第七章 实数的完备性

§1. 关于实数系完备性的基本定理

1. 确界原理.（Ch1. §2）

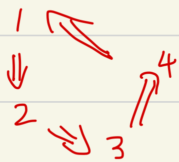
   $\mathbb{R}$中任何有上界的集合都有上确界. 任何有下界的集合都有下确界.

2. 单调有界定理（Ch2. §3）

   设$\{a_n\}$为一数列.

   ① 若$\{a_n\}$增且有上界, 则$\{a_n\}$收敛且
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n \{a_n\}$$

   ② 若$\{a_n\}$减且有下界, 则$\{a_n\}$收敛且
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_n \{a_n\}.$$



3. 致密性定理（Ch2. §3）

   任何有界数列必有收敛子列.

4 Cauchy收敛准则（Ch2. §3）

   $\{a_n\}$收敛 $\Longleftrightarrow$ 对$\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}_+$, s.t. $\forall m, n > N$, 有
   $$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

5. 闭区间套定理

6. 聚点定理

7. 有限覆盖定理

一、闭区间套定理

定义（闭区间套）

若闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足

(i) $[a_n,b_n] \supset [a_{n+1},b_{n+1}]$，$n=1,2,\cdots$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

则称 $\{[a_n,b_n]\}$ 为闭区间套.

闭区间套定理 （$\exists!$ 表示"存在唯一的"）

若 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一列闭区间套，则 $\exists!\, \xi\in\mathbb{R}$，s.t.

$$\xi \in [a_n,b_n],\quad n=1,2,3,\cdots \qquad \text{公共点}$$

即 $a_n \le \xi \le b_n$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$.

特别地，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$.

证明：略 （用单调有界定理证明）

推论. 若 $\xi\in[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$ 是由闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$ 所确定的唯一的公共点，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，s.t. $\forall n>N$，有

$$[a_n,b_n] \subset U(\xi,\varepsilon) = (\xi-\varepsilon,\ \xi+\varepsilon)$$

注：开区间套不一定有相应的结论.

反例. $\{(0,\frac{1}{n})\}$. 可以证明 $\forall\xi\in\mathbb{R}$，总存在 $N>0$ s.t. $\forall n>N$，有 $\xi\notin(0,\frac{1}{n})$

事实上，当 $\xi \le 0$ 或 $\xi \ge 1$ 时，对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$，显然有 $\xi \notin (0, \frac{1}{n})$

当 $\xi \in (0,1)$ 时，取 $N = \frac{1}{\xi} > 0$，则对 $\forall n > N$，有

$n > \frac{1}{\xi}$，即 $\xi > \frac{1}{n}$，从而 $\xi \notin (0, \frac{1}{n})$.

$\boxed{\text{应用}}$：用区间套定理证明连续函数的零点存在定理

连续函数的零点存在定理.

设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，并且

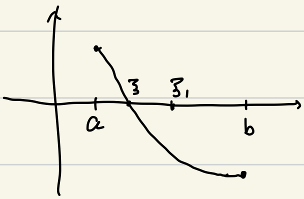
$$f(a)\cdot f(b) < 0,$$

则存在 $\xi \in (a,b)$，s.t. $f(\xi) = 0$.

证明：方法1. 确界原理 (Ch4. §4.2)

方法2. 闭区间套定理

Step1. (构造闭区间套)



不妨设 $f(a) > 0$，$f(b) < 0$.

令 $\xi_1 = \frac{a+b}{2}$.

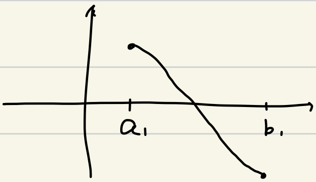
① 若 $f(\xi_1) = 0$，令 $\xi = \xi_1$，即可.

② 若 $f(\xi_1) < 0$，令 $a_1 = a$，$b_1 = \xi_1$；

③ 若 $f(\xi_1) > 0$，令 $a_1 = \xi_1$，$b_1 = b$.

于是，得到 $[a,b]$ 的子区间 $[a_1, b_1]$ 满足

$f(a_1) > 0$，$f(b_1) < 0$，且 $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b-a)$.



令 $\xi_2=\frac{1}{2}(a_1+b_1)$.

① 若 $f(\xi_2)=0$，令 $\xi=\xi_2$ 即可.

② 若 $f(\xi_2)>0$，令 $a_2=\xi_2$，令 $b_2=b_1$

③ 若 $f(\xi_2)<0$，令 $a_2=a_1$，$b_2=\xi_2$.

于是，得到 $[a_1,b_1]$ 的子区间 $[a_2,b_2]$、满足.

$f(a_2)>0$，$f(b_2)<0$. 且 $b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=\frac{1}{4}(b-a)$.

