斯特林数初步

SGColin

目录

1 一些记号

通常幂 x^n ：$x^0=1$，$x^n=x^{n-1}*x$

下降阶乘幂（简称下降幂）$x^{\underline{n}}$：$x^{\underline{n}}=\prod_{i=1}^{n}(x-i+1)$

上升阶乘幂（简称上升幂）$x^{\overline{n}}$：$x^{\overline{n}}=\prod_{i=1}^{n}(x+i-1)$

组合数 $\binom{n}{m}$：$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n^{\underline{m}}}{m!}$

第一类 Stirling 数记作 $\left[{n \atop m}\right]$，第二类 Stirling 数记作 $\left\{{n \atop m}\right\}$

2 第一类 Stirling 数

2.1 概念

第一类 Stirling 数 $\left[{n \atop k}\right]$ 表示的是将 n 个元素排乘 k 个**轮换**的方案数。

我们称第一类 Stirling 数为 Stirling 轮换数，$\left[{n \atop k}\right]$ 读作"n 轮换 k"。

2.2 递推式

我们以增量的角度思考递推式的形式。对于将 n 个元素放入 k 个轮换的方案中，最后一个元素要么构造自身的轮换，要么放进前 $n-1$ 个元素构成的轮换中的一个。

如果最后一个元素构造自身的轮换则方案唯一，所以这部分的贡献为 $\left[{n-1 \atop k-1}\right]$。

如果最后一个元素加入之前的轮换，那么有 $n-1$ 个互不相同的位置可以选择，所以这部分的贡献是 $(n-1)*\left[{n-1 \atop k}\right]$。

这两种讨论已经包含了所有的情况，因此第一类 Stirling 数的递推式为

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)*\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}，n \in N^* \tag{2.2}$$

注意右边的第一项是吸收了上面的指标 $n-1$ ，这个特征可以应用在一些归纳法的证明上。

2.3 一个基础的性质

轮换可以看作是一种圆排列，每个位置的置换是环上的下一个点。事实上，**每一个排列都和一个轮换的集合等价**。我们把一个 n 的全排列 $\{a_1,\ldots,a_n\}$ 看作一个由 $i\to a_i$ 的置换，每个置换恰好属于一个轮换，因此，每一个排列就定义了一个轮换集合，每一个轮换集合也恰好能构造出一个排列，每一个排列都一一对应着一个轮换的集合。

由此说明 $\left[{n \atop k}\right]$ 表示的是 n 个元素恰好包含 k 个轮换的排列数。那么我们可以得到：

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!，n \in N \tag{2.3}$$

2.4 一些特殊值

$k=0$ 时，将 $n>0$ 个元素划分为 0 个轮换的方案显然是没有的，因此

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=1\ ,\ \begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}=0\ ,\ n\in N^*\quad \text{即}\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}=[n=0]$$

$k=1$ 时，将 n 个元素放入 1 个轮换的每一个方案都对应着一个长度为 n 的圆排列，因此

$$\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}=(n-1)!\ ,\ n\in N^*$$

$k=n-1$ 时，将 n 个元素划分为 $n-1$ 个轮换即为选两个元素分到一个轮换里，因此

$$\begin{bmatrix}n\\n-1\end{bmatrix}=\binom{n}{2}\ ,\ n\in N^*$$

$k=n$ 时，每一个将 n 个元素每个独立成一个轮换方案唯一，因此

$$\begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix}=1\ ,\ n\in N^*$$

$k>n$ 时，n 个元素显然不能分成超过 n 个轮换，因此

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=0\ ,\ k>n$$

$k=2$ 时满足

$$\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}=(n-1)!\times H_{n-1}=(n-1)!\times\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}$$

证明使用数学归纳法，首先 $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=1*1=1$ 成立。

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}n+1\\2\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}+n\times\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}\\&=(n-1)!+n\times(n-1)!\times\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\\&=n!\times\frac{1}{n}+n!\times\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\\&=n!\times\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\end{aligned}$$

