2019-2020 学年第 1 学期泛函分析

学生之友

作者：孙奉龙

组织：曲阜师范大学 数学科学学院

时间：December 5, 2019

版本：1

Victory won't come to us unless we go to it. — M. Moore

目　　录

第 7 章 度量空间和赋范线性空间

7.1 教学计划

1. 导引.
   $\boxed{\text{距离空间的定义}}$.
   距离空间的一些具体例子.
   验证距离的要点: Step 1. 验证 $d(x,y)$ 定义合理; Step 2. 验证正定性; Stpe 3. 验证三角不等式.
   补充: 通过球极投影在扩充复平面 C_∞ 上定义距离, 来源: GTM11, Functions of One Complex Variable, 2nd ed., John B.Conway.
2. 有了距离就可以定义邻域 $U(x_0,\epsilon) = \{x \in X \mid d(x,x_0) < \epsilon\}$, 特别强调 $x \in X$. 有了邻域既可以定义开集闭集等拓扑概念, 又可以引出收敛的概念.
   专题: 度量空间中的拓扑概念. 从抽象距离空间的角度重新梳理教材第二章 2-3 节的概念和结论. 补充开集、闭集的等价定义 (重要!), 距离子空间和相对拓扑的概念和结论. 离散度量空间中任何子集既开又闭. 本章课后题第 1 题.
3. $\boxed{\text{点列收敛的定义}}$.
   收敛点列的性质: (极限) 唯一性、有界性、子列性质. 度量空间中有界集的定义及等价定义.
   收敛点列的具体例子: 各种不同的具体例子里不同形式的收敛都可以用统一的框架——度量空间中的点列收敛——来考察.
4. $\boxed{\text{稠密子集}}$和$\boxed{\text{可分空间}}$的定义.
   稠密子集和可分空间的具体例子. $P[a,b]$, $C[a,b]$, $L[a,b]$ 稠密性的关系.
   不可分空间的一种判别方法.
5. $\boxed{\text{Cauchy 点列}}$和$\boxed{\text{完备度量空间}}$的定义. Cauchy 点列和收敛点列的关系.
   完备度量空间和不完备度量空间的具体例子.
   度量空间之间的$\boxed{\text{等距同构}}$, 不完备空间的$\boxed{\text{完备化定理}}$(Cauchy 等价类方法, 证明略).
6. $\boxed{\text{(列) 紧集的定义}}$
   (列) 紧集和有界 (闭) 集的关系. 紧集的拓扑定义——有限覆盖条件.
   $C[a,b]$ 中列紧集的判别方法——Ascoli-Arezela 定理 (A-A 定理).
7. 连续映射

- “在某点连续”: $\boxed{\epsilon-\delta\text{ 定义}}$, 点列定义, 邻域定义. 等价性证明.
- “在空间上连续”, 一般定义, $\boxed{\text{拓扑定义}}$. 等价性证明.

连续映射的具体例子: Lipschitz 连续映射, Hölder 连续映射等.

8. 一种特殊的 Lipschitz 连续映射——$\boxed{\text{压缩映射}}$.
$\boxed{\text{压缩映射原理}}$(又称 Banach 不动点定理).
应用：证明隐函数定理, 证明常微分方程解的存在唯一性定理——Picard 定理.
9. 线性空间, 线性组合, 线性包, 线性无关等代数概念.
线性无关集与$\boxed{\text{Hamel 基}}$.
专题：半序关系、半序集与 Zorn 引理.
应用 Zorn 引理证明 Hamel 基的存在性. 证明一个线性空间上的不同 Hamel 基都是对等 (等势) 的, 从而可以定义线性空间的维数.
无穷维线性空间的例子——$P[a,b]$.
10. $\boxed{\text{范数与赋范线性空间的定义.}}$
范数与距离的关系, 默认赋范空间上的距离为范数导出的距离. 按范数收敛, 抽象级数收敛的定义. 按范数导出的距离完备的赋范线性空间——$\boxed{\text{Banach 空间}}$.
证明一个具体的空间是 Banach 空间: Step1. 验证是线性空间; Step2. 验证 $\|\cdot\|$ 是范数. Step3. 验证完备性.
具体的 Banach 空间的例子: $C[a,b]$, $L^{(}\Omega)$ $(1\le p\le\infty)$, l^p $(1\le p\le\infty)$. 重要不等式: Young 不等式, 积分 (或无穷级数, 或有限和) 形式的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.
11. 专题：有限维赋范线性空间.
范数等价和$\boxed{\text{拓扑同构}}$——(i) 一个有限维赋范线性空间上不同的范数彼此等价; (ii) 具有相同维数的有限维赋范空间彼此拓扑同构; (iii) 有限维赋范线性空间都是 Banach 空间.
有限维赋范线性空间上的最佳逼近问题——最佳逼近元存在.
赋范空间 X 中的任何有界闭集都是紧集当且仅当 X 是有限维空间.

7.2 习题

✍ **练习 7.1** 设 (X,d) 是一个度量空间, $x_0\in X$, $\epsilon>0$. 令

$$\begin{aligned} U(x_0,\epsilon) &= \{x \mid d(x,x_0)<\epsilon\}, \\ S(x_0,\epsilon) &= \{x \mid d(x,x_0)\le\epsilon\}, \end{aligned}$$

问 $U(x_0,\epsilon)$ 的闭包是否等于 $S(x_0,\epsilon)$?

解 当 X 是一般的距离空间时, 结论不一定成立.

反例 1. 设 X 是离散度量空间, $\epsilon = 1$. 任取 $x_0 \in X$, 有

$$U(x_0, 1) = \{x \mid x \in X,\ d(x, x_0) < 1\} = \{x_0\},$$
$$S(x_0, 1) = \{x \mid x \in X,\ d(x, x_0) \le 1\} = X.$$

易证, 离散度量空间中的任何点都是孤立点, 从而任何一个单点集 $\{x\}$ 的导集都是空集, 所以任何单点集 $\{x\}$ 都是闭集. 这样,

$$\overline{U(x_0, 1)} = \overline{\{x_0\}} = \{x_0\} \neq S(x_0, 1).$$

反例 2. 取 $X = [0,1] \cup [2,3]$, $d(x,y) = |x-y|$, 显然, X 在 $d(x,y)$ 下成距离空间. 由于 $[0,1]$ 是空间 $(\mathbb{R}, d)$ 中的闭集, 并且

$$[0,1] = [0,1] \cap X,$$

则 $[0,1]$ 也是 (X,d) 中的开集 (参看点集拓扑教材里的拓扑子空间、相对开集、相对闭集的有关结论). 由于

$$U(1,1) = \{x \in X \mid d(1,x) < 1\} = (0,1] \subset [0,1],$$

所以 $\overline{U(1,1)} \subset \overline{[0,1]} = [0,1]$. 但是,

$$S(1,1) = \{x \in X \mid d(1,x) \le 1\} = [0,1] \cap \{2\} \neq \overline{U(1,1)}.$$

注 当 X 是赋范线性空间时, 结论成立.

练习 7.2 设 $C^\infty[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上无限次可微函数的全体, 定义

$$d(f,g) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} \max_{a \le t \le b} \frac{\left|f^{(r)} - g^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f^{(r)} - g^{(r)}(t)\right|}.$$

证明 $C^\infty[a,b]$ 按 $d(f,g)$ 成度量空间.

证明 (因为 $d(f,g)$ 是通过无穷级数来定义的, 所以在一开始有必要验证级数收敛, 从而保证 $d(f,g)$ 有意义) 对任意 $f, g \in C^\infty[a,b]$, 由于

$$0 \le \frac{1}{2^r} \max_{a \le t \le b} \frac{\left|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)\right|} \le \frac{1}{2^r},$$

所以级数

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} \max_{a \le t \le b} \frac{\left|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)\right|}$$

收敛, 从而 $d(f,g)$ 有意义.

显然, $d(f,g) \ge 0$. 若 $d(f,g) = 0$, 则对任意自然数 $r \in \mathbb{N}$, 都有

$$\max_{a \le t \le b} \frac{\left|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)\right|} = 0,$$

从而 $\left|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|=0$ 对任意 $t\in[a,b]$ 都成立, 于是 $f^{(r)}=g^{(r)}$, 特别地, $f=g\in C^{\infty}[a,b]$.

反之, 若 $f=g\in C^{\infty}[a,b]$, 则对任意自然数 $r\in\mathbb{N}$ 以及任意 $t\in[a,b]$, 都有 $f^{(r)}(t)=g^{(r)}(t)$, 从而

$$\max_{a\le t\le b}\left|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|=0,$$

$$d(f,g)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}\max_{a\le t\le b}\frac{\left|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|}{1+\left|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|}=0.$$

设 $h\in C^{\infty}[a,b]$, 则对任意自然数 $r\in\mathbb{N}$ 以及任意 $t\in[a,b]$, 都有

$$\left|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|\le\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|+\left|g^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|,$$

从而,

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|}{1+\left|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|}\\
\le\ &\frac{\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|+\left|g^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}{1+\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|+\left|g^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}\\
=\ &\frac{\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}{1+\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|+\left|g^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}+\frac{\left|g^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}{1+\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|+\left|g^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}\\
\le\ &\frac{\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}{1+\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}+\frac{\left|g^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}{1+\left|g^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
d(f,g)&=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}\max_{a\le t\le b}\frac{\left|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|}{1+\left|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|}\\
&\le\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}\max_{a\le t\le b}\frac{\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}{1+\left|f^{(r)}(t)-h^{(r)}(t)\right|}+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}\max_{a\le t\le b}\frac{\left|h^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|}{1+\left|h^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)\right|}\\
&=d(f,h)+d(g,h).
\end{aligned}$$

综上, $C^{\infty}[a,b]$ 按 $d(f,g)$ 成度量空间. □

✍ **练习 7.3** 设 B 是度量空间 X 中的闭集, 证明必有一列开集 $O_1,O_2,\cdots,O_n,\cdots$ 包含 B, 而且

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n=B.$$

证明 对任意正整数 n, 令

$$O_n=\bigcup_{x\in B}U\left(x,\frac{1}{n}\right)=\left\{y\in X\,\middle|\,存在\ x\in B 使得\ d(x,y)<\frac{1}{n}\right\},$$

显然, O_n 是开集并且 $B \subset O_n$, 所以

$$B \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n.$$

接下来, 我们证明 $\cap_{n=1}^{\infty} O_n = B$. 利用反证法, 假设存在 $y \in X$ 满足 $y \in \cap_{n=1}^{\infty} O_n$ 但 $y \notin B$. 根据 O_n 的定义, 对任意 n, 存在 $x_n \in B$ 使得 $d(x_n, y) < \frac{1}{n}$. 由此可知, y 是集合 B 的聚点, 即 $y \in B'$. 但是, 由于 B 是闭集, 所以 $B \supset B' \ni y$, 这与假设 $y \notin B$ 矛盾. □

✍ **练习 7.4** 设 $d(x, y)$ 为空间 X 上的距离, 证明

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

也是 X 上的距离.

证明 对任意的 $x, y \in X$, 显然 $\tilde{d}(x, y) \geq 0$. 并且, $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0$等价于 $d(x, y) = 0$, 进而等价于 $x = y$.

任给 $z \in X$, 由距离 $d(x, y)$ 的三点不等式可知

$$d(x, y) \leq d(x, z) + \mathrm{d}(y, z),$$

从而

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} &\leq \frac{d(x, z) + d(y, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} \\
&= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} \\
&\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} \\
&= \tilde{d}(x, z) + \tilde{d}(y, z).
\end{aligned}$$

综上, $\tilde{d}(x, y)$ 也是空间 X 上的距离. □

✍ **练习 7.5** 证明点列 $\{f_n\}$ 练习题 7.2 中距离收敛于 $f \in C^{\infty}[a, b]$ 的充分必要条件为 f_n 的各阶导数在 $[a, b]$ 上一致收敛于 f 的各阶导数.

证明 (必要性) 设 $\{f_n\} \subset C^{\infty}[a, b]$, $f \in C^{\infty}[a, b]$ 并且 $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$. 由于对任意的自然数 $r \in \mathbb{N}$, 都有

$$0 \leq \max_{a \leq t \leq b} \frac{\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|} \leq 2^r d(f_n, f),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a \leq t \leq b} \frac{\left|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f^{(r)}(t) - g^{(r)}(t)\right|} = 0.$$

按照极限的 $\epsilon - \delta$ 定义, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在只依赖于 ϵ 和自然数 r 的正数 $N = N(\epsilon, r) > 0$,

使得当 $n > N$ 时,

$$0 \le \frac{\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|} \le \max_{a \le s \le b} \frac{\left|f_n^{(r)}(s) - f^{(r)}(s)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(s) - f^{(r)}(s)\right|} < \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$$

对任意 $t \in [a,b]$ 都成立. 于是, 当 $n > N$ 时,

$$\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right| < \epsilon$$

对任意 $t \in [a,b]$ 都成立. 所以函数列 $\{f_n^{(r)}\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f^{(r)}$.

(充分性) 假设对任意自然数 $r \in \mathbb{N}$, 函数列 $\{f_n^{(r)}\} \subset C[a,b]$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f^{(r)} \in C[a,b]$. 任给 $\epsilon > 0$. 一方面, 由于 $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r}$ 收敛并且

$$0 \le \max_{a \le t \le b} \frac{\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|} < 1,$$

则存在正整数 $R \in \mathbb{N}_+$ 使得

$$\sum_{r=R}^{\infty} \frac{1}{2^r} \max_{a \le t \le b} \frac{\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|} \le \sum_{r=R}^{\infty} \frac{1}{2^r} < \frac{1}{2}\epsilon.$$

另一方面, 当 $r \in \{0, 1, \cdots, R-1\}$ 时, 函数列 $\{f_n^{(r)}\} \subset C[a,b]$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f^{(r)} \in C[a,b]$. 根据函数列一致收敛的定义, 存在只依赖于 ϵ 和自然数 r 的正数 $N(\epsilon, r) > 0$, 使得当 $n > N(\epsilon, r)$ 时,

$$0 \le \frac{\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|} < \frac{1}{4}\epsilon$$

对任意 $t \in [a,b]$ 都成立, 即

$$\max_{a \le t \le b} \frac{\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|} < \frac{1}{4}\epsilon.$$

令 $N(\epsilon) = \max\{N(\epsilon, 0), N(\epsilon, 1), \cdots, N(\epsilon, R-1)\}$, 则 $N(\epsilon)$ 只依赖于 ϵ, 并且当 $n > N(\epsilon)$ 时, 有

$$\sum_{r=0}^{R-1} \frac{1}{2^r} \max_{a \le t \le b} \frac{\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|} < \sum_{r=0}^{R-1} \frac{1}{2^r} \frac{\epsilon}{4} < \frac{1}{2}\epsilon.$$

于是, 当 $n > N(\epsilon)$ 时, 我们最终有

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} \max_{a \le t \le b} \frac{\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|} \\ &= \left(\sum_{r=0}^{R-1} + \sum_{r=R}^{\infty}\right) \frac{1}{2^r} \max_{a \le t \le b} \frac{\left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|}{1 + \left|f_n^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)\right|} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

所以点列 $\{f_n\}$ 按距离收敛于 f. □

✍ **练习 7.6** 设 $B \subset [a,b]$, 证明度量空间 $C[a,b]$ 中的集

$$\{f \mid \text{当}t \in B\text{时}, f(t) = 0\}$$

为 $C[a,b]$ 中的闭集, 而集

$$A = \{f \mid \text{当}t \in B\text{时}, |f(t)| < \alpha\} \quad (\alpha > 0)$$

为开集的充要条件是 B 为闭集.

