

2019-2020 学年第 1 学期
泛函分析作业

目录

1 第 1 周	1
2 第 2 周	3
3 第 3 周	8
4 第 4 周	12
5 第 5 周	14
6 第 6 周	20
7 第 7 周	20
8 第 8 周	22
9 第 9 周	25
10 第 10 周	30
11 第 11 周	32

第 1 周


定义 1.1. 等价距离

设集合 X 上有两种距离: d_1, d_2 . 如果 X 中按距离 d_1 收敛的点列 $\{x_n\}$ 都在距离 d_2 下收敛于同一点, 并且按距离 d_2 收敛的点列 $\{x_n\}$ 都在距离 d_1 下收敛于同一点, 即

$$d_1(x_n, x) \rightarrow 0 \iff d_2(x_n, x) \rightarrow 0,$$

则称距离 d_1 和 d_2 等价.



 作业题 1.1 设 $d(x, y)$ 是集合 X 上的距离, 令

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

证明: $\tilde{d}(x, y)$ 也是 X 上的距离, 并且 \tilde{d} 与 d 等价.

证明 显然, 对任意 $x, y \in X$,

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \in \mathbb{R}.$$

(i) 由距离 $d(x, y)$ 的正定性可知 $\tilde{d}(x, y) \geq 0$, 并且 $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 0$ 等价于 $d(x, y) = 0$, 进而等价于 $x = y$.

(ii) 由距离 $d(x, y)$ 的三点不等式可知, 对任意 $x, y, z \in X$, 总有

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z),$$

从而, 根据函数

$$f(t) = \frac{t}{1 + t}, \quad t \in [0, +\infty)$$

的单调递增性, 就有

$$\begin{aligned} \tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} &\leq \frac{d(x, z) + d(y, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} \\ &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} \\ &\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} \\ &= \tilde{d}(x, z) + \tilde{d}(y, z). \end{aligned}$$

综上, $\tilde{d}(x, y)$ 也是空间 X 上的距离.

注意到

$$0 \leq \tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} < 1,$$

于是

$$d(x, y) = \frac{\tilde{d}(x, y)}{1 - \tilde{d}(x, y)}. \quad (1.1)$$

若点列 $\{x_n\} \subset X$ 和点 $x \in X$ 满足

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

则根据数列极限的四则运算法则, 就有

$$\tilde{d}(x_n, x) = \frac{d(x_n, x)}{1 + d(x_n, x)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

若点列 $\{x_n\} \subset X$ 和点 $x \in X$ 满足

$$\tilde{d}(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

同样根据 (1.1) 式以及数列极限的四则运算法则, 就有

$$d(x_n, x) = \frac{\tilde{d}(x_n, x)}{1 - \tilde{d}(x_n, x)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

所以距离 d 和 \tilde{d} 等价. □

注 上述距离空间 (X, \tilde{d}) 中任何两点的距离都小于 1, 从而任何子集都是有界集. 上述结论说明, 任何距离空间上 (X, d) 上都能够找到与 d 等价的“有界”距离 \tilde{d} .

 **作业题 1.2** 在 \mathbb{R}^N 中可定义两种距离:

$$d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N |\xi_i - \eta_i|^2},$$

$$d_2(x, y) = \max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i - \eta_i|,$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N) \in \mathbb{R}^N$. 证明: d_1 和 d_2 等价.

证明 对任意 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N) \in \mathbb{R}^N$, 都有

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i - \eta_i|^2 \leq \sum_{i=1}^N |\xi_i - \eta_i|^2 \leq N \max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i - \eta_i|^2,$$

从而

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i - \eta_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^N |\xi_i - \eta_i|^2} \leq \sqrt{N} \max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i - \eta_i|,$$

即

$$d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \sqrt{N} d_2(x, y).$$

若点列 $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$ 和点 $x \in \mathbb{R}^N$ 满足

$$d_1(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

由 (1) 式的前半部分以及数列极限的迫敛性可知

$$d_2(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

若点列 $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$ 和点 $x \in \mathbb{R}^N$ 满足

$$d_2(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

由 (1) 式的后半部分以及数列极限的迫敛性可知

$$d_1(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$


综上, d_1 和 d_2 等价. □

注 若距离空间 X 上的两种距离 d_1 和 d_2 满足

$$C_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C_2 d_1(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

其中 $C_1, C_2 > 0$ 是正的常数, 则 d_1 与 d_2 一定等价.

第 2 周

 **作业题 2.1** 设 $P_r[a, b]$ 是定义在闭区间 $[a, b]$ 上的所有有理系数多项式函数的全体. 显然, $(P_r[a, b], d)$ 是连续函数空间 $(C[a, b], d)$ 的距离子空间, 其中

$$d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|, \quad \forall f, g \in C[a, b].$$

证明: $P_r[a, b]$ 是 $C[a, b]$ 的可数稠密子集, 从而 $C[a, b]$ 可分.

证明

Step1. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 设 $P_r^n[a, b]$ 是定义在 $[a, b]$ 上的所有有理系数 n 次多项式函数的全体, 则 $P_r^n[a, b]$ 是可数集. 由于

$$P_r[a, b] = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_r^n[a, b],$$

则 $P_r[a, b]$ 也是可数集.

Step2. 下证 $P_r[a, b]$ 按距离 d 在 $P[a, b]$ 中稠密.
任取 $h \in P[a, b]$,

$$h(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n, \quad t \in [a, b],$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. 令

$$M = \max_{1 \leq k \leq n} \max_{t \in [a, b]} |t|^k > 0.$$

根据有理数集 \mathbb{Q} 在实数集 \mathbb{R} 中的稠密性, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $q_0, q_1, \cdots, q_n \in \mathbb{Q}$ 使得

$$|a_0 - q_0| < \frac{1}{n+1}\epsilon, \quad |a_1 - q_1| < \frac{1}{(n+1)M}\epsilon, \quad \cdots, \quad |a_n - q_n| < \frac{1}{(n+1)M}\epsilon.$$

令

$$g(t) = q_0 + q_1 t + \cdots + q_n t^n, \quad t \in [a, b],$$

则 $g \in P_r[a, b]$, 并且对任意 $t \in [a, b]$ 都有

$$\begin{aligned} & |h(t) - g(t)| \\ & \leq |a_0 - q_0| + |a_1 - q_1| \cdot |t| + \cdots + |a_n - q_n| \cdot |t|^n \\ & \leq |a_0 - q_0| + |a_1 - q_1|M + \cdots + |a_n - q_n|M \\ & < \epsilon, \end{aligned}$$

从而

$$\max_{t \in [a, b]} |h(t) - g(t)| < \epsilon.$$

综上, 对任意 $h \in P[a, b]$ 以及任意 $\epsilon > 0$, 存在 $g \in P_r[a, b]$ 使得

$$d(h, g) = \max_{t \in [a, b]} |h(t) - g(t)| < \epsilon,$$

所以 $P_r[a, b]$ 按距离 d 在 $P[a, b]$ 中稠密.

Step3. 根据 Weierstrauss 逼近定理, $P[a, b]$ 按距离 d 在 $C[a, b]$ 中稠密, 则对任意 $\epsilon > 0$ 以及任意 $f \in C[a, b]$, 存在 $h \in P[a, b]$ 使得

$$d(f, h) < \frac{1}{2}\epsilon.$$

由 Step2 可知, 存在 $g \in P_r[a, b]$ 使得

$$d(h, g) < \frac{1}{2}\epsilon,$$

从而 $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g) < \epsilon$.

综上, $P_r[a, b]$ 是 $C[a, b]$ 的可数稠密子集, 从而 $C[a, b]$ 可分. □

作业题 2.2 按以下步骤证明

定理 2.1. Riemann-Lebesgue 引理

$f \in L[a, b]$, 对应的 Fourier 系数为

$$a_n = \int_a^b f(x) \sin nx dx, \quad b_n = \int_a^b f(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

则 $a_n, b_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$. \mathbb{R}^n



Step1 若 f 是 $[a, b]$ 上的简单函数 (P80 定义 3), 证明上述结论成立.

Step2 设 $S[a, b]$ 是定义在闭区间 $[a, b]$ 上的简单函数的全体. 显然, $S[a, b]$ 是 $L[a, b]$ 的距离子空间, 其中距离

$$d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt, \quad \forall f, g \in L[a, b].$$

证明: $S[a, b]$ 是 $L[a, b]$ 的稠密子集.

Step3 利用稠密性, 证明 Riemann-Lebesgue 引理成立.

