§11.2 无穷积分的性质与敛散判别

一. 无穷积分的性质

无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 的收敛性 $\Longleftrightarrow$ 函数 $F(u)=\int_a^u f(x)\,dx$ 在 $u\to+\infty$ 时的收敛性.

定理1 (充要条件1)

无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists M\geq a$, s.t. $\forall u_1, u_2\geq M$, 有

$$\left|\int_a^{u_1} f(x)\,dx-\int_a^{u_2} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

(极限 $\lim\limits_{u\to+\infty} F(u)$ 存在的 Cauchy 收敛准则)

性质1. 若 $\int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f_2(x)\,dx$ 都收敛, $k_1, k_2\in\mathbb{R}$, 则

$\int_a^{+\infty}[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]\,dx$ 也收敛, 并且

$$\int_a^{+\infty}[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]\,dx = k_1\int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx + k_2\int_a^{+\infty} f_2(x)\,dx.$$

(结合定积分和极限运算的线性性质)

性质2. 设对 $\forall u\geq a$, f 都在 $[a,u]$ 上可积. 若 $a<b$, 则

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 与 $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ 同敛态. (即同时收敛或同时发散).

并且同时收敛时, 有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx.$$

定理2. (充要条件2)

无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M\geq a$, s.t. $\forall u\geq M$, 有

$$\left|\int_u^{+\infty} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

证: ($\Longrightarrow$) 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛, 则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M\geq a$. s.t. $\forall u\geq M$, 有

$$\left|\int_a^u f(x)\,dx - \int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

由性质2, $\quad \left|\int_u^{+\infty} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$, $\forall u \geqslant M$.

($\Leftarrow$) 设对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists M \geqslant a$, s.t. $\forall u \geqslant M$, 有

$$\left|\int_u^{+\infty} f(x)\,dx\right| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad (1)$$

另一方面, 由于 $\int_u^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{v\to+\infty}\int_u^v f(x)\,dx$, 则 $\exists M' \geqslant M$, s.t.

$\forall v \geqslant M'$, 有 $\quad \left|\int_u^v f(x)\,dx - \int_u^{+\infty} f(x)\,dx\right| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad (2).$

结合(1)(2)式, 可得

$$\left|\int_u^v f(x)\,dx\right| \overset{(2)}{<} \left|\int_u^{+\infty} f(x)\,dx\right| + \frac{1}{2}\varepsilon \overset{(1)}{<} \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon, \quad \forall u, v \geqslant M'$$

再由定理1, 可知 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛.

<u>性质3</u>. 设<u>对 $\forall u \geqslant a$, f 在 $[a,u]$ 上可积</u>, 并且 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ 收敛,

则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 也收敛, 并且

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

证: 由于 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ 收敛, 由定理1, 对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists M \geqslant a$, s.t. $\forall u_2 > u_1 \geqslant M$,

有 $\quad \int_{u_1}^{u_2} |f(x)|\,dx = \left|\int_{u_1}^{u_2} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon$,

从而由定积分的绝对值不等式, 就有

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{u_1}^{u_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon, \quad \forall u_2 > u_1 \geqslant M,$$

再由定理1, 可知 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛.

由于 $\left|\int_a^u f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^u |f(x)|\,dx$, $\forall u \geqslant a$, 令 $u\to+\infty$, 可得

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

注：条件"$\forall u \geq a$，f 在 $[a,u]$ 上可积"不可缺少。

反例. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \in [1,+\infty) \cap \mathbb{Q} \\ -\frac{1}{x^2}, & x \in [1,+\infty) \cap \mathbb{Q}^c \end{cases}$，则对 $\forall u > 1$，f 在 $[1,u]$ 上

不可积，（对于 $[1,u]$ 内的任何小区间 Δ_i，$\omega_i^f \geq \frac{2}{u^2}$）

不存在无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. 但是 $|f(x)| = \frac{1}{x^2}$，$x \in [1,+\infty)$，

$\int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx$ 收敛。

定义：设对 $\forall u \geq a$，f 在 $[a,u]$ 上可积.

