ĐẠI HỌC SÀI GÒN

Khoa Toán-Ứng dụng

CẤU TRÚC RỜI RẠC
Chương 2: Chứng minh trong Toán học
Bài giảng Đại học, Mã số: 858004, Số TC: 3
(Bản thảo còn chỉnh sửa)

PGS.TS. Tạ Quang Sơn
Email: tqson09@gmail.com

Tài liệu học tập

[1] Keith Delvin, Set, Functions and Logic, Chapman & Hall, Newyork,1992

[2] Micheal L' Oleary, A first course in Mathematics and Set Theory, John Wiley & Sons, USA, 2016

[3] Phan Hữu Chân & Trần Lâm Hách, Nhập môn Lý thuyết tập hợp và Logic, NXB Giáo dục, 1977.

[4] D. Bonevac, N.M. Asher, R.C. Koons, Logic, Sets and Functions, Kelldan Hult Publisher Company, USA, 1999.

[5] Igor Lavrov et al., Problems in Set Theory, Mathematical Logic and The Theory of Algorithms, Kluwer Academic, 2003

Nội dung

1.1. Một hệ thống có tính Toán học

Là một hệ thống thỏa mãn các yêu cầu sau đây:
a) Có một lớp các khái niệm ban đầu không định nghĩa.
b) Có một tập hợp chứa các đối tượng cần khảo sát.
c) Có các phép quan hệ giữa các đối tượng trên tập hợp đó.
d) Có một tập hợp các phép toán trên các phần tử của tập hợp đó.
e) Có một hệ tiên đề logic.
f) Có một hệ tiên đề phi mâu thuẩn.
g) Có một tập hợp các định lý.
h) Có một tập hợp các định nghĩa.
i) Có một lý thuyết nền tảng.

Ví dụ 1.1

Hình học phẳng, hình học không gian như đã biết là các hệ thống toán học, trong đó điểm, đường thẳng. mặt phẳng là các khái niệm không được định nghĩa. Có các mối quan hệ như: bằng nhau, song song, vuông góc. Có các tiên đề ví dụ như: qua hai điểm có duy nhất một đường thẳng...

Ví dụ 1.2

Lý thuyết tập hợp là một hệ thông toán học, trong đó, khái niệm tập hợp là không có định nghĩa; có hệ thống các phép toán là phép toán hợp, phép toán giao, phần bù, ...,; có các quan hệ là liên thuộc, chứa trong,..

2.2. Chứng minh trong toán học
2.2.1. Dạng chuẩn của một chứng minh

Giả sử có một hệ toán học với các tiên đề $A_1, A_2, \ldots, A_k$ và các định lý đã được chứng minh.

• Chứng minh mệnh đề p được gọi là một dạng chứng minh chuẩn (chứng minh suy diễn) nếu có một dãy các mệnh đề $S_1, S_2, \ldots, S_n$ được xác lập sao cho

1. S_n là mệnh đề p.
2. $S_i, i \in \{1, \ldots, n-1\}$ là một trong những tiên đề $A_1, A_2, \ldots, A_k$ hoặc là S_i được suy ra từ các mệnh đề trước đó bằng các qui tắc logic sử dụng các kết luận trong các định lý hay các tiên đề.

• *Định lý* là một khẳng định (mệnh đề) được suy ra từ các tiên đề hay các định lý khác.

2.2.2. Gọi tên các mệnh đề

Thường gặp các định lý cho dưới dạng

$$p \Rightarrow q \text{ hoặc là } p \Leftrightarrow q.$$

$$\begin{aligned} p \Rightarrow q &: \textit{mệnh đề thuận}, \\ q \Rightarrow p &: \textit{mệnh đề đảo}, \\ \neg p \Rightarrow \neg q &: \textit{mệnh đề phản}, \\ \neg q \Rightarrow \neg p &: \textit{mệnh đề phản đảo}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.1 (Cho hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$)

Thuận: *Nếu f khả vi tại x_0 thì f liên tục tại x_0.*
Đảo: *Nếu f liên tục tại x_0 thì f khả vi tại x_0.*
Phản: *Nếu f không khả vi tại x_0 thì f không liên tục tại x_0.*
Phản đảo: *Nếu f không liên tục tại x_0 thì f không khả vi tại x_0.*

Chú ý 2.1

Trong Chương 1, chúng ta đã biết được sự tương đương của các cặp mệnh đề dưới đây:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$$
$$(q \Rightarrow p) \equiv (\neg p \Rightarrow \neg q).$$

Ví dụ 2.2

Hãy tìm các mệnh đề tương đương logic nói trong Ví dụ 2.1.