证明

Step0. 设 h 是 $[a, b]$ 上的一个阶梯函数,

$$h(x) = \begin{cases} c_1, & x \in (a_1, b_1), \\ c_2, & x \in (a_2, b_2), \\ \cdots & \cdots \\ c_k, & x \in (a_k, b_k), \\ 0, & x \in [a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^k (a_i, b_i), \end{cases}$$

其中 c_1, c_2, \dots, c_k 为常数, $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$ 是 $[a, b]$ 中互不相交的非空开区间. 于是,

$$\begin{aligned} & \int_a^b h(x) \sin nx dx \\ &= \sum_{i=1}^k c_i \int_{a_i}^{b_i} \sin nx dx \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k c_i (\cos na_i - \cos nb_i) \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

同理可证

$$\int_a^b h(x) \cos nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Step1. 设 E 是 $[a, b]$ 中的可测子集, χ 是 E 的特征函数, 即

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \in [a, b] \setminus E, \end{cases}$$

下证

$$\int_a^b \chi(x) \sin nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

令 $\tilde{E} = E \cap (a, b)$, 则 \tilde{E} 也可测并且 $m(E \setminus \tilde{E}) = 0$. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在开集 $G \subset [a, b]$ 使得 $\tilde{E} \subset G$ 并且

$$m(G \setminus \tilde{E}) < \frac{1}{2}\epsilon.$$

另一方面, 根据 \mathbb{R}^1 中开集的构造定理 (P44), G 可表为

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i,$$

其中 $O_i = (a_i, b_i)$ 是 G 的构成区间, 从而

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) = mG \leq b - a < +\infty.$$

于是, 对上述 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$ 使得

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} (b_i - a_i) < \frac{1}{2}\epsilon.$$

令 $V = \cup_{i=1}^N (a_i, b_i)$, 并定义阶梯函数

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in V, \\ 0, & x \in [a, b] \setminus V, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} & \int_a^b |\chi(x) - h(x)| dx \\ &= \left(\int_{E \setminus V} + \int_{V \setminus E} + \int_{[a, b] \setminus (E \cup V)} \right) |\chi(x) - h(x)| dx \\ &= \left(\int_{\tilde{E} \setminus V} + \int_{V \setminus \tilde{E}} + \int_{[a, b] \setminus (\tilde{E} \cup V)} \right) |\chi(x) - h(x)| dx \\ &= \int_{\tilde{E} \setminus V} |1 - 0| dx + \int_{V \setminus \tilde{E}} |0 - 1| dx + \int_{[a, b] \setminus (\tilde{E} \cup V)} |0 - 0| dx \\ &= m(\tilde{E} \setminus V) + m(V \setminus \tilde{E}) \\ &\leq m(G \setminus V) + m(G \setminus \tilde{E}) \\ &< \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_a^b \chi(x) \sin nx dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b (\chi(x) - h(x)) \sin nx dx \right| + \left| \int_a^b h(x) \sin nx dx \right| \\ &\leq \int_a^b |\chi(x) - h(x)| |\sin nx| dx + \left| \int_a^b h(x) \sin nx dx \right| \\ &\leq \int_a^b |\chi(x) - h(x)| dx + \left| \int_a^b h(x) \sin nx dx \right| \\ &< \epsilon + \left| \int_a^b h(x) \sin nx dx \right|. \end{aligned}$$

由于 h 是阶梯函数, 综合 Step0, 数列极限的迫敛性以及 $\epsilon > 0$ 的任意性, 可得

$$\int_a^b \chi(x) \sin nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

设 f 是 $[a, b]$ 上的简单函数,

$$f(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_i(x),$$

其中

- (i) $[a, b] = \cup_{i=1}^k E_i$, E_1, E_2, \dots, E_k 是 $[a, b]$ 中互不相交的可测子集;
(ii) c_1, c_2, \dots, c_k 是非负常数;
(iii) $\chi_i(x)$ 是 E_i 的特征函数, 即

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in E_i, \\ 0, & x \in [a, b] \setminus E_i. \end{cases}$$

由前面的结论可知

$$\int_a^b f(x) \sin nxdx = \sum_{i=1}^k c_i \int_a^b \chi_i(x) \sin nxdx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

同理可证

$$\int_a^b f(x) \cos nxdx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Step2. (P118) 设 $f \in L[a, b]$, 则 f^+ 和 f^- 也是 $[a, b]$ 上的非负 L 可积函数, 从而, 根据非负可测函数 L 积分的定义 (P102, 定义 1), 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 上的简单函数 ϕ_1, ϕ_2 , 使得

$$0 \leq \phi_1(x) \leq f^+(x), \quad 0 \leq \phi_2(x) \leq f^-(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

并且

$$\begin{aligned} \int_a^b f^+(x)dx - \frac{\epsilon}{2} &\leq \int_a^b \phi_1(x)dx \leq \int_a^b f^+(x)dx, \\ \int_a^b f^-(x)dx - \frac{\epsilon}{2} &\leq \int_a^b \phi_2(x)dx \leq \int_a^b f^-(x)dx. \end{aligned}$$

令 $\phi(x) = \phi_1(x) - \phi_2(x)$, 则 ϕ 也是 $[a, b]$ 上的简单函数, 并且

$$\begin{aligned} d(f, \phi) &= \int_a^b |f(x) - \phi(x)|dx \\ &= \int_a^b |f^+(x) - f^-(x) - \phi_1(x) + \phi_2(x)|dx \\ &\leq \int_a^b |f^+(x) - \phi_1(x)|dx + \int_a^b |f^-(x) - \phi_2(x)|dx \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

综上, $S[a, b]$ 是 $L[a, b]$ 的稠密子集.

Step3. 由 Step2, 对任意 $f \in L[a, b]$ 以及任意 $\epsilon > 0$, 存在 $g \in S[a, b]$, 使得

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx < \epsilon,$$

从而

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_a^b f(x) \sin nxdx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) \sin nxdx \right| + \left| \int_a^b g(x) \sin nxdx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)| |\sin nx| dx + \left| \int_a^b g(x) \sin nxdx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \left| \int_a^b g(x) \sin nxdx \right| \\ &< \epsilon + \left| \int_a^b g(x) \sin nxdx \right|. \end{aligned}$$

另一方面, 根据 Step1, 就有

$$\int_a^b g(x) \sin nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

综上, 由以上两式, 结合数列极限的迫敛性以及 $\epsilon > 0$ 的任意性, 可得


$$\int_a^b f(x) \sin nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

同理可证

$$\int_a^b f(x) \cos nx dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

第 3 周

 **作业题 3.1** 设 (X, d) 是度量空间, $\{x_n\}$ 是 (X, d) 中的 Cauchy 点列, 证明: $\{x_n\}$ 收敛当且仅当 $\{x_n\}$ 存在收敛子列.

证明 必要性是显然的.

下证充分性. 设 Cauchy 点列 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $x_{n_k} \rightarrow x (k \rightarrow \infty)$. 任取 $\epsilon > 0$. 一方面, 由于 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 点列, 则存在 $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}_+$, 使得

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\epsilon, \quad \forall m, n > N. \quad (3.1)$$


另一方面, 由于 $x_{n_k} \rightarrow x (k \rightarrow \infty)$, 则存在 $K = K(\epsilon) \in \mathbb{N}_+$ 使得

$$n_k > N \quad \text{并且} \quad d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{2}\epsilon, \quad \forall k > K. \quad (3.2)$$

综上, 由 (3.1)-(3.2) 式, 对任意 $n > N$, 取 $k = K + 1$, 就有

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon,$$

所以 $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$. □

 **作业题 3.2** 设 f 是度量空间 (X, d) 到 \mathbb{R} 的连续映射, M 是 X 中的紧集, 证明: 连续映射 f 在紧集 M 上能够取到最值, 即存在 $x_0, x_1 \in M$ 使得

$$f(x_0) = \min_{x \in M} f(x), \quad f(x_1) = \max_{x \in M} f(x).$$

证明 Step1. 设

$$l = \inf_{x \in M} f(x).$$

下证 $l \in \mathbb{R}$.

反证法, 假设 $l = -\infty$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 存在 $x_n \in M$ 使得

$$f(x_n) < -n,$$

于是

$$f(x_n) \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.3)$$

另一方面, 由于 $\{x_n\} \subset M$ 并且 M 是紧集, 则存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 以及 $x \in M$ 使得

$$x_{n_k} \rightarrow x \quad (k \rightarrow \infty).$$

根据映射 f 的连续性, 就有

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) \in \mathbb{R} \quad (k \rightarrow \infty).$$

这与 (3.3) 式矛盾. 所以 $l \in \mathbb{R}$.

Step2. 根据下确界的定义, 存在 $\{x_n\} \subset M$ (称为极小化序列) 使得

$$f(x_n) \rightarrow l \quad (n \rightarrow \infty).$$

由于 M 是紧集, 则存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 以及 $x \in M$ 使得

$$x_{n_k} \rightarrow x \quad (k \rightarrow \infty).$$

根据映射 f 的连续性, 就有

$$\inf_{x \in M} f(x) = l = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = f(x).$$

所以连续映射 f 在紧集 M 上可以取到最小值.

同理可证, 连续映射 f 在紧集 M 上可以取到最大值. □


注 上述结论才是数学分析中闭区间上的连续函数最值性的本质. 在一般的度量空间中, 有界闭集不一定是紧集, 有界闭集上的连续映射不一定有最值性.

作业题 3.3

定义 3.1. Hölder 连续函数

设 $\alpha \in (0, 1]$. 若 $f \in C[a, b]$ 满足

$$[f]_\alpha = \sup_{\substack{x, y \in [a, b], \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty,$$

则称 f 是 $[a, b]$ 上具有指数 α 的 Hölder 连续函数. $C[a, b]$ 中所有具有指数 α 的 Hölder 连续函数的全体记为 $C^{0, \alpha}[a, b]$. 

(1) 令

$$\bar{d}(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| + [f - g]_\alpha, \quad \forall f, g \in C^{0, \alpha}[a, b],$$

证明 $(C^{0, \alpha}[a, b], \bar{d})$ 是一个度量空间.

(2) 证明 $(C^{0, \alpha}[a, b], \bar{d})$ 是完备的度量空间.

(3) 利用 Ascoli-Arezela 定理证明, 若 M 是 $(C^{0, \alpha}[a, b], \bar{d})$ 中的有界集, 则 M 是 $(C[a, b], d)$ 中的列紧集, 其中 d 是最大值距离, 即

$$d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|, \quad \forall f, g \in C[a, b].$$

证明 (1) 任取 $f, g \in C^{0, \alpha}[a, b]$, 对任意 $x, y \in [a, b]$ 且 $x \neq y$, 都有

$$\frac{|(f - g)(x) - (f - g)(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} + \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha} \\
&\leq [f]_\alpha + [g]_\alpha < +\infty,
\end{aligned}$$

从而

$$[f - g]_\alpha = \sup_{\substack{x, y \in [a, b], \\ x \neq y}} \frac{|(f - g)(x) - (f - g)(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq [f]_\alpha + [g]_\alpha < +\infty.$$

所以 $\bar{d}(f, g)$ 的定义是合理的.