(i) 若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ 收敛，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 绝对收敛；

(ii) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，但 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ 发散，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 条件收敛.

二. 非负函数无穷积分的敛散判别

函数极限的单调有界定理

若 F 在 $[a,+\infty)$ 上增且有上界，则极限 $\lim\limits_{u\to+\infty} F(u)$ 存在，并且

$$\lim_{u\to+\infty} F(u) = \sup_{u\in[a,+\infty)} F(u).$$

若 f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，$f(x) \geq 0$，并且对 $\forall u \geq a$，f 在 $[a,u]$ 上可积，

则 $F(u) = \int_a^u f(x)\,dx$ 是 $[a,+\infty)$ 上的增函数.

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $F(u)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有上界.

问题：不直接求出 $\int_a^u f(x)\,dx$，如何判断 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛？

定理3（比较原则）

设 f, g 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，并且 $\forall u \geq a$，f 和 g 在 $[a,u]$ 上可积，

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a,+\infty),$$

则 (i) 若 $\underline{\int_a^{+\infty} g(x)dx}$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛，并且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$.

(ii) 若 $\underline{\int_a^{+\infty} f(x)dx}$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 也发散.

证：(i) 由于 $f(x) \leq g(x)$，则对 $\forall u \geq a$，由定积分的保不等式性，有

$$\int_a^u f(x)dx \leq \int_a^u g(x)dx \qquad (1)$$

由于 g 在 $[a,+\infty)$ 上非负，且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，则

$$0 \leq \int_0^u g(x)dx \leq \lim_{u\to+\infty}\int_0^u g(x)dx = \int_a^{+\infty} g(x)dx. \qquad (2)$$

由(1)(2)式以及函数极限的单调有界定理，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，并且

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx \leq \lim_{u\to+\infty}\int_a^u g(x)dx = \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

(ii) 由于 $\int_a^u f(x)dx$ 与 $\int_a^u g(x)dx$ 增且 $f(x) \leq g(x)$，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，

则 $\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx = +\infty$。从而对 $\boxed{\forall G>0}$，$\boxed{\exists M \geq a}$，s.t.

$\boxed{\forall u \geq M}$，有

$$\boxed{\int_a^u g(x)dx} \geq \int_a^u f(x)dx > G,$$

所以 $\lim_{u\to+\infty}\int_a^u g(x)dx = +\infty$，即 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散于 $+\infty$.

例1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}dx$ 敛散性

解：$f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 连续.

$$|f(x)| = \left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [0,+\infty).$$

由于 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$，由比较原则可知 $\int_0^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛.

从而 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

Ex2. 设 f 与 g 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，对 $\forall u>a$，f 和 g 在 $[a,u]$ 上可积，

若 $\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g^2(x)dx$ 都收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]^2dx$

都收敛.

证：由于 $\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g^2(x)dx$ 都收敛，则 $\int_a^{+\infty}[f^2(x)+g^2(x)]dx$ 也收敛.

由于 $|f(x)g(x)|\le\frac{1}{2}[f^2(x)+g^2(x)]$，

$$[f(x)+g(x)]^2=f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x)$$
$$\le 2[f^2(x)+g^2(x)],$$

由比较原则可知，$\int_a^{+\infty}|f(x)g(x)|dx$ 与 $\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]^2dx$ 都收敛，

从而 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 收敛.

Ex3. 设 f,g,h 是 $[a,+\infty)$ 上的连续函数，且 $h(x)\le f(x)\le g(x)$，

(1) 若 $\int_a^{+\infty}h(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 都收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛；

(2) 若 $\int_a^{+\infty}h(x)dx=\int_a^{+\infty}g(x)dx=A$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx=A$.

（A 可以是实数，$+\infty$ 或 $-\infty$，不能是 ∞）

证：(1) 令 $p(x)=f(x)-h(x)$，$q(x)=g(x)-h(x)$，由于 $h(x)\le f(x)\le g(x)$，

则 $0\le p(x)\le q(x)$.