$\cdots\cdots$

继续做下去，有两种可能：

I. 有限步之后，f 在某个小区间中点取值为 0. 此时，令 ξ 为该中点即可；

II. 上述过程无限重复下去，于是得到闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$，满足：

(i) $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$;

(ii) $f(a_n)>0$，$f(b_n)<0$，

(iii) $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n-a_n)=\frac{1}{2^{n+1}}(b-a)\to 0\quad(n\to\infty)$.

由 (i)(iii) 可知，$\{[a_n,b_n]\}$ 是一列闭区间套.

由闭区间套定理，$\exists\,\xi\in\mathbb{R}$，s.t.

$\xi\in[a_n,b_n]$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$. 并且

$\lim_{n\to\infty}a_n=\xi=\lim_{n\to\infty}b_n$.

下证 $f(\xi)=0$ 且 $\xi\in(a,b)$.

由于 f 在 $[a,b]$ 上连续，就有

保不等式性.

$$f(\xi)=f(\lim_{n\to\infty}a_n)=\lim_{n\to\infty}f(\overset{>0}{a_n})\geqslant 0.$$

$$f(\xi)=f(\lim_{n\to\infty}b_n)=\lim_{n\to\infty}f(\overset{<0}{b_n})\leqslant 0.$$

所以 $f(\xi)=0$. 由于

$$\xi\in[a_n,b_n]\subset[a,b].$$

并且 $f(a)>0$, $f(b)<0$. 于是 $\xi\in(a,b)$.

证毕.

注：算法：二分法.

求方程 $f(x)=0$ 根的一种迭代算法.

二. 聚点定理

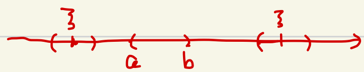
定义2

设 $S\subset\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}$. 若 ξ 的任何邻域内都含有 S 中无穷多个点，则称 ξ 为 S 的聚点.

例1 $S=(a,b)$.

$\forall \xi\in[a,b]$, ξ 都是 S 的聚点.

$\forall \xi\notin[a,b]$. ξ 不是 S 的聚点.



$\varepsilon\le|\xi-a|$.　　$\varepsilon\le|\xi-b|$.　　$\varepsilon\le\min\{|\xi-a|,|\xi-b|\}$.

令 $\varepsilon=\min\{|\xi-a|,|\xi-b|\}>0$. 此时,

$$U(\xi,\varepsilon)=(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)\cap(a,b)=\emptyset.$$

例2. $\mathbb{N}_+$ 无聚点.

任取 $\xi\in\mathbb{R}$. 令 $\varepsilon=\frac{1}{3}$, $U(\xi,\frac{1}{3})=(\xi-\frac{1}{3},\xi+\frac{1}{3})$ 长度为 $\frac{2}{3}<1$.

则 $U(\xi;\frac{1}{3})$ 至多含有一个正整数. 所以 $\xi\in\mathbb{R}$ 都不是 $\mathbb{N}_+$ 的聚点.

定义2'

设 $S\subset\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}$. 若对 $\forall\varepsilon>0$,

$$U^\circ(\xi;\varepsilon)\cap S\neq\emptyset,$$

则称 ξ 是 S 的聚点.

定义2''

设 $S\subset\mathbb{R}$，$\xi\in\mathbb{R}$. 若存在一列各项互异的点列 $\{x_n\}\subset S$，

s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$，则称 ξ 为 S 的聚点.

$\boxed{\text{等价性的证明}}$

设 $S\subset\mathbb{R}$. $\xi\in\mathbb{R}$.

定义2 $\Longleftrightarrow$ (I): ξ 的任何邻域内都含有 S 中无穷多个点;

定义2' $\Longleftrightarrow$ (II): $\forall\varepsilon>0$, $U^\circ(\xi;\varepsilon)\cap S\neq\emptyset$;

定义2'' $\Longleftrightarrow$ (III): 存在一列各项互异的点列 $\{x_n\}\subset S$. s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$.

(I) $\Rightarrow$ (II). ✓

(III) $\Rightarrow$ (I). 数列极限的邻域定义.

$\mathrm{I}\Rightarrow\mathrm{II}\Rightarrow\mathrm{III}$

(II) $\Rightarrow$ (III)

分析: $\varepsilon=1$. (II) $\Rightarrow$ $U^\circ(\xi;1)\cap S\neq\emptyset$, 取 $x_1\in U^\circ(\xi;1)\cap S$.

$\varepsilon=\frac{1}{2}$, (II) $\Rightarrow$ $U^\circ(\xi;\frac{1}{2})\cap S\neq\emptyset$, 取 $x_2\in U^\circ(\xi;\frac{1}{2})\cap S$.

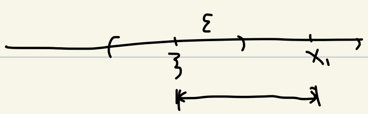
$\varepsilon=\frac{1}{3}$ . . .