2.2.3. Chứng minh $p \Rightarrow q$ theo qui tắc suy dẫn

• Để bắt đầu chứng minh, ta sử dụng giả thiết p đúng và bằng lập luận logic, kết hợp sử dụng các định lý hay các tiên đề cần thiết để chỉ ra được sự đúng đắn của khẳng định q. Có thể sơ đồ hóa sự chứng minh mệnh đề trên như sau:

$$\begin{cases} p \Rightarrow S_1 \\ S_1 \Rightarrow S_2 \\ \dots \\ S_n \Rightarrow q \end{cases} \Longrightarrow \quad (p \Rightarrow q).$$

Kiểu chứng minh này còn được gọi là chứng minh trực tiếp.

Ví dụ 2.3

Chứng minh rằng a là số chẵn thì a^2 là số chẵn.

Ta có chuỗi các lập luận như sau:
-Giả sử a là số chẵn.
-Khi đó a có dạng $a = 2m$ với $m \in \mathbb{N}$.
-Từ đó, bình phương hai vế ta được $a^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$.
-Vì $2m^2 \in \mathbb{N}$ nên a^2 là số chẵn.

Ví dụ 2.4

Chứng minh rằng tổng của hai số hữu tỉ là một số hữu tỉ.

Giả sử x và y là các số hữu tỉ.
Khi đó tồn tại các số a, b, c, d là các số nguyên sao cho $x = a/c, y = b/d$ với $c, d \neq 0$.
Xét tổng

$$x + y = \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}.$$

Vì $ad + bc$ và cd là các số nguyên nên kết luận được $x + y$ là số hữu tỉ.

Chú ý có thể trình bày chứng minh dưới dạng hai cột song song:

Ví dụ 2.5

Chứng minh rằng trong một hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau.

Gọi hình thang cân là $ABCD$ với hai đáy là AB và CD. Cần chứng minh rằng $AC = BD$.

- Do $ABCD$ là hình thang cân nên hai góc đáy bằng nhau: $A\hat{D}C = B\hat{C}D$.	(do định nghĩa)
-Do $ABCD$ là hình thang cân nên hai cạnh bên bằng nhau: $AD = BC$.	(t/c hình thang cân)
-Xét hai tam giác ADC và BCD, ta có $DC = CD$, $A\hat{D}C = B\hat{C}D$, $AD = BC$, -nên $\Delta ADC = \Delta BCD$.	(trường hợp cgc)
-Từ đây suy ra $AC = BD$.	

Định lý 2.1

Các mệnh đề sau đây là luôn luôn đúng.
a) $\forall x, \phi(x) \Rightarrow \exists x, \phi(x)$.
b) $\exists y, \forall x, \phi(x, y) \Rightarrow \forall x, \exists y, \phi(x, y)$.

☛ Thảo luận 2.1

Theo qui tắc của mệnh đề suy dẫn, giá trị đúng mệnh đề cần chứng minh dạng $p \Rightarrow q$ *không phải chỉ phụ thuộc* p *đúng mà còn phụ thuộc cả trường hợp* p *sai.*
Câu hỏi:
Tại sao khi cần chứng minh mệnh đề $p \Rightarrow q$ là mệnh đề đúng, chúng ta chỉ bắt đầu từ giả thiết p đúng?

2.2.4. Chứng minh kiểu phản chứng

- Giả sử cần chứng minh khẳng định sự đúng đắn của mệnh đề

$$p \Rightarrow q.$$

Lập luận: Giả sử có p và có điều ngược lại, tức là có $p \wedge \neg q$. Từ đây, nếu chỉ ra được một mâu thuẫn thì kết thúc chứng minh.

