

计算几何从入门到放弃

北京大学 吉如一

计算几何与模拟

- 误区：计算几何与模拟是强队才需要训练的
- 特点：消耗机时长、算法能力要求低、错误率高
- 实际上：对实力较弱的队伍来说是一个快速提升点
- 原因：这两类题目考察 写代码 而不是 想算法

小调研

- 如果你的队伍：
 - 在比赛中后期经常出现长时间的空机
 - 有一名队员在比赛后期经常挂机
- 可以尝试让这一名队员去特训模拟/计算几何

核心思想

- 特点：消耗机时长、算法能力要求低、错误率高
- 核心：**降低错误率**
- 稳定计算几何模板
 - （功能）不断做题，测试模板正确性
 - （使用）**封装**：让每一个功能的代码行数尽可能少

两种流派

- 旋转平移流

```
point turn(db k1){return (point){x*cos(k1)-y*sin(k1),x*sin(k1)+y*cos(k1)};}
```

- 板子流
 - <https://onlinejudge.u-aizu.ac.jp/courses/library/4/CGL/all>

Part1: 基础

- 在这一部分，我们过一下计算几何中的单元操作。

团队核心

- 叉积 $x_1 y_2 - x_2 y_1$
- 点积 $x_1 x_2 + y_1 y_2$
- 如何判断一个多边形的顶点是顺时针排序的还是逆时针排序的

常见元素

- 点 (坐标)
- 线 (两个点, 带方向)
- 圆 (点, 半径)

单元操作

- 点到直线的投影
- 直线/圆 和 直线/圆 的交点
- 点/圆 到 圆 的切线
- 点和多边形位置关系

凸包快速操作

- 求凸包
- 旋转卡壳
- 点到凸包的切线（以及判断位置关系）
- 直线和凸包的交点
- 闵可夫斯基和

JSOI2018

- 一个点集的领地为它的凸包（包括边界）
- 给出两个点集 A, B 以及 q 组询问
- 每组询问给出一个向量，问把 A 沿着这个向量平移后，领地是否会和 B 有交
- 点集大小, $q \leq 100000$

点定位

- 民工版本：点与多边形位置关系
- 有 n 个边界不相交的圆（可能包含）
- 如何抠出边界关系？
- 平面图转对偶图
- 如果不连通？

格林公式

- 圆并
 - 恰好被 k 个圆覆盖的面积
- 多边形面积交
 - 关键步骤：求一条直线和多边形交的状态

三维几何 (Skip)



团队核心

- 点积
- 叉积（长度为形成平行四边形面积）
- 混合积（与叉积结果的点积/行列式）

左手系右手系

- 右手四指指向 x 轴手心朝向 y 轴，如果拇指指向 z 轴正方向则为右手系。
- 混合积为正当且仅当三个向量成右手系。
- $a, b, \text{cross}(a, b)$ 一定是右手系

常见元素

- 点 (坐标)
- 线 (两个点, 带方向)
- 面 (平面一个点和法向量, 带方向)

单元操作

- 点 到 线/面 的距离（投影）
- 线 和 面 的交点
- 线 到 线 的距离
- 面 和 面 的交线

单元操作

- 点 到 线/面 的距离（投影）
- 线 和 面 的交点
- 线 到 线 的距离
- 面 和 面 的交线
- 三维凸包

练习1

- 给定单位球面上四个点 P_1, P_2, P_3, P_4
- 问 P_1, P_2 球面上最短路和 P_3, P_4 球面上最短路是否有交。
- 如何判断一个点是否在 P_1P_2 最短路上？

NAIPC-2017 B

- 给定三维空间中的 n 个点
- 求最小体积的圆柱覆盖所有点（要求圆柱的至少有一个底面上有大于等于 3 个点）
- $n \leq 1000$

反演

- 点 A 对点 O 反演至点 A'
 - OA 与 OA' 方向相同，且长度乘积为 1
- 圆 C 对点 O 反演
 - 若 O 在 C 上，则变成不过 O 的直线
 - 否则还是一个不过 O 的圆

