


2019-2020 学年第 1 学期
数学分析作业

目录

5 第 5 周	1
6 第 6 周	7
7 第 7 周	7
8 第 8 周	14
9 第 9 周	19
10 第 10 周	24
11 第 11 周	31
12 第 12 周	35

第 5 周

 **作业题 5.1** 设 A, B 为非空有界数集, 并且 $A \subset B$, 证明

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

证明 显然, $\inf A \leq \sup A$. 下证 $\inf B \leq \inf A$ 并且 $\sup A \leq \sup B$.

假设 $\inf B > \inf A$, 则 $\inf B$ 不是集合 A 的下界, 从而存在 $x_0 \in A$ 使得 $\inf B > x_0$. 另一方面, 由于 $A \subset B$, 从而也有 $x_0 \in B$, 于是

$$\inf B > x_0 \geq \inf B,$$


矛盾.

假设 $\sup A > \sup B$, 则 $\sup B$ 不是集合 A 的上界, 从而存在 $x_1 \in A$ 使得 $\sup B < x_1$. 另一方面, 由于 $A \subset B$, 从而也有 $x_1 \in B$, 于是

$$\sup B < x_1 \leq \sup B,$$

矛盾.

综上, $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$. □

 **作业题 5.2** 设 S 为非空有下界 (不一定有上界) 的数集, 并且 $\inf S > 0$, 证明集合

$$S^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in S\}$$

有界并且

$$\sup S^{-1} > 0, \quad \inf S^{-1} \geq 0, \quad \sup S^{-1} = \frac{1}{\inf S}.$$

证明 Step1. 任取 $y \in S^{-1}$, 令 $x = y^{-1}$, 则 $x \in S$,

$$x \geq \inf S > 0,$$

从而

$$0 < y \leq \frac{1}{\inf S}, \quad \forall y \in S^{-1}. \quad (5.1)$$

所以 0 是 S^{-1} 的一个下界, $\frac{1}{\inf S}$ 是 S^{-1} 的一个上界, 并且

$$\sup S^{-1} > 0, \quad \inf S^{-1} \geq 0.$$

Step2. 由 Step1 可知 $\sup S^{-1} \leq \frac{1}{\inf S}$. 下面排除 $\sup S^{-1} < \frac{1}{\inf S}$ 的情况.
反证法, 假设 $\sup S^{-1} < \frac{1}{\inf S}$ 成立, 由于 $\sup S^{-1} > 0$, 则

$$0 < \inf S < \frac{1}{\sup S^{-1}}.$$

所以 $\frac{1}{\sup S^{-1}}$ 不是 S 的下界, 存在 $x \in S$ 使得

$$0 < \inf S \leq x < \frac{1}{\sup S^{-1}}.$$

令 $y = x^{-1}$, 则 $y \in S^{-1}$,

$$0 < \frac{1}{y} = x < \frac{1}{\sup S^{-1}},$$

从而

$$\sup S^{-1} < y.$$


但是另一方面, 由于 $y \in S^{-1}$, 则一定有

$$y \leq \sup S^{-1},$$

矛盾. 所以

$$\sup S^{-1} = \frac{1}{\inf S}.$$

□

 **作业题 5.3** 证明以下等式和不等式:

(1) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则

$$||a| - |b|| \leq |a - b|, \quad \frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}.$$

(2) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+$ 且 $n \geq 2$, 则

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

(3) Bernoulli(伯努利) 不等式: 设 $h \geq -1$, $n \in \mathbb{N}_+$, 则

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

特别地, 如果还有 $h \geq 0$ 并且 $n \geq 2$, 则还成立

$$(1 + h)^n > \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n^2h^2}{4}.$$

(4) 算术-几何平均值不等式: 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个非负实数, 则


$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

如果 a_1, a_2, \dots, a_n 都是正实数, 还成立几何-调和平均值不等式:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

(5)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \\ \sum_{k=1}^n k^3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

 **注意** $\sum_{k=1}^n s_k$ 表示对 s_1, s_2, \dots, s_n 按下标 k 从 1 到 n 求和, 即 $\sum_{k=1}^n s_k = s_1 + s_2 + \dots + s_n$.

(6) 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin x < x < \tan x$. 若 $x \in \mathbb{R}$, 则 $|\sin x| \leq |x|$.

证明 (1) 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 由绝对值不等式可得

$$\begin{aligned} |a - b| &\geq |a| - |b|, \\ |a - b| &= |b - a| \geq |b| - |a|, \end{aligned}$$

综合上述两式可得

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|,$$

所以

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

由于

$$f(t) = \frac{t}{1+t}, \quad t > 0$$

是严格增函数, 并且

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

则 $f(|a + b|) \leq f(|a| + |b|)$, 从而

$$\begin{aligned} \frac{|a + b|}{1 + |a + b|} &\leq \frac{|a| + |b|}{1 + |a| + |b|} \\ &= \frac{|a|}{1 + |a| + |b|} + \frac{|b|}{1 + |a| + |b|} \\ &\leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} &(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a^n + a^{n-1}b + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}) \\ &\quad - (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n) \\ &= a^n - b^n. \end{aligned}$$

(3) 当 $n = 1$ 时, $(1 + h)^1 = 1 + 1 \cdot h$, 结论成立.

假设当 $n = k$ 时, 成立

$$(1 + h)^k \geq 1 + kh.$$

由于 $h \geq -1$, 则当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} (1 + h)^{k+1} &= (1 + h)^k \cdot (1 + h) \geq (1 + kh) \cdot (1 + h) \\ &= 1 + (k + 1)h + kh^2 \geq 1 + (k + 1)h. \end{aligned}$$

综上, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 以及任意 $h \geq -1$ 都有

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

当 $n \geq 2$ 时, 有

$$\frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{n^2}{4},$$

从而对任意 $h \geq 0$ 都有

$$\begin{aligned} (1 + h)^n &= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n \\ &> \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n^2h^2}{4}. \end{aligned}$$

(4) 如果 a_1, a_2, \cdots, a_n 中有一个是 0, 则算术-几何平均值不等式成立. 下设 a_1, a_2, \cdots, a_n 都是正的实数.

当 $n = 1$ 时, 两个不等式显然都成立.

假设当 $n = k$ 时, 有

$$\frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 \cdots a_k}.$$

当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} &\frac{a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) (a_1 + \cdots + a_k) + \frac{a_{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} + \frac{ka_{k+1} - (a_1 + \cdots + a_k)}{k(k+1)}. \end{aligned}$$

令

$$A = \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k}, \quad B = \frac{ka_{k+1} - (a_1 + \cdots + a_k)}{k(k+1)},$$

则 $A > 0$, $A + B > 0$. 再令 $h = \frac{B}{A}$, 则 $1 + h > 0$, $h > -1$, 利用 Bernoulli 不等式可得

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1}}{k+1} \right)^{k+1} \\ &= (A + B)^{k+1} = A^{k+1} \left(1 + \frac{B}{A} \right)^{k+1} = A^{k+1} (1 + h)^{k+1} \\ &\geq A^{k+1} [1 + (k+1)h] = A^{k+1} \left[1 + \frac{(k+1)B}{A} \right] = A^k [A + (k+1)B] \\ &= A^k \cdot a_{k+1}. \end{aligned}$$

根据 $n = k$ 时的假设条件, 有

$$A^k = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} \right)^k \geq a_1 \cdots a_k,$$

从而

$$\frac{a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1}}{k+1} \geq a_1 \cdots a_k \cdot a_{k+1}.$$

综上, 算术-几何平均值不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

成立.

利用算术-几何平均值不等式可得

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}} > 0,$$

对上式取倒数, 就得到几何-调和平均值不等式:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

(5) 当 $n = 1$ 时, 两不等式显然都成立.

假设当 $n = l$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l k^2 &= \frac{l(l+1)(2l+1)}{6}, \\ \sum_{k=1}^l k^3 &= \left(\frac{l(l+1)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

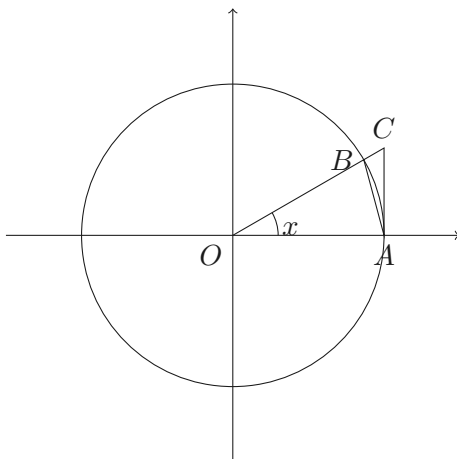
当 $n = l + 1$ 时就有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l+1} k^2 &= \sum_{k=1}^l k^2 + (l+1)^2 \\ &= \frac{l(l+1)(2l+1)}{6} + \frac{6(l+1)^2}{6} \\ &= \frac{(l+1)[(l+1)+1][2(l+1)+1]}{6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l+1} k^3 &= \sum_{k=1}^l k^3 + (l+1)^3 \\ &= \left(\frac{l(l+1)}{2}\right)^2 + (l+1)^3 \\ &= \left[\frac{(l+1)(l+2)}{2}\right]^2. \end{aligned}$$

综上, 两等式恒成立.

