置换群初步

SGColin

目录

1 置换群

1.1 定义

群

设 G 是一个非空集合，$\times$ 是它的一个二元运算，如果满足以下条件：

(1) 封闭性：若 $a, b \in G$，则存在唯一的 $c \in G$ 使得 $a \times b = c$

(2) 结合律：对 G 中任意元素 a, b, c，都有 $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

称满足以上两条的非空集合 G 对运算 $\times$ 构成一个半群。

(3) 存在单位元：存在 $e \in G$，对任意 $a \in G$，$e \times a = a \times e = a$，称之为幺元。

称满足以上三条的非空集合 G 对运算 $\times$ 构成一个幺半群。

(4) 存在逆元：任意 $a \in G$，存在 $b \in G$，$a \times b = b \times a = e$。

称全部满足以上四条的非空集合 G 对运算 $\times$ 构成一个群。

若群 G 中元素个数有限，则称为**有限群**，反之为**无限群**，有限群的元素个数称为**有限群的阶**。

置换

n 元集合 Ω 到它自身的一个一一映射，称为 Ω 上的一个置换或 n 元置换。

Ω 上的置换为，上面为 1 到 n $(\alpha_1 \sim \alpha_n)$，下面是 n 阶排列 $(\alpha_{1j} \sim \alpha_{nj})$，表示 α_i 由 α_{ij} 取代。

置换的运算是连接。设置换 A, B，A 下元素 i 由 $a[i]$ 取代，则 $A \times B = C$，其中 $c[i] = b[a[i]]$。

置换群

若一组置换在连接运算下构成一个群，则称其为置换群。

单位元：$1, 2, 3, ..., n$

A 的逆元 B ：$b[a[i]] = i$

若 G 有限，则存在最小正整数 r 使得 $A^r = E$，$A^(r-1)$ 为逆元，r 为置换 A 轮换的最小公倍数。

1.2 Burnside 引理

集合 X 在有限群 G 作用下本质不同的元素个数为

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

其中 X^g 表示集合 X 在 g 作用下的不动点。

即：一个置换群的等价类数目等于这个置换群中所有置换的不动点数目的平均值。

1.3 Pólya 定理

Pólya 定理是 Burnside 引理在染色情况下的一个特例。

如果两种染色方案，经过变换可以变成相同的，称之为在一个**轨道**上。

我们把排列写成若干个轮换的形式，其中轮换的个数叫做**循环指标**。

设有限群 G 有 m 个置换，第 i 个置换有 a_i 个循环，现在要将所有的点染成 c 种颜色。

$$\text{染色后群 } G \text{ 的等价类数目} L = \frac{\sum_{i=1}^{m} c^{a_i}}{m}$$

不动点要求所有循环的颜色相同，每个循环有 c 种颜色选择，所以不动点数目为 c^{a_i}。

2 一些题目

2.1 [POJ 2409] Let it Bead

2.1.1 Description

n 个点的环，每个点染 m 种颜色之一，旋转和反转都视为同构，问不同的染色方案数。

2.1.2 Solution

先只考虑旋转，假如旋转 k 个位置，考虑此时循环的长度 x ，是 $kx \equiv 0 \pmod n$ 的最小正整数解（转了 x 次后回到原处）。

$$x = \frac{\mathrm{lcm}(k,n)}{k} = \frac{n}{\gcd(k,n)} \text{，因此循环个数为} \frac{n}{\frac{n}{\gcd(k,n)}} = \gcd(k,n) \text{，方案数为} m^{\gcd(k,n)}$$

再考虑翻转，**对于任意的旋转-翻转-旋转操作都等同于一次翻转操作**, 因此只需要统计所有本质不同的翻转操作的答案。此时点数的奇偶性不同会导致对称轴产生方式不同。

若 n 为奇数，则只会产生点-边对称轴，此时个数为 n 个，循环的组数为 $\frac{n}{2}+1$，方案数为 $nm^{\frac{n}{2}+1}$。

若 n 为偶数，则会产生点-点对称轴和边-边对称轴两种，各 $\frac{n}{2}$ 个，其中点-点对称轴循环的组数为 $\frac{n}{2}+1$，边-边对称轴循环的组数为 $\frac{n}{2}$, 方案数为 $\frac{n}{2}(m^{\frac{n}{2}} + m^{\frac{n}{2}+1})$ 。

