \tilde{T}$ .


综上,  $T$  能唯一地延拓到  $\overline{D}$  上成为连续线性算子

$$T_1 : \overline{D} \rightarrow Y,$$

使得  $\|T_1\| = \|T\|$  并且

$$T_1 x = T x, \quad \forall x \in D.$$

□

 **作业题 9.2** 设  $k \in C[a, b]$ . 定义  $C[a, b]$  上的线性泛函

$$f(x) = \int_a^b k(t)x(t)dt, \quad \forall x \in C[a, b].$$

证明  $f$  是  $C[a, b]$  上的有界线性泛函, 并求出泛函  $f$  的范数  $\|f\|$ .

**证明** Step1. 显然,  $f$  是  $C[a, b]$  上的线性泛函. 对任意  $x \in C[a, b]$ , 有

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \left| \int_a^b k(t)x(t)dt \right| \\
&\leq \int_a^b |k(t)||x(t)|dt \\
&\leq \int_a^b |k(t)| \max_{t \in [a, b]} |x(t)| dt \\
&= \left( \int_a^b |k(t)| dt \right) \|x\|,
\end{aligned}$$

所以  $f$  是  $C[a, b]$  上的有界线性泛函, 并且

$$\|f\| \leq \int_a^b |k(t)| dt.$$

Step2. 令  $x(t) = \text{sign}k(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , 则

$$|k(t)| = k(t)x(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

由于  $k \in C[a, b]$ , 则  $x$  是  $[a, b]$  上的可测函数, 并且  $\sup_{t \in [a, b]} |x(t)| \leq 1$ .

由 Lusin 定理, 对任意  $n \in \mathbb{N}_+$ , 存在闭集  $F_n \subset [a, b]$  以及  $x_n \in C[a, b]$  使得

- (i)  $m([a, b] \setminus F_n) \leq \frac{1}{n}$ ;
- (ii)  $x_n(t) = x(t)$ ,  $\forall t \in F_n$ ;
- (iii)  $\|x_n\| = \max_{t \in [a, b]} |x_n(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |x(t)| \leq 1$ .

于是

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b k(t)x_n(t) dt - \int_a^b k(t)x(t) dt \right| \\ & \leq \int_a^b |k(t)| \cdot |x_n(t) - x(t)| dt \\ & = \left( \int_{F_n} + \int_{[a, b] \setminus F_n} \right) |k(t)| \cdot |x_n(t) - x(t)| dt \\ & = \int_{[a, b] \setminus F_n} |k(t)| \cdot |x_n(t) - x(t)| dt \\ & \leq \int_{[a, b] \setminus F_n} \max_{t \in [a, b]} |k(t)| \cdot (\max_{t \in [a, b]} |x_n(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|) dt \\ & \leq \frac{1}{n} \cdot 2K, \end{aligned}$$

其中  $K = \max_{t \in [a, b]} |k(t)|$ , 从而

$$\begin{aligned} \int_a^b |k(t)| dt &= \left| \int_a^b |k(t)| dt \right| = \left| \int_a^b k(t)x(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_a^b k(t)x_n(t) dt \right| + \frac{2K}{n} = |f(x_n)| + \frac{2K}{n} \\ &\leq \|f\| \|x_n\| + \frac{2K}{n} \leq \|f\| + \frac{2K}{n}, \end{aligned}$$

由  $n \in \mathbb{N}_+$  的任意性可得

$$\int_a^b |k(t)| dt \leq \|f\|.$$

综上,


$$\|f\| = \int_a^b |k(t)| dt.$$

□

### 定义 9.1. Schauder 基

设  $X$  是一个赋范线性空间,  $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}_+\}$  是  $X$  中的可数向量列. 如果对任意  $x \in X$ , 存在唯一的一列数  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots \in \mathbb{F}$ , 使得

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k,$$

则称  $\{e_k\}$  是  $X$  的一组 Schauder 基. 如果还有  $\|e_k\| = 1$  ( $\forall k \in \mathbb{N}_+$ ), 则称  $\{e_k\}$  是  $X$  的一组标准 Schauder 基. 