(6)



在以上单位圆周中, 角的弧度 x 满足 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 三角形 OAB 的面积

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x,$$

扇形 \widehat{OAB} 的面积

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} x,$$

直角三角形 OAC 的两条直角边的长度分别为

$$OA = 1, \quad AC = \tan x,$$

所以直角三角形 OAC 的面积为

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x = \frac{1}{2} \tan x.$$

显然, $S_1 < S_2 < S_3$, 从而

$$0 < \sin x < x < \tan x.$$

当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, 由上述结论可知

$$|\sin x| \leq |x|.$$

当 $x > 1$ 时, 总有

$$|\sin x| \leq 1 < x = |x|.$$

于是,

$$|\sin x| \leq |x|, \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

当 $x < 0$ 时, $-x \in (0, +\infty)$, 由以上结论可得

$$|\sin x| = |\sin(-x)| \leq |-x| = |x|.$$

综上,

$$|\sin x| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

总结:

1. 作业不要抄袭. 字迹要清楚.
2. 以上参考答案保证正确, 但是不一定是最优的.
3. 确界相关的题目, 一定要紧扣确界的定义, 不要想当然的用一些错误结论. 上确界、下确界不一定是集合的最大值、最小值, 上确界、下确界也不一定属于集合. 大家自行总结课堂上、教材和作业中和确界有关的结论和题目, 分为**一般集合的确界问题**和**函数相关的确界问题**. 这些结论我们今后会用到.
4. 不了解数学归纳法的同学, 请自学.
5. 本次作业完成的比较好的同学: **王芹**.
6. 各位同学要在学习上多花时间, 多动笔练习, 勤于思考, 多与其它同学讨论. 课前一定要预习教材内容, 课后及时复习.
7. 各位同学要积极找我答疑. 请提前通过 qq 联系我预约时间, 原则上我只当面答疑, 不接受在线答疑. 我的办公室是系楼 303 办公室后门 A 格, 走西面的门 (前门), 直接推门进入, 不要敲门.

第 6 周

欢度国庆!

第 7 周

 **作业题 7.1** 证明: 对任意 $p > 0$ 以及任意 $a > 1$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{a^n} = 0.$$

证明 方法 1. 令 $k = [p] + 1$, $h = a - 1 > 0$, 则当 $n > k$ 时,

$$\begin{aligned} a^n &= (1+h)^n \\ &= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + C_n^k h^k + \cdots + h^n \\ &\geq C_n^k h^k = \left(\frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdots \frac{n-k+1}{1} \right) h^k. \end{aligned}$$

由于 $n > k$, 则易证

$$\frac{n}{k}, \frac{n-1}{k-1}, \cdots, \frac{n-k+1}{1} \geq \frac{n}{k},$$

从而

$$\begin{aligned} a^n &= (1+h)^n \\ &\geq \left(\frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdots \frac{n-k+1}{1} \right) h^k \\ &\geq \frac{n^k}{k^k} h^k. \end{aligned}$$

于是当 $n > k = [p] + 1$ 时,

$$0 \leq \frac{n^p}{a^n} \leq \frac{k^k}{h^k} \cdot \frac{1}{n^{k-p}}.$$

由于 $k - p > 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k-p}} = 0,$$

由数列极限的迫敛性可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{a^n} = 0.$$

方法 2. 令 $b = a^{\frac{1}{p}}$, 则 $b > 1$, $b^p = a$ 并且

$$\frac{n^p}{a^n} = \left(\frac{n}{b^n} \right)^p.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b^n} = 0$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$, 都有

$$\left| \frac{n}{b^n} \right| < \varepsilon^{\frac{1}{p}},$$


从而

$$\left| \frac{n^p}{a^n} - 0 \right| = \left| \frac{n}{b^n} \right|^p < \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{a^n} = 0.$$

□

 **作业题 7.2** 证明: 当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.$$

证明 当 $a > 1$, 对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$, 有

$$a^{-\varepsilon} < 1 < a^{\varepsilon}.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 则根据数列极限的保号性, 存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$, 都有

$$a^{-\varepsilon} < (n)^{\frac{1}{n}} < a^{\varepsilon},$$

对上式取底数为 a 的对数可得

$$-\varepsilon < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon,$$

即

$$\left| \frac{\log_a n}{n} \right| < \varepsilon.$$

根据数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.$$

当 $0 < a < 1$ 时, 对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$, 有

$$a^{\varepsilon} < 1 < a^{-\varepsilon}.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 则根据数列极限的保号性, 存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$, 都有

$$a^{\varepsilon} < (n)^{\frac{1}{n}} < a^{-\varepsilon},$$

对上式取底数为 a 的对数可得

$$-\varepsilon < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon,$$


即

$$\left| \frac{\log_a n}{n} \right| < \varepsilon.$$

根据数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.$$

□

 **作业题 7.3** 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{a_n} = \sqrt[3]{a}$.

证明 若 $a = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$, 有 $|a_n| < \varepsilon^3$, 从而

$$|\sqrt[3]{a_n} - 0| = |\sqrt[3]{a_n}| < \varepsilon.$$

根据数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{a_n} = 0 = \sqrt[3]{a}.$$

若 $a > 0$, 则根据数列极限的保号性, 存在正整数 N 使得对任意 $n > N$ 都有 $a_n > 0$, 此时

$$0 \leq |\sqrt[3]{a_n} - \sqrt[3]{a}| = \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[3]{a_n})^2 + \sqrt[3]{a_n} \cdot \sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2} < \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[3]{a})^2}.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[3]{a})^2} = 0,$$

根据迫敛性可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sqrt[3]{a_n} - \sqrt[3]{a}| = 0,$$


从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{a_n} = \sqrt[3]{a}$.

若 $a < 0$, 则根据数列极限的保号性, 存在正整数 N 使得对任意 $n > N$ 都有 $a_n < 0$, 此时仍有

$$0 \leq |\sqrt[3]{a_n} - \sqrt[3]{a}| = \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[3]{a_n})^2 + \sqrt[3]{a_n} \cdot \sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2} < \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[3]{a})^2}.$$

根据之前的讨论可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{a_n} = \sqrt[3]{a}$.

□

 **作业题 7.4** 设 $\{a_n\}$ 为正数数列并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ (提示: 用保号性和迫敛性).

证明 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$, 根据数列极限的保号性, 存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$ 都有

$$0 < \frac{1}{2}a < a_n < \frac{3}{2}a,$$

从而

$$0 < \sqrt[n]{\frac{1}{2}a} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3}{2}a}, \quad \forall n > N.$$


由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}a} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3}{2}a},$$

根据迫敛性, 就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

□

 **作业题 7.5** 在某些情况下, 非正常极限也具有类似于正常极限的一些性质. 利用 (正、负) 无穷大数列的严格定义证明以下结论

1. (类似于绝对值性质) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$.
2. (类似于保号性) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, 则对任何实数 $c \in \mathbb{R}$, 存在正整数 N , 使得对任何 $n > N$, 都有

$$a_n < c < b_n.$$

3. (类似于加法、乘法法则) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = +\infty.$$

4. (类似于减法、乘法法则) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -\infty.$$

5. (类似迫敛性) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 数列 $\{b_n\}$ 满足

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$.

6. (类似于子列性质) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 则 $\{a_n\}$ 的任何子列 $\{a_{n_k}\}$ 都满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = +\infty.$$

证明

1. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, 则对任意 $M > 0$, 存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$, 都有

$$a_n < -M < 0,$$

从而

$$|a_n| > M,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$.

2. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, 则对任意 $c \in \mathbb{R}$, 存在正整数 N_1, N_2 , 使得对任意 $n > N_1$ 都有 $a_n < c$; 对任意 $n > N_2$ 都有 $b_n > c$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $n > N$ 就有

$$a_n < c < b_n.$$

3. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$.

(1) 对任意 $M > 0$, 存在正整数 N_1, N_2 , 使得对任意 $n > N_1$, 都有 $a_n > \frac{1}{2}M$; 对任意 $n > N_2$, 都有 $b_n > \frac{1}{2}M$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $n > N$ 就有

$$a_n + b_n > \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M = M,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

(2) 对任意 $M > 0$, 存在正整数 N_1, N_2 , 使得对任意 $n > N_1$, 都有 $a_n > \sqrt{M}$; 对任意 $n > N_2$, 都有 $b_n > \sqrt{M}$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $n > N$ 就有

$$a_n b_n > \sqrt{M} \cdot \sqrt{M} = M,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = +\infty$.

4. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$.

(1) 对任意 $M > 0$, 存在正整数 N_1, N_2 , 使得对任意 $n > N_1$, 都有 $a_n > \frac{1}{2}M$; 对任意 $n > N_2$, 都有 $b_n < -\frac{1}{2}M$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $n > N$ 就有

$$a_n - b_n > \frac{1}{2}M - \left(-\frac{1}{2}M\right) = M,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = +\infty$.

- (2) 对任意 $M < 0$, 存在正整数 N_1, N_2 , 使得对任意 $n > N_1$, 都有 $a_n > \sqrt{-M}$; 对任意 $n > N_2$, 都有 $b_n < -\sqrt{-M}$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $n > N$ 就有

$$a_n b_n < \sqrt{-M} \cdot (-\sqrt{-M}) = M,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = -\infty$.

5. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 则对任意 $M > 0$, 存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$, 都有 $a_n > M$, 再根据条件可得

$$b_n \geq a_n > M, \quad \forall n > N.$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$.

6. 设 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的任意一个子列, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 则对任意 $M > 0$, 存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$ 都有 $a_n > M$. 对任意 $k > n_N$, 都有 $n_k \geq k > n_N \geq N$, 从而 $a_{n_k} > M$, 于是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = +\infty.$$

□

作业题 7.6 计算以下数列的极限.