(i) 显然 $\bar{d}(f, g) \geq 0$. 由于 $d(f, g) \leq \bar{d}(f, g)$, 根据 $d(f, g)$ 的正定性可知, $\bar{d}(f, g) = 0$ 等价于

$$f(t) = g(t), \quad \forall t \in [a, b],$$

从而等价于 $f = g$.

(ii) 设 $f, g, h \in C^{0, \alpha}[a, b]$, 则

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

另一方面, 对任意 $x, y \in [a, b]$ 且 $x \neq y$, 都有

$$\begin{aligned}
&\frac{|(f - g)(x) - (f - g)(y)|}{|x - y|^\alpha} \\
&= \frac{|[(f - h) + (h - g)](x) - [(f - h) + (h - g)](y)|}{|x - y|^\alpha} \\
&\leq \frac{|(f - h)(x) - (f - h)(y)|}{|x - y|^\alpha} + \frac{|(h - g)(x) - (h - g)(y)|}{|x - y|^\alpha},
\end{aligned}$$

从而

$$[f - g]_\alpha \leq [f - h]_\alpha + [h - g]_\alpha.$$

综上,

$$\bar{d}(f, g) \leq \bar{d}(f, h) + \bar{d}(h, g).$$

所以 $(C^{0, \alpha}[a, b], \bar{d})$ 是一个度量空间.

(2) 设 $\{f_n\}$ 是空间 $(C^{0, \alpha}[a, b], \bar{d})$ 中的 Cauchy 点列. 由于 $C^{0, \alpha}[a, b] \subset C[a, b]$ 并且

$$0 \leq d(f, g) \leq \bar{d}(f, g), \quad \forall f, g \in C^{0, \alpha}[a, b],$$

易证 $\{f_n\}$ 也是 $(C[a, b], d)$ 中的 Cauchy 点列. 根据 $(C[a, b], d)$ 的完备性, 存在 $f \in C[a, b]$ 使得

$$d(f_n, f) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

下证 $f \in C^{0, \alpha}[a, b]$ 并且

$$\bar{d}(f_n, f) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

由于 $\{f_n\}$ 是空间 $(C^{0, \alpha}[a, b], \bar{d})$ 中的 Cauchy 点列, 从而是 $(C^{0, \alpha}[a, b], \bar{d})$ 中的有界点列 (p219 第 14 题), 于是存在 $M > 0$ 使得对任意 $x, y \in [a, b]$ 并且 $x \neq y$ 都有

$$\frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq [f_n]_\alpha = [f_n - 0]_\alpha \leq \bar{d}(f_n, 0) \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+. \quad (3.4)$$

由于函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 f , 那么也逐点收敛于 f , 即对任意 $x \in [a, b]$, 都有

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.5)$$

因此, 在 (3.4) 两端令 $n \rightarrow \infty$, 可得

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq M, \quad \forall x, y \in [a, b], x \neq y,$$

从而 $[f]_\alpha < +\infty$, $f \in C^{0,\alpha}[a, b]$.

对任意 $\epsilon > 0$, 由于 $\{f_n\}$ 是空间 $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$ 中的 Cauchy 点列, 则存在正整数 N , 使得对任意 $m, n > N$, 都有

$$\frac{|[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(y) - f_m(y)]|}{|x - y|^\alpha} \leq [f_n - f_m]_\alpha \leq \bar{d}(f_n, f_m) < \epsilon, \quad \forall x, y \in [a, b], x \neq y.$$

在上式中固定 x, y 以及 $n > N$, 令 $m \rightarrow \infty$, 结合 (3.5) 式可得

$$\frac{|[f_n(x) - f(x)] - [f_n(y) - f(y)]|}{|x - y|^\alpha} \leq \epsilon, \quad \forall n \geq N, \forall x, y \in [a, b], x \neq y,$$

所以

$$[f_n - f]_\alpha \leq \epsilon, \forall n > N.$$

综上

$$[f_n - f]_\alpha \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

从而

$$\bar{d}(f_n, f) = d(f_n, f) + [f_n - f]_\alpha \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

所以 $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$ 是完备的度量空间.

(3) 设 M 在 $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$ 中有界. 由于 $C^{0,\alpha}[a, b] \subset C[a, b]$ 并且

$$0 \leq d(f, g) \leq \bar{d}(f, g), \quad \forall f, g \in C^{0,\alpha}[a, b],$$

所以 M 也在 $(C[a, b], d)$ 中有界. 任取 $\{f_n\} \subset M$, 则 $\{f_n\}$ 既是 $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$ 中的有界点列, 又是 $(C[a, b], d)$ 中的有界点列, 从而函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致有界. 下证函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上等度连续.

由于 $\{f_n\}$ 是 $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$ 中的有界点列, 则存在 $M > 0$, 使得

$$[f_n]_\alpha = [f_n - 0]_\alpha \leq \bar{d}(f_n, 0) \leq M.$$

从而

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+, \forall x, y \in [a, b]. \quad (3.6)$$

对任意 $\epsilon > 0$, 取

$$\delta = \left(\frac{\epsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0,$$

则对任意 $x, y \in [a, b]$ 且 $|x - y| < \delta$, 根据 $\alpha \in (0, 1]$ 以及 (3.6) 式可得

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x - y|^\alpha < M\delta^\alpha = \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

因此函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上等度连续.


根据 Ascoli-Arzelà 定理, 点列 $\{f_n\}$ 在空间 $(C[a, b], d)$ 中有收敛子列, 由此可知集合 M 是空间 $(C[a, b], d)$ 中的列紧集.

由于 $\{f_n\}$ 是 $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$ 中的有界点列, 根据 (2) 的证明的前半部分可知, 上述收敛子列 $\{f_{n_k}\}$ 的极限 f 也在 $C^{0,\alpha}[a, b]$ 中. 然而, 虽然 $\{f_{n_k}\}$ 在 $(C[a, b], d)$ 中收敛, 但是却不能保证 $\{f_{n_k}\}$ 是 $(C^{0,\alpha}[a, b], \bar{d})$ 的 Cauchy 点列, 因此我们无法像 (2) 的证明的后半部分那样证明

$$[f_{n_k} - f]_\alpha \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

□

第 4 周

 **作业题 4.1** 设 X 是完备的度量空间, T 是 X 到 X 中的映射, 如果存在正整数 $m \in \mathbb{N}_+$ 以及常数 $\alpha \in [0, 1)$ 使得对所有的 $x, y \in X$, 都有

$$d(T^m x, T^m y) \leq \alpha d(x, y),$$

其中 T^m 表示映射 T 作用 m 次, 则 T 在 X 中有且只有一个不动点 x^* , 特别地, 迭代点列

$$x_0, x_1 = Tx_0, \dots, x_n = Tx_{n-1}, \dots,$$

在 (X, d) 中收敛于不动点 x^* .

证明 由条件可知映射 $T^m : X \rightarrow X$ 是压缩映射, 由于 X 完备, 根据压缩映射原理, T^m 在 X 上存在唯一的不动点 x^* , 即

$$x^* = T^m x^*. \quad (4.1)$$

下证 x^* 也是映射 T 在 X 上的唯一的不动点.

由(4.1)式可得

$$Tx^* = T(T^m x^*) = T^{m+1} x^* = T^m (Tx^*),$$

所以 Tx^* 也是 T^m 的不动点. 根据 T^m 的不动点的唯一性, 就有 $Tx^* = x^*$, 所以 x^* 也是映射 T 的不动点. 若 $x \in X$ 也是映射 T 的不动点, 则

$$x = Tx, x = Tx = T(Tx) = T^2 x, \dots, x = T^m x,$$

即 x 也是 T^m 的不动点. 根据 T^m 的不动点的唯一性, 就有 $x^* = x$. 所以 x^* 是映射 T 在 X 上的唯一的不动点.

任取 $x_0 \in X$. 通过映射 T 构造迭代点列

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \dots, x_n = Tx_{n-1}, \dots.$$

任取

$$s \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\},$$

令

$$\begin{aligned} y_0 &= T^s x_0 = x_s, \\ y_1 &= T^m y_0 = x_{m+s}, \\ y_2 &= T^m y_1 = x_{2m+s}, \\ &\dots, \\ y_n &= T^m y_{n-1} = x_{nm+s}, \\ &\dots. \end{aligned}$$

根据由于 T^m 是压缩映射, X 完备, 则迭代点列 y_n 收敛于 T^m 的不动点 x^* , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nm+s} = x^*, \quad \forall s \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}.$$

于是对任意 $\epsilon > 0$, 以及任意 $s \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, 邻域 $U(x^*, \epsilon)$ 之外只含有点列 $\{x_{nm+s}\}_{n=0}^{\infty}$ 中的有限多项, 将这些项的集合记为 A_s . 由于

$$\bigcup_{s=0}^{m-1} \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x_{nm+s}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s=0}^{m-1} \{x_{nm+s}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x_n\},$$

于是点列 $\{x_n\}$ 在邻域 $U(x^*, \epsilon)$ 之外的项的全体为有限集

$$\bigcup_{s=0}^{m-1} A_s,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

□

注 该题中的映射 T 自身不一定是压缩映射. 证明过程后半部分用到了点列收敛的另外一种等价定义:

任给 $\epsilon > 0$, 若点列 $\{x_n\}$ 在邻域 $U(x, \epsilon)$ 之外至多只有有限多项, 则称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x .

点列极限与其子列极限的转化思路, 可参考华东师大《数学分析 (第四版 · 上册)》P27 例 8 和 P35-P36 习题 7(2) 的证明.

作业题 4.2 (Volterra 型线性积分方程解的存在唯一性问题) 设 $f \in C[a, b]$, 二元函数 $k(t, s)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上连续. 利用上题的结论证明, 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, 积分方程

$$\phi(t) - \lambda \int_0^t k(t, s)\phi(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b] \quad (4.2)$$

总存在唯一的连续函数解 $\phi \in C[a, b]$.