注意 教材中此题有打印错误: 集合 A 应该改为

$$A = \left\{f \mid \text{当}t \in B\text{时}, |f(t)| < \alpha\right\} \quad (\alpha > 0).$$

证明

1. 不妨记

$$D = \{f \in C[a,b] \mid \text{当 } t \in B\text{时}, f(t) = 0\}.$$

由于 $C[a,b]$ 在距离

$$d(f,g) = \max_{a \le t \le b} |f(t) - g(t)|$$

下成完备度量空间, 所以 D 的导集 D' 包含在 $C[a,b]$ 中.

下证 $D' \subset D$. 任给 $f \in D'$, 由聚点的定义, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $g_\epsilon \in D$ 使得

$$\max_{a \le t \le b} |f(t) - g_\epsilon(t)| = d(f, g_\epsilon) < \epsilon.$$

当 $t \in B$ 时, 当然有

$$|f(t) - g_\epsilon(t)| < \epsilon.$$

另一方面, 由于 $g_\epsilon \in D$, 则对任意 $t \in B$ 时, 都有

$$|f(t)| = |f(t) - g_\epsilon(t)| < \epsilon.$$

由于 $f(t)$ 与 ϵ 无关, 由上式可知 $f(t) = 0, \forall t \in B$. 所以 $f \in D$.

2. 不妨设 B 非空.

(必要性) 设 A 为开集. 利用反证法, 假设 B 不是闭集, 即存在 B 的聚点 t_0 满足 $t_0 \in$

$[a,b]\setminus B$. 按如下形式定义闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 f:

(i) 若 $t_0\in(a,b)$, 令

$$f(t)=\begin{cases}\frac{\alpha}{t_0-a}t+a, & t\in[a,t_0],\\ \frac{\alpha}{b-t_0}(b-t), & t\in(t_0,b].\end{cases}$$

(ii) 若 $t_0=a$, 令 $f(t)=-\frac{\alpha}{b-a}(t-\alpha)+\alpha$, $t\in[a,b]$.

(iii) 若 $t_0=b$, 令 $f(t)=\frac{\alpha}{b-a}(t-a)$, $t\in[a,b]$.

则 f 满足 $f(t_0)=\alpha>0$; 当 $t\in[a,b]\setminus\{t_0\}$ 时, $0\le f(t)<\alpha$. 特别地, 当 $t\in B$ 时, $0\le f(t)<\alpha$, 所以 $f\in A$. 另一方面, 由于 $f\in C[a,b]$, t_0 是 B 的聚点, 所以对任意的 $\epsilon>0$, 存在 $t_\epsilon\in B$, 使得 $f(t_\epsilon)>\alpha-\frac{1}{2}\epsilon$. 定义新函数 $f_\epsilon(t)=f(t)+\frac{1}{2}\epsilon$, $t\in[a,b]$, 则 $f_\epsilon\in U(f,\epsilon)$ 但是 $f_\epsilon(t_\epsilon)>\alpha$, 所以 $f_\epsilon\notin A$. 这说明 $f\in A$ 不是 A 的内点, 这与 A 为开集矛盾.

(充分性) 设 B 为闭集. 由于闭集上的连续函数一定在该闭集上取到最大值, 所以对任意 $f\in A$, 存在 $t_0\in B$, 使得 $\sup\limits_{t\in B}|f(t)|=|f(t_0)|<\alpha$. 令 $\epsilon=\alpha-\sup\limits_{t\in B}|f(t)|>0$. 下证 $U(f,\epsilon)\subset A$. 事实上, 对任意 $g\in U(f,\epsilon)$ 以及任意 $t\in[a,b]$, 都有

$$\max_{a\le t\le b}|f(t)-g(t)|=d(f,g)<\epsilon.$$

特别地, 对任意 $t\in B$, 都有

$$|g(t)|<|f(t)|+\epsilon\le\sup_{t\in B}|f(t)|+\epsilon=\alpha,$$

也就是说 $g\in A$. 于是 $U(f,\epsilon)\subset A$, 这说明 A 中任意点都是 A 的内点, 所以 A 是开集. □

练习 7.7 设 E 及 F 是度量空间中两个集, 如果 $d(E,F)>0$, 证明必有不相交开集 O 及 G 分别包含 E 及 F.

证明 令 $\epsilon=d(E,F)>0$,

$$O=\bigcup_{x\in E}U\left(x,\frac{1}{3}\epsilon\right),\quad G=\bigcup_{y\in F}U\left(y,\frac{1}{3}\epsilon\right),$$

则 O,G 是开集并且 $E\subset O$, $F\subset G$. 下证 $O\cap G=\emptyset$.

假设 $O\cap G\ne\emptyset$, 则存在 $z\in O\cap G$. 根据 O 和 G 的构造, 存在 $x\in E$ 以及 $y\in F$ 使得

$$d(x,z)<\frac{1}{3}\epsilon,\quad d(y,z)<\frac{1}{3}\epsilon.$$

于是,

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(y,z)<\frac{2}{3}\epsilon,$$

这与

$$\inf_{\substack{x\in E\\ y\in F}}d(x,y)=d(E,F)=\epsilon$$

矛盾. 所以 $O \cap G = \emptyset$. □

✍ **练习 7.8** 设 $B[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上实有界函数全体, 对 $B[a,b]$ 中任意两元素 $f, g \in B[a,b]$, 规定距离为

$$d(f,g) = \sup_{a \le t \le b} |f(t) - g(t)|.$$

证明 $B[a,b]$ 不是可分空间.

证明 对任意 $c \in (a,b)$, 定义函数

$$f_c(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } t \in [a,c], \\ 0, & \text{当 } t \in (c,b]. \end{cases}$$

显然, $f_c \in B[a,b]$. 令

$$O_c = U\left(f_c, \frac{1}{3}\right) = \left\{ f \in B[a,b] \,\middle|\, \sup_{a \le t \le b} |f_c(t) - f(t)| < \frac{1}{3} \right\},$$

显然, O_c 为非空开集. 下证当 $\tilde{c} \in (a,b)$ 且 $\tilde{c} \ne c$ 时, $d(f_c, d_{\tilde{c}}) \ge 1$. 事实上, 不妨设 $c > \tilde{c}$, 则总存在 $t_0 \in (\tilde{c}, c) \subset [a,b]$ 使得 $f_c(t_0) = 1$ 并且 $f_{\tilde{c}}(t_0) = 0$. 于是,

$$d(f_c, f_{\tilde{c}}) = \sup_{a \le t \le b} |f_c(t) - f_{\tilde{c}}(t)| \ge |f_c(t_0) - f_{\tilde{c}}(t_0)| = 1.$$

这说明 $U(f_c, \frac{1}{3})$ 与 $U(f_{\tilde{c}}, \frac{1}{3})$ 不相交, 也就是说, 当 $\tilde{c} \in (a,b)$ 且 $\tilde{c} \ne c$ 时, $O_c \cap O_{\tilde{c}} = \emptyset$, 从而 $\{O_c\}_{c \in (a,b)}$ 是不可数个两两不相交的非空开集的集族, $B[a,b]$ 就是不可分的度量空间.

假设 $B[a,b]$ 是可分的, 则 $B[a,b]$ 存在可数稠密子集

$$M = \{g_1, g_2, \cdots, g_i, \cdots\}$$

使得 $\overline{M} = B[a,b]$. 于是, $\{O_c\}_{c \in (a,b)}$ 中的每一个开球 O_c 至少包含 M 中一点, $\{O_c\}_{c \in (a,b)}$ 中元素个数至多可数(因为不能 “超过” M 中元素的个数), 矛盾.

综上, $B[a,b]$ 不可分. □

✍ **练习 7.9** 设 X 是可分距离空间, $\mathscr{F}$ 为 X 的一个开覆盖, 即 $\mathscr{F}$ 是一族开集, 使得对每一个 $x \in X$, 有 $\mathscr{F}$ 中开集 O, 使 $x \in O$, 证明必可从 $\mathscr{F}$ 中选出可数个集组成 X 的一个覆盖.

证明 设 $\mathscr{F} = \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是度量空间 X 的一个开覆盖. 则对任意 $x \in X$, 存在 $\lambda \in \Lambda$ 使得

$$x \in O_\lambda.$$

由于 O_λ 是开集, 则存在 $\epsilon_x > 0$ 使得

$$x \in U(x, \epsilon_x) \subset O_\lambda.$$

另一方面, 由于 X 是可分空间, 则 X 存在可数稠密子集 $D=\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. 于是, 对于上述 $\epsilon_x>0$, 存在 $e_i\in D$ 以及 $k\in\mathbb{N}_+$ 使得

$$d(x,e_i)<\frac{1}{k}<\frac{1}{2}\epsilon_x,$$

从而

$$x\in U\left(e_i,\frac{1}{k}\right)\subset U\left(x,\epsilon_x\right)\subset O_\lambda. \tag{7.2.1}$$

记

$$\mathcal{E}=\left\{O_{i,k}\in\mathcal{F}\,\middle|\,U\left(e_i,\frac{1}{k}\right)\subset O_{i,k},\ i,k\in\mathbb{N}_+\right\},$$

则 $\mathcal{E}\subset\mathcal{F}$ 并且 $\mathcal{E}$(至多) 可数. 由 (7.2.1)式, 对任意 $x\in X$, 存在 $i,k\in\mathbb{N}_+$ 使得

$$x\in U\left(e_i,\frac{1}{k}\right)\subset O_{i,k}\in\mathcal{E},$$

从而 $\mathcal{E}$ 是空间 X 的一个可数覆盖. □

练习 7.10 设 X 为距离空间, A 为 X 中子集, 令 $f(x)=\inf_{y\in A}d(x,y)$, $x\in X$, 证明 $f(x)$ 是 X 上连续函数.

证明 任取 $x,\tilde{x}\in X$ 以及 $y\in A$, 都有

$$d(x,y)\leq d(x,\tilde{x})+d(\tilde{x},y),$$

上式两端对 $y\in A$ 取下确界, 得

$$f(x)=\inf_{y\in A}d(x,y)\leq d(x,\tilde{x})+\inf_{y\in A}d(\tilde{x},y)=d(x,\tilde{x})+f(\tilde{x}).$$

同理, 从 $d(\tilde{x},y)\leq d(x,\tilde{x})+d(x,y)$ 可得

$$f(\tilde{x})\leq d(x,\tilde{x})+f(x).$$

于是

$$|f(x)-f(\tilde{x})|\leq d(x,\tilde{x}). \tag{7.2.2}$$

任取 $x\in X$, 若点列 $\{x_n\}\subset X$ 满足

$$x_n\longrightarrow x\quad(n\longrightarrow\infty).$$

则对任意的 $\epsilon>0$, 存在只依赖于 ϵ 的正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 有 $d(x_n,x)<\epsilon$, 再根据(7.2.2)式, 可得

$$|f(x_n)-f(x)|<\epsilon,$$

所以 $f(x_n)\longrightarrow f(x)$ $(n\longrightarrow\infty)$, f 在 X 上连续. □

练习 7.11 设 X 为距离空间, F_1,F_2 为 X 中不相交的闭集, 证明存在开集 G_1,G_2, 使

得 $G_1 \cap G_2 = \emptyset, G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$.

证明 对任意 $x \in X \setminus F_2$, 都有

$$d(x, F_2) = \inf_{y \in F_2} d(x, y) > 0.$$

事实上, 假设 $d(x, F_2) = 0$. 根据 $d(x, F_2)$ 的定义, 对任意自然数 n, 存在 $y_n \in F_2$ 使得

$$0 = d(x, F_2) \le d(x, y_n) < d(x, F_2) + \frac{1}{n}.$$

所以 $\lim_{n\to\infty} d(x, y_n) = 0$, 这表明闭集 F_2 中的点列 $\{y_n\}$ 收敛于点 x, 从而 $x \in F_2$, 矛盾. 同理可证, 对任意 $y \in X \setminus F_1$, 都有

$$d(y, F_1) = \inf_{x \in F_1} d(x, y) > 0.$$

对任意 $x \in F_1, y \in F_2$, 由于 F_1 与 F_2 时不相交的闭集, 则可以定义

$$\epsilon(x) = d(x, F_2) > 0, \quad \delta(y) = d(y, F_1) > 0.$$

再令

$$G_1 = \bigcup_{x \in F_1} U(x, \frac{1}{2}\epsilon(x)), \quad G_2 = \bigcup_{y \in F_2} U(y, \frac{1}{2}\delta(y)),$$

显然 G_1, G_2 都是开集并且 $F_1 \subset G_1, F_2 \subset G_2$. 下证 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. 反证法, 假设存在 $x_0 \in F_1$, $y_0 \in F_2$ 以及 $z \in G_1 \cap G_2$ 使得

$$z \in U(x_0, \epsilon(x_0)) \cap U(y_0, \delta(y_0)),$$

于是,

$$d(x_0, y_0) \le d(x_0, z) + d(y_0, z) < \frac{1}{2}\epsilon(x_0) + \frac{1}{2}\delta(y_0). \tag{7.2.3}$$

但是, 另一方面, 我们还有 $d(x_0, y_0) \ge \inf_{y \in F_2} d(x_0, y)$, $d(x_0, y_0) \ge \inf_{x \in F_1} d(x, y_0)$, 即

$$d(x_0, y_0) \ge \max\{\epsilon(x_0), \delta(y_0)\},$$

该不等式与(7.2.3)式矛盾. □

练习 7.12 设 X, Y, Z 为三个度量空间, f 是 X 到 Y 中的连续映射, g 是 Y 到 Z 中的连续映射, 证明复合映射 $(gf)(x) = g(f(x))$ 是 X 到 Z 中的连续映射.

证明 设点列 $\{x_n\} \subset X$, 点 $x \in X$ 且

$$x_n \longrightarrow x \quad (n \longrightarrow \infty),$$

则 $f(x_n) \in Y$, $f(x) \in Y$, $(gf)(x_n) \in Z$, $(gf)(x) \in Z$. 由于 f 时 X 到 Y 的连续映射, 则在空

间 Y 中,

$$f(x_n) \to f(x) \quad (n \to \infty).$$

又因为 g 是 Y 到 Z 的连续映射, 所以在空间 Z 中

$$(gf)(x_n) \to (gf)(x) \quad (n \to \infty),$$

于是, 映射 gf 是 X 到 Z 的连续映射. □

练习 7.13 设 X 是度量空间, f 是 X 上的实函数, 证明 f 是连续映射的充要条件是对每个实数 c, 集合

$$\{x \mid x \in X,\ f(x) \le c\} \text{ 和集合 } \{x \mid x \in X,\ f(x) \ge c\}$$

都是闭集.

证明 为方便起见, 记

$$A = \{x \mid x \in X,\ f(x) \le c\}, \quad B = \{x \mid x \in X,\ f(x) \ge c\}.$$

(必要性) 设 f 是度量空间 X 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射, $c \in \mathbb{R}$, 集合 A 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛于点 $x \in X$. 下证 $x \in A$, 从而 A 是闭集. 事实上, 对任意自然数 n, 都有 $f(x_n) \le c$. 再根据连续映射的定义, 就有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \le c.$$

所以, $x \in A$. 同理可证 B 也是闭集.