- $\{\sqrt[n]{n^2 + 1}\}$.
- $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.
- $\{(n!)^{\frac{1}{n^2}}\}$ (提示: 利用增长速度的顺序和迫敛性).
- $\left\{\frac{\sqrt[3]{n^2 \sin n!}}{n+1}\right\}$.
- $\left\{\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3}\right\}$ (提示: 利用第 5 周作业题中的平方和公式).
- $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+\cdots+k^3}}$ (提示: 利用第 5 周作业题中的立方和公式).

解

1. 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 都有

$$1 < \sqrt[n]{n^2 + 1} \leq \sqrt[n]{n^2 + n^2} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \right) = 1,$$

再根据数列极限的迫敛性可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 1} = 1.$$

2. 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 都有

$$1 \leq a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \underbrace{\left(1 + 1 + \cdots + 1\right)^{\frac{1}{n}}}_{n \text{ 项}} = \sqrt[n]{n}.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 则根据数列极限的迫敛性可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

3. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0,$$

根据数列极限的保号性, 存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$ 都有

$$0 < \frac{n!}{n^n} < 1,$$

从而

$$1 \leq n! < n^n, \quad \forall n > N,$$

$$1 \leq (n!)^{\frac{1}{n^2}} < (n^n)^{\frac{1}{n^2}} = \sqrt[n]{n}, \quad \forall n > N.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 则根据数列极限的迫敛性可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

4. 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 都有

$$0 \leq \left| \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1} \right| \leq \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n+1} = \frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}}{1 + \frac{1}{n}}.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{0}{1+0} = 0,$$

根据数列极限的迫敛性可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1} \right| = 0,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1} = 0.$$

5. 设

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

则

$$\begin{aligned} & 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 \\ &= [1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (2n)^2] \\ &\quad - [2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2] \\ &= S_{2n} - 2^2 (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \\ &= S_{2n} - 4S_n \\ &= \frac{4n^3 - n}{3}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - n}{3n^3} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

6. 由于

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1^3 + 2^3 + \cdots + k^3}} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2}} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)} \\
 &= 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right),
 \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2.$$

□

总结:

1. 我们已经验证过许多极限等式: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ ($\alpha > 0$), $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ($a > 0$) 等, 这些可以直接用, 不需要再重复证明. 除非考试的时候要求你重新验证一遍.
2. 之前没有验证的极限等式, 一定要详细证明出来后才能使用. 如果你不确定是否验证过, 不妨重新验证一遍.
3. 用 $\varepsilon - N$ 定义验证极限时, 正整数 N 只能依赖于 ε , 不能依赖 n .
4. 我们课上讲的数列收敛的性质有一个大前提: $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都收敛于实数. 在这个前提下才能使用收敛数列的性质, 例如四则运算法则. 某些特殊情况下, 无穷大数列也具有类似于收敛数列的性质, 例如本周作业第 5 大题. 但是这只是形式上类似, 并不能实质等同, 不要随便使用四则运算法则. 严格来讲, $0 \cdot \infty, \infty \cdot \infty$ 等都是没有意义的.
5. 除了第 5 大题给出的结论外, 还有其它涉及无穷大数列的类似结论, 各位同学自行总结和证明. 当然, 也要总结不成立的情况, 例如:
若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, 则不一定有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty.$$

反例: $a_n = n = b_n$.

6. 学过的内容和题目要花大量时间反复看反复练习. 熟练之后, 原先很难的题目都会变成套路题, 就像你们现在已经熟悉的

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$$

求和这种.

7. 本次作业完成的比较好的同学, 一个也没有.

第 8 周

作业题 8.1 证明

(1) 设 $\{a_n\}$ 是一列递增数列并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则

$$a = \sup_n \{a_n\}.$$

特别地, 若 $\{a_n\}$ 还是一个严格增数列, 则

$$a_n < a, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

(2) 设 $\{a_n\}$ 是一列递减数列并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则

$$a = \inf_n \{a_n\}.$$

特别地, 若 $\{a_n\}$ 还是一个严格减数列, 则

$$a_n > a, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

证明 (1) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\{a_n\}$ 是有界数列. 又因为 $\{a_n\}$ 单调递增, 根据单调有界定理, 就有 (第一个等号就是单调有界定理的结论)

$$\sup_n \{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

若 $\{a_n\}$ 还是严格增数列, 下证

$$a_n < a, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

反证法, 假设存在 $n_0 \in \mathbb{N}_+$ 使得 $a_{n_0} \geq a$, 则根据严格增性, 就有

$$a_{n_0+1} > a_{n_0} \geq a,$$

这与 $a = \sup_n \{a_n\}$ 矛盾.

(2) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\{a_n\}$ 是有界数列. 又因为 $\{a_n\}$ 单调递减, 根据单调有界定理, 就有

$$\inf_n \{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

若 $\{a_n\}$ 还是严格减数列, 下证

$$a_n > a, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

反证法, 假设存在 $n_0 \in \mathbb{N}_+$ 使得 $a_{n_0} \leq a$, 则根据严格减性, 就有

$$a_{n_0+1} < a_{n_0} \leq a,$$

这与 $a = \inf_n \{a_n\}$ 矛盾. □

作业题 8.2 Cauchy 数列的几种等价形式:

(i) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得对任意 $m, n > N$, 都有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

(ii) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$ 以及任意 $m \geq n$, 都有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

(iii) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$ 以及任意 $p \in \mathbb{N}$, 都有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

证明上述三种形式的等价性:

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 满足条件 (i), 则也满足 (ii);

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足条件 (ii), 则也满足 (iii);

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 满足条件 (iii), 则也满足条件 (i).

证明 (1) 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 (i), 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得对任意 $m, n > N$, 都有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

于是对任意 $n > N$ 以及任意 $m' \geq n$, 有 $m', n > N$, 从而

$$|a_{m'} - a_n| < \varepsilon.$$

所以 $\{a_n\}$ 也满足条件 (ii).

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 (ii), 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$ 以及任意 $m \geq n$, 都有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

于是, 对任意 $p \in \mathbb{N}$ 以及任意 $n > N$, 有 $n + p \geq n > N$, 从而

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

所以 $\{a_n\}$ 也满足条件 (iii).

(3) 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 (iii), 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$ 以及任意 $p \in \mathbb{N}$, 都有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

对任意 $m, n > N$, 要么有 $m \geq n > N$, 要么有 $n > m > N$. 若 $m \geq n > N$, 令 $p = m - n$, 则 $p \in \mathbb{N}$, 从而


$$|a_m - a_n| = |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

若 $n > m > N$, 令 $p = n - m$, 则 $p \in \mathbb{N}$, 从而

$$|a_n - a_m| = |a_{m+p} - a_m| < \varepsilon.$$

所以 $\{a_n\}$ 也满足条件 (i).

□

 **作业题 8.3** 设 $\{a_n\}$ 是一个数列. 若存在正整数 N_0 , 使得对任意 $m, n > N_0$, 都有

$$|a_m - a_n| \leq b_n,$$

其中 $\{b_n\}$ 是一个无穷小数列, 证明 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列.

证明 由条件可知 $b_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_1 , 使得对任意 $n > N_1$, 都有

$$0 \leq b_n < \varepsilon.$$

令 $N = \max\{N_0, N_1\}$, 则对任意 $m, n > N$, 就有

$$|a_m - a_n| \leq b_n < \varepsilon,$$

所以 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列. □

 **作业题 8.4** 设 $c > 0$ 是一个正数, 数列 $\{a_n\}$ 满足:

$$a_1 \in \left(0, \frac{1}{c}\right), \quad a_{n+1} = a_n(2 - ca_n).$$

证明 $\{a_n\}$ 收敛, 并求出 $\{a_n\}$ 的极限.

(提示: 先让 a_1 取某个特定值, 例如 $a_1 = \frac{1}{2c}$, 据此寻找规律.)

证明 Step1. 先证

$$0 < a_n < \frac{1}{c}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

当 $n = 1$ 时, 显然 $0 < a_1 < \frac{1}{c}$.

假设当 $n = k$ 时, $0 < a_k < \frac{1}{c}$, 则

$$0 < \left|a_k - \frac{1}{c}\right| < \frac{1}{c},$$

于是当 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k(2 - ca_k) \\ &= 2a_k - ca_k^2 \\ &= -c\left(a_k - \frac{1}{c}\right)^2 + \frac{1}{c} \\ &\in \left(0, \frac{1}{c}\right). \end{aligned}$$

结论得证.

Step2. 根据 Step1 的结论, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 就有

$$a_{n+1} = a_n(2 - ca_n) > a_n\left(2 - c \cdot \frac{1}{c}\right) = a_n,$$

所以 $\{a_n\}$ 严格增. 根据单调有界定理, $\{a_n\}$ 收敛, 存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n a_n > 0.$$

Step3. 在等式

$$a_{n+1} = a_n(2 - ca_n)$$

两端取极限可得

$$a = a(2 - ca),$$

解得 $a = \frac{1}{c}$. 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{c}.$$

□

注 该题提供了计算给定正数 c 的倒数的一种迭代算法.

 **作业题 8.5**


(1) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0$ 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

(提示: $[a_n] \leq a_n < [a_n] + 1$, $\{[a_n]\}$ 是 \mathbb{N}_+ 的子列, 用两个与 $[a_n]$ 有关的数列把 $\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ “包”起来.)

