§9.4 定积分的性质

· 基本性质（线性性质、乘积、区域可加性，保不等式性，绝对值性质等）

· 积分中值定理

一、基本性质

性质1（线性性质）

设 f 和 g 均在 $[a,b]$ 上可积，则

(i) $f+g$ 在 $[a,b]$ 上可积，并且

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(ii) 对 $\forall k \in \mathbb{R}$，kf 在 $[a,b]$ 上可积，并且

$$\int_a^b (kf)(x)\,dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

证：记 $A=\int_a^b f(x)dx$，$B=\int_a^b g(x)dx$.

(i) 由 Riemann 积分的定义，对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，s.t.

对任一满足 $\|T\|<\delta$ 的分割 T 以及 $\forall \xi_i \in \Delta_i$，$i=1,2,\cdots,n$.

都有 $\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - A\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$，$\left|\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i - B\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$，

从而 $\left|\sum_{i=1}^n (f+g)(\xi_i)\Delta x_i - (A+B)\right|$

$$= \left|\left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - A\right) + \left(\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i - B\right)\right|$$

$$\le \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - A\right| + \left|\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i - B\right|$$

$$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

所以，由 Riemann 积分的定义，$f+g$ 在 $[a,b]$ 上可积，并且

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = A+B = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(ii) 当 $k=0$ 时，结论显然成立，

当 $k\neq 0$ 时，对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，s.t. 对任一满足 $\|T\|<\delta$ 的分割 T 以及 $\forall \xi_i\in\Delta_i$，$i=1,2,\cdots,n$，都有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - A\right| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

从而 $\left|\sum_{i=1}^n (kf)(\xi_i)\Delta x_i - kA\right|$

$= |k|\cdot\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - A\right|$

$< |k|\cdot\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$,

所以，由 Riemann 积分的定义，kf 在 $[a,b]$ 上可积，并且

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

推论1、设 f 和 g 都在 $[a,b]$ 上可积，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，则

$\alpha f+\beta g$ 在 $[a,b]$ 上可积，并且

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$$

性质2. 设 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积，则 fg 在 $[a,b]$ 上可积。

证：由于 f,g 均在 $[a,b]$ 上可积，则 f,g 在 $[a,b]$ 上有界，

令 $A=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$，$B=\sup\limits_{x\in[a,b]}|g(x)|$.

若 $A=0$ 或 $B=0$，则 $f(x)\equiv 0$ 或 $g(x)\equiv 0$，从而

$f(x)g(x)\equiv 0$，$x\in[a,b]$.

所以 fg 在 $[a,b]$ 上可积.

下设 $A>0,B>0$.

对 $\forall\varepsilon>0$，由于 f,g 在 $[a,b]$ 上可积，则存在 $[a,b]$ 的分割 $T_1=\{\Delta_{1,i}\}$，$T_2=\{\Delta_{2,i}\}$，s.t.

$$\sum_{T_1}\omega^f_{1,i}\Delta x_{1,i}<\frac{1}{2B}\varepsilon,\quad \sum_{T_2}\omega^g_{2,i}\Delta x_{2,i}<\frac{1}{2A}\varepsilon. \quad (1)$$

将 T_1 和 T_2 所有分点合并，则得到 $[a,b]$ 的一个新的分割 $T=\{\Delta_i\}$.

对于 T 中的任一小区间 Δ_i，有

$$\omega^{fg}_i=\sup_{x\in\Delta_i}\{f(x)g(x)\}-\inf_{x\in\Delta_i}\{f(x)g(x)\}$$

$$=\sup_{x,x'\in\Delta_i}|f(x)g(x)-f(x')g(x')|$$

$$=\sup_{x,x'\in\Delta_i}|f(x)g(x)-f(x)g(x')+f(x)g(x')-f(x')g(x')|$$

$$\le\sup_{x,x'\in\Delta_i}|f(x)|\cdot|g(x)-g(x')|+\sup_{x,x'\in\Delta_i}|g(x')|\cdot|f(x)-f(x')|$$

$$\le A\cdot\omega^g_i+B\cdot\omega^f_i. \quad (2)$$

由于 T 是 T_1 和 T_2 分割增加若干分点后所得的分割，则

$$\sum_T\omega^{fg}_i\Delta x_i\overset{(1)}{\le}A\sum_T\omega^g_i\Delta x_i+B\sum_T\omega^f\Delta x_i$$

$$\overset{\S 9.3\ \mathrm{Ex}1}{\le}A\sum_{T_2}\omega^g_{2,i}\Delta x_{2,i}+B\sum_{T_1}\omega^f_{1,i}\Delta x_{1,i}$$

$$\overset{(1)}{<}A\cdot\frac{\varepsilon}{2A}+B\cdot\frac{\varepsilon}{2B}$$

$$=\varepsilon$$

所以 fg 在 $[a,b]$ 上可积.