设  $1 \leq p < \infty$ . 对任意  $k \in \mathbb{N}_+$ , 取

$$e_k = (0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, \dots) \in l^p,$$

证明  $\{e_k\}$  是  $l^p$  的一组标准 Schauder 基.



**注意** 原题中  $1 \leq p \leq \infty$  是错误的.

**证明** Step1. 显然

$$\|e_k\|_p = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}_+.$$

对任意

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in l^p$$

以及任意  $n \in \mathbb{N}_+$ , 令

$$x_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots),$$

则  $x_n \in l^p$ , 并且

$$\|x - x_n\|_p^p = \|(0, \dots, 0, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots)\|_p^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k|^p.$$

由于  $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p < +\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\|_p^p = 0$ , 从而

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

Step2. 设存在数列  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots \in \mathbb{F}$ , 使得

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e_k.$$

令  $\tilde{x}_n = \sum_{k=1}^n \beta_k e_k = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots)$ , 则  $\tilde{x}_n \in l^p$  并且  $\tilde{x}_n \rightarrow x$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 于是存在  $M > 0$ , 使得

$$\sum_{k=1}^n |\beta_k|^p \leq \|\tilde{x}_n\|_p^p \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

从而级数  $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^p$  收敛, 即

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots) \in l^p.$$

令  $\gamma_k = \alpha_k - \beta_k$  ( $k \in \mathbb{N}_+$ ),  $z = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots)$ , 则  $z \in l^p$ . 另一方面, 按照 Step1 的过程可证

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k,$$

从而


$$(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \beta_k) e_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \tilde{x}_n) = 0,$$

于是

$$\alpha_k = \beta_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_+.$$

□

## 第 10 周

 **作业题 10.1** 设  $X$  是一个内积空间,  $M$  是  $X$  中的闭凸子集,  $x \in X$ . 证明:  $y_0 \in M$  是  $x$  在  $M$  中的最佳逼近元, 即

$$\|x - y_0\| = d(x, M),$$

当且仅当

$$\operatorname{Re} \langle x - y_0, y_0 - y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in M.$$

**证明** (充分性) 设  $y_0 \in M$  满足

$$\operatorname{Re} \langle x - y_0, y_0 - y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in M,$$

则对任意  $y \in M$ , 有

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|(x - y_0) - (y - y_0)\|^2 \\ &= \|x - y_0\|^2 + \|y - y_0\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle x - y_0, y - y_0 \rangle \\ &\geq \|x - y_0\|^2, \end{aligned}$$

所以

$$\|x - y_0\| = \inf_{y \in M} \|x - y\| = d(x, M).$$

(必要性) 设  $y_0 \in M$  是向量  $x$  在  $M$  中的最佳逼近元, 则对任意  $y \in M$ , 任意  $t \in [0, 1]$ , 就有

$$\bar{y} = (1 - t)y_0 + ty \in M,$$

并且

$$\begin{aligned} \|x - y_0\| &\leq \|x - \bar{y}\| \\ &= \|x - [(1 - t)y_0 + ty]\| \\ &= \|(x - y_0) - t(y - y_0)\|, \end{aligned}$$

从而

$$\|x - y_0\|^2 \leq \|(x - y_0) - t(y - y_0)\|^2.$$

按照内积空间中范数的定义将上式展开可得

$$t^2 \|x - y_0\|^2 \geq 2t \operatorname{Re} \langle x - y_0, y - y_0 \rangle, \quad \forall t \in [0, 1],$$

从而

$$t \|x - y_0\|^2 \geq 2 \operatorname{Re} \langle x - y_0, y - y_0 \rangle, \quad \forall t \in (0, 1].$$


上式中令  $t \rightarrow 0$  可得

$$\operatorname{Re}\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0, \quad \forall y \in M,$$

即

$$\operatorname{Re}\langle x - y_0, y_0 - y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in M.$$

□

 **作业题 10.2** 设  $X$  是一个内积空间,  $x_0 \in X$ , 实数  $r > 0$ . 令

$$M = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq r\}.$$

证明:

- (1)  $M$  是  $X$  中的闭凸子集;
- (2) 对任意  $x \in X$ , 令

$$y = \begin{cases} x_0 + r \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}, & x \notin M, \\ x, & x \in M. \end{cases}$$

则  $y$  是  $x$  在  $M$  中的最佳逼近元.