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n < -1$ 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e.$$

 **注意** 虽然 $\{[a_n]\}$ 是正整数构成的数列, 但是它的单调性未知, $\{[a_n]\}$ 不一定是 \mathbb{N}_+ 的子列. 若 $\{[a_n]\}$ 是严格增的数列, 则 $\{[a_n]\}$ 才是 \mathbb{N}_+ 的子列.

证明 (1) Step1. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 则存在正整数 N_0 , 使得

$$a_n > 1, \quad \forall n > N_0,$$

从而

$$1 \leq [a_n] \leq a_n < [a_n] + 1, \quad \forall n > N_0, \quad (8.1)$$

进而

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{[a_n] + 1} &< 1 + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{[a_n]}, \quad \forall n > N_0, \\ \left(1 + \frac{1}{[a_n] + 1}\right)^{[a_n]} &\leq \left(1 + \frac{1}{[a_n] + 1}\right)^{a_n} \\ &< \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{a_n} < \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n] + 1}, \quad \forall n > N_0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Step2. 下证以下一般性命题.

命题 8.1

设 f 是定义在 \mathbb{R} 上的函数, 则 $\{f(n)\}$ 是一个数列. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A,$$

则对任意一列无穷大正整数数列 $\{a_n\}$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A.$$

事实上, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_0 , 使得对任意 $m > N_0$, 都有

$$|f(m) - A| < \varepsilon. \quad (8.3)$$

又因为 $\{a_n\}$ 是无穷大正整数数列, 则存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$, 都有 $a_n > N_0$, 此时, 令 $m = a_n$ 并代入(8.3)式便得到

$$|f(a_n) - A| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A.$$

命题得证.

Step3. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 根据(8.1)式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n] = +\infty.$$

又因为

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n &= e, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= e,\end{aligned}$$

由 Step2 的结论可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[a_n] + 1}\right)^{[a_n]} = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n] + 1}.$$

根据(8.2)式以及数列极限的迫敛性可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

(2) 设 $a_n = -b_n$, 由条件可知 $a_n > 1$ 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 1) = +\infty.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}& \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \\&= \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)^{-a_n} \\&= \left(\frac{a_n}{a_n - 1}\right)^{a_n} \\&= \left(1 + \frac{1}{a_n - 1}\right)^{a_n - 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{a_n - 1}\right).\end{aligned}$$

由本题 (1) 部分的结果可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n - 1}\right)^{a_n - 1} = e.$$

又因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n - 1}\right) = 1 + 0 = 1,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e \cdot 1 = e.$$


□

注 Step2 中的命题提供了计算数列极限时一种常用技巧——变量代换技巧. 事实上, 还有其他类型的变量代换技巧: 命题中的 A 也可以是 $+\infty$, $-\infty$ 和 ∞ (证明方法同学们自己总结).

总结:

1. 各位同学在写题目的证明过程或者解答过程时, 字迹和逻辑务必清晰, 让别人知道你到底在写什么.
2. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得 $\forall n > N$, 有 $a_n < a + \varepsilon$, 这并不能得出 $a_n \leq a$, 因为 a_n 并不是固定的数. 反例 $a_n = \frac{1}{n}$, $a = 0$.
3. 第 2 题, 大家一定要清楚到底要证明什么, 仔细看一下我给出的参考答案的逻辑和思路.
4. 本次作业同学们的完成状况都非常差. 有些同学连极限的 $\varepsilon - N$ 定义都没有掌握, 存在符号 \exists 写成 E , “ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$ ” 写成 “ $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+$ ”. 第 1 题里面, 根据收敛数列的有界性, $\{a_n\}$ 是有界数列. 这样一句话就得出 $\{a_n\}$ 有上界, 许多同学却没用这个结论, 自己去证明又是错误百出.
5. 有一些同学, 5 道题目只做了第 1 题 (还做错了), 其他题都空着. 有时间参加这个活动那个活动, 就没时间做做作业, 复习一下学过的内容吗?

第 9 周

 **作业题 9.1** 用 $\varepsilon - N$ 极限定义和无穷大数列的定义验证以下极限等式.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} = 1.$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1.$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}.$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n} = +\infty.$

证明 (1) **方法 1.** 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} - 1 \right| &= \left| \frac{\sqrt{n^2+2n} - n}{n} \right| = \left| \frac{1}{n} \cdot \frac{(n^2+2n) - n^2}{\sqrt{n^2+2n} + n} \right| \\ &< \frac{2}{(n+1) + n} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 令 $N = \frac{1}{\varepsilon}$, 则对任意 $n > N$, 有

$$\left| \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} - 1 \right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \varepsilon,$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} = 1.$$

方法 2. 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$1 < \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} = \sqrt{1 + \frac{2}{n}} < 1 + \frac{2}{n},$$

从而

$$\left| \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n} - 1 \right| < \frac{2}{n}.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 令 $N = \frac{2}{\varepsilon}$, 则对任意 $n > N$, 有

$$\left| \frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{n} - 1 \right| < \frac{2}{n} < \frac{2}{N} = \varepsilon,$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{n} = 1.$$

(2) 方法 1: 设 $h_n = \sqrt[n]{n+1} - 1$, 则 $h_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}_+$), 并且

$$n+1 = (h_n + 1)^n \geq 1 + \frac{n^2 h_n^2}{4}, \quad \forall n \geq 2,$$

从而

$$0 < h_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad \forall n \geq 2.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 令 $N = \max \{2, \frac{4}{\varepsilon^2}\}$, 则对任意 $n > N$, 就有

$$|\sqrt[n]{n+1} - 1| = |h_n| < \frac{2}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{N}} \leq \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1.$$

方法 2: 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 并且 $n > 2$, 利用算术-几何平均值不等式可得

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n+1} &= \sqrt[n]{\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+1} \cdot \underbrace{1 \cdots 1}_{n-2}} \\ &\leq \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} + \overbrace{1 + \cdots + 1}^{n-2}}{n} \\ &= \frac{2\sqrt{n+1}}{n} + 1 - \frac{2}{n} \\ &< \frac{2\sqrt{n+n}}{n} + 1 \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + 1, \end{aligned}$$

从而

$$|\sqrt[n]{n+1} - 1| < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}, \quad \forall n > 2.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 令 $N = \max \{\frac{8}{\varepsilon^2}, 2\}$, 则对任意 $n > N$, 就有

$$|\sqrt[n]{n+1} - 1| < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \leq \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1.$$

(3) 反正切函数

$$y = \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}$$

是 \mathbb{R} 上的奇函数, 在 \mathbb{R} 上严格增并且值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 总有

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan n < \frac{\pi}{2},$$

从而

$$\left| \arctan n - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2} - \arctan n.$$

对任意 $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, 令 $N = \tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) > 0$, 则对任意 $n > N$, 由反正切函数 $y = \arctan x$ 的单调性可知

$$\arctan n > \arctan N = \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

从而

$$\left| \arctan n - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2} - \arctan n < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

对任意 $\varepsilon \geq \frac{\pi}{2}$, 任取 $N \in \mathbb{N}_+$, 则对任意 $n > N$, 都有

$$\left| \arctan n - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2} - \arctan n \leq \varepsilon.$$

综上

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}.$$

(4) 方法 1: 当 $n \geq 4$ 时, $n \geq 2\sqrt{n}$, 从而 $n - \sqrt{n} \geq \sqrt{n}$,

$$\sqrt{n - \sqrt{n}} \geq n^{\frac{1}{4}}, \quad \forall n \geq 4.$$

对任意 $M > 0$, 令 $N = \max\{4, M^4\} > 0$, 则对任意 $n > N$, 有

$$\sqrt{n - \sqrt{n}} \geq n^{\frac{1}{4}} > N^{\frac{1}{4}} \geq M,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n - \sqrt{n}} = +\infty.$$

方法 2: 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 都有 $\sqrt{n} - 1 \geq 0$, 从而

$$n - \sqrt{n} \geq (n - \sqrt{n}) - (\sqrt{n} - 1) = n - 2\sqrt{n} + 1 = (\sqrt{n} - 1)^2,$$

$$\sqrt{n - \sqrt{n}} \geq \sqrt{n} - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$


对任意 $M > 0$, 令 $N = (M + 1)^2$, 则对任意 $n > N$, 有

$$\sqrt{n - \sqrt{n}} \geq \sqrt{n} - 1 > \sqrt{N} - 1 = M,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n - \sqrt{n}} = +\infty.$$

□

 作业题 9.2 计算以下数列的极限.

$$(1) a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

$$(2) a_n = \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}\right). \quad (\text{提示: 先通分最后一个因子, 然后耐心多算几项就可以发现规律.})$$

$$(3) a_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}. \quad (\text{提示: } \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \frac{1}{k+2} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{k+2}\right) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{k(k+2)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right))$$

$$(4) a_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdots \frac{n+1}{2n+1}.$$

$$(5) \ a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}.$$

解 (1) 对任意 $k \in \mathbb{N}_+$, 有

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \frac{n+1}{n}.$$

当 $n \geq 3$ 时, 就有

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right) \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \cdots \frac{n-2}{n-1} \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n} \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{2} \frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

(2) 对任意 $k \in \mathbb{N}_+$ 并且 $k \geq 5$, 有

$$1 - \frac{1}{1+2+3+\cdots+k} = 1 - \frac{2}{k(k+1)} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)},$$