注：$\int_a^b f(x)g(x)dx$ 不一定等于 $\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b g(x)dx$.

反例: $f(x)=g(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-1,0]\\ 1, & x\in(0,1]\end{cases}$

$f(x)g(x)\equiv 1,\ x\in[-1,1]$.

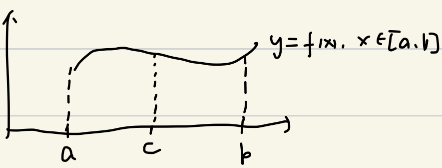
$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} g(x)dx=0$.

$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=\int_{-1}^{1} 1dx=2\neq \int_{-1}^{1} f(x)dx\cdot\int_{-1}^{1} g(x)dx$.

性质3 (区域可加性)

f在$[a,b]$上可积的充要条件是: 对$\forall c\in(a,b)$, f在$[a,c]$和$[c,b]$上均可积. 此时, 还成立

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$



证: 充分性($\Leftarrow$) 对$\forall c\in(a,b)$, 设f在$[a,c]$和$[c,b]$上均可积,

对$\forall \varepsilon>0$, 存在$[a,c]$的分割T_1和$[c,b]$的分割T_2, s.t.

$$\sum_{T_1}\omega_{1,i}\Delta x_{1,i}<\frac{1}{2}\varepsilon,\quad \sum_{T_2}\omega_{2,i}\Delta x_{2,i}<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

令$T=T_1\cup T_2$, 则T是$[a,b]$的一个分割, 并且

$$\sum_{T}\omega_i\Delta x_i=\sum_{T_1}\omega_{1,i}\Delta x_{1,i}+\sum_{T_2}\omega_{2,i}\Delta x_{2,i}$$
$$<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon,$$

所以, f在$[a,b]$上可积.

必要性 $(\Rightarrow)$ 设 f 在 $[a,b]$ 上可积，$c\in(a,b)$. 对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $[a,b]$ 的分割 T, s.t.

$$\sum_T \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

将点 c 作为分点并入分割 T，得到 $[a,b]$ 的新的分割 T'，则

$$\sum_{T'} \omega_i' \Delta x_i' \le \sum_T \omega_i \Delta x_i < \varepsilon,$$

由于 T' 中处于 $[a,c]$ 中的分点，构成了 $[a,c]$ 的一个分割 T_1，

T' 中处于 $[c,b]$ 中的分点构成了 $[c,b]$ 的一个分割 T_2.

并且 $$\underbrace{\sum_{T'} \omega_i' \Delta x_i'}_{<\varepsilon} = \underbrace{\sum_{T_1} \omega_{1,i} \Delta x_{1,i}}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{T_2} \omega_{2,i} \Delta x_{2,i}}_{\geq 0},$$

则 $\sum_{T_1} \omega_{1,i}\Delta x_{1,i} < \varepsilon$，$\sum_{T_2} \omega_{2,i}\Delta x_{2,i} < \varepsilon$.

所以 f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均可积.

设 f 在 $[a,b]$, $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均可积，考虑 $[a,b]$ 的含有 c 点的分割 T，令 $T\cap[a,c]=T_1$，$T\cap[c,b]=T_2$，则 $\|T_1\|\le\|T\|$，$\|T_2\|\le\|T\|$，从而当 $\|T\|\to0$，就有，

$$\|T_1\|\to0,\quad \|T_2\|\to0,$$

任取 $\xi_i\in\Delta_i$, $i=1,2,\cdots,n$，则

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{\|T\|\to0}\sum_T f(\xi_i)\Delta x_i \\
&= \lim_{\|T\|\to0}\left(\sum_{T_1} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{T_2} f(\xi_i)\Delta x_i\right) \\
&= \lim_{\|T\|\to0}\sum_{T_1} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\|T\|\to0}\sum_{T_2} f(\xi_i)\Delta x_i \\
&= \lim_{\|T_1\|\to0}\sum_{T_1} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\|T_2\|\to0}\sum_{T_2} f(\xi_i)\Delta x_i
\end{aligned}$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

记号 规定1. 当 $a=b$, 记 $\int_a^a f(x)dx = 0$.