由于 $\int_a^{+\infty}h(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 都收敛，则 $\int_a^{+\infty}q(x)dx$ 也收敛，由比较

原则可知，$\int_a^{+\infty}p(x)dx$ 收敛，又因为 $f(x)=p(x)+h(x)$，则

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

(2) 由于 $h(x) \le f(x) \le g(x)$, 并且 f, g, h 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 则对 $\forall u > a$,

有 $\int_a^u h(x)dx \le \int_a^u f(x)dx \le \int_a^u g(x)dx$.

由于 $\lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u h(x)dx = \int_a^{+\infty} h(x)dx = A$,

$\lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u g(x)dx = \int_a^{+\infty} g(x)dx = A$,

则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx = A$.

Ex7. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 则 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛.

证: $\left(f^2(x) < |f(x)| \right)$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 则对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists M \ge a$, s.t. $\forall x \ge M$, 有

$|f(x)| < \frac{1}{2}$,

从而 $f^2(x) = |f(x)|^2 < |f(x)|$, $\forall x \ge M$.

由于 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛, 则 $\int_M^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛, 由比较原则,

$\int_M^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛, 从而 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛.

比较原则的推论

推论1 (比值判别法)

设 f 和 g 在 $[a,+\infty)$ 上有定义. 对 $\forall u \ge a$, f 和 g 在 $[a,u]$ 上可积.

$f(x) \ge 0$, $g(x) > 0$, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = c$, 则有

(i) 当 $0 < c < +\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛态;

(ii) 当 $c=0$ 时，若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛；

(iii) 当 $c=+\infty$ 时，若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也发散.

证：(i) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c\in(0,+\infty)$，则对 $\forall\,\varepsilon\in(0,\frac{1}{2}c)$，$\exists M\geqslant a$，s.t. $\forall x\geqslant M$，有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-c\right|<\varepsilon,$$

从而 $$0<c-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<c+\varepsilon,$$

$$0<(c-\varepsilon)g(x)<f(x)<(c+\varepsilon)g(x),\quad \forall x\geqslant M.$$

由比较原则可知，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛态.

(ii) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，则对 $\varepsilon=1$，$\exists M\geqslant a$. s.t. $\forall x\geqslant M$，有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<\varepsilon=1,$$

从而 $$0\leqslant f(x)<g(x),\quad \forall x\geqslant M,$$

由比较原则可知，若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

(iii) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$，则对 $G=1$，$\exists M\geqslant a$. s.t. $\forall x\geqslant M$，有

$$\frac{f(x)}{g(x)}>G=1,$$

从而 $$0<g(x)<f(x),\quad \forall x\geqslant M.$$

由比较原则可知，若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也发散.

<u>推论2</u> (Cauchy 判别法)

设 f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，$a>0$，对 $\forall u\geqslant a$，f 在 $[a,u]$ 上可积.

(i) 若 $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{x^p}$，$x\in[a,+\infty)$，并且 $p>1$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；

(ii) 若 $f(x) \geqslant \frac{1}{x^p}$, $x \in [a,+\infty)$. 并且 $p \le 1$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

推论2 (Cauchy 判别法)

设 f 是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数。对 $\forall u \geqslant a$, f 在 $[a,u]$ 上可积,

并且 $$\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = \lambda.$$

(i) 若 $p>1$, $0 \le \lambda < +\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

(ii) 若 $p \le 1$, $0 < \lambda \le +\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

证: (i) 设 $p>1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = \lambda \in [0,+\infty)$, 则对 $\varepsilon = 1$, $\exists M \geqslant a$ 且 $M>0$

s.t. $\forall x \geqslant M$, 有

$$\left| x^p f(x) - \lambda \right| < \varepsilon = 1.$$

从而 $$0 \le x^p f(x) < 1+\lambda, \ \forall x \geqslant M.$$

$$0 \le f(x) < (1+\lambda) \cdot \frac{1}{x^p}, \ \forall x \geqslant M.$$

由于 $\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 收敛, 则 由比较原则, $\int_M^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