证明 任取 $\phi \in C[a, b]$, 定义 $[a, b]$ 上的函数 $T\phi$:

$$(T\phi)(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t, s)\phi(s) ds, \quad t \in [a, b]. \quad (4.3)$$

由于 $\phi, f \in C[a, b]$, $k(t, s)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上连续, 由上式可知 $T\phi \in C[a, b]$. 由此得到映射

$$\begin{aligned} T: C[a, b] &\rightarrow C[a, b], \\ \phi &\mapsto T\phi. \end{aligned}$$

显然, 积分方程(4.2)在 $[a, b]$ 上的连续函数解等价于映射 T 在空间 $C[a, b]$ 中的不动点.

(下面验证 T 是否是压缩映射, 若不是, 继续验证 T^m 是否是压缩映射)

对任意 $\phi_1, \phi_2 \in C[a, b]$ 以及任意 $t \in [a, b]$, 由(4.3)可得

$$\begin{aligned} & |(T\phi_1)(t) - (T\phi_2)(t)| \\ &= |\lambda| \cdot \left| \int_a^t k(t, s) [\phi_1(s) - \phi_2(s)] ds \right| \\ &\leq |\lambda| \cdot \int_a^t \max_{\substack{a \leq t \leq b \\ a \leq s \leq b}} |k(t, s)| \cdot \max_{t \in [a, b]} |\phi_1(s) - \phi_2(s)| ds \\ &= M|\lambda|(t-a) \cdot d(\phi_1, \phi_2), \end{aligned}$$

其中

$$M = \max_{\substack{a \leq t \leq b \\ a \leq s \leq b}} |k(t, s)| \geq 0.$$

(这样看 T 不一定是压缩映射)

利用上述结果, 继续计算可得

$$|(T^2\phi_1)(t) - (T^2\phi_2)(t)|$$

$$\begin{aligned}
&= |\lambda| \cdot \left| \int_a^t k(t, s) [(T\phi_1)(s) - (T\phi_2)(s)] ds \right| \\
&\leq |\lambda| \cdot \int_a^t M \cdot |(T\phi_1)(s) - (T\phi_2)(s)| ds \\
&\leq M^2 |\lambda|^2 \int_a^t (s - a) \cdot d(\phi_1, \phi_2) ds \\
&= \frac{[M|\lambda|(t - a)]^2}{2} d(\phi_1, \phi_2).
\end{aligned}$$

一直做下去, 对任意 $m \in \mathbb{N}_+$ 就有

$$|(T^m \phi_1)(t) - (T^m \phi_2)(t)| \leq \frac{[M|\lambda|(t - a)]^m}{m!} d(\phi_1, \phi_2), \quad \forall t \in [a, b],$$

上式两端对 $t \in [a, b]$ 取最大值可得


$$d(T^m \phi_1, T^m \phi_2) \leq \frac{[M|\lambda|(b - a)]^m}{m!} d(\phi_1, \phi_2).$$

对任意 $a \in \mathbb{R}$, 都有 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a^m}{m!} = 0$, 由该事实可知, 存在充分大的一个正整数 m 使得

$$\alpha = \frac{[M|\lambda|(b - a)]^m}{m!} \in [0, 1),$$

此时 T^m 就是完备度量空间 $C[a, b]$ 上的压缩映射. 根据上一个问题的结论, 映射 T 在 $C[a, b]$ 中存在唯一的不动点, 所以积分方程(4.2)在 $[a, b]$ 上存在唯一的连续函数解. \square

第 5 周

 **作业题 5.1** 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间, $x_0 \in X$, $\epsilon > 0$. 令

$$\begin{aligned}
U(x_0, \epsilon) &= \{x \mid \|x - x_0\| < \epsilon\}, \\
S(x_0, \epsilon) &= \{x \mid \|x - x_0\| \leq \epsilon\},
\end{aligned}$$

则

$$\overline{U(x_0, \epsilon)} = S(x_0, \epsilon).$$

证明 由于范数 $\|\cdot\|$ 作为映射是赋范线性空间 X 上的连续映射, 则可证 $S(x_0, \epsilon)$ 是空间 X 中的闭集. 由于 $U(x_0, \epsilon) \subset S(x_0, \epsilon)$, 则 $\overline{U(x_0, \epsilon)} \subset S(x_0, \epsilon)$. 下证 $S(x_0, \epsilon) \subset \overline{U(x_0, \epsilon)}$.

令

$$D = \{x \in X \mid \|x - x_0\| = \epsilon\},$$

则 $S(x_0, \epsilon) = U(x_0, \epsilon) \cup D$. 显然, $U(x_0, \epsilon) \subset \overline{U(x_0, \epsilon)}$, 所以只需要证明 $D \subset \overline{U(x_0, \epsilon)}$.

任取 $y_0 \in D$. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$x_n = y_0 + \frac{x_0 - y_0}{n\|x_0 - y_0\|} = y_0 + \frac{1}{n\epsilon}(x_0 - y_0), \text{ (赋范线性空间里可以做加法和数乘)}$$

则 $x_n \in X$, 并且当 n 足够大时, 就有(下式还用到了范数的正齐次性)

$$\|x_n - x_0\| = \left\| \left(\frac{1}{n\epsilon} - 1 \right) (x_0 - y_0) \right\| = \left| \frac{1}{n\epsilon} - 1 \right| \|x_0 - y_0\| = \left| \frac{1}{n} - \epsilon \right| = \epsilon - \frac{1}{n} < \epsilon,$$

从而 $x_n \in U(x_0, \epsilon)$. 另一方面,

$$\|x_n - y_0\| = \left\| \frac{1}{n\epsilon}(x_0 - y_0) \right\| = \frac{1}{n\epsilon} \|x_0 - y_0\| = \frac{1}{n},$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_0\| = 0$, y_0 就是 $U(x_0, \epsilon)$ 的聚点, 因此 $y_0 \in \overline{U(x_0, \epsilon)}$. 综上, $D \subset \overline{U(x_0, \epsilon)}$.
所以 $\overline{U(x_0, \epsilon)} = S(x_0, \epsilon)$. □

作业题 5.2 利用 Hölder 不等式证明

定理 5.1. 内插不等式

设 $1 \leq s \leq r \leq t < \infty$, $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$, 则 $u \in L^r(\Omega)$ 并且

$$\|u\|_r \leq \|u\|_s^\theta \|u\|_t^{1-\theta},$$

其中 $\theta \in [0, 1]$ 满足

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}.$$

证明 当 $r = s$ 时, 取 $\theta = 1$; 当 $r = t$ 时, 取 $\theta = 0$. 在这两种情况下, 结论都成立. 下设

$$1 \leq s < r < t < \infty.$$

若存在 $m, n > 0$ 使得 $r = \frac{s}{m} + \frac{t}{n}$, 则

$$|u|^r = |u|^{\frac{s}{m}} \cdot |u|^{\frac{t}{n}}.$$

由于 $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$, 则

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(|u|^{\frac{s}{m}} \right)^m dx &= \int_{\Omega} |u|^s dx < +\infty, \\ \int_{\Omega} \left(|u|^{\frac{t}{n}} \right)^n dx &= \int_{\Omega} |u|^t dx < +\infty, \end{aligned}$$

从而 $|u|^{\frac{s}{m}} \in L^m(\Omega)$, $|u|^{\frac{t}{n}} \in L^n(\Omega)$. 于是, 当 m, n 满足

$$\begin{cases} m, n > 0, \\ \frac{s}{m} + \frac{t}{n} = r, \\ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1, \end{cases}$$

即 $m = \frac{t-s}{t-r}$, $n = \frac{t-s}{r-s}$ 时, 利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^r dx &= \int_{\Omega} |u|^{\frac{s}{m}} \cdot |u|^{\frac{t}{n}} dx \leq \left[\int_{\Omega} \left(|u|^{\frac{s}{m}} \right)^m dx \right]^{\frac{1}{m}} \cdot \left[\int_{\Omega} \left(|u|^{\frac{t}{n}} \right)^n dx \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |u|^s dx \right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\int_{\Omega} |u|^t dx \right)^{\frac{1}{n}} = \|u\|_s^{\frac{s}{m}} \cdot \|u\|_t^{\frac{t}{n}} < \infty, \end{aligned}$$

所以 $u \in L^r(\Omega)$, 并且

$$\|u\|_r^r = \int_{\Omega} |u|^r dx \leq \|u\|_s^{\frac{s}{m}} \cdot \|u\|_t^{\frac{t}{n}}.$$


令 $\theta = \frac{s}{rm}$, 则 $\theta \in (0, 1)$, $\frac{t}{rn} = 1 - \theta$,

$$\frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t} = \frac{1}{rm} + \frac{1}{rn} = \frac{1}{r},$$

并且

$$\|u\|_r \leq \|u\|_s^\theta \|u\|_t^{1-\theta}.$$

□

 **作业题 5.3** ($L^p(\Omega)$ 与 $L^\infty(\Omega)$ 的联系) 设 Ω 是 \mathbb{R}^n 中的可测集并且 $m(\Omega) < +\infty$, 证明

(1) 若 p, q 满足 $1 \leq p < q \leq \infty$, 则

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega),$$

并且存在与 $m(\Omega), p$ 和 q 相关的正常数 C 使得

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_q, \quad \forall f \in L^q(\Omega).$$

(2) 对任意 $f \in L^\infty(\Omega)$, 都有

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

证明 (1) Step1. 任取 $f \in L^\infty(\Omega)$, 下证

$$f \in L^p(\Omega), \quad \forall p \geq 1.$$

由于 $f \in L^\infty(\Omega)$, 则存在 $E_0 \subset \Omega$ 使得 $m(E_0) = 0$ 并且

$$|f(x)|^p \leq \|f\|_\infty^p, \quad \forall x \in \Omega \setminus E_0, \quad \forall p \geq 1.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)|^p dx &= \int_{\Omega \setminus E_0} |f(x)|^p dx + \int_{E_0} |f(x)|^p dx \\ &= \int_{\Omega \setminus E_0} |f(x)|^p dx \\ &\leq \int_{\Omega \setminus E_0} \|f\|_\infty^p dx \\ &\leq m(\Omega) \|f\|_\infty^p < +\infty, \end{aligned}$$

所以 $f \in L^p(\Omega)$ 并且

$$\|f\|_p \leq [m(\Omega)]^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty. \quad (5.1)$$

□

Step2. 下证当 p, q 满足

$$1 \leq p < q < \infty$$

时结论成立.

