习题 1.1

Ex1. 讨论无穷积分敛散性，若收敛，求其极，

(1) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

解：对 $\forall u \geq 0$，

$$\int_0^u xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^u e^{-x^2}d(x^2) \xlongequal{t=x^2} \frac{1}{2}\int_0^{u^2} e^{-t}dt = \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-t}\Big|_0^{u^2} = \frac{1}{2}(1-e^{-u^2}),$$

$$\lim_{u\to+\infty}\int_0^u xe^{-x^2}dx = \lim_{u\to+\infty}\frac{1}{2}(1-e^{-u^2}) = \frac{1}{2},$$

所以 $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ 收敛于 $\frac{1}{2}$.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

解：对 $\forall v \leq 0$，$\int_v^0 xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}(e^{-v^2}-1)$，则

$$\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx = \lim_{v\to-\infty}\int_v^0 xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2},$$

结合 (1) 题可知，$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ 收敛，并且 $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{e^x}}dx$

解：对 $\forall u \geq 0$，$\int_0^u \frac{1}{\sqrt{e^x}}dx \xlongequal[x=\ln t]{t=e^x} \int_1^{e^u}\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{t}dt = \left(-2t^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^{e^u} = 2(1-e^{-\frac{1}{2}u})$,

所以 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{e^x}}dx = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u\frac{1}{\sqrt{e^x}}dx = \lim_{u\to+\infty}2(1-e^{-\frac{1}{2}u}) = 2$.

(4) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+x)}$

解：对 $\forall u \geq 1$，

$$\int_1^u \frac{dx}{x^2(1+x)} = \int_1^u\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= -\ln|x|\Big|_1^u - \frac{1}{x}\Big|_1^u + \ln|1+x|\Big|_1^u$$

$$= 1-\ln 2-\frac{1}{u}+\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+x)} = \lim_{u\to+\infty}\int_1^u \frac{1}{x^2(1+x)}dx = 1-\ln 2.$$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{4x^2+4x+5}$

解: $\int\frac{1}{4x^2+4x+5}dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+1}d(x+\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\arctan(x+\frac{1}{2})+C.$

对 $\forall u\geq 0$, $\int_0^u\frac{1}{4x^2+4x+5}dx = \frac{1}{4}\arctan(u+\frac{1}{2})-\frac{1}{4}\arctan\frac{1}{2}$,

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{4x^2+4x+5}dx = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u\frac{1}{4x^2+4x+5}dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\arctan\frac{1}{2}.$

对 $\forall v\leq 0$, $\int_v^0\frac{1}{4x^2+4x+5}dx = \frac{1}{4}\arctan\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\arctan(v+\frac{1}{2})$,

$\int_{-\infty}^0\frac{1}{4x^2+4x+5}dx = \lim_{v\to-\infty}\int_v^0\frac{1}{4x^2+4x+5}dx = \frac{1}{4}\arctan\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}.$

所以, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4x^2+4x+5}dx$ 收敛于 $\frac{\pi}{4}$.

(6) $\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\,dx.$

解: $\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C.$

对 $\forall u\geq 0$, $\int_0^u e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-u}(\sin u+\cos u)+\frac{1}{2}$,

$\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\,dx = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u e^{-x}\sin x\,dx = 0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^x\sin x\,dx.$

解: $\int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C.$

对 $\forall u\geq 0$, $\int_0^u e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^u(\sin u-\cos u)+\frac{1}{2}$.

极限 $\lim_{u\to+\infty}\int_0^u e^x\sin x\,dx$ 不存在 $(u_n=\frac{\pi}{4}+2n\pi,\ n\in\mathbb{N}_+)$

所以 $\int_0^{+\infty}e^x\sin x\,dx$ 发散, 从而 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^x\sin x\,dx$ 也发散.

(8) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

解: $\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C,$

对 $\forall u \geq 0$, $\int_0^u \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln |u+\sqrt{1+u^2}|$,

$\lim_{u \to +\infty} \int_0^u \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \lim_{u \to +\infty} \ln |u+\sqrt{1+u^2}| = +\infty$,

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} dx$ 发散于 $+\infty$.

Ex2. 瑕积分的敛散性. 若收敛, 求其值.

(1) $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \quad (p>0)$.