$k=n-2$ 时满足

$$\begin{bmatrix}n\\n-2\end{bmatrix}=2\binom{n}{3}+3\binom{n}{4}$$

证明也可以类似的展开后使用数学归纳法。

3 第二类 Stirling 数

3.1 概念

第二类 Stirling 数 $\left\{ {n \atop k} \right\}$ 表示的是将 n 个元素划分为 k 个**非空子集**的方案数。

我们称第二类 Stirling 数为 Stirling 子集数，$\left\{ {n \atop k} \right\}$ 读作“n 子集 k”。

3.2 递推式

我们以增量的角度思考递推式的形式。对于将 n 个元素放入 k 个集合的方案中，最后一个元素单独作为一个集合，要么放进前 $n-1$ 个元素构成的集合中的一个。

如果最后一个元素单独作为一个集合则方案唯一，所以这部分的贡献为 $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$。

如果最后一个元素加入之前的集合，那么有 k 个集合可以选择，所以这部分的贡献是 $k * \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$。

这两种讨论已经包含了所有的情况，因此第二类 Stirling 数的递推式为

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k * \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} \text{ , } n \in N^* \tag{3.2}$$

注意右边的第一项是吸收了下面的指标 k ，这个特征可以应用在一些归纳法的证明上。

3.3 一些特殊值

$k=0$ 时，将 $n>0$ 个元素划分为 0 个集合的方案显然是没有的，因此

$$\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1 \text{ , } \left\{ {n \atop 0} \right\} = 0 \text{ , } n \in N^* \quad \text{即} \left\{ {n \atop 0} \right\} = [n=0]$$

$k=1$ 时，将 n 个元素放入 1 个集合的方案显然唯一，因此

$$\left\{ {n \atop 1} \right\} = [n \in N^*]$$

$k=2$ 时，先把 1 号元素放入 1 号集合，其他的元素随便选择，但不能都在 1 号集合，因此

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1 \text{ , } n \in N^*$$

$k=n-1$ 与 $k=n$ 时，可以通过类似的方法得出与第一类 Stirling 数一样的结论

$$\left[{n \atop n-1} \right] = \left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2} \text{ , } \left[{n \atop n} \right] = \left\{ {n \atop n} \right\} = 1 \text{ , } n \in N^*$$

$k>n$ 时，n 个元素显然不能分成超过 n 个非空集合，因此

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = 0 \text{ , } k > n$$

其他的若干特殊值

再给出一些特殊值，作为补充。由于应用太少，这里不再给出证明。

$k=3$ 时满足

$$\begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(3^{n-1}+1)-2^{n-1}$$

$k=n-2$ 时满足

$$\begin{Bmatrix} n \\ n-2 \end{Bmatrix} = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$$

$k=n-3$ 时满足

$$\begin{Bmatrix} n \\ n-3 \end{Bmatrix} = \binom{n}{4} + 10\binom{n}{5} + 15\binom{n}{6}$$

3.4 通项公式

$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}k^n(-1)^{m-k}$$

我们用数学归纳法证明这个通项公式，首先 $n=1$ 的边界情况成立。

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{Bmatrix} + m\begin{Bmatrix} n-1 \\ m \end{Bmatrix} \\
&= \frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}k^{n-1}(-1)^{m-1-k} + \frac{m}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}k^{n-1}(-1)^{m-k} \\
&= \frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m-1}{k}k^{n-1}(-1)^{m-1-k} + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}k^{n-1}(-1)^{m-k} \\
&= \frac{1}{(m-1)!}\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}k^{n-1}(-1)^{m-k} - \sum_{k=0}^{m}\binom{m-1}{k}k^{n-1}(-1)^{m-k}\right) \\
&= \frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m-1}{k-1}k^{n-1}(-1)^{m-k} \\
&= \frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m}\frac{(m-1)!k^{n-1}(-1)^{m-k}}{(k-1)!(m-k)!} \\
&= \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!k^n(-1)^{m-k}}{k!(m-k)!} = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}k^n(-1)^{m-k}
\end{aligned}$$

注意到展开组合数之后是一个卷积的形式，因此可以 FFT 求一行的第二类 Stirling 数。

$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}k^n(-1)^{m-k} = \sum_{k=0}^{m}\frac{k^n}{k!}\frac{(-1)^{m-k}}{(m-k)!}$$

4　通常幂与阶乘幂之间的转化

Stirling 数神奇的应用之一是辅助通常幂与阶乘幂的转化。

4.1　用下降阶乘幂表示通常幂

事实上，**Stirling 子集数（第二类 Stirling 数）是产生通常幂的阶乘幂的系数**。

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \text{ , } n \in N \tag{4.1}$$

