# ĐẠI HỌC SÀI GÒN

Khoa Toán-Ứng dụng

# CẤU TRÚC RỜI RẠC
## Chương 1: Logic mệnh đề
## Bài giảng Đại học, Mã số: 858004, Số TC: 3
## (Bản thảo còn chỉnh sửa)

PGS.TS. Tạ Quang Sơn
Email: tqson09@gmail.com

# Tài liệu học tập


[1] Keith Delvin, Set, Functions and Logic, Chapman & Hall, Newyork,1992

[2] Micheal L' Oleary, A first course in Mathematics and Set Theory, John Wiley & Sons, USA, 2016

[3] Phan Hữu Chân & Trần Lâm Hách, Nhập môn Lý thuyết tập hợp và Logic, NXB Giáo dục, 1977.

[4] D. Bonevac, N.M. Asher, R.C. Koons, Logic, Sets and Functions, Kelldan Hult Publisher Company, USA, 1999.

[5] Igor Lavrov et al., Problems in Set Theory, Mathematical Logic and The Theory of Algorithms, Kluwer Academic, 2003

# Nội dung

# Thế nào là một mệnh đề toán học

- Một phát biểu mà tính đúng sai của nó hoàn toàn khẳng định được thì đó là một phát biểu có tính toán học, hay ta nói rằng đó là mệnh đề (toán học).

## Ví dụ 1.1

Hãy cho nhận định về sự đúng đắn của các phát biểu sau đây:
(i) Ngày mai trời mưa hoặc không mưa.
(ii) Không có sự sống của bất kì sinh vật nào trên mặt trăng.
(iii) Không có số hữu tỉ nào bình phương bằng 2.
(iv) Có vô số số nguyên tố.
(v) Tổng của hai số lẻ là một số chẵn.
(vi) $x + 1 > 0$.

**Bài tập 1:** Hãy phát biều 5 mệnh đề có tính toán học.

# 1.1.Các phép toán mệnh đề

**Ví dụ 1.1 (Tìm hiểu về tính đúng sai)**

*a) $\sqrt{2}$ là số nhỏ hơn hoặc bằng 3.*
*b) Tập nghiệm của pt $(x-1)(x-2)=0$ là $x=1$ và $x=2$.*
*c) Nếu $x$ không là phải số dương thì $x$ là số âm.*
*d) Nếu $x$ là số lẻ thì $x^2$ là số lẻ.*

Các chữ cái $p, q, r, ..$ sẽ được dùng để chỉ các mệnh đề và có 3 kiểu nối kết 1 kiểu phủ định mệnh đề:

| Ý nghĩa | Ký hiệu | Loại mệnh đề |
|---|---|---|
| và | $\wedge$ | liên kết |
| hoặc | $\vee$ | liên kết loại trừ |
| dẫn đến | $\Rightarrow$ | suy dẫn |
| không | $\neg$ | phủ định |

# 1.1.1. Hội của hai mệnh đề

- Là nối kết hai mệnh đề bởi từ "và", ký hiệu $\wedge$ hay &. Bảng giá trị:

- Hội của hai mệnh đề chỉ đúng khi cả hai cùng đúng.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

**Ví dụ 1.2**

Xét sự đúng-sai của các mệnh đề sau đây:
a) $e$ là số vô tỉ và $\pi$ là số dương.
b) $2 + 2 = 4$ và $4 + 4 = 16$.
c) Hà Nội là thủ đô của nước Việt Nam và $2 + 2 = 4$.

**Bài tập 2:** Viết 5 mệnh đề dạng Hội và cho biết giá trị Đ/S.

# 1.1.2. Tuyển của hai mệnh đề

- Là nối kết hai mệnh đề bởi từ "hoặc", ký hiệu bởi $\vee$. Bảng giá trị:

- Tuyển của hai mệnh đề chỉ sai khi cả hai cùng sai.

