Transformée de Fourier

Sommaire

1 Introduction

L'objet de ce chapitre est détendre l'analyse de Fourier aux signaux apériodiques. A cette fin, nous allons présenter et étudier la transformée de Fourier, vue comme une généralisation – en un sens – donnée aux séries éponymes. Les séries de Fourier ne peuvent s'utiliser que pour des fonctions périodiques et l'idée que nous allons suivre ici est d'observer ce que devient leur définition si la période du signal tend vers l'infini – c'est-à-dire s'il « devient » apériodique.

Pour un signal x de période T, la grandeur qui « pèse » la contribution de la fréquence n/T – n étant un entier quelconque – est le coefficient c_n

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t$$

où ω est la pulsation du signal, définie par

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Affranchissons nous du coefficient $1/T$ en facteur de l'intégrale : il n'a pas d'incidence sur la relation d'ordre entre les coefficients c_n puisqu'il est indépendant de n. Il agit comme un coefficient de normalisation.
Observons les bornes de l'intégrales : elles tendent vers plus ou moins l'infini quant T tend vers l'infini.
Enfin, étudions le comportement du terme situé dans l'exponentielle, toujours quand T tend vers l'infini. Ce terme s'écrit

$$-in\omega t = -2i\pi\frac{n}{T}t$$

et la quantité n/T décrit tous les réels quand n parcourt les entiers relatifs et T tend vers l'infini. En effet, pour $T = 10$, les nombres de la forme n/T, où n parcours $\mathbb{Z}$, sont les nombres décimaux comportant une unique décimale. Pour $T = 10^3$, nous obtenons les nombres décimaux ayant trois chiffres décimaux. Nous comprenons ainsi que lorsque T tend l'infini et que n parcourt $\mathbb{Z}$, les nombres de la forme n/T décrivent l'ensemble des réels. Notons cette quantité f. Tout comme n/T est une fréquence – multiple de l'inverse d'un temps – f est aussi une fréquence d'un point de vue physique.
Ainsi, le passage à la limite dans la formule définissant c_n conduit à

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2i\pi f t}\,\mathrm{d}t.$$

Cette expression – notée par la suite $\mathrm{TF}[x](f)$ ou plus simplement $X(f)$ – définit la transformée de Fourier du signal apériodique x calculée au point de fréquence f. Cette grandeur renseigne donc sur la contribution de la fréquence f au signal x. Cette formule conduit donc au passage d'une description temporelle d'un signal apériodique à l'une [1] de ses descriptions dans l'espace des fréquences. Nous avons vu que les séries de Fourier permettent la transformation inverse – passage du fréquentiel au temporel – pour les signaux périodiques. Etudions donc leur expression quand, une fois encore, la période T tend vers l'infini : pour un réel t (temps)

$$Sx(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}.$$

1. En effet, il n'y a pas unicité de l'expression de la transformée de Fourier, comme vous pouvez le constater dans la littérature.

Passant du cadre périodique au cadre apériodique, nous avons observé que les grandeurs n et f se correspondent – elles décrivent une fréquence; n le faisant par l'intermédiaire de la quantité n/T. Ainsi la somme discrète[2] suivant le paramètre n deviendra une somme continue – une intégrale donc – suivant le paramètre f. De plus, les grandeurs qui correspondent aux coefficients c_n sont les $X(f)$ – où n décrit $\mathbb{Z}$ et f décrit $\mathbb{R}$. Ainsi, la formule de la série de Fourier conduit à l'expression

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{2i\pi f t}\,\mathrm{d}f.$$

Cette dernière définit la transformée de Fourier inverse de X : elle permet le passage du cadre fréquentiel au cadre temporel.

