§ 9.2 Newton-Leibniz公式（N-L公式）

定理1. 若 f 在 $[a,b]$ 上连续，F 是 f 在 $[a,b]$ 上的原函数，即

$$F'(x) = f(x),\quad \forall x \in [a,b],$$

则 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，并且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

分析：$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx \approx \underline{\sum_{i=1}^n F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}$.　①

F 在 $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ 上连续，在 (x_{i-1}, x_i) 上可导，

Lagrange中值定理 $\Rightarrow \exists \eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$, s.t.

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\eta_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\underline{\sum_{i=1}^n F'(\eta_i)(x_i - x_{i-1})} = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

$$= [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \cdots + [F(x_n) - F(x_{n-1})]$$

$$= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$$　②

$=f$

F' 在 (x_{i-1}, x_i) 上连续，当 ξ_i 与 η_i 足够近时（$\|T\|$足够小），

$$\boxed{F'(\xi_i) \approx F'(\eta_i)}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx F(b) - F(a)$$

证明：Step1. 由于 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续，

对 $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,}$ s.t.

$$\forall \xi, \eta \in [a,b] : |\xi - \eta| < \delta,$$

有 $\quad |f(\xi) - f(\eta)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

对 $[a,b]$ 的任意一个满足 $\|T\|<\delta$ 的分割

$T=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$,

对 $\forall \xi_i, \tilde{\xi}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 有 $|\xi_i-\tilde{\xi}_i| \le \Delta x_i \le \|T\| < \delta$,

从而 $|f(\xi_i)-f(\tilde{\xi}_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Step2. 对 $[a,b]$ 的任意一个满足 $\boxed{\|T\|<\delta}$ 的分割

$T=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$,

有 $F(b)-F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i)-F(x_{i-1})]$

由于 F 在 $[a,b]$ 上连续且可导, 则由 Lagrange 中值定理,

$\exists\, \eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i=1,2,\cdots,n$.

s.t. $F(x_i)-F(x_{i-1}) = F'(\eta_i)(x_i-x_{i-1}) = f(\eta_i)\Delta x_i$

从而 $F(b)-F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i$.

Step3. $\boxed{\text{任取 } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],}$ 则 $|\xi_i-\eta_i| \le \Delta x_i \le \|T\| < \delta$,

结合 Step1 和 Step2 的结论, 就有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - [F(b)-F(a)] \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i)-f(\eta_i)]\Delta x_i \right| \quad \text{Step2.}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)-f(\eta_i)| \cdot \Delta x_i$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \Delta x_i \quad \text{Step1.}$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

根据 Riemann 可积的定义, f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 并且

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

推论1. 若 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, F 在 $[a,b]$ 上连续,

并且除了有限多个点之外, 都有 $F'(x)=f(x)$. (F 不一定是 f 在 [a,b] 上的原函数)

则 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

证: 假设除了 $\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m\}$ 之外, $F'(x)=f(x)$.

Step1. 由于 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$.

s.t. 对任何满足

$$\|T\|<\delta \quad 且 \quad T\supset\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m\}$$

的分割 $T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$. 以及对 $\forall \xi_i\in\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$, 都有

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right|<\varepsilon. \qquad (1)$$

Step2. 由于 F 在 $[a,b]$ 上连续, 且

$$F'(x)=f(x), \quad x\in[a,b]-\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m\}$$

则对 Step1 中的分割 T, F 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上连续, 在 (x_{i-1},x_i) 上可导,

$i=1,2,\cdots,n$. 由 Lagrange 中值定理, $\exists \eta_i\in(x_{i-1},x_i)$. s.t.

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})=f(\eta_i)\Delta x_i,$$

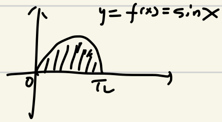
从而 $F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^n[F(x_i)-F(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^n f(\eta_i)\Delta x_i$

另一方面 由于 $\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$, 则由 (1) 式可知,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-[F(b)-F(a)]\right|$$
$$=\left|\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{i=1}^n f(\eta_i)\Delta x_i\right| \overset{(1)}{<} \varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性, $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

例1.



$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=(-\cos\pi)-(-\cos 0)=2.$$

例2. (利用 Riemann 积分与 Riemann和的关系来将求数列极限问题转化为求定积分的问题)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$ （方法1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma$）

解: $S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$[0,1]$ n等分, $\xi_i=\frac{i}{n}$. $\frac{1}{1+\xi_i}\to\frac{1}{1+x}$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$

$$=\ln|x+1|\Big|_0^1$$

$$=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$$

Ex2. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(1+2^3+\cdots+n^3)$

$$S_n=\frac{1}{n^4}(1+2^3+\cdots+n^3)=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n^3}+\frac{2^3}{n^3}+\cdots+\frac{n^3}{n^3}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1x^3dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right]$

$$S_n=n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right]=n\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\left[\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\underbrace{\tfrac{i}{n}}_{\xi_i})^2}\cdot\frac{1}{n}.$$

于是，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx$

$$= \left(-\frac{1}{1+x}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{2n^2}\right)$

$$S_n = n\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2}\right)$$

$$= n \cdot \frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2} + \cdots + \frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} \cdot \frac{1}{n}$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

$$= \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n-1}{n}\pi + \sin\frac{n\pi}{n}\right) - \frac{1}{n} \cdot \sin\frac{n\pi}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sin\frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \sin\frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \sin\frac{\pi x}{n} dx$

$$= \left(-\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{n}x\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{\pi}$$