解: 瑕点为 $x=a$. 对 $\forall u \in (a,b]$,

$$\int_u^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \xlongequal{t=x-a} \int_{u-a}^{b-a} \frac{1}{t^p} dt = \begin{cases} \ln|b-a| - \ln|u-a|, & p=1, \\ \frac{1}{1-p}\left[(b-a)^{1-p} - (u-a)^{1-p}\right], & p \neq 1 \text{ 且 } p>0. \end{cases}$$

$$\lim_{u \to a^+} \int_u^b \frac{1}{(x-a)^p} dx = \begin{cases} +\infty, & p=1 \\ \frac{1}{1-p}(b-a)^{1-p}, & 0<p<1 \\ +\infty. & p>1 \end{cases}$$

综上. 当 $p \geq 1$ 时. 瑕积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$ 发散于 $+\infty$;

当 $0<p<1$ 时. 瑕积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$ 收敛于 $\frac{1}{1-p}(b-a)^{1-p}$.

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$

解: 瑕点为 $x=1$. $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$.

对 $\forall u \in [0,1)$. $\int_0^u \frac{1}{1-x^2} dx = \ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| = \ln \frac{u+1}{u-1}$.

$\lim_{u \to 1^-} \int_0^u \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{u \to 1^-} \ln \frac{u+1}{u-1} = +\infty$, 所以 $\int_0^1 \frac{1}{1-x^2} dx$ 发散于 $+\infty$.

(3) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$

解: 瑕点为 $x=1$.

对 $\forall u\in[0,1)$，

$$\int_0^u \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}dx = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = -2\sqrt{1-x}\Big|_0^u = 2(1-\sqrt{1-u}),$$

$$\lim_{u\to1^-}\int_0^u \frac{1}{\sqrt{|1-x|}}dx = \lim_{u\to1^-}2(1-\sqrt{1-u}) = 2，所以 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|1-x|}}dx = 2.$$

对 $\forall v\in(1,2]$，

$$\int_v^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}dx = \int_v^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = 2\sqrt{x-1}\Big|_v^2 = 2(1-\sqrt{v-1}),$$

$$\lim_{v\to1^+}\int_v^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}dx = \lim_{v\to1^+}2(1-\sqrt{v-1}) = 2，所以 \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{|1-x|}}dx = 2.$$

综上，$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|1-x|}}dx$ 收敛于 4.

(4) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

解：瑕点为 $x=1$．$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2) = -\sqrt{1-x^2}+C.$

对 $\forall u\in[0,1)$，$\int_0^u \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 1-\ln\sqrt{1-u^2}$，

$$\lim_{u\to1^-}\int_0^u \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{u\to1^-}(1-\ln\sqrt{1-u^2}) = +\infty,$$

所以 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 发散于 $+\infty$.

(5) $\int_0^1 \ln x\,dx$

解：瑕点为 $x=0$．$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C.$

对 $\forall u\in(0,1]$，$\int_u^1 \ln x\,dx = u(1-\ln u)-1$，

$$\lim_{u\to0^+}\int_u^1 \ln x\,dx = \lim_{u\to0^+}[u(1-\ln u)-1] = -1,$$

所以 $\int_0^1 \ln x\,dx$ 收敛于 -1.

(6) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$

解：瑕点 $x=1$．对 $\forall u\in[0,1)$，令 $t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$，$x\in[0,1)$，则

$x=\frac{t^2}{1+t}$, $dx=\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$.

$$\int_0^u \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx = \int_0^{\sqrt{\frac{u}{1-u}}} t\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{\frac{u}{1-u}}}\left[\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t^2)^2}\right]dt$$

$$= 2\left(\arctan t-\frac{1}{2}\arctan t-\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{1+t^2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{u}{1-u}}}$$

$$= \left(\arctan t-\frac{t}{1+t^2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{u}{1-u}}}$$

$$= \arctan\sqrt{\frac{u}{1-u}}-\sqrt{u(1-u)},$$

$\lim\limits_{u\to1^-}\int_0^u\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$. 所以 $\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ 收敛于 $\frac{\pi}{2}$.

(7) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

解: 瑕点为 $x=0$ 和 $x=1$.

$$\int\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}\,dx=\arcsin(2x-1)+C.$$

对 $\forall u\in(0,\frac{1}{2}]$,

$$\int_u^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx=0-\arcsin(2u-1)=-\arcsin(2u-1),$$

$$\lim_{u\to0^+}\int_u^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx=\lim_{u\to0^+}\left[-\arcsin(2u-1)\right]=\arcsin1=\frac{\pi}{2}.$$

对 $\forall v\in[\frac{1}{2},1)$,

$$\int_{\frac{1}{2}}^v\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx=\arcsin(2v-1),$$

$$\lim_{v\to1^-}\int_{\frac{1}{2}}^v\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx=\lim_{v\to1^-}\arcsin(2v-1)=\arcsin1=\frac{\pi}{2},$$

综上, 瑕积分 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$ 收敛于 π.