(充分性) 设 f 是是度量空间 X 到 $\mathbb{R}$ 的映射, 对任意 $c \in \mathbb{R}$, 集合

$$\{x \mid x \in X,\ f(x) \le c\}$$

和集合

$$\{x \mid x \in X,\ f(x) \ge c\}$$

都是闭集. 对任意的 $z \in X$ 以及 $\epsilon > 0$, 记

$$c_1 = f(z) - \epsilon, \quad c_2 = f(z) + \epsilon.$$

由条件可知, 集合

$$\{x \mid x \in X,\ f(x) > c_1\}$$

和

$$\{x \mid x \in X,\ f(x) < c_2\}$$

都是开集, 所以交集

$$O = \{x \in X \mid c_1 < f(x) < c_2\} = \{x \in X \mid |f(z) - f(x)| < \epsilon\}$$

也是开集. 显然 $z \in O$, 所以存在 $\delta > 0$ 使得

$$U(z, \delta) \subset O.$$

由连续映射的定义可知, f 在点 z 处连续. 由 $z \in X$ 的任意性可知 f 在 X 上连续. □

练习 7.14 证明柯西点列是有界点列.

证明 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 中的 Cauchy 点列, 记 $M = \{x_n\}$. 根据 Cauchy 点列的定义, 存在正整数 N, 使得当 $n \geq N$ 时,

$$d(x_N, x_n) < 1.$$

任取 $y \in X$, 则当 $n \geq N$ 时,

$$d(x_n, y) \leq d(x_N, y) + d(x_N, x_n) < d(x_N, y) + 1.$$

令 $c = \max\{d(x_1, y), d(x_2, y), \cdots, d(x_{N-1}, y), d(x_N) + 1\}$, 则对任意 $x \in M$, 都有 $d(x, y) \leq c$, 所以

$$\inf_{x \in M} d(x, y) \leq c < \infty,$$

这表明集合 M 是有界集, 即 Cauchy 点列 $\{x_n\}$ 是有界点列. □

练习 7.15 证明教材 §7.1 中空间 S, $B(A)$ 以及离散度量空间都是完备的度量空间.

证明 (1) 证明度量空间 S 完备.

设 $\{x_n\}$ 是空间 S 中的 Cauchy 点列,

$$x_n = \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_i^{(n)}, \cdots\right),$$

则

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} d(x_m, x_n) = 0.$$

对任意固定的指标 i, 都有

$$0 \leq \frac{\left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}\right|}{1 + \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}\right|} \leq 2^i d(x_m, x_n),$$

于是, 由追敛性可得

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}\right| = 0,$$

这表明 $\{\xi_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是实数空间 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 数列. 由 Cauchy 收敛准则可知, 存在 $\xi_i \in \mathbb{R}$,

使得 $\lim_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}=\xi_i$. 记

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_i,\cdots),$$

显然 $x\in S$. 下证, 在空间 S 中, $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$. (事实上, 在 187 页的 (3) 中已经证明, $\{x_n\}$ 按距离收敛于 x 当且仅当对任意指标 i, $\xi_i^{(n)}\to\xi_i\,(n\to\infty)$. 为了本题解答的完整性, 我们仍然补充下面的证明)

任给 $\epsilon>0$. 一方面, 由于 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$ 收敛, 则存在正整数 $K=K(\epsilon)$, 使得

$$\sum_{i=K}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|}{1+\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|}\le\sum_{i=K}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{1}{2}\epsilon.$$

另一方面, 由于 $\xi_i^{(n)}\to\xi_i\,(n\to\infty)$, 则存在只依赖于 ϵ 和指标 i 的正整数 $N(\epsilon,i)$, 使得当 $n\ge N(\epsilon,i)$ 时, 有

$$\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|<\frac{1}{2}\epsilon.$$

取 $N=\{N(\epsilon,1),N(\epsilon,2),\cdots,N(\epsilon,K-1)\}$, 则 N 只依赖于 ϵ, 并且当 $n\ge N$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{K-1}\frac{1}{2^i}\frac{\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|}{1+\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|}<\sum_{i=1}^{K-1}\frac{1}{2^i}\frac{\frac{1}{2}\epsilon}{1+\frac{1}{2}\epsilon}<\frac{1}{2}\epsilon.$$

综上, 存在只依赖于 ϵ 的正整数 N, 使得当 $n\ge N$ 时, 有

$$\begin{aligned}d(x_n,x)&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|}{1+\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|}\\&\le\left(\sum_{i=i}^{K-1}+\sum_{i=K}^{\infty}\right)\frac{1}{2^i}\frac{\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|}{1+\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i\right|}\\&<\epsilon,\end{aligned}$$

所以 $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$, 空间 S 完备.

(2) 证明度量空间 $B(A)$ 完备.

设 $\{f_n\}$ 是 $B(A)$ 中的 Cauchy 点列. 固定 $s\in A$, 对任意 $\epsilon>0$, 都存在只依赖于 ϵ 的正整数 $N=N(\epsilon,s)$, 使得当 $m,n\ge N$ 时都有

$$|f_n(s)-f_m(s)|\le\sup_{t\in A}|f_n(t)-f_m(t)|=d(f_n,f_m)<\epsilon.\tag{7.2.4}$$

所以 $\{f_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$ 是实数空间 $\mathbb{R}$ 上的 Cauchy 数列. 根据 Cauchy 收敛准则, 存在唯一的 $y_s\in\mathbb{R}$ 使得 $f_n(s)\to y_s\,(n\to\infty)$. 这样就定义了 A 上的实函数

$$f:\quad A\to\mathbb{R}$$

$$s \mapsto y_s.$$

下证 $f \in B(A)$ 并且 $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$.

在(7.2.4)式中令 $m \to \infty$, 可知当 $n \geq N$ 时,

$$|f_n(s) - f(s)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(s) - f_m(s)| \leq \epsilon$$

对任意 $s \in A$ 都成立, 即

$$\sup_{t\in A} |f_n(s) - f(s)| \leq \epsilon. \tag{7.2.5}$$

一方面,

$$\sup_{s\in A} |f(s)| \leq |f_n(s)| + \epsilon < \infty,$$

这说明 $f \in B(A)$. 另一方面, 由(7.2.5)式可得

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = \lim_{n\to\infty} |f_n(s) - f(s)| = 0.$$

所以 $B(A)$ 是完备度量空间.

(3) 证明离散度量空间完备.

设 $\{x_n\}$ 是离散度量空间 X 中的 Cauchy 点列, 则存在正整数 N, 使得当 $n \geq N$ 时有

$$d(x_n, x_N) < \frac{1}{2}.$$

考虑到离散度量空间上距离的定义, 可知当 $n \geq N$, $x_n \equiv x_N$. 于是, 对任意 $\epsilon > 0$, 当 $n \geq N$ 时都有

$$d(x_n, x_N) = 0 < \epsilon,$$

即 $x_n \to x_N \in X\,(n \to \infty)$. 所以离散度量空间完备. □

练习 7.16 证明 l^∞ 与 $C(0,1]$ 的一个子空间等距同构.

注意 $C(0,1]$ 表示 $(0,1]$ 上连续并且有界的函数的全体, 这是一个线性空间. 对任意 $x \in C(0,1]$, 函数的有界性保证

$$\|x\| = \sup_{t\in(0,1]} |x(t)|$$

是 $C(0,1]$ 上的范数.

证明 对任意 $x \in C(0,1]$, 令

$$\alpha_x = \left(x(1), x\left(\frac{1}{2}\right), \cdots, x\left(\frac{1}{n}\right), \cdots\right). \tag{7.2.6}$$

由函数 x 的有界性易证 $\alpha_x \in l^\infty$, 由此得到映射 $\phi : C(0,1] \to l^\infty$ 使得 $\phi(x) = \alpha_x$.

下证 ϕ 是等距同构映射.

对任意 $x \in C(0,1]$, 由(7.2.6)式可知,

$$\|\phi(x)\|_\infty = \|\alpha_x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}_+}\left|x\left(\frac{1}{n}\right)\right| \le \sup_{t\in(0,1]}|x(t)| = \|x\| \tag{7.2.7}$$

由上式易证 ϕ 是单射.

反之, 对任意 $\alpha = (\xi_1,\xi_2,\cdots) \in l^\infty$, 定义 $(0,1]$ 上的连续函数 x_ξ, 使得对任意 $t \in (0,1]$, 当 $t \in \left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$ $(n \in \mathbb{N}_+)$ 时,

$$x_\xi(t) = \frac{\xi_{n+1}-\xi_n}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}\left(t-\frac{1}{n}\right)+\xi_n,$$

即函数 x_ξ 的图像时将点列 $(1,\xi_1), (2,\xi_2), \cdots, \left(\frac{1}{n},\xi_n\right), \cdots$ 依此连接起来的折线, 于是

$$\sup_{t\in(0,1]}|x_\xi(t)| \le \sup_{n\in\mathbb{N}_+}\left|x\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}_+}|\xi_n| = \|\xi\|_\infty, \tag{7.2.8}$$

从而 $x_\xi \in C(0,1]$ 并且 $\|x_\xi\| \le \|\xi\|_\infty$. 根据映射 ϕ 的定义, $\phi(x_\xi) = \xi$. 由此可知 ϕ 是满射, 从而是一一映射. 再由(7.2.8)式可得

$$\|\phi^{-1}(\xi)\| \le \|\xi\|, \quad \forall \xi \in l^\infty. \tag{7.2.9}$$

综合(7.2.7)(7.2.9)式, 考虑到 ϕ 是一一映射, 可得

$$\|x\| = \|\phi(x)\|_\infty, \quad \forall x \in C(0,1].$$

综上, ϕ 是等距同构映射, l^∞ 与 $C(0,1]$ 等距同构. □

练习 7.17 设 F 是 n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集, A 是 F 到自身中的映射, 并且适合下列条件: 对任意 $x,y \in F$ $(x \ne y)$, 有

$$d(Ax,Ay) < d(x,y),$$

证明映射 A 在 F 中存在唯一的不动点.

证明 (存在性) 定义 $\mathbb{R}^n$ 上的函数

$$f(x) = d(Ax,x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

对任意 $x,y \in F$, 由条件可知

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &= |d(Ax,x)-d(Ay,y)| \\ &\le d(Ax,Ay)+d(x,y) \\ &\le 2d(x,y), \end{aligned}$$

所以 f 是 F 上的 Lipschitz 连续函数. 由于 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, 则连续函数 f 可以在 F 上取到最小值, 即存在 $x_0 \in F$ 使得

$$d(Ax_0, x_0) = f(x_0) = \min_{x\in F} f(x) = \min_{x\in F} d(Ax, x).$$

下证 x_0 是 A 的不动点.

反证法, 假设 $Ax_0 \neq x_0$. 一方面, 由于 $x_0 \in F$, $A : F \to F$, 则 $Ax_0 \in F$, 从而

$$f(Ax_0) \geq \min_{x\in F} f(x) = f(x_0).$$

另一方面, 由条件,

$$f(Ax_0) = d(A(Ax_0), Ax_0) < d(Ax_0, x_0) = f(x_0).$$

矛盾. 所以 x_0 是 A 的不动点.

(唯一性) 设 $x, y \in F$ 满足 $Ax = x$, $Ay = y$. 假设 $x \neq y$, 则由条件,

$$d(x, y) = d(Ax, Ay) < d(x, y),$$

矛盾. 所以 $x = y$, 映射 A 在 F 中的不动点只有一个. □

练习 7.18 设 X 为度量空间, A 是 X 到 X 中的映射, 记

$$a_n = \sup_{x\neq x'} \frac{d\left(A^n x, A^n x'\right)}{d(x, x')}.$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, 则映射 A 有唯一不动点.

证明 (存在性) 任取 $x_0 \in X$, 作迭代列

$$x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

下证 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 点列.

事实上, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, $p \in \mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x_{n+p}, x_n) &\leq \sum_{k=0}^{p-1} d(x_{n+k+1}, x_{n+k}) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} d\left(A^{n+k} x_1, A^{n+k} x_0\right) \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_{n+k}\right) d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

由于 $a_n \geq 0$ 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 上式两端令 $p, n \to \infty$, 就可得到

$$d(x_{n+p}, x_n) \to 0, \quad n, p \to \infty.$$

所以 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 点列. 由于 X 是完备度量空间, 则存在 $x^* \in X$ 使得 $x_n \to x^*$ $(n \to \infty)$.

下证 x^* 是映射 A 的不动点.

事实上, 由条件可知

$$d(Ax, Ax') \leq a_1 d(x, x'), \quad \forall x, x' \in X,$$

从而 A 是 X 上的连续映射, 所以

$$Ax^* = A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*.$$

(唯一性) 注意到

$$A^n x^* = Ax^* = x^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

由于 $a_n \geq 0$ 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 则存在 $n_0 \in \mathbb{N}_+$ 使得 $0 \leq a_{n_0} < 1$. 设 $x, x' \in X$ 都是 A 的不动点, 则同样也是 A^{n_0} 的不动点. 假设 $x \neq x'$, 则

$$0 < d(x, x') = d(A^{n_0}x, A^{n_0}x') \leq a_{n_0} d(x, x') < d(x, x'),$$

矛盾. 所以 $x = x'$, 映射 A 在空间 X 上的不动点是唯一的. □

✍ **练习 7.19** 设 A 为从度量空间 X 到 X 中映射, 若存在开球 $U(x_0, r)$ $(r > 0)$ 内满足

$$d(Ax, Ax') \leq \theta d(x, x'), \quad 0 < \theta < 1,$$

又 A 在闭球 $S(x_0, r) = \{x \mid d(x, x_0) \leq r\}$ 上连续, 并且

$$d(x_0, Ax_0) \leq \theta(1-\theta).$$

证明: A 在 $S(x_0, r)$ 中有不动点.

证明

Step 1. 先证

$$A : S(x_0, \theta r) \to S(x_0, \theta r),$$

其中

$$S(x_0, \theta r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq \theta r\} \subset U(x_0, r) \subset S(x_0, r)$$

事实上, 对任意 $x \in S(x_0, \theta r)$, 由条件可知

$$\begin{aligned} d(Ax, x_0) &\leq d(Ax, Ax_0) + d(Ax_0, x_0) \\ &\leq \theta d(x, x_0) + \theta(1-\theta)r \end{aligned}$$

$$\leq \quad \theta^2 r + \theta(1-\theta)r = \theta r,$$

所以 $Ax \in S(x_0, \theta r)$.

Step 2. 由于 X 是完备度量空间, $S(x_0, \theta r)$ 是 X 中的闭集, 则 $S(x_0, \theta r)$ 作为 X 的度量子空间也完备. 将映射 A 限制在完备的度量空间 $S(x_0, \theta r)$ 上, 由 Step 1 可知 $A : S(x_0, \theta r) \to S(x_0, \theta r)$, 由条件可知 A 还是 $S(x_0, \theta r)$ 上的压缩映射. 由压缩映射原理, A 在 $S(x_0, \theta r)$ 上存在唯一的不动点, 从而在 $S(x_0, r)$ 中有不动点(不一定唯一, 在 $S(x_0, r) \setminus S(x_0, \theta r)$ 上也可能有不动点). □

✍ **练习 7.20** 设 $a_{jk}, j, k = 1, 2, \cdots, n$ 为一组实数, 满足

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - \delta_{ij})^2 < 1,$$

其中 δ_{jk} 当 $j = k$ 时为 1, 否则为 0. 证明: 代数方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases} \tag{7.2.10}$$

对任何一组固定的 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 必有唯一的解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

注 设 $\mathbb{R}^n$ 中的范数 (模) 为

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

若 $A = (a_{ij})$ 是一个 $n \times n$ 矩阵, 则 $Ax \in \mathbb{R}^n$. 利用 Cauchy-Schwartz 不等式容易证明

$$|Ax| \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |x|.$$

证明 Step1. 原方程(7.2.10)可转化为以下方程

$$Ax = b, \tag{7.2.11}$$

其中 $A = (a_{ij})_{n \times n}, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, b = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. 进一步, 方程(7.2.11)可以转化为不动点方程

$$Tx = x, \tag{7.2.12}$$

其中映射 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 满足

$$Tx = b - Ax + x = b - (A - I)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

I 是 $n \times n$ 单位矩阵.