**证明** (1) 根据范数的连续性可知, 映射

$$x \mapsto \|x - x_0\|$$

是  $X$  上的连续映射, 所以

$$M = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$

是  $X$  中的闭集. 对任意  $x, y \in M$ , 任意  $t \in [0, 1]$ , 都有

$$\begin{aligned} \|tx + (1-t)y\| &\leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \\ &\leq tr + (1-t)r = r, \end{aligned}$$

所以  $M$  是  $X$  中的凸集.

综上,  $M$  是  $X$  中的闭凸集.

(2) 当  $x \in M$  时, 显然  $y = x$  是  $x$  在  $M$  中的最佳逼近元.

下设  $x \notin M$ , 则

$$\|x - x_0\| > r.$$

此时令

$$y = x_0 + r \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}.$$

对任意  $\bar{y} \in M$ , 就有

$$\begin{aligned} &\langle x - y, y - \bar{y} \rangle \\ &= \left\langle x - x_0 - r \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}, x_0 + r \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} - \bar{y} \right\rangle \\ &= \left\langle \left(1 - \frac{r}{\|x - x_0\|}\right)(x - x_0), (x_0 - \bar{y}) + \frac{r}{\|x - x_0\|}(x - x_0) \right\rangle \\ &= \left(1 - \frac{r}{\|x - x_0\|}\right) \left\langle x - x_0, (x_0 - \bar{y}) + \frac{r}{\|x - x_0\|}(x - x_0) \right\rangle \\ &= \left(1 - \frac{r}{\|x - x_0\|}\right) [\langle x - x_0, x_0 - \bar{y} \rangle + r\|x - x_0\|]. \end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式可得

$$|\operatorname{Re} \langle x - x_0, x_0 - \bar{y} \rangle| \leq \|x - x_0\| \|x_0 - \bar{y}\| \leq r\|x - x_0\|,$$

从而

$$\operatorname{Re} \langle x - x_0, x_0 - \bar{y} \rangle + r \|x - x_0\| \geq -(r \|x - x_0\|) + r \|x - x_0\| = 0.$$

综上,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \langle x - y, y - \bar{y} \rangle \\ &= \left( 1 - \frac{r}{\|x - x_0\|} \right) [\operatorname{Re} \langle x - x_0, x_0 - \bar{y} \rangle + r \|x - x_0\|] \geq 0, \end{aligned}$$

所以  $y$  也是  $x$  在  $M$  中的最佳逼近元.

□

## 第 11 周

### 作业题 11.1 证明:

#### 定理 11.1. Riesz-Fischer 定理

设  $\{e_i\}$  是  $L^2(\Omega)$  中的规范正交系, 则对任意  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2$ , 存在  $f \in L^2(\Omega)$ , 使得  $\|f\|_2 = \|x\|_2$  并且

$$\langle f, e_i \rangle = \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots$$



**证明** 对任意  $k \in \mathbb{N}_+$ , 令

$$S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i e_i \in L^2(\Omega).$$

对任意  $p \in \mathbb{N}_+$ , 由于  $\{e_i\}$  是  $L^2(\Omega)$  中的规范正交系, 则有

$$\|S_{k+p} - S_k\|_2^2 = \left\| \sum_{i=k+1}^{k+p} \xi_i e_i \right\|_2^2 = \sum_{i=k+1}^{k+p} |\xi_i|^2.$$

由于  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2$ , 根据上式可知  $\{S_k\}$  是  $L^2(\Omega)$  中的 Cauchy 点列. 由于  $L^2(\Omega)$  是 Banach 空间, 则存在  $f \in L^2(\Omega)$  使得

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \xi_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i.$$

对任意  $j \in \mathbb{N}_+$ , 根据内积对第一变元的连续性和线性, 就有

$$\langle f, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i, e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \langle e_i, e_j \rangle = \xi_j.$$

对任意  $k \in \mathbb{N}_+$ , 由于

$$\left\| \sum_{i=1}^k \xi_i e_i \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^k |\xi_i|^2,$$

根据范数的连续性以及  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2$  就有

$$\|f\|_2^2 = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \right\|_2^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^k \xi_i e_i \right\|_2^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |\xi_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 = \|x\|_2^2,$$

从而  $\|f\|_2 = \|x\|_2$ .