2 Définition et existence

2.1 Définition

Définition 2.1 *A la fonction x, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes, on associe les deux fonctions*

$$\mathrm{TF}[x](f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2i\pi f t}\,dt, \quad \overline{\mathrm{TF}}[x](t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(f)e^{2i\pi f t}\,df.$$

Ces deux fonctions sont appelées (lorsqu'elles existent), transformée et co-transformée de Fourier de x. Elles sont encore respectivement notées $\mathrm{TF}[x]$ *et* $\overline{\mathrm{TF}}[x]$.

Remarque 8 *Les couples suivants peuvent également être retenus pour définir la transformée de Fourier et sa co-transformée de Fourier :*

$$\begin{cases} \mathrm{TF}[x](f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-ift}\,dt \\ \overline{\mathrm{TF}}[x](t) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(f)e^{ift}\,df \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \mathrm{TF}[x](f) = \displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-ift}\,dt \\ \overline{\mathrm{TF}}[x](t) = \displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x(f)e^{ift}\,df \end{cases}$$

2. Il est ici question de la somme définissant $Sx(t)$.

Les définitions des transformée et co-transformée de Fourier permettent d'obtenir par de simples calculs (changement de variables) des propriétés élémentaires liées à la parité des fonctions.

Propriété 2.1 (*i*) $\overline{\mathrm{TF}}[x](u) = \mathrm{TF}[x](-u)$;

(*ii*) *si x est paire (respectivement impaire), alors $\overline{\mathrm{TF}}[x]$ et $\mathrm{TF}[x]$ sont paires (resp. impaires) et égales (resp. opposées).*

Le tableau suivant résume les propriétés de la transformée de Fourier liées à la parité :

Fonction	Transformée de Fourier
Paire	Paire
Impaire	Impaire
Réelle et paire	Réelle et paire
Réelle et impaire	Imaginaire et impaire
Imaginaire et paire	Imaginaire et paire
Complexe et paire	Complexe et paire
Complexe et impaire	Complexe et impaire
Partie réelle paire et partie imaginaire impaire	Réelle
Partie réelle impaire et partie imaginaire paire	Imaginaire

2.2 Existence

Fonctions de module sommable

Les intégrales définissant $\mathrm{TF}[x]$ et $\overline{\mathrm{TF}}[x]$ ne sont pas systématiquement convergentes, donc les transformée et co-transformée de Fourier n'ont pas toujours un sens. Cependant, si x est à module sommable[3] , alors elles sont définies en tout point, puisque

$$|x(t)e^{-2i\pi f t}| = |x(t)| \quad \text{et} \quad |x(f)e^{2i\pi f t}| = |x(f)|.$$

3. Une fonction $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est à module sommable sur $\mathbb{R}$ si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,\mathrm{d}t$$

est définie. L'ensemble de ces fonctions est noté $\mathscr{L}_1(\mathbb{R})$.

Ainsi, comme le module de l'intégrale est majoré par l'intégrale du module, il vient

$$|\mathrm{TF}\,[x](f)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,\mathrm{d}t$$

Cette dernière intégrale définit ce qui est appelé la *norme un* de x, notée $\|x\|_1$. Cette quantité est le pendant de la norme bien connue d'un vecteur du plan ou de l'espace.
Enfin, en passant à la borne supérieure [4] sur f,

$$\|\mathrm{TF}\,[x]\|_\infty \leq \|x\|_1 \quad \text{et} \quad \|\overline{\mathrm{TF}}[x]\|_\infty \leq \|x\|_1\,;$$

(la seconde majoration se démontre de la même façon). Nous admettons, pour l'instant, la seconde partie du résultat suivant. Elle sera jusitifiée ultérieurement.