$\varepsilon=\frac{1}{n}$. . . . $x_n\in(\xi;\frac{1}{n})\cap S$.

. . .

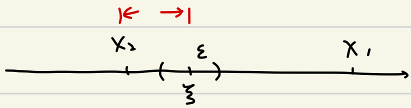
$\{x_n\}\subset S$. $x_n\in U^\circ(\xi;\frac{1}{n})$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$.

问题: 如何保证 $\{x_n\}$ 各项互异?



$\varepsilon\le\frac{1}{2}$

$\varepsilon\le|\xi-x_1|$. $\Rightarrow$ $\underline{\varepsilon\le\min\{\frac{1}{2},|\xi-x_1|\}}$.



$\varepsilon \le \frac{1}{3}$. $\quad$ $\varepsilon \le |x_1-\xi|$, $\quad$ $\varepsilon \le |x_2-\xi| \le |x_1-\xi|$

令 $\varepsilon \le \min\{\frac{1}{3}, |x_2-\xi|\}$.

$\vdots$

x_n

证明: $(\mathrm{II}) \Rightarrow (\mathrm{III})$.

令 $\varepsilon=1$. 由 (II) 可知, $U^\circ(\xi;1)\cap S \neq \emptyset$, 取

$x_1 \in U^\circ(\xi;1)\cap S$.

令 $\varepsilon=\min\{\frac{1}{2}, |x_1-\xi|\}$. 由 (II) 可知, $U^\circ(\xi;\varepsilon)\cap S\neq\emptyset$. 取

$x_2 \in U^\circ(\xi;\varepsilon)\cap S$,

显然, $|x_2-\xi| < \varepsilon \le |x_1-\xi|$, 所以 $x_2 \neq x_1$

令 $\varepsilon=\min\{\frac{1}{3}, |x_2-\xi|\}$, 由 (II) 可知, $U^\circ(\xi;\varepsilon)\cap S\neq\emptyset$, 取

$x_3 \in U^\circ(\xi;\varepsilon)\cap S$,

显然, $|x_3-\xi| < \varepsilon \le |x_2-\xi| < |x_1-\xi|$, 所以 $x_3\neq x_2$, $x_3\neq x_1$.

$\cdots$

令 $\varepsilon=\min\{\frac{1}{n}, |x_{n-1}-\xi|\}$. 由 (II) 可知, $U^\circ(\xi;\varepsilon)\cap S\neq\emptyset$, 取

$x_n \notin U^\circ(\xi;\varepsilon)\cap S$,

显然, $x_n \neq x_k$, $k=1,2,\cdots,n-1$.

$\cdots$

一直进行下去，最终得到各项互异的点列

$\{x_n\} \subset S$，并且 $x_n \in U^\circ(\xi; \frac{1}{n})$，$n \in \mathbb{N}_+$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$。证毕。

定理2.（聚点定理）

$\mathbb{R}$中任何有界的无限点集至少有一个聚点.

方法1. 闭区间套定理

ξ是S的聚点. $\forall \varepsilon>0$，$U(\xi,\varepsilon)$含有S中无穷多个点.

$\{[a_n, b_n]\}$，ξ公共点. $\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，s.t. $\forall n>N$，有

$[a_n, b_n] \subset \underline{U(\xi;\varepsilon)}$

含有S中无限多点

证：设S为$\mathbb{R}$中有界无限点集，则存在闭区间$[a_1, b_1]$，s.t.

$[a_1, b_1] \supset S$.

将$[a_1, b_1]$二等分，则其中必有一个小区间（记为$[a_2, b_2]$）包含S中无限多个点. 否则，$[a_1, b_1]$平分后的两个小区间中都只含有S中有限多个点，从而$[a_1, b_1]$中只含有S中无限多个点，矛盾.

将$[a_2, b_2]$二等分，则其中必有一个小区间（记为$[a_3, b_3]$）包含S中无限多个点.

. . .

由于S是无限点集，所以上述过程可以一直进行下去。

最终，得到闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$，满足：

(i) $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$;

(ii) $|b_{n+1}-a_{n+1}|=\frac{1}{2}|b_n-a_n|=\frac{1}{2^n}|b_1-a_1|\to 0\ (n\to\infty)$;

(iii) $\forall n\in\mathbb{N}_+$，$[a_n,b_n]$中含有S中无限多个点。

由(i)(ii)可知，$\{[a_n,b_n]\}$是一列闭区间套，由闭区间套定理(推论)，

$\exists\xi\in\mathbb{R}$. s.t. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，s.t. $\forall n>N$，有

$$[a_n,b_n]\subset U(\xi;\varepsilon).$$

由(iii)可知，$U(\xi,\varepsilon)$中含有S中无限多个点，所以，由定义2，

ξ是S的聚点。

方法2. 致密性定理（$\{a_n\}$有界点列，则$\{a_n\}$有收敛子列）

由于S是有界的无限点集，则从S中选出一列各项互异的点列$\{x_n\}$，由于S为有界集，则$\{x_n\}$是有界点列，由致密性定理，$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$，s.t.