Step2. 下证 T 是压缩映射.

任取 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 就有

$$\begin{aligned}
|Tx - Ty| &= |(A-I)y - (A-I)x| \\
&= |(A-I)(x-y)| \\
&= |\left(a_{ij} - \delta_{ij}\right)(x-y)| \\
&\leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} - \delta_{ij}\right)_{n\times n}^2\right)^{\frac{1}{2}} |x-y|.
\end{aligned}$$

令

$$\alpha = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} - \delta_{ij}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

由条件可知 $0 \leq \alpha < 1$, 因此

$$|Tx - Ty| \leq \alpha |x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

T 是压缩映射.

Step3. 由于 $\mathbb{R}$ 是 Banach 空间, 根据压缩映射原理, 不动点方程 $Tx = x$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中存在唯一的不动点, 因此原方程(7.2.10)存在唯一的解. □

✍ **练习 7.21** 设 $BV[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上右连续的有界变差函数全体, 其线性运算为通常函数空间中的运算. 在 $BV[a,b]$ 中定义范数

$$\|f\| = |f(a)| + \bigvee_a^b(f), \quad f \in BV[a,b].$$

证明 $BV[a,b]$ 是 Banach 空间.

定义 7.2.1. 有界变差函数, P149

设 f 为 $[a,b]$ 上的有限函数. 对 $[a,b]$ 的任何分割

$$T: a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

称有限和

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1}|$$

为函数 f 关于分割 T 的变差, 记为 $V(f,T)$.

若

$$\left\{V(f,T) \mid T\text{是}[a,b]\text{的一个分割}\right\}$$

是有界数集, 则称 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 称

$$\sup\left\{V(f,T) \mid T\text{是}[a,b]\text{的一个分割}\right\}$$

为 f 在 $[a,b]$ 上的全变差, 记作 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$. ♣

证明 Step1. 不妨设数域 $\mathbb{F}$ 是实数域 $\mathbb{R}$. 任取 $f,g\in BV[a,b]$, $\alpha\in\mathbb{R}$. 容易证明, $f+g$ 在 $[a,b]$ 上右连续, 并且对 $[a,b]$ 的任何一个分割 T, 总有

$$V(f+g,T)\le V(f,T)+V(g,T)\le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)<+\infty,$$

从而 $f+g\in BV[a,b]$ 并且

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g)\le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)<+\infty.$$

同样可证 $\alpha f\in BV[a,b]$ 并且

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(\alpha f)=|\alpha|\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

因此, $BV[a,b]$ 关于通常函数空间的加法和数乘封闭.

规定 $f=0\in BV[a,b]$ 当且仅当 $f(t)\equiv 0$, $t\in[a,b]$. 根据线性空间的定义, 易证 $BV[a,b]$ 关于通常函数空间的加法和数乘成为一个线性空间.

Step2. 下证

$$\|f\|=|f(a)|+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f),\quad f\in BV[a,b]$$

是线性空间 $BV[a,b]$ 上的范数.

(1) 对任意 $f\in BV[a,b]$, 总有 $0\le \overset{b}{\underset{a}{V}}<\infty$, 所以 $\|x\|$ 的定义合理并且 $\|f\|\ge 0$. 若 $f=0\in BV[a,b]$, 则

$$f(t)\equiv 0,\quad t\in[a,b],$$

从而 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=0$, $\|f\|=|f(a)|+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=0$.

设 $\|f\|=0$, 则 $f(a)=0$ 并且 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=0$. 下证 $f(t)=0$, $\forall t\in[a,b]$.

对任意 $t\in[a,b]$, $[a,b]$ 的任意一个分割 $T=\{a,t_1,t_2,\cdots,T_{n-1},b\}$, 令 $T'=T\cup\{t\}$, 则 T' 也是 $[a,b]$ 的一个分割, 从而

$$0\le V(f,T')\le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=0.$$

根据变差的定义, 就有

$$f(t)=f(t_1)=f(t_2)=\cdots=f(b)=f(a)=0..$$

综上 $\|\cdot\|$ 满足正定性.

(2) 根据 Step1 中的结果, 对任意 $\alpha\in\mathbb{R}$ 以及任意 $f\in BV[a,b]$ 都有

$$\|\alpha f\|=|\alpha f(a)|+\overset{b}{\underset{a}{V}}(\alpha f)=|\alpha||f(a)|+|\alpha|\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=|\alpha|\|f\|,$$

所以 $\|\cdot\|$ 满足正齐次性.

(3) 对任意 $f, g \in BV[a,b]$, 总有

$$|f(a) + g(a)| \leq |f(a)| + |g(a)|.$$

根据 Step1 的结果, 还有

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < +\infty.$$

从而,

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$

$\|\cdot\|$ 满足三角不等式.

综上, $\|\cdot\|$ 是线性空间 $BV[a,b]$ 上的范数, $(BV[a,b], \|\cdot\|)$ 成为赋范线性空间.

Step3. 下证 $(BV[a,b], \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

(1) 下证对任意 $f \in BV[a,b]$, 都有

$$\sup_{t \in [a,b]} |f(t)| \leq \|f\|.$$

对任意 $t \in [a,b]$, 作 $[a,b]$ 的分割 $T = \{a, t, b\}$, 则

$$V(f,T) = |f(t) - f(a)| + |f(b) - f(t)| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f),$$

从而

$$|f(t)| \leq |f(a)| +)f(t) - f(a)| \leq |f(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \|f\|.$$

由 $t \in [a,b]$ 的任意性可得

$$\sup_{t \in [a,b]} |f(t)| \leq \|f\|.$$

(2) 设 $\{f_n\}$ 是 $BV[a,b]$ 中的一列 Cauchy 点列, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N 使得

$$\|f_m - f_n\| < \varepsilon, \quad \forall m, n > N, \tag{7.2.13}$$

对任意 $t \in [a,b]$, 有

$$|f_m(t) - f_n(t)| = |(f_m - f_n)(t)| \leq \sup_{t \in [a,b]} |(f_m - f_n)(t)| \leq \|f_m - f_n\| < \varepsilon, \quad \forall m, n > N, \tag{7.2.14}$$

因此 $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 就是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 数列, 从而存在 $f(t) \in \mathbb{R}$ 使得

$$f_n(t) \longrightarrow f(t) \in \mathbb{R} \quad (n \to \infty), \quad \forall t \in [a,b], \tag{7.2.15}$$

由此得到函数 $f(t), t \in [a,b]$.

(3) 下证 f 在 $[a,b]$ 上右连续, 即对任意 $t \in [a,b)$, $f(t) = f(t+0) = \lim\limits_{t \to 0^+} f(t)$.

在(7.2.14)式中令 $m \to \infty$, 得

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [a,b], \quad \forall n > N,$$

从而

$$\sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

所以函数列 $\{f_n\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 f. 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, f_n 都是 $[a,b]$ 上得右连续函数, 根据一致收敛与连续性的关系可知极限函数 f 也在 $[a,b]$ 上右连续 (仿照华师大《数学分析》第 4 版下册 P39-P40 并利用 $\frac{1}{3}\varepsilon$ 法则).

(4) 下证 f 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 从而 $f \in BV[a,b]$.

由于 $\{f_n\}$ 是 $BV[a,b]$ 中的 Cauchy 点列, 从而 $\{f_n\}$ 在 $BV[a,b]$ 中有界, 存在 $M > 0$ 使得

$$\|f_n\| = |f_n(a)| + \bigvee_a^b(f_n) \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

作 $[a,b]$ 的任意一个分割

$$T: a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b,$$

则由(7.2.15)式可得

$$\begin{aligned}
V(f,T) &= \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} |f_n(t_i) - f_n(t_{i-1})| \\
&= \lim_{n\to\infty} V(f_n,T) \\
&\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \bigvee_a^b(f_n) \\
&\leq M.
\end{aligned}$$

由分割 T 的任意性可知

$$\bigvee_a^b(f) \leq M < +\infty,$$

所以 $f \in BV[a,b]$.

(5) 由(7.2.15)式可得 $|(f_n - f)(a)| \to 0\ (n \to \infty)$. 下证 $\|f_n - f\| \to 0\ (n \to \infty)$.

对任意 $m,n > N$ 以及 $[a,b]$ 的任意一个分割

$$T: a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b,$$

都有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k}|(f_n-f_m)(t_i)-(f_n-f_m)(t_{i-1})|\\
=\ & V(f_n-f_m,T)\\
\le\ & \mathop{V}_{a}^{b}(f_n-f_m)<\varepsilon,
\end{aligned}$$

上式两端令 $m\to\infty$, 结合(7.2.15)式可得

$$V(f_n-f,T)=\sum_{i=1}^{k}|(f_n-f)(t_i)-(f_n-f)(t_{i-1})|\le\varepsilon,\quad \forall n>N.$$

由分割 T 的任意性可得

$$\mathop{V}_{a}^{b}(f_n-f)\le\varepsilon,\forall n>N,$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathop{V}_{a}^{b}(f_n-f)=0$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0.$$

综上, $(BV[a,b],\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

□

练习 7.22 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是一列 Banach 空间,

$$x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$$

是一列元素, 其中 $x_n\in X_n$, $n=1,2,\cdots$, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p<\infty$, 这种元素列的全体记为 X, 类似通常数列的加法和数乘, 在 X 中引入线性运算. 若令

$$\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

证明: 当 $p\ge 1$ 时, X 是 Banach 空间.

证明

Step 1. 对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in X$, $y=(y_1,y_2,\cdots)\in X$ 以及任意数 α,β, 都有

$$\begin{aligned}
&\|\alpha x_x+\beta y_n\|^p\\
\le\ & (\|\alpha x_n\|+\|\beta y_n\|)^p\\
\le\ & 2^p\left(|a|^p\|x_n\|^p+|\beta|^p\|y_n\|^p\right),
\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\alpha x_n+\beta y_n\|^p\le 2^p\left(|\alpha|^p\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p+|\beta|^p\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|^p\right)<+\infty,$$

也就是说, $\alpha x+\beta y=(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\cdots)\in X$. 易证 X 是线性空间.

Step 2. 设 $p\ge 1$.

1°. 对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in X$, 显然 $\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\geq 0$. 当 $x=0=(0,0,\cdots)$ 时, 有 $\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|0\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=0$. 反之, 若 $\|x\|=0$, 则对任意 $n\in\mathbb{N}$, 都有 $x_n=0$, 从而 $x=(0,0,\cdots)=0\in X$.

2°. 对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in X$ 以及任意数 α, 都有

$$\|\alpha x_n\|^p=|\alpha|^p\|x_n\|^p,\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

从而

$$\begin{aligned}\|\alpha x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|\alpha x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(|\alpha|^p\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= |\alpha|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=|\alpha|\|x\|.\end{aligned}$$

3°. 对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in X$, $y=(y_1,y_2,\cdots)\in X$, 由空间 X_n 上范数的三角不等式可得

$$\|x_n+y_n\|\leq\|x_n\|+\|y_n\|,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

根据级数形式的 Minkowski 不等式, 就有

$$\begin{aligned}\|x+y\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n+y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}(\|x_n\|+\|y_n\|)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|x\|+\|y\|.\end{aligned}$$

综上, 当 $p\geq 1$ 时, $\|\cdot\|$ 就是线性空间 X 上的范数, X 是赋范线性空间.

Step 3. 设 $\{x^m\}$ 是 X 中的 Cauchy 点列, 其中

$$x^m=\left(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots\right).$$

则对任意 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对 $m,n>N$ 以及任意指标 i, 都有

$$\left\|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}\right\|\leq\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|x^m-x^n\|<\epsilon, \tag{7.2.16}$$

则 $\left\{x_i^{(m)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ 也是 Banach 空间 X_i 中的 Cauchy 点列, 于是, 存在 $x_i\in X_i$ 使得

$$\xi_i=\lim_{m\to\infty}x_i^{(m)}.$$

令 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$, 下证 $\xi\in X$ 并且 $\|x^m-\xi\|\to 0\ (m\to\infty)$.

由于 $\{x^m\}$ 是 X 中的 Cauchy 点列, 则 $\{x^m\}$ 在 X 中有界, 即存在 $M>0$, 使得对任

意 $n \in \mathbb{N}_+$ 都有 $\|x^m\| \le M$. 于是, 对任意指标 $k \in \mathbb{N}$ 都有

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\left\|x_i^{(m)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\|x_i^{(m)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x^m\| \le M.$$

在上式两端令 $m \to \infty$, 得

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\left\|\xi_i^{(m)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le M.$$

再由 k 的任意性, 可知

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\xi_i^{(m)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le M < +\infty,$$

所以 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in X$.

当 $m, n > N$ 时, 由(7.2.16)式得

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon,$$

在上式中令 $n \to \infty$, 得

$$\|x^m - \xi\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i^{(m)} - \xi_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

所以 $\|x^m - \xi\| \to 0\ (m \to \infty)$.

综上, X 是 Banach 空间. □

练习 7.23 设 X 为赋范线性空间, $X \times X$ 为两个 X 的笛卡尔乘积空间, 对每个 $(x, y) \in X \times X$, 定义

$$\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2},$$

则 $X \times X$ 成为赋范线性空间. 证明 $X \times X$ 到 X 的映射 $(x, y) \mapsto x + y$ 是连续映射.

证明 设 $\{(x_n, y_n)\} \subset X \times X$, $(x, y) \in X \times X$ 并且

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

由于 $(x_n, y_n) - (x, y) = (x_n - x, y_n - y)$, 则

$$0 \le \|x_n - x\| \le \sqrt{\|x_n - x\|^2 + \|y_n - y\|^2} = \|(x_n, y_n) - (x, y)\|,$$

$$0 \le \|y_n - y\| \le \sqrt{\|x_n - x\|^2 + \|y_n - y\|^2} = \|(x_n, y_n) - (x, y)\|.$$

由数列极限的迫敛性可知

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0 = \lim_{n\to\infty}\|y_n - y\|.$$

另一方面, 由于

$$0 \le \|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\|,$$

由数列极限的迫敛性可知

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

即

$$x_n + y_n \to x + y \quad (n \to \infty).$$

所以 $X \times X$ 到 X 的映射:$(x, y) \mapsto x + y$ 是连续映射. □

练习 7.24 设 Λ 是实 (复) 数域, X 为赋范线性空间, 对每个 $(\alpha, x) \in \Lambda \times X$, 定义

$$\|(\alpha, x)\| = \sqrt{|\alpha|^2 + \|x\|^2},$$

则 $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ 是 $\Lambda \times X$ 到 X 中的连续映射.

证明

设 $\{(\alpha_n, x_n)\} \subset \Lambda \times X$, $(\alpha, x) \in \Lambda \times X$ 并且

$$\|(\alpha_n . x_n) - (\alpha, x)\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

与 23 题的证明类似, 可以得到

$$\lim_{n\to\infty}|\alpha_n - \alpha| = 0 = \lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|.$$

另一方面, 由于

$$\begin{aligned} 0 &\le \|\alpha_n x_n - \alpha x\| \\ &= \|\alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha x\| \\ &\le \|\alpha_n x_n - \alpha x_n\| + \|\alpha x_n - \alpha x\| \\ &= |\alpha_n - \alpha|\|x_n\| + |\alpha|\|x_n - x\|, \end{aligned}$$

注意到 $\|x_n\|$ 是有界量, 则由数列极限的迫敛性, 就有

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

即

$$\alpha_n x_n \to \alpha x \quad (n \to \infty).$$

所以 $\Lambda \times X$ 到 X 的映射:$(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ 是连续映射. □

练习 7.25 设 C 为一切收敛数列所组成的空间, 其中的线性运算与通常序列空间相同. 在 C 中令

$$\|x\| = \sup_i |\xi_i|, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in C,$$

证明 C 是可分的 Banach 空间.