2.2 [POJ 2154] Color

2.2.1 Description

n ($n \le 10^9$) 个点的环，每个点染 n 种颜色之一，旋转同构间不同的染色方案数，对 P 取模。

2.2.2 Solution

问题本身是上一题的弱化版，是为了介绍一种计算方式。

通过上一题的旋转部分的推导可以得到，所求的方案数为

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} n^{\gcd(i,n)}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n^{\gcd(i,n)}}{n} = \frac{\sum_{d|n} n^d \times \varphi(\frac{n}{d})}{n}$$

因为 10^9 的数据范围不能枚举然后计算 gcd ，所以将所求变为枚举因数的形式，那么因数为 d 的时候原来与之对应的 i 就有 $\varphi(\frac{n}{d})$ 个。另由于本题需要取模，但 n 不一定有逆元，所以从上面的式子中每一项都提出来一个 n 即可，答案即为 $\sum_{d|n} n^{d-1} \times \varphi(\frac{n}{d})$ 。

关于计算的复杂度问题，可以先用 $\sqrt{n}$ 的时间内筛出 n 的因数集和质因数集，然后再求 $\varphi(\frac{n}{d})$ 的时候直接从筛出的质因数集中进行分解，复杂度是优于 $\sqrt{n}\log n$ 的。

2.3 [HDU 5868] Different Circle Permutation

2.3.1 Description

n ($n \le 10^9$) 个点的环，染黑或白，白色不能相邻，旋转同构间方案数，对 10^9+7 取模。

2.3.2 Solution

首先有一个数列叫 Lucas number ，是旋转不视为同构的前提下此问题的答案，即环的独立集方案数，其递推式同 Fibonacci：$L_i = L_{i-1} + L_{i-2}$，但首项为 2 ，第二项为 1。其递推式的本质是 DP，可以理解为从环里删除一个点，然后分情况讨论一下。

那么此题的讨论就同第一题了，注意到得到的 $\gcd(k,n)$ 个循环会将环分成 $\frac{n}{\gcd(k,n)}$ 段，每个循环在每一段中都包含一个相对位置相同的元素。当我们计数时讨论的是 $\frac{n}{\gcd(k,n)}$ 段中的一段，但由于每一段都是首尾相接的，我们可以认为在这一段中第一项和最后一项也有相邻的限制。此时因为我们要计数不动点数，不视为循环同构，所以可以直接采用 $L_{\gcd(k,n)}$。

然后采用类似上一题的讨论方式，可以得到答案为

$$\frac{\sum_{d|n} L_d \times \varphi(\frac{n}{d})}{n} \mod 10^9+7$$

其中 Lucas 数部分使用矩阵快速幂加速递推，求求 $\varphi(\frac{n}{d})$ 的时候依旧先预处理质因数集，直接从筛出的质因数集中进行分解。因为 $n < 10^9 < 10^9+7$ 且 10^9+7 为质数，所以 n 存在逆元。

2.4 [POJ 2888] Magic Bracelet

2.4.1 Description

n ($n \le 10^9$, $\gcd(n, 9973) = 1$) 个点的环，染成 m 种颜色，给出若干个颜色对，他们在环上不能相邻，旋转视为同构，问方案数，对 9973 取模。

2.4.2 Solution

一篇不错的题解

可以发现此题是上一题的加强版，显然没有 Lucas number 那么好用的递推数列供我们使用了。

但容易发现每一个旋转依旧对应着一个可递推数列 $x[\gcd(k, n)]$ ，并且这个数列也是基于环染色的递推数列，原理与上题相同。所以依旧可以采用枚举 gcd 乘上 φ 的计算方式。

这类题有一个比较巧妙的通用思路。首先考虑染色一条链而不是一个环，进行动态规划，设 $f[i][j]$ 表示，染长度为 i 的链，合法的方案数。设 $tr[i][j]$ 表示颜色 i 与颜色 j 能否相邻，若可以则 $tr[i][j] = tr[j][i] = 1$ ，否则两者都为 0 。那么我们容易得到转移：

$$f[i][j] = \sum_{k=1}^{m} tr[k][j] \times f[i-1][k]$$

容易发现列向量 $f[i][1...m]$ 是由**转移矩阵 tr 乘上了列向量 $f[i-1][1...m]$ 得到的**，注意观察转移的式子，容易发现矩阵乘法顺序是转移矩阵在前。由此也可以更好的解释上一题中求 Lucas number 的加速递推矩阵的构造原理，即同色 $0, 0$ 不能相邻，其余情况都可以相邻，所以转移矩阵 $tr[0][0] = 0$ ，其余位置都为 1 。