- Sơ đồ chứng minh

$$\begin{cases} p \\ \neg q \end{cases} \Longrightarrow \text{mâu thuẫn.}$$

Ví dụ 2.6

Cm: Nếu x là số hữu tỉ và y là số vô tỉ thì $x+y$ là số vô tỉ.

• Giả sử rằng x là số hữu tỉ, y là số vô tỉ và $x+y$ là số hữu tỉ.
• Vì x và $x+y$ là số hữu tỉ nên biểu diễn được dưới dạng các phân số tối giản:

$$x = \frac{a}{b}, x+y = \frac{c}{d}, \text{ với } a, b, c, d \text{ là các số nguyên nào đó.}$$

Khi đó,

$$y = (x+y) - x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{cb-ad}{bd}.$$

• Vì $cb-ad$ và bd là các số nguyên nên $y=(x+y)-x$ là số hữu tỉ. Thế nhưng y là số vô tỉ theo giả thiết, mâu thuẫn.

Ví dụ 2.7

Cho f là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Chứng minh nếu với mỗi $p>0$ mỗi $x \in \mathbb{R}$, $f(x+p) = f(x)$ thì f là hàm hằng.

Mệnh đề cần chứng minh viết lại như sau:

$$(\forall p > 0)(\forall x)([f(x+p) = f(x)] \Rightarrow f \text{ là hàm hằng}).$$

Dùng chứng minh phản chứng. Giả sử f là không là hằng số, ta có mệnh đề:

$$(\forall p > 0)(\forall x)(f(x+p) = f(x)) \wedge (f \text{ là không hàm hằng}).$$

Vì f không là hàm hằng nên

$$\exists x, \exists y, f(x) \neq f(y). \tag{1}$$

Theo quan hệ hàm số,

$$f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y.$$

Trường hợp $x < y$: đặt $\bar{p} = y - x$, có $x + \bar{p} = y$ và $\bar{p} > 0$. Vì

$$(\forall p > 0)(\forall x)(f(x+p) = f(x)),$$

nên $f(x + \bar{p}) = f(x)$, tức là $f(y) = f(x)$. Điều này trái với (1).
Trường hợp $y < x$: Lập luận tương tự.

Ví dụ 2.8 (Số nguyên tố: chỉ chia hết cho 2 và chính nó)

Hãy chứng minh rằng luôn tồn tại vô số số nguyên tố.

Chuỗi lập luận của chứng minh là như sau:

• Giả sử phản chứng rằng chỉ tồn tại hữu hạn số nguyên tố $p_1, p_2, ..., p_n$ (tức là không còn số nguyên tố nào khác).

• Xét số $N = p_1 p_2 ... p_n + 1$.

-Số này hoàn toàn khác với các số các số $p_1, p_2, ..., p_n$ nên nó **không phải là số nguyên tố**.

Khi đó, N phải là **hợp số** nên nó có ít nhất một ước số là số nguyên tố p (tức là N có ước số là p)

-Do giả thiết chỉ có hữu hạn các số nguyên tố $p_1, p_2, ..., p_n$ nên tồn tại $i \in \{1, \ldots, n\}$ sao cho $p = p_i$.

• Vì p là ước của N và p là ước số của $p_1 p_2 ... p_n$ nên suy ra được p phải là ước của 1, mâu thuẫn.

2.2.5. Chứng minh $p \Rightarrow q$ theo kiểu phản đảo

Dựa trên kết quả về sự tương đương logic mệnh đề:

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p,$$

Để chứng minh $p \Rightarrow q$, ta chứng minh $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Ví dụ 2.9

Chứng minh rằng nếu x^2 là số lẻ thì x là số lẻ.

Ta sẽ chứng minh rằng:

Nếu x là số chẵn thì x^2 là số chẵn.

Với x là số chẵn, ta có $x = 2k$. Khi đó $x^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Vậy x^2 là số chẵn.

