SÉRIES DE FOURIER

Sommaire

1 Introduction

Joseph Fourier est un savant du 19e siècle. Il est né à Auxerre en 1768 et mort à Paris en 1830. Il fut à la fois mathématicien, physicien et politicien. Il fit ses études à l'école normale de l'an III, devint professeur à l'école polytechnique en 1797. Il a découvert les séries trigonométriques — qui portent aujourd'hui son nom — alors qu'il étudiait la propagation de la chaleur. Il devint membre de l'académie des sciences en 1817, puis secrétaire perpétuel en 1822. Il entra à l'Académie française en 1826.

L'analyse de Fourier consiste à associer une série de fonctions à une fonction périodique donnée. Sous certaines hypothèses, nous verrons alors

que la somme de la série est égale à la fonction de départ.
Ce problème se pose naturellement en physique et en mécanique : l'analyse d'une vibration périodique consiste à la décomposer (*analyse harmonique*) en une somme de vibrations élémentaires, appelées *harmoniques* de la vibration principale, et représentées par les termes successifs d'une *série trigonométrique*[1]. L'étude de la reconstruction de la fonction à partir de sa série de Fourier, c'est-à-dire de la convergence de cette série, est la *synthèse harmonique*.

2 Semi-norme et produit hermitien

2.1 Définition

Comme il est précisé dans l'introduction de ce chapitre, nous n'allons nous intéresser qu'aux seules *fonctions périodiques*. En fait, les résultats que nous présentons ici ne peuvent s'appliquer qu'à un ensemble de ces fonctions pour assurer l'existence de coefficients ou "d'énergies" définis par des intégrales. Cet ensemble de fonctions est noté par $\mathscr{E}$ et il est défini comme suit :
Une fonction[2] $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$ si

a) x est 2π périodique ;

b) x est continue par morceaux[3], *i.e.* pour tout intervalle $[a, b]$, il existe un n-uplet $a_0 = a, a_1, \dots, a_n = b$ tel que x soit continue sur chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$;

c) x est de carré intégrable, *i.e.* sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, l'intégrale $\int_{a_i}^{a_{i+1}} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t$ converge.

Remarque 2 *Compte tenu de a), il suffit de vérifier b) et c) sur un intervalle de longueur 2π.*

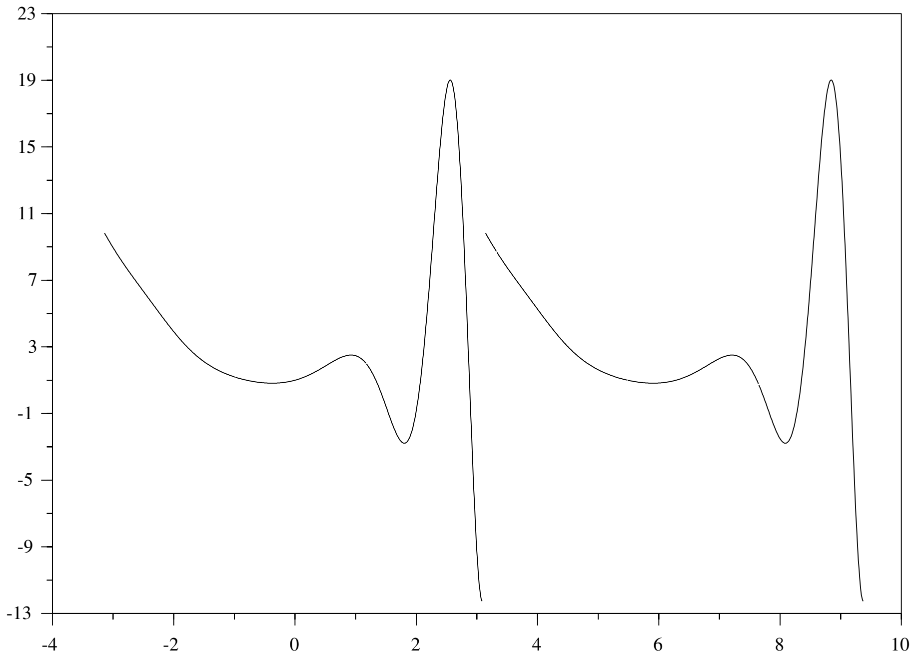
Exemple 1 *1. pour tout entier relatif k, les fonctions $t \mapsto \cos(kt)$, $t \mapsto \sin(kt)$ et $t \mapsto e^{ikt}$ sont dans $\mathscr{E}$;*