从而

$$\begin{aligned} &\frac{(k-4)(k-1)}{(k-3)(k-2)} \cdot \frac{(k-3)k}{(k-2)(k-1)} \cdot \frac{(k-2)(k+1)}{(k-1)k} \cdot \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} \\ &= \frac{k-4}{k-2} \cdot \frac{k+2}{k}. \end{aligned}$$

利用归纳法可证, 当 $n \in \mathbb{N}_+$ 并且 $n \geq 5$ 时,

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n}. \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3}.$$

(3) 对任意 $k \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \frac{1}{k+2} \\ &= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{k+2}\right) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{k+2}\right) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{k(k+2)} \\ &= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right). \end{aligned}$$

由归纳法可证,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{4}.$$

(4) 显然, $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$. 另一方面,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)+1} < 1.$$

所以 $\{a_n\}$ 单调递减, 并且有下界 0. 根据单调有界定理, $\{a_n\}$ 收敛, 存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0.$$

由于

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)+1} a_n,$$

在上式两端令 $n \rightarrow \infty$, 可得 $a = \frac{1}{2}a$, 从而 $a = 0$. 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(5) 显然, $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$. 另一方面, 当 $n \geq 10$ 时,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)+9}{2(n+1)-1} < 1.$$

所以去掉前 10 项后, $\{a_n\}$ 单调递减且有下界 0. 根据单调有界定理, $\{a_n\}$ 收敛, 存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0.$$

由于

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)+9}{2(n+1)-1} a_n, \quad \forall n \geq 10,$$

在上式两端令 $n \rightarrow \infty$, 可得 $a = \frac{1}{2}a$, 从而 $a = 0$. 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. □

注 上面的 (4)(5) 两小题, 也可以看作教材 P38 页第 7 题的特例. 若 $a_n > 0$, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{a_{n+1}} = l > 1,$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

作业题 9.3 用闭区间套定理证明确界原理.

证明 设 S 是有上界的实数集, M 是 S 的一个上界. 若任取 $x \in S$, x 都是 S 的上界, 此时 S 中只有一个元素 x , 从而 S 的上确界存在, 并且 $\sup S = x$. 下设存在 $m \in S$, 使得 m 不是 S 的上界.

记 $a_1 = m, b_1 = M$. 则 a_1 不是 S 的上界, b_1 是 S 的上界, 并且 $b_1 - a_1 = M - m$.

令 $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. 若 c_1 是 S 的上界, 则记 $a_2 = a_1, b_2 = c_1$; 若 c_1 不是 S 的上界, 则记 $a_2 = c_1, b_2 = b_1$. 总之, a_2 不是 S 的上界, b_2 是 S 的上界, 并且 $b_2 - a_2 = \frac{M-m}{2}$.

令 $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$. 若 c_2 是 S 的上界, 则记 $a_3 = a_2, b_3 = c_2$; 若 c_2 不是 S 的上界, 则记 $a_3 = c_2, b_3 = b_2$. 总之, a_3 不是 S 的上界, b_3 是 S 的上界, 并且 $b_3 - a_3 = \frac{M-m}{2^2}$.

.....

上述过程一致重复下去, 就得到一列闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$, 满足

- (i) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$;
 (ii) $b_n - a_n = \frac{M-m}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}_+$;
 (iii) 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, a_n 不是 S 的上界, b_n 是 S 的上界.

由 (i)(ii) 可知, $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间套, 根据闭区间套定理, 存在唯一的 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得

$$\xi \in [a_n, b_n], \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

并且

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$, 有

$$[a_n, b_n] \subset U(\xi, \varepsilon) = (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon). \quad (9.1)$$

下证 $\xi = \sup S$.

由于 $b_n (n \in \mathbb{N}_+)$ 都是 S 的上界, 则对任意 $x \in S$, 有

$$x \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

由数列极限的保不等式性可得

$$x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi,$$

所以 ξ 是 S 的一个上界. 设 $\alpha < \xi$ 并令 $\varepsilon = \xi - \alpha$, 则 $\varepsilon > 0$ 并且 $\alpha = \xi - \varepsilon$. 于是, 根据(9.1), 存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$, 都有

$$a_n > \xi - \varepsilon = \alpha.$$

由于 a_n 不是 S 的上界, 则 α 也不是 S 的上界.


综上, S 的上确界存在并且 $\sup S = \xi$.

同理可证, 任何有下界的实数集必有下确界. □

总结:

- 第 1 大题题干要求用数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义和无穷大数列的定义来验证极限等式, 这里就不能用收敛数列的迫敛性等性质, 要严格按照定义寻找合适的正整数 N .
- 三角函数和反三角函数的定义域、值域、单调性、周期性和图像从网上均可查到.
- 本次作业完成的比较好的同学: **孙景祯**

第 10 周

 **作业题 10.1** 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+2} - a_n) = a$, 证明

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{a}{2}$; (提示: 利用 Cauchy 命题分别算一下 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 的偶数子列和奇数子列的极限)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n} = 0$.

证明 (1) 令 $b_n = a_{2n-1}$, $c_n = a_{2n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+2} - a_n) = 0,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_n) = a = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_{n+1} - c_n).$$

再令

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 &= b_1, & \tilde{b}_n &= b_n - b_{n-1} \quad (n \geq 2); \\ \tilde{c}_1 &= c_1, & \tilde{c}_n &= c_n - c_{n-1} \quad (n \geq 2), \end{aligned}$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{b}_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_n$$

并且

$$b_n = \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k, \quad c_n = \sum_{k=1}^n \tilde{c}_k, \quad \forall n \geq 2.$$

利用 Cauchy 命题就可得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n},$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{2n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}a, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{2n} &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n} = \frac{1}{2}a, \end{aligned}$$

即数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 的奇数子列和偶数子列的极限均为 $\frac{1}{2}a$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{2}a.$$

(2) 由于

$$\frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a_{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n},$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{a}{2} \cdot 1 = \frac{a}{2},$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n} = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = 0.$$

□

作业题 10.2 证明

定理 10.1. $\frac{0}{0}$ 型 Stolz 定理

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是无穷小数列, 并且 $\{a_n\}$ 严格减. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l,$$

其中 l 可以是实数、 $+\infty$ 或 $-\infty$ (不能是 ∞), 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = l.$$



证明 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 并且 $\{a_n\}$ 严格减, 则

$$a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

I. 当 $l \in \mathbb{R}$ 时, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l,$$

则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得对任意 $k \geq N$, 都有

$$\left| \frac{b_{k+1} - b_k}{a_{k+1} - a_k} - l \right| < \varepsilon,$$

即

$$l - \varepsilon < \frac{b_{k+1} - b_k}{a_{k+1} - a_k} < l + \varepsilon, \quad \forall k \geq N.$$

由于 $a_{k+1} - a_k < 0$ ($\forall k \in \mathbb{N}_+$), 因此

$$(l + \varepsilon)(a_{k+1} - a_k) < b_{k+1} - b_k < (l - \varepsilon)(a_{k+1} - a_k), \quad k \geq N. \quad (10.1)$$

对任意 $m > n \geq N$, 有 $a_m - a_n < 0$ 并且

$$a_m - a_n = \sum_{k=n}^{m-1} (a_{k+1} - a_k), \quad b_m - b_n = \sum_{k=n}^{m-1} (b_{k+1} - b_k),$$

结合(10.1)式就可得

$$(l + \varepsilon)(a_m - a_n) < b_m - b_n < (l - \varepsilon)(a_m - a_n), \quad \forall m, n > N.$$

从而

$$l - \varepsilon < \frac{b_m - b_n}{a_m - a_n} < l + \varepsilon,$$

即

$$\left| \frac{b_m - b_n}{a_m - a_n} - l \right| < \varepsilon, \quad \forall m, n > N. \quad (10.2)$$

由于

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 0 = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m,$$

固定(10.2)式中的 n , 并令 $m \rightarrow \infty$ 可得

$$\left| \frac{b_n}{a_n} - l \right| = \left| \frac{0 - b_n}{0 - a_n} - l \right| \leq \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = l.$$

II. 当 $l = +\infty$ 时, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = +\infty,$$

则存在正整数 N_0 , 使得对任意 $n \geq N_0$, 都有

$$\frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} > 0,$$

从而

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} > 0, \quad \forall n \geq N_0 \quad \text{并且} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 0. \quad (10.3)$$

由于 $a_{n+1} - a_n < 0$, 则

$$b_{n+1} - b_n < 0, \quad \forall n \geq N_0,$$

即 $n \geq N_0$ 时, $\{b_n\}$ 是严格减的无穷小数列并且 $b_n > 0$. 根据(10.3)式以及上一步的结论可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 0.$$

又因为

$$a_n > 0, \quad b_n > 0, \quad \forall n \geq N_0,$$

则易证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty.$$

III. 当 $l = -\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = -\infty.$$

令 $c_n = -b_n$, 则易证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1} - c_n}{a_{n+1} - a_n} = +\infty.$$


由上一步的结论可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = +\infty,$$

由此可证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = -\infty.$$

□


 **作业题 10.3** 利用 Stolz 定理计算以下数列的极限:

$$(1) \quad a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{n^\alpha}, \quad \text{其中 } \alpha > 0.$$

$$(2) \quad a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n}.$$

$$(3) \quad a_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}.$$

$$(4) \quad a_n = n \left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1} \right), \quad \text{其中 } k \text{ 为正整数}.$$

 **注意** 本题第 (1) 题处理 $0 < \alpha < 1$ 的情形的方法稍微超纲, 同学们可以学完第 6 章第 1 节后再看.

解 (1) 显然 $\{n^\alpha\}$ 是严格增的正无穷大列.