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi\in\mathbb{R}.$$

由定义2''可知，ξ是S的聚点。

三. 有限覆盖定理

定义3

设 $S\subset\mathbb{R}$, H是$\mathbb{R}$中某些开区间组成的集合.

若对 $\forall x\in S$, 都存在 $(\alpha,\beta)\in H$, s.t. $x\in(\alpha,\beta)$, 则称 H是S的一个开覆盖, 或称 H覆盖S.

定理3 (有限覆盖定理)

设 H覆盖 $[a,b]$. 则可从H中选出有限多个开区间来覆盖 $[a,b]$.

证: 假设不能用H中有限个开区间覆盖 $[a,b]$.

令 $[a_1,b_1]=[a,b]$.

分析: $\{[a_n,b_n]\}$. 公共点 ξ. $\xi\in[a,b]$. 则 $\exists(\alpha,\beta)\in H$, s.t. $\xi\in(\alpha,\beta)$. 存在 $\varepsilon>0$, s.t. $U(\xi;\varepsilon)\subset(\alpha,\beta)$.

$\exists N$, s.t. $\forall n>N$, 有 $[a_n,b_n]\subset U(\xi;\varepsilon)\subset(\alpha,\beta)$.

将$[a_1,b_1]$二等分, 则其中必有一个子区间 (记为$[a_2,b_2]$) 不能被H中的有限多个开区间覆盖. 否则, $[a_1,b_1]$的两个子区间都可以被H中的有限多个开区间覆盖, 于是, $[a_1,b_1]$就被H中的有限个开区间覆盖, 与假设矛盾.

将$[a_2,b_2]$二等分, 则其中必有一个子区间 (记为$[a_3,b_3]$) 不能被H中的有限多个开区间覆盖.

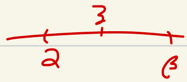
、……

一直进行下去，最终可得到闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$，s.t.

对$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$[a_n,b_n]$都不能被H中的有限多个开区间覆盖。

设$\xi\in[a,b]$是由闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$所确定的唯一的公共点。由于H覆盖$[a,b]$，则存在$(\alpha,\beta)\in H$，s.t.

$$\xi\in(\alpha,\beta).$$



$\varepsilon=\min\{|\xi-\alpha|,|\xi-\beta|\}$.
>0

取$\varepsilon>0$. s.t. $U(\xi;\varepsilon)\subset(\alpha,\beta)$. 由闭区间套定理的推论，

$\exists N\in\mathbb{N}_+$, s.t. $\forall n>N$，有

$$[a_n,b_n]\subset U(\xi;\varepsilon)\subset(\alpha,\beta).$$

即当$n>N$，$[a_n,b_n]$都可被$\{(\alpha,\beta)\}$覆盖，矛盾。

证毕。

问题：开区间(a,b)上是否有类似的有限覆盖定理？

例1. $S=(0,1)$, $H=\{(\frac{1}{n+1},1)\mid n\in\mathbb{N}_+\}$. 覆盖$(0,1)$.

假设存在

$$\tilde{H}=\{(\tfrac{1}{n_1+1},1),(\tfrac{1}{n_2+1},1),\cdots,(\tfrac{1}{n_k+1},1)\}\ k\text{个}$$

覆盖$(0,1)$.

令$N=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$. 对$\forall i\in\{1,2,\cdots,k\}$，有$(\frac{1}{n_i+1},1)\subset(\frac{1}{N+1},1)$,

由于$\tilde{H}$覆盖$(0,1)$，所以$\{(\frac{1}{N+1},1)\}$也覆盖$(0,1)$.

当$x\in(0,\frac{1}{N+1}]$时，$x\notin(\frac{1}{N+1},1)$，矛盾。

应用：

Step1. 局部结果.　　Step2. 无限开覆盖.

Step3. 有限开覆盖.　　Step4 整体结果.

例12. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

证：由于 f 在 $[a,b]$ 上连续，根据连续函数的局部有界性，

对 $\forall \xi \in [a,b]$，存在 ξ 的某邻域 $U(\xi)$ 以 $M_\xi > 0$，s.t.

$$|f(x)| \le M_\xi, \qquad \forall x \in U(\xi). \qquad (1)$$ Step1.

令 $H = \{U(\xi) \mid \xi \in [a,b]\}$，显然 H 覆盖 $[a,b]$. Step2.