(8) $\int_0^1 \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$

若 $p=\frac{1}{2}$, $\ln x<0$, $(\ln x)^p$ 是虚数.

习题 11.2

Ex 4. 无穷积分的敛散性.

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} dx$

解: 当 $x \in [0, +\infty)$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} < \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$,

由于 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} dx$ 收敛, 则由比较原则, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} dx$ 收敛.

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1-e^x} dx$

解: 由于 $\forall p>1$, 有 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p \cdot \frac{x}{1-e^x} = 0$, 则由 Cauchy 判别法,

$\int_1^{+\infty} \frac{x}{1-e^x} dx$ 收敛.

(4) $\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{1+x^3} dx$.

解: 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \cdot \frac{x \arctan x}{1+x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{1+x^3} \cdot \arctan x\right) = \frac{\pi}{2}$.

由 Cauchy 判别法, $\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{1+x^3} dx$ 收敛

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

解: 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1$,

由 Cauchy 判别法, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ 发散.

(5) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$

解: 当 $n=1$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$,

由 Cauchy 判别法, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ 发散.

当 $n<1$ 时, 有 $\frac{\ln(1+x)}{x^n} \geqslant \frac{\ln(1+x)}{x}$, $\forall x \in [1, +\infty)$,

由于 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ 发散, 则由比较原则, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ 也发散.

当 $n>1$ 时，令 $\sigma=n-1>0$，则

$$1<1+\frac{1}{2}\sigma<n,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1+\frac{1}{2}\sigma}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{1}{2}\sigma}}=0.$$

由 Cauchy 判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 收敛.

综上，当 $n>1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 收敛，

当 $n\le 1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 发散.

(6) $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx \quad (m,n\geq 0)$

解：

$$\lim_{x\to+\infty} x^{n-m}\cdot\frac{x^m}{1+x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & n=0,\\ 1, & n>0.\end{cases}$$

由 Cauchy 判别法，

当 $n-m>1$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$ 收敛.

当 $n-m\le 1$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$ 发散.

Ex5. 绝对收敛？条件收敛？

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx$

解：对 $\forall u\geq 1$，$\int_1^u\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx \xlongequal[x=t^2]{t=\sqrt{x}} \int_1^{\sqrt{u}}\frac{\sin t}{t^2}\cdot 2t\,dt=2\int_1^{\sqrt{u}}\frac{\sin t}{t}dt$，

$\int_1^u\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\right|dx \xlongequal{t=\sqrt{x}} \int_1^{\sqrt{u}}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\cdot 2t\,dt=2\int_1^{\sqrt{u}}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$

由于 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ 条件收敛，所以 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx$ 也条件收敛.

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}dx$

$$\operatorname{sgn} t=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t=0\\ -1, & t<0\end{cases}$$

解：对 $\forall x\geq 1$，$\left|\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\right|\le\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{x^2}$，由于 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛，则

由比较原则，$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\right|dx$ 也收敛，从而 $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}dx$ 绝对收敛.

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}dx$

解：对 $\forall u\geq 0$，$\int_0^u \cos x\,dx$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界．令 $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{100+x}=\frac{1}{\frac{100}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$，$x\in(0,+\infty)$．

则 $g(x)$ 在 $[100,+\infty)$ 上减且 $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$．由 Dirichlet 判别法，

$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}dx$ 收敛.

另一方面，

$$\left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\right|=\frac{\sqrt{x}}{100+x}\cdot|\cos x|\geq\frac{\sqrt{x}}{100+x}\cdot\cos^2 x=\frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}+\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{2(100+x)}.$$

由于 $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2(100+x)}=\frac{1}{2}$，由 Cauchy 判别法，

$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}dx$ 发散．由 Dirichlet 判别法，$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{2(100+x)}dx$ 收敛.

所以 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\right|dx$ 发散.

综上，$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}dx$ 条件收敛.

(4) $\int_e^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\,dx$

解：对 $\forall u\geq e$，$\int_e^u \sin x\,dx$ 在 $[e,+\infty)$ 上有界．令 $g(x)=\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$，$x\in[e,+\infty)$.