Théorème 2.1 *Si x est de module sommable, alors* $\mathrm{TF}\,[x]$ *existe et est une fonction continue et bornée, satisfaisant à*

$$\|\mathrm{TF}\,[x]\|_\infty \leq \|x\|_1,$$

et telle que

$$\lim_{|f|\to+\infty} \mathrm{TF}\,[x](f) = 0.$$

DÉMONSTRATION.— *L'étude de cette démonstration n'est pas une nécessité dans le cadre de ce cours.*
Une démonstration possible se fait en trois temps :

- *La TF de la fonction indicatrice* [5] χ *d'un intervalle fermé borné donné* $[a,b]$ *est*

$$TF[\chi](f) = \frac{e^{ifb} - e^{ifa}}{if}.$$

Il vient alors que $|TF[\chi](f)|$ *tend vers* 0 *quand* f *tend vers l'infini.*

---

4. La borne supérieure d'un ensemble de valeurs est – quand elle est définie – le plus petit des majorants de cet ensemble. Etant donné une fonction g définie sur l'ensemble des réels, la borne supérieure de l'ensemble des valeurs prises par g, c'est-à-dire $\{g(x),\, x \in \mathbb{R}\}$, est notée

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} g(x).$$

Cette quantité définit une norme de fonctions, une norme pour g ici. Elle est le pendant de la norme d'un vecteur du plan ou de l'espace. Cette norme est notée $\|\cdot\|_\infty$ et se dit norme infini (ou norme du sup) :

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|.$$

5. Fonction qui vaut un en tout point de l'ensemble et qui vaut zéro ailleurs.

- *Par linéarité, nous obtenons d'après le point précédent, la démonstration du théorème pour toutes les fonctions en escalier*[6].

- *Enfin, toute fonction de module sommable est limite d'une suite de fonctions en escalier*[7] *:*
  Ainsi, pour un réel $\varepsilon > 0$ fixé et $x \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$, il existe une fonction en escalier x_ε telle que
  $$\|x - x_\varepsilon\|_1 < \varepsilon.$$
  Comme
  $$TF[x](f) = TF[x_\varepsilon](f) + (TF[x](f) - TF[x_\varepsilon](f)),$$
  il vient
  $$\begin{array}{rcl} |TF[x](f)| & \leq & |TF[x_\varepsilon](f)| + |TF[x](f) - TF[x_\varepsilon](f)| \\ & < & |TF[x_\varepsilon](f)| + \varepsilon, \end{array}$$
  d'où la conclusion du théorème en passant à la limite dans l'inégalité précédente. □

Remarque 9 *Si x est de module sommable, il n'en est pas toujours de même de* $\mathrm{TF}[x]$ *(considérer la fonction Π (valant 1 sur $]-1/2;1/2[$, $1/2$ en $-1/2$ et $1/2$ et 0 ailleurs) dont la transformée de Fourier est $t \longmapsto \sin(\pi t)/(\pi t)$).*

3 Formule d'inversion

La connaissance de $\mathrm{TF}[x]$ permet de reconstituer, en général, la fonction x dont elle est issue.

Théorème 3.1 *Si x et $\mathrm{TF}[x]$ sont de module sommable, alors*[a]

$$\overline{\mathrm{TF}}\left[\mathrm{TF}[x]\right] \overset{p.p.}{=} x \quad et \quad \mathrm{TF}\left[\overline{\mathrm{TF}}[x]\right] \overset{p.p.}{=} x.$$

Si de plus x est continue, alors

$$\overline{\mathrm{TF}}\left[\mathrm{TF}[x]\right] = x \quad et \quad \mathrm{TF}\left[\overline{\mathrm{TF}}[x]\right] = x.$$

a. Etant donnée deux fonctionx g et h, la notation
$$g \overset{p.p.}{=} h$$
se lit « g est presque partout égale à h ». Cela signifie que g et h diffèrent l'une de l'autre sur un ensemble de mesure nulle.

6. Un fonction en escalier est une fonction constante par morceaux et elle peut se décomposer comme somme pondérée de fonctions indicatrices.
7. L'ensemble des fonctions en escalier est une partie dense de $\mathscr{L}_1(\mathbb{R})$.

Pour cette raison, TF et $\overline{\text{TF}}$ sont appelées respectivement transformée (directe) et transformée inverse de Fourier.
Le résultat suivant (admis) précise le précédent aux points de discontinuité de la fonction x (en pratique, de nombreux signaux sont discontinus).