1. Une série trigonométrique est de la forme $\sum_n a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$, où a_n et b_n sont les termes généraux de deux suites de nombres complexes
2. nous utilisons à présent les notations communément employées en physique : x pour une fonction et t ou f pour une variable ...
3. la fonction $t \mapsto t\lceil 1/t \rceil$ n'est pas continue par morceaux, car l'ensemble de ses points de discontinuités n'est pas discret :$\{\pm 1/n | n \in \mathbb{N}\}$

2. *la fonction* $t \mapsto |\sin t|^{-1/3}$ *est dans* $\mathscr{E}$ *(se placer sur* $[0, 2\pi]$ *et considérer* $a_0 = 0$, $a_1 = \pi$ *et* $a_2 = 2\pi$*) ;*

3. $t \mapsto (\pi - t)/2$ *pour* $t \in]0, 2\pi[$ *(prolonger par* 2π *périodicité).*

4. *la fonction* 2π *périodique qui coïncide avec* $t \mapsto \cos(t^2)\exp(t) + t^2$ *sur* $] - \pi, \pi]$*. Le graphe de cette fonction sur deux périodes est :*



Il nous faut étudier comment il est possible d'associer à une fonction x de $\mathscr{E}$, une série trigonométrique (série de Fourier). Notons dès à présent qu'une série de Fourier possède deux écritures : l'une réelle et l'autre complexe.
En effet, considérons la série $S(t)$ définie par

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt),$$

et remplaçons les fonctions cosinus et sinus par leurs écritures complexes :

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} S(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{e^{int}+e^{-int}}{2} + b_n \frac{e^{int}-e^{-int}}{2i} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-int}. \end{aligned}$$

Ainsi, considérant pour tout entier n (positif ET négatif) les termes c_n définis par :

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{a_n - ib_n}{2} & \text{si } n > 0 \\ \dfrac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & \text{si } n < 0 \\ a_0 & \text{si } n = 0 \end{cases},$$

la série S peut alors s'écrire sous la forme complexe :

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

Réciproquement, si une série trigonométrique est donnée sous sa forme complexe, il est facile de retrouver son écriture réelle en considérant pour tout entier strictement positif n :

$$a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}), \qquad a_0 = c_0.$$

Cette précision étant donnée, nous allons maintenant travailler avec les séries trigonométriques sous leurs formes complexes.

2.2 Produit hermitien

Définition 2.1 *Soit deux fonctions x et y appartenant à $\mathscr{E}$. Le produit hermitien de x et y, noté $(x|y)$, est défini par*

$$(x|y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} x(t)\overline{y(t)}\, dt.$$

Remarque 3 1) *cette intégrale est absolument convergente d'après le théorème d'Hölder;*

2) *la valeur de cette intégrale ne dépend pas de α ;*

3) $(x_1 + x_2|y) = (x_1|y) + (x_2|y)$ *et* $(x|y_1 + y_2) = (x|y_1) + (x|y_2)$ *;*

4) $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$ et $(x|\lambda y) = \bar{\lambda}(x|y)$.

5) $(y|x) = \overline{(x|y)}$.

Cas particulier. On définit la semi-norme N_2 sur $\mathscr{E}$ par

$$N_2(x) = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |x(t)|^2 \, dt}.$$

Justification : pour tout complexe λ, $N_2(\lambda x) = |\lambda| N_2(x)$ et d'après le théorème de Minkowski on a

$$N_2(x+y) \leqslant N_2(x) + N_2(y).$$

Par ailleurs, $N_2(x) = 0$ implique que x est nulle en tout point où x est continue (x peut être non nulle en un point de discontinuité) : on dit que N_2 est une semi-norme car

$$N_2(x) = 0 \not\Leftrightarrow x = 0.$$

Théorème 2.1 *$\mathscr{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.*

Définition 2.2 *Deux fonctions x et y de $\mathscr{E}$ sont dites orthogonales si $(x|y) = 0$.*

Théorème 2.2 (Pythagore) *Si x et y sont deux fonctions de $\mathscr{E}$ orthogonales, alors*

$$(N_2(x))^2 + (N_2(y))^2 = (N_2(x+y))^2.$$

Preuve : il suffit d'utiliser la définition de la semi-norme.

$$N_2(x+y)^2 = (x+y \mid x+y) = (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y)$$

Les fonctions x et y étant orthogonales, le résultat attendu résulte de l'expression précédente.