证明 Step1. 设 $0 \in C$ 当且仅当

$$0 = (0, 0, \cdots, 0, \cdots).$$

易证 C 按常序列空间的加法和数乘成为线性空间. 并且

$$\|x\| = \sup_i |\xi_i|, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in C$$

是空间 C 上的范数. 根据教材 P194, 收敛数列空间 C 按范数 $\|\cdot\|$ 导出的距离是完备的, 因此 $(C, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

Step2. 下证 C 是可分空间.

令

$$E = \{x \in C \mid x = (r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots),\ r_i \in \mathbb{Q},\ \forall i \in \mathbb{N}_+\},$$

则 E 是 C 的可数子集.

任取 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in C$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 任意 $i \in \mathbb{N}_+$, 存在有理数 $r_i \in \mathbb{Q}$, 使得

$$|\xi_i - r_i| < \frac{1}{2^i}\varepsilon.$$

对任意 $i, j \in \mathbb{N}_+$, 都有

$$|r_i - r_j| \le |r_i - \xi_i| + |\xi_i - \xi_j| + |\xi_j - r_j| \le \frac{1}{2^i}\varepsilon + |\xi_i - \xi_j| + \frac{1}{2^j}\varepsilon. \tag{7.2.17}$$

由于 $\{\xi_n\}$ 是收敛数列, 从而是 Cauchy 数列, 存在正整数 N, 使得对任意 $i, j > N$ 都有

$$|\xi_i - \xi_j| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

根据(7.2.17)式, 对任意 $i, j > N$, 就有

$$|r_i - r_j| < \frac{1}{2^i}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2^j}\varepsilon < \varepsilon,$$

于是 $\{r_n\}$ 是 Cauchy 数列, 从而是收敛数列. 令 $y = (r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots)$, 则 $y \in E$ 并且

$$\|x - y\| = \sup_i |\xi_i - r_i| \leq \sup_i \frac{1}{2^i}\varepsilon < \varepsilon.$$

所以 E 是 C 的可数稠密子集, C 是可分的 Banach 空间.

$\square$

第 8 章 有界线性算子和连续线性泛函

8.1 教学计划

1. 算子的一系列概念: (1) 算子 $T: D \to Y$, 定义域 $D(T)$, 值域 $R(T)$, 核 $N(T)$(线性算子的零子空间), 特殊的算子——泛函; (2) 线性算子; (3) 连续算子; (4) 有界算子; (5) 紧算子, 全连续算子 (即连续的紧算子).
   算子的联系: 紧算子和有界算子; 教材中 $\boxed{\text{有界线性算子}}$ 的定义. 具体的算子的例子.
   $\boxed{\text{线性算子的有界性等价于连续性}}$, $\boxed{\text{线性泛函的连续性和零子空间的关系}}$.
2. 专题: 有界线性算子空间 $B(X \to Y)$.
   (1) 在 $B(X \to Y)$ 中引入线性结构 (零向量, 加法和数乘) 使之成为线性空间; (2) 定义有界线性算子的范数并验证, $B(X \to Y)$ 成为赋范线性空间; (3) $\boxed{\text{当 } Y \text{ 是 Banach 空间时}, B(X \to Y) \text{ 也是 Banach 空间}}$; (4) 引入算子乘法, 由此引出赋范代数和 Banach 代数的概念.
   对全连续线性算子空间也可以作类似的讨论.
3. $\boxed{\text{有界线性算子的范数的定义及等价定义}}$. 一些具体的算子范数的计算 (教材中的例 7 和例 8 积分算子的结论应记住).
   $\boxed{\text{无界算子的重要例子: 微分算子 } T: P[a,b] \to P[a,b]}$.
4. $\boxed{\text{赋范线性空间 } X \text{ 的共轭空间 } X'}$. 在逻辑上, X' 是一个完全确定的 Banach 空间, 它的元素就是 X 上的有界线性泛函, 似乎不存在 "求出"X' 的问题. 然而, X' 缺乏某种直观形象, 以致难以有效的思考与运用, 那么我们实际上会把它当成一种未知的东西. 这就提出一个问题: 如何讲 X' **具体**表示出来? 为此引入 $\boxed{\text{保距算子}}$ 与 $\boxed{\text{赋范线性空间之间的同构}}$ 的概念, 这样一些抽象的空间就获得了具体的表示.
   表示定理: $(l^p)' \cong l^q$, $[L^p(\Omega)]' \cong L^q(\Omega)$, 其中

$$q = \begin{cases} \infty, & \text{当} p = 1, \\ \frac{p}{p-1}, & \text{当} 1 < p < +\infty. \end{cases}$$

8.2 习题

✍ **练习 8.1** 距离说明有界线性算子的值域不一定是闭线性子空间.

✍ **练习 8.2** 求 $C[-1,1]$ 上线性泛函
$$f(x)=\int_{-1}^{0}x(t)\,\mathrm{d}t-\int_{0}^{1}x(t)\,\mathrm{d}t$$
的范数.

解 对任意 $x\in C[-1,1]$, 有
$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|\int_{-1}^{0}x(t)\,\mathrm{d}t-\int_{0}^{1}x(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\le \int_{-1}^{0}|x(t)|\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}|x(t)|\,\mathrm{d}t\\ &\le \int_{-1}^{0}\|x\|\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}\|x\|\,\mathrm{d}t\\ &= 2\|x\|,\end{aligned}$$
所以线性泛函 f 有界, 并且 $\|f\|\le 2$.

(分析: 令
$$x_0(t)=\begin{cases}1, & t\in[-1,0],\\ -1, & t\in(0,1].\end{cases}$$
形式上, 就有 $f(x_0)=1+1=2$. 但是 x_0 并不是连续函数. 目标: 以 x_0 为出发点, 构造 x_0 的一列连续的近似函数 x_n, 使得 $f(x_n)\to 2$.)

另一方面, 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 令
$$x_n(t)=\begin{cases}1, & t\in\left[-1,-\frac{1}{n}\right],\\ -nt, & t\in\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right],\\ -1, & t\in\left(\frac{1}{n},1\right],\end{cases}$$
则 $x_n\in C[-1,1]$,
$$\|x_n\|=\max_{t\in[-1,1]}|x_n(t)|=1,$$
从而
$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup_{\|x\|=1}|f(x)|\\ &\ge |f(x_n)|\\ &= \left|\int_{-1}^{0}x_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_{0}^{1}x_n(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &= \left|\left[\int_{-1}^{-\frac{1}{n}}\mathrm{d}t+\int_{-\frac{1}{n}}^{0}(-nt)\,\mathrm{d}t\right]-\left[\int_{0}^{\frac{1}{n}}(-nt)\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{n}}^{1}(-1)\,\mathrm{d}t\right]\right|\\ &= 2-\frac{2}{n}.\end{aligned}$$
由 $n\in\mathbb{N}$ 的任意性可得 $\|f\|\ge 2$.

综上, $\|f\|=2$.

✍ **练习 8.3** 设无穷阵 $(a_{ij}), i,j=1,2,\cdots$, 满足 $\sup\limits_i \sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|<\infty$. 作 l^∞ 到 l^∞ 中算子如下: 若 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$, $Tx=y$, 则

$$\eta_i=\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j,\quad i=1,2,\cdots.$$

证明 $\|T\|=\sup\limits_i\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|$.

证明

显然, $T:l^\infty\to l^\infty$ 是线性算子.

对 $\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^\infty$, 由于 $\sup\limits_i\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|<\infty$, 则

$$\begin{aligned}\|Tx\|&=\|y\|=\sup_i|\eta_i|=\sup_i\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\right|\\ &\le\ \sup_i\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}||\xi_j|\right)\le\sup_i\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|\cdot\sup_j|\xi_j|\right)=\left(\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|\right)\cdot\|x\|,\end{aligned}$$

所以 T 是有界线性算子并且 $\|T\|\le\sup\limits_i\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|$.

另一方面, 对任意 $k\in\mathbb{N}_+$, 令

$$e_k=(\xi_1^k,\xi_2^k,\cdots,\xi_j^k,\cdots),$$

其中 $\xi_j^k=\operatorname{sign}(a_{kj})$, 则 $e_k\in l^\infty$, $\|e_k\|\le 1$ 并且

$$Te_k=(\eta_1^k,\eta_2^k,\cdots,\eta_i^k,\cdots),$$

其中

$$\eta_k^k=\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}\xi_j^k=\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}\cdot\operatorname{sign}(a_{kj})=\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{kj}\right|\ge 0.$$

于是,

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\le1}\|Tx\|\ge\|Te_k\|=\sup_i|\eta_i^k|\ge|\eta_k^k|=\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{kj}\right|,\quad\forall k\in\mathbb{N}_+.$$

由 k 的任意性, 就有

$$\|T\|\ge\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|.$$

综上, $\|T\|=\sup\limits_i\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|$. □

✍ **练习 8.4** 设 $\sup\limits_{n\ge1}|\alpha_n|<\infty$, 在 $l^p\ (p\ge 1)$ 中定义线性算子:

$$y=Tx,\quad \eta_i=\alpha_i\xi_i,\quad i=1,2,\cdots,$$

期中

$$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots),$$

证明 T 是有界线性算子, 并且 $\|T\| = \sup\limits_{n\geq 1} |\alpha_n|$.

证明

显然, 算子 T 是线性算子.

任取 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^p$. 由于 $\sup_{n\geq 1} |\alpha_n| < \infty$, 则对任意 $i \in \mathbb{N}$, 都有

$$|\eta_i|^p = |\alpha_i \xi_i|^p = |\alpha_i|^p |\xi_i|^p \leq \left(\sup_{n\geq 1} |\alpha_n|\right)^p |\xi_i|^p,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p \leq \left(\sup_{n\geq 1} |\alpha_n|\right)^p \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p = \left(\sup_{n\geq 1} |\alpha_n|\right)^p \|x\|_p^p.$$

于是, $y = Tx \in l^p$, 并且

$$\|Tx\|_p \leq \left(\sup_{n\geq 1} |\alpha_n|\right) \|x\|^p.$$

所以算子 $T : l^p \to l^p$ 是有界线性算子, 并且 $\|T\| \leq \sup\limits_{n\geq 1} |\alpha_n|$.

下证 $\|T\| = \sup_{n\geq 1} |\alpha_n|$. 对任意 $k \in \mathbb{N}_+$, 定义 $e_k = (0, \cdots, 0, \overset{k}{1}, 0, \cdots)$, 则 $e_k \in l^p$ 并且 $\|e_k\|_p = 1$. 另一方面,

$$\|Te_k\|_p = \|(0, \cdots, 0, \alpha_k, 0, \cdots)\|_p = \|\alpha_k e_k\|_p = |\alpha_k|,$$

所以就有

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in l^p \\ \|x\|_p = 1}} \|Tx\|_p \geq \|Te_k\|_p = |\alpha_k|,$$

由 k 的任意性, 就有

$$\|T\| \geq \sup_{k\geq 1} |\alpha_k|.$$

最终, $\|T\| = \sup_{n\geq 1} |\alpha_n|$. □

✍ **练习 8.5** 设 X 是 n 维向量空间, 在 X 中取一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, $(t_{\mu\nu})$ 是 $n \times n$ 矩阵, 作 X 到 X 中算子如下: 当 $x = \sum\limits_{\nu=1}^{n} x_\nu e_\nu$ 时,

$$y = Tx = \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu e_\mu,$$

其中

$$y_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} t_{\mu\nu} x_\nu, \quad \mu = 1, 2, \cdot, n.$$

若规定向量的范数为 $\|x\| = \left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 证明上述算子的范数满足

$$\max_{\nu}\left(\sum_{\mu=1}^{n} |t_{\mu\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|T\| \leq \left(\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} |t_{\mu\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

✍ **练习 8.6** 设 T 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的线性算子, 若 T 的零子空间是闭集, T 是否一定有界?

✍ **练习 8.7** 作 l^p $(1 < p < +\infty)$ 中算子 T 如下: 当

$$x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^p \text{时}, \; Tx = (y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots),$$

其中

$$y_n = \sum_{m=1}^{\infty} t_{nm}x_m, \; n = 1,2,3,\cdot, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} |t_{nm}|^q\right)^{\frac{p}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

证明: T 是有界线性算子.

证明 (算子 T 是通过级数来定义的, 所以需要证明算子 T 是良定义的) 由于 $p > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则对任意 $m, n \in \mathbb{N}_+$, 由 Young 不等式得

$$|t_{mn}||x_m| \leq \frac{1}{q}|t_{mn}|^q + \frac{1}{p}|x_m|^p.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} |t_{mn}|^q\right)^{\frac{p}{q}} < \infty$, 则当 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^p$ 时, 就有

$$y_n = \sum_{m=1}^{\infty} t_{nm}x_m \leq \sum_{m=1}^{\infty} |t_{nm}||x_m| \leq \frac{1}{q}\sum_{m=1}^{\infty} |t_{mn}|^q + \frac{1}{p}\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p < \infty,$$

所以算子 T 的定义是合理的. 易证 T 是线性算子.

另一方面, 利用级数形式的 Hölder 不等式可得(一开始并不知道算子 T 将 x 映入那个空间, 不能直接写 $\|Tx\| = \cdots$)

$$\begin{aligned}
|y_n|^p &= \left|\sum_{m=1}^{\infty} t_{mn}x_m\right|^p \\
&\leq \left[\sum_{m=1}^{\infty} |t_{mn}||x_m|\right]^p \\
&\leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} |t_{mn}|^q\right)^{\frac{p}{q}}\left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p\right) \\
&= \left(\sum_{m=1}^{\infty} |t_{mn}|^q\right)^{\frac{p}{q}}\|x\|_p^p,
\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p \le \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|t_{mn}|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right]\|x\|_p^p,$$

从而 $Tx=(y_1,y_2,\cdots)\in l^p$, 并且

$$\|Tx\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|t_{mn}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]\|x\|_p,$$

这说明 $T: l^p\to l^p$ 是有界算子.

综上, $T: l^p\to l^p$ 是有界线性算子. □

练习 8.8 $\mathbb{R}^n$ 按范数 $\|x\|=\max\limits_j|\xi_j|$, $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 成赋范线性空间, 问此赋范线性空间的共轭空间是什么?

证明 $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ 的共轭空间与 l^1 的子空间

$$X=\{\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\mid \eta_k\in\mathbb{R},\ \forall k=1,2,\cdots,n\}$$

同构 □

练习 8.9 设 C_0 表示极限为 0 的实数列全体, 按通常的加法和数乘, 以及

$$\|x\|=\sup_i|\xi_i|,\quad x=(\xi_i,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$$

构成 Banach 空间, 证明: $(C_0)'=l^1$.

证明

Step 1. 令 $e_k=(0,\cdots,0,\overset{k}{1},0,\cdots)$, $k\in\mathbb{N}_+$, 则 $e_k\in C_0$ 并且 $\|e_k\|=1$. 对任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in C_0$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0$, 则对 $\forall\epsilon>0$, 存在 $N=N(\epsilon)$, 使得对 $\forall n>N$, 都有 $|\xi_n|<\epsilon$, 从而

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right\|=\|(0,\cdots,0,\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots)\|=\sup_{i\ge n+1}|\xi_i|\le\epsilon.$$

于是 $x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i e_i$.

