CodeForces Round 524 (Div.2) 解题报告

SGColin

目录

1 A. Petya and Origami

1.1 Description

现在有 n 个人要礼物，每个人需要 2 个 A，5 个 B，8 个 C 。

现在有一些礼物箱，每个里面有 k 个礼物，每个礼物箱里礼物只有一种，问最少需要多少个。

1.2 Solution

签到题。答案是 $\lceil \frac{n\times 2}{k} \rceil + \lceil \frac{n\times 5}{k} \rceil + \lceil \frac{n\times 8}{k} \rceil$

2 B. Margarite and the best present

2.1 Description

定义一个数列 $A_i = (-1)^i \times i$，多次询问 $\sum_{i=l_j}^{r_j} A_i$ 。

2.2 Solution

签到题。讨论一下左右边界的奇偶性，之后的可以两两一组看成 -1 。

3 C. Masha and two friends

3.1 Description

一个 $n \times m$ 的棋盘，黑白染色，其中 $(1,1)$ 是白色的。我们用 (a,b,c,d) 表示一个左下角为 (a,b) ，右上角为 (c,d) 的矩形。

现在有两个人，第一个将 (x_1,y_1,x_2,y_2) 染成了白色，然后第二个人又将 (x_3,y_3,x_4,y_4) 染成了黑色。因此如果两个矩形有交的话那一部分颜色是黑色的。问最后黑白块各有多少个。

3.2 Solution

签到题。简单讨论即可，这里给出两个小技巧。

1. 一个 $n \times m$ 的所述表格中白格子有 $\lceil \frac{n}{2} \rceil \times \lceil \frac{m}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 个。

2. 两个矩形有交的话，交出来的子矩形应该是 $(\max(x_1,x_3), \max(y_1,y_3), \min(x_2,x_4), \min(y_2,y_4))$

4 D. Olya and magical square

4.1 Description

现有一个边长为 2^n 的正方形，每次你可以挑一个已经与其他部分切割开的正方形进行田字切割。例如，第一次你只能对整个正方形进行切割，之后你就有四个选择，在任意一个子正方形切割之后，你就有七个选择。

现在要求切割正好 k 次，问是否存在一种方案，使得附在左边缘线上的正方形，以及上边缘线上的正方形规模相同。输出这个方案对应边长以 2 为底的对数。多种方案任选一，有 SPJ。

数据范围：$n \le 10^9, k \le 10^{18}, t \le 10^3$ ，其中 t 代表多组询问的组数。

4.2 Solution

这个题的思路不错。首先要发现数据范围是假的。

观察一下边长为 2^n 的正方形全部切割所需的次数 $f(n)$，算一算可以发现是 $\frac{4^n-1}{3}$ 。

(1) 当 $n > 31$ 时，第一次切割之后右下角的矩形还可以进行 $\ge \frac{4^{31}-1}{3}$ 次切割，这个值显然是大于 k 的上界的，因此当 $n > 31$ 时合法方案的答案就是 $n-1$ 。

(2) 当 $0 \le n \le 31$ 时，我们其实可以预处理答案区间。如果想要答案的边长为 2^i ，那么此时 k 的合法区间可以由二元组 (n, i) 确定。如果我们知道了此时所需的最少切割次数和最多切割次数，那么介于中间的任意一个 k 都可以成为这一边长对应的合法分割次数，因为这一部分较于最小切割次数的增量产生在矩形的右下角。

关于最小值的处理，每一次我们只切割边缘上的即可：

$$ans_{min} = \sum_{j=1}^{n-i}(2^j - 1)$$

此式当然可以等比数列求和化简，但是因为 n, i 都是常数级别并不需要。

关于最大值的处理，可以表示成完全切割的次数 $-$ 切割每一个边缘上的正方形的次数：

$$ans_{max} = \frac{4^n - 1}{3} - (2 \times 2^{n-i} - 1) \times \frac{4^i - 1}{3}$$

其中后一项的系数代表左、上边缘上正方形的个数。

预处理之后，先将 $n > 31$ 的部分特判掉就可以 O(32) 地回答问题了。

5 E. Sonya and Matrix Beauty

5.1 Description

给出一个 $n \times m$ 的字符矩阵，求美妙的子矩阵个数。定义一个子矩阵是美妙的，需满足：

(1) 只能通过重排每一行的字符。

(2) 排完之后整个子矩阵每一行每一列都是回文串。

数据范围：$n, m \leq 250$

5.2 Solution

Hash + Manacher 算法的妙用。

考虑这三个线性复杂度分别给谁。因为列上不能交换，所以纵向应该有线性判断的方法，所以枚举左右边界。

行合法的条件：该行统计的区间内出现奇数次的字符数 ≤ 1 。通过扫描 +O(n) 差分实现。

选择一个列区间合法的条件有两个：

(1) 包含的行都是合法的

(2) 上下对称的各个行得到的回文串相同。因为我们列也要求是回文的，所以上下对应每一行的回文串应该是相同的，即第一行和最后一行得到的回文串相同，第二行和倒数第二行相同，以此类推。

我们姑且不管第一个限制，考虑第二个限制怎么处理。

可以发现如果两行的计数器数组相同，就可以得到相同的回文串，于是我们可以把计数器数组 Hash 掉。然后就是判断对称的位置 Hash 值相等，这个过程抽象出来，发现是基于 Hash 值的一个回文串。那么就变成了 Hash 值数组上的回文串计数问题了，Manacher 算法解决。

再考虑第一个限制，只需要修改不合法的行对应的 Hash 值，使包含其的字符串无法构成回文串即可。

6 F. Katya and Segments Sets

6.1 Description

给出 n 个集合，编号分别为 $1...n$ 。每个集合里是一些线段，用 $[l_i, r_i]$ 表示，线段共有 k 条，注意可能会有一些空集。

多次询问，编号在 $[a_i, b_i]$ 范围内的集合，是否每个集合都存在至少一个线段，满足被 $[L_i, R_i]$ 完全包含。

数据范围：$n, m \le 10^5, k \le 10^3$

6.2 Solution

主席树。在 CodeForces 赛制下码量显得稍大。

设 $W_{(i,j)}$ 表示，第 i 个集合包含的左端点 $\ge L_i$ 的线段中，右端点的最小值。显然不存在的时候这个值是 ∞ 。

考虑一个询问的实质，实际上是询问 $\max_{i=a_i}^{b_i} W_{(i,L_i)}$ 与 R_i 的关系，若小于则代表合法。

主席树的想法就比较自然了。

将线段左端点离散化，主席树第 k 个根下代表区间 $[L, R]$ 的节点对应的值为 $\max_{i=L}^{R} W_{(i,k)}$ 。这个更新显然是 k 越小答案越优秀的，因此从右往左扫描建树。

查询就是在一个后缀里查，也就是 L_i 对应的版本下线段树的区间 max 。