规定2. 当 $a>b$, 记 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

推论2. 设 f 在 $[a,c]$ 可积, $b\in(a,c)$, 则

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

性质4 (保不等式性)

设 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积, 并且 $f(x)\le g(x)$, $\forall x\in[a,b]$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

证: 令 $h(x)=g(x)-f(x)$, $x\in[a,b]$. 由线性性质可知 h 也在 $[a,b]$ 可积, 并且

$h(x)\geqslant 0$, $\forall x\in[a,b]$.

对 $[a,b]$ 的任一 n 等分 $T=\{a, a+\frac{b-a}{n}, \cdots, a+\frac{b-a}{n}i, \cdots, b\}$, 取

$\xi_i = a+\frac{b-a}{n}i \in \Delta_i$, $i=1,2,\cdots,n$. 则

$$\sum_{i=1}^n h(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0,$$

从而 $\int_a^b h(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n h(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0$,

于是 $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [g(x)-f(x)]dx = \int_a^b h(x)dx \geqslant 0$,

即 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

性质5. (绝对值性质)

设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $|f|$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 并且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

证：由于 f 在 $[a,b]$ 上可积，对 $\forall \varepsilon>0$，存在 $[a,b]$ 的分割

$$T=\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

s.t. $\sum_T \omega_i^f \Delta x_i < \varepsilon$.

由于对 $\forall x, \tilde{x} \in [a,b]$，有

$$\big|\,|f(x)| - |f(\tilde{x})|\,\big| \le |f(x) - f(\tilde{x})|,$$

从而
$$\omega_i^{|f|} = \sup_{x,\tilde{x}\in\Delta_i} \big|\,|f(x)| - |f(\tilde{x})|\,\big|$$
$$\le \sup_{x,\tilde{x}\in\Delta_i} |f(x) - f(\tilde{x})| = \omega_i^f, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

于是 $\sum_T \omega_i^{|f|}\Delta x_i \le \sum_T \omega_i^f \Delta x_i < \varepsilon$，所以 $|f|$ 也在 $[a,b]$ 上可积。

由于对 $\forall x\in[a,b]$，有 $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$，由定积分的保不等式性，就有 $-\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b (-|f(x)|)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$，

所以 $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

注：$|f|$ 在 $[a,b]$ 上可积，f 不一定在 $[a,b]$ 上可积。

反例：$f(x) = \begin{cases} 1, & x\in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ -1, & x\in \mathbb{Q}^c\cap[0,1] \end{cases}$ （类似于 Dirichlet 函数）.

可证 f 在 $[0,1]$ 上不可积，但是 $|f(x)| \equiv 1$，$x\in[0,1]$，则

$$\int_0^1 |f(x)|dx = 1.$$

基本性质的应用

例1. $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & -1\le x<0, \\ e^{-x}, & 0\le x\le 1, \end{cases}$ 求 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

解：f 在 $[-1,1]$ 上只有一个间断点 $x=0$，所以 f 在 $[-1,1]$ 上可积。并且由定积分的区域可加性，就有

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} f(x)\,dx,$$

将 f 限制在 $[-1,0]$ 上时，$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x\in[-1,0), \\ 0, & x=0. \end{cases}$

（§9.3. Ex3. 设 f 和 g 是 $[a,b]$ 上的有界函数，只在有限多个点处 $f(x)\neq g(x)$，若 g 在 $[a,b]$ 上可积，则 f 也在 $[a,b]$ 上可积，并且

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$$
）

令 $g(x)=2x-1$，$x\in[-1,0]$，f 与 g 只在 $x=0$ 处不相等，所以

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} g(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(2x-1)\,dx=(x^2-x)\Big|_{-1}^{0}=-2.$$

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx=\int_{0}^{1} e^{-x}\,dx=(-e^{-x})\Big|_{0}^{1}=-e^{-1}+1.$$

所以 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=(-2)+(-e^{-1}+1)=-\frac{1}{e}-1$.