然后需要考虑环的解，枚举第一个位置放什么颜色 c，即初始化 $f[1][c] = 1$ ，其余都为 0 ，那么我们强制最后一个也放这个颜色，相当于首尾重合了一个位置，此时求出来的方案数为 $f[i+1][k]$。

然后考虑如何用矩阵加速递推，加入我们确定了初始列向量 F_1 和转移矩阵 M , 那么我们想得到的列向量 $F_{i+1} = M^i \times F_1$。然后去掉枚举颜色的复杂度，考虑初始情况下只有 $f[1][k]$ 有值 1 ，因此最后所求的 $f[i+1][k]$ 只与得到的 $tr[k][k]$ 有关（想想矩阵乘法的过程，$f[i+1][k]$ 是由 $tr[k][...]$ 一行乘上 $f[1][...]$ 一列得到的）。因此当枚举颜色为 k 时答案就是 $tr[k][k]$ ，也就是说，**枚举所有的颜色的答案就是求出来的 M^i 的对角线之和**。

由此即可得到一个复杂度为 $O(\sqrt{n} \times m^3 \log n)$ 的解法。题目比较卡常，可以先预处理出来转移矩阵的 2 的幂次以减少快速幂的常数，同时注意矩阵乘法交换枚举顺序特判的优化。

2.5 [POJ 1026] Cipher

2.5.1 Description

给定 $1 \sim n$ 的置换 F，求其变换 m 次的变换 F^m 的结果。

2.5.2 Solution

注意到一个置换可以被分成若干轮换，任意一个轮换的大小都不会超过 n ，也就是每个位置一定会在 n 次变换以内就能回到原来的位置，因此暴力找出每个位置的循环节 $t[i]$ ，然后对这个位置进行 $m \mod t[i]$ 次变换即可。注意任意两组轮换之间都是没有交集的，所以不需要保证每个位置操作次数相同，直需保证每一组轮换内变换次数相同即可。

2.6 [SCOI 2009] 游戏

2.6.1 Description

写出一个 n $(n < 10^3)$ 的排列 $t[1]...t[n]$ ，视作一次置换 $i \to t[i]$ 。

记一种排列对应的周期为，从 $1...n$ 经过若干次该排列对应的置换变回 $1...n$ 的所需最小次数。

问可能的周期有多少种。

2.6.2 Solution

可以注意到该置换我们是可以划分成若干轮换的，而每个轮换的周期 len_i 即为该轮换内的元素个数。如果要求所有轮换在经过 x 次都进行了若干轮完整的轮换，必须保证 x 为所有轮换周期的倍数。因此一个排列的周期即为，它对应的若干组轮换周期 len_i 的 Lcm。

那么问题转化为，把 n 个数分成若干组，求出每个组的大小的 Lcm，Lcm 的值可能有多少种。有趣的思路是考虑对 Lcm 进行质因数分解，分别考虑每个质因数的指数来确定最后的 Lcm 。

需要用到的厉害的结论是，假如质因数分解的结果为 $\prod_{i=1}^{m} p_i^{t_i}$ ，那么 $\sum_{i=1}^{m} p_i^{t_i} \leq n$。

首先证明不大于：构成 Lcm 最大的局面就是每个轮换周期互质，此时 $\mathrm{Lcm} = \prod_{i=1}^{m} len_i$, $len_i = p_i^{t_i}...p_j^{t_j}$ ，此时考虑求和的最大值，因为乘法的答案显然优于加法，即为一个轮换的大小即为 Lcm，而其他的轮换大小都为 1 ，而所有轮换大小之和为 n ，所以 $\mathrm{Lcm} + k \leq n$，所以 $Lcm \leq n$。同样因为乘法优于加法，乘法的结果都不会超过 n ，所以加法的结果也必定不会超过 n 。

然后证明可以选择小于：由上知 Lcm 必定不大于 n ，考虑两个轮换的周期质因数分解后包含相同的质因子，此时其 Lcm 是要小于最大的情况的，即有一个轮换种质因数分解的一部分没有用上，所以 Lcm 可以小于 n。

