Greedy and Graphs

Yixiong Gao

2022 / 10 / 02

贪心

与 DP 区别：全局最优解与局部最优解不冲突。

有一些套路，但强调重点在对题目性质的分析。

从一道 NOIP 题说起： [国王游戏]

每个人左右手各有一个数，能获得的奖赏为，排在他前面的所有人左手上的数的乘积除以他自己右手上的数，然后向下取整得到的结果。

排序使得获得奖赏最多的大臣，所获奖赏尽可能的少。

最优化

给定 n 个物品，每个物品有两个参数 w_i, p_i 。

从中选出 m 个物品，并定一个顺序，最大化 $\sum_{i=1}^{m} w_i \prod_{j=0}^{i-1} p_j$ 。

- $n \le 10^5, m \le 20, 1 \le w_i, p_i \le 10^9$ ，保证答案在 ll 范围内

座位安排

有些题目比较容易建出图论模型，但是复杂度不够优秀。

1. 电影院有 n 个人和 n 把椅子，椅子编号为 1 到 n ，对于第 i 个人，他希望能坐在前 a_i 把椅子中的一把椅子上，不然他会不满意。现在要求我们安排这 n 个人的座次，要求不满意的人数最少。
2. 电影院有 n 个人和 n 把椅子，椅子编号为 1 到 n ，对于第 i 个人，他希望能坐在前 a_i 把椅子中的一把椅子上，不然他会产生 u_i 的愤怒值。现在要求我们安排这 n 个人的座次，要求最小化愤怒值。

序列消除

给定一个长度为 n 的序列，你允许操作每次：

- 删除序列的某个元素
- 删除两个序列中相邻的不同的元素

问最少需要执行多少次操作，可以将序列变为空。

关注众数的作用。

序列消除

给定一个长度为 n 的序列 a，你允许操作每次删除一段漂亮子序列，问最少需要执行多少次操作，可以将序列变为空，并给出方案。

漂亮序列：当且仅当序列中相邻元素都不相同。

- $n \leq 2 \times 10^5$

排序

给定两个长度为 n 的数列 A, B 。

问是否能重排 B ，使得不存在 $i \in [1, n]$ ，有 $A_i = B_i$ ，输出方案。

- $2 \le n \le 2 \times 10^5$， $1 \le A_i, B_i \le n$

如何证明你的结论是充要的?

价值拆分

每类操作一个关于付出的收益函数，通过分析将价值拆分为独立贡献。

然后再考虑是否可以贪心。

有 n 类商品, 第 i 类商品有 c_i 件。现在**必须**选择 k 件商品。
假设第 i 商品我们选择了 a_i 件, 收益为 $\sum_{i=1}^{n} a_i\left(c_i - a_i\right)$ 。
问最大收益。

- $n \leq 10^5, 1 \leq k \leq \sum c_i \leq 10^5$
- $n \leq 10^5, 1 \leq k \leq \sum c_i \leq 10^9$