由有限覆盖定理，H 存在有限子集

$$\tilde{H} = \{U(\xi_1), U(\xi_2), \cdots, U(\xi_n)\}$$

覆盖 $[a,b]$. Step3.

$$令\ M = \max\{M_{\xi_1}, M_{\xi_2}, \cdots, M_{\xi_n}\} > 0.$$

对 $\forall x \in [a,b]$，由于 $\tilde{H}$ 覆盖 $[a,b]$，则存在 $k \in \{1,2,\cdots,n\}$，

s.t. $x \in U(\xi_k)$，根据(1)式，有

$$|f(x)| \le M_{\xi_k} \le M.$$

所以 f 在 $[a,b]$ 上有界.　　证毕.

例3. 若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续

($\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, s.t. $\forall x, x' \in [a,b]$: $|x-x'|<\delta$, 有

$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$)

证：由于 f 在 $[a,b]$ 上连续，则对 $\boxed{\forall \varepsilon>0}$，对 $\forall \xi \in [a,b]$，

$\exists \delta_\xi>0$. s.t. $\forall x \in U(\xi;\delta_\xi)$,

$$|f(x)-f(\xi)| < \frac{1}{2}\varepsilon \qquad (1)$$ Step1.

令 $H=\{U(\xi;\frac{1}{2}\delta_\xi) \mid \xi \in [a,b]\}$，显然，$H$ 覆盖 $[a,b]$.

Step2.

由有限覆盖定理，存在 H 的有限子集

$\tilde{H}=\{U(\xi_1,\frac{1}{2}\delta_1), U(\xi_2,\frac{1}{2}\delta_2), \cdots, U(\xi_n,\frac{1}{2}\delta_n)\}$

覆盖 $[a,b]$、

Step3.

令 $\delta=\frac{1}{2}\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\}>0$. 对 $\forall x, x' \in [a,b]$ 且

$$|x-x'|<\delta. \qquad (2)$$

由于 $\tilde{H}$ 覆盖 $[a,b]$，则 $\exists k \in \{1,2,\cdots,n\}$. s.t.

$$x \in U(\xi_k,\frac{1}{2}\delta_k) \qquad (3)$$

从而
$$\begin{aligned}|x'-\xi_k| &\le |x'-x|+|x-\xi_k| \\ &\overset{(2)}{<} \delta \overset{(3)}{+} \frac{1}{2}\delta_k \\ &\le \frac{1}{2}\delta_k+\frac{1}{2}\delta_k \quad \delta\text{的定义} \\ &= \delta_k.\end{aligned}$$

即 $x' \in U(\xi_k,\delta_k)$.

综上，由(1)式可得

$$
\begin{aligned}
&|f(x)-f(x')| \\
\le\ &|f(x)-f(\xi_k)|+|f(\xi_k)-f(x')| \\
<\ &\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

所以 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

习题课

§7.1 习题

Ex1. $\{(-1)^n+\frac{1}{n}\}$ 只有两个聚点 $\xi_1=-1$ 和 $\xi_2=1$.

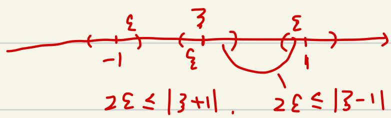
证：Step1.（定义2". ξ 是 S 的聚点 $\Longleftrightarrow$ S 中存在各项互异的数列 $\{x_n\}$, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$).

由于 $\{(-1)^n+\frac{1}{n}\}$ 的奇数项子列各项互异且极限是 -1，偶数项子列各项互异并且极限是 1. 所以，$\xi_1=-1$ 和 $\xi_2=1$ 是 $\{(-1)^n+\frac{1}{n}\}$ 的两个聚点.

Step2. 根据数列极限的邻域定义，对 $\forall\varepsilon>0$，$\{(-1)^n+\frac{1}{n}\}$ 的奇数项子列在 $U(-1;\varepsilon)$ 之外至多有有限项，偶数项子列在 $U(1;\varepsilon)$ 之外至多有有限项.

于是，$\{(-1)^n+\frac{1}{n}\}$ 在 $U(-1;\varepsilon)\cup U(1;\varepsilon)$ 之外至多有有限项.

Step3.（ξ 不是 S 的聚点 $\Longleftrightarrow$ 存在 ξ 的某邻域 $U(\xi)$, s.t. $U(\xi)$ 含有 S 中至多有限多个点）



任取 $\xi\in\mathbb{R}$，且 $\xi\neq-1$，$\xi\neq1$.

令 $\varepsilon=\frac{1}{2}\min\{|\xi+1|,|\xi-1|\}>0$，则

$$U(\xi;\varepsilon)\cap U(-1;\varepsilon)=\phi,\quad U(\xi;\varepsilon)\cap U(1;\varepsilon)=\phi,$$

于是 $U(\xi;\varepsilon)\cap\left[U(-1;\varepsilon)\cup U(1;\varepsilon)\right]=\phi$.