(i) 当 $\alpha \geq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{\frac{1}{n+1}}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} \\ &= \frac{1}{(n+1)n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right]} \\ &\leq \frac{1}{(n+1)n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right]} \\ &= \frac{1}{n^\alpha \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &< \frac{1}{n^\alpha}. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, 则由数列极限的迫敛性可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} = 0 \quad (\alpha \geq 1).$$

(ii) 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 根据微分中值定理, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = \alpha(n+\theta)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{(n+\theta)^{1-\alpha}} > \frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}},$$

从而

$$0 < \frac{\frac{1}{n+1}}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} < \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}}} = \frac{\alpha}{(n+1)^\alpha}.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{(n+1)^\alpha} = 0,$$

则由数列极限的迫敛性可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} = 0 \quad (0 < \alpha < 1).$$

综上, 利用 Stolz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} = 0.$$

(2) 易证 $\{\ln n\}$ 是严格增的正无穷大数列. 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1) - \ln n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{n}{n+1} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 根据数列极限的保号性, 对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$, 存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$, 都有

$$e^{1-\varepsilon} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e^{1+\varepsilon},$$

从而

$$1 - \varepsilon < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1$. 又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = 1.$$

根据 Stolz 定理, 就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1) - \ln n} = 1.$$

(3) 由于

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)! - n!} = \frac{n+1}{(n+1) - 1} = \frac{n+1}{n},$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)! - n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)! - n!} = 1.$$

(4) 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$a_n = n \left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{(k+1)(1^k + 2^k + \cdots + n^k) - n^{k+1}}{(k+1)n^k}.$$

设

$$b_n = (k+1)(1^k + 2^k + \cdots + n^k) - n^{k+1}, \quad c_n = (k+1)n^k,$$

则

$$\begin{aligned} & b_{n+1} - b_n \\ &= (k+1)(n+1)^k - (n+1)^{k+1} + n^{k+1} \\ &= (k+1) \left(n^k + kn^{k-1} + \cdots + 1 \right) - \left[n^{k+1} + (k+1)n^k + \frac{k(k+1)}{2}n^{k-1} + \cdots + 1 \right] + n^{k+1} \\ &= \frac{k(k+1)}{2}n^{k-1} + \cdots + k, \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} & c_{n+1} - c_n \\ &= (k+1)(n+1)^k - (k+1)n^k \\ &= (k+1) \left[n^k + kn^{k-1} + \cdots + 1 \right] - (k+1)n^k \\ &= k(k+1)n^{k-1} + \cdots + (k+1), \end{aligned}$$


于是 $b_{n+1} - b_n$ 和 $c_{n+1} - c_n$ 都是关于 n 的 $k-1$ 次多项式, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1} - c_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{k(k+1)}{2}n^{k-1} + \cdots + k}{k(k+1)n^{k-1} + \cdots + (k+1)} = \frac{1}{2}.$$

由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1} - c_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{1}{2}.$$

□

 **作业题 10.4** 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 证明

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2^k a_2 + 3^k a_3 + \cdots + n^k a_n}{n^{k+1}} = \frac{a}{k+1}, \text{ 其中 } k \text{ 为非负整数}.$$

证明 (1) 设 $b_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$, $c_n = n^2$, 则

$$b_{n+1} - b_n = (n+1)a_{n+1}, \quad c_{n+1} - c_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1,$$

从而

$$\frac{b_{n+1} - b_n}{c_{n+1} - c_n} = \frac{n+1}{2n+1} \cdot a_{n+1}.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{c_{n+1} - c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}a.$$

根据 Stolz 定理就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{c_{n+1} - c_n} = \frac{a}{2}.$$

(2) 当 $k = 0$ 时, 由 Cauchy 命题可知结论成立; 当 $k = 1$ 时, 由本题 (1) 可知结论也成立. 下面假设 $k \geq 2$. 设 $b_n = a_1 + 2^k a_2 + 3^k a_3 + \cdots + n^k a_n$, $c_n = n^{k+1}$, 则

$$b_{n+1} - b_n = (n+1)^k a_{n+1},$$

$$c_{n+1} - c_n = (n+1)^{k+1} - n^{k+1} = (k+1)n^k + \frac{k(k+1)}{2}n^{k-1} + \cdots + 1.$$


由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{c_{n+1} - c_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k}{(k+1)n^k + \frac{k(k+1)}{2}n^{k-1} + \cdots + 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \\ &= \frac{1}{k+1} \cdot a. \end{aligned}$$

根据 Stolz 定理就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{c_{n+1} - c_n} = \frac{a}{k+1}.$$

□

 **作业题 10.5** 给出以下函数极限等式的严格定义.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

(第 1 步, 先指明函数 f 在何种形式的范围内有定义.)

解 (1) 设函数 f 在 $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ 内有定义. 若对任意 $M < 0$, 存在 $N > 0$, 使得 $N \geq b$, $-N \leq a$ 并且对任意 $x: |x| > N$, 都有

$$f(x) < M,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

(2) 设函数 f 在 $(-\infty, a)$ 内有定义. 若对任意 $M > 0$, 存在 $N \leq a$, 使得对任意 $x < N$, 都有

$$|f(x)| > M,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty.$$

(3) 设函数 f 在 $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ 内有定义. 若对任意 $M > 0$, 存在 $N > 0$, 使得 $N \geq b$, $-N \leq a$ 并且对任意 $x: |x| > N$, 都有

$$|f(x)| > M,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

(4) 设函数 f 在 x_0 的某去心邻域 $U^\circ(x_0; \delta')$ 内有定义. 若对任意 $M < 0$, 存在正数 $\delta (< \delta')$, 使得

$$\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta,$$

都有

$$f(x) < M,$$

则


$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

□

总结:

1. 许多同学对课本内容掌握不熟, 例如 P30 例 4 有理分式求极限的问题, 该题的结论可以直接用 (但是要注意前提条件).
2. 只有极限存在时, 才能用四则运算法则, 先确定极限是否存在, 再去做加减乘除.
3. 求极限时, 最好不要一开始就写极限符号 “lim”, 先处理要求极限的数列或函数, 处理完后再用极限符号.

第 11 周

 **作业题 11.1** 给出以下函数极限等式的严格定义.

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty.$$

解 (1) 设函数 f 在 x_0 的某去心左邻域 $U_-^\circ(x_0; \delta')$ 中有定义. 若对任意 $M < 0$, 存在正数 $\delta (< \delta')$, 使得对任意 $x \in U_-^\circ(x_0; \delta)$, 都有

$$f(x) < M,$$

则称 x 趋于 x_0^- 时函数 f 发散于 $-\infty$, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$$


(2) 设函数 f 在 x_0 的某去心右邻域 $U_+^\circ(x_0; \delta')$ 中有定义. 若对任意 $M > 0$, 存在正数 $\delta (< \delta')$, 使得对任意 $x \in U_+^\circ(x_0; \delta)$, 都有

$$|f(x)| > M,$$

则称 x 趋于 x_0^+ 时函数 f 发散于 ∞ , 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty.$$

□

 **作业题 11.2** 用正面方式叙述以下否定性概念 (如同 P46 第 2 题):

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq A;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq A;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq \infty;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq +\infty.$$

解 (1) 设函数 f 在 $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ 内有定义, A 是固定的实数. 若存在 $\epsilon_0 > 0$, 使得对任意 $M > 0$, 都存在 $x \in \mathbb{R}$ 满足 $|x| > M$ 并且

$$|f(x) - A| \geq \epsilon_0,$$

则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq A$.

(2) 设函数 f 在 x_0 的某去心左邻域 $U_-^\circ(x_0; \delta')$ 中有定义, A 是固定的实数. 若存在 $\epsilon_0 > 0$, 使得对任意 $\delta: 0 < \delta < \delta'$, 都存在 $x \in U_-^\circ(x_0; \delta)$ 满足

$$|f(x) - A| \geq \epsilon_0,$$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq A$.

(3) 设函数 f 在 x_0 的某去心邻域 $U^\circ(x_0; \delta')$ 中有定义. 若存在 $M > 0$, 使得对任意 $\delta: 0 < \delta < \delta'$, 都存在 $x \in U^\circ(x_0; \delta)$ 满足

$$|f(x)| \leq M,$$


则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq \infty$.

(4) 设函数 f 在 x_0 的某去心右邻域 $U_+^\circ(x_0; \delta')$ 中有定义. 若存在 $M > 0$, 使得对任意 $\delta: 0 < \delta < \delta'$, 都存在 $x \in U_+^\circ(x_0; \delta)$ 满足

$$f(x) \leq M,$$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq +\infty$.