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

**Ví dụ 1.3**

Xét sự đúng-sai của các mệnh đề sau đây:
a) $\pi$ là số vô tỉ hoặc $\pi$ là số dương.
b) $2 + 2 = 4$ hoặc $4 + 4 > 16$.
c) Tam giác nào cũng có góc bằng $60^o$ hoặc $2 + 2 = 4$.

**Bai tập 3:** Viết 5 mệnh đề dạng Tuyển và cho biết giá trị Đ/S.

## Nhận xét 1.1

- *Trên các mệnh đề, ta có thể xây dựng các mệnh đề mới bằng phép nối kết HỘI hoặc nối kết TUYỂN. Các phép nối kết này được gọi là các phép toán trên mệnh đề.*
- *Các phép toán ấy sinh ra các mệnh đề mới một cách hình thức.*
- *Các lập luận đúng đắn dựa trên các phép toán như thế gọi là LOGIC hình thức.*

## Ví dụ 1.4

*Các phát biểu sau đây là đúng hay sai:*
*a) Phương trình* $x^2 + 1 = 0$ *là vô nghiệm.*
*b) Ta luôn luôn có* $\sqrt{2} \geq 1$.

## ☛ Thảo luận 1.1 (Tìm hiểu ý nghĩa của từ "hoặc")

- *"Khi vào phòng thi, thí sinh phải xuất trình thẻ học sinh* **hoặc** *giấy chứng minh nhân dân cho cán bộ coi thi kiểm tra."*
- *"Khẩu phần ăn trưa cho mỗi đại biểu là bún bò* **hoặc** *phở".*

## ☛ Thảo luận 1.2

*Ông A mua bảo hiểm cho căn nhà của mình để đề phòng trường hợp rủi ro. Loại bảo hiểm mà ông chọn là bảo hiểm trong trường hợp nhà cửa bị động đất hư hại, bị cháy nhà, hoặc bị mất trộm. Thời gian sau, chẳng may khu vực nơi ông cư ngụ bị động đất. Do chập điện nên căn nhà của ông bị cháy và nhiều món đồ đạc trong nhà bị mất cắp. Rất may mắn, giấy tờ liên quan đến hợp đồng bảo hiểm căn nhà, ông để ở cơ quan nơi ông làm việc. Ông ta tin rằng mình sẽ được công ty bảo hiểm bồi hoàn cho cả ba trường hợp. Điều này là đúng hay sai?*

# 1.1.3. Mệnh đề suy dẫn

- Nối hai mệnh đề bởi từ "suy ra", ký hiệu bởi $\Rightarrow$. Bảng giá trị:

- Mệnh đề suy dẫn chỉ sai khi $p$ đúng $q$ sai.

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

**Ví dụ 1.5**

Xét sự đúng-sai của các phát biểu sau đây:
i) Nếu $p$ là số có chữ số tận cùng bằng 0 thì $p$ chia hết cho 5.
ii) Nếu $p$ chia hết cho 5 thì $p$ là số có số tận cùng bằng 0.
iii) Nếu $a + b$ là số chẵn thì $a$ và $b$ đều là các số chẵn.

**Bài tập 4:** Viết 5 mệnh đề dạng suy dẫn và cho biết giá trị Đ/S.

**Chú ý:** Mệnh đề tương đương ký hiệu $p \Leftrightarrow q$ được định nghĩa:

$$\boxed{p \Leftrightarrow q := (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}$$

Bảng giá trị của mệnh đề tương đương:

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

# 1.1.4. Phủ định của một mệnh đề

Phủ định của mệnh đề $p$ là mệnh đề được ký hiệu bởi $\neg p$ (có khi ký hiệu $\sim p$ hay $\bar{p}$). Qui tắc phủ định được cho bởi bảng sau:

| $p$ | $\neg q$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

**Ví dụ 1.6 (Xét sự đúng sai của các phát biểu sau)**

- *Nếu $x$ không lớn hơn 3 thì $x$ nhỏ hơn 3.*
- *Nếu hàm số $f$ không liên tục tại $a$ thì hàm số gián đoạn tại $a$.*