□



## 第 12 周

设  $e_0(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $e_1(t) = \cos t$ ,  $e_2(t) = \sin t$ ,  $e_3(t) = \cos 2t$ ,  $e_4(t) = \sin 2t$ ,  $\dots$ ,  $e_{2n-1}(t) = \cos nt$ ,  $e_{2n}(t) = \sin nt$ ,  $\dots$ . 令  $M = \{e_i\}_{i=0}^\infty$ , 我们已经知道,  $M$  是 Hilbert 空间

$$L^2[-\pi, \pi], \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in L^2[-\pi, \pi]$$

中的规范正交系.

按以下步骤证明, 三角函数系  $M$  是  $L^2[a, b]$  中的完全规范正交系.

**Step1.** 证明

**定理 12.1. Weierstrauss 三角逼近定理**

设  $f \in C[-\pi, \pi]$ , 并且  $f(-\pi) = f(\pi)$ , 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在三角多项式

$$T(t) = a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad t \in [-\pi, \pi],$$

使得

$$\max_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t) - T(t)| < \varepsilon.$$



**Step2.** 设  $T$  是  $[-\pi, \pi]$  上的一个三角多项式, 则  $T \in C[-\pi, \pi]$ , 同时也有  $T \in L^2[-\pi, \pi]$ . 证明:  $T$  关于三角函数系  $M$  满足 Parseval 等式, 即

$$\|T\|^2 = \sum_{e \in M} |\langle T, e \rangle|^2.$$

(提示: 根据三角函数系的两两正交性, 上述等式右边的级数其实是一个有限和. 计算三角多项式  $T$  的范数时也要利用三角函数系的两两正交性.)

**Step3.** 利用 Steklov 定理 (教材 P255 推论 2), 证明  $M$  是  $L^2[a, b]$  中的完全规范正交系.

**证明 Step1.** (Fejér 核方法) 由于  $f \in C[-\pi, \pi]$ , 则  $f \in L^2[-\pi, \pi]$ . 对任意  $e_k \in M$ ,  $f$  关于  $e_k$  的 Fourier 系数为

$$a_k = \langle f, e_k \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} f(t) dt, & k = 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, & k = 2n - 1, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt, & k = 2n. \end{cases}$$

记  $f$  的 Fourier 级数的前  $n$  项部分和为

$$S_n = \sum_{k=0}^n \langle f, e_k \rangle e_k = \sum_{k=0}^n a_k e_k,$$

则  $S_n \in C[-\pi, \pi] \subset L^2[-\pi, \pi]$ , 并且  $S_n(-\pi) = S_n(\pi)$ . 将 Fourier 系数代入, 得

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} \cos nt + a_{2k} \sin nt) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left[ \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ks \, ds \right) \cos kt + \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ks \, ds \right) \sin kt \right] \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos ks \cos kt + \sin ks \sin kt) \right] ds \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(s-t) \right] ds.
\end{aligned}$$

将  $S_n(t)$  和  $f(t)$  延拓成  $\mathbb{R}$  上的以  $2\pi$  为周期的连续函数, 并令  $\tau = s - t$ , 则

$$S_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(t+\tau) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\tau \right] d\tau.$$

注意到上式右端积分中的被积函数也是以  $2\pi$  为周期的连续函数, 因此在  $[-\pi-t, \pi-t]$  上的积分等于  $[-\pi, \pi]$  上的积分, 从而

$$S_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+\tau) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\tau \right] d\tau, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

注意到 (积化和差)

$$\cos kx \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left[ \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left( k - \frac{1}{2} \right) x \right],$$

则

$$\left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \right) \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x,$$

于是

$$S_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+\tau) \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \tau}{2 \sin \frac{\tau}{2}} d\tau, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