□

 **作业题 11.3** 在某些情况下, 非正常函数极限也具有类似于正常极限的一些性质. 证明以下结论成立:

(1) (类似于绝对值性质) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = +\infty$;

(2) (类似于保号性) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = +\infty$, 则对任何实数 $c \in \mathbb{R}$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $x \in U_-^\circ(x_0; \delta)$, 都有

$$f(x) < c < g(x).$$

(3) (类似于加法、乘法法则) 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, 则

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)g(x) = +\infty.$$

(4) (类似于减法、乘法法则) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = -\infty$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} (f(x) - g(x)) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)g(x) = -\infty.$$

(5) (类似于迫敛性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, 并且存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $x \in U^\circ(x_0; \delta)$, 有

$$f(x) \leq g(x),$$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

证明 (1) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, 则对任意 $M > 0$, 存在 $b \geq 0$, 使得对任意 $x : |x| \geq b$, 都有 $f(x) < -M < 0$, 于是

$$|f(x)| > |M| = M, \quad \forall x : |x| \geq b,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = +\infty.$$

(2) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = +\infty$, 则对任意 $c \in \mathbb{R}$, 存在 $\delta_1, \delta_2 > 0$, 使得对任意 $x \in U_-(x_0; \delta_1)$, 有 $f(x) < c$; 对任意 $x \in U_-(x_0; \delta_2)$, 有 $g(x) > c$. 令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, 则对任意 $x \in U_-(x_0; \delta)$, 同时成立

$$f(x) < c < g(x).$$

(3) 设 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, 则对任意 $M > 0$, 一方面存在 $a_1 < 0$, 使得对任意 $x < a_1$, 同时成立

$$f(x) > \frac{M}{2}, \quad g(x) > \frac{a}{2},$$

从而

$$f(x) + g(x) > M, \quad \forall x < a_1.$$

另一方面, 存在 $a_2 < 0$, 使得对任意 $x < a_2$, 同时成立

$$f(x) > \sqrt{M}, \quad g(x) > \sqrt{M},$$

从而

$$f(x)g(x) > M, \quad \forall x < a_2.$$

综上, 根据定义就有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)g(x) = +\infty.$$

(4) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = -\infty$, 则对任意 $M > 0$, 一方面存在 $\delta_1 > 0$, 使得对任意 $x \in U_+(x_0; \delta_1)$, 同时成立

$$f(x) > \frac{M}{2}, \quad g(x) < -\frac{M}{2},$$

从而

$$f(x) - g(x) > \frac{M}{2} - \left(-\frac{M}{2}\right) = M, \quad \forall x \in U_+(x_0; \delta_1).$$

另一方面, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得对任意 $x \in U_+(x_0; \delta_2)$, 同时成立

$$f(x) > \sqrt{M}, \quad g(x) < -\sqrt{M},$$

从而

$$f(x)g(x) < \sqrt{M} \cdot (-\sqrt{M}) = -M, \quad \forall x \in U_+(x_0; \delta_2).$$

综上, 根据定义就有

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} (f(x) - g(x)) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)g(x) = -\infty.$$

(5) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, 并且存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $x \in U^\circ(x_0; \delta)$, 有

$$f(x) \leq g(x),$$

则对任意 $M > 0$, 存在 $\delta' > \delta > 0$, 使得对任意 $x \in U^\circ(x_0; \delta')$, 有 $f(x) > M$, 从而

$$g(x) \geq f(x) > M, \quad \forall x \in U^\circ(x_0; \delta'),$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

□

作业题 11.4 证明:

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \phi(x) = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(\phi(x)) = -\infty.$$

(2) 设函数 ϕ 在 $[a, +\infty)$ 上有定义、严格增并且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = t_0 \in \mathbb{R}$. 若 $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = l \in \mathbb{R}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(\phi(x)) = l.$$

证明 (1) 对任意 $M < 0$, 由于 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty$, 则存在 $T > 0$, 使得对任意 $t > T$, 都有

$$f(t) < M < 0.$$

另一方面, 令 $t = \phi(x)$. 由于 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \phi(x) = +\infty$, 则对上述 $T > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $x \in U^\circ(x_0; \delta)$, 总有

$$t = \phi(x) > T,$$

从而

$$f(\phi(x)) = f(t) < M, \quad \forall x \in U^\circ(x_0; \delta).$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(\phi(x)) = -\infty.$$

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = l$, 则存在 $\delta > 0$, 使得对任意

$$t : t_0 - \delta < t < t_0,$$

有 $|f(t) - l| < \varepsilon$. 另一方面, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = t_0$, 则对上述 $\delta > 0$, 存在 $b \geq a$, 使得对任意 $x > b$, 都有

$$|\phi(x) - t_0| < \delta,$$

即

$$t_0 - \varepsilon < \phi(x) < t_0 + \varepsilon, \quad \forall x > b.$$

下证

$$t_0 - \varepsilon < \phi(x) < t_0, \quad \forall x > b.$$

反证法, 假设存在 $c > b$ 使得 $t_0 \leq \phi(c) < t_0 + \varepsilon$. 由于 ϕ 在 $[a, +\infty)$ 上严格增, 则对任意 $x \geq c + 1$, 有

$$\phi(x) \geq \phi(c + 1) > \phi(c) \geq t_0.$$

由于 x 趋于 $+\infty$ 时函数 $\phi(x)$ 的极限存在, 则由上式以及函数极限的保不等式性, 就有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) \geq \phi(c+1) > t_0,$$

这与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = t_0$ 矛盾.

令 $t = \phi(x)$, 则对任意 $x > b$, 有 $t = \phi(x) \in (t_0 - \delta, t_0)$, 从而

$$|f(\phi(x)) - l| = |f(t) - l| < \varepsilon, \quad \forall x > b.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(\phi(x)) = l.$$

□

总结:

1. 注意理清 $\varepsilon > 0$, $M > 0$ 与 $\delta > 0$, a 等的联系, 特别是前后, 因果顺序.
2. 本次作业完成的比较好的同学: 史飞, 赵鑫琳, 王芹, 李春贤, 鲁涵彤, 孙景祯, 任意飞.

第 12 周

对于 6 类基本初等函数 (P13), 我们已经知道以下极限式:

- I. 常量函数 $f(x) \equiv c$, $x \in \mathbb{R}$. 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = c$;
- II. 设 $n \in \mathbb{N}_+$. 由函数极限的乘法法则可知, 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$;
- III. 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$. 由 P49 例 4 和 P5 第 6 题, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$.
- V. 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$.

我们可以猜测: 设 f 是一个基本初等函数, 定义域 D 是 f 的存在域, 则对任意 $x_0 \in D$, 都有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对

$$\forall x : |x - x_0| < \delta,$$

都有 $x \in D$ 并且

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

按以下步骤逐步证明上述猜测:

Step1. 利用实指数幂的定义 (P13 定义 2) 和上、下确界的定义证明:

命题 12.1

设 $a > 0$, α, β 为任意两个实数, 则有

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}, \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}.$$



Step2. 利用上一步的结论证明:

命题 12.2

设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 则对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$.

提示: $a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)$, 再结合 $\lim_{t \rightarrow 0} a^t = 1$ 这一结论.

Step3. 证明:

命题 12.3

若函数 f 在 $[a, b]$ 上严格单调并且对任意 $x_0 \in (a, b)$, 都有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

则反函数 f^{-1} 在 $(f(a), f(b))$ 或 $(f(b), f(a))$ 上满足: 对任意 $y_0 \in (f(a), f(b))$ 或 $y_0 \in (f(b), f(a))$, 有

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0).$$

Step4. 证明:

命题 12.4

设

(i) D 为开区间, 函数 $t = \phi(x)$, $x \in D$ 满足: 对任意 $x_0 \in D$, 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \phi(x_0)$.

(ii) 函数 $y = f(t)$, $t \in \phi(D)$ 满足: 对任意 $t_0 \in \phi(D)$, 都有 $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$.

则对任意 $x_0 \in D$, 复合函数 $y = f(\phi(x))$, $x \in D$ 都满足

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\phi(x)) = f(\phi(x_0)).$$

Step5. 利用 Step2 和 Step3 的结论证明:

命题 12.5

设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 则对任意 $x_0 > 0$, 都有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0.$$

Step6. 利用 Step2, Step4, Step5 的结论证明:

命题 12.6

设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 则对任意 $x_0 > 0$, 都有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha.$$

提示: $x > 0$ 时, 有 $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, 令 $y = e^t$, $t = \alpha \ln x$.

Step7. 利用 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$ 这一结论和函数极限的四则运算法则证明:

(i) 对任意 $x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$.

(ii) 对任意 $x_0 \in (0, \pi)$, 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \cot x = \cot x_0$.

Step8. 利用 Step3 和 Step7 以及 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$ 这一结论, 证明:

(i) 对任意 $x_0 \in (-1, 1)$, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0$;

(ii) 对任意 $x_0 \in (-1, 1)$, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0$;

(iii) 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \arctan x = \arctan x_0$;

(iii) 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arccot} x = \operatorname{arccot} x_0$.

Step9. 证明:

(i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \arcsin x = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$;

(ii) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \arccos x = \arccos 1 = 0$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \arccos x = \arccos(-1) = \pi$.

猜测的证明结束.