从而 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

(ii) 设 $p \le 1$, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = \lambda \in (0,+\infty]$, 则对 $G = \min\{1, \frac{1}{2}\lambda\} > 0$,

当$\lambda \in (0,+\infty)$, $G \le \frac{1}{2}\lambda$

$\exists M \geqslant a$ 且 $M>0$, s.t. $\forall x \geqslant M$, 有

$$x^p f(x) \geqslant G, \ \forall x \geqslant M.$$

从而 $$0 < G \cdot \frac{1}{x^p} \le f(x), \ \forall x \geqslant M.$$

由于 $\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 发散, 由比较原则可知 $\int_M^{+\infty} f(x)dx$ 也发散,

从而 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

例2. 敛散性

(1) $\int_1^{+\infty} x^2 e^{-x}dx$ (2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}dx$

解: (1) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot x^2 e^{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2+2}}{e^x} = 0$, $(p=2>1,\ \lambda=0)$

则由推论3, $\int_1^{+\infty} x^2 e^{-x}dx$ 收敛

(2) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x^5+1}} = 1$, $(p=\frac{1}{2}<1,\ \lambda=1)$

则由推论3, $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}dx$ 发散.

三. 一般无穷积分的敛散判别

($\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 的敛散)

定理4 (Dirichlet 判别法)

设 (i) f 和 g 在 $[a,+\infty)$ 上有定义;

(ii) 对 $\forall u>a$, f 在 $[a,u]$ 上可积, 并且 $F(u)=\int_a^u f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界;

(iii) g 在 $[a,+\infty)$ 上单调并且 $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$.

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

证: 只需证, 对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists M\geq a$, s.t. 对 $\forall u_2>u_1\geq M$, 有

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)dx\right| < \varepsilon.$$

g 单调, 则 $\exists\xi\in[u_1,u_2]$, s.t.

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)dx\right| = \left|g(u_1)\int_{u_1}^{\xi} f(x)dx + g(u_2)\int_{\xi}^{u_2} f(x)dx\right|$$

$$\leq |g(u_1)|\cdot\left|\int_{u_1}^{\xi} f(x)dx\right| + |g(u_2)|\cdot\left|\int_{\xi}^{u_2} f(x)dx\right|$$

$$= |g(u_1)|\cdot\left|\int_a^{\xi} f(x)dx - \int_a^{u_1} f(x)dx\right| + |g(u_2)|\cdot\left|\int_a^{u_2} f(x)dx - \int_a^{\xi} f(x)dx\right|$$

由条件(ii)，$\exists C>0$. s.t.

$$|F(u)| = \left|\int_a^u f(x)\,dx\right| \le C,\quad \forall u\in[a,+\infty).$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$，则对于上述 $\varepsilon>0$，$\exists M\geq a$. s.t. $\forall x\geq M$，有

$$|g(x)| < \frac{1}{4C}\varepsilon.$$

由于 g 为 $[a,+\infty)$ 上的单调函数，则由积分第二中值定理的推论，

对 $\forall u_2>u_1\geq M$，$\exists \xi\in[u_1,u_2]$，s.t.

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)\,dx\right| = \left|g(u_1)\int_{u_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(u_2)\int_{\xi}^{u_2} f(x)\,dx\right|$$

$$\le |g(u_1)|\cdot\left|\int_{u_1}^{\xi} f(x)\,dx\right| + |g(u_2)|\cdot\left|\int_{\xi}^{u_2} f(x)\,dx\right|$$

$$= |g(u_1)|\cdot\left|\int_a^{\xi} f(x)\,dx - \int_a^{u_1} f(x)\,dx\right| + |g(u_2)|\cdot\left|\int_a^{u_2} f(x)\,dx - \int_a^{\xi} f(x)\,dx\right|$$

$$\le |g(u_1)|\cdot\left(\left|\int_a^{\xi} f(x)\,dx\right| + \left|\int_a^{u_1} f(x)\,dx\right|\right)$$

$$+\ |g(u_2)|\cdot\left(\left|\int_a^{u_2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_a^{\xi} f(x)\,dx\right|\right)$$

$$< \frac{1}{4C}\varepsilon\cdot 2C + \frac{1}{4C}\varepsilon\cdot 2C = \varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛.