HDU6158

- 输出前 n 个圆的面积和
- $n \leq 1e9$

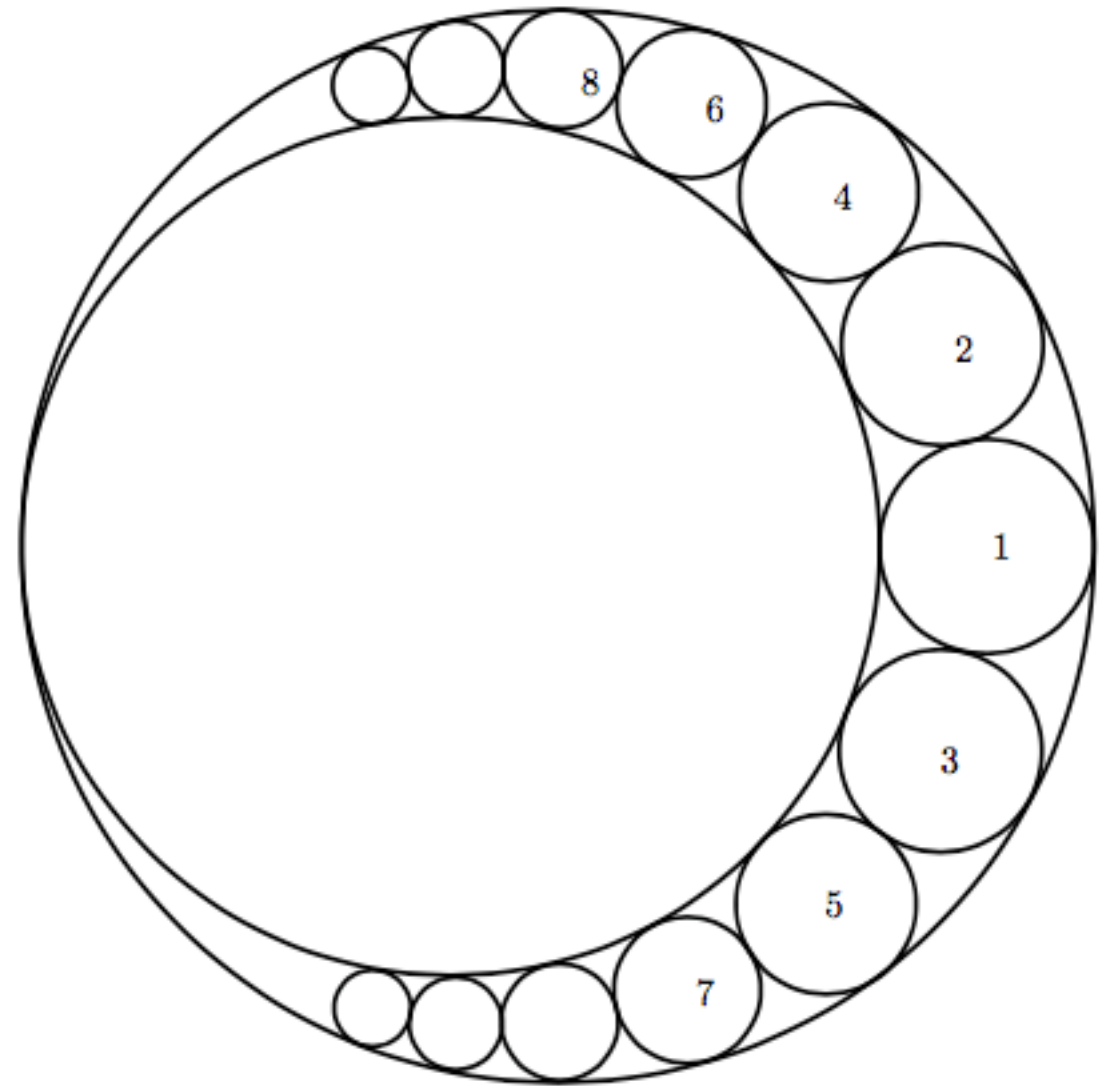


Figure 1: A Simple Example

Part2: 关键点思想1

- 计算几何中涉及到的变量往往是连续的
 - 行走的距离、转弯的角度等等
- 因此：最优化问题中，方案集合 S 通常是无穷的
- 找到有限集 S' 满足：1. 包含最优解，2. 所有元素都是合法解或者所有非法解都能被排除。

