第十章 定积分的应用

提示：1. 不要深究面积、体积等概念用定积分表示的原因，这些概念的严格理论(几何公理化、测度论)超出本课程范围，作为已知结论接受即可

2. 学习本章内容应关注以下两点：

① 针对具体的问题，如何建立恰当的定积分模型；

② 如何有效地计算相关问题的定积分。

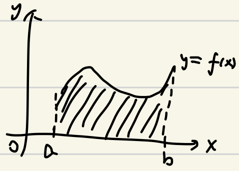
§10.1 平面图形的面积

一、直角坐标系，曲线方程为一般式：$y=f(x)$

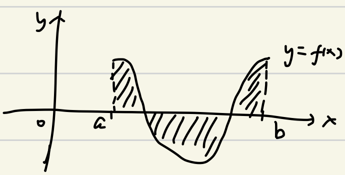
1. 若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则曲线 C：$y=f(x)$，$x\in[a,b]$ 和直线 $x=a$，$x=b$，x 轴 $(y=0)$ 所围成的平面图形的面积为

$$A=\int_a^b |f(x)|\,dx=\int_a^b |y|\,dx$$

①



②



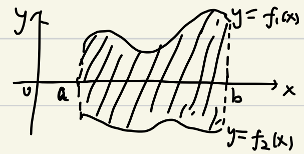
2、若 f_1 和 f_2 在 $[a,b]$ 上可积，则

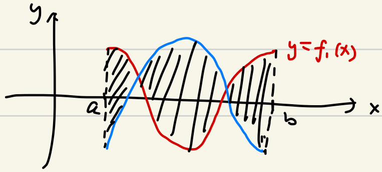
曲线 $C_1: y=f_1(x), x\in[a,b]$，曲线 $C_2: y=f_2(x), x\in[a,b]$

和直线 $x=a, x=b$，x 轴 $(y=0)$ 所围成的平面图形的面积

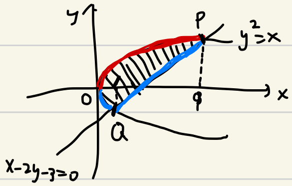
为

$$A=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,dx.$$

① 

② 

例1. 由抛物线 $y^2=x$ 与直线 $x-2y-3=0$ 所围成的图形面积.



方法1. 解 $\begin{cases} y^2=x \\ x-2y-3=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2=9 \\ y_2=3 \end{cases}$

令 $f_1(x)=\sqrt{x}, x\in[0,9]$，

$$f_2(x)=\begin{cases} -\sqrt{x}, & x\in[0,1], \\ \frac{1}{2}x-\frac{3}{2}, & x\in[1,9] \end{cases}$$

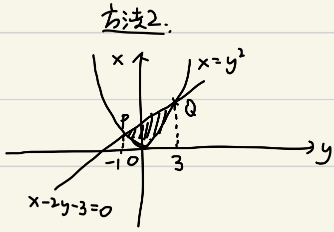
所以，图形面积

$$A=\int_0^9 |f_1(x)-f_2(x)|\,dx=\int_0^1 2\sqrt{x}\,dx+\int_1^9\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)dx$$

$$=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x\right)\Big|_1^9$$

$$=\frac{32}{3}.$$

方法2.



令 $g_1(y)=y^2$，$y\in[-1,3]$，

$g_2(y)=2y+3$，$y\in[-1,3]$，

$$A=\int_{-1}^{3}|g_1(y)-g_2(y)|\,dy$$

$$=\int_{-1}^{3}(y^2-2y-3)\,dy$$

$$=\left(\frac{1}{3}y^3-y^2-3y\right)\Big|_{-1}^{3}=\frac{32}{3}$$

二. 平面直角坐标系，曲线方程为参数方程

1. 曲线 $C:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$， $x(t)$、$y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

① 若 $x(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可导 并且严格增，令 $a=x(\alpha)$，$b=x(\beta)$. $a<b$

