习题 9.4

Ex1. 若 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

其中 ξ_i, η_i 是 T 中所属小区间 Δ_i 中的任意两点，$i=1,2,\cdots,n$.

$$\left(\begin{array}{l}\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ s.t.\ \forall T: \|T\|<\delta,\ \forall \xi_i, \eta_i \in \Delta_i, \text{有} \\ \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)g(x)dx\right| < \varepsilon\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l}fg \text{ 在 } [a,b] \text{ 上可积} \Longleftrightarrow \text{对} \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ s.t.\ \forall T: \|T\|<\delta,\ \forall \xi_i \in \Delta_i, \text{有} \\ \left|\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i} - \int_a^b f(x)g(x)dx\right| < \varepsilon\end{array}\right)$$

证：对于 $[a,b]$ 的任一分割 $T=\{\Delta_i\}$，以及 $\forall \xi_i, \eta_i \in \Delta_i$，$i=1,2,\cdots,n$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)g(x)dx\right| \quad (<\varepsilon)$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)g(x)dx\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|f(\xi_i)|}_{<M} \cdot \underbrace{|g(\eta_i)-g(\xi_i)|}_{\leq \omega_i^g} \cdot \Delta x_i^{\ <\frac{1}{2}\varepsilon} + \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)g(x)dx\right|^{<\frac{1}{2}\varepsilon}. \quad (1)$$

$$< M \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \omega_i^g \Delta x_i}_{<\frac{1}{2M}\varepsilon}$$

由于 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积，则 fg 在 $[a,b]$ 上可积，对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta_1>0$，s.t. 满足 $\|T\|<\delta_1$ 的任一分割 $T=\{\Delta_i\}$，以及 $\forall \xi_i \in \Delta_i$，$i=1,2,\cdots,n$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)g(x)dx\right| < \frac{1}{2}\varepsilon. \qquad (2)$$

另一方面，由于 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\exists M>0$，s.t.

$$|f(x)| < M,\ \forall x \in [a,b].$$

并且 对上述 $\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0\ (<\delta_1)$，s.t. 对任一满足 $\|T\|<\delta$ 的分割 T，

有 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i^{g}\Delta x_i = \sum_{T}\omega_i^{g}\Delta x_i < \frac{1}{2M}\varepsilon$，

从而，对 $\forall\,\xi_i,\eta_i\in\Delta_i$，$i=1,2,\cdots,n$，有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)|\cdot|g(\eta_i)-g(\xi_i)|\,\Delta x_i < M\cdot\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{g}\Delta x_i < M\cdot\frac{1}{2M}\varepsilon=\frac{1}{2}\varepsilon \quad (3).$$

综合 (1)—(3) 式，对 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，s.t. 对任一满足 $\|T\|<\delta$ 的分割 T，

以及 $\forall\,\xi_i,\eta_i\in\Delta_i$，$i=1,2,\cdots,n$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

命题：若 f 和 g 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)\geq g(x)$，$\forall\,x\in[a,b]$，并且

$\exists\,x_0\in[a,b]$，s.t. $f(x_0)>g(x_0)$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx>\int_a^b g(x)\,dx.$$

Ex2. Ex3.

Ex4. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 f 不恒为 0，则

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx>0$$

证：由于 f 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)\not\equiv0$，则

f^2 在 $[a,b]$ 上连续，$f^2(x)\geq0$，$\forall\,x\in[a,b]$，并且 $\exists\,x_0\in[a,b]$，

s.t. $f^2(x_0)>0$，所以

$$\int_a^b f^2(x)\,dx>\int_a^b 0\,dx=0.$$

Ex5. 设 f 与 g 在 $[a,b]$ 上可积，令

$$M(x)=\max\{f(x),g(x)\},\quad m(x)=\min\{f(x),g(x)\},\quad x\in[a,b].$$

则 $M(x)$ 和 $m(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

证：$M(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\left(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\right)$，　(Ch1. 总练习题 Ex1)

$m(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\left(f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\right)$，

由于 f,g 都在 $[a,b]$ 上可积，则 $f+g$，$f-g$ 也在 $[a,b]$ 上可积，从而

$|f(x)-g(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积。综上，M,m 在 $[a,b]$ 上可积。

Ex6. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$，$0\le\theta\le2\pi$ 上各点极径的平均值