<u>定理5</u>（Abel 判别法）

若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，g 在 $[a,+\infty)$ 上单调且有界，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛.

证：（方法1）由条件，$\exists C>0$. s.t.

$$|g(x)| \le C,\quad \forall x\in[a,+\infty).$$

对 $\boxed{\forall\varepsilon>0}$，由于 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，则存在 $\boxed{M\geq a}$，s.t. 对 $\forall \eta>\xi\geq M$，有

$$\left|\int_{\xi}^{\eta} f(x)\,dx\right| < \frac{1}{2C}\varepsilon .$$

由于 g 在 $[a,+\infty)$ 上单调，由积分第二中值定理的推论，对 $\boxed{\forall u_2 > u_1 \geq M}$，

$\exists \xi \in [u_1, u_2]$，s.t.

$$\begin{aligned}
\underline{\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x) g(x)\,dx\right|} &= \left| g(u_1)\int_{u_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(u_2)\int_{\xi}^{u_2} f(x)\,dx \right| \\
&\leq |g(u_1)| \cdot \left|\int_{u_1}^{\xi} f(x)\,dx\right| + |g(u_2)| \cdot \left|\int_{\xi}^{u_2} f(x)\,dx\right| \\
&< C \cdot \frac{1}{2C}\varepsilon + C \cdot \frac{1}{2C}\varepsilon \\
&= \varepsilon .
\end{aligned}$$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_a^{+\infty} f(x) g(x)\,dx$ 收敛。

（方法2. Ex10）由于 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，则一方面，对 $\forall u \geq a$，f 在 $[a,u]$ 上可积，从而可定义 $F(u) = \int_a^u f(x)\,dx$，$u \in [a,+\infty)$。另一方面，$F(u)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{u\to+\infty} F(u) = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$，则 F 在 $[a,+\infty)$ 上有界。

由于 g 在 $[a,+\infty)$ 上单调且有界，则由单调有界定理，$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$，s.t.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \alpha .$$

令 $\tilde{g}(x) = g(x) - \alpha$，则 $\tilde{g}$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调并且

$$\lim_{x\to+\infty} \tilde{g}(x) = 0 .$$

由 Dirichlet 判别法，$\int_a^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)\,dx$ 收敛。由于

$$f(x) g(x) = f(x)\tilde{g}(x) + \alpha f(x),$$

并且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x) g(x)\,dx$ 也收敛。

例13 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$ $(p>0)$ 的敛散性

解：令 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\frac{1}{x^p}$，$x\in[1,+\infty)$，则

$$F(u)=\int_1^u f(x)dx=\int_1^u \sin x dx = \cos 1-\cos u\ ,\ u\in[1,+\infty),$$

F 在 $[1,+\infty)$ 上有界，g 在 $[1,+\infty)$ 上减并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，

由 Dirichlet 判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 收敛.

同理可证 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$ 也收敛.

① 当 $p>1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 收敛，由于

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\le\frac{1}{x^p}\ ,\ x\in[1,+\infty),$$

由比较原则可知，$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|dx$ 收敛，从而 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 绝对收敛.

② 当 $0<p\le1$ 时，对 $\forall x\in[1,+\infty)$，有

$$0<x^p\le x\ ,$$

从而

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|=\frac{|\sin x|}{x^p}\ge\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{\frac12-\frac12\cos 2x}{x}=\frac12\cdot\frac1x-\frac{\cos 2x}{2x}\ ,\quad (1)$$

$$\left|\frac{\cos x}{x^p}\right|=\frac{|\cos x|}{x^p}\ge\frac{\cos^2 x}{x}=\frac{\frac12+\frac12\cos 2x}{x}=\frac12\cdot\frac1x+\frac{\cos 2x}{2x}\ ,\quad (2)$$

对 $\forall u\ge1$，$\int_1^u\frac{\cos 2x}{2x}dx\xlongequal{t=2x}\frac12\int_2^{2u}\frac{\cos t}{t}dt$，由 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ 收敛，

则 $\int_2^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$ 也收敛，从而 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx$ 也收敛.