任取 $f \in L^q(\Omega)$, 令 $t = \frac{q}{p}$, $s = \frac{t}{t-1}$, 则 $t, s > 0$, $\frac{1}{t} + \frac{1}{s} = 1$, 并且

$$\int_{\Omega} (|f(x)|^p)^t dx = \int_{\Omega} |f(x)|^q dx < \infty,$$

即 $|f|^p \in L^t(\Omega)$. 定义

$$g(x) \equiv 1, \quad x \in \Omega,$$

则 $g \in L^s(\Omega)$. 利用 Hölder 不等式可得

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} 1 \cdot |f(x)|^p dx \\
&\leq \left(\int_{\Omega} 1^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{\Omega} (|f(x)|^p)^t dx \right)^{\frac{1}{t}} \\
&= [m(\Omega)]^{\frac{1}{s}} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{t}} \\
&= [m(\Omega)]^{\frac{q-p}{q}} \|f\|_q^p < +\infty,
\end{aligned}$$

所以 $f \in L^p(\Omega)$, 并且

$$\|f\|_p \leq [m(\Omega)]^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_q.$$

(2) 当 $\|f\|_{\infty} = 0$ 时, 由 (1) 部分的结论可知 $\|f\|_p \equiv 0, \forall p > 1$, 此时结论显然成立. 下设 $\|f\|_{\infty} > 0$.

一方面, 由(5.1)可得

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} [m(\Omega)]^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\infty} = \|f\|_{\infty}. \quad (5.2)$$

另一方面, 对任意 $\epsilon \in (0, \|f\|_{\infty})$, 令

$$E_{\epsilon} = \{x \in \Omega \mid |f(x)| \geq \|f\|_{\infty} - \epsilon\},$$

下证 $m(E_{\epsilon}) > 0$. 反证法, 假设 $m(E_{\epsilon}) = 0$, 由 $\|f\|_{\infty}$ 的定义可得

$$\sup_{x \in \Omega \setminus E_{\epsilon}} |f(x)| \geq \inf_{\substack{E_0 \subset \Omega \\ m(E_0)=0}} \left(\sup_{x \in \Omega \setminus E_0} |f(x)| \right) = \|f\|_{\infty}. \quad (5.3)$$

但是另一方面, 对任意 $x \in \Omega \setminus E_{\epsilon}$, 有 $|f(x)| \leq \|f\|_{\infty} - \epsilon$, 从而

$$\sup_{x \in \Omega \setminus E_{\epsilon}} |f(x)| \leq \|f\|_{\infty} - \epsilon,$$

这与(5.3)矛盾. 所以 $m(E_{\epsilon}) > 0$. 于是

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |f(x)|^p dx &\geq \int_{E_{\epsilon}} |f(x)|^p dx \\
&\geq \int_{E_{\epsilon}} (\|f\|_{\infty} - \epsilon)^p dx \\
&= m(E_{\epsilon}) (\|f\|_{\infty} - \epsilon)^p,
\end{aligned}$$

进而

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq [m(E_{\epsilon})]^{\frac{1}{p}} (\|f\|_{\infty} - \epsilon),$$

$$\begin{aligned}
\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p &\geq \lim_{p \rightarrow +\infty} [m(E_{\epsilon})]^{\frac{1}{p}} (\|f\|_{\infty} - \epsilon) \\
&= \|f\|_{\infty} - \epsilon.
\end{aligned}$$

由 $\epsilon > 0$ 的任意性可知

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_{\infty}. \quad (5.4)$$

综合(5.2)与(5.4)式, 可得

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_{\infty}.$$

作业题 5.4 证明

定理 5.2. Brezis-Lieb 引理

设 Ω 是 \mathbb{R}^n 中的可测集, $1 \leq p < \infty$. 若 $L^p(\Omega)$ 中的函数列 $\{u_n\}$ 满足

- (1) $\{u_n\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的有界点列;
- (2) $u_n(x) \rightarrow u(x)$ a.e. $x \in \Omega$ ($n \rightarrow \infty$).

则 $u \in L^p(\Omega)$ 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) = \|u\|_p^p.$$



证明 Step1. 由于 $\{u_n\}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中有界, 则存在 $M > 0$, 使得

$$\|u_n\|_p \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+.$$

由于

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ a.e. } x \in \Omega \quad (n \rightarrow \infty),$$

则

$$|u_n(x)|^p \rightarrow |u(x)|^p \text{ a.e. } x \in \Omega \quad (n \rightarrow \infty).$$

由 Fatou 引理 (P107) 可得

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx = \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} |u_n(x)|^p dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n(x)|^p dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_p^p \leq M^p < +\infty,$$

所以 $u \in L^p(\Omega)$.

Step2. (为什么要有这一步? 从下面的(5.7)式最后一步估计可以看到端倪) 任取 $\epsilon > 0$. 下证存在只与 ϵ 和 p 有关的正常数 $C > 0$ 使得

$$|a + b|^p - |a|^p \leq \epsilon |a|^p + C |b|^p, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

事实上, 当 $p = 1$ 时,

$$|a + b| - |a| \leq |(a + b) - a| = |b| \leq \epsilon |a| + |b|,$$

结论成立. 当 $p > 1$ 时, 由微分中值定理, 存在 $\theta \in [0, 1]$ 使得

$$\begin{aligned} & |a + b|^p - |a|^p \\ &= |p\theta a + (1 - \theta)b|^{p-2}(\theta a + (1 - \theta)b)b| \\ &= p|\theta a + (1 - \theta)b|^{p-1}|b| \\ &\leq p2^{p-1}(|\theta a|^{p-1} + |(1 - \theta)b|^{p-1})|b| \\ &\leq p2^{p-1}(|a|^{p-1} + |b|^{p-1})|b| \\ &= p2^{p-1}|a|^{p-1}|b| + p2^{p-1}|b|^p. \end{aligned} \tag{5.5}$$

令 $q = \frac{p}{p-1}$, 则 $p > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 由 Young 不等式可得

$$\begin{aligned} & p2^{p-1}|a|^{p-1}|b| \\ &= \left[(q\epsilon)^{\frac{1}{q}}|a|^{p-1}\right] \cdot \left[(q\epsilon)^{-\frac{1}{q}}p2^{p-1}|b|\right] \\ &\leq \frac{\left[(q\epsilon)^{\frac{1}{q}}|a|^{p-1}\right]^q}{q} + \frac{\left[(q\epsilon)^{-\frac{1}{q}}p2^{p-1}|b|\right]^p}{p} \end{aligned}$$

$$= \epsilon |a|^p + \left(\frac{2^p(p-1)}{\epsilon} \right)^{p-1} |b|^p \quad (5.6)$$

令

$$C = \left(\frac{2^p(p-1)}{\epsilon} \right)^{p-1} + p2^{p-1},$$

再将(5.6)式代入到(5.5)中可得

$$\left| |a+b|^p - |a|^p \right| \leq \epsilon |a|^p + C |b|^p.$$

Step3. 下证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left((\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) - \|u\|_p^p \right) = 0.$$

由 Step2 可得

$$\begin{aligned} & \left| |u_n(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p - |u(x)|^p \right| \\ & \leq \left| |u_n(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p \right| + |u(x)|^p \\ & = \left| |(u_n(x) - u(x)) + u(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p \right| + |u(x)|^p \\ & \leq \epsilon |u_n(x) - u(x)|^p + (C+1) |u(x)|^p. \end{aligned} \quad (5.7)$$

令

$$f_n^\epsilon(x) = \left| |u_n(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p - |u(x)|^p \right| - \epsilon |u_n(x) - u(x)|^p,$$

则由条件 (ii) 可知

$$f_n^\epsilon(x) \rightarrow 0 \quad a.e. \ x \in \Omega \quad (n \rightarrow \infty),$$

同样也有 f_n^ϵ 的正部 $(f_n^\epsilon)^+$ 也满足

$$(f_n^\epsilon)^+(x) \rightarrow 0, \quad a.e. \ x \in \Omega \quad (n \rightarrow \infty). \quad (5.8)$$

由(5.7)式可得

$$0 \leq (f_n^\epsilon)^+(x) \leq (C+1) |u(x)|^p, \quad \forall x \in \Omega. \quad (5.9)$$

由于 $u \in L^p(\Omega)$, 则 $|u|^p \in L^1(\Omega)$, 综合(5.8)和(5.9), 利用 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f_n^\epsilon)^+(x) dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n^\epsilon)^+(x) dx = 0. \quad (5.10)$$

再由(5.7)式可得

$$\begin{aligned} & \left| |u_n(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p - |u(x)|^p \right| \\ & = f_n^\epsilon(x) + \epsilon |u_n(x) - u(x)|^p \\ & \leq (f_n^\epsilon)^+(x) + \epsilon |u_n(x) - u(x)|^p, \end{aligned}$$

上式两端在 Ω 上积分可得

$$\begin{aligned} & \left| (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) - \|u\|_p^p \right| \\ & \leq \int_{\Omega} \left| |u_n(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p - |u(x)|^p \right| dx \\ & \leq \int_{\Omega} (f_n^\epsilon)^+(x) dx + \epsilon \|u_n - u\|_p^p \\ & \leq \int_{\Omega} (f_n^\epsilon)^+(x) dx + (M^p + \|u\|_p^p) \epsilon, \end{aligned}$$

在上式两端令 $n \rightarrow \infty$ 可得

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) - \|u\|_p^p \right| \\ & \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f_n^\epsilon)^+(x) \, dx + (M^p + \|u\|_p^p) \epsilon \\ & = (M^p + \|u\|_p^p) \epsilon \end{aligned}$$

再由 $\epsilon > 0$ 的任意性可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) - \|u\|_p^p \right| = 0,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left((\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) - \|u\|_p^p \right) = 0,$$

即


$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) = \|u\|_p^p.$$

□

第 6 周

欢度国庆!