Exemple 2 *Pour tout entier relatif k, définissons la fonction notée e_k par $e_k(t) = e^{ikt}$. Soit deux entiers l et k distincts, alors e_l et e_k sont orthogonales. De plus $(e_k|e_k) = 1$ pour tout entier k.*

3 Analyse harmonique

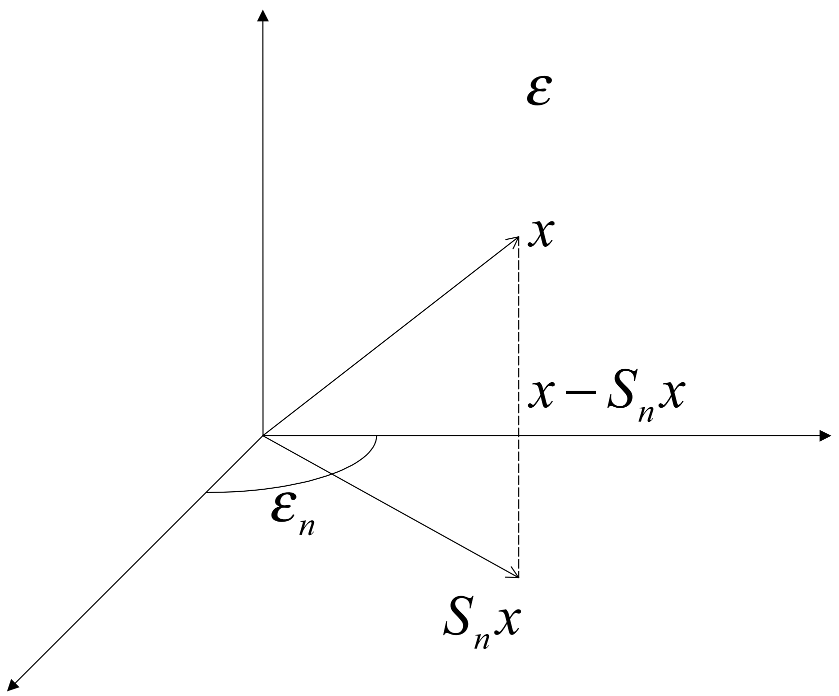
On cherche ici a exprimer une fonction de $\mathscr{E}$ sous la forme d'une série trigonométrique.

3.1 Coefficients de Fourier

On considère pour tout entier naturel n le sous-espace vectoriel $\mathscr{E}_n$ de $\mathscr{E}$ engendré par la famille $\{e_{-n}, \ldots, e_0, \ldots, e_n\}$:

$$y \in \mathscr{E}_n \iff \exists (\alpha_k)_{k \in [\![-n,n]\!]} \in \mathbb{C}^{2n+1}, \; y = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e_k.$$

Etant donné une fonction x de $\mathscr{E}$, on cherche un vecteur $S_n x$ de $\mathscr{E}_n$ tel que $x - S_n x$ soit orthogonale à tout élément de $\mathscr{E}_n$.



Nécessairement, un tel point ne peut qu'être orthogonal à tout élément e_k (de la base de $\mathscr{E}_n$) :

$$(x - S_n x | e_k) = 0 \iff (S_n x | e_k) = (x | e_k).$$

Donc, il existe une famille $(\gamma)_{k\in[\![-n,n]\!]}$ telle que

$$S_n x = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e_k\,, \quad \text{où } \gamma_k = (x|e_k).$$

Définition 3.1 (Coefficients complexes de Fourier) *Le k-ième coefficient de Fourier de x, noté c_k, est défini par*

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} x(t)e^{-ikt}\,dt.$$

Définition 3.2 (Série de Fourier complexe) *La série de Fourier (sous sa forme complexe) associée à la fonction x de $\mathscr{E}$ est définie par :*

$$Sx(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

Exemple 3 *Reprenons la quatrième fonction présentée dans l'exemple 1 page 10. Nous donnons ici les premiers coefficients de Fourier réels (i.e. les a_n et b_n) :*

$$a_0 = 3,13,\ a_1 = -2,92,\ a_2 = 1,18,\ a_3 = 0,82,\ a4 = -2,82,\ a_5 = 2,73$$

$$b_0 = 0,\ b_1 = -0,05,\ b_2 = -0,36,\ b_3 = 1,72,\ b_4 = -0,65,\ b_5 = -1,16.$$

Avec la connaissance des premiers coefficients de Fourier, nous sommes en mesure de tracer le graphe de $S_n x(t) = \sum_{k=0}^{n} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$. Les figures qui apparaissent sur les trois prochaines pages présentent l'allure du graphe sur une période de S_n, pour différentes valeurs de n.

Nous allons voir dans la suite de ce chapitre les liens qui unissent une fonction et ses coefficients de Fourier.
La proposition suivante nous montre que la géométrie de la fonction étudiée x se retrouve dans ses coefficients de Fourier.

