§1.3 复变函数

一、复变函数的表示

复变函数
- 单值复变函数：一个复数映射成一个复数．

  $w=|z|^2$，$w=z^3+1$．
- 多值复变函数：一个复数映射成多个复数．

  $w=\sqrt[n]{z}$，$w=\operatorname{Arg} z$．

注：针对多值函数，一般都会转化成单值函数处理．例如考虑多值函数的单值分支．

规定：除非特别说明，今后所提到的函数都是单值函数．

1. 记 $z=x+iy$，$w=u+iv$，复变函数

$$w=f(z)$$

$$x+iy \xrightarrow{f} u+iv$$

$$(x,y) \qquad (u,v)$$

与二元实变函数

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y)$$

或者与二元向量值函数

$$F(x,y)=\big(u(x,y),\ v(x,y)\big)$$

等价．因此 $f(z)$ 也可以表示为

$$\boxed{f(z)=u(x,y)+iv(x,y)}$$

2. $w=f(z)$ 可以看成关于实变量 x 和 y 的复值函数，由于

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z}),$$

则 $w=f(z)$ 也可以视为关于复变量 z 与 $\bar{z}$ 的复值函数.

例1　$w=z^2$

设 $z=x+iy$, $w=u+iv$, 则

$$u+iv=w=z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2ixy,$$

从而 $w=z^2$ 等价于

$$u=x^2-y^2,\quad v=2xy.$$

二. 复变函数的极限与连续性

定义1 (极限)

设 f 是定义在点集 $E\subset\mathbb{C}$ 上的一个复变函数, z_0 是 E 的一个聚点, a 是给定的一个复数. 若对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t.

$$\forall z\in E:\ 0<|z-z_0|<\delta,$$

有 $|f(z)-a|<\varepsilon$, 则称 a 为 $f(z)$ 在 E 中当 z 趋于 z_0 时的极限, 记作

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=a.$$

定义2 (连续性)

设 f 是定义在点集 $E\subset\mathbb{C}$ 上的一个复变函数, $z_0\in E$ 并且是 E 的一个聚点. 若 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 沿 E 在点 z_0 连续. 若 $z_0\in E$ 是 E 的一个

孤立点，则也称 f 在点 z_0 连续。若 f 在 E 上的每一点都连续，则称 f 在点集 E 上连续。

定理1

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是定义在点集 $E\subset\mathbb{C}$ 上的复变函数，$z_0=x_0+iy_0$ 是 E 的一个聚点，$A=a+ib$，则

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=A$$

(重极限)

当且仅当 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in E}} u(x,y)=a$，$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in E}} v(x,y)=b$。

证：$|u(x,y)-a|\le|f(z)-A|$ $\quad$ ($|\mathrm{Re}\,z|\le|z|$，$|\mathrm{Im}\,z|\le|z|$)

$\le|u(x,y)-a|+|v(x,y)-b|$， $\quad$ ($\sqrt{x^2+y^2}\le|x|+|y|$)

$|v(x,y)-b|\le|f(z)-A|$

$\le|u(x,y)-a|+|v(x,y)-b|$

按照复变函数极限的 ε-δ 定义和二元函数重极限的 ε-δ 定义，可证结论。

推论1 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是定义在点集 $E\subset\mathbb{C}$ 上的复变函数，$z_0\in E$ 是 E 的一个聚点，则 $f(z)$ 沿 E 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 连续，当且仅当 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 沿 E 在点 (x_0,y_0) 都连续。

由于复平面 $\mathbb{C}$ 中的距离与邻域与平面 $\mathbb{R}^2$ 中的距离与邻域一致，从而导致 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的极限和连续性与二元实函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 的重极限和连续性一致。闭区域上连续复变函数的性质与闭区域上

连续的二元实函数的性质一致.

从函数形式、极限和连续性概念来看,复变函数与二元实函数一致, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的实部 $u(x,y)$ 与虚部 $v(x,y)$ 并没有依赖关系. 但是在下一章会看到,考虑"可微性"时,复变函数与二元实函数有很大的不同. 要满足可微性, $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 之间必须有很强的依赖关系. 可微的复变函数,或者解析函数(亦称全纯函数)是这门课程真正的起点和核心.