

2023 CityU Training Contest 2

Yixiong Gao

September 9th, 2023

Problem A

Tag: Greedy

乘积为 0，有一个 0 就可以了。

答案是 $\min |a_i|$ 。

复杂度 $O(n)$

Problem B

Tag: Greedy

容易发现断开的位置彼此之间并不影响。

一个位置如果不断，贡献就是 $|a_{i+1} - a_i|$ 。

把所有的贡献排序，不要前 k 大即可。

复杂度 $O(n \log n)$

Problem C

Tag: Greedy, Math

与运算会让数字减小或不变，加运算会让数字增加或不变。

因此最小的总代价和一定是所有的与。考虑什么时候可以分出一段来？

只能是与起来是 0 的一段断开。

从前往后扫描，每次当前的与是0了，就断开一段即可。复杂度 $O(n)$

```
int ans = 0, tot = 2147483647;
for (int i = 1; i <= n; ++i) {
    tot &= a[i];
    if (tot == 0) {++ans; tot = 2147483647;}
}
```

Problem D

Tag: Constructive Algorithms

让 a 里的任何数都不是 b 里的任何数的约数。

一个简单的思路是把所有最小值都扔到 b 里，否则扔到 a 里。

除非所有数字都相同，否则这显然是一个可行解。

所有数字都相同时显然无解。

复杂度 $O(n)$

Problem E

Tag: Greedy

一个简单的想法是把所有的最小值堆到一个数组里，这样其他所有的最小值都变大了。

换个视角，相当于取所有的次小值，但是要牺牲一个换成全局最小值。

因此找出所有次小值和全局最小值即可计算。

假设第 i 个的次小值为 s_i ，全局最小值是 mn ，则答案为 $\sum s_i - \min s_i + mn$

复杂度 $O(n)$

Problem F

Tag: Counting

GCD 与 LCM 的集合观点。

- 如果一个质因子 X 有 Y 没有，无解。
- 如果一个质因子两者都有，但 X 里比 Y 多，无解。
- 如果一个质因子两者都有，但 X 里和 Y 里一样多，两数必须都放这么多。
- 如果一个质因子两者都有，但 X 里比 Y 里少，则一个数拿少的一个数拿多的。
- 如果一个质因子 X 没有 Y 有，那么这个质因子只能丢到一侧。

若有解并且后两种情况出现的次数为 t ，答案是 2^t ，每个质因子的选择显然是独立的。

复杂度 $O(n)$

Problem G

Tag: Probabilities

首先一次操作只会让不同的个数 $+1/-1$ ，所以只跟不同的个数有关。

这是一个经典的 Markov 链问题，求期望首访时间。

设 $t[i]$ 表示有 i 个不同的状态首次到达 0 状态的期望步数，有：

$$\begin{aligned} t[0] &= 0 \\ t[i] &= 1 + \frac{i}{n} \times t[i-1] + \frac{n-i}{n} \times t[i+1], \quad 1 < i \leq n \end{aligned}$$

由于 $t[0] = 0$ 已知，所以先按照 $i = 0 \dots n$ 的顺序扫描，把 $t[i]$ 整理成只和 $t[i+1]$ 有关的形式。然后由于 $t[n]$ 中到 $t[n+1]$ 的系数 $\frac{n-i}{n} = 0$ ，所以 $t[n]$ 的值已经求得，再逆着扫回来即可。

答案就是 $t[\text{两字符串初始不同的位置数}]$ ，复杂度 $O(n)$

Thanks for Listening!

Contact Me

Mail : sgcolin@163.com

Blog : <http://blog.gyx.me>

Download

<http://blog.gyx.me/slides/cityu23-2.pdf>

