

CodeForces Round 514 (Div.2) 解题报告

SGColin

目录

1	A. Roman and Browser	2
1.1	Description	2
1.2	Solution	2
2	B. Forgery	2
2.1	Description	2
2.2	Solution	2
3	C. Sequence Transformation	2
3.1	Description	2
3.2	Solution	2
4	D. Nature Reserve	3
4.1	Description	3
4.2	Solution	3
5	E. Split the Tree	4
5.1	Description	4
5.2	Solution	4

1 A. Roman and Browser

1.1 Description

CodeForces 1059 A

共有 L 分钟，其中有 n 个区间 $[L_i, R_i]$ 有任务。

其余的每连续的 x 分钟，都会颓一次，问一共颓了多少次。

1.2 Solution

找出每一个空闲区间长度 len ，答案为 $\sum \lfloor \frac{len}{x} \rfloor$ 。

2 B. Forgery

2.1 Description

CodeForces 1059 B

你有一个 3×3 的印章，它可以把周围的八个各自染上色。现在给你一个 $n \times m$ 的目标图像，问是否可以多次在一张白纸上印印章印出目标图像，印章不可以越界。

2.2 Solution

暴力从左上到右下扫描，每有一个本应染色实际未染的点就尝试把他作为左上角，然后判断是否把本应是白的染上了或者越界即可。

3 C. Sequence Transformation

3.1 Description

CodeForces 1059 C

有一个 $1 \dots n$ 恰好各一个的数集，进行 n 轮：输出当前数集内所有数的 gcd，然后从数集中 x 选择一个数去掉。最大化输出序列的字典序。

3.2 Solution

显然一开始是一段 1，要使字典序最大考虑第一个不为 1 的 gcd 是谁即可。设这个值为 x ，那么就要删掉 $\frac{n \times (x-1)}{x}$ 个数来得到 gcd 为 x 。显然 x 取 2 需要删掉的数最少。

将所有奇数去掉以后集合变成一个偶数集，此时让集合内所有数都 $/2$ 就转化为了原问题。

具体实现比较巧妙，见 代码。注意特判只有三个数字的情况，答案是 1, 1, 3。

4 D. Nature Reserve

4.1 Description

CodeForces 1059 D

有 n 个分布在二维平面上的整点，现在需要找到一个半径最小的圆，能够覆盖所有的给出点，且与 x 轴相切。

4.2 Solution

如果点全部在 x 轴同一侧显然有解，所以无解只需判断所有 y_i 是否同号。

注意到大于正确答案都是合法的，所以可以在实数域上二分。设当前二分到的半径为 K ，因为与 x 轴相切，所以圆的纵坐标为 K 了，设圆的横坐标为 X 。

那么对于一个点 i ，该点在这个圆内当且仅当

$$(x_i - X)^2 + (y_i - K)^2 \leq K^2 \Rightarrow |x_i - X| \leq \sqrt{K^2 - (y_i - K)^2}$$

那么对于该点来说，合法的 X 范围为

$$\Delta = \sqrt{K^2 - (y_i - K)^2}, X \in [x_i - \Delta, x_i + \Delta]$$

合法条件就是对于所有点当前半径的合法区间的交集不为空。扫描一遍，维护最大的 L 和最小的 R ，直接判断两者关系即可。

讨论一下二分上界，极限数据两点分布于 $(-10^7, 1)$ 和 $(10^7, 1)$ ，此时半径有 5×10^{13} 之大，所以计算 Δ 的过程中 K^2 会爆掉 *double*，而且用了 *long double* 还是过不了，因为精度丢失太多。

$$\Delta = \sqrt{K^2 - (y_i - K)^2} = \sqrt{K^2 - (y_i^2 + K^2 - 2Ky_i)} = \sqrt{2Ky_i - y_i^2}$$

此时就可以了。注意必须保证开根合法，也就是特判掉 $2Ky_i - y_i^2 \geq 0$ 的情况。

5 E. Split the Tree

5.1 Description

CodeForces 1059 E

给出一棵以 1 号节点为根的树，点有点权。能将它最少划分成多少条垂直的链¹，满足每条链包含的节点个数不超过 L ，且每条链的点权和不超过 S 。

5.2 Solution

有定义可知每个叶节点必定是链的一端，而每个父节点有两种可能：继承一个子节点的链，或重新开一条链。因此可以自底向上贪心，最后的方案是确定的。

设 $f[x]$ 表示由一个点开始一条新的链，向上最多能延伸多少个点。 $g[x]$ 表示最后经过当前点的链向上还能贡献多长的长度。如果当前节点要继承叶节点，那么它的 $g[x] = \max\{g[son] - 1\}$ ，且该值不能为 -1 ，否则当前节点需要新开一条链， $g[x] = f[x]$ 。

预处理 $f[x]$ 可以使用倍增组合，或者 dfs 求出树上前缀和，再 dfs 一遍维护栈内节点，在栈上二分，复杂度都为 $O(n \log n)$ 。

¹从链的一端到另一端深度单调