Step 2. 对任意 $f\in(C_0)'$, 令 $\eta_k=f(e_k)$, $k\in\mathbb{N}_+$. 下证

$$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^1.$$

事实上, 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 有

$$\sum_{i=1}^{n}|\eta_i| = \sum_{i=1}^{n}(\operatorname{sig}\eta_i)\eta_i$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}(\operatorname{sign}\eta_i)f(e_i)\\
&= f\left(\sum_{i=1}^{n}(\operatorname{sign}\eta_i)e_i\right)\\
&\leq \|f\|\cdot\left\|\sum_{i=1}^{n}(\operatorname{sign}\eta_i)e_i\right\|\\
&\leq \|f\|,
\end{aligned}
$$

因此 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\eta_i|$ 收敛, 从而 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^1$.

这样就定义了算子

$$
\begin{aligned}
T:\ (C_0)' &\longrightarrow l^1,\\
f &\longmapsto y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)=(f(e_1),f(e_2),\cdots).
\end{aligned}
$$

易证 T 是线性算子, 并且对 $\forall f\in(C_0)'$, 有 $\|Tf\|=\|y\|\leq\|f\|$.

Step 3. 下证 T 是满射.

任取 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^1$, 对 $\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in C_0$, 由于

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\xi_i\right|\leq\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|\cdot\sup_i|\xi_i|<\infty,$$

从而可以定义 C_0 上的泛函 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\eta_i\xi_i$. 易证 f 是有界线性泛函, 即 $f\in(C_0)'$, 并且

$$f(e_k)=\eta_k,\quad\forall k\in\mathbb{N}_+.$$

由算子 T 的定义, 就有

$$Tf=(f(e_1),f(e_2),\cdots)=(\eta_1,\eta_2,\cdots)=y.$$

所以 T 是满射.

Step 4. 下证 T 是保距算子.

对任意 $f\in(C_0)'$, 由 Step 2 可知

$$\|Tf\|\leq\|f\|,\quad\forall f\in(C_0)'.$$

反之, 对任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in C_0$, 根据 Step 1 以及 f 的连续线性, 就有

$$|f(x)|=\left|f\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i\right)\right|\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|\xi|\cdot|f(e_i)|\leq\sup_i|f(e_i)|\cdot\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|=\|Tf\|\cdot\|x\|,$$

从而 $\|f\|\leq\|Tf\|$.

综上, $(C_0)'$ 与 l^1 等距同构. $\square$

第 9 章 内积空间和 Hilbert 空间

9.1 教学计划

1. 内积空间的概念: 复数，正定性、对第一变元的线性、共轭对称性 (Hermit 性). 内积对第二变元共轭线性.
   由内积可以导出范数, 内积空间天然地是赋范线性空间. 重要的不等式——Cauchy-Schwartz 不等式. 一个赋范线性空间的范数可以由内积导出的充分必要条件是范数满足平行四边形公式 (这种情况下内积可以通过极化恒等式定义出来). 完备的内积空间称为 Hilbert 空间.
   内积作为二元映射关于两个变元都连续.
2. 内积空间上的最佳逼近问题: 凸集与极小化向量定理, 由此得到完备子空间上的最佳逼近元的存在唯一性. 引入正交的概念, 借此刻画最佳逼近元.
   线性空间中直和与互补子空间概念, 内积空间中的正交补概念, 投影定理.
   正交和 $\oplus$, 投影与投影算子. 集合的二次正交补与原集合的关系.
   用正交补可以判断稠密性.
3. 正交系、规范正交系、完全规范正交系的概念.
   专题: Fourier 级数.
   Fourier 系数与 Fourier 级数的定义.
   问题 1: 设 M 是内积空间 X 中的规范正交系, $x \in X$, Fourier 级数 $\sum\limits_{e\in M}\langle x,e\rangle e$ 是否收敛? 答: 当 X 是 Hilbert 空间, Fourier 级数 $\sum\limits_{e\in M}\langle x,e\rangle e$ 收敛 (证明的核心: Bessel 不等式).
   问题 2: 若 Fourier 级数 $\sum\limits_{e\in M}\langle x,e\rangle e$ 收敛, 是否有 $x=\sum\limits_{e\in M}\langle x,e\rangle e$? 答: 当 X 是 Hilbert 空间, M 是 X 中的规范正交系时, $x=\sum\limits_{e\in M}\langle x,e\rangle e$(证明的核心: Parseval 等式). 可以用 Steklov 定理来判断规范正交系的完全性.
   问题 3: Hilbert 空间是否总存在完全规范正交系? 答: 非零的 Hilbert 空间总存在完全规范正交系 (利用 Zorn 引理), 并且可分的非零 Hilbert 空间中的完全规范正交系都是至多可数集合. 同一个非零 Hilbert 空间中不同的完全规范正交系基数相同, 由此可定义 Hilbert 基数的概念.
   内积空间的同构. 两个 Hilbert 空间同构当且仅当它们具有相同的 Hilbert 基数: 有限维 (n 维) 的可分 Hilbert 空间都与 $\mathbb{R}^n$ 同构, 无穷维的可分 Hilbert 空间都与 l^2 同构.
4. Riesz 定理. 利用 Riesz 定理可证明, 任何 Hilbert 空间 X 都与它的共轭空间

X' 复共轭同构.

5. 内积空间上的共轭算子的定义. 利用 Riesz 定理可证明, Hilber 空间上的任何有界线性算子 A 总存在唯一的共轭算子 A^*, 并且 $\|A\| = \|A^*\|$. 共轭算子的性质.
从共轭算子出发可定义三类重要的算子: 自伴算子、酉算子、正常算子. 自伴算子的性质比较重要, 在第 11 章会用到.

9.2 习题

练习 9.1 设 $\{x_n\}$ 是内积空间中点列, 若 $\|x_n\| \to \|x\|$ $(n \to \infty)$, 且对一切 $y \in X$ 有 $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ $(n \to \infty)$, 证明 $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

证明 由内积空间中范数的定义可知

$$\begin{aligned} & \|x_n - x\|^2 \\ = \ & \langle x_n - x, x_n - x\rangle \\ = \ & \|x_n\|^2 - \langle x, x_n\rangle - \langle x_n, x\rangle + \|x\|^2 \\ = \ & \|x_n\|^2 - \overline{\langle x_n, x\rangle} - \langle x_n, x\rangle + \|x\|^2. \end{aligned}$$

由条件可知

$$\|x_n\| \to \|x\|, \quad \langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle = \|x\|^2, \quad \overline{\langle x_n, x\rangle} \to \overline{\langle x, x\rangle} = \|x\|^2 \quad (n \to \infty),$$

所以

$$\|x_n - x\|^2 \to 0 \quad (n \to \infty),$$

即 $x_n \to x(n \to \infty)$. □

练习 9.2 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是一列内积空间, 令

$$X = \left\{\{x_n\} \,\middle|\, x_n \in X_n, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty\right\},$$

当 $\{x_n\}, \{y_n\} \in X$ 时, 规定 $\alpha\{x_n\} + \beta\{y_n\} = \{\alpha x_n + \beta y_n\}$, 其中 α, β 是数,

$$\langle\{x_n\}, \{y_n\}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n, y_n\rangle,$$

证明: X 是内积空间, 又当 X_n 都是 Hilbert 空间时, 证明 X 也是 Hilbert 空间.

证明 1. 先证 X 是内积空间.

由 Cauchy-Schwartz 不等式可知, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 以及任意 $x_n, y_n \in X_n$, 都有

$$\langle x_n, y_n\rangle \leq \|x_n\| \cdot \|y_n\|,$$

因此, 对任给的 $N \in \mathbb{N}_+$, 都有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N}\langle x_n, y_n\rangle \leq \sum_{n=1}^{N}\|x_n\| \cdot \|y_n\| \\ \leq\ &\left(\sum_{n=1}^{N}\|x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{N}\|y_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,\end{aligned}$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle x_n, y_n\rangle$ 收敛, 内积

$$\langle\{x_n\}, \{y_n\}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n, y_n\rangle$$

是合理定义的. 由于 $X_n, n = 1, 2, \cdots$ 都是 Hilbert 空间, 所以 $\langle\{x_n\}, \{y_n\}\rangle$ 满足:

1°. $\langle\{x_n\}, \{x_n\}\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle x_n, x_n\rangle \geq 0$. $\langle\{x_n\}, \{x_n\}\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle x_n, x_n\rangle = 0$ 等价于对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 都有 $\langle x_n, x_n\rangle =$, 同样等价于任意 $n \in \mathbb{N}_+$, $x_n = 0$, 进一步等价于 $\{x_n\} = 0$.

2°. 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 都有

$$\begin{aligned}&\langle\alpha\{x_n\} + \beta\{y_n\}, \{z_n\}\rangle \\ =\ &\sum_{n=1}^{\infty}\langle\alpha x_n + \beta y_n, z_n\rangle \\ =\ &\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha\langle x_n, z_n\rangle + \beta\langle y_n, z_n\rangle) \\ =\ &\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n, z_n\rangle + \beta\sum_{n=1}^{\infty}\langle y_n, z_n\rangle \\ =\ &\alpha\langle\{x_n\}, \{z_n\}\rangle + \beta\langle\{y_n\}, \{z_n\}\rangle\end{aligned}$$

3°. 对任意 $\{x_n\}, \{y_n\} \in X$, 都有

$$\begin{aligned}\langle\{x_n\}, \{y_n\}\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n, y_n\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\langle y_n, x_n\rangle} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty}\langle y_n, x_n\rangle} = \overline{\langle\{y_n\}, \{x_n\}\rangle}.\end{aligned}$$

所以 $\langle\{x_n\}, \{y_n\}\rangle$ 是空间 X 上的内积, X 成为内积空间.

2. 下证 X 是 Hilbert 空间.

设 $\{\bar{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ 是空间 X 中的任意一列 Cauchy 列, 其中

$$\bar{x}^n = \left\{x_k^{(n)}\right\}_{k=1}^{\infty} \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

则对任意 $\epsilon > 0$, 总存在 $N \in \mathbb{N}_+$ 使得对任意 $m, n > N$ 都有

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ = & \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle x_k^{(m)} - x_k^{(n)}, x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \\ = & \left\langle\left\{x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right\}_{k=1}^{\infty}, \left\{x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right\}_{k=1}^{\infty}\right\rangle \\ = & \|\bar{x}^m - \bar{x}^n\| < \epsilon. \end{aligned} \tag{9.2.1}$$

从而, 对任意 $k \in \mathbb{N}_+$, 都有

$$\left\|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon,$$

由此可知 $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 X_k 中的 Cauchy 点列. 由 X_k 的完备性可知, 存在 $x_k \in X_k$ 使得

$$x_k^{(n)} \to x_k \quad (n \to \infty).$$

记 $\bar{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, 下证 $\bar{x} \in X$ 并且 $\bar{x}^n \to \bar{x}$ $(n \to \infty)$.

有 (9.2.1) 可知, 任取 $K \in \mathbb{N}_+$, 都有

$$\left(\sum_{k=1}^{K}\left\|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon,$$

在上式两端令 $m \to \infty$ 可得

$$\left(\sum_{k=1}^{K}\left\|x_k - x_k^{(n)}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon,$$

由 $K \in \mathbb{N}_+$ 的任意性就得到

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\|x_k - x_k^{(n)}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon. \tag{9.2.2}$$

由于 $\bar{x}^n = \left\{x_k^{(n)}\right\}_{k=1}^{\infty} \in X$, 利用级数形式的 Minkowskii 不等式可得

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\|x_k - x_k^{(n)}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\|x_k^{(n)}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\|x_k^{(n)}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

所以 $\bar{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in X$. 于是, (9.2.2) 式就变为

$$\|\bar{x} - \bar{x}^n\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left\|x_k - x_k^{(n)}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon.$$

由极限的 $\epsilon - \delta$ 定义可知

$$\bar{x}^n \longrightarrow \bar{x} \quad (n \longrightarrow \infty).$$

所以 X 是 Hilbert 空间. □

练习 9.3 设 X 是 n 维线性空间, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 X 的一组基, 证明 $\langle x, y\rangle$ 成为 X 上内积的充要条件是存在 $n \times n$ 正定矩阵

$$\mathbf{A} = \left(a_{\mu\nu}\right),$$

使得

$$\left\langle \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu e_\mu, \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu e_\nu \right\rangle = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu \overline{y_\nu}.$$

注意 这里的正定指的是 Hermit 正定. 设矩阵 $\mathbf{A} = \left(a_{\mu\nu}\right)$ 是一个 $n \times n$ 复矩阵. 若对任意 $\mu, \nu = 1, 2, \cdots, n$, 都有

$$a_{\mu\nu} = \overline{a_{\nu\mu}},$$

则称矩阵 $\mathbf{A}$ 是 Hermit 矩阵. 如果对任意非零向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, 还成立

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathbf{A}\begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} > 0,$$

则称矩阵 $\mathbf{A}$ 是 Hermit 正定矩阵。

证明 (必要性) 令

$$a_{\mu\nu} = \langle e_\mu, e_\nu\rangle.$$

下证矩阵 $\mathbf{A} = \left(a_{\mu\nu}\right)$ 是正定矩阵.

对任意

$$x \;=\; (x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu e_\mu \in X$$

且 $x \neq 0$, 根据内积对第一变元的线性, 对第二变元的共轭线性, 就有

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathbf{A}\begin{pmatrix}\overline{x_1}\\ \overline{x_2}\\ \vdots\\ \overline{x_n}\end{pmatrix} &= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu \overline{x_\nu} \\
&= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} x_\mu \overline{y_\nu}\langle e_\mu, e_\nu\rangle = \left\langle \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu e_\mu, \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu e_\nu \right\rangle \\
&= \langle x, x\rangle = \|x\|^2 > 0.
\end{aligned}$$

所以矩阵 $\mathbf{A} = (a_{\mu\nu})$ 是正定矩阵.

(充分性) 设矩阵 $\mathbf{A} = (a_{\mu\nu})$ 是正定矩阵. 对任意

$$\begin{aligned}
x &= (x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu e_\mu \in X, \\
y &= (y_1, y_2, \cdots, y_n) = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu e_\nu \in X,
\end{aligned}$$

定义

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu e_\mu, \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu e_\nu \right\rangle = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu \overline{y_\nu}.$$

下证 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是线性空间 X 上的内积.

显然, 对任意 $x, y \in X$, 都有 $\langle x, y\rangle \in \mathbb{C}$.

1. (正定性) 由于矩阵 $\mathbf{A} = (a_{\mu\nu})$ 是正定矩阵, 则

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle = \left\langle \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu e_\mu, \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu e_\nu \right\rangle &= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} x_\mu \overline{y_\nu}\langle e_\mu, e_\nu\rangle \\
&= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu \overline{x_\nu} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathbf{A}\begin{pmatrix}\overline{x_1}\\ \overline{x_2}\\ \vdots\\ \overline{x_n}\end{pmatrix} \geq 0
\end{aligned}$$

并且 $\langle x, x\rangle = 0$ 当且仅当 $x = 0$.