例2. 若 f 在 $[a,b]$ 上连续，并且

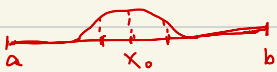
$$f(x)\geq 0,\ x\in[a,b];\quad \int_a^b f(x)\,dx=0,$$

则 $f(x)\equiv 0$，$x\in[a,b]$.　　（非常重要）

证：反证法，假设 $\exists x_0\in[a,b]$，s.t. $f(x_0)>0$. 不妨设 $x_0\in(a,b)$.

由于 f 在 $[a,b]$ 上连续，则由连续函数的局部保号性，$\exists \delta>0$, s.t.

$[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset [a,b]$，并且



$$f(x) > \frac{1}{2} f(x_0), \quad \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$$

由定积分的区间可加性和保不等式性，有

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)\,dx$$

$$\geqslant \int_a^{x_0-\delta} 0\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{1}{2} f(x_0)\,dx + \int_{x_0+\delta}^b 0\,dx$$

$$= \frac{1}{2} f(x_0) \cdot 2\delta = f(x_0)\cdot\delta > 0,$$

这与条件 $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ 矛盾. 所以 $f(x) \equiv 0$, $x \in [a,b]$.

注：① 若 f 在 $[a,b]$ 上连续，并且 $\int_a^b f(x)\,dx = 0$，不一定有 $f(x) \equiv 0$, $x \in [a,b]$.

反例：$f(x) = x$, $x \in [-1,1]$

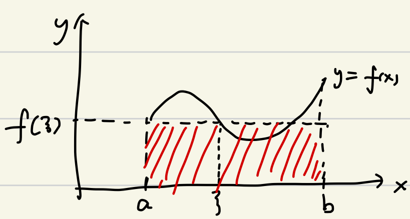
② 若 f 在 $[a,b]$ 上可积，$f(x) \geqslant 0$ 且 $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. 不一定有 $f(x) \equiv 0$, $x \in [a,b]$.

反例：Riemann函数 $R(x)$, $x \in [0,1]$.

二. 积分中值定理

定理1（积分第一中值定理）

设 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists \xi \in [a,b]$, s.t. $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$.



（称 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ 为函数 f 在 $[a,b]$ 上的积分平均值，称 ξ 为积分中值点）

证：由于 f 在 $[a,b]$ 上连续，由连续函数的最值性定理，f 在 $[a,b]$ 上存在最小值 m 和最大值 M，s.t.

$$m \le f(x) \le M,\quad \forall x \in [a,b],$$

由定积分的保不等式性，有

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a),$$

所以 $$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

由连续函数的介值性定理，$\exists\, \xi \in [a,b]$，s.t.

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

从而 $$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

定理2（推广的积分第一中值定理）

设 f 和 g 均在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则 $\exists\, \xi \in [a,b]$，s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

证：不妨设 $g(x) \geqslant 0$，$x \in [a,b]$.

若 $\int_a^b g(x)\,dx = 0$，则 $g(x) \equiv 0$，$x \in [a,b]$. 结论成立.

若 $\int_a^b g(x)\,dx > 0$，记 $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$，$M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$，则

$$m\,g(x) \le f(x)g(x) \le M\,g(x),\quad \forall x \in [a,b],$$

由定积分的保不等式性，有

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx,$$

从而 $$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M.$$

由连续函数的介值性定理，$\exists\,\xi\in[a,b]$, s.t.

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},$$

于是 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

推论：若 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，M, m 分别为

f 在 $[a,b]$ 上的上、下确界，则必存在 $u\in[m,M]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=u\int_a^b g(x)dx.$$

证：不妨设 $g(x)\geqslant 0$，则

$$m\,g(x)\le f(x)g(x)\le M g(x),\quad x\in[a,b].$$

从而 $m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx$. (1)

若 $\int_a^b g(x)dx=0$，则由(1)式，$\int_a^b f(x)g(x)dx=0=u\int_a^b g(x)dx$，$\forall u\in[m,M]$，

结论成立。

若 $\int_a^b g(x)dx>0$，由(1)式，

$$m\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M,$$

令 $u=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$，则 $u\in[m,M]$，并且

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=u\int_a^b g(x)dx.$$

注：定理1和定理2中，中值点ξ可在(a,b)内取得.（Ex 8）

证：(定理1) 令 $u=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. 下证 $\exists\xi\in(a,b)$, s.t. $f(\xi)=u$.