令

$$\begin{aligned}
\sigma_n(t) &= \frac{S_0(t) + S_1(t) + \cdots + S_{n-1}(t)}{n} \\
&= \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \left( k + \frac{1}{2} \right) \tau}{\sin \frac{\tau}{2}} \right] f(t+\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

显然,  $\sigma_n$  也是一个三角多项式. 注意到 (积化和差)

$$\sin \left( k + \frac{1}{2} \right) x \cdot \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} [\cos kx - \cos(k+1)x],$$

则

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) x = \frac{1 - \cos nx}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

令 (称为 Fejér 核)

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \left[ \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \right],$$

于是

$$\sigma_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(\tau) f(t+\tau) d\tau. \quad (12.1)$$

下证 Fejér 核  $\Phi_n(t)$  满足以下 3 条性质:

- (i)  $\Phi_n(x) \geq 0$ ;  
 (ii)  $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(x) dx = 1$ .  
 (iii) 对任意固定的  $\delta \in (0, \pi)$ , 记

$$\eta_n(\delta) = \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(x) dx = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(x) dx,$$

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(\delta) = 0$ .

性质 (i) 显然成立.

注意到 Fejér 核  $\Phi_n(t)$  和函数  $f$  无关. 当  $f(t) \equiv 1$  时,  $f$  关于  $e_k \in M$  的 Fourier 系数为

$$a_0 = \sqrt{2}; \quad a_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_+.$$

所以

$$S_n(t) \equiv S_0(t) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

从而

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) dt = \sigma_n(t) = \frac{S_0(t) + S_1(t) + \cdots + S_{n-1}(t)}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

性质 (ii) 得证.

当  $0 < \delta \leq x \leq \pi$  时,  $\sin \frac{x}{2} \geq \sin \frac{\delta}{2} > 0$ , 从而

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \left[ \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \right] \leq \frac{1}{2n\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

$$0 \leq \eta_n(\delta) \leq \frac{\pi - \delta}{2\pi \sin^2 \frac{\delta}{2}} \cdot \frac{1}{n},$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(\delta) = 0$ . 性质 (iii) 得证.

现在  $f$  已经延拓成了  $\mathbb{R}$  上的  $2\pi$  周期函数, 则  $f$  在  $\mathbb{R}$  上有界并且一致连续, 即存在  $M > 0$  使得

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$\forall x', x'' \in \mathbb{R} : |x' - x''| < \delta,$$

都有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

利用上述  $\delta > 0$  以及 Fejér 核  $\Phi_n(t)$  的性质 (ii), 我们有

$$\begin{aligned} f(t) - \sigma_n(t) &= \left( \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(\tau) d\tau \right) f(t) - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(\tau) d\tau f(t + \tau) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(\tau) [f(t) - f(t + \tau)] d\tau \\ &=: J_- + J_0 + J_+, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} J_- &= \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(\tau) [f(t) - f(t + \tau)] d\tau, \\ J_0 &= \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(\tau) [f(t) - f(t + \tau)] d\tau, \end{aligned}$$

$$J_+ = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(\tau) [f(t) - f(t + \tau)] d\tau,$$

利用 Fejér 核  $\Phi_n(t)$  的性质 (iii) 以及函数  $f$  的有界性和一致连续性, 就有

$$|J_-| \leq 2M\eta_n(\delta), \quad |J_+| \leq 2M\eta_n(\delta), \quad |J_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(\tau) d\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(\delta) = 0$ , 则存在正整数  $N$ , 使得对任意  $n > N$ , 都有

$$2M\eta_n(\delta) < \frac{1}{4}\varepsilon,$$

从而

$$|f(t) - \sigma_n(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall n > N.$$

令  $T(t) = \sigma_n(t)$ ,  $n > N$ , 则  $T$  是  $[-\pi, \pi]$  上的三角多项式并且

$$\max_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t) - T(t)| < \varepsilon.$$

**Step2.** 设  $T$  是  $[-\pi, \pi]$  上的三角多项式,

$$T(t) = a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \sum_{i=0}^{2m} c_i e_i(t), \quad t \in [-\pi, \pi],$$