**Bài tập 5:** Lập bảng giá trị của các mệnh đề $p \wedge q, p \vee q, p \Rightarrow q$ trong đó $q := \neg p$.

### ☛ Thảo luận 1.3

*Trong bài hát"Trái tim không ngủ yên" của nhạc sĩ Thanh Tùng, ông đã viết như sau:*

*"Nếu anh nói anh muốn xa em*
*Là thật ra anh mong rất gần*
*Còn anh nói đã muốn quên em rồi*
*Là trong tim anh luôn nhớ em."*

*Hãy cho một bình luận về logic của câu hát nêu trên.*

### ☛ Thảo luận 1.4

*Hãy phát biểu một mệnh đề luôn luôn đúng và một mệnh đề luôn luôn sai.*

## Ví dụ 1.7 (Lập bảng giá trị cho mệnh đề $(p \wedge q) \vee r$)

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p \wedge q)$ | $(p \wedge q) \vee r$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Bài tập 6:** Lập bảng cho $(p \vee q) \wedge r$, $(p \Rightarrow q) \wedge r$, $(p \vee q) \wedge \neg r$, $(p \Rightarrow q) \wedge \neg r$.

## ☛ Thảo luận 1.5 (Tìm số dòng trạng thái trong bảng giá trị)

*Xác định giá trị của mệnh đề tạo nên từ $2, 3, \ldots, n$ mệnh đề gốc?*

# 1.2. Qui tắc kết luận
## 1.2.1. Quan hệ nhân-quả

**Ví dụ 2.1 (Hãy xem xét ý nghĩa)**

*a) Ngày mai trời mưa hoặc không mưa.*
*b) Nếu $\sqrt{2}$ là số vô tỉ thì $1 + 1 = 2$.*

**☛ Thảo luận 2.1**

*-Mệnh đề a) là một mệnh đề hằng đúng.*
*- Mệnh đề b) cũng là mệnh đề suy dẫn đúng đắn hợp logic.*
*Thế nhưng, những kết luận kiểu như mệnh đề a) và b) liệu có giá trị gì trong lập luận? Liệu chúng ta có thể chấp nhận kiểu lập luận như vậy được chăng? Kiểu lập luận như thế có ý nghĩa gì?*
*Logic hình thức có thể đã gây nên ít nhiều sự hoang mang cho người mới học toán từ những mệnh đề đúng đắn có dạng như thế.*

• Kiểu kết luận p $\Rightarrow$ q không những phải đúng mà còn phải phản ánh được mối quan hệ nhân quả. Mô thức kết luận thường sử dụng trong Toán học là:

$$\boxed{\text{Tác nhân} + \text{Điều kiện} \longrightarrow \text{Kết luận.}}$$

**Chú ý 2.1**

*Với mệnh đề dạng p $\Rightarrow$ q, ta thường gọi p là nguyên nhân và q là hệ quả. Về mặt logic hình thức, mệnh đề này có các tính chất đặc biệt sau:*
*1. Mệnh đề chỉ sai khi nguyên nhân đúng mà hệ quả sai.*
*2. Nếu nguyên nhân sai thì mệnh đề luôn luôn đúng.*
*3. Nếu hệ quả đúng thì mệnh đề luôn luôn đúng.*

# 1.2.2. Các qui tắc kết luận

• Rõ ràng rằng không thể gọi là hợp lý khi từ một điều đúng, bằng lập luận logic, lại có thể dẫn đến một kết quả sai. Hay ta khẳng định rằng $p$ đúng không thể dẫn đến $q$ sai.