第 7 周

 **作业题 7.1** 设 Ω 是 \mathbb{R}^n 中的一个可测集, $1 \leq p < \infty$. 若 $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ 并且

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

则函数列 $\{f_n\}$ 在 Ω 上依测度收敛于 f .

证明 对任意 $\sigma > 0$, 都有

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_p^p &= \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \\ &\geq \int_{\Omega[|f_n - f| \geq \sigma]} |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \\ &\geq \int_{\Omega[|f_n - f| \geq \sigma]} \sigma^p \, dx \\ &= \sigma^p m(\Omega[|f_n - f| \geq \sigma]). \end{aligned}$$

由于

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

则

$$m(\Omega[|f_n - f| \geq \sigma]) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

从而函数列 $\{f_n\}$ 在 Ω 上依测度收敛于 f .

□

 **作业题 7.2** 证明

引理 7.1. Risez 引理

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范线性空间, X_0 是 X 的一个真闭子空间, 则对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$, 存在 $y \in X$ 使得

- (i) $\|y\| = 1$,
(ii) $\forall x \in X_0$, 有 $\|y - x\| > \varepsilon$.



证明 由于 X_0 是 X 的真闭子空间, 则存在非零向量 $\bar{y} \in X \setminus X_0$. 由于 X_0 是闭集, 则

$$d = d(\bar{y}, X_0) = \inf_{x \in X_0} \|\bar{y} - x\| > 0.$$

由于 $\varepsilon \in (0, 1)$, 则 $d < \frac{d}{\varepsilon}$, 从而存在 $x_0 \in X_0$, 使得

$$d \leq \|\bar{y} - x_0\| < \frac{d}{\varepsilon}. \quad (7.1)$$

令 $y = \frac{\bar{y} - x_0}{\|\bar{y} - x_0\|}$, 则 $\|y\| = 1$. 对任意 $x \in X_0$, 都有

$$\begin{aligned} y - x &= \frac{\bar{y} - x_0}{\|\bar{y} - x_0\|} - x \\ &= \frac{1}{\|\bar{y} - x_0\|} [\bar{y} - (x_0 + \|\bar{y} - x_0\|x)]. \end{aligned}$$

由于 $x_0, x \in X_0$, X_0 是 X 的子空间, 则

$$x_0 + \|\bar{y} - x_0\|x \in X_0,$$

从而

$$\|\bar{y} - (x_0 + \|\bar{y} - x_0\|x)\| \geq \inf_{x \in X_0} \|\bar{y} - x\| = d,$$

由(7.1)式可得

$$\|y - x\| = \left\| \frac{1}{\|\bar{y} - x_0\|} [\bar{y} - (x_0 + \|\bar{y} - x_0\|x)] \right\| \geq \frac{d}{\|\bar{y} - x_0\|} > \varepsilon.$$

□

作业题 7.3

定义 7.1. 严格凸

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范线性空间. 如果对任意

$$x, y \in S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}, \quad \text{并且} \quad x \neq y,$$

都有

$$\|\alpha x + \beta y\| < 1 \quad (\forall \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1)$$

则称 $(X, \|\cdot\|)$ 是严格凸的赋范线性空间.



设 $(X, \|\cdot\|)$ 是严格凸的赋范线性空间, $M = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset X$, 则对任意 $x \in X$, 证明存在唯一的 $y_0 \in \text{span}M$, 使得

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in \text{span}M} \|x - y\|.$$

(我们在课上已经证明了最佳逼近元 y_0 的存在性. 这里只需要证明, 在严格凸的条件下, 最佳逼近元是唯一的.)

证明 任取 $x \in X$, 假设存在 $y_0, y_1 \in \text{span}M$ 并且 $y_0 \neq y_1$, 使得

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in \text{span}M} \|x - y\| = \|x - y_1\|.$$

令 $d = \min_{y \in \text{span}M} \|x - y\|$, 则 $d \geq 0$.

若 $d > 0$, 令

$$z_0 = \frac{x - y_0}{d}, \quad z_1 = \frac{x - y_1}{d},$$

则 $\|z_0\| = \|z_1\| = 1$ 并且 $z_0 \neq z_1$. 根据赋范空间 X 的严格凸性, 对任意 $\alpha, \beta > 0$ 且 $\alpha + \beta = 1$ 就有

$$\begin{aligned} 1 &> \|\alpha z_0 + \beta z_1\| \\ &= \frac{1}{d} \|\alpha(x - y_0) + \beta(x - y_1)\| \\ &= \frac{1}{d} \|x - (\alpha y_0 + \beta y_1)\|. \end{aligned}$$

由于 $y_0, y_1 \in \text{span}M$, 则 $\alpha y_0 + \beta y_1 \in \text{span}M$, 从而

$$1 > \frac{1}{d} \|x - (\alpha y_0 + \beta y_1)\| \geq \frac{1}{d} \cdot d = 1,$$

矛盾.

若 $d = 0$, 则 $\|x - y_0\| = \|x - y_1\| = 0$, 从而 $y_0 = x = y_1$, 这与 $y_0 \neq y_1$ 矛盾.

综上, 必有 $y_0 = y_1$. 所以 x 的最佳逼近元必定唯一. □

第 8 周

作业题 8.1 设 $(X, \|\cdot\|_1)$ 是 n 维赋范线性空间, $(Y, \|\cdot\|_2)$ 是 m 维赋范线性空间, 数域均为实数域 \mathbb{R} . 证明 X 到 Y 上的任何线性算子都是有界线性算子.

证明 Step1.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \phi^{-1} \uparrow & & \uparrow \psi^{-1} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathbb{A}} & \mathbb{R}^m \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \phi \\ \downarrow \psi \end{array}$$

设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 n 维空间 X 的一组 Hamel 基, $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ 是 m 维空间 Y 的一组 Hamel 基. 对任意 $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \in X$, 定义映射 $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}^n$, 使得

$$\phi(x) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n;$$

对任意 $y = \sum_{j=1}^m \eta_j f_j \in Y$, 定义映射 $\psi: Y \rightarrow \mathbb{R}^m$, 使得

$$\psi(y) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m.$$

易证 ϕ 和 ψ 都是拓扑同构映射, 从而 $\phi, \phi^{-1}, \psi, \psi^{-1}$ 都是有界线性算子.

Step2. 设 $T: X \rightarrow Y$ 是一个线性算子, 则 T 与 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R}^m 的线性算子

$$\mathbb{A} = \psi \circ T \circ \phi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

一一对应. 下证 $\mathbb{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是有界线性算子.

根据线性代数的知识可知, 存在一个 $n \times m$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times m}$, 使得对任意 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, 都有

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\xi = \xi A &= (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \xi_i a_{i1}, \sum_{i=1}^n \xi_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^n \xi_i a_{im} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}), \end{aligned}$$

从而


$$\begin{aligned} &|\mathbb{A}\xi|_m \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \xi_i (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}) \right|_m \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\xi_i| \cdot |(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})|_m \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})|_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\xi|_n \cdot \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

所以 $\mathbb{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是有界线性算子.

Step3. 由于

$$T = \psi^{-1} \circ \mathbb{A} \circ \phi,$$

ψ, \mathbb{A}, ϕ 都是有界线性算子, 则 T 也是有界线性算子. □

 **作业题 8.2** 设 $D = [a, b] \times [a, b] \subset \mathbb{R}^2$ 是一个正方形区域, 三元函数 $k(x, y, u)$ 在 $D \times \mathbb{R}^1$ 上连续. 令

$$(K\phi)(x) = \int_a^b k(x, y, \phi(y)) dy, \quad \phi \in C[a, b].$$

证明 K 是从 $C[a, b]$ 映入 $C[a, b]$ 的全连续算子. (提示: 证明紧性需要用到 Ascoli-Arezela 定理.)

证明 Step1. 由于 $k(x, y, u)$ 在 $D \times \mathbb{R}^1$ 上连续, 则对任意 $\phi \in C[a, b]$, $K\phi$ 也在 $[a, b]$ 上连续, 即 $K\phi \in C[a, b]$.

Step2. 下证 $K : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ 是紧算子.

设 S 是 $C[a, b]$ 中的有界集:

$$\|\phi\| \leq C, \quad \forall \phi \in S,$$

其中 $C > 0$ 是正的常数. 则对任意 $x \in [a, b]$ 以及任意 $\phi \in S$, 有 $|\phi(x)| \leq C$, 从而

$$|(K\phi)(x)| = \left| \int_a^b k(x, y, \phi(y)) dy \right| \leq \int_a^b M dy = M(b-a),$$

其中

$$M = \max_{\substack{(x,y) \in D \\ |u| \leq C}} |k(x, y, u)|.$$

所以 $\|k\phi\| \leq M(b-a)$, $\forall \phi \in S$, 即 $K(S)$ 中的函数在 $[a, b]$ 上一致有界.

另一方面, 对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 $k(x, y, u)$ 在 $D \times [-C, C]$ 上一致连续, 则存在只依赖于 ε 的正数 $\delta > 0$, 使得对任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$, 有

$$|k(x_1, y, u) - k(x_2, y, u)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \forall u \in [a, b], |t| \leq C.$$

于是对任意 $\phi \in S$, 有

$$\begin{aligned} & |(K\phi)(x_1) - (K\phi)(x_2)| \\ &= \left| \int_a^b [k(x_1, y, \phi(y)) - k(x_2, y, \phi(y))] dy \right| \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dy = \varepsilon. \end{aligned}$$

所以 $K(S)$ 中的函数在 $[a, b]$ 上等度连续. 根据 Ascoli-Arezela 定理, $K(S)$ 是 $C[a, b]$ 中的列紧集, 从而 $K : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ 是紧算子.