其中

$$c_i = \begin{cases} a_0, & i = 0, \\ a_k, & i = 2k - 1 \\ b_k, & i = 2k. \end{cases}$$

由于  $M = \{e_i\}_{i=0}^{\infty}$  是  $L^2[-\pi, \pi]$  中的规范正交系, 则

$$\|T\|^2 = \sum_{i=0}^{2m} \|c_i e_i\|^2 = \sum_{i=0}^{2m} |c_i|^2.$$

另一方面, 对任意  $l \in \mathbb{N}$ , 由  $L^2[-\pi, \pi]$  中内积的定义, 就有

$$\begin{aligned} & \langle T, e_l \rangle \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \sum_{i=0}^{2m} c_i e_i(t) \right] \overline{e_l(t)} dt \\ &= \sum_{i=0}^{2m} c_i \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_i(t) \overline{e_l(t)} dt \right] \\ &= \sum_{i=0}^{2m} c_i \langle e_i, e_l \rangle \end{aligned}$$

由于  $M = \{e_i\}_{i=0}^{\infty}$  是  $L^2[-\pi, \pi]$  中的规范正交系, 则

$$\begin{cases} \langle T, e_l \rangle = c_l, & l \leq 2m, \\ \langle T, e_l \rangle = 0, & l > 2m. \end{cases}$$

综上,

$$\sum_{e \in M} |\langle T, e \rangle|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |\langle T, e_i \rangle|^2 = \sum_{i=0}^{2m} |c_i|^2 = \|T\|^2.$$

**Step3.** 将  $[-\pi, \pi]$  上的三角多项式全体集合记为  $\text{Tri}[-\pi, \pi]$ , 将  $[-\pi, \pi]$  上满足  $f(-\pi) = f(\pi)$  的连续函数全体集合记为  $C(\mathbb{T})$ , 显然  $\text{Tri}[-\pi, \pi] \subset C(\mathbb{T}) \subset L^2[-\pi, \pi]$ , 并且  $\text{Tri}[-\pi, \pi]$  和  $C(\mathbb{T})$  在  $L^2$ -范数

$$\|f\| = \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

下都是  $L^2[-\pi, \pi]$  的赋范线性子空间. 由 Step1, 对任意  $f \in C(\mathbb{T})$  以及任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $T \in \text{Tri}[-\pi, \pi]$  使得

$$\max_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t) - T(t)| < \sqrt{\pi} \varepsilon,$$

从而

$$\begin{aligned} \|f - T\| &= \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \max_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t) - T(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

所以  $\text{Tri}[-\pi, \pi]$  按照  $L^2$ -范数在  $C(\mathbb{T})$  中稠密.

下证  $C(\mathbb{T})$  按  $L^2$ -范数在  $C[-\pi, \pi]$  中稠密.

对任意  $f \in C[-\pi, \pi]$ , 以及任意  $n \in \mathbb{N}_+$ , 令

$$\phi_n(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [-\pi, \pi - \frac{2\pi}{n}] \\ k_n(t - \pi) + f(-\pi), & t \in (\pi - \frac{2\pi}{n}, \pi], \end{cases}$$

其中

$$k_n = \frac{f(-\pi) - f(\pi - \frac{2\pi}{n})}{\pi - (\pi - \frac{2\pi}{n})},$$

显然,  $\phi_n \in C(\mathbb{T})$ . 令  $C = \max_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)|$ , 则  $\max_{t \in [-\pi, \pi]} |\phi_n(t)| \leq C$ , 从而

$$\begin{aligned} \|f - \phi_n\|^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - \phi_n(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi - \frac{2\pi}{n}}^{\pi} |f(t) - \phi_n(t)|^2 dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\pi - \frac{2\pi}{n}}^{\pi} 4C^2 dt \\ &= \frac{C^2}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{2C^2}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

所以  $C(\mathbb{T})$  按  $L^2$ -范数在  $C[-\pi, \pi]$  中稠密.

将  $[-\pi, \pi]$  上的有界可测函数全体集合记为  $M_b[-\pi, \pi]$ , 显然在  $L^2$  范数下  $M_b[-\pi, \pi]$  也是  $L^2[-\pi, \pi]$  的赋范线性子空间. 下证  $C[-\pi, \pi]$  按  $L^2$ -范数在  $M_b[-\pi, \pi]$  中稠密.