Proposition 3.1 *Etant donnée une fonction x de $\mathscr{E}$, considérons la fonction $\hat{x}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $k \mapsto c_k$. Alors*

1) *si x est paire alors $\hat{x}$ l'est aussi ;*

2) *si x est impaire alors $\hat{x}$ l'est aussi ;*

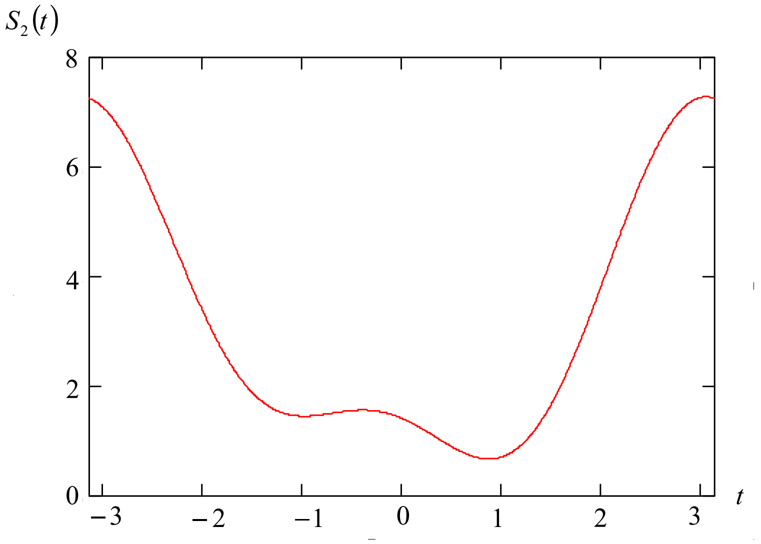


FIGURE II.1 – Graphe de la somme partielle de la série de Fourier pour $n = 2$

3) *si $x(\mathbb{R})$ est inclus dans $\mathbb{R}$ alors*

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ c_{-k} = \overline{c_k}\,;$$

4) *si x est π périodique, alors $c_{2n+1} = 0$ pour tout entier n ;*

5) *si on a pour tout réel t, $x(t+\pi) = -x(t)$, alors pour tout entier n, $c_{2n} = 0$.*

Preuve laissée en exercice au lecteur; ces résultats s'obtiennent par un simple calcul basé sur la définition des coefficients de Fourier et sur l'exploitation de la périodicité.

Le prochain résultat établi un lien entre l'énergie du signal temporel et celle de son expression fréquentielle.

Inégalité de Bessel.

$$(N_2(S_n x))^2 \leqslant (N_2(x))^2.$$

Théorème 3.1 (Inégalité de Bessel)

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |x(t)|^2\,dt. \tag{1}$$

En conséquence, si les coefficients de Fourier d'une fonction x appartenant à $\mathscr{E}$ vérifient

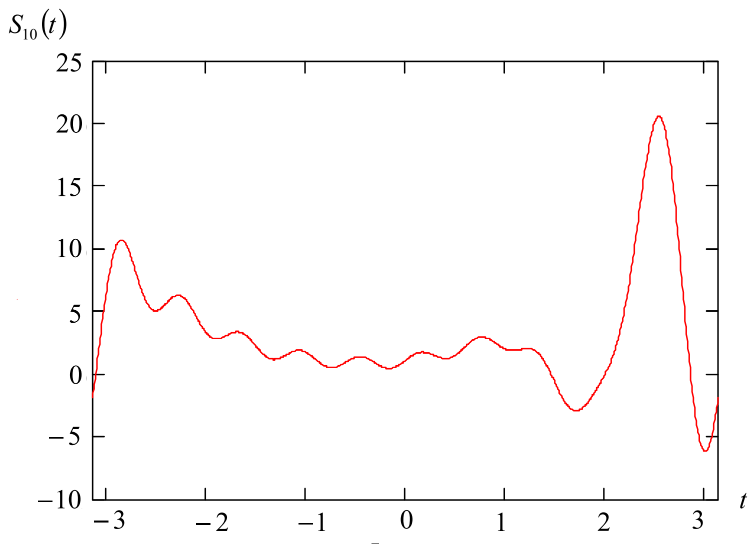


FIGURE II.2 – Graphe de la somme partielle de la série de Fourier pour $n = 10$

l'inégalité (1) *pour tout entier positif* n*, alors la série* $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ *converge et*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |x(t)|^2 \, dt.$$

Preuve : ce résultat se déduit aisément du Théorème de Pythagore. En effet, par construction, $x - S_n(x)$ *est orthogonale à tout élément de* $\mathscr{E}_n$*, donc elle est en particulier orthogonale à* $S_n x$*. D'après le Théorème de Pythagore, il vient*

$$N_2^2(S_n x) + N_2^2(x - S_n x) = N_2^2(x).$$

Or, comme $N_2^2(x - S_n x)$ *est nécessairement positive, il résulte de la relation précédente*

$$N_2^2(S_n x) \leqslant N_2^2(x).$$

Le résultat s'en déduit alors aisément en utilisant la définition de la semi-norme et le fait que la base (e_k) *est orthonormée.*

4 Synthèse harmonique

La synthèse harmonique a pour objet la reconstruction d'une fonction x de $\mathscr{E}$ connaissant la suite des coefficients de Fourier $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$: en quel sens est-elle la limite de la somme $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ quand n tend vers l'infini ?