• Vậy có một chân lý:

*không thể chấp nhận "p đúng lại suy ra q sai"*

• Nói cách khác:

*Mệnh đề "p đúng dẫn đến q sai" là mệnh đề sai*

Vậy thì phủ định của nó là mệnh đề đúng. Tức là

*Mệnh đề* $\neg(p \Rightarrow q)$ *chỉ đúng khi p đúng còn q sai,*

Hay,

$$\boxed{\textit{Mệnh đề } (p \Rightarrow q) \textit{ chỉ sai khi } p \textit{ đúng còn } q \textit{ là sai.}}$$

Với sự phân tích này, bảng giá trị của mệnh đề $p \Rightarrow q$ với các trường hợp còn lại là hoàn toàn có thể hiểu được.

- Ta lưu ý 4 dạng kết luận sau đây:

| | Dạng I | Dạng II | Dạng III | Dạng IV |
|---|---|---|---|---|
| Nếu (...) đúng | $p \Rightarrow q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \vee q$ | $p \Rightarrow q$ |
| và (...) đúng | $p$ | $\neg q$ | $\neg p$ | $q \Rightarrow r$ |
| thì (...) đúng | $q$ | $\neg p$ | $q$ | $p \Rightarrow r$ |

# 1.3. Qui tắc phủ định

• Giả sử có một sự kiện có thể nhận nhiều trạng thái khác nhau. Khi đó, phủ định một trạng thái tức là muốn nói đến các trạng thái còn lại. Với một mệnh đề ký hiệu $p$, phủ định của $p$ là mệnh đề ký hiệu $\neg p$.

**Ví dụ 3.1**

*Phủ định của* $x > 0$ *là* $x < 0$ *hoặc* $x = 0$.
*Phủ định của* $x > 3$ *là* $x < 3$ *hoặc* $x = 3$.

Sau đây ta sẽ tìm hiểu sâu hơn về qui tắc phủ định.
Các mệnh đề sau đây có ý nghĩa gì: $\neg(p \wedge q)$ và $\neg(p \vee q)$?

# 1.3.1. Phủ định của hội và tuyển các mệnh đề

• $p \wedge q$ đúng khi $p$ và $q$ cùng đúng.
• $\neg(p \wedge q)$ có nghĩa là không phải cả hai mệnh đề $p$ và $q$ cùng đúng, tức là, có ít nhất một mệnh đề sai.
• Khi nói có ít nhất $p$ hoặc $q$ sai nghĩa là ít nhất $\neg p$ hoặc $\neg q$ đúng. Vậy,

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q.$$

Lập luận tương tự, ta nhận được:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q.$$

**Bài tập 7:** Viết mệnh đề phủ đinh của các mệnh đề sau đây:
1. $x > 0$ và $x$ là số lẻ.
2. $x < 0$ hay $x \geq 1$.
3. $x$ không âm hay $x \leq 1$.

**Qui tắc De Morgan** Với bất kỳ mệnh đề $p$ và $q$, ta có

$$\begin{array}{|rcl|} \hline \neg(p \vee q) & \equiv & \neg p \wedge \neg q \\ \hline \neg(p \wedge q) & \equiv & \neg p \vee \neg q \\ \hline \end{array} \qquad (1)$$

**Ví dụ 3.2**

Hình vuông là hình chữ nhật có hai cạnh liền kề bằng nhau. Để chỉ ra một hình không là hình vuông, ta chỉ cần chứng tỏ đó không là hình chữ nhật hoặc hai cạnh liền kề không bằng nhau.

**Bài tập 8:** Dùng cách thiết lập bảng giá trị các mệnh đề để chứng minh các công thức nêu trên.

# 1.3.2. Phủ định của mệnh đề suy dẫn

Với mệnh đề $p \Rightarrow q$, phủ định của $p \Rightarrow q$ là trạng thái có $p$ mà không có $q$, tức là, có $p$ nhưng có $\neg q$. Vậy,

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q).$$

Từ đó, áp dụng qui tắc De Morgan, ta nhận được

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q).$$

Tóm lại, ta có

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \neg(p \Rightarrow q) & \equiv & (p \wedge \neg q) \\ \hline (p \Rightarrow q) & \equiv & (\neg p \vee q) \end{array}} \qquad (2)$$

Bạn đọc có thể dùng cách thiết lập bảng giá trị các mệnh đề để chứng minh các công thức nêu trên.