任取  $f \in M_b[-\pi, \pi]$ , 设

$$|f(x)| \leq K, \quad a.e. \ x \in [-\pi, \pi].$$

对任意  $\varepsilon > 0$ , 由 Lusin 定理, 存在  $[-\pi, \pi]$  上的连续函数  $g$  以及闭集  $F \subset [-\pi, \pi]$  使得

- (i)  $f(t) = g(t), \forall t \in F$ ;
- (ii)  $m([- \pi, \pi] \setminus F) < \frac{\varepsilon^2}{4K^2}$ ;
- (iii)  $\max_{t \in [-\pi, \pi]} |g(t)| \leq K$ .

于是,

$$\begin{aligned}
 & \|f - g\|^2 \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt \\
 &= \int_{[-\pi, \pi] \setminus F} |f(t) - g(t)|^2 dt \\
 &\leq 4K^2 m([- \pi, \pi] \setminus F) \\
 &< \varepsilon^2,
 \end{aligned}$$

即  $\|f - g\| < \varepsilon$ . 所以  $C[-\pi, \pi]$  按  $L^2$ -范数在  $M_b[-\pi, \pi]$  中稠密.

下证  $M_b[-\pi, \pi]$  按  $L^2$ -范数在  $L^2[-\pi, \pi]$  中稠密.

任取  $f \in L^2[-\pi, \pi]$ , 对任意  $n \in \mathbb{N}_+$ , 令

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & |f(t)| \leq n, \\ 0, & |f(t)| > n, \end{cases}$$

则  $f_n \in M_b[-\pi, \pi]$ , 并且

$$\|f_n - f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 dt = \int_{\{t \in [-\pi, \pi] \mid |f(t)| > n\}} |f(t)|^2 dt,$$

从而

$$\|f\|^2 \geq \int_{\{t \in [-\pi, \pi] \mid |f(t)| > n\}} |f(t)|^2 dt \geq n^2 m\{t \in [-\pi, \pi] \mid |f(t)| > n\},$$

即

$$m\{t \in [-\pi, \pi] \mid |f(t)| > n\} \leq \frac{1}{n^2} \|f\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+. \quad (12.2)$$

由于  $|f|^2 \in L^1[-\pi, \pi]$ , 由积分的绝对连续性 (教材 P113), 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对于任意的可测集  $A \subset [-\pi, \pi]$  且  $m(A) < \delta$ , 都有

$$\int_A |f(t)|^2 dt < \varepsilon^2.$$

另一方面, 根据(12.2)式, 对上述  $\delta > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得对任意  $n > N$ , 都有

$$m\{t \in [-\pi, \pi] \mid |f(t)| > n\} < \delta,$$

从而

$$\|f_n - f\|^2 = \int_{\{t \in [-\pi, \pi] \mid |f(t)| > n\}} |f(t)|^2 dt < \varepsilon^2,$$

即


$$\|f_n - f\| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

所以  $M_b[-\pi, \pi]$  按  $L^2$ -范数在  $L^2[-\pi, \pi]$  中稠密.

综上, 按照稠密性的传递关系,  $\text{Tri}[-\pi, \pi]$  按照  $L^2$ -范数在  $L^2[-\pi, \pi]$  中稠密. 由 Step2 可知, 对任意  $f \in \text{Tri}[-\pi, \pi]$ ,  $f$  关于规范正交系  $M$  成立 Parseval 等式. 根据 Steklov 定理 (教材 P255 推论 2),  $M$  是  $L^2[\pi, \pi]$  中的完全规范正交系.

