州区划分 解题报告

洪华敦

北京大学

February 8, 2018

简要题意

- 给定一个 $n(n \le 21)$ 个点的无向图，对于一种 n 个点的划分 $\{S_1, S_2 ... S_k\}$，定义它是合法的，当且仅当下面条件都满足：
- $$\sum_{i=1}^{k} |S_i| = n$$
- $$\left|\bigcup_{i=1}^{k} S_i\right| = n$$
- 对于任何 $i \in [1, k]$，点集 S_i 非空，且导出子图不存在欧拉回路。

简要题意

- 给定数组 w_i，求对于所有合法的划分 $\{S_1, S_2..S_k\}$，下面式子之和：
- $$\left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\sum_{x\in S_i} w_x}{\sum_{j=1}^{i} \sum_{x\in S_j} w_x}\right)^p$$
- p 是一个在 $[0,2]$ 内的常数，答案对 998244353 取模。

分数分布

- 100 分：陈嘉乐，吴瑾昭。
- 78 分：5 人。
- 55 分：10 人。
- 26 分：27 人。

暴力做法

- 令 $f[S]$ 表示对点集 S 进行划分的答案。
- 设函数 $g(S)$ 表示点集 S 是否合法，若为合法则为 1，否则为 0。
- 令 $sum(S) = \sum_{x \in S} w_x$
- $$f[S] = \sum_{T \subseteq S} g(T) \times f[S - T] \times \left(\frac{sum(T)}{sum(S)}\right)^p$$
- 时间复杂度：$O(3^n)$

前置技能

- 本题的前置技能是集合幂级数和子集卷积。
- 详细可参考吕凯风的集训队论文：« 集合幂级数的性质与应用及其快速算法 »

子集或卷积

- 我们可以把每个长度为 2^n 的数组都看成是集合幂级数，为了方便，我们将集合幂级数 f 在集合 S 的系数记为 $f(S)$。
- 定义子集或卷积 $*$：若 $f * g = h$，则
- $$h(S) = \sum_{A|B=S} f(A) * g(B)$$
- 再定义子集变换 (集合幂级数上的莫比乌斯变换)：
- $$\hat{f}(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)$$
- 我们可以在 $O(n * 2^n)$ 的时间内用 f 求出 $\hat{f}$，以及利用 $\hat{f}$ 求 f

子集或卷积

- 我们可以发现：$f \hat{*} g = \hat{f} * \hat{g}$
- 于是我们可以在 $O(n * 2^n)$ 的时间内计算两个集合幂级数的子集或卷积。

子集卷积

- 定义子集卷积 $\times$，若 $f \times g = h$，则
- $$h(S) = \sum_{T \subseteq S} f(S) * g(T - S) = \sum_{A|B=S} [|A| + |B| = |S|] * f(A) * g(B)$$
- 定义 $\tilde{f}$ 是 f 的集合占位幂级数，当且仅当对于所有 S 满足：
- $\tilde{f}(S)$ 是一个 $|S|$ 次多项式，且 $\tilde{f}(S)$ 的 $x^{|S|}$ 的系数等于 $f(S)$
- 则可以发现，若 $P(S) = \tilde{f}(S) * \tilde{g}(S)$，则 P 是 $f \times g$ 的占位多项式。
- 于是我们可以在 $O(n^2 * 2^n)$ 的时间内计算子集卷积了。