反证法. 假对 $\forall x\in(a,b)$, 都有 $f(x)\neq u$, 则由连续函数的介值性定理，恒有

$$f(x)>u \text{ 或 } f(x)<u,\quad \forall x\in(a,b).$$

(否则，$\exists x_1, x_2\in(a,b)$, s.t. $f(x_1)>u$ 而 $f(x_2)<u$. 由介值性定理，存在介于 x_1 与 x_2 之间的 ξ, s.t. $f(\xi)=u$, 这与 $\forall x\in(a,b)$, $f(x)\neq u$ 矛盾).

不妨设 $f(x)>u$, $\forall x\in(a,b)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b u\,dx = u(b-a),$$

(否则，$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b u\,dx$, 则 $\int_a^b (f(x)-u)dx=0$. 由例2，$f(x)-u\equiv 0$, $\forall x\in[a,b]$, 这与 $f(x)>u$, $\forall x\in(a,b)$ 矛盾)

从而 $u<\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, 这与 u 的定义矛盾.

(定理2). 下证 $\exists\xi\in(a,b)$. s.t. $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

不妨设 $g(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$.

若 $\int_a^b g(x)dx=0$, 则 $g(x)\equiv 0$, $\forall x\in[a,b]$, 结论对 $\forall\xi\in(a,b)$ 都成立.

若 $\int_a^b g(x)dx>0$. 令

$$u=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},\quad m=\min_{x\in[a,b]} f(x),\quad M=\max_{x\in[a,b]} f(x), \text{ 则 } m\leq u\leq M.$$

当 $m=M$ 时，f 在 $[a,b]$ 上恒为常数，结论对 $\forall\xi\in(a,b)$ 恒成立.

当 $m<M$ 时，分情况讨论：

① 若 $u\in(m,M)$，由连续函数的介值性定理，$\exists\xi\in(a,b)$，

s.t. $$m<f(\xi)=u<M.$$

② 若 $u=m$，则必存在 $\xi\in(a,b)$，s.t. $f(\xi)=m=u$.

否则，对 $\forall x\in(a,b)$，恒有 $f(x)>m=u$，即

$$f(x)-u>0,\ \forall x\in(a,b).$$

由于 f 和 g 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)-u\geq 0,\ \forall x\in[a,b]$，

$(f(x)-u)\cdot g(x)\geq 0$，并且 $(f(x)-u)\cdot g(x)\not\equiv 0,\ \forall x\in[a,b]$

（否则，$(f(x)-u)\cdot g(x)\equiv 0,\ \forall x\in(a,b)$，则 $g(x)\equiv 0,\ \forall x\in(a,b)$，由于 g 在 $[a,b]$ 上连续，则 $g(x)\equiv 0,\ \forall x\in[a,b]$，从而 $\int_a^b g(x)dx=0$，矛盾）

于是 $\int_a^b(f(x)-u)\cdot g(x)\,dx>0$，从而

$$u>\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

这与 u 的定义矛盾.

③ 若 $u=M$，则必存在 $\xi\in(a,b)$，s.t. $f(\xi)=M=u$.

综上，$\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f(\xi)=u$.

例1. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})\,dx$.

分析：① $\forall n\in\mathbb{N}_+$, $\exists \xi_n\in(0,1)$, s.t.

$$\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})\,dx = f(\sqrt[n]{\xi_n})\cdot 1 = f(\sqrt[n]{\xi_n}).$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})\,dx = \lim_{n\to\infty} f(\sqrt[n]{\xi_n}) = f\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\xi_n}\right)$$

若 $\inf\limits_n \xi_n > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\xi_n} = 1$.

若 $\inf\limits_n \xi_n = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\xi_n}$ 不确定.

② 任取 $\delta\in(0,1)$, $\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})dx = \int_0^\delta f(\sqrt[n]{x})dx + \int_\delta^1 f(\sqrt[n]{x})dx$.

$\exists \xi_n\in(0,\delta)$, $\eta_n\in(\delta,1)$ s.t.

$$\int_0^\delta f(\sqrt[n]{x})\,dx = \boxed{f(\sqrt[n]{\xi_n})}\,\delta$$

$$\int_\delta^1 f(\sqrt[n]{x})\,dx = f(\sqrt[n]{\eta_n})\cdot(1-\delta) \xrightarrow{n\to\infty} f(1)\cdot(1-\delta)$$

③ 令 $a_n\in(0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. $\int_0^1 \cdots dx = \int_0^{a_n}\cdots dx + \int_{a_n}^1 \cdots dx$.