□

## 第 13 周

 **作业题 13.1** (内积空间上算子的范数) 设  $X$  为复内积空间,  $A \in \mathbf{B}(X \rightarrow X)$ , 证明:

(1)

$$\|A\| = \sup_{\substack{x, y \in X, \\ x \neq 0, y \neq 0}} \frac{|\langle Ax, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|};$$

(2) 若  $A$  还是自伴算子, 即

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \forall x, y \in X,$$

则

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in X, \\ x \neq 0}} \frac{|\langle Ax, x \rangle|}{\|x\|^2}.$$

**证明** (1) 对任意  $x, y \in X$ , 由 Cauchy-Schwartz 不等式可得

$$|\langle Ax, y \rangle| \leq \|Ax\| \cdot \|y\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|,$$

从而

$$\sup_{\substack{x, y \in X, \\ x \neq 0, y \neq 0}} \frac{|\langle Ax, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq \|A\|.$$

另一方面, 当  $x \neq 0$  并且  $Ax \neq 0$  时, 有

$$\frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\langle Ax, Ax \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \cdot \frac{\langle Ax, Ax \rangle}{\|x\| \cdot \|Ax\|} \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \cdot \sup_{\substack{x, y \in X, \\ x \neq 0, y \neq 0}} \frac{|\langle Ax, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|},$$

从而

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x, y \in X, \\ x \neq 0, y \neq 0}} \frac{|\langle Ax, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|}, \quad \forall x \neq 0,$$

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in X, \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x, y \in X, \\ x \neq 0, y \neq 0}} \frac{|\langle Ax, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

综上,

$$\|A\| = \sup_{\substack{x, y \in X, \\ x \neq 0, y \neq 0}} \frac{|\langle Ax, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

(2) 设

$$\nu(A) = \sup_{\substack{x \in X, \\ x \neq 0}} \frac{|\langle Ax, x \rangle|}{\|x\|^2},$$

只需证  $\|A\| = \nu(A)$ .

对任意  $x \in X$ , 由 Cauchy-Schwartz 不等式可得

$$|\langle Ax, x \rangle| \leq \|Ax\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|^2,$$

从而

$$\|A\| \geq \sup_{\substack{x \in X, \\ x \neq 0}} \frac{|\langle Ax, x \rangle|}{\|x\|^2} = \nu(A).$$

另一方面, 若  $\langle Ax, y \rangle = 0, \forall x, y \in X$ , 则  $A = 0, \|A\| = \nu(A) = 0$ . 若存在  $x, y \in X$ , 使得  $\langle Ax, y \rangle \neq 0$ , 则

$$|\langle Ax, y \rangle| = \frac{\langle Ax, y \rangle \overline{\langle Ax, y \rangle}}{|\langle Ax, y \rangle|} = \langle A\tilde{x}, y \rangle,$$

其中

$$\tilde{x} = \frac{\overline{\langle Ax, y \rangle}}{|\langle Ax, y \rangle|} x.$$

由于  $\langle A\tilde{x}, y \rangle = |\langle Ax, y \rangle| \in \mathbb{R}$ , 则

$$\langle A\tilde{x}, y \rangle = \langle y, A\tilde{x} \rangle.$$

又因为  $A$  是自伴算子, 则

$$\langle y, A\tilde{x} \rangle = \langle Ay, \tilde{x} \rangle.$$

于是

$$\begin{aligned} |\langle Ax, y \rangle| &= \langle A\tilde{x}, y \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\langle A\tilde{x}, y \rangle + \langle Ay, \tilde{x} \rangle) \\ &= \frac{1}{4} (\langle A(\tilde{x} + y), \tilde{x} + y \rangle - \langle A(\tilde{x} - y), \tilde{x} - y \rangle) \\ &\leq \frac{1}{4} (\nu(A) \|\tilde{x} + y\|^2 + \nu(A) \|\tilde{x} - y\|^2) \\ &= \frac{1}{2} \nu(A) (\|\tilde{x}\|^2 + \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{2} \nu(A) (\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

根据本题 (1) 部分的结论, 就有

$$\|A\| = \sup_{\substack{x, y \in X, \\ x \neq 0, y \neq 0}} \frac{|\langle Ax, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} = \sup_{\substack{\|x\|=1, \\ \|y\|=1}} |\langle Ax, y \rangle| \leq \nu(A).$$

综上,

$$\|A\| = \nu(A) = \sup_{\substack{x \in X, \\ x \neq 0}} \frac{|\langle Ax, x \rangle|}{\|x\|^2}.$$

□