§9.3. 习题

Ex1. 若 T' 是分割 T 增加若干分点后所得的分割，则

$$\sum_{T'} \omega_i' \Delta x_i' \le \sum_{T} \omega_i \Delta x_i$$

证：不妨设 $T=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$，增加一个分点 $c\in(x_{k-1}, x_k)$，得到分割

$$T'=\{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, c, x_k, \cdots, x_n\}.$$

令 $\Delta_k'=[x_{k-1}, c]$，$\Delta_k''=[c, x_k]$，由于 $\Delta_k', \Delta_k''\subset\Delta_k$，则

$$\omega_k'\Delta x_k'=\left(\sup_{x\in\Delta_k'} f(x)-\inf_{x\in\Delta_k'} f(x)\right)\cdot\Delta x_k'$$

$$\le\left(\sup_{x\in\Delta_k} f(x)-\inf_{x\in\Delta_k} f(x)\right)\cdot\Delta x_k'=\omega_k\cdot\Delta x_k''.$$

同理可得 $\omega_k''\Delta x_k''\le\omega_k\cdot\Delta x_k'$，于是

$$\omega_k'\Delta x_k'+\omega_k''\Delta x_k''\le\omega_k(\Delta x_k'+\Delta x_k'')=\omega_k\Delta x_k,$$

$$\sum_{T'}\omega_i'\Delta x_i'=\omega_1\Delta x_1+\omega_2\Delta x_2+\cdots+(\omega_k'\Delta x_k'+\omega_k''\Delta x_k'')$$

$$+\cdots+\omega_n\Delta x_n$$

$$\le\omega_1\Delta x_1+\omega_2\Delta x_2+\cdots+\omega_k\Delta x_k+\cdots+\omega_n\Delta x_n$$

$$=\sum_T\omega_i\Delta x_i$$

Ex2. 若 f 在 $[a,b]$ 上可积，$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，则 f 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积.

证：由于 f 在 $[a,b]$ 上可积，则对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $[a,b]$ 的分割 T，s.t. $\sum_T\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$。

设 T' 是 T 增加分点 α,β 后所得的 $[a,b]$ 的分割，则

$$\sum_{T'} \omega_i' \Delta x_i \le \sum_{T} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

将 T' 限制在 $[\alpha,\beta]$ 上，得到 $[\alpha,\beta]$ 的分割

$$T'' = T' \cap [\alpha,\beta],$$

则 $\sum_{T''} \omega_i' \Delta x_i' \le \sum_{T'} \omega_i' \Delta x_i' < \varepsilon$,

由定理2'，f 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积.

Ex3. 设 f, g 在 $[a,b]$ 有界，并且只在有限个点处 $f(x) \ne g(x)$.

若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 g 也在 $[a,b]$ 上可积，并且

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \quad \text{(非常重要)}$$

证：设 $J = \int_a^b f(x)\,dx$,

分析：$\forall \varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$. s.t. $\|T\| < \delta$. $\forall \xi_i \in \Delta_i$.

$$\left| \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i - J \right| < \varepsilon$$

$$= \left| \left(\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right) + \left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - J\right) \right|$$

$$\le \underbrace{\sum_{i=1}^n |g(\xi_i) - f(\xi_i)|}_{< \frac{1}{2}\varepsilon} \underbrace{\Delta x_i}_{\le \|T\|} + \underbrace{\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - J \right|}_{\frac{1}{2}\varepsilon}$$

设 f 与 g 只在点 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N$ 处不相等，令

$$M = \max_{1 \le k \le N} |f(\theta_k) - g(\theta_k)| > 0.$$

对于 $[a,b]$ 的任一分割 $T = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$，以及 $\forall \xi_i \in \Delta_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

有 $$\sum_{i=1}^n |g(\xi_i) - f(\xi_i)| \Delta x_i \le \sum_{i=1}^n \underbrace{|g(\xi_i) - f(\xi_i)|}_{\le M} \cdot \|T\| \le NM \cdot \|T\|.$$