## Ví dụ 3.3

*Tìm mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau. Từ đó tìm các mệnh đề tương đương.*
*i)* $(x > 0)$,
*ii)* $(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$.

Ta có kết quả sau đây.
i) $\neg(x > 0) \equiv (x = 0) \vee (x < 0)$,
ii) $\neg(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon) \equiv |x - a| < \delta \wedge |f(x) - l| \geq \epsilon$.

## Ví dụ 3.4

Cho các mệnh đề:
$p$ là mệnh đề: Hôm nay trời nắng nóng $40^o$,
$q$ là mệnh đề: Ngày mai là ngày đầu tuần.
Hãy diễn đạt bằng lời các mệnh đề logic hình thức:

$$p \wedge q, p \vee q, \neg(p \wedge q), \neg(p \vee q), p \Rightarrow q, \neg(p \Rightarrow q).$$

# 1.4. Một số thuật ngữ dùng trong các mệnh đề
## 1.4.1. Các thuật ngữ cần quan tâm

• Trong logic toán học, các thuật ngữ "cần", "đủ", "ắt có", " nếu", " chỉ nếu", "khi", " chỉ khi",... thường được gắn với mệnh đề suy dẫn.
• Mệnh đề dạng $p \Rightarrow q$ có thể đọc bởi nhiều cách khác nhau, chẳng hạn:
1) $p$ suy ra $q$,
2) nếu $p$ thì $q$,
3) $p$ là điều kiện đủ cho $q$,
4) $q$ là điều kiện cần cho $p$,
$q$ nếu $p$ (có $q$ nếu có $p$),
$q$ khi $p$ (có $q$ khi có $p$),
$q$ là điều kiện ắt có của $p$,
Có $p$ ắt có $q$.

### ☛ Thảo luận 4.1

*Hãy phát biểu các dạng tương đương của phát biểu sau đây: "Nếu anh được 18 tuổi thì anh có quyền bầu cử".*

• Các định lý toán học thường được phát biểu dưới dạng mệnh đề suy dẫn dạng $p \Rightarrow q$. Trong cấu trúc đó, $p$ gọi là điều kiện đủ của định lý còn $q$ gọi là điều kiện cần của định lý.

# 1.4.2. Điều kiện cần và điều kiện đủ

Trong cấu trúc mệnh đề $p \Longrightarrow q$, ta gọi các thành phần $p$ và $q$ như sau:

$$\begin{array}{ccc} p & \Rightarrow & q \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Đủ} & & \text{Cần} \end{array} \tag{3}$$

- Nếu mệnh đề $p \Rightarrow q$ đúng và $p$ đúng thì $q$ đúng, tức là, nếu $p$ đúng là đủ để khẳng định $q$ đúng.
- Nếu $p \Rightarrow q$ là mệnh đề đúng và $q$ sai thì $p$ cũng phải sai, tức là, $q$ sai là cần phải có mới khẳng định $p$ sai.

# 1.4.3. Phân biệt điều kiện cần-điều kiện đủ

- Khi chứng minh một định lý được cho dưới dạng

$$p \Longleftrightarrow q,$$

chúng ta phải chứng minh hai chiều. Một chiều gọi là chứng minh điều kiện cần, một chiều gọi là chứng minh điều kiện đủ.

- Làm thế nào xác định đúng đâu là định lý về điều kiện cần, đâu là định lý điều kiện đủ?

$$\begin{array}{ccc} p & \Rightarrow & q \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Đủ} & & \text{Cần=Tác nhân + Điều kiện} \end{array} \tag{4}$$

### ☛ Thảo luận 4.2

*Xét phát biểu sau:*
*" Hình vuông là hình chữ nhật có hai cạnh liên tiếp bằng nhau".*