翻转

一个 01 串 S，定义代价为 $\sum \frac{l(l+1)}{2}$， 其中 l 为每个极长的 1 的长度。

每次操作可以翻转一个位置。问最少翻转多少次使得代价不超过 k 。

- $|S| \le 10^5, k \le 10^{10}$

反悔贪心

常规来说，贪心要求全局最优解与局部最优解的条件相同。

反悔贪心要求：反悔的调整能够直接表示在贪心策略的指标中。

数据备份： n 个数排成一列，选 k 个使得和最小且任意两个不相邻。

生日礼物： n 个数排成一列，选最多 k 个子段使得和最大。

变成环的相关题目：种树 | 环状最大 k 段子段和（别管原题数据范围）

2021 ICPC Kunming A. AC

给定一个字符串 S ，你可以改其中 k 个位置，最大化子串 `AC` 的个数。

- $1 \leq k \leq N \leq 5 \times 10^5$

投资

有 n 天，第 i 天股票的价格为 $p_i > 0$ 。问最多能赚多少钱。

每天要么什么都不做，要么买入一份股票，要么卖出一份股票。

- $n \le 2 \times 10^5, P_i \le 10^9$

补充题

给定一个长度为 n 的序列 $a_1, \ldots, a_n$ 。

每次选择两个序列中相邻的元素 x, y （有顺序），替换为 $x + 2y$。

重复直到最后剩下一个数，问最大多大，记这个数为 $f(a_1, \ldots, a_n)$ 。

这个问题要求回答 q 次询问，每次询问给定 l, r ，求 $f(a_l, \ldots, a_r)$ 。

- $n, q \le 10^5, 0 \le a_i \le 10^9$
- $n, q \le 10^5, |a_i| \le 10^9$

休息一下

最短路

1. Dijkstra : $\mathcal{O}(n^2)$ or $\mathcal{O}(m\log n)$ 只能处理非负边权！

   一个把负权图变成正权图的方法：[例题]
   - 给每个点分配势能 d_i，对于边 $u \to v$，边权增加 $d_u - d_v$
   - s 到 x 的最短路即 $dis_x + d_x - d_s$
2. Bellmam Ford : $\mathcal{O}(nm)$ 优化都比较玄学且可以被卡掉。
3. Floyd : $\mathcal{O}(n^3)$ 注意枚举顺序。~~(KIJ 1遍对，IKJ 2遍对，IJK3遍对)~~
4. 负环：Bellmam Ford $\mathcal{O}(nm)$；Floyd $\mathcal{O}(n^3)$

汇率

n 种货币，m 条兑换关系，每条关系用四个整数 a， b， c， d 表示：

- 含义是可以使用 a 元 b 货币兑换 c 元 d 货币，不要求整倍数

央行发现有人利用汇率使得财富无限增长，所以要引入税收参数 w ：

- 任何一次兑换改为：使用 $k*a$ 元 b 货币兑换 $w*k*c$ 元 d 货币

询问最大的损耗参数 w 以保证不存在财富无限增长的可能。

- $n \leq 1000, m \leq 2000, a_i, c_i \leq 1000$

大陆争霸

n 个点 m 条边的无向图，经过每条边需要 w_i 的时间。

有若干个保护关系形如：若 x 未被摧毁，则 y 无法进入。

有无限多个机器人同时从 1 出发，每个的路径可以不同。

成功进入城市 x 时可以同时摧毁城市 x 。问摧毁城市 n 的时间。

- $1 \leq n \leq 3 \times 10^3, 1 \leq m \leq 7 \times 10^4, 1 \leq w_i \leq 10^8$

分层图最短路

将图复制若干层来刻画不同阶段。层间的边表示转移。

最优贸易： 图上从 1 到 n 的路径，买入**一次**卖出**一次**的最大获利。

层次比较明显的题目有很多：

1. [JLOI2011] 飞行路线
2. [BJWC2012] 冻结
3. Revamping Trails G

地铁换乘

n 个点 m $(m \leq 2 \times 10^5)$ 条边的无向图，每个边有一个颜色。

路径的初始代价是 1 ，每换一次颜色代价 $+1$ ，求 1 到 n 的最短路。

Dijkstra 算法在 0/1 边权时退化为 01-BFS，无边权时退化为 BFS。

2021 广西省赛 D. Driving

n 个点 m 条边的有向图，车从 S 到 T ，初始速度 $v = 1$ 。

对于一个长度为 w 的边，走过这条边需要 $\lceil \frac{w}{v} \rceil$ 的时间。

一些点上有维修站，可在该点停留 c_i 的时间使速度翻倍（可以多次）。

存在一些边质量不好，经过之后速度就会回到 $v = 1$ 。

求 S 到 T 的最短时间。

- $2 \le n \le 2 \times 10^4, 1 \le m \le 7 \times 10^4, 1 \le w, c_i \le 10^6$

魔法图

一张 n 个点 m 条边的有向图，一些边是魔法边。

如果你在走到 u 的路径中最后一条边是魔法边，那么接下来：

- 如果图中存在 $u \to v$ 的边，走到 v 的代价变成 $\max(w-K,0)$
- 否则你可以直接无代价跳到其他的 v

求 S 到每个点的最小代价。

- $1 \le n,m \le 10^6, 1 \le w, K \le 10^9$

二分图

1. 判定：可黑白染色（DFS）/ 不存在奇环
2. 最大匹配：匈牙利 $\mathcal{O}(nm)$；Hopcraft-Karp 或 Dinic 为 $\mathcal{O}(\sqrt{n}m)$
3. König 定理：最大匹配 = 最小覆盖 = n - 最大独立集（对偶）

