§9.1 定积分概念

定义1 (分割)

设闭区间$[a,b]$内有n-个点，连同端点依次记为

$$a=x_0<\overbrace{x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}}^{n-1}<x_n=b,$$

将$[a,b]$分为n个小区间$\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$. 这些分点或小区间的全体集合称为$[a,b]$的一个分割.

小区间Δ_i的长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，记

$$\|T\|=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}. \qquad (0<\|T\|\le b-a).$$

称为分割T的模.

注：设T是$[a,b]$的一个分割，$\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m\}\subset[a,b]$，令

$$T'=T\cup\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m\}, \qquad (\text{分割的加细})$$

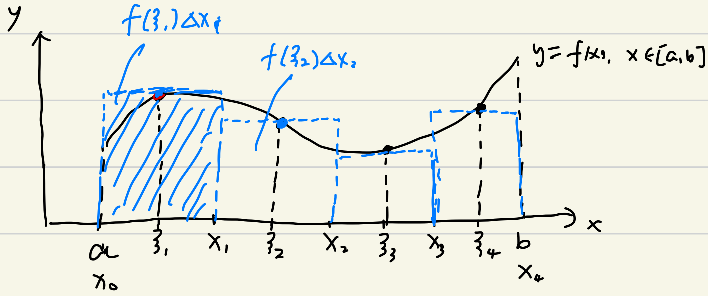
则$\|T'\|\le\|T\|$.

定义2 (Riemann和)

设f在$[a,b]$上有定义，对于$[a,b]$的一个分割$T=\{\overset{a}{x_0},x_1,\cdots,\overset{b}{x_n}\}$，任取点$\xi_i\in\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$，并作和

$$\sum_{i=1}^{n}\underbrace{f(\xi_i)}_{f\text{在点}\xi_i\text{的值.}}\underbrace{\Delta x_i}_{\text{小区间}\Delta_i\text{的长度}}$$

称该和式为f在$[a,b]$上的一个Riemann和.



几何意义：Riemann和表示一系列相邻的矩形面积的和.

定义2（Riemann积分）

设 f 在 $[a,b]$ 上有定义，J 是一个确定的实数.

若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，s.t. 对于 $[a,b]$ 的任何一个满足

$$\|T\|<\delta$$

的分割 T，以及对应于分割 T 的任何一个 Riemann 和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

都有 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right| < \varepsilon$.

则称函数 f 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积（简称可积），称 J 为 f 在区间 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分或定积分，记为

$$J=\int_a^b f(x)\,dx.$$

其中称 f 为被积函数，x 为积分变量，$[a,b]$ 为积分区间，a,b 分别称为定积分的下限，上限.

Q1、给定 $[a,b]$ 上的函数 f，如何判断 f 在 $[a,b]$ 上是否可积？

（可积的充分（必要）条件：§7.3、§7.6）连续，则一定可积.

Q2. 若 f 在 $[a,b]$ 上可积，如何计算 $\int_a^b f(x)dx$?

① 基于定义3. 将求 $\int_a^b f(x)dx$ 转为求 $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S_n}_{\text{Riemann}}$.

② 牛顿-莱布尼茨公式. 将求 $\int_a^b f(x)dx$ 转为求 $\int f(x)dx$.

注1. 形式上，记

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

（对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, s.t. 对 $[a,b]$ 的任何一个满足

$\|T\|<\delta$

的分割 $T=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, 以及对应于分割 T 的任何一个 Riemann 和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$,

都有 $\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$ ）

命题：设 (1) f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积；

(2) 对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 记 T_n 为 $[a,b]$ 上的一个分割

$T_n=\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, S_n 为对应于 T_n 的任意一个 Riemann 和.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n\|=0$, 则 $\{S_n\}$ 收敛，并且

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx.$$

证：由于 f 在 $[a,b]$ 上可积，则对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t. 对 $[a,b]$ 的任何一个满足

$\|T\|<\delta$

的分割 T, 以及对应于分割 T 的任何一个 Riemann 和 S, 都有

$$\left|S-\int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon. \quad (1)$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n\|=0$, 则 $\exists N$, s.t. $\forall n>N$, 有 $\|T_n\|<\delta$, 则由 (1) 式，对应于

分割 T_n 的任何一个 Riemann 和 S_n 均满足

$$\left| S_n - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx.$

应用：(1) 已知 f 在 $[a,b]$ 上可积，可利用 Riemann 和的极限来计算定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$.（例1，Ex2）

(2) 某些数列 $\{S_n\}$ 中的项 S_n 可视为 $[a,b]$ 上的可积函数 f 的 Riemann 和，可利用 $\int_a^b f(x)\,dx$ 来计算 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.（§9.2. Ex2）.

例：设 f 在 $[a,b]$ 上可积，对 $[a,b]$ 作 n 等分

$$T_n: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \quad x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

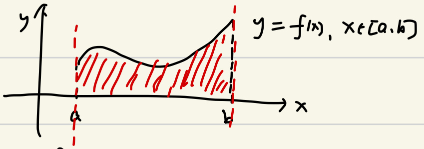
$\|T_n\| = \frac{b-a}{n} \to 0 \ (n\to\infty)$. 作 Riemann 和

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i), \quad \xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i].$$

ξ_i 可取区间 Δ_i 的端点. $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} S_n.$

注2. 定积分的几何意义.

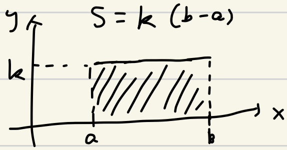
设 f 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x) \geq 0$，$x \in [a,b]$.



称定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 是由曲线 $y = f(x),\ x\in[a,b]$ 和直线：$x=a$，$x=b$ 以及 x 轴所围成的平面图形的面积.

（几何直观：先分割 $[a,b]$，得到一些相邻矩形面积的和，分割加细，极限情形得到平面图形的面积）

矩形的面积 (长×宽)



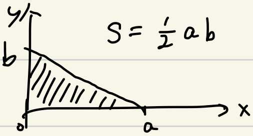
$f(x) \equiv k,\ x \in [a,b]$.

对于 $[a,b]$ 的任何分割 $T = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 以及 $\forall \xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i],\ i=1,2,\cdots,n$,

Riemann 和 $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = k(b-a)$.

所以 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = k(b-a)$.

三角形的面积



$f(x) = -\frac{b}{a}x + b,\ x \in [0,a]$

将 $[0,a]$ 作 n 等分, $T_n = \{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}a, a\}$,

$\|T_n\| = \frac{a}{n} \to 0\ (n\to\infty)$, 取 $\xi_i = x_i = \frac{a}{n}i,\ i = 1,2,\cdots,n$, 则

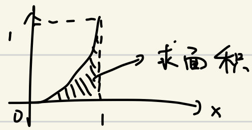
Riemann 和 $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{n}i + b\right)\cdot\frac{a}{n}$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{b}{n}i + b\right)\cdot\frac{a}{n} = -\frac{ab}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{ab}{n}\cdot n$$

$$= -\frac{ab}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + ab$$

则 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{ab}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + ab\right] = -\frac{ab}{2} + ab = \frac{1}{2}ab$.

例1. $y = f(x) = x^2,\ x \in [0,1]$.



将 $[0,1]$ 作 n 等分.

$T_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. 则 $\|T_n\| = \frac{1}{n} \to 0\ (n\to\infty)$.

取 $\xi_i = \frac{i}{n} \in \Delta_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}],\ i = 1,2,\cdots,n$, 则 Riemann 和

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

所以 $S = \int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$.