解：$\bar{r}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}a(1+\cos\theta)dx=\frac{a}{2\pi}(\theta+\sin\theta)\Big|_0^{2\pi}=a.$

Ex7. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积，且在 $[a,b]$ 上满足 $|f(x)|\ge m>0$，则 $\frac{1}{f}$ 在 $[a,b]$ 上可积。

证：由于 f 在 $[a,b]$ 上可积，则对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $[a,b]$ 的分割 $T=\{\Delta_i\}$，s.t.

$$\sum_T\omega_i^f\Delta x_i<m^2\varepsilon,\quad(1)$$

对于 T 中的任何一个小区间 Δ_i，

$$\omega_i^{\frac{1}{f}}=\sup_{x,x'\in\Delta_i}\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x')}\right|=\sup_{x,x'\in\Delta_i}\frac{|f(x)-f(x')|}{|f(x)|\cdot|f(x')|}$$

$$\le\sup_{x,x'\in\Delta_i}\frac{|f(x)-f(x')|}{m^2}=\frac{1}{m^2}\sup_{x,x'\in\Delta_i}|f(x)-f(x')|=\frac{1}{m^2}\omega_i^f$$

从而　$$\sum_T\omega_i^{\frac{1}{f}}\Delta x_i\le\frac{1}{m^2}\sum_T\omega_i^f\Delta x_i\overset{(1)}{<}\frac{1}{m^2}\cdot m^2\varepsilon=\varepsilon.$$

所以，$\frac{1}{f}$ 在 $[a,b]$ 上可积。

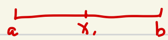
Ex 10. 若 f 在 $[a,b]$ 上连续，并且 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x f(x)dx = 0$，则 f 在 (a,b) 上至少存在两个零点 x_1、x_2.

若还有 $\int_a^b x^2 f(x)dx = 0$，f 是否在 (a,b) 上存在至少 3 个零点？

证：(1) 由于 f 在 $[a,b]$ 上连续，并且 $\int_a^b f(x)dx = 0$，则由积分第一中值定理，

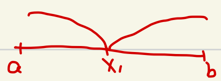
$\exists x_1 \in (a,b)$，s.t. $f(x_1) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = 0$.

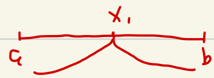
反证法，假设 f 在 (a,b) 上只有一个零点 x_1.



由 f 在 $[a,b]$ 上的连续性，f 在 (a,x_1) 或 (x_1,b) 中不变号.

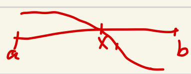
① 当 $f(x)>0$，$\forall x\in(a,b)-\{x_1\}$；或 $f(x)<0$，$\forall x\in(a,b)-\{x_1\}$



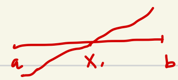


由 f 在 $[a,b]$ 上的连续性，就有 $\int_a^b f(x)dx > 0$ 或 $\int_a^b f(x)dx < 0$，这与 $\int_a^b f(x)dx = 0$ 矛盾.

② 当 $f(x)>0$，$\forall x\in(a,x_1)$，$f(x)<0$，$\forall x\in(x_1,b)$；



或当 $f(x)<0$，$\forall x\in(a,x_1)$，$f(x)>0$，$\forall x\in(x_1,b)$



令 $g(x) = (x-x_1)f(x)$，则 g 在 $[a,b]$ 上连续，并且

$g(x)<0$，$\forall x\in(a,b)-\{x_1\}$；或 $g(x)>0$，$\forall x\in(a,b)-\{x_1\}$，

从而 $\int_a^b g(x)dx < 0$ 或 $\int_a^b g(x)dx > 0$，

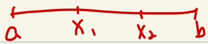
另一方面，$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b (x-x_1)f(x)dx = \int_a^b x f(x)dx - x_1\int_a^b f(x)dx = 0$. 矛盾.

综上，f 在 (a,b) 上至少存在两个零点.

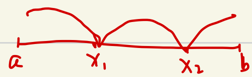
(2) 由于 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xf(x)dx=0$，已证 f在 (a,b) 上至少有两个零点 x_1, x_2.

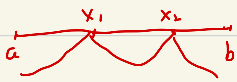
不妨设 $x_1<x_2$.

假设 f在 (a,b) 上只有两个零点 x_1 和 x_2.