由曲线 C 与 $x=a$，$x=b$，x轴所围成的图形面积为

$$A=\int_a^b|y|\,dx=\int_\alpha^\beta|y(t)|\cdot\underbrace{x'(t)}_{\ge 0}\,dt=\int_\alpha^\beta|x'(t)y(t)|\,dt.$$

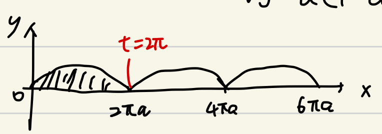
② 若 $x(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可导并且严格减，令 $a=x(\alpha)$，$b=x(\beta)$ $a>b$

由曲线 C 与 $x=a$，$x=b$，x轴所围成的图形面积为

$$A=\int_b^a|y|\,dx=\int_\beta^\alpha|y(t)|\cdot\underbrace{x'(t)}_{\le 0}\,dt=-\int_\beta^\alpha|x'(t)y(t)|\,dt=\int_\alpha^\beta|x'(t)y(t)|\,dt.$$

③ $y(t)$ $\qquad A=\int_\alpha^\beta|x(t)y'(t)|\,dt$

例2. 摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 的一拱与x轴所围图形的面积.



解：只需求摆线在 $t\in[0,2\pi]$ 部分与x轴所围图形的面积.

$$\frac{dx}{dt} = a(1-\cos t) > 0, \quad \forall t \in (0, 2\pi),$$

所以 $x(t)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续可导并且严格增，于是面积，

$$A = \int_0^{2\pi} |x'(t)y(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt$$

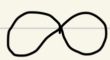
$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt = 3\pi a^2.$$

2. 曲线 $C: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$，$x(t), y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续.

若 $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$，则称 C 为闭曲线；

若闭曲线自身不相交，则称 C 为简单闭曲线.

简单闭曲线

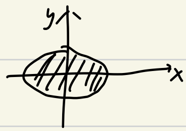


闭曲线，但不是简单闭曲线.

若 $C: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$ 是简单闭曲线，并且 $x(t)$ 或 $y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续可导，则简单闭曲线自身围成的图形的面积为

$$A = \left|\int_\alpha^\beta x'(t)y(t)\,dt\right| = \left|\int_\alpha^\beta x(t)y'(t)\,dt\right|.$$

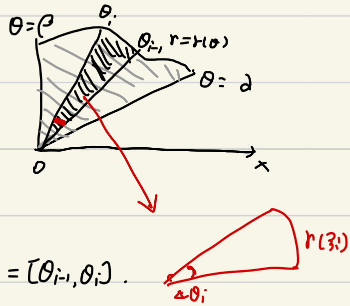
例13. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ 所围的面积.



解：$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

$$A = \left|\int_0^{2\pi} (-a\sin t)\cdot(b\sin t)\,dt\right| = ab\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt = \pi ab.$$

三. 极坐标系. 极坐标方程.



曲线 C: $r=r(\theta)$, $\alpha\le\theta\le\beta$

分割—近似—求和.

作 $[\alpha,\beta]$ 的分割 $T=\{\Delta_i\}$. 任取 $\xi_i\in\Delta_i=[\theta_{i-1},\theta_i]$.

曲线 C 在 Δ_i 部分围成的图形近似为顶角为 $\Delta\theta_i=\theta_i-\theta_{i-1}$, 以 $r(\xi_i)$ 为半径的扇形, 其面积为 $\frac{1}{2}r^2(\xi_i)\Delta\theta_i$.

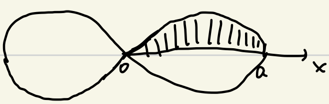
作和 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r^2(\xi_i)\Delta\theta_i$, 该和可视为 $\frac{1}{2}r^2(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 区间上的 Riemann 和.

若 $r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 从而

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r^2(\xi_i)\Delta\theta_i$$

定义 $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$ 为曲线 C 与射线 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 围成图形的面积.