Théorème 3.2 (Dirichlet-Fourier) *Si x est de module sommable, et est continue et dérivable sur tout segment — sauf éventuellement en un nombre fini de points, qui sont des points de discontinuité de première espèce pour x ou x' —, alors*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda} \text{TF}[x](f)e^{2i\pi f t}\,df = \frac{x(t_+)+x(t_-)}{2},$$

ou encore

$$\text{vp}\int_{-\infty}^{\infty} \text{TF}[x](f)e^{2i\pi f t}\,df = \frac{x(t_+)+x(t_-)}{2}.$$

Exemple 12 TF $[\Pi]$ *n'est pas de module sommable ; nous avons alors, en convenant que* $\Pi(1/2)=\Pi(-1/2)=1/2$ *:*

$$\Pi(t) = \text{vp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}e^{2i\pi f t}\,df = 2\int_0^{\infty}\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\cos(2\pi f t)\,df.$$

Pour $t=0$, on obtient la valeur de l'intégrale remarquable (après le changement de variable $\pi f = t$) :

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Interprétation physique : le théorème de réciprocité établit que le signal x est la superposition d'oscillations harmoniques de fréquences f et d'amplitudes complexes TF $[x](f)$.

4 Propriétés

4.1 Linéarité

Elle découle directement de la linéarité de l'intégrale (λ complexe) :

$$\text{TF}[x+y] = \text{TF}[x]+\text{TF}[y] \quad \text{et} \quad \text{TF}[\lambda x] = \lambda \text{TF}[x].$$

4.2 Retard et changement d'échelle

Les propriétés suivantes s'obtiennent directement à partir des définitions :

$$\mathrm{TF}\,[x(\cdot - t_0)](f) = e^{-2i\pi f t_0} \times \mathrm{TF}\,[x](f), \quad \mathrm{TF}\,[x](f - f_0) = \mathrm{TF}\,[e^{2i\pi f_0 \cdot} x(\cdot)](f)$$

$$\mathrm{TF}\,[x(k\cdot)](f) = \frac{1}{|k|} \times \mathrm{TF}\,[x]\left(\frac{f}{k}\right), \quad k \neq 0.$$

4.3 Convolution et transformation de Fourier

Théorème 4.1 *Si x et y sont de module sommable, nous savons que $x * y$ est aussi de module sommable ; nous avons alors*

$$\mathrm{TF}\,[x * y] = \mathrm{TF}\,[x] \times \mathrm{TF}\,[y],$$

(la transformée d'un produit de convolution est le produit usuel des transformées).

La propriété résulte de la possibilité (via le théorème de Fubini) d'écrire les égalités suivantes, sous les hypothèses du théorème, à l'aide d'un changement de variables de jacobien égal à 1 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{TF}\,[x * y](f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t-u)y(u)\,\mathrm{d}u \right) e^{-2i\pi f t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u)y(u)e^{-2i\pi f t}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(r)y(s)e^{-2i\pi f(r+s)}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(r)e^{-2i\pi f r}\,\mathrm{d}r \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(s)e^{-2i\pi f s}\,\mathrm{d}s \right) \\
&= \mathrm{TF}\,[x](f) \times \mathrm{TF}\,[y](f).
\end{aligned}$$

4.4 Valeurs moyennes

En écrivant directement la définition de la transformée (resp. co-transformée) de Fourier en $f = 0$ (resp. $t = 0$), il vient la propriété suivante :

Propriété 4.1 *Sous réserve d'existence et de continuité en* 0*, nous avons :*

$$\begin{aligned} X(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt, \\ x(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,df. \end{aligned}$$

La première égalité signifie simplement que l'amplitude de la composante de fréquence nulle du spectre de x est *égale* à la mesure de l'aire sous-tendue par le graphe de x dans l'espace temporel. C'est ainsi que toute fonction obtenue par transformation d'un signal x, laissant invariant l'aire sous-tendue par le graphe (translation,...), aura une composante de fréquence nulle ayant la même amplitude que celle de x.