由 Step2 的结论. $U(\xi;\varepsilon)$ 至多含有 $\{(-1)^n+\frac{1}{n}\}$ 中的有限多项.

所以，ξ 不是 $\{(-1)^n+\frac{1}{n}\}$ 的聚点.

Ex2. $\underbrace{\text{任何有限数集}}_{S}$都没有聚点.

Ex3. 设 $\{(a_n, b_n)\}$ 是一列严格开区间套，即

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n < \cdots < b_2 < b_1,$$

并且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$，则 $\exists!\, \xi \in \mathbb{R}$, s.t.

$$a_n < \xi < b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

证：Step1. (存在性)

由于 $\{a_n\}$ 严格增且有上界 b_1，$\{b_n\}$ 严格减且有下界 a_1，根据单调有界定理，$\exists\, \xi, \eta \in \mathbb{R}$，s.t.

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n \{a_n\}, \quad \eta = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf_n \{b_n\},$$

并且

$$a_n < \xi, \quad \eta < b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+. \quad (1)$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$，则

$$\xi - \eta = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0,$$

即 $\xi = \eta$. 结合(1)式，就有

$$a_n < \xi < b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}_+ \quad (2)$$

Step2. (唯一性). 设 $\xi' \in \mathbb{R}$ 也满足 $a_n < \xi' < b_n$，$\forall n \in \mathbb{N}_+$.

结合(2)式，就有

$$0 \le |\xi - \xi'| < b_n - a_n.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，由数列极限的迫敛性，有 $|\xi - \xi'| = 0$，即

$$\xi = \xi'.$$

唯一性得证.

Ex4. 在有理数集 $\mathbb{Q}$ 上不成立确界原理、单调有界定理、聚点定理和 Cauchy 收敛准则.

解: (1) $A=\{x\in\mathbb{Q} \mid x\le 0$ 或 $x^2<2\}$.

$B=\{x\in\mathbb{Q} \mid x>0$ 且 $x^2>2\}$

可证. A 在 $\mathbb{Q}$ 中有上界 2, 但在 $\mathbb{Q}$ 中无上确界.

B 在 $\mathbb{Q}$ 中有下界 0, 但在 $\mathbb{Q}$ 无下确界.

(2) $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$. $n\in\mathbb{N}_+$. $a_n\in\mathbb{Q}$, $\{a_n\}$ 可看作 $\mathbb{Q}$ 中的各项互异的有界无限点集

$\{a_n\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中严格增且有上界 $3\in\mathbb{Q}$.

在 $\mathbb{R}$ 中, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$, 所以

① e 是 $\{a_n\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中的唯一的聚点.

② 在 $\mathbb{R}$ 中成立 Cauchy 收敛准则, 则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}_+$, s.t. $\forall m,n>N$, 有 $|\overset{\in\mathbb{Q}}{a_m}-\overset{\in\mathbb{Q}}{a_n}|<\varepsilon$. 所以, $\{a_n\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中也满足 Cauchy 条件

Cauchy 条件

e 是无理数.

$\{a_n\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中严格增, 有上界 $3\in\mathbb{Q}$, 但 $\{a_n\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中无极限.

$\{a_n\}$ 是 $\mathbb{Q}$ 中的有界无限点集, 但在 $\mathbb{Q}$ 中无聚点.

$\{a_n\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中满足 Cauchy 条件, 但在 $\mathbb{Q}$ 中无极限.

Ex5. $H=\left\{\left(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}\right) \mid n\in\mathbb{N}_+\right\}$. 问

(1) H是否覆盖 $(0,1)$？

(2) 是否可从 H 中选出有限多个开区间覆盖

(i) $(0,\frac{1}{2})$ (ii) $(\frac{1}{100},1)$.

解：(1) ($\forall \xi\in(0,1)$, $\exists\left(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}\right)$, s.t. $\xi\in\left(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}\right)$.

$\frac{1}{n+2}<\xi<\frac{1}{n}$, $\underbrace{\frac{1}{\xi}-2<n<\frac{1}{\xi}}_{\left(\frac{1}{\xi}-2,\frac{1}{\xi}\right)}$, $n\in\mathbb{N}_+$)

任取 $\xi\in(0,1)$，则 $\frac{1}{\xi}>1$.

若 $\frac{1}{\xi}\in\mathbb{N}_+$，令 $n=\frac{1}{\xi}-1$；若 $\frac{1}{\xi}\notin\mathbb{N}_+$，由于 $\frac{1}{\xi}-\left(\frac{1}{\xi}-2\right)=2>1$，

则必存在正整数 $n\in\left(\frac{1}{\xi}-2,\frac{1}{\xi}\right)$。综上，对于上述 $n\in\mathbb{N}_+$，

有 $\frac{1}{\xi}-2<n<\frac{1}{\xi}$，即 $\xi\in\left(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}\right)$.