Ví dụ 2.10

Chứng minh mệnh đề

$$(\sin\alpha \neq 0) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \alpha \neq n\pi).$$

Mệnh đề tương đương là

$$(\exists n \in \mathbb{N}, \alpha = n\pi) \Rightarrow (\sin\alpha = 0).$$

Mệnh đề này luôn luôn đúng, vậy mệnh đề đã cho là đúng.

Ví dụ 2.11

Chứng minh rằng hai đường thẳng tạo với một cát tuyến hai góc so le trong bằng nhau thì song song.

2.2.6. Chứng minh mệnh đề $p \Leftrightarrow q$

- Để chứng minh mệnh đề $p \Leftrightarrow q$ có thể dùng mệnh đề tương đương $\neg p \Leftrightarrow \neg q$,
- Có thể phân rã mệnh đề trên thành mệnh đề

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

- Hoặc chứng minh tương đương trực tiếp theo sơ đồ

$$(p \Leftrightarrow s_1) \wedge (s_1 \Leftrightarrow s_2) \wedge \ldots \wedge (s_n \Leftrightarrow q)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow q).$$

2.2.7. Chứng minh mệnh đề dạng $\forall x, \phi(x)$

• Để chứng minh mệnh đề dạng này, ta lấy một phần tử x bất kỳ thuộc không gian đang xét và chứng minh có $\phi(x)$.

Ví dụ 2.12

Một tập hợp $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập hợp lồi nếu $tx + (1-t)y \in C$ với mọi $x, y \in C$ và với mọi $t \in (0,1)$. Chứng minh rằng nếu $A, B \subset \mathbb{R}^n$ là các tập hợp lồi thì $A \cap B$ là tập hợp lồi ($A \cap B \neq \emptyset$)

CM: Lấy tùy ý $x, y \in A \cap B$. Ta có $x, y \in A$ và $x, y \in B$. Vì A và B là các tập hợp lồi nên $tx + (1-t)y \in A$ với mọi $t \in (0,1)$ và $tx + (1-t)y \in B$ với mọi $t \in (0,1)$. Vậy $tx + (1-t)y \in A \cap B$ với mọi $t \in (0,1)$. Vì x và y lấy tùy ý trong $A \cap B$ nên kết luận này đúng với mọi $x, y \in A \cap B$, tức là, $A \cap B$ là tập hợp lồi.

2.2.8. Chứng minh mệnh đề dạng $\exists x, \phi(x)$

- Mệnh đề trên được chứng minh khi chỉ ra được một phần tử x trong không gian đang xét thỏa mãn $\phi(x)$.
- Dạng này thường xuất hiện khi cần chỉ ra phản ví dụ.

Ví dụ 2.13

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một hàm số liên tục nhưng không khả vi.

Có thể chỉ ra hàm số liên tục nhưng không khả vi bởi $f(x) = |x|$. Hàm số này liên tục tại $x = 0$ nhưng không khả vi tại đó.

2.2.9. Chứng minh mệnh đề dạng $(p \vee q) \Rightarrow r$

- Chú ý rằng mệnh đề
$$(p \vee q) \Rightarrow r$$
là tương đương logic với mệnh đề
$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r).$$

- Nếu cần chứng minh một mệnh đề có dạng $P \Rightarrow Q$ và nếu P có thể phân rã ra các trạng thái $P_1, P_2, \ldots, P_k$ thì cần phải chứng minh toàn bộ k trường hợp
$$\begin{cases} P_1 \Rightarrow Q \\ P_2 \Rightarrow Q \\ \ldots \\ P_k \Rightarrow Q. \end{cases}$$

Ví dụ 2.14

Giá trị tuyệt đối của số thực, ký hiệu $|x|$, được định nghĩa bởi

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng nếu x là số thực thì $|x| \geq 0$.

Chúng ta sẽ chứng minh $(x \geq 0) \vee (x < 0) \Rightarrow |x| \geq 0$.
+Trường hợp $x \geq 0$.
Nếu $x \geq 0$, theo định nghĩa của giá trị tuyệt đối, $|x| = x$. Vậy $|x| \geq 0$.
+Trường hợp $x < 0$.
Nếu $x < 0$, theo định nghĩa của giá trị tuyệt đối, $|x| = -x$. Nên $-x > 0$. Vậy $|x| > 0$.