例14. 双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 所围图形的面积.

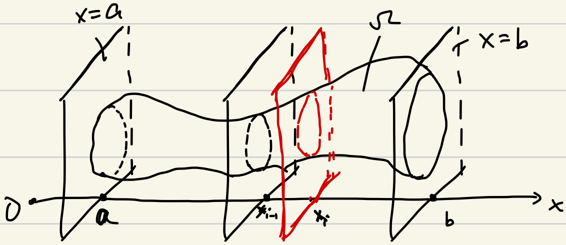


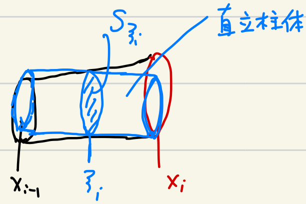
解: 只求双纽线在 $\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 部分与 $\theta=0$ 围成的面积.

$$A_0=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2(\theta)\,d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta=\frac{a^2}{4}$$

所以整双纽线所围图形的面积为 $A=4A_0=a^2$.

§10.2 由平行截面面积求体积





· Ω 是三维空间中夹在平面 $x=a$ 与 $x=b$ 之间的立体，称 Ω 为位于 $[a,b]$ 上的立体.

· 任取 $x\in[a,b]$，过该点作垂直于 x 轴的平面，截得 Ω 的截面记为 S_x，其面积记为 $A(x)$. 称函数 $A(x), x\in[a,b]$ 为 Ω 的截面面积函数.

分割—近似—求和

作 $[a,b]$ 的分割 $T=\{\Delta_i\}$，任取 $\xi_i\in\Delta_i$, $i=1,2,\cdots,n$，将 Ω 位于 Δ_i 的部分近似为以 S_{ξ_i} 为截面，以 Δx_i 为长度(高)作直立柱体，其体积为

$$A(\xi_i)\Delta x_i.$$

作和 $\sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\Delta x_i$，该和式是 $A(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的 Riemann 和.

若 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则可以定义 Ω 的体积为

$$V=\int_a^b A(x)dx=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\Delta x_i.$$

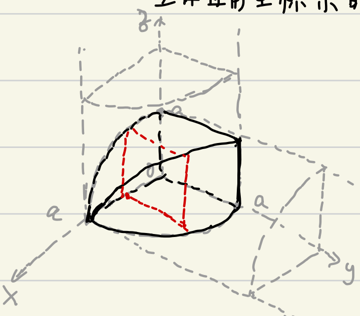
祖暅原理（卡瓦列里原理）

设 Ω_A, Ω_B 为位于同一个区间 $[a,b]$ 上的两个立体，若在 $[a,b]$ 上它们的

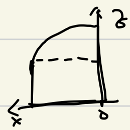
截面面积函数 $A(x)$ 与 $B(x)$ 都可积，且 $A(x)\equiv B(x)$，则 Ω_A 和 Ω_B 的体积相等。

例1. 圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与 $z^2+x^2=a^2$ 所围成的立体的体积

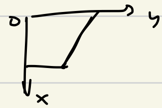
（关于原点对称，关于 xoy, xoz, yoz 平面对称，跨越立体直角坐标系的 8 个象限）