2. (对第一变元的线性) 对任意

$$z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu e_\nu \in X$$

以及任意 $\alpha, \beta \in X$, 有

$$\begin{aligned}
& \langle \alpha x + \beta y, z \rangle \\
= & \left\langle \alpha \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu e_\mu + \beta \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu e_\mu, \quad \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu e_\nu \right\rangle \\
= & \left\langle \sum_{\mu=1}^{n} \left(\alpha x_\mu + \beta y_\mu\right) e_\mu, \quad \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu e_\nu \right\rangle \\
= & \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \left(\alpha x_\mu + \beta y_\mu\right) \overline{z_\nu} \\
= & \alpha \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu \overline{z_\nu} + \beta \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} y_\mu \overline{z_\nu} \\
= & \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle.
\end{aligned}$$

3. (共轭对称性)

$$\langle x, y \rangle = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu \overline{y_\nu} = \overline{\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \overline{a_{\mu\nu} x_\mu} y_\nu} = \overline{\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\nu\mu} \overline{x_\mu} y_\nu} = \overline{\sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} y_\nu \overline{x_\mu}} = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

综上, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是线性空间 X 上的内积. □

✍ **练习 9.4** 设 X 是实内积空间, 若 $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, 则 $x \perp y$, 当 X 是复内积空间时, 这个结论是否仍然成立?

证明 (1) 当 X 是实内积空间时, 内积满足对称性, 总有 $\langle x, y \rangle$. 设 $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. 由于

$$\begin{aligned}
& \|x + y\|^2 \\
= & \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\
= & \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2,
\end{aligned}$$

于是 $\langle x, y \rangle = 0$, 从而 $x \perp y$.

(2) 当 X 是复内积空间时, 结论不一定成立.

反例: $X = \mathbb{C}$, 内积定义为

$$\langle x, y \rangle = x \cdot \overline{y}, \quad x, y \in \mathbb{C}.$$

当 $x = i$, $y = 1$ 时, 就有

$$\|i + 1\|^2 = 2 = \|i\|^2 + \|1\|^2,$$

但

$$\langle i, 1 \rangle = i \neq 0,$$

所以 i 与 1 在这种内积意义下不正交.

□

✍ **练习 9.5** 证明内积空间 X 中两个向量 x, y 垂直的充要条件是: 对一切数 α, 成立 $\|x+\alpha y\| \geq \|x\|$.

证明 (必要性) 设 $x, y \in X$ 并且 $x \perp y$, 则对任给的 $\alpha \in \mathbb{C}$, 都有

$$\begin{aligned} & \|x+\alpha y\|^2 \\ = & \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle \\ = & \langle x, x\rangle+\alpha\langle y, x\rangle+\bar{\alpha}\langle x, y\rangle+\alpha \bar{\alpha}\langle y, y\rangle \\ = & \alpha x\|^2+0+0+|\alpha|^2\|y\|^2 \\ \geq & \|x\|^2, \end{aligned}$$

所以 $\|x+\alpha y\| \geq \|x\|$.

(充分性）设 $x, y \in X$, 并且对任意 $\alpha \in \mathbb{C}$ 都有

$$\|x+\alpha y\| \geq\|x\| .$$

对任意 $n \in \mathbb{N}$, 当 $\alpha=-\frac{1}{n}\langle x, y\rangle$ 时, 就有

$$\begin{aligned} \|x\|^2 & \leq\left\|x+\frac{-1}{n}\langle x, y\rangle y\right\|^2 \\ & =\|x\|^2-\left(\frac{1}{n}\langle x, y\rangle\right)\langle y, x\rangle-\overline{\left(\frac{1}{n}\langle x, y\rangle\right)}\langle x, y\rangle+\left|\frac{1}{n}\langle x, y\rangle\right|^2\|y\|^2 \\ & =\|x\|^2-\frac{2}{n}|\langle x, y\rangle|^2+\frac{1}{n^2}|\langle x, y\rangle|^2\|y\|^2, \end{aligned}$$

从而

$$0 \leq|\langle x, y\rangle|^2 \leq \frac{1}{2 n}|\langle x, y\rangle|^2\|y\|^2 .$$

在上式中令 $n \rightarrow \infty$, 就得到

$$|\langle x, y\rangle|^2=0,$$

所以 $x \perp y$. □

✍ **练习 9.6** 设 X 是 Hilbert 空间, $M \subset X$, 并且 $M \neq \emptyset$, 证明 $\left(M^{\perp}\right)^{\perp}$ 是 X 中包含 M 的最小闭子空间.

证明 对任意的 $x \in M$, 都有

$$\langle x, y\rangle=0, \quad \forall y \in M^{\perp},$$

从而 $x \in (M^{\perp})^{\perp}$. 由此可知, $(M^{\perp})^{\perp}$ 是 Hilbert 空间 X 中包含 M 的闭子空间. 设 Y 也

是 Hilbert 空间 X 中包含 M 的闭子空间. 下证

$$(M^{\perp})^{\perp} \subset Y.$$

由 $M \subset Y$ 可知 $Y^{\perp} \subset M^{\perp}$,

$$(M^{\perp})^{\perp} \subset (Y^{\perp})^{\perp}.$$

另一方面, 由于 Y 是 Hilbert 空间 X 中的闭子空间, 则 (根据课本 248 页引理 2) $Y = (Y^{\perp})^{\perp}$, 因此

$$(M^{\perp})^{\perp} \subset Y.$$

所以 $(M^{\perp})^{\perp}$ 是 Hilbert 空间 X 中包含 M 的最小闭子空间. □

练习 9.7 设 $\{e_n\}$ 是 $L^2[a,b]$ 中的规范正交系, 说明二元函数列 $e_n(x)e_m(y)$ $(n,m = 1,2,3,\cdots)$ 是 $L^2([a,b]\times[a,b])$ 中的规范正交系, 若 $\{e_n\}$ 完全, 则二元函数列 $e_n(x)e_m(y)$ $(n,m = 1,2,3,\cdots)$ 也是完全的.

证明 (1) 设 $\{e_n\}$ 是 $L^2[a,b]$ 中的规范正交系, 令

$$f_m^n(x,y) = e_m(x)e_n(y), \quad x,y \in [a,b],$$

则

$$\begin{aligned}
&\int_a^b\int_a^b \left|f_m^n(x,y)\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
=\;& \int_a^b\int_a^b |e_m(x)|^2\,|e_n(y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
=\;& \int_a^b |e_m(x)|^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b |e_n(y)|^2\,\mathrm{d}y \\
=\;& \|e_m\|^2 \cdot \|e_n\|^2 = 1,
\end{aligned}$$

所以 $f_m^n \in L^2([a,b]\times[a,b])$ 并且 $\|f_m^n\| = 1$.

当 $(m,n) \neq (k,l)$ 时, 有 $m \neq k$ 或 $n \neq l$, 所以

$$\begin{aligned}
&\left\langle f_m^n, f_k^l\right\rangle \\
=\;& \int_a^b\int_a^b f_m^n(x,y)\overline{f_k^l(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
=\;& \int_a^b\int_a^b e_m(x)e_n(y)\overline{e_k(x)e_l(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
=\;& \left(\int_a^b e_m(x)\overline{e_k(x)}\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_a^b e_n(y)\overline{e_l(y)}\,\mathrm{d}y\right) \\
=\;& \langle e_m, e_l\rangle \cdot \langle e_n, e_l\rangle = 0
\end{aligned}$$

综上, $\{f_m^n\}$ 是 $L^2([a,b]\times[a,b])$ 中的规范正交系.

(2) 设 $\{e_n\}$ 完全, 下证 $\{f_m^n\}$ 是 $L^2([a,b]\times[a,b])$ 中的完全规范正交系. 由于 $L^2([a,b]\times[a,b])$ 是 Hilbert 空间, 所以只需要证明 $\{f_m^n\}^{\perp}=\{0\}$.

任取 $f\in\{f_m^n\}^{\perp}$, 则对任意 $k,l\in\mathbb{N}_+$, 都有 $\langle f,f_k^l\rangle=0$. 固定 $k\in\mathbb{N}_+$, 定义

$$g_k(y)=\int_a^b f(x,y)\overline{e_k(x)}\,\mathrm{d}x,\quad y\in[a,b].$$

利用 Hölder 不等式可得

$$\int_a^b|g_k(y)|^2\,\mathrm{d}y=\int_a^b\left|\int_a^b f(x,y)\overline{e_k(x)}\,\mathrm{d}x\right|^2\mathrm{d}y\le\int_a^b\int_a^b|f(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\cdot\int_a^b|e_k(x)|^2\,\mathrm{d}x<+\infty,$$

即 $g_k\in L^2[a,b]$. 于是

$$\begin{aligned}0&=\langle f,f_k^l\rangle\\&=\int_a^b\int_a^b f(x,y)\overline{f_k^l(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_a^b\int_a^b f(x,y)\overline{e_k(x)e_l(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_a^b g_k(y)\overline{e_l(y)}\,\mathrm{d}y\\&=\langle g_k,e_l\rangle,\quad\forall l\in\mathbb{N}_+.\end{aligned}$$

由 $\{e_n\}$ 的完全性可知, $g_k=0\in L^2[a,b]$, 即

$$g_k(y)=\int_a^b f(x,y)\overline{e_k(x)}\,\mathrm{d}x=0,\quad a.e.y\in[a,b],\quad\forall k\in\mathbb{N}_+.\tag{9.2.3}$$

固定 $y\in[a,b]$, 令

$$g(x)=f(x,y),\quad x\in[a,b].$$

由于 $f\in L^2([a,b]\times[a,b])$, 根据 Fubini 定理 (p130 定理 4), $g\in L^2[a,b]$. 由(9.2.3)式可知

$$\langle g,e_k\rangle=0,\quad\forall k\in\mathbb{N}_+.$$

由 $\{e_n\}$ 的完全性可知, $g=0\in L^2[a,b]$.

综上, $f(x,y)=0$, a.e. $x,y\in[a,b]$. 所以 $f=0\in L^2[a,b]$, 于是 $\{f_m^n\}^{\perp}=\{0\}$, $\{f_m^n\}$ 是 $L^2([a,b]\times[a,b])$ 中的完全规范正交系. □

练习 9.8 设 $e_1,e_2,\cdot,e_n$ 是内积空间 X 中规范正交系, 证明: X 到 $\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的投影算子 P 为

$$Px=\sum_{\nu=1}^n\langle x,e_\nu\rangle e_\nu,\quad x\in X.$$

证明 令

$$Y = \text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\},$$

则 Y 是内积空间 X 的有限维子空间, 从而是完备子空间. 于是, 对任意 $x \in X$, (246 页推论)存在唯一的 $y \in Y$ 使得 $\|x - y\| = d(x, Y)$. 令 $z = x - y$, 则 $z \perp M$, 从而(247 页引理 1) $z \in Y^{\perp}$. 若存在 $y_1 \in Y$, $z_1 \in Y^{\perp}$, 使得 $x = y_1 + z_1$, 则

$$y - y_1 = z_1 - z \in Y \cap Y^{\perp} = \{0\},$$

从而 $y = y_1$, $z = z_1$. 所以

$$X = Y \oplus Y^{\perp}.$$

对任意 $x \in X$, 存在唯一一对 $y = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu e_\nu \in Y$, $z \in Y^{\perp}$ 使得

$$x = y + z = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu e_\nu + z,$$

其中 $\alpha_\nu \in \mathbb{C}$, $\nu = 1, 2, \cdots, n$. 对任意 $\mu \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 就有

$$\langle x, e_\mu \rangle = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \langle e_\nu, e_\mu \rangle + \langle z, e_\mu \rangle = \alpha_\mu,$$

所以

$$Px = y = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu e_\mu = \sum_{\mu=1}^{n} \langle x, e_\mu \rangle e_\mu.$$

□

练习 9.9 设 X 是可分 Hilbert 空间, 证明 X 中任何规范正交系至多为可数集.

证明 设

$$N = \{p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots\}$$

是可分 Hilbert 空间中的可数稠密子集. 任取 X 中的一组规范正交系

$$M = \{e_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}.$$

当 $\lambda \neq \lambda'$ 时, 有

$$\|e_\lambda - e_{\lambda'}\|^2 = \|e_\lambda\|^2 + \|e_{\lambda'}\|^2 = 2,$$

从而

$$U\left(e_\lambda, \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \bigcap U\left(e_{\lambda'}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \emptyset,$$

规范正交系 M 与开球集合 $\left\{U\left(e_\lambda, \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \,\middle|\, \lambda \in \Lambda\right\}$ 对等.

由于可数集 N 在空间 X 中稠密, 则每个开球 $U\left(e_\lambda, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ 内含有 N 中的至少一个点.

由于 $\left\{U\left(e_\lambda, \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \,\middle|\, \lambda \in \Lambda\right\}$ 中的开球两两不相交, 则 $\left\{U\left(e_\lambda, \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \,\middle|\, \lambda \in \Lambda\right\}$ 的基数不超过 N 的基数.

综上, M 至多可数. □

练习 9.10 设 X 是内积空间, X^* 是它的共轭空间, f_z 表示 X 上线性泛函 $f_z(x) = \langle x, z\rangle$, 若 X 到 X^* 的映射 $F: z \to f_z$ 是一一 (one to one) 到上 (onto) 的映射, 则 X 是 Hilbert 空间.

证明 Step1. 对任意 $y, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 有

$$\begin{aligned}
& F(\alpha z + \beta y)(x) \\
= \;& f_{\alpha z + \beta y}(x) \\
= \;& \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle x, y\rangle \\
= \;& \alpha F_z x + \beta F_y(x), \quad \forall x \in X.
\end{aligned}$$

由 x 的任意性可知,

$$F(\alpha z + \beta y) = \alpha F(z) + \beta F(y),$$

所以 F 是线性算子. 对 $\forall z \in X$, 有

$$\|Fz\| = \|f_z\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in X}} |f_z(x)| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in X}} |\langle x, z\rangle| \leq \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in X}} \|x\| \cdot \|z\| = \|z\|, \tag{$*$}$$

所以 F 是有界线性算子, 并且 $\|Fz\| = \|z\|$. 另一方面, 由于

$$\|z\|^2 = \langle z, z\rangle = f_z(z) \leq \|f_z\| \cdot \|z\| = \|Fz\| \cdot \|z\|,$$

所以就有

$$\|Fz\| = \|z\|, \quad \forall z \in X.$$

综上, F 是 X 到 X' 的同构映射.

Step2. 设 $\{z_n\}$ 是 X 中的任意 Cauchy 点列. 由于 F 是线性的一一映射, 结合 $(*)$ 式, 就有

$$\|f_{z_m} - f_{z_n}\| = \|Fz_m - Fz_n\| = \|F(z_n - z_m)\| \leq \|z_m - z_n\| \to 0 \quad (m, n \to \infty),$$

所以 $\{f_{z_n}\}$ 是共轭空间 X' 中的 Cauchy 点列. 由 X' 的完备性, 存在 $f \in X'$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \left\|f_{z_n} - f\right\| = 0.$$

令 $z = F^{-1}f$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - z\| = \lim_{n\to\infty} \left\|f_{z_n} - f\right\| = 0,$$

即 Cauchy 点列 $\{z_n\}$ 收敛于 z.

综上, X 是 Hilbert 空间. □

练习 9.11 设 X 和 Y 为 Hilbert 空间, A 是 X 到 Y 中的有界线性算子, $N(A)$ 和 $R(A)$ 分别表示算子 A 的零空间和值域, 证明

$$N(A) = R(A^*)^{\perp}, \quad N(A^*) = R(A)^{\perp},$$
$$\overline{R(A)} = N(A^*)^{\perp}, \quad \overline{R(A^*)} = N(A)^{\perp}.$$

证明

(1)

$$\begin{aligned}
& x \in N(A) \\
\Leftrightarrow\ & Ax = 0 \in Y \\
\Leftrightarrow\ & \text{对任意} y \in Y,\ \langle Ax, y\rangle = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \text{对任意} y \in Y,\ \langle x, A^* y\rangle = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \text{对任意} y \in Y,\ x \perp A^* y \\
\Leftrightarrow\ & x \in R(A^*)^{\perp}.
\end{aligned}$$

所以 $N(A) = R(A^*)^{\perp}$.