Step3. 下证 K 是连续算子.

设 $\{\phi_n\} \subset C[a, b]$, $\phi_0 \in C[a, b]$ 并且 $\|\phi_n - \phi_0\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 则 $\{\phi_n\}$ 是 $C[a, b]$ 中的有界点列, 令

$$L = \sup \{\|\phi_0\|, \|\phi_1\|, \|\phi_2\|, \dots, \|\phi_n\|, \dots\}.$$

由于 $k(x, y, u)$ 在 $D \times [-L, L]$ 上一致连续, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在只依赖于 ε 的正数 $\delta > 0$, 使得对任意 $u_1, u_2 \in [-L, L]$ 且 $|u_1 - u_2| < \delta$, 有

$$|k(x, y, u_1) - k(x, y, u_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

由于 $\|\phi_n - \phi_0\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 则存在正整数 N , 使得对任意 $n > N$ 有

$$\begin{aligned} & |(K\phi_n)(x) - (K\phi_0)(x)| \\ &= \left| \int_a^b [k(x, y, \phi_n(y)) - k(x, y, \phi_0(y))] dy \right| \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dy = \varepsilon, \end{aligned}$$

从而

$$\|K\phi_n - K\phi_0\| = \max_{x \in [a, b]} |(K\phi_n)(x) - (K\phi_0)(x)| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K\phi_n - K\phi_0\| = 0,$$

$K : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ 是连续算子.

综上, $K : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ 是全连续算子.

□

 **作业题 8.3** 设 X 是一个 Banach 代数, 则对任意 $x \in X$, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

存在, 并且等于 $\inf_{n \geq 1} \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

证明 令 $r = \inf_{n \geq 1} \sqrt[n]{\|x^n\|}$, 根据下极限的定义, 显然

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \geq r.$$

下证

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq r.$$

根据下确界的定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 m 使得

$$r \leq \sqrt[m]{\|x^m\|} < r + \varepsilon. \quad (8.1)$$

另一方面, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 存在非负整数 $k_n, l_n \in \mathbb{N}$, 使得 $0 \leq l_n < m$ 并且

$$n = k_n m + l_n.$$

由于

$$\|x^k\| \leq \|x\|^k, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

则利用赋范代数的定义和(8.1)式, 就有

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\|x^n\|} &= \sqrt[n]{\|x^{l_n} x^{k_n m}\|} \leq \sqrt[n]{\|x\|^{l_n} \cdot \|x^m\|^{k_n}} \\ &= \|x\|^{\frac{l_n}{n}} \cdot \|x^m\|^{\frac{k_n}{n}} < \|x\|^{\frac{l_n}{n}} \cdot (r + \varepsilon)^{\frac{mk_n}{n}}. \end{aligned}$$

由于

$$0 \leq \frac{l_n}{n} < \frac{m}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad 1 \geq \frac{mk_n}{n} = \frac{n - l_n}{n} = 1 - \frac{l_n}{n} > 1 - \frac{m}{n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{mk_n}{n} = 1,$$

从而

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\|x\|^{\frac{l_n}{n}} \cdot (r + \varepsilon)^{\frac{mk_n}{n}} \right) = \|x\|^0 \cdot (r + \varepsilon)^1 = r + \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq r.$$

综上, 极限


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

存在, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \inf_{n \geq 1} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

□

第 9 周

 **作业题 9.1** (连续线性算子的保范延拓) 设 X 是赋范线性空间, Y 是 Banach 空间, D 是 X 的线性子空间, 算子

$$T : D \rightarrow Y$$

是连续线性算子. 证明 T 能唯一地延拓到 \overline{D} 上成为连续线性算子

$$T_1 : \overline{D} \rightarrow Y,$$

使得 $\|T_1\| = \|T\|$ 并且

$$T_1 x = T x, \quad \forall x \in D.$$

证明 Step1. 任取 $x \in \overline{D}$, 总存在点列 $\{x_n\} \subset D$, 使得

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

由于 $T : D \rightarrow Y$ 是连续线性算子, 从而也是有界线性算子, 存在常数 $C > 0$ 使得

$$\|Tx\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in D. \quad (9.1)$$

于是对任意 $m, n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\|Tx_m - Tx_n\| \leq C\|x_m - x_n\|. \quad (9.2)$$

由于 $\{x_n\}$ 在 X 中收敛, 根据(9.2)式可知 $\{Tx_n\}$ 就是 Y 中的 Cauchy 点列. 又因为 Y 是 Banach 空间, 所以 $\{Tx_n\}$ 在空间 Y 中收敛, 设

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n,$$

下证 y 与点列 $\{x_n\}$ 的选取无关. 若存在点列 $\{z_n\} \subset D$ 使得

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n,$$

按上述过程同样可证 $\{Tz_n\}$ 是 Y 中的收敛点列, 从而存在 $z \in Y$, 使得

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} Tz_n.$$

由于

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_n\| = 0.$$

根据 T 的线性、有界性以及范数的连续性, 就有

$$\|y - z\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n - \lim_{n \rightarrow \infty} Tz_n \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n - z_n)\| \leq \|T\| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_n\|,$$

因此 $z = y$.

这样就得到了 X 的闭子空间 \overline{D} 到 Y 的算子 $T_1 : \overline{D} \rightarrow Y$, 使得

$$T_1 x = y = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n, \quad (9.3)$$

其中 $\{x_n\}$ 是 D 中收敛于 x 的任意点列. 当 $x \in D$ 时, 令 $x_n \equiv x, n \in \mathbb{N}_+$, 于是

$$T_1 x = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx.$$

Step2. 下证 $T_1 : \overline{D} \rightarrow Y$ 是连续线性算子.

对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, 任意 $x, z \in \overline{D}$, 存在 $\{x_n\}, \{z_n\} \subset D$ 使得

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

于是

$$\alpha x_n + \beta z_n \in D, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

$$\alpha x + \beta z = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta z_n),$$

从而根据 T 的线性和连续性就有

$$T_1(\alpha x + \beta z)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} T(\alpha x_n + \beta z_n) \\
&= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T x_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} T z_n \\
&= \alpha T_1 x + \beta T_1 z,
\end{aligned}$$

所以 T_1 是线性算子. 再根据范数的连续性就有

$$\|T_1 x\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T x_n \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T x_n\| \leq \|T\| \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|T\| \|x\|,$$

所以 T_1 是有界线性算子, 并且 $\|T_1\| \leq \|T\|$.

Step3. 由 Step2 已证 $\|T_1\| \leq \|T\|$. 另一方面,

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in D \\ x \neq 0}} \frac{\|T_1 x\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x \in \overline{D} \\ x \neq 0}} \frac{\|T_1 x\|}{\|x\|} = \|T_1\|.$$

因此 $\|T\| = \|T_1\|$.

Step4. 设连续线性算子 $\tilde{T} : \overline{D} \rightarrow Y$ 也满足 $\tilde{T}x = Tx$ ($x \in D$) 并且 $\|T\| = \|\tilde{T}\|$. 对任意 $x \in \overline{D}$, 存在点列 $\{x_n\} \subset D$ 使得 $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$), 利用范数的连续性可知

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|T_1 x - \tilde{T}x\| \\
&= \left\| \left(\lim_{n \rightarrow \infty} T_1 x_n \right) - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}x_n \right) \right\| \\
&= \left\| \left(\lim_{n \rightarrow \infty} T x_n \right) - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} T x_n \right) \right\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \|T x_n - T x_n\| = 0,
\end{aligned}$$

从而 $T_1 x = \tilde{T}x$. 由 $x \in \overline{D}$ 的任意性可知 $T = \tilde{T}$.


综上, T 能唯一地延拓到 \overline{D} 上成为连续线性算子

$$T_1 : \overline{D} \rightarrow Y,$$

使得 $\|T_1\| = \|T\|$ 并且

$$T_1 x = T x, \quad \forall x \in D.$$

□

 **作业题 9.2** 设 $k \in C[a, b]$. 定义 $C[a, b]$ 上的线性泛函

$$f(x) = \int_a^b k(t)x(t)dt, \quad \forall x \in C[a, b].$$

证明 f 是 $C[a, b]$ 上的有界线性泛函, 并求出泛函 f 的范数 $\|f\|$.

证明 Step1. 显然, f 是 $C[a, b]$ 上的线性泛函. 对任意 $x \in C[a, b]$, 有

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \left| \int_a^b k(t)x(t)dt \right| \\
&\leq \int_a^b |k(t)||x(t)|dt \\
&\leq \int_a^b |k(t)| \max_{t \in [a, b]} |x(t)| dt \\
&= \left(\int_a^b |k(t)| dt \right) \|x\|,
\end{aligned}$$

所以 f 是 $C[a, b]$ 上的有界线性泛函, 并且

$$\|f\| \leq \int_a^b |k(t)| dt.$$

Step2. 令 $x(t) = \text{sign}k(t)$, $t \in [a, b]$, 则

$$|k(t)| = k(t)x(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

由于 $k \in C[a, b]$, 则 x 是 $[a, b]$ 上的可测函数, 并且 $\sup_{t \in [a, b]} |x(t)| \leq 1$.

由 Lusin 定理, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 存在闭集 $F_n \subset [a, b]$ 以及 $x_n \in C[a, b]$ 使得

- (i) $m([a, b] \setminus F_n) \leq \frac{1}{n}$;
- (ii) $x_n(t) = x(t)$, $\forall t \in F_n$;
- (iii) $\|x_n\| = \max_{t \in [a, b]} |x_n(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |x(t)| \leq 1$.