Tokyo2014 H

- 平面上有 n 个点是障碍物
- 求一个半径为 R 的圆盘从 s 到 t 的最短路
- $n \leq 8$

Tokyo2014 H

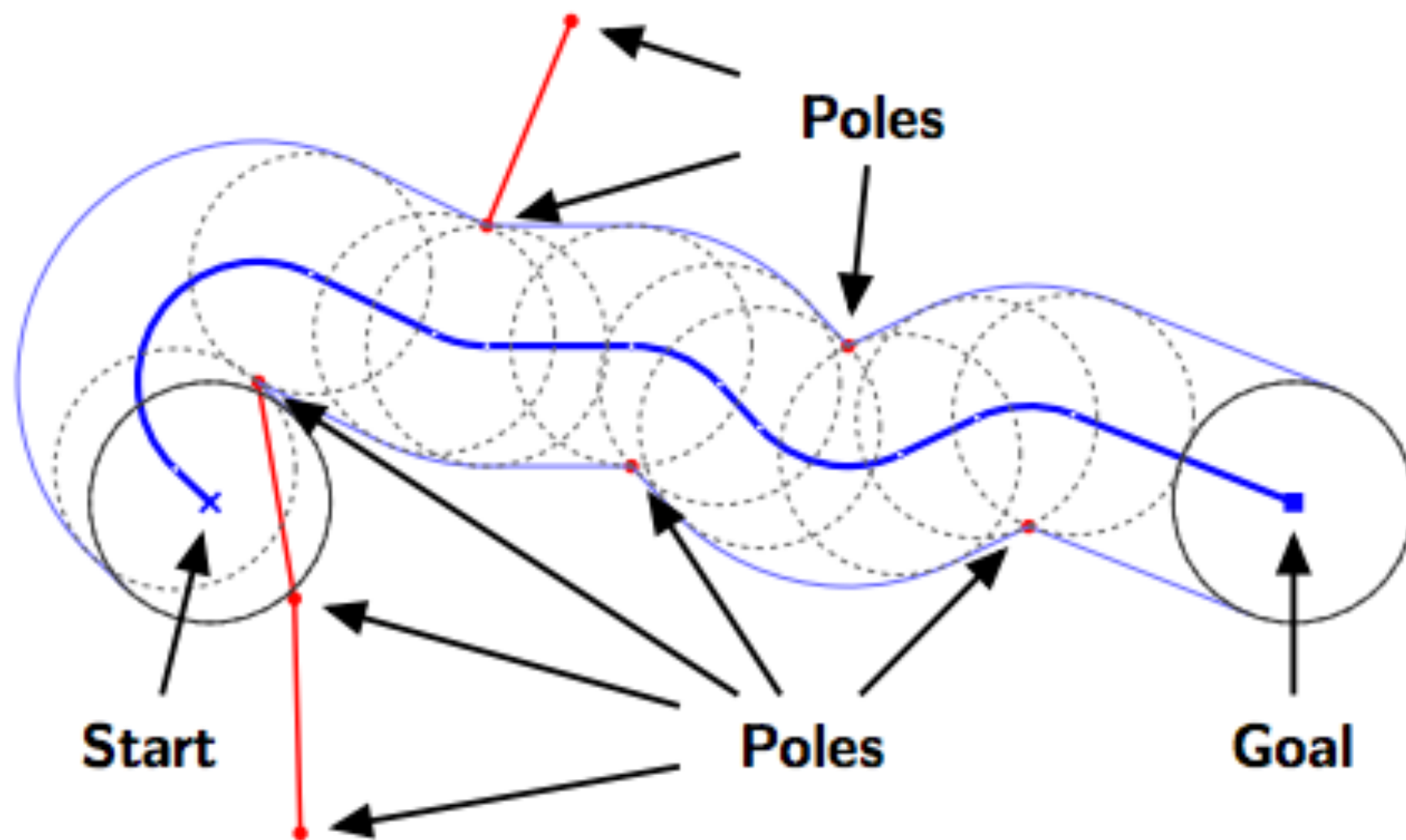


Figure H.1. The shortest path for a sample layout

JAG2016 I

- 一个矩形的城市，中间有一条河
- 河是两条从上边界到下边界且互相不交的折线
- 给定起点终点，求第一关键字水里距离，第二关键字陆地距离的最短路
- 折线点数不超过 20