*Xét hai mệnh đề:*
*a) $p \Rightarrow q$: Nếu một tứ giác là hình vuông thì nó là hình chữ nhật có hai cạnh liên tiếp bằng nhau.*
*b) $q \Rightarrow p$: Nếu một hình chữ nhật có hai cạnh liên tiếp bằng nhau thì nó là hình vuông.*

- *Đâu là định lý về điều kiện cần, đâu là định lý về điều kiện đủ?*

## Ví dụ 4.1

Chứng minh rằng nếu có 3 số $a, b, c$ lập thành một cấp số cọng thì $2b = a + c$. Mô tả lại kết quả trên dưới dạng mệnh đề $p \Rightarrow q$. Mệnh đề ngược lại có đúng không? Nếu đúng, hãy phát biểu kết quả thu được dưới dạng một mệnh đề dạng ắt có và đủ.

$p$ : $a, b, c$ lập thành cấp số cọng,.
$q$ : $2b = a + c$,
$p \Leftrightarrow q$,
Điều kiện ắt có và đủ để $a, b, c$ lập thành một cấp số cọng là $2b = a + c$.

## ☛ Thảo luận 4.3

*Tìm định lý có dạng $p \Rightarrow q$ và chỉ rõ điều kiện cần, điều kiện đủ.*

# 1. 5. Logic hình thức và các tính chất

## Định lý 5.1

*Cho $p, q, r$ là (ký hiệu của) các mệnh đề. Khi đó*

(a) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

(b) $p \vee q \equiv q \vee p$

(c) $\neg(\neg p) \equiv p$

(d) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

(e) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

(f) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

(g) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

(h) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(i) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(j) $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

(k) $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

# 1.6. Lượng từ $\exists$ và $\forall$ trong cấu trúc mệnh đề

• Có hai lượng từ quan trọng trong logic mệnh đề là "tồn tại" và "với mọi". Về ý nghĩa chúng đối lập nhau. Ký hiệu $\forall$ thay cho ý nghĩa với mọi, còn $\exists$ thay cho ý nghĩa tồn tại.

• Mọi phần tử $x$ đều có tính chất $\mathcal{P}$, ta viết $\forall x, \mathcal{P}(x)$.

• Ít nhất một phần tử $x$ có tính chất $\mathcal{P}$, ta viết $\exists x, \mathcal{P}(x)$.

• Mệnh đề phức hợp: Ví dụ khi định nghĩa giới hạn của dãy số $\{a_n\}$, người ta viết:

$$(\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon).$$

Ở đây thành phần gồm các ký hiệu lượng từ là

$$(\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N})$$

và thành phần chính của mệnh đề là

$$(n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon).$$

# 1.6.1.Thứ tự xuất hiện các lượng từ và ý nghĩa

- Thứ tự xuất hiện của các lượng từ là quan trọng.

**Ví dụ 6.1**

Hãy diễn tả mệnh đề: "Không tồn tại số tự nhiên lớn nhất" dưới dạng ký hiệu toán học. Khảo sát ý nghĩa của mệnh đề khi thay đổi thứ tự các ký hiệu lượng từ.

*Phân tích:* Việc không tồn tại số tự nhiên lớn nhất đồng nghĩa với việc với mỗi số tự nhiên cho trước, bao giờ cũng tồn tại số tự nhiên lớn hơn nó. Vậy có

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(n > m),$$

hay viết gọn lại

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > m.$$

### ☛ Thảo luận 6.1

*Hãy tìm hiểu về nghĩa của mệnh đề trên nếu thay đổi thứ tự xuất hiện trong mệnh đề như sau:*

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(n > m),$$

### ☛ Thảo luận 6.2

*Để diễn tả giới hạn của dãy số* $\{a_n\} \to a$, *người ta mô tả dưới dạng mệnh đề*

$$(\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon).$$

i) *Phát biểu lại mệnh đề trên bằng lời và tìm hiểu ý nghĩa.*
ii) *Thay đổi thứ tự các lượng từ và cho một nhận xét.*