又因为 $\int_1^{+\infty}\frac1x dx$ 发散，则由 (1) (2) 式可知，

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}dx$ 都发散

再由比较原则，$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|dx$ 与 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^p}\right|dx$ 都发散.

综上，当 $p>1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$ 都绝对收敛；

当 $0<p\le 1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$ 都条件收敛。

注：Abel判别中，若条件"g 在 $[a,+\infty)$ 上单调且有界"改为"g 在 $[a,+\infty)$ 上有界"，则结论不一定成立。

反例：$f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$g(x)=\sin x$，$x\in[1,+\infty)$，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛，但是 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 发散。

注：$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ 不是瑕积分，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 的任何去心右邻域都有界，所以 $x=0$ 并不是 $\frac{\sin x}{x}$ 的瑕点。

令 $\tilde{f}(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ \frac{\sin x}{x}, & x\in(0,1]\end{cases}$，则 $\tilde{f}$ 在 $[0,1]$ 上连续，

$$\int_0^1\tilde{f}(x)dx=\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx.$$

从而 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 是条件收敛的无穷积分。（Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$）

例14. 证明

$$\int_1^{+\infty}\sin x^2dx,\quad \int_1^{+\infty}\cos x^2dx,\quad \int_1^{+\infty}x\sin x^4dx$$

条件收敛。

证：对 $\forall u\geqslant 1$，有

$$\int_1^u\sin x^2dx \xlongequal{t=x^2} \frac{1}{2}\int_1^{u^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt,\quad \int_1^u|\sin x^2|dx=\frac{1}{2}\int_1^{u^2}\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right|dt$$

$$\int_1^u\cos x^2dx \xlongequal{t=x^2} \frac{1}{2}\int_1^{u^2}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt,\quad \int_1^u|\cos x^2|dx=\frac{1}{2}\int_1^{u^2}\left|\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right|dt.$$

$$\int_1^u x\sin x^4dx \xlongequal{t=x^2} \frac{1}{2}\int_1^{u^2}\sin t^2dt,\quad \int_1^u|x\sin x^4|dx=\int_1^u x|\sin x^4|dx=\frac{1}{2}\int_1^{u^2}|\sin t^2|dt.$$

由于 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$ 都条件收敛，则

$\int_1^{+\infty}\sin x^2 dx$ 与 $\int_1^{+\infty}\cos x^2 dx$ 都条件收敛，从而

$\int_1^{+\infty} x\sin x^4 dx$ 条件收敛.

注：（§11.1 Ex4）$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，并且 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，

不一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Ex6 举例说明：① $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 不一定收敛.

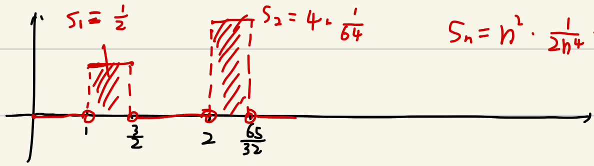
② $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 绝对收敛时，$\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 不一定收敛.

解：① $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$，$x\in[1,+\infty)$，则 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$（条件）收敛，

$f^2(x)=\frac{\sin^2 x}{x}$，$x\in[1,+\infty)$，$\int_1^{+\infty}f^2(x)dx$ 发散.

② 定义 $f(x)$ 为

$$f(x)=\begin{cases} n^2, & x\in[n,n+\frac{1}{2n^4}],\ n=1,2,\cdots, \\ 0, & x\in[0,+\infty) \text{ 且 } x\notin[n,n+\frac{1}{2n^4}]. \end{cases}$$



$S_n=n^2\cdot\frac{1}{2n^4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$

对 $\forall u\geq 0$，f 在 $[0,u]$ 只有有限多个跳跃间断点，所以 f 在 $[0,u]$ 上可积.