   比较常见的一类题是做行列匹配：例题

*4. Dilworth 定理：最长反链 = 最小链覆盖

   Mirsky 定理：最长链 = 最小反链覆盖（对偶）

组合数学

给一个网格图，每次从左上角出发，只能往右或下走。

每个格子要求最少经过 $a_{i,j}$ 次，问至少要走几次才能符合要求。

- $1 \leq n, m \leq 1000, a_{i,j} \leq 10^6$

连通性

一般使用 Tarjan 算法，基于搜索树。

时间戳 dfn[u]： 节点 u 第一次被访问的时间。

追溯值 low[u]： 从 u 出发经过**至多一条**非树边可达的 dfn 最小的节点。

```
void tarjan (int u) {
    dfn[u] = low[u] = ++num;
    for (auto v : e[u])
        if (!dfn[v]) {tarjan(v); low[u] = min(low[u], low[v]);}
        else low[u] = min(low[u], dfn[v]);
}
```

有向图连通性

强连通：u 与 v 强连通当且仅当 $u \to v$ 和 $v \to u$ 的路径都存在。

强连通分量： 1. 求法 (low[u]=dfn[u])； 2. 缩点DAG (**拓扑序与编号关系**)

1. 增加最少的边使图强连通
2. 最大半连通子图的大小和个数
3. 缩点后图上 DP 转移无后效性

无向图连通性： 边连通性

割边（桥）： 删除该边后，图的连通性改变。注意重边。

求法：1. 只会是搜索树的树边； 2.树边 (x, y) 满足 dfn[x] < low[y]；

边双连通分量：不含有桥。删除桥后 dfs。缩点得到森林。

Menger 定理推论：e-DCC 中任意两点间都存在两条无交路径。

题目比较套路：关于桥的讨论、缩点建树转化为树上问题

稳定婚姻问题

给定 n 对夫妻和 m 个旧情人关系。

一段婚姻不稳定：如果离婚后，所有人通过旧情人关系都能找到新欢。

要求 $\mathcal{O}(n+m)$ 判断每一段婚姻的稳定性。

线图最大匹配

线图：点边反转的图，原图中有共同端点的边在新图中相连。

给定一个无自环的简单无向图，要求 $O(n+m)$ 完成：

1. 求线图的最大匹配；
2. 在匹配数最大的前提下最大化所选边的权值和。

无向图连通性：点连通性

割点（割顶）：删除该点后，图的连通性改变。

求法：1. 非根：dfn[v] <= low[u]；2. 根：存在两个这样的儿子。

点双连通分量：（只考虑分量内）不存在割点。

缩点：每个点双需要额外抽象一个方点表示（圆方树）

题目比较套路，往往缩点转化为树上问题。对于 NOIP 比较超纲。

一个比较套路的连通性问题

对于一个长度为 n $(n \le 10^6)$ 的数列 $\{a_i\}$（具体未知），支持：

- `1 l r x` 告诉你 $\sum_{i=l}^{r} a_i = x$ （保证数据间无矛盾）
- `2 l r` 查询 $\sum_{i=l}^{r} a_i$ ，若确定无法推导出，输出 `UNKNOWN`

Xor Query

对于一个长度为 n $(n \le 2000)$ 的数列 $\{a_i\}$（具体未知）：

你可以花费 $C[l][r]$ $(C[l][r] > 0)$ 的代价询问 $\oplus_{i=l}^{r} a_i$（区间异或和）

给定花费矩阵，使用最少的询问代价，得到整个数列。

必经点与必经边

1. $\mathcal{O}(m)$ 求有向无环图从 u 到 v 的必经点、必经边。

2. $\mathcal{O}(m \log n)$ 求一般图从 S 到 T 的最短路必经点、必经边。

计数的妙用：

*3. $\mathcal{O}(n)$ 换根 DP 求树的直径的必经边

必经点与必经边 - Cont'd

4. $\mathcal{O}(m + n \log n + q \log n)$ 求无向图从 u 到 v 的必经点、必经边

必经点与必经边 - Cont'd

*5. $\mathcal{O}(m + n \log n)$ 倍增求有向无环图支配树

*6. $\mathcal{O}(n^2)$ 求支配树：[2021 省选 A 卷] 支配 & ~~Bonus: Lengauer-Tarjan~~

Thanks for Listening!

QQ : 2679864609

Blog : http://blog.gyx.me

Mail : mailto:sgcolin@163.com

Download : http://blog.gyx.me/slides/greedy-and-graphs.pdf