对 $\forall \varepsilon > 0$，由于 f 在 $[a,b]$ 上可积，则存在

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2MN},$$

s.t. 对任一满足 $\|T\| < \delta$ 的分割 $T = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, 以及 $\forall \xi_i \in \Delta_i, i=1,2,\cdots,n$, 同时成立

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \sum_{i=1}^{n} |g(\xi_i) - f(\xi_i)|\Delta x_i \le NM\|T\| < NM\delta < \frac{1}{2}\varepsilon$$

所以,
$$\left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - J\right|$$
$$= \left|\left(\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right)\right|$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} |g(\xi_i) - f(\xi_i)|\Delta x_i + \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right|$$
$$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

于是, g 在 $[a,b]$ 上可积, 并且 $\int_a^b g(x)dx = J = \int_a^b f(x)dx$.

Ex4.

Ex5. Ch1. 总练习 16 题

Ex6. $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], & x \in (0,1] \end{cases}$

在 $x_0 = 0$ 和 $x_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}_+)$ 间断, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

本质上是 Ex4 的特例.

Ex7. 设 f 在 $[a,b]$ 上有定义. 且对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $[a,b]$ 上的可积函数 g, s.t.

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b],$$

则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证: 分析: $\forall \varepsilon>0$, $\exists T$, s.t.

$$\sum_T \omega_i^f \Delta x_i < \varepsilon$$

$$= \sum_T \left(\sup_{x\in\Delta_i} f(x) - \inf_{x\in\Delta_i} f(x)\right)\cdot \Delta x_i$$

$$= \sum_T \sup_{x,x'\in\Delta_i} |f(x)-f(x')| \cdot \Delta x_i$$

$$= \sum_T \sup_{x,x'\in\Delta_i} \left|[f(x)-g(x)]+[g(x)-g(x')]+[g(x')-f(x')]\right| \cdot \Delta x_i$$

$$\le \sum_T \sup_{x\in\Delta_i} |f(x)-g(x)|\, \Delta x_i + \sum_T \sup_{x,x'\in\Delta_i} |g(x)-g(x')|\cdot \Delta x_i$$

$$+ \sum_T \sup_{x'\in\Delta_i} |g(x')-f(x')|\cdot \Delta x_i$$

$$= \underbrace{2\sum_T \sup_{x\in\Delta_i} |f(x)-g(x)|\cdot \Delta x_i}_{<\frac{1}{2}\varepsilon} + \underbrace{\sum_T \omega_i^g \Delta x_i}_{<\frac{1}{2}\varepsilon}$$

$\forall x\in[a,b]$, $|f(x)-g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$

对 $\forall \varepsilon>0$, 由条件, 存在 $[a,b]$ 上的可积函数 g, s.t.

$$|f(x)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad \forall x\in[a,b]. \qquad (1)$$

由于 g 在 $[a,b]$ 上可积, 则对于上述 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 T, s.t.

$$\sum_T \omega_i^g \Delta x_i < \frac{1}{2}\varepsilon. \qquad (2)$$

于是, 对于上述分割 T, 就有

$$\sum_T \omega_i^f \Delta x_i = \sum_T \sup_{x,x'\in\Delta_i} |f(x)-f(x')|\cdot \Delta x_i$$

$$= \sum_T \sup_{x,x'\in\Delta_i} \left|[f(x)-g(x)]+[g(x)-g(x')]+[g(x')-f(x')]\right|\cdot \Delta x_i$$

$$\le \sum_T \sup_{x\in\Delta_i} |f(x)-g(x)|\cdot \Delta x_i + \sum_T \sup_{x,x'\in\Delta_i} |g(x)-g(x')|\cdot \Delta x_i$$

$$+ \sum_T \sup_{x'\in\Delta_i} |g(x')-f(x')|\cdot \Delta x_i$$

$$= 2\sum_{i} \sup_{x\in\Delta_i} |f(x)-g(x)| \cdot \Delta x_i + \sum_{i} \omega_i^{g} \Delta x_i$$

(1) (2)

$$\leq 2\sum_{i} \cdot \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \cdot \Delta x_i + \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i} \Delta x_i + \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

所以，f 在 $[a.b]$ 上可积.