$\lim\limits_{u\to+\infty}\int_0^u f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}(S_1+S_2+S_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2})=\frac{1}{2}\zeta(2).$

所以 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 绝对收敛于 $\frac{1}{2}\zeta(2)$.

$$f^2(x)=\begin{cases} n^4, & x\in[n,n+\frac{1}{2n^4}], \\ 0, & x\in[0,+\infty),\ x\notin[n,n+\frac{1}{2n^4}], \end{cases} \quad n=1,2,\cdots$$

$$\lim_{u\to+\infty}\int_0^u f^2(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}(\underbrace{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{2}}_{n个})=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2}=+\infty.$$

所以 $\int_0^{+\infty}f^2(x)\,dx$ 发散.

专题：收敛的无穷积分被积函数的渐近行为

1. 若 $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛，并且 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，则不一定有 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

但一定存在数列 $\{x_n\}\subset[a,+\infty)$，s.t.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}f(x_n)=0.$$

$\varepsilon=\frac{1}{n}$

证：由于 $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛，则由 Cauchy 收敛准则，对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$,

$\exists M_n\geqslant\max\{a,n\}$, s.t. $\quad\forall u_2,u_1\geqslant M_n.\ \left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)\,dx\right|<\varepsilon$

$$\left|\int_{M_n}^{M_n+1}f(x)\,dx\right|<\frac{1}{n}.$$

另一方面，由于 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，则由积分第一中值定理，

$\exists x_n\in(M_n,M_n+1)$, s.t. $\int_{M_n}^{M_n+1}f(x)\,dx=f(x_n)$.

从而，$|f(x_n)|<\frac{1}{n}$, $x_n>M_n\geqslant n$, $\forall n\in\mathbb{N}_+$.

于是 $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$, $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0$.

2. 若 $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛，并且以下三条件之一满足：

① f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

② 极限 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在

③ f 在 $[a,+\infty)$ 上单调.

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证: ③ 不妨设 f 在 $[a,+\infty)$ 增, 则 要么 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\in\mathbb{R}$;

要么 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

下证, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

反证法, 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, 则 对于 $G=1$, $\exists M\geqslant a$. s.t.

$\forall x\geqslant M$, 有 $f(x)\geqslant 1$,

由于 $\int_M^{+\infty} 1\,dx$ 发散, 则由比较原则, $\int_M^{+\infty} f(x)dx$ 也发散, 从而 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散. 矛盾

所以一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\in\mathbb{R}$. 再由条件②, $A=0$.

3. 更精确的结果.

(1) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 并且 f 在 $[a,+\infty)$ 上单调, 则 (Ex 8)

$$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x\to+\infty). \quad 即 \lim_{x\to+\infty} xf(x)=0.$$

证: 不妨设 f 在 $[a,+\infty)$ 上减. 由于 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0,$$

并且 $f(x)\geqslant 0$, $\forall x\in[a,+\infty)$.

另一方面, 对 $\forall \varepsilon>0$, 由 Cauchy 收敛准则, $\exists M\geqslant \max\{a,1\}$,

s.t. $\forall u_2>u_1\geqslant M$, 有

$$\int_{u_1}^{u_2} f(x)\,dx=\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

对 $\forall x \geqslant M$，令 $u_1 = x$，$u_2 = 2x$，则

$$\int_x^{2x} f(t)\,dt < \varepsilon, \quad \forall x \geqslant M.$$

由于 f 在 $[a,+\infty)$ 上减，则对 $\forall t \in [x,2x]$，有

$$f(x) \leq f(t).$$

从而 $0 \leq x f(x) = \int_x^{2x} f(x)\,dt \leq \int_x^{2x} f(t)\,dt < \varepsilon$，$\forall x \geqslant M$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} x f(x) = 0$.

(2) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，并且 $x f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调，则

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x\ln x}\right) \ (x\to+\infty)，即 \lim_{x\to+\infty} f(x)\times \ln x = 0.$$

证：不妨设 $x f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上减，则要么 $\lim\limits_{x\to+\infty} x f(x) = A \in \mathbb{R}$，

要么 $\lim\limits_{x\to+\infty} x f(x) = -\infty$.