5 Aspect énergétique

Théorème 5.1 (Parseval-Plancherel) *Si x et $\mathrm{TF}[x]$ sont de carré sommable, alors*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{TF}[x](f)|^2\,df.$$

Ce théorème traduit le fait que si on interprète un signal comme la superposition d'harmoniques complexes au moyen de la transformation de Fourier, alors les énergies de ces dernières se superposent pour donner l'énergie de x.

Remarque 10 *Carleman a montré en 1944 que le Théorème de Pancherel (démontré en 1910) reste vrai si une des intégrales existe.*

6 Dérivation

6.1 Dérivation temporelle

Théorème 6.1 *Si x est de module sommable et possède des dérivées jusqu'à l'ordre m, elles aussi de module sommable, alors*

$$\mathrm{TF}\,[x^{(k)}](f) = (2i\pi f)^k \times \mathrm{TF}\,[x](f), \quad k = 0, 1, \ldots, m.$$

DÉMONSTRATION.— *Il suffit de montrer ce résultat pour $m = 1$, puis de procéder par récurrence. Par une intégration par parties, nous obtenons*

$$\begin{aligned} \mathrm{TF}\,[x'](f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x'(t) e^{-2i\pi f t}\, dt \\ &= \left[x(t) e^{-2i\pi f t}\right]_{-\infty}^{\infty} + 2i\pi f \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2i\pi f t}\, dt. \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme x' est sommable, la limite

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a x'(t)\, dt$$

existe, et comme x' est également continue par hypothèse, nous avons

$$\int_0^a x'(t)\, dt = x(a) - x(0).$$

Donc x a une limite en ∞ (idem en $-\infty$). De plus, cette limite est nécessairement nulle puisque x est sommable. Ainsi, le terme entre crochets apparaissant dans l'intégration par parties est nul et finalement

$$\mathrm{TF}\,[x'](f) = 2i\pi f \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2i\pi f t}\, dt = 2i\pi f \mathrm{TF}\,[x](f).$$

□

Corollaire 6.1 (Décroissance de la transformée de Fourier) *Sous les hypothèses du théorème, nous avons*

$$|\mathrm{TF}\,[x](f)| \leq \frac{\|x^{(k)}\|_1}{|2\pi f|^k}, \quad k = 0, 1, \ldots m.$$

Si x possède des dérivées sommables jusqu'à l'ordre m, alors $\mathrm{TF}\,[x]$ *décroît plus vite que les puissances $1/|f|^k$ ($k = 0, 1, \ldots m$) ; en particulier, si x est indéfiniment dérivable et si toutes ses dérivées sont sommables, alors* $\mathrm{TF}\,[x]$ *décroît plus vite que toutes les puissances de $1/|f|$.*

DÉMONSTRATION.— *Cette démonstration est laissée au lecteur. Il suffit d'établir le résultat pour m égale à 1 à partir du théorème précédent, puis de généraliser par un argument de récurrence.* □

6.2 Dérivation fréquencielle

Théorème 6.2 *Si $t \mapsto t^m x(t)$ est sommable, alors $\mathrm{TF}[x]$ possède des dérivées continues jusqu'à l'ordre m, et nous avons*

$$(\mathrm{TF}[x])^{(k)}(f) = \mathrm{TF}[(-2i\pi\cdot)^k x(\cdot)](f), \quad k = 0, 1, \ldots m.$$

DÉMONSTRATION.— *Il suffit encore de montrer la propriété pour $m = 1$: si x et $t \mapsto tx(t)$ sont sommables, alors nous pouvons dériver sous le signe d'intégration dans l'expression qui définit $\mathrm{TF}[x](f)$; d'où le résultat.* □

Corollaire 6.2 *Dire que x et $t \to t^m x(t)$ sont sommables entraî ne, dans le cas où ces fonctions sont bornées à l'infini, que $x(t)$ décroît plus vite que les puissances $1/|t|^k$ ($k = 0, 1, \ldots m$).*

Si $x(t)$ décroît plus vite à l'infini que $1/|t|^m$, alors $\mathrm{TF}[x]$ possède des dérivées jusqu'à l'ordre m ; en particulier, si $x(t)$ décroît plus vite à l'infini que toutes les puissances de $1/|t|$, alors $\mathrm{TF}[x]$ est indéfiniement dérivable.