所以 H 覆盖 $(0,1)$.

(2) (i) 假设存在 $\widetilde{H}=\overbrace{\left\{\left(\frac{1}{n_1+2},\frac{1}{n_1}\right),\left(\frac{1}{n_2+2},\frac{1}{n_2}\right),\cdots,\left(\frac{1}{n_k+2},\frac{1}{n_k}\right)\right\}}^{k\text{个}}$

覆盖 $(0,\frac{1}{2})$。令 $N=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$，则对 $\forall i\in\{1,2,\cdots,k\}$，

都有 $\left(\frac{1}{n_i+2},\frac{1}{n_i}\right)\subset\left(\frac{1}{N+2},1\right)$.

于是，当 $x\in(0,\frac{1}{2})\cap\left(0,\frac{1}{N+2}\right]$，有 $x\notin\left(\frac{1}{N+2},1\right)$，则 $\widetilde{H}$ 中

任何开区间 $\left(\frac{1}{n_i+2},\frac{1}{n_i}\right)$ 都不含有 x，这与 $\widetilde{H}$ 覆盖 $(0,\frac{1}{2})$ 矛盾.

(ii)

$(\frac{1}{3},1)$

$(\frac{1}{4},\frac{1}{2}) \rightarrow (\frac{1}{4},1)$

$(\frac{1}{5},\frac{1}{3}) \rightarrow (\frac{1}{5},1)$

$\vdots$

$(\frac{1}{100},\frac{1}{98}) \longrightarrow (\frac{1}{100},1)$

令 $\tilde{H}=\{(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n})\mid n=1,2,\cdots,98\}$，则 $\tilde{H}$ 覆盖 $(\frac{1}{100},1)$.

因为 $\bigcup_{n=1}^{98}(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n})=(\frac{1}{100},1)$.

Ex6. $[a,b]$ 的聚点的全体集合是 $[a,b]$ 自身.

Ex7. 设 $\{x_n\}$ 是单调数列. 若 $\{x_n\}$ 存在聚点，则该聚点是唯一的，并且就是 $\{x_n\}$ 的确界.

证：Step 1. 不妨设 $\{x_n\}$ 增，ξ 是 $\{x_n\}$ 的任意的聚点，

由聚点的定义（定义2''），$\{x_n\}$ 存在各项互异的子列 $\{x_{n_k}\}$ s.t.

$$\xi=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\sup_k\{x_{n_k}\}.$$

Step 2. 下证 $\xi=\sup_n\{x_n\}$.

先证 ξ 是 $\{x_n\}$ 的上界. 对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$，有 $n_k\geqslant k$，由于 $\{x_n\}$ 增，则

$$x_k\leq x_{n_k}\leq\sup_k\{x_{n_k}\}=\xi.$$

所以 ξ 是 $\{x_n\}$ 的一个上界. 根据单调有界定理，$\{x_n\}$ 收敛，

由于 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 ξ，则 $\xi=\lim_{n\to\infty}x_n=\sup_n\{x_n\}$.

所以 $\{x_n\}$ 的任意聚点都等于 $\sup_n\{x_n\}$，这说明聚点是唯一的.

总、Ex 1

设 E' 是 E 中全体聚点的集合. x_0 是 E' 的一个聚点,

则 $x_0 \in E'$.

证: 由于 x_0 是 E' 的一个聚点, 则由聚点的定义 (定义 2'),

对 $\boxed{\forall \varepsilon > 0}$, $\exists \xi \in U^\circ(x_0; \frac{1}{2}\varepsilon) \cap E'$, 即

$$0 < |x_0 - \xi| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

根据集合 E' 的定义. 由于 $\xi \in E'$, 则 ξ 是 E 的聚点.

由聚点定义 (定义 2). 对上述 $\varepsilon > 0$. $U(\xi, \frac{1}{2}\varepsilon)$ 中含有 E 中无限多个点, 因此可选取 $x \in \underbrace{U(\xi, \frac{1}{2}\varepsilon) \cap E}_{\text{无限集合}}$, s.t.

$$x \neq \xi, \quad x \neq x_0,$$

于是
$$\begin{aligned} 0 < |x - x_0| &\le |x - \xi| + |\xi - x_0| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

即 $x \in U^\circ(x_0; \varepsilon) \cap E$. 所以 x_0 是 E 的聚点. 即 $x_0 \in E'$.

§7.1. 习题

加强形式的覆盖定理

若 H 是闭区间 $[a,b]$ 的一个有限开覆盖，则 $\exists\delta>0$, s.t.

$\forall x, x'\in[a,b]$: $|x-x'|<\delta$,

x 与 x' 都能属于 H 中同一个开区间.