于是

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b k(t)x_n(t) dt - \int_a^b k(t)x(t) dt \right| \\ & \leq \int_a^b |k(t)| \cdot |x_n(t) - x(t)| dt \\ & = \left(\int_{F_n} + \int_{[a, b] \setminus F_n} \right) |k(t)| \cdot |x_n(t) - x(t)| dt \\ & = \int_{[a, b] \setminus F_n} |k(t)| \cdot |x_n(t) - x(t)| dt \\ & \leq \int_{[a, b] \setminus F_n} \max_{t \in [a, b]} |k(t)| \cdot (\max_{t \in [a, b]} |x_n(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|) dt \\ & \leq \frac{1}{n} \cdot 2K, \end{aligned}$$

其中 $K = \max_{t \in [a, b]} |k(t)|$, 从而

$$\begin{aligned} \int_a^b |k(t)| dt &= \left| \int_a^b |k(t)| dt \right| = \left| \int_a^b k(t)x(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_a^b k(t)x_n(t) dt \right| + \frac{2K}{n} = |f(x_n)| + \frac{2K}{n} \\ &\leq \|f\| \|x_n\| + \frac{2K}{n} \leq \|f\| + \frac{2K}{n}, \end{aligned}$$

由 $n \in \mathbb{N}_+$ 的任意性可得

$$\int_a^b |k(t)| dt \leq \|f\|.$$

综上,


$$\|f\| = \int_a^b |k(t)| dt.$$

□

定义 9.1. Schauder 基

设 X 是一个赋范线性空间, $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}_+\}$ 是 X 中的可数向量列. 如果对任意 $x \in X$, 存在唯一的一列数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots \in \mathbb{F}$, 使得

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k,$$

则称 $\{e_k\}$ 是 X 的一组 Schauder 基. 如果还有 $\|e_k\| = 1$ ($\forall k \in \mathbb{N}_+$), 则称 $\{e_k\}$ 是 X 的一组标准 Schauder 基. 

设 $1 \leq p < \infty$. 对任意 $k \in \mathbb{N}_+$, 取

$$e_k = (0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, \dots) \in l^p,$$

证明 $\{e_k\}$ 是 l^p 的一组标准 Schauder 基.



注意 原题中 $1 \leq p \leq \infty$ 是错误的.

证明 Step1. 显然

$$\|e_k\|_p = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}_+.$$

对任意

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in l^p$$

以及任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 令

$$x_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots),$$

则 $x_n \in l^p$, 并且

$$\|x - x_n\|_p^p = \|(0, \dots, 0, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots)\|_p^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k|^p.$$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p < +\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\|_p^p = 0$, 从而

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

Step2. 设存在数列 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots \in \mathbb{F}$, 使得

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e_k.$$

令 $\tilde{x}_n = \sum_{k=1}^n \beta_k e_k = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots)$, 则 $\tilde{x}_n \in l^p$ 并且 $\tilde{x}_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$), 于是存在 $M > 0$, 使得

$$\sum_{k=1}^n |\beta_k|^p \leq \|\tilde{x}_n\|_p^p \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

从而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^p$ 收敛, 即

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots) \in l^p.$$

令 $\gamma_k = \alpha_k - \beta_k$ ($k \in \mathbb{N}_+$), $z = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots)$, 则 $z \in l^p$. 另一方面, 按照 Step1 的过程可证

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k,$$

从而


$$(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \beta_k) e_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \tilde{x}_n) = 0,$$

于是

$$\alpha_k = \beta_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_+.$$

□

第 10 周

 **作业题 10.1** 设 X 是一个内积空间, M 是 X 中的闭凸子集, $x \in X$. 证明: $y_0 \in M$ 是 x 在 M 中的最佳逼近元, 即

$$\|x - y_0\| = d(x, M),$$

当且仅当

$$\operatorname{Re} \langle x - y_0, y_0 - y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in M.$$

证明 (充分性) 设 $y_0 \in M$ 满足

$$\operatorname{Re} \langle x - y_0, y_0 - y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in M,$$

则对任意 $y \in M$, 有

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|(x - y_0) - (y - y_0)\|^2 \\ &= \|x - y_0\|^2 + \|y - y_0\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle x - y_0, y - y_0 \rangle \\ &\geq \|x - y_0\|^2, \end{aligned}$$

所以

$$\|x - y_0\| = \inf_{y \in M} \|x - y\| = d(x, M).$$

(必要性) 设 $y_0 \in M$ 是向量 x 在 M 中的最佳逼近元, 则对任意 $y \in M$, 任意 $t \in [0, 1]$, 就有

$$\bar{y} = (1 - t)y_0 + ty \in M,$$

并且

$$\begin{aligned} \|x - y_0\| &\leq \|x - \bar{y}\| \\ &= \|x - [(1 - t)y_0 + ty]\| \\ &= \|(x - y_0) - t(y - y_0)\|, \end{aligned}$$

从而

$$\|x - y_0\|^2 \leq \|(x - y_0) - t(y - y_0)\|^2.$$

按照内积空间中范数的定义将上式展开可得

$$t^2 \|x - y_0\|^2 \geq 2t \operatorname{Re} \langle x - y_0, y - y_0 \rangle, \quad \forall t \in [0, 1],$$

从而

$$t \|x - y_0\|^2 \geq 2 \operatorname{Re} \langle x - y_0, y - y_0 \rangle, \quad \forall t \in (0, 1].$$


上式中令 $t \rightarrow 0$ 可得

$$\operatorname{Re}\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0, \quad \forall y \in M,$$

即

$$\operatorname{Re}\langle x - y_0, y_0 - y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in M.$$

□

 **作业题 10.2** 设 X 是一个内积空间, $x_0 \in X$, 实数 $r > 0$. 令

$$M = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq r\}.$$

证明:

(1) M 是 X 中的闭凸子集;

(2) 对任意 $x \in X$, 令

$$y = \begin{cases} x_0 + r \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}, & x \notin M, \\ x, & x \in M. \end{cases}$$

则 y 是 x 在 M 中的最佳逼近元.

证明 (1) 根据范数的连续性可知, 映射

$$x \mapsto \|x - x_0\|$$

是 X 上的连续映射, 所以

$$M = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$

是 X 中的闭集. 对任意 $x, y \in M$, 任意 $t \in [0, 1]$, 都有

$$\begin{aligned} \|tx + (1-t)y\| &\leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \\ &\leq tr + (1-t)r = r, \end{aligned}$$

所以 M 是 X 中的凸集.

综上, M 是 X 中的闭凸集.

(2) 当 $x \in M$ 时, 显然 $y = x$ 是 x 在 M 中的最佳逼近元.

下设 $x \notin M$, 则

$$\|x - x_0\| > r.$$

此时令

$$y = x_0 + r \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}.$$

对任意 $\bar{y} \in M$, 就有

$$\begin{aligned} &\langle x - y, y - \bar{y} \rangle \\ &= \left\langle x - x_0 - r \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}, x_0 + r \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} - \bar{y} \right\rangle \\ &= \left\langle \left(1 - \frac{r}{\|x - x_0\|}\right)(x - x_0), (x_0 - \bar{y}) + \frac{r}{\|x - x_0\|}(x - x_0) \right\rangle \\ &= \left(1 - \frac{r}{\|x - x_0\|}\right) \left\langle x - x_0, (x_0 - \bar{y}) + \frac{r}{\|x - x_0\|}(x - x_0) \right\rangle \\ &= \left(1 - \frac{r}{\|x - x_0\|}\right) [\langle x - x_0, x_0 - \bar{y} \rangle + r\|x - x_0\|]. \end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式可得

$$|\operatorname{Re} \langle x - x_0, x_0 - \bar{y} \rangle| \leq \|x - x_0\| \|x_0 - \bar{y}\| \leq r\|x - x_0\|,$$

从而

$$\operatorname{Re} \langle x - x_0, x_0 - \bar{y} \rangle + r \|x - x_0\| \geq -(r \|x - x_0\|) + r \|x - x_0\| = 0.$$

综上,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \langle x - y, y - \bar{y} \rangle \\ &= \left(1 - \frac{r}{\|x - x_0\|} \right) [\operatorname{Re} \langle x - x_0, x_0 - \bar{y} \rangle + r \|x - x_0\|] \geq 0, \end{aligned}$$

所以 y 也是 x 在 M 中的最佳逼近元.

□

第 11 周

 **作业题 11.1** 证明:

定理 11.1. Riesz-Fischer 定理

设 $\{e_i\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的规范正交系, 则对任意 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2$, 存在 $f \in L^2(\Omega)$, 使得 $\|f\|_2 = \|x\|_2$ 并且

$$\langle f, e_i \rangle = \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots$$



证明 对任意 $k \in \mathbb{N}_+$, 令

$$S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i e_i \in L^2(\Omega).$$

对任意 $p \in \mathbb{N}_+$, 由于 $\{e_i\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的规范正交系, 则有

$$\|S_{k+p} - S_k\|_2^2 = \left\| \sum_{i=k+1}^{k+p} \xi_i e_i \right\|_2^2 = \sum_{i=k+1}^{k+p} |\xi_i|^2.$$

由于 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2$, 根据上式可知 $\{S_k\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的 Cauchy 点列. 由于 $L^2(\Omega)$ 是 Banach 空间, 则存在 $f \in L^2(\Omega)$ 使得

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \xi_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i.$$

对任意 $j \in \mathbb{N}_+$, 根据内积对第一变元的连续性和线性, 就有

$$\langle f, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i, e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \langle e_i, e_j \rangle = \xi_j.$$

对任意 $k \in \mathbb{N}_+$, 由于

$$\left\| \sum_{i=1}^k \xi_i e_i \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^k |\xi_i|^2,$$

根据范数的连续性以及 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2$ 就有

$$\|f\|_2^2 = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \right\|_2^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^k \xi_i e_i \right\|_2^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |\xi_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 = \|x\|_2^2,$$

从而 $\|f\|_2 = \|x\|_2$.

□