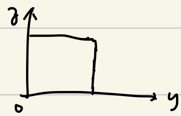
① 垂直于y轴



② 垂直于z轴

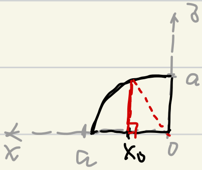


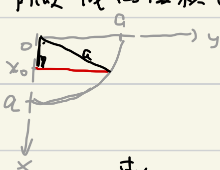
③ 垂直于x轴



解：任取 $x_0\in[0,a]$，平面 $x=x_0$ 与立体的截面为矩形，

边长均为 $\sqrt{a^2-x_0^2}$，所以截面面积函数 $A(x)=a^2-x^2$，$x\in[0,a]$。



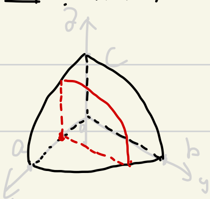


所以 $V_0=\int_0^a A(x)\,dx$
$$=\frac{2}{3}a^3$$

整个立体的体积为

$$V=8V_0=\frac{16}{3}a^3.$$

例2. 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a,b,c>0)$ 所围立体的体积。



解：只需求椭球在第一象限部分的体积。

任取 $x_0\in[0,a]$，平面 $x=x_0$ 与椭球在第一象限部分

的截面方程为 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1, & x,y,z\ge 0 \\ x=x_0 \end{cases}$

$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$

$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le \underbrace{1-\frac{x_0^2}{a^2}}_{>0}$

联立得 $\frac{y^2}{b^2(1-\frac{x_0^2}{a^2})}+\frac{z^2}{c^2(1-\frac{x_0^2}{a^2})}\le 1$, $y,z\ge 0$.

于是，截面为 $\frac{1}{4}$ 椭圆，其面积为 $\frac{1}{4}\pi\sqrt{b^2(1-\frac{x_0^2}{a^2})}\cdot\sqrt{c^2(1-\frac{x_0^2}{a^2})}$.

所以截面面积函数 $A(x)=\frac{1}{4}\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})$, $x\in[0,a]$.

椭球在第一象限部分的体积.

$$V_0=\int_0^a A(x)\,dx=\frac{1}{4}\pi bc\int_0^a(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\frac{1}{6}\pi abc.$$

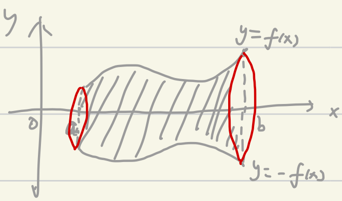
整个椭球的体积 $V=8V_0=\frac{4}{3}\pi abc$.

旋转体体积.

设 f 在 $[a,b]$ 上可积. Ω 是由平面图形

$0\le|y|\le|f(x)|$, $x\in[a,b]$

绕 x 轴旋转一周所得的立体（称为旋转体）

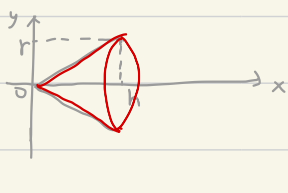


任取 $x_0\in[a,b]$. 平面 $x=x_0$ 与旋转体的截面是半径为 $|f(x_0)|$ 的圆，

其面积为 $\pi[f(x_0)]^2$. 所以旋转体体积

$$V=\int_a^b\pi[f(x)]^2dx=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx.$$

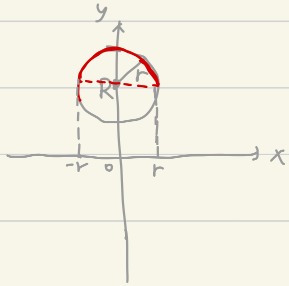
例13. 圆锥体体积，高为 h，底面半径为 R.



解：圆锥体可视为母线 $y=\frac{r}{h}x$, $x\in[0,h]$

绕 x 轴旋转一周所得的旋转体，其体积为

$$V = \pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



例4. 由圆 $x^2+(y-R)^2=r^2 \quad (0<r<R)$

绕 x 轴旋转所得环状立体的体积。

解：该环状立体可视为由

平面 S_1: $0 \le |y| \le R+\sqrt{r^2-x^2}$

绕 x 轴旋转一周所得立体减去

平面 S_2: $0 \le |y| \le R-\sqrt{r^2-x^2}$

绕 x 轴旋转一周所得立体。

于是，环状立体体积

$$V = \pi\int_{-r}^{r}\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx - \pi\int_{-r}^{r}\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx$$

$$= 4\pi R\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$= 2\pi^2 r^2 R$$