$\exists \xi_n\in(0,a_n)$, $\eta_n\in(a_n,1)$, s.t.

$$\int_0^{a_n}\cdots dx = \boxed{f(\sqrt[n]{\xi_n})}\cdot a_n \to 0$$

$$\int_{a_n}^1 \cdots dx = f(\sqrt[n]{\eta_n})\cdot(1-a_n)$$

解：对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} f(\sqrt[n]{x})\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(\sqrt[n]{x})\,dx.$$

由积分第一中值定理，$\exists \xi_n\in(0,\frac{1}{n})$, $\eta_n\in(\frac{1}{n},1)$, s.t.

$$\int_0^{\frac{1}{n}} f(\sqrt[n]{x})\,dx = f(\sqrt[n]{\xi_n})\cdot\frac{1}{n},\quad \int_{\frac{1}{n}}^1 f(\sqrt[n]{x})\,dx = f(\sqrt[n]{\eta_n})\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

由于 $\{f(\sqrt[n]{\xi_n})\}$ 是有界量，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} f(\sqrt[n]{x})\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} f(\sqrt[n]{\xi_n})\cdot\frac{1}{n} = 0$.

由于 $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} < \sqrt[n]{\eta_n} < 1$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$，则

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\eta_n} = 1$.

所以 $\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(\sqrt[n]{x})\,dx = \lim_{n\to\infty} f(\sqrt[n]{\eta_n})\cdot(1-\frac{1}{n})$

$= f(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\eta_n})\cdot(1-0)$

$= f(1)\cdot 1 = f(1)$.

综上，$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})\,dx = f(1)$.

问题：求极限与求定积分是否可以交换顺序？

设 f_n, f 在 $[a,b]$ 上可积，并且 $\forall x\in[a,b]$，有 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，

那么是否有 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ ？

不一定.

反例1. $f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \le 1 \text{ 或 } x = 0, \end{cases}$ $\quad f(x) \equiv 0,\ x\in[0,1]$

对 $\forall x\in[0,1]$，总有 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$.

$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$. $\qquad \int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

反例2.（例14）. $g_n(x) = f(\sqrt[n]{x})$，$x\in[0,1]$，$\quad g(x) = \begin{cases} f(0), & x\in[0,1) \\ f(1), & x=1 \end{cases}$

$\forall x\in[0,1]$，$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$. $\qquad h(x) \equiv f(0)$，$x\in[0,1]$

$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})\,dx = f(1)$，$\quad \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(0)\,dx = f(0)$.

例. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = 0$.

方法1. 利用递推公式，求 $\int \sin^n x\,dx$；再用 N-L 公式，求出 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$；再求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

方法2. $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n x = \begin{cases} 0, & x\in[0,\frac{\pi}{2}) \\ 1, & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}\right)$

对 $\forall\varepsilon: 0<\varepsilon<\pi$，有

$$0\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-\varepsilon)}\sin^n x\,dx + \int_{\frac{1}{2}(\pi-\varepsilon)}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

$$\le \frac{1}{2}(\pi-\varepsilon)\cdot\sin^n\xi_n + \frac{1}{2}\varepsilon\ \sin^n\eta_n,\quad \left(\xi_n\in\left[0,\tfrac{1}{2}(\pi-\varepsilon)\right],\ \eta_n\in\left[\tfrac{1}{2}(\pi-\varepsilon),\tfrac{\pi}{2}\right]\right)$$

$$\le \frac{\pi}{2}\cdot\sin^n\left(\frac{1}{2}(\pi-\varepsilon)\right)+\frac{1}{2}\varepsilon.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\left(\frac{1}{2}(\pi-\varepsilon)\right)=0$，则 $\exists N\in\mathbb{N}_+$，s.t. $\forall n>N$，有

$$\sin^n\left(\frac{1}{2}(\pi-\varepsilon)\right)<\frac{1}{2}\varepsilon\cdot\frac{2}{\pi}.$$

从而 对 $\forall n>N$，有

$$0\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx<\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\varepsilon\cdot\frac{2}{\pi}\right)+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=0$.

注：上例和例14 的解题方法称为"分治法"——分而治之.