秦皇岛2017 F

- 平面上有 n 个圆形不透光障碍物
- 有一个人在点 o ，他的视线范围为 R ，且不能穿透障碍物
- 你从 s 出发，问走进视线范围的最短距离
- $n \leq 2$
- 这可能是这一类题的战斗天花板了

多校2018 9E

- 给出一个 n 个点的简单多边形和半径 R
- m 次询问，每一次给出一个半径为 R 的圆，问把这个圆给完全移到多边形里的最短距离
- $n, m \leq 200$ ，坐标范围 $1e6$
- 保证 R 变化 0.1 答案不变

Part2: 关键点思想2

- 计算几何中经常会遇到分段函数
 - 沿着折线行走时，对一个点的距离
- 虽然整体复杂，但是每一段都是简单函数
 - 线性函数、二次函数、凸函数等等
- 找到分界点的一个超集，分段考虑

WF2015 B

- 给两个凸多边形，并分别给出速度向量
- 问相交面积的最大值已经第一个达到最大面积的时刻
- $n \leq 10$

WF2012 A

- 三维空间中 n 个点，每个点有个速度向量
- 问在运动过程中，最小生成树变化了多少次（只有连续作为最小生成树超过 $1e-6$ 的时间才会被计入）
- $n \leq 50$
- 数据保证在任意长度大于等于 $1e-6$ 的时间范围内，都存在一个时刻最小生成树是唯一的

HDU4785

- 你家是个矩形，有一个扫地机器人和 n 个家具
- 机器人和家具形状都是凸多边形，家具不交且都在矩形内部
- 机器人可以任意平移（可以和家具相交也可以到房间外），当他完全在房间内部且和家具不交时，第一个顶点处会开始打扫
- 问能扫到的面积
- n , 凸包点数 ≤ 20

Part3: 小练习

- 来做些 World Finals 原题练练手吧

WF2017 A

- 给出一个 n 个点的简单多边形
- 问能放进去的最长线段长度
- $n \leq 200$

WF2013 G

- 平面上有一个无限的网格，格子大小 $x_s \times y_s$
- 给出一个 n 个点的简单多边形，横坐标范围 $10x_s$ ，纵坐标范围 $10y_s$
- 你可以任意平移这个多边形
- 问最少和多少个格子严格有交
- $n \leq 50$

WF2016 H

- 给两个简单多变形
- 你可以旋转/平移多边形
- 要求在多边形不严格相交的情况下，最大化重合的周长长度
- 多边形点数 ≤ 50

WF2012 H

- 给出一个 n 个点的凸多边形 P
- 你从 P 内的一个点出发，要求触碰 P 的每一条边最少一次然后回到原点
- 问最短路径长度
- $n \leq 100$

WF2016 J

- n 个人，每个人三个参数 $a_i(\text{int})$, $b_i(\text{int})$, $c_i(\text{bool})$
- 选择实数 S 和 T ，对 $a_i \times S + b_i \times T$ 排序（有相同则考虑最坏情况）
- 令 l, r 为第一个/最后一个 $c_i = \text{true}$ 的位置
- 最小化 $r - l + 1$
- $n \leq 250000$

WF2018 G

- 给出一个 n 个点的简单多边形
- 找到最小的 R
- 使得多边形内任何一点到最近顶点的距离小于等于 R
- $n \leq 2000$

prefinal2018 Day4A

- 一个大凸多边形 A 中有一个小凸多边形 B
- 每一次可以沿着 B 的一条边剪开
- 问裁出 B 最少剪的长度是多少
- 点数 ≤ 200

prefinal2018 Day4A