证明 Step1. 当 $a > 1$ 时, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有

$$a^x = \sup_{r \leq x} \{a^r \mid r \text{ 为有理数}\} > 0.$$

任取 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

一方面, 对任意 ε , $0 < \varepsilon < \min\{a^\alpha, a^\beta\}$, 根据上确界的定义, 存在有理数 r, s , 使得 $r \leq \alpha$, $s \leq \beta$ 并且

$$0 < a^\alpha - \varepsilon < a^r \leq a^\alpha, \quad 0 < a^\beta - \varepsilon < a^s \leq a^\beta.$$

由上式可得

$$a^\alpha \cdot a^\beta - (a^\alpha + a^\beta)\varepsilon < (a^\alpha - \varepsilon)(a^\beta - \varepsilon) < a^{r+s}.$$

由于 $r + s \leq \alpha + \beta$, 根据指数函数 a^x 的严格增性, 就有

$$a^\alpha \cdot a^\beta - (a^\alpha + a^\beta)\varepsilon < a^{r+s} \leq a^{\alpha+\beta}.$$

由 ε 的任意性就有

$$a^\alpha \cdot a^\beta \leq a^{\alpha+\beta}.$$

另一方面, 由于

$$a^{\alpha+\beta} = \sup_{r \leq \alpha+\beta} \{a^r \mid r \text{ 为有理数}\},$$

则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有理数 $p \leq \alpha + \beta$, 使得

$$a^{\alpha+\beta} - \varepsilon < a^p \leq a^{\alpha+\beta}.$$

取有理数 r, s , 使之满足 $r \leq \alpha$, $s \leq \beta$ 并且 $p \leq r + s \leq \alpha + \beta$. 由指数函数 a^x 的严格增性, 就有

$$a^{\alpha+\beta} - \varepsilon < a^p \leq a^{r+s} = a^r \cdot a^s \leq a^\alpha \cdot a^\beta.$$

根据 ε 的任意性, 就有

$$a^{\alpha+\beta} \leq a^\alpha \cdot a^\beta.$$

所以, 当 $a > 1$ 时, 就有 $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta$. 当 $0 < a < 1$ 时, 同理可证 $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta$.

综上, 对任意 $a > 0$, 都有 $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta$.

Step2. 对任意 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 都有

$$\lim_{t \rightarrow 0} a^t = 1.$$

对任意 $x \in \mathbb{R}$, 由 Step1 的结论可得

$$a^x = a^{x_0 + (x - x_0)} = a^{x_0} \cdot a^{x - x_0}.$$

由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$, 令 $t = x - x_0$, 利用复合函数极限法则, 就有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x - x_0} = a^{x_0} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} a^t = a^{x_0} \cdot 1 = a^{x_0}.$$

Step3. 不妨设 f 在 $[a, b]$ 上严格增. 任取 $y_0 \in (f(a), f(b))$, 则存在唯一 $x_0 \in (a, b)$ 使得

$$y_0 = f(x_0).$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 可以找到 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 使得

$$x_0 - \varepsilon < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \varepsilon.$$

令 $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, 根据 f 的严格增性, 就有

$$y_1 < y_0 < y_2.$$

令 $\delta = \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\} > 0$, 则对任意 $y \in U(y_0; \delta)$, 就有

$$x = f^{-1}(y) \in (x_1, x_2) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

从而

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |x - x_0| < \varepsilon, \quad \forall y \in U(y_0; \delta).$$

根据函数极限的定义, 就有

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0).$$

Step4. 根据条件, 任取 $x_0 \in D$, 令 $t_0 = \phi(x_0) \in \phi(D)$, 函数 ϕ 在 x_0 点有定义, f 在 t_0 点也有定义, 并且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \phi(x_0) = t_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0) = f(\phi(x_0)).$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 $f(t_0)$ 有定义并且 $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0) = f(\phi(x_0))$ 可知, 存在 $\sigma > 0$, 使得对任意 $t: |t - t_0| < \sigma$, 都有

$$|f(t) - f(\phi(x_0))| < \varepsilon. \quad (12.1)$$

又因为 $\phi(x_0)$ 有定义并且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \phi(x_0) = t_0$, 则对上述 $\sigma > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $x: |x - x_0| < \delta$, 都有

$$|\phi(x) - \phi(x_0)| = |\phi(x) - t_0| < \sigma.$$

令 $t = \phi(x)$, $x \in D$, 则

$$|t - t_0| < \sigma, \quad \forall x \in U(x_0; \delta),$$

代入(12.1)式可得

$$|f(\phi(x)) - f(\phi(x_0))| = |f(t) - f(\phi(x_0))| < \varepsilon.$$

根据函数极限的定义, 就有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\phi(x)) = f(\phi(x_0)).$$

Step5. 当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时, 指数函数 a^x 在定义域 \mathbb{R} 上严格单调并且有反函数——对数函数 $\log_a x$. 于是对任意 $y_0 \in (0, +\infty)$, 存在唯一的 $x_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $y_0 = a^{x_0}$. 显然指数函数 a^x 在 $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ 上有定义并且严格单调. 对任意 $t \in (x_0 - 1, x_0 + 1)$, 由 Step2 的结论可知

$$\lim_{x \rightarrow t} a^x = a^t.$$

根据对数函数 $\log_a x$ 的严格单调性, y_0 介于 $\log_a(x_0 - 1)$ 与 $\log_a(x_0 + 1)$ 之间. 根据 Step3 的结论, 就有

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \log_a y = \log_a y_0.$$

Step6. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 幂函数 x^α , $x > 0$ 可以视为

$$f(t) = e^t; \quad t = \phi(x) = \alpha \ln x, \quad x > 0$$

的复合函数. 对任意 $x_0 > 0$, 令 $t_0 = \alpha \ln x_0$. 由 Step5 的结论可得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha \ln x = \alpha \ln x_0 = \phi(x_0) = t_0,$$

由 Step2 的结论可得

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} e^t = e^{t_0} = f(t_0).$$

综上, 利用 Step4 结论可得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} f(\phi(x)) = f(\phi(x_0)) = x_0^\alpha.$$

Step7. 当 $x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时, 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0 \neq 0.$$

根据函数极限的除法法则, 就有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x}{\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \tan x_0.$$

当 $x_0 \in (-\pi, \pi)$ 时, 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0.$$

根据函数极限的除法法则, 就有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cot x = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x}{\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x} = \frac{\cos x_0}{\sin x_0} = \cot x_0.$$

Step8.

函数 $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$ 是正弦函数 $y = \sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的反函数, 两者均在定义域上严格增. 对任意 $x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$, 结合 Step3 的结论, 对任意 $t_0 \in (-1, 1)$, 就有

$$\lim_{x \rightarrow t_0} \arcsin x = \arcsin t_0.$$

函数 $y = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$ 是余弦函数 $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$ 的反函数, 两者均在定义域上严格减. 对任意 $x_0 \in (0, \pi)$, 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$, 结合 Step3 的结论, 对任意 $t_0 \in (-1, 1)$, 就有

$$\lim_{x \rightarrow t_0} \arccos x = \arccos t_0.$$

函数 $y = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$ 是正切函数 $y = \tan x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的反函数, 两者均在定义域上严格增. 对任意 $x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$, 结合 Step3 的结论, 对任意 $t_0 \in \mathbb{R}$, 就有

$$\lim_{x \rightarrow t_0} \arctan x = \arctan t_0.$$

函数 $y = \operatorname{arccot} x$, $x \in \mathbb{R}$ 是余切函数 $y = \cot x$, $x \in (0, \pi)$ 的反函数, 两者均在定义域上严格减. 对任意 $x_0 \in (0, \pi)$, 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \cot x = \cot x_0$, 结合 Step3 的结论, 对任意 $t_0 \in \mathbb{R}$, 就有

$$\lim_{x \rightarrow t_0} \operatorname{arccot} x = \operatorname{arccot} t_0.$$

Step9.

对任意 $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, 令 $x_1 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $y_1 = \sin x_1$. 根据正弦函数 $\sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的严格增性, 就有

$$y_1 = \sin x_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) < \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

令 $\delta = 1 - y_1 > 0$, 则对任意

$$y \in U_-(1, \delta) = (y_1, 1),$$

就有 $\arcsin y \in (\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2})$, 从而

$$|\arcsin y - \arcsin 1| = \left| \arcsin y - \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon.$$

根据函数极限的定义, 就有

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

对任意 $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, 令 $x_1 = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$, $y_1 = \sin x_1$. 根据正弦函数 $\sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的严格增性, 就有

$$y_1 = \sin x_1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) > \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

令 $\delta = y_1 - (-1) > 0$, 则对任意

$$y \in U_+(-1, \delta) = (-1, y_1),$$

就有 $\arcsin y \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \varepsilon)$, 从而

$$|\arcsin y - \arcsin(-1)| = \left| \arcsin y - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right| < \varepsilon.$$

根据函数极限的定义, 就有

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \arcsin x = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

对任意 $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, 令 $x_1 = \varepsilon$, $y_1 = \cos x_1$. 根据余弦函数 $\cos x$, $x \in [0, \pi]$ 的严格减性, 就有

$$y_1 = \cos x_1 = \cos \varepsilon < \cos 0 = 1.$$

令 $\delta = 1 - y_1 > 0$, 则对任意

$$y \in U_-(1, \delta) = (y_1, 1),$$

就有 $\arccos y \in (0, \varepsilon)$, 从而

$$|\arccos y - \arccos 1| = |\arccos y| < \varepsilon.$$

根据函数极限的定义, 就有

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \arccos x = \arccos 1 = 0.$$

对任意 $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, 令 $x_1 = \pi - \varepsilon$, $y_1 = \sin x_1$. 余弦函数 $\cos x$, $x \in [0, \pi]$ 的严格减性, 就有

$$y_1 = \cos x_1 = \cos(\pi - \varepsilon) > \cos \pi = -1.$$

令 $\delta = y_1 - (-1) > 0$, 则对任意

$$y \in U_+(-1, \delta) = (-1, y_1),$$

就有 $\arccos y \in (\pi - \varepsilon, \pi)$, 从而

$$|\arccos y - \arccos(-1)| = |\arccos y - \pi| < \varepsilon.$$

根据函数极限的定义, 就有

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \arccos x = \arccos(-1) = \pi.$$

□