<u>Step1</u>. 下证 $\lim\limits_{x\to+\infty} x f(x) = 0$.

反证法。假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} x f(x) = A > 0$，则 $\exists M_1 \geqslant \max\{a,1\}$，

s.t. $\forall x \geqslant M_1$，有 $x f(x) > \frac{1}{2}A > 0$，从而

$$\frac{1}{2}A \cdot \frac{1}{x} < f(x), \ \forall x \geqslant M_1.$$

由于 $\int_{M_1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ 发散，则由比较原则，$\int_{M_1}^{+\infty} f(x)\,dx$ 也发散，矛盾.

假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} x f(x) = A < 0$，则 $\exists M_2 \geqslant \max\{a,1\}$，

s.t. $\forall x \geqslant M_2$，有 $\frac{3}{2}A < x f(x) < \frac{1}{2}A < 0$，从而

$$\frac{3}{2}A \cdot \frac{1}{x} < f(x) < \frac{1}{2}A \cdot \frac{1}{x} < 0, \ \forall x \geqslant M_2.$$

$$0 < \left(-\frac{1}{2}A\right) \cdot \frac{1}{x} < -f(x) < \left(-\frac{3}{2}A\right) \cdot \frac{1}{x}, \ \forall x \geqslant M_2.$$

由于 $\int_{M_2}^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ 发散，则由比较原则，$\int_{M_2}^{+\infty}[f(x)]dx$ 也发散，

从而 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散，矛盾。

假设 $\lim_{x\to+\infty}xf(x)=-\infty$，则对 $G=-1$，$\exists M_3\geqslant\max\{a,1\}$，

s.t. $\forall x\geqslant M_3$，有 $xf(x)<-1<0$，从而

$$f(x)<-1\cdot\frac{1}{x},\quad\forall x\geqslant M_3.$$

$$0<\frac{1}{x}<-f(x),\quad\forall x\geqslant M_3.$$

由于 $\int_{M_3}^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ 发散，则由比较原则，$\int_{M_3}^{+\infty}[-f(x)]dx$ 也发散，

从而 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散，矛盾。

综上，$\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0$，从而 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$。

由于 $xf(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 减，则

$$xf(x)\geqslant 0,\quad\forall x\in[a,+\infty).$$

令 $M_0=\max\{a,1\}$，则 $M_0\geqslant 1$，并且对 $\forall x\geqslant M_0$，有

$$f(x)\geqslant 0,\quad\forall x\geqslant M_0.$$

<u>Step2.</u> 对 $\forall u_2>u_1\geqslant M_0$，有

$$\begin{aligned}0\leq\int_{u_1}^{u_2}f(t)dt &= \int_{u_1}^{u_2}tf(t)\cdot\frac{1}{t}dt\\ &\geqslant u_2f(u_2)\int_{u_1}^{u_2}\frac{1}{t}dt\\ &= u_2f(u_2)\cdot\ln\frac{u_2}{u_1}\qquad(1)\end{aligned}$$

由于 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则对 $\forall\varepsilon>0$，由 Cauchy 收敛准则可知，

$\exists M\geqslant M_0$，s.t. $\forall u_2>u_1\geqslant M$，有 $\int_{u_1}^{u_2}f(t)dt<\varepsilon$.

对 $\forall x \geqslant M^2$，令 $u_1 = \sqrt{x}$，$u_2 = x$，于是

$$\int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)\,dt < \varepsilon.$$

从而 $0 \leq \frac{1}{2} x f(x) \ln x = x f(x) \cdot \ln \frac{x}{\sqrt{x}} \leq \int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)\,dt < \varepsilon$. $\forall x \geqslant M^2$

所以 $\lim\limits_{x \to +\infty} x f(x) \ln x = 0$.

即 $f(x) = o\left(\frac{1}{x \ln x}\right) \quad (x \to +\infty)$.