(称 δ 为开覆盖 H 的 Lebesgue 数)

证: Step1. 将 H 中所有开区间的端点按从小到大顺序排列

(重复的点只保留一个), 重新记为

$x_0<x_1<\cdots<x_k$.

并将端点的集合记为

$A=\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$.

(例: $[0,1]$. $H=\{(-1,\frac{1}{2}), (\frac{1}{4},\frac{3}{4}), (\frac{1}{2},2)\}$

$-1<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<2$.

$A=\{-1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 2\}$)

Step2. 令 $\delta=\min\{x_1-x_0, x_2-x_1, \cdots, x_k-x_{k-1}\}>0$,

任取 $x, x'\in[a,b]$, 并且满足

$x<x'$ 且 $|x-x'|<\delta$.

则 (x,x') 与 A 有种可能:

(1) $(x,x')\cap A=\phi$. 此时. 由于 H 覆盖 $[a,b]$, 则 $\exists(\alpha,\beta)\in H$, s.t.

$x\in(\alpha,\beta)$.

下证 $x'\in(\alpha,\beta)$.

反证法，假设 $x'\notin(\alpha,\beta)$. 由于 $x<x'$，则

$$x<\beta<x'$$

由于 β 是 H 中开区间的端点，则 $\beta\in A$. 这与 $(x,x')\cap A=\phi$ 矛盾.

所以 $x,x'\in(\alpha,\beta)$.

(2) $(x,x')\cap A\neq\phi$.

下证 $(x,x')\cap A$ 中只有 A 中一个端点.

反证法，假设 $\exists\alpha_1,\alpha_2\in A\cap(x,x')$，且 $\alpha_1<\alpha_2$，则

$$x<\alpha_1<\alpha_2<x'$$

从而 $x'-x>\alpha_2-\alpha_1\geq\delta$，这与 $|x-x'|<\delta$ 矛盾.

所以 $(x,x')\cap A$ 中只有一个点，设为 x_i.

由于 $x_i\in(x,x')\subset[a,b]$，H 覆盖 $[a,b]$. 所以

$\exists(\alpha,\beta)\in H$, s.t. $x_i\in(\alpha,\beta)$.

下证 $x,x'\in(\alpha,\beta)$.

反证法：假设 $x\notin(\alpha,\beta)$. 由于 $x_i\in(\alpha,\beta)$，并且 $x<x_i$，

则 $x<\alpha<x_i<x'$，所以 $(x,x')\cap A$ 中至少含有两个点，

x_i 和 α，矛盾. 所以 $x\in(\alpha,\beta)$. 同理可证，$x'\in(\alpha,\beta)$.

综上，当 $x,x'\in[a,b]$ 且 $|x-x'|<\delta$，总存在 $(\alpha,\beta)\in H$, s.t.

$x,x'\in(\alpha,\beta)$. 证毕

Ex10. 用有限覆盖定理证明连续函数的零点存在定理.

设 f 在 $[a,b]$ 连续 且 $f(a)\cdot f(b)<0$, 则

$\exists \xi\in(a,b)$, s.t. $f(\xi)=0$.

证: Step1. 反证法, 假设对 $\forall \xi\in[a,b]$, $f(\xi)\neq 0$.

由连续函数的局部保号性, 存在 ξ 的某邻域 $U(\xi)$,

s.t. 对 $\forall x\in U(\xi)$, $f(x)$ 与 $f(\xi)$ 符号相同.

令 $H=\{U(\xi)\mid \xi\in[a,b]\}$, 则 H 覆盖 $[a,b]$.

由有限覆盖定理, 存在 H 的有限子集

$$\tilde{H}=\{U(\xi_1),U(\xi_2),\cdots,U(\xi_k)\}$$

覆盖 $[a,b]$.

Step2. 设 $\delta>0$ 是开覆盖 $\tilde{H}$ 的 Lebesgue 数, 取 $n\in\mathbb{N}_+$, s.t. $\frac{b-a}{n}<\delta$.

将 $[a,b]$ 作 n 等分, 分点为 (n+1个分点)

$$x_0=a,\ x_1=a+\frac{b-a}{n},\ \cdots,\ x_i=a+\frac{b-a}{n}i,\ \cdots,\ x_n=b.$$

根据加强形式的覆盖定理, 对 $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$,

相邻的分点 x_{i-1} 与 x_i 都属于 $\tilde{H}$ 中同一个开区间, 因此

$f(x_{i-1})$ 与 $f(x_i)$ 符号相同. 从而 $f(x_i)$ 符号都相同,

但这与 $f(a)\cdot f(b)<0$ 矛盾.

所以, 假设不成立. $\exists\xi\in(a,b)$, s.t. $f(\xi)=0$. 证毕.