6.3 Transformation de Fourier dans $\mathscr{S}$

Définition 6.1 *Une fonction x est à décroissance rapide à l'infini, si $x(t)$ tend vers 0 plus rapidement que toutes les puissances de $1/t$ lorsque t tend vers l'infini :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{|t| \to \infty} t^k x(t) = 0.$$

Définition 6.2 *L'ensemble de* **Schwartz** *$\mathscr{S}$ est celui des fonctions indéfiniment dérivables qui sont à décroissance rapide à l'infini, ainsi que toutes leurs dérivées :*

$$x \in \mathscr{S} \iff \begin{cases} x \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \lim_{|t| \to \infty} t^k x^{(p)}(t) = 0. \end{cases}$$

L'ensemble $\mathscr{S}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
D'après les paragraphes précédents, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Théorème 6.3 *La transformation de Fourier $\mathscr{F}$ établit un automorphisme linéaire de $\mathscr{S}$ dans lui-même ; l'automorphisme réciproque étant* $\overline{\mathrm{TF}}$.

7 Transformée de Fourier en dimension 2

Nous avons présenté dans les paragraphes précédents la transformée de Fourier en dimension un. Elle s'applique en particulier à l'étude de signaux qui ne dépendent que d'une seule variable (ou paramètre) : en général le temps. Nous trouverons par exemple les signaux sonores, électroniques, radio. . . .
En revanche, cet outil ne s'applique pas, par exemple, à l'étude d'une image. Cependant, chacun des points d'une image présente une intensité lumineuse et une couleur (ou teinte). Ainsi, une image n'est autre qu'un signal à deux dimensions et l'étude de son spectre de fréquences peut se poser.
Nous avons vu que la transformée de Fourier est un outil bien adapté à ce travail pour les signaux unidimensionels. Il ne reste qu'à l'étendre à la dimension deux.
Pour ce faire, rappelons la formule de la transformée de Fourier d'une fonction x de la variable réelle t :

$$\mathrm{TF}[x](f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2i\pi f t}\,\mathrm{d}t.$$

Considérons maintenant une fonction (toujours notée x) de $\mathbb{R}^2$, soit

$$x\colon (u,v) \longmapsto x(u,v).$$

Le couple (u,v) est un point M du plan ; ce dernier étant la variable de la fonction x. Pour généraliser la transformée de Fourier à la dimension deux, il faut considérer un espace fréquentiel plan. Notons $F=(f_1,f_2)$ un de ses points. Notre "nouvel" outil va alors être défini par :

$$\mathrm{TF}[x](F) = \int_{\mathbb{R}^2} x(M)e^{-2i\pi FM}\,\mathrm{d}M.$$

Il reste à préciser la nature de FM. Il s'agit tout simplement du produit scalaire ! Ainsi nous retiendrons la définition suivante.

Définition 7.1 *Soit une fonction x définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. La transformée de Fourier de x est la fonction $\mathrm{TF} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{C}$ définie par*

$$\mathrm{TF}\,[x](f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(u,v)e^{-2i\pi(uf_1+vf_2)}\,du\,dv,$$

à condition que l'intégrale ci-dessus converge.

Les composantes f_1 et f_2 sont les fréquences spatiales du signal suivant les directions des vecteurs générateurs du plan fréquentiel. Elles s'expriment en unité d'angle ou nombre de cycles par unité de longueur.