准确的说这个式子其实才是第二类 Stirling 数的定义式，因为其具有清晰的组合意义。

这个证明我们使用数学归纳法，首先对于 $n = 1$ 有 $x^1 = 1 * x = x$ 。

然后有恒等式 $x^{\underline{k+1}} = x^{\underline{k}}(x-k)$ 成立，所以 $x \times x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + k \times x^{\underline{k}}$。

$$\begin{aligned}
x^n &= x \times x^{n-1} \\
&= x \times \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} k \times x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} x^{\underline{k}} + \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} k \times x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \times \left\{ {n-1 \atop k} \right\} \right) x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}
\end{aligned}$$

归纳的思想应用到了我们在 3.2 中提到的递推式特征，吸收了下面的指标 k。

值得注意的是证明过程中求和指标的变化，用到了 $k > n$ 时 Stirling 数为 0 的特殊值。

反方向的推导

反方向的推导意外的简单，最后的提取 x^{n-1} 的展开式作为公因数就显得非常自然优美了。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} &= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} x^{\underline{k}} + \sum_{k=0}^{n} k \times \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} k \times \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \right) \times (x - k + k) \\
&= x^{n-1} \times x = x^n
\end{aligned}$$

一种用组合意义证明的方法

等式左侧 x^n 可以看作把 n 个相互不同的球放入 x 个相互不同的盒子的方案数。

等式右侧枚举的是有 k 个盒子非空，那么这 k 个盒子分配 n 个球的方案数为 $\left\{{n \atop k}\right\}$，选出这 k 个盒子的方案数是 $\binom{x}{k}$ ，因为盒子不同所以不同顺序的匹配集合也是不同的方案，需要乘上 $k!$ ，因此 $\binom{x}{k} \times k! = x^{\underline{k}}$ 。

4.2 用通常幂表示上升阶乘幂

事实上，**Stirling 轮换数（第一类 Stirling 数）是产生阶乘幂的通常幂的系数。**

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \ , \ n \in N \tag{4.2}$$

证明同样用数学归纳法，可以使用 2.2 中提到的递推式吸收上面的指标 $n-1$ 作为归纳思路。然后有恒等式 $(x+n-1)x^k = x^{k+1} + (n-1)x^k$ 成立。

$$x^{\overline{n}} = (x+n-1)x^{\overline{n-1}} = (x+n-1)\sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k$$

再代入上述恒等式即可得到类似的证明过程。

4.3 一个神奇的恒等式

那么如何解决剩下的两种转换呢？这里用到了一个神奇的恒等式

$$x^{\underline{n}} = (-1)^n(-x)^{\overline{n}} \tag{4.3}$$

证明用的是阶乘幂 $x^{\overline{n}}$ 恰好有 n 项的性质。

$$\begin{aligned}
(-1)^n(-x)^{\overline{n}} &= (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (-x+i-1) \\
&= (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \big(-1 \times (x-i+1)\big) \\
&= (-1)^{2n} \prod_{i=1}^{n} (x-i+1) \\
&= x^{\underline{n}}
\end{aligned}$$

事实上我们也可以证明对称形式 $x^{\overline{n}} = (-1)^n(-x)^{\underline{n}}$，方法类似。

4.4 用上升阶乘幂表示通常幂

我们将等式 (4.1) 中的下降幂用等式 (4.3) 替换为上升幂，得

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}} \text{ , } n \in N \tag{4.4}$$

由于等式 (4.1) 和 (4.3) 我们都已经证明过了，所以这里不在给出正确性证明。

4.5 用通常幂表示下降阶乘幂

我们将等式 (4.2) 代入到等式 (4.3) 中，得

$$\begin{aligned} x^{\underline{n}} &= (-1)^n (-x)^{\overline{n}} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] (-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] (-1)^{n+k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] (-1)^{n-k} x^k \end{aligned}$$

也就得到了用通常幂表示下降阶乘幂的方法

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] (-1)^{n-k} x^k \text{ , } n \in N \tag{4.5}$$

同样由于等式 (4.2) 和 (4.3) 我们都已经证明过了，所以这里不在给出正确性证明。