① 当 $f(x)>0, \forall x\in(a,b)-\{x_1,x_2\}$；或 $f(x)<0, \forall x\in(a,b)-\{x_1,x_2\}$

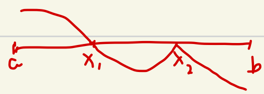




由f的连续性，有 $\int_a^b f(x)dx>0$ 或 $\int_a^b f(x)dx<0$. 这与条件 $\int_a^b f(x)dx=0$ 矛盾.

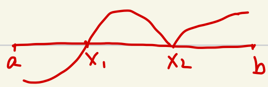
② 当 $f(x)>0, \forall x\in(a,x_1)$,

$f(x)<0, \forall x\in(x_1,x_2)\cup(x_2,b)$;



或当 $f(x)<0, \forall x\in(a,x_1)$,

$f(x)>0, \forall x\in(x_1,x_2)\cup(x_2,b)$.



令 $g_1(x)=(x-x_1)f(x)$，则 g_1 在 $[a,b]$ 上连续且

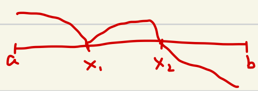
$g_1(x)<0, \forall x\in(a,b)-\{x_1,x_2\}$；或 $g_1(x)>0, \forall x\in(a,b)-\{x_1,x_2\}$.

从而 $\int_a^b g_1(x)dx<0$ 或 $\int_a^b g_1(x)dx>0$.

但另一方面，$\int_a^b g_1(x)dx=\int_a^b (x-x_1)f(x)dx=\underbrace{\int_a^b xf(x)dx}_{=0}-x_1\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{=0}=0$，矛盾.

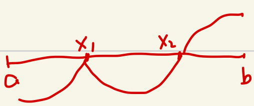
③ 当 $f(x)>0, \forall x\in(a,x_1)\cup(x_1,x_2)$,

$f(x)<0, \forall x\in(x_2,b)$;



或当 $f(x)<0, \forall x\in(a,x_1)\cup(x_1,x_2)$,

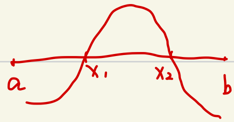
$f(x)>0, \forall x\in(x_2,b)$,



同理，可证得矛盾.

④ 当 $f(x)>0,\ \forall x\in(a,x_1)\cup(x_2,b)$，
$f(x)<0,\ \forall x\in(x_1,x_2)$；

或 当 $f(x)<0,\ \forall x\in(a,x_1)\cup(x_2,b)$，
$f(x)>0,\ \forall x\in(x_1,x_2)$.



令 $g(x)=(x-x_1)(x-x_2)f(x)$，则 g 在 $[a,b]$ 上连续，并且
$g(x)>0,\ \forall x\in(a,b)-\{x_1,x_2\}$；或 $g(x)<0,\ \forall x\in(a,b)-\{x_1,x_2\}$.

从而 $\int_a^b g(x)dx>0$ 或 $\int_a^b g(x)dx<0$.

但另一方面，$\int_a^b g(x)dx=\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)f(x)dx$

$$=\underbrace{\int_a^b x^2 f(x)dx}_{=0}-(x_1+x_2)\underbrace{\int_a^b xf(x)dx}_{=0}+x_1x_2\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{=0}$$

$=0$，矛盾.

所以，假设不成立. f 在 (a,b) 内至少有3个零点.

定理（积分形式的Jensen不等式）

设 φ 在 $[a,b]$ 上可积，$\varphi([a,b])\subset[m,M]$，$f$ 是 $[m,M]$ 上的连续的凸函数，并且 $f\circ\varphi$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(x)dx\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varphi(x))dx$$

证：由于 f 是 $[m,M]$ 上的凸函数，则对

$\forall \lambda_i > 0,\ i=1,2,\cdots,n,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$

$\forall t_i \in [m,M],\ i=1,2,\cdots,n.$

由有限和形式的 Jensen 不等式（§6.5 例5），有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t_i\right) \le \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(t_i) \qquad (1)$$

由于 φ 在 $[a,b]$ 上可积，则对 $\forall n\in \mathbb{N}_+$，将 $[a,b]$ 作 n 等分

$$T_n = \left\{a,\ a+\frac{b-a}{n},\ \cdots,\ a+\frac{b-a}{n}i,\ \cdots,\ b\right\},$$