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln x-\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)}{(\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}[1-\ln(\ln x)]}{(\ln x)^2}$$ $\left(g'(x)=0 \Rightarrow x=e^e\right)$

当 $x\in[e^e,+\infty)$，$g'(x)\leq 0$，所以 g 在 $[e^e,+\infty)$ 上递减.

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0.$$

由 Dirichlet 判别法，$\int_{e^e}^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\,dx$ 收敛，从而

$\int_e^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\,dx$ 收敛.

另一方面，当 $x\in[e,+\infty)$ 时，

$$\left|\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\right| = \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\cdot|\sin x| \geqslant \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\cdot\sin^2 x = \frac{\ln(\ln x)}{2\ln x} - \frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}\cos 2x$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)+x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(x\ln(\ln x)+\frac{x}{\ln x}\right)$

由 Cauchy 判别法，$= +\infty$，

$\int_e^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}dx$ 发散.

由 Dirichlet 判别法可知，$\int_e^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}\cos 2x\,dx$ 收敛. 所以

$\int_e^{+\infty}\left|\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\right|dx$ 发散.

综上，$\int_e^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\,dx$ 条件收敛

习题 11.3

Ex3. (7) $\int_0^1 \frac{1}{x^a}\sin\frac{1}{x}dx$

解：令 $t=\frac{1}{x}$，$x\in(0,1]$，则对 $\forall u\in(0,1]$，有

$$\int_u^1 \frac{1}{x^a}\sin\frac{1}{x}dx \overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=} \int_{\frac{1}{u}}^1 t^a \sin t\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_1^{\frac{1}{u}} \frac{\sin t}{t^{2-a}}dt,$$

$$\int_u^1 \left|\frac{1}{x^a}\sin\frac{1}{x}\right|dx \overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=} \int_{\frac{1}{u}}^1 |t^a\sin t|\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_1^{\frac{1}{u}} \left|\frac{\sin t}{t^{2-a}}\right|dt.$$

（$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$. 当 $p>1$ 时，绝对收敛；当 $0<p\le 1$ 时，条件收敛 .
$p\le 0$，发散）

则当 $2-a>1$，即 $a<1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-a}}dt$ 绝对收敛，从而
$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\sin\frac{1}{x}dx$ 绝对收敛；

当 $0<2-a\le 1$，即 $1\le a<2$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-a}}dt$ 条件收敛，从而
$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\sin\frac{1}{x}dx$ 条件收敛，

当 $2-a\le 0$，即 $a\ge 2$ 时，对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$，有

$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \underset{增}{t^{a-2}}\,\underset{\ge 0}{\sin t}\,dt \ge \int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi}(2n\pi)^{a-2}\sin t\,dt$$

$$= (2n\pi)^{a-2}\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi}\sin t\,dt$$

$$\ge \int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi}\sin t\,dt = \int_0^{\pi}\sin t\,dt = 2.$$

由无穷积分收敛的 Cauchy 收敛准则（否定形式），无穷积分 $\int_1^{+\infty}t^{a-2}\sin t\,dt$ 发散，
从而 $\int_0^1 \frac{1}{x^a}\sin\frac{1}{x}dx$ 发散.

(8) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx$

解：令 $f(x)=-e^{-x}\ln x$，$x\in(0,1]$，则 $f(x)\ge 0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$，所以 $x=0$ 为 f

的瑕点.

$$\left(\begin{array}{l} x^p \cdot f(x) = x^p \cdot (-e^{-x}\ln x) = e^{-x} \cdot \frac{\ln x}{-x^{-p}}, \quad p>0 \\ \frac{(\ln x)'}{(-x^{-p})'} = \frac{\frac{1}{x}}{p\, x^{-p-1}} = \frac{1}{p} \cdot x^p \to 0 \ (x \to 0^+). \end{array} \right)$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{3}} \cdot f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{-x} \cdot \frac{\ln x}{-x^{-\frac{1}{3}}}\right) = 0$, 由 Cauchy 判别法,

瑕积分 $\int_0^1 e^{-x}\ln x\,dx$ 收敛.

令 $g(x) = e^{-x}\ln x$, $x \in [1, +\infty)$, 则 $g(x) \geqslant 0$, 由于对 $\forall p > 1$, 都有

$$\lim_{x\to+\infty} x^p \cdot g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^p \ln x}{e^x} = 0.$$

则由 Cauchy 判别法, 无穷积分 $\int_1^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx$ 收敛.

综上, 反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx$ 收敛.