p=0

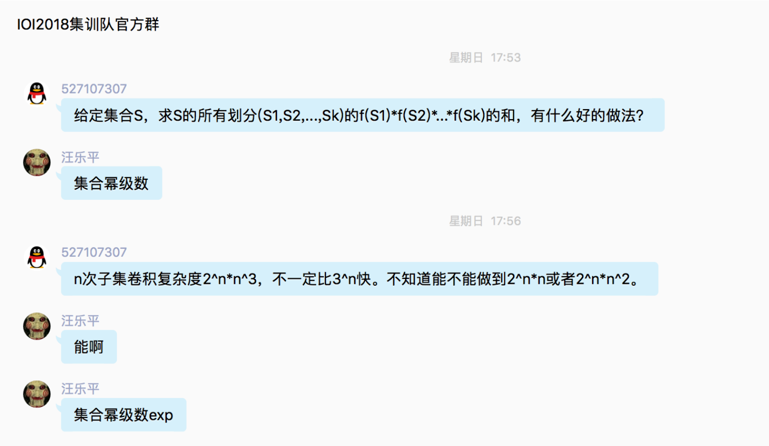
- 考虑 $p = 0$ 的转移方程：
- $$f(S) = \sum_{T \subseteq S} g(T) * f(S - T)$$
- $$f = f \times g + 1$$
- $$f = \frac{1}{1 - g}$$
- 所以有:
- $$\tilde{f}(S) = \frac{\tilde{1}(S)}{(1 \tilde{-} g)(S)}$$
- 求出 $\tilde{1}(S)$ 和 $1 \tilde{-} g(S)$ 后，用多项式求逆计算 $\tilde{f}(S)$ 即可。
- 时间复杂度：$O(n^2 * 2^n)$

p=1 的做法一

- 题目中的划分是有序的，考虑同一类划分（在无序下等价）。
- 对于无序的划分 $\{S_1 \ldots S_k\}$，他对答案的贡献是：
- $$\left(\sum_{p \text{ is permutation}} \prod_{i=1}^{k} \frac{\mathrm{sum}(S_{p_i})}{\sum_{j=1}^{i} \mathrm{sum}(S_{p_j})} \right) = 1$$
- 于是问题变成求合法的无序划分的个数。

论水群的重要性

- 消息时间：2018.2.4



做法

- 令 $g(S) = 1$ 当且仅当州 S 合法，否则为 0，则相当于要求：
- $$\sum_{k=0}^{inf} \frac{g^k}{k!}$$
- 设答案为 f，则 $\hat{\hat{f}}(S) = e^{\hat{\hat{g}}(S)}$
- $O(n^2)$ 求 n 次多项式的 exp 即可。
- 时间复杂度：$O(n^2 * 2^n)$

p=1 的做法二

- 定义 $g(S)$，若 S 是合法的州，则 $g(S) = sum(S)$，否则 $g(S) = 0$
- 则我们的方程是：
- $$f(S) * sum(S) = \sum_{T \subseteq} g(T) * f(S - T)$$
- 我们定义变换 $T(f) = P$，当且仅当对于所有 S 都有 $P(S) = f(S) * sum(S)$
- 于是方程变成了 $T(f)(S) = \sum_{T \subseteq} g(T) * f(S - T)$
- 我们来研究一下 $T(f)$ 的性质

性质

- 线性性：
- $$T(f+g) = T(f) + T(g)$$
- $$T(k*f) = k*T(f) \quad (k \in R)$$
- 乘法性质：
- $$T(f \times g) = T(f) \times g + T(g) \times f$$
- 可以发现 $T()$ 的性质跟求导差不多，所以我们可以记 $T(f) = f'$
- 所以有方程：
- $$f' = f \times g$$
- 解得 $f = e^{\int g} = e^{T^{-1}(g)}$

标准做法

- 先假设每个城市其实可以同时在多个州内。
- 令 f[i][S] 表示每个州的城市个数之和为 i，每个州的城市的并集为 S。
- 那么我们只需要取 $i = |S|$ 的作为答案就行了，因为这样的话一个城市肯定不会同时在多个州呢。
- 转移是
- $$f[i][S] * g(T) * \left(\frac{sum(T)}{sum(S)}\right)^p -> f[i+|T|][S|T]$$
  。
- 也就是
- $$f[i][S] = \sum_{j} \sum_{|T|=j} \sum_{A} [A|T == S] * f[i-j][A] * g(T) * \frac{sum(T)}{sum(S)}$$

标准做法

- 从小到大枚举 i，每次再枚举 j，把 $f[i-j]$ 和 $g(T)$ 卷一下（要求 $|T|=j$）就好了。
- 可以只记子集卷积后的值，这样枚举卷一下是 $O(2^n)$ 的。
- 所以时间复杂度是 $O(n^2 * 2^n)$。

谢谢大家

- Thanks