并令 $\xi_i = a+\frac{b-a}{n}i,\ i=1,2,\cdots,n$，就有

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\frac{b-a}{n}.$$

另一方面，在 (1) 式中令 $t_i=\varphi(\xi_i)$，$\lambda_i \equiv \frac{1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$. 就有

$$f\left(\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\cdot\frac{b-a}{n}\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\cdot\frac{1}{n}\right)$$

$$\overset{(1)}{\le} \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(\varphi(\xi_i)) = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(f\circ\varphi)(\xi_i)\cdot\frac{b-a}{n} \qquad (2)$$

由于 f 在 $[m,M]$ 上连续且 $f\circ\varphi$ 在 $[a,b]$ 上可积，则在 (2) 两端令 $n\to\infty$，

可得

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(x)dx\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b(f\circ\varphi)(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varphi(x))dx.$$

推广了第九章总练习题第1题：

若 φ 在 $[0,a]$ 上连续，f 二阶可导，且 $f''(x)\ge 0$，则有

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))dt \ge f\left(\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(t)dt\right)$$

特例：$\varphi(x)=x,\ x\in[a,b]$，则 $f(\varphi(x))=f(x),\ x\in[a,b]$. 若 f 在 $[a,b]$ 上连续

并且是凸函数，则由积分形式的Jensen不等式，就有

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

即 $$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

可减弱为 f 在 $[a,b]$ 上连续、凸.

Ex11 (1) 若 f $\boxed{\text{在 } [a,b] \text{ 上二阶可导，且 } f''(x) \geq 0}$，则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

问题：(1) 定理中 $f\circ\varphi$ 的可积性假设是否可以去掉？

φ 可积，f 连续，是否足够保证 $f\circ\varphi$ 可积？

(2) f 的连续性假设是否减弱为可积？

Ex11 (2) 改：设 f 在 $[a,b]$ 上可导并且是凸函数，并且 $f(x)\le 0$，$\forall x\in[a,b]$.

则 $$f(x) \geq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,\quad \forall x\in[a,b].$$

证：f 在 $[a,b]$ 上可导，则以下三个论断等价：

(1) f 在 $[a,b]$ 上凸；

(2) $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上增；

(3) 对 $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$，有 $f(x_2) \geq f'(x_1)(x_2-x_1)+f(x_1)$

由于 f 在 $[a,b]$ 上可导，则 f 在 $[a,b]$ 上连续，由连续函数的最值性定理，

$\exists x_0\in[a,b]$, s.t. $f(x_0)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

于是 $f(x_0) - \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x_0)\,dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b 2f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left[f(x_0) - 2f(x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left[(f(x_0)-f(x)) - f(x) \right] dx$$

$$\geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \left[f'(x)(x_0-x) - f(x) \right] dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left[f(x)(x_0-x) \right]' dx$$

$$= \frac{1}{b-a} f(x)(x_0-x) \Big|_a^b$$

$$= \frac{f(b)(x_0-b) - f(a)(x_0-a)}{b-a}.$$

由于 $x_0 \in [a,b]$，并且 $f(x) \leq 0$，$\forall x \in [a,b]$，则

$$\underbrace{f(b)}_{\leq 0}\underbrace{(x_0-b)}_{\leq 0} - \underbrace{f(a)}_{\leq 0}\underbrace{(x_0-a)}_{\geqslant 0} \geqslant 0,$$

从而 对 $\forall x \in [a,b]$，有

$$f(x) \geqslant \min_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_0) \geqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ex12. (1) $\ln(1+n) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n.$

证：对 $\forall k \in \mathbb{N}_+$ 且 $k \geqslant 2$，

$$\ln k = [\ln k - \ln(k-1)] + [\ln(k-1) - \ln(k-2)] + \cdots + (\ln 2 - \ln 1) + \ln 1.$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} [\ln(i+1) - \ln i]$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \int_i^{i+1} \frac{1}{x}\,dx.$$

由于 $\frac{1}{i+1} = \int_i^{i+1} \frac{1}{i+1}\,dx < \int_i^{i+1} \frac{1}{x}\,dx < \int_i^{i+1} \frac{1}{i}\,dx = \frac{1}{i}$，则

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i+1} < \ln k < \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k-1},$$

所以 $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$

解：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1.$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\ln n}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln n}+1\right) = 1.$