Remarque : les théorèmes énoncés dans cette section ne seront pas démontrés.

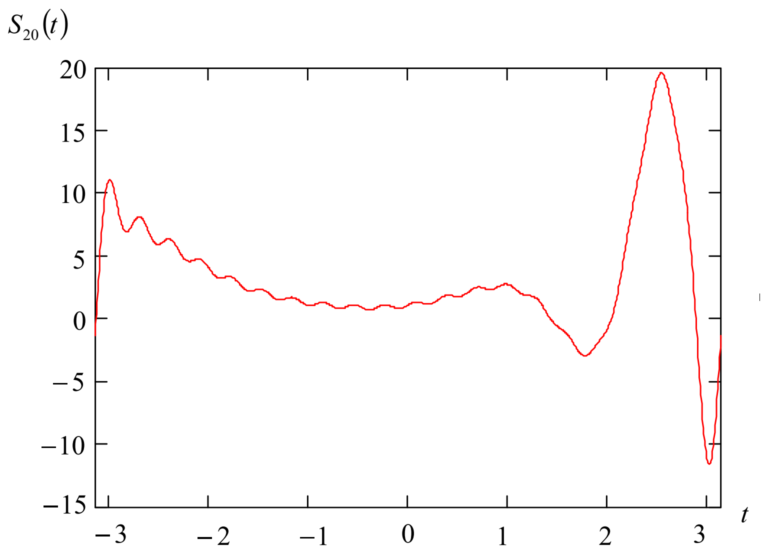


FIGURE II.3 – Graphe de la somme partielle de la série de Fourier pour $n = 20$

Théorème 4.1 (Parseval) *Soit une fonction x de $\mathscr{E}$. Si x est $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |x(t) - S_n x(t)|^2\, dt = 0.$$

Remarque 4 *On dit que $(S_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x en moyenne quadratique.*

Le corollaire suivant précise que l'énergie d'un signal ne dépend pas de sa représentation (temporelle ou fréquentielle).

Corollaire 4.1 *Soit une fonction x de $\mathscr{E}$. Si x est $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Exemple 4 *A l'aide de la fonction 2π périodique x définie par $x(t) = (\pi - t)/2$ pour $t \in]0, 2\pi]$, montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$.*

Corollaire 4.2 *Soit deux fonctions x et y de $\mathscr{E}$, toutes deux $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} x(t)\overline{y(t)}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\overline{\hat{y}(k)}.$$

Théorème 4.2 *Soit une fonction x de $\mathscr{E}$ et $[a,b]$ tels que $b-a\leqslant 2\pi$ et*

1) *x est continue sur $[a,b]$;*
2) *la série $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ converge uniformément sur $[a,b]$.*

Alors pour tout t de $[a,b]$ on a

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} S_n x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

Le théorème suivant est celui qui sera principalement utilisé pour faire les exercices de travaux dirigés.

Théorème 4.3 *Soit x une fonction $\mathscr{C}^1$ par morceaux, 2π périodique. On suppose que x' est dans $\mathscr{L}^2$. Alors*

1) *pour tout réel t_0, les limites à gauche et à droite de x en t_0 existent et sont finies. On les note respectivement $x(t_0^-)$ et $x(t_0^+)$. Si x est continue en t_0, alors $x(t_0^-)=x(t_0^+)=x(t_0)$.*
2) *pour tout réel t_0, on a*

$$\lim_{n\to\infty} S_n x(t_0) = \frac{x(t_0^+)+x(t_0^-)}{2}.$$

5 Fonctions T-périodiques

Les définitions et résultats présentés ci-avant se généralisent au cadre des fonctions T-périodiques en introduisant la pulsation $\omega = 2\pi/T$.

En particulier, les coefficients de Fourier s'écrivent

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

Les coefficients réels de la série de Fourier d'une fonction T-périodique sont donnés par les relations suivantes.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t)\,\mathrm{d}t, \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour } n \geqslant 1, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour } n \geqslant 1. \end{aligned}$$