# 1.6.2. Phủ định mệnh đề có chứa các lượng từ

**☛ Thảo luận 6.3**

*Xét phát biểu*

(A) *"Mọi chiếc xe sản xuất trong nước đều có chất lượng thấp."*

*Tìm mệnh đề phủ định của* (A) *trong các mệnh đề sau đây:*

*a) Mọi chiếc xe sản xuất trong nước đều có chất lượng cao.*
*b) Mọi chiếc xe sản xuất trong nước đều có chất lượng không thấp.*
*c) Có ít nhất một chiếc xe sản xuất trong nước có chất lượng cao.*
*d) Có ít nhất một chiếc xe sản xuất trong nước chất lượng không thấp.*

- Phủ định lượng từ:

$$\text{Phủ định } \forall \to \exists, \quad \text{Phủ định } \exists \to \forall.$$

- Phủ định mệnh đề:
Ta có qui tắc sau đây (Ở đây $\mathcal{P}(x)$ là phần chính của mệnh đề)

$$\neg(\forall x, \mathcal{P}(x)) \equiv \exists x, \neg\mathcal{P}(x). \tag{5}$$

và

$$\neg(\exists x, \mathcal{P}(x)) \equiv \forall x, \neg\mathcal{P}(x) \tag{6}$$

- Mở rộng qui tắc:

$$\neg[\forall x, \exists y, \mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(y)] \equiv \exists x, \forall y, \neg\mathcal{P}(x) \vee \neg\mathcal{Q}(y).$$

# 1.6.3. Phủ định một dạng định lý toán học

$$\underbrace{\forall x, \exists y,}_{\text{Phần ký hiệu lượng từ}} \quad \underbrace{\phi(x,y) \Rightarrow \psi(x,y)}_{\text{Phần mệnh đề chính}}$$

Sử dụng qui tắc (5), (6), và kết hợp Định lý tương đương, ta có

$$\neg\big(\forall x, \exists y, \phi(x,y) \Rightarrow \psi(x,y)\big) \equiv \exists x, \forall y, \big(\phi(x,y) \wedge \neg(\psi(x,y)\big).$$

Bây giờ chúng ta xét trường hợp phủ định cho mệnh đề có dạng

$$\forall x, \mathcal{A}(x)[\phi(x) \Rightarrow \psi(x)]. \qquad (7)$$

Mệnh đề nêu trên được hiểu là: Với mọi $x$ có tính chất $\mathcal{A}$, nếu có $\phi(x)$ thì có $\psi(x)$.

## Ví dụ 6.2

*Giả sử trên không gian các số tự nhiên $\mathbb{N}$, ký hiệu:*

*$\phi(x)$ chỉ $x$ là số nguyên tố,*

*$\psi(x)$ chỉ $x$ là số lẻ.*

*Xét mệnh đề:*

$$\forall x, x \in \mathbb{N}, [\phi(x) \Rightarrow \psi(x)].$$

*(Với mọi số tự nhiên $x$, nếu $x$ là số nguyên tố thì $x$ là số lẻ.)*
*i) Cho nhận xét về phát biểu nói trên.*
*ii) Phát biểu mệnh đề phủ định.*
*iii) Hãy thay đổi cấu trúc mệnh đề để có phát biểu đúng.*

## Chú ý 6.1

*Khi phủ định mênh đề mà trong thành phần ký hiệu lượng từ có các thuộc tính, thì thuộc tính không thay đổi.*

$$\begin{aligned} \forall x, \mathcal{A}(x) &\rightarrow \textit{(phủ định)} \;\; \exists x, \;\; \mathcal{A}(x), \\ \exists x, \mathcal{A}(x) &\rightarrow \textit{(phủ định)} \;\; \forall x, \;\; \mathcal{A}(x). \end{aligned}$$

## Ví dụ 6.3

Phủ định các mệnh đề sau đây:

i)

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon),$$

ii)

$$(\exists x)(\forall \epsilon > 0)(-\epsilon < x < \epsilon),$$

iii)

$$(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(x + y = 1).$$