(2)

$$\begin{aligned}
& y \in N(A^*) \\
\Leftrightarrow\ & A^* y = 0 \in X \\
\Leftrightarrow\ & \text{对任意} x \in X,\ \langle x, A^* y\rangle = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \text{对任意} x \in X,\ \langle Ax, y\rangle = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \text{对任意} x \in X,\ Ax \perp y \\
\Leftrightarrow\ & y \in R(A)^{\perp}.
\end{aligned}$$

所以 $N(A^*) = R(A)^{\perp}$.

(3) 由于 A 是 X 到 Y 的有界线性算子, 则 $R(A)$ 是空间 Y 中的线性子空间, $\overline{R(A)}$ 是空间 Y 中包含 $R(A)$ 的最小闭子空间. 根据第 6 题结论,

$$\overline{R(A)} = \left(R(A)^{\perp}\right)^{\perp}.$$

根据本题结论 (2), 就有

$$N(A^*)^{\perp} = \left(R(A)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{R(A)}.$$

(4) 由于 A^* 是 Y 到 X 的有界线性算子, 则 $R(A^*)$ 是空间 X 中的线性子空间, $\overline{R(A^*)}$ 是

空间 X 中包含 $R(A^*)$ 的最小闭子空间. 根据第 6 题结论,

$$\overline{R(A^*)} = \left(R(A^*)^\perp\right)^\perp.$$

根据本题结论 (1), 就有

$$N(A)^\perp = \left(R(A^*)^\perp\right)^\perp = \overline{R(A^*)}.$$

□

✍ **练习 9.12** 设 T 是 Hilbert 空间 X 中有界线性算子, $\|T\| \le 1$, 证明:

$$\{x \in X \mid T^*x = x\} = \{x \in X \mid Tx = x\}.$$

证明 由于 $\|T\| \le 1$, 则 $\|T^*\| = \|T\| \le 1$.

对任意 $x \in \{x \in X \mid Tx = x\}$, 由 Cauchy-Schwartz 不等式可得

$$\begin{aligned} & \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle \\ \le\ & \|x\| \cdot \|T^*x\| \le \|x\|^2\|T^*\| \le \|x\|^2, \end{aligned}$$

因此, $\|x\|^2 = \|x\| \cdot \|T^*x\|$, 从而

$$\|T^*x\| = \|x\| = \|Tx\|,$$

进而

$$\begin{aligned} & \|T^*x - x\|^2 \\ =\ & \langle T^*x - x, T^*x - x\rangle \\ =\ & \|T^*x\|^2 - \langle T^*x, x\rangle - \langle x, T^*x\rangle + \|x\|^2 \\ =\ & \|Tx\|^2 - \langle x, Tx\rangle - \langle Tx, x\rangle + \|x\|^2 \\ =\ & \|Tx - x\|^2 = 0, \end{aligned}$$

即 $x \in \{x \in X \mid T^*x = x\}$.

由于 $(T^*)^* = T$, 同理可证, 对任意 $x \in \{x \in X \mid T^*x = x\}$, 都有 $x \in \{x \in X \mid Tx = x\}$.

综上, $\{x \in X \mid T^*x = x\} = \{x \in X \mid Tx = x\}$. □

✍ **练习 9.13** 设 H 是 Hilbert 空间, M 是 H 的闭子空间, $x_0 \in H$, 证明:

$$\min\{\|x - x_0\| \mid x \in M\} = \max\{\langle x_0, y\rangle \mid y \in M^\perp, \|y\| = 1\}.$$

证明 记

$$d = \min\{\|x - x_0\| \mid x \in M\},$$

$$\bar{d} = \max\{\langle x_0, y\rangle \mid y \in M^\perp, \|y\| = 1\}.$$

Step 1. 由于 M 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间, 根据投影定理, 对 $x_0 \in H$, 存在唯一的 $y_0 \in M^\perp$ 以及唯一的 $z_0 \in M$ 使得

$$x_0 = y_0 + z_0.$$

对任意 $z \in M$, 都有

$$\|z - x_0\|^2 = \|z - (z_0 + y_0)\|^2 = \|z - z_0\|^2 + \|y_0\|^2 \leq \|z_0\|^2,$$

并且当且仅当 $z = z_0 \in M$ 时, 上述不等式中的等号成立. 由此可知, $z_0 \in M$ 是向量 x_0 在空间 M 中的最佳逼近元, 即

$$\|y_0\| = \|x_0 - z_0\| = d = \min\{\|x - x_0\| \mid x \in M\}.$$

Step 2. 若 $x_0 \in M$, 则 $y_0 = 0$, $z_0 = x_0$, 从而

$$d = 0 = \bar{d}$$

若 $x_0 \notin M$, 则 $y_0 \neq 0$. 令 $\tilde{y}_0 = \frac{1}{\|y_0\|} y_0$, 则 $\tilde{y}_0 \in M^\perp$ 并且 $\|\tilde{y}_0\| = 1$. 根据 Cauchy-Schwartz 不等式, 对任意 $y \in M^\perp$ 且 $\|y\| = 1$, 都有

$$|\langle x_0, y\rangle| = |\langle z_0, y\rangle + \langle y_0, y\rangle| = |\langle y_0, y\rangle| \leq \|y_0\| \cdot \|y\| = \|y_0\| = d,$$

并且当且仅当 y 与 y_0 线性相关时等号成立. 由于 $\tilde{y}_0$ 与 y_0 线性相关并且

$$\langle y_0, \tilde{y}_0\rangle = \frac{1}{\|y_0\|}\|y_0\|^2 = \|y_0\| = d > 0,$$

所以

$$\bar{d} = \max\{\langle x_0, y\rangle \mid y \in M^\perp, \|y\| = 1\} = \langle y_0, \tilde{y}_0\rangle = d.$$

综上, $d = \bar{d}$. □

✍ **练习 9.14** 设 H 是复 Hilbert 空间, M 是 H 的闭子空间, 则 M 为 H 上某个非零连续线性泛函的零空间的充要条件是 $M^\perp$ 是一维子空间.

证明 由于 M 是 Hilber 空间 H 中的闭子空间, 根据投影定理, 就有

$$H = M \oplus M^\perp.$$

(充分性）设 $\dim M^\perp = 1$. 任取 $x_0 \in M^\perp \setminus \{0\}$, 则

$$M^\perp = \{t x_0 \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

从而, 对任意 $x \in H$, 存在唯一的 $z \in M$ 以及唯一的 $t \in \mathbb{C}$ 使得

$$x = z + tx_0.$$

于是, 可以定义 H 上的泛函 f, 使得

$$f(x) = t\|x_0\|, \quad x \in H.$$

显然, f 是 H 上的非零线性泛函. 对任意 $x \in H$, 有

$$|f(x)| = |t|\|x_0\| = \|tx_0\| \le \|x\|,$$

所以 f 还是 H 上的连续线性泛函.

对任意 $x \in N(f)$, 有

$$0 = f(x) = t\|x_0\|,$$

因此 $t = 0$, $x = z + 0\,x_0 = z \in M$. 另一方面, 对任意 $x \in M$, 有

$$x = x + 0\,x_0,$$

从而 $f(x) = 0\,\|x_0\| = 0$, 即 $x \in N(f)$.

综上, $N(f) = M$.

(必要性) 设 f 是一个非零连续线性泛函并且 $N(f) = M$, 则存在 $x_0 \in X$, 使得 $f(x_0) \neq 0$. 对于 x_0, 存在唯一的 $z_0 \in M$ 以及唯一的 $y_0 \in M^\perp$ 使得

$$x_0 = z_0 + y_0.$$

由于 $M = N(f)$, 则

$$0 \neq f(x_0) = f(z_0) + f(y_0) = f(y_0).$$

对任意 $y \in M^\perp$, 取

$$t = \frac{f(y)}{f(x_0)} \in \mathbb{C},$$

则 $ty_0 \in M^\perp$, $ty_0 - y \in M^\perp$. 另一方面, 由于

$$f(ty_0 - y) = tf(y_0) - f(y) = f(y) - f(y) = 0,$$

所以 $ty_0 - y \in N(f) = M$. 因此

$$ty_0 - y \in M \cap M^\perp = \{0\},$$

从而 $y = ty_0$. 由于 $y_0 \neq 0$(否则 $f(y_0) = 0$), 由 $y \in M^{\perp}$ 的任意性可知

$$M^{\perp} = \{ty_0 \,|\, t \in \mathbb{C}\},$$

从而 $\dim M^{\perp} = 1$. □

练习 9.15 设 T 为 Hilbert 空间 X 上正常算子, $T = A + iB$ 为 T 的笛卡尔分解, 证明:

(1) $\|T\|^2 = \|A^2 + B^2\|$,

(2) $\|T^2\| = \|T\|^2$.

证明 (1) 由于 T 为 Hilbert 空间 X 上正常算子, 则 A 和存在 T 的共轭算子 T^*. 另一方面, 由于 $T = A + iB$ 为 T 的笛卡尔分解, 则 A 和 B 为 X 上的自伴算子. 于是, 对任意 $x, y \in X$, 就有

$$\begin{aligned} \langle x, T^* y\rangle &= \langle Tx, y\rangle \\ &= \langle (A + iB)x, y\rangle \\ &= \langle Ax + iBx, y\rangle \\ &= \langle Ax, y\rangle + i\langle Bx, y\rangle \\ &= \langle x, Ay\rangle - \langle x, iBy\rangle \\ &= \langle x, (A - iB)y\rangle. \end{aligned}$$

根据 $x, y \in X$ 的任意性, 就有 $T^* = A - iB$. 从而

$$T^*T = (A - iB)(A + iB) = A^2 + B^2 = TT^*.$$

根据共轭算子的性质 (P262 性质 4°), 就有

$$\|T\|^2 = \|TT^*\| = \left\|A^2 + B^2\right\|.$$

(2) 由于 T 为正常算子, 则对任意 $x \in X$, 有 $\|Tx\| = \|T^*x\|$, 从而

$$\|T^2x\| = \|T(Tx)\| = \|T^*(Tx)\| = \left\|(A^2 + B^2)x\right\|, \quad \forall x \in X.$$

于是

$$\|T^2\| = \sup_{\substack{x\in X,\\ x\neq 0}} \frac{\|T^2x\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X,\\ x\neq 0}} \frac{\|(A^2 + B^2)x\|}{\|x\|} = \|A^2 + B^2\|.$$

再根据 (1) 的结论, 就有 $\|T^2\| = \|T\|^2$. □

练习 9.16 证明: A 是实内积空间 X 上自伴算子时, $A = 0$ 的充要条件为对所有 $x \in X$, 成立 $\langle Ax, x\rangle = 0$.

证明 必要性是显然的, 下证充分性.

对任意 $x, y \in X$, 根据条件, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle \\ &= (\langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle) \\ &\quad - (\langle Ax, x\rangle - \langle Ax, y\rangle - \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle) \\ &= 2\langle Ax, y\rangle) + 2\langle Ay, x\rangle \\ &= 4\langle Ax, y\rangle, \end{aligned}$$

所以

$$\langle Ax, y\rangle = 0, \quad \forall x, y \in X.$$

根据 $x, y \in X$ 的任意性, 就有 $A = 0$. □

✍ **练习 9.17** 设 U 是 Hilbert 空间 $L^2[0, 2\pi]$ 中如下定义的算子:

$$(Uf)(t) = e^{it} f(t), \quad f \in L^2[0, 2\pi],$$

证明 U 是酉算子.

证明 对任意 $f \in L^2[0, 2\pi]$, 有

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} |(Uf)(t)|^2 \, \mathrm{d}t \\ = & \int_0^{2\pi} \left|e^{it} f(t)\right|^2 \, \mathrm{d}t \\ = & \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t < +\infty, \end{aligned} \tag{9.2.4}$$

所以 $Uf \in L^2[0, 2\pi]$. 算子 $U : L^2[0, 2\pi] \to L^2[0, 2\pi]$ 显然是线性算子. 由(9.2.4)式可知 U 是有界线性算子并且 $\|Uf\| = \|f\|$ ($\forall f \in L^2[0, 2\pi]$), 即 U 是保范算子.

下证 U 是满射.

任取 $g \in L^2[0, 2\pi]$, 令 $f(t) = e^{-it} g(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, 则

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left|e^{-it} g(t)\right|^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \, \mathrm{d}t < +\infty.$$

根据算子 U 的定义, 就有

$$(Uf)(t) = e^{it} f(t) = e^{it} e^{-it} g(t) = g(t), \quad \forall t \in [0, 2\pi],$$

于是 $Uf = g$, U 是满射.

综上, U 是 Hilbert 空间 $L^2[0, 2\pi]$ 上的保范的满射, 所以 U 是酉算子.

□

✍ **练习 9.18** 设 Ω 是平面上有界 L 可测集, $L^2(\Omega)$ 表示 Ω 上关于平面 L 测度平方可

积函数全体, 对每个 $f \in L^2(\Omega)$, 定义

$$(Tf)(z) = zf(z), \quad z \in \Omega,$$

证明 T 是正常算子.

证明 由于 Ω 是平面 $\mathbb{C}$ 上的有界 L 可测集, 则存在 $r > 0$, 使得圆心在原点, 半径为 r 的圆盘 $S_r \supset \Omega$, 从而对任意 $f \in L^2(\Omega)$, 就有

$$\int_\Omega |(Tf)(z)|^2 \,\mathrm{d}z = \int_\Omega |z|^2 \,|f(z)|^2 \,\mathrm{d}z \le \int_\Omega r^2 \,|f(z)|^2 \,\mathrm{d}z = r^2 \|f\|^2 < +\infty, \tag{9.2.5}$$

所以 $Tf \in L^2[0,2\pi]$. 显然, 算子 $T : L^2[0,2\pi] \to L^2[0,2\pi]$ 是线性算子. 由(9.2.5)式可知 T 还是有界线性算子.

由于 $L^2(\Omega)$ 是 Hilbert 空间, 所以 T 存在唯一的共轭算子 T^*. 对任意 $f, g \in L^2[0,2\pi]$, 有

$$\begin{aligned}
\langle f, T^*g\rangle &= \langle Tf, g\rangle \\
&= \int_\Omega (Tf)(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_\Omega zf(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_\Omega f(z)\overline{\overline{z}g(z)}\,\mathrm{d}z \\
&= \langle f, Ag\rangle,
\end{aligned}$$

其中

$$(Ag)(z) = \overline{z}g(z), \quad z \in \Omega.$$

根据 $f, g \in L^2[0,2\pi]$ 的任意性, 就有 $T^* = A$, 即

$$(T^*f)(z) = \overline{z}f(z), \quad z \in \Omega, \quad f \in L^2[0,2\pi].$$

对任意 $f \in L^2[0,2\pi]$, 有

$$\|Tf\|^2 = \int_\Omega |zf(z)|^2 \,\mathrm{d}z = \int_\Omega |z|^2 \,|f(z)|^2 \,\mathrm{d}z = \int_\Omega |\overline{z}f(z)|^2 \,\mathrm{d}z = \|T^*f\|^2,$$

所以 T 是正常算子.

□

第 10 章 Banach 空间中的基本定理

第 11 章　线性算子的谱

第 12 章 补充专题