那么可以考虑用一种类似背包的过程来实现这个计数，设 $f[i][j]$ 表示前 i 个质因子，幂次之和为 j 的方案数。转移只需要枚举这当前质数的指数为几即可，为了保证一个质因数只考虑一次，需要进行类似一个类似分组背包的过程，不能转移自自己。注意每个因子可以指数为 0，所以还要加上 $f[i][j] += f[i-1][j]$。

答案即为 $\sum_{i=1}^{n} f[m][i]$ ，即全部可能的质因数都考虑完之后，所有的质因数幂次和小于 n 的方案数。**之所以不同的 Lcm 数与此方案数相同，是因为每个转移路径上的每个质因子指数不同。**

2.7 [SHOI 2006] 有色图 & [SGU 282] Isomorphism

2.7.1 Description

给一张 n 个点的完全图的边染色，可以选 m 种颜色中的一种，通过重排点的编号导致图相同的染色方案视作同构，问方案数，对一个大于 n 的质数取模。

2.7.2 Solution

计数好题啊好题。一篇不错的题解

假如我们已经确定了点置换的方式，此时考虑不动点（边）如何计数。注意到此题进行的置换是点置换，而染色的是边，所以要考虑由点置换导致的边置换有多少不同的轨道。

(1) 如果一条边连接的两个点属于同一个点的轨道，该轨道的大小为 x ，那么我们考虑的边就是这 x 个点两两连接的边，为 $\binom{x}{2}$ 条。

如果 x 为奇数，则一条边的两个点都回到原来的位置需要 x 次置换，那么边的轨道大小也就是 x 了，因为有 $\frac{x(x-1)}{2}$ 条边，所以轨道数为 $\frac{x-1}{2}$ 。

如果 x 为偶数，则有一个特殊的轨道，进行 $\frac{x}{2}$ 次置换就可以恢复原样，即对应的点在置换的环上“对称”，所以转过一半的环就恢复了原样。其他边的讨论方式与 x 为奇数相同。所以轨道数为

$$\frac{\frac{x(x-1)}{2}-\frac{x}{2}}{x}+1=\frac{x}{2}$$

综上，连接两点属于同一个点的轨道时，边置换的轨道数即为 $\lfloor\frac{x}{2}\rfloor$ 。

(2) 如果一条边连接的两个点不属于同一个点的轨道，两个点轨道的大小分别为 x,y。那么显然需要转过 $\operatorname{lcm}(x,y)$ 次才能回到原位，此时边的轨道数为 $\frac{x\times y}{\operatorname{lcm}(x,y)}=\gcd(x,y)$ 。

因此该置换下贡献的轨道数即为 $F=\sum_i\lfloor\frac{x_i}{2}\rfloor+\sum_i\sum_j\gcd(x_i,x_j)$ 。

接下来考虑优化枚举置换的复杂度。两个置换对应的贡献相同，当且仅当点对应的轨道形式相同。注意到这个其实是考虑将 n 个本质不同的数分成若干组，每组的大小对应相同即可，也就是整数拆分的方案数。

考虑如果确定拆分的形式，先假设所有轨道大小均不同，分别为 sz_i 那么构成这样的置换方案数为 $\frac{n!}{\prod_{i=1}^{c}sz_i}$。这样列式子的道理是，每个轮换会被计数 $sz_i!$ 次，而轮换是圆排列，所以只需要计数 $(sz_i-1)!$ 次，所以需要除掉一个 sz_i 。

再考虑如果大小为 sz_i 的轨道有 k_i 个，那么这些轨道是无标号的，所以他们的顺序无关。所以在此基础上还需要除掉他们的排列数。因此可得满足该拆分的情况数

$$S=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{c}sz_i\prod_{i=1}^{c}k_i!}$$

总答案即为 $(\sum S\times m^F)\times inv(n!)$。

实现的时候 DFS 拆分方案即可。计算的时候为了减少求逆元的次数，可以考虑先把分母的值求出来，最后统一求一遍逆元。

2.8 Others

其实本篇还没有完成，把剩下准备写题解的题目先列出来。

POJ 3270　BZOJ 1004　BZOJ 1488

以后应该会不定期更新。