2.2.3. Chứng minh qui nạp

- Cần chứng minh phát biểu dạng $\phi(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.
- Chứng minh mệnh đề dạng $\forall n, \phi(n)$.
- Qui trình chứng minh được tiến hành theo ba bước sau đây:
  1. Bước 1: Khởi tạo chứng minh, kiểm chứng $\phi(1)$ đúng.
  2. Bước 2: Giả sử $\phi(n)$ đúng để có một giả thiết của chứng minh.
  3. Bước 3: Chứng minh $\phi(n+1)$ đúng.

Khẳng định mệnh đề $\phi(n)$ đúng với mọi n được thể hiện là nếu $\phi(n)$ đúng ở một bước thì sẽ đúng ở bước tiếp theo. Cứ tiếp tục sẽ khẳng định được $\phi(n)$ đúng với mọi n.

Ví dụ 3.1

Chứng minh rằng với $x > 0$,

$$(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x, \forall n = 1, 2, \ldots.$$

-Khi n=1: $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$.
-Giả sử bất đẳng thức đúng đến n, tức là,
$(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$.
-Xét $(1+x)^{n+2}$. Ta có:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+2} &= (1+x)^{n+1}(1+x) > (1+(n+1)x)(1+x)\\ &= 1+(n+2)x+(n+1)x^2.\end{aligned}$$

Do $(n+1)x^2 \geq 0$, từ bất đẳng thức trên ta được

$$(1+x)^{n+2} > 1+(n+2)x.$$

Định lý 3.1

Cho n_0 là số nguyên dương, cho $\phi(n)$ là mệnh đề có nghĩa với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$. Nếu
1. *$\phi(n_0)$ đúng và*
2. *Giả sử $\phi(k)$ đúng dẫn đến được $\phi(k+1)$ đúng với mọi $k \geq n_0$,*

thì khi đó mệnh đề $\phi(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$.

Chứng minh.

(Dùng phương pháp chứng minh phản chứng) Giả sử có kết luận ngược lại, tức là, có ít nhất một số m nào đó lớn hơn hoặc bằng n_0 sao cho mệnh đề $\phi(m)$ không đúng. Đặt M là tập hợp các số m như thế. Theo tiên đề về thứ tự, tồn tại số nhỏ nhất trong M là m_0 sao cho $m_0 \geq n_0$ và $\phi(m_0)$ không đúng. Do giả thiết $\phi(n_0)$ đúng, ta suy ra rằng $m_0 > n_0$. Từ đó $m_0 - 1 \geq n_0$. Vì $m_0 - 1 \notin M$ nên $\phi(m_0 - 1)$ đúng. Do giả thiết qui nạp, từ sự kiên $\phi(m_0 - 1)$ đúng sẽ kéo theo $\phi(m_0)$ đúng, mâu thuẩn. $\square$

Ví dụ 3.2

Chứng minh rằng nếu $x + \dfrac{1}{x}$ *là số nguyên thì* $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ *cũng là số nguyên với* $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Khi n=1, khẳng định trên là đúng. Giả sử $x^{n-1} + \dfrac{1}{x^{n-1}}$ là số nguyên. Cần chứng minh rằng $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ cũng là số nguyên. Ta có

$$x^n + \frac{1}{x^n} = (x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}})(x + \frac{1}{x}) - (x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}).$$

Với sự phân tích này có thể kết luận $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ là số nguyên.

Chú ý 3.1

Cần chú ý rằng, không phải mọi công thức cần chứng minh qui nạp đều bắt đầu từ n=1, mà có khi chỉ bắt đầu từ $n = n_0$ nào đó. Ví dụ bất đẳng thức $2^n > 2n + 1$ chỉ đúng kể từ $n = 3$.

Ví dụ 3.3

Chứng minh rằng

$$2^n \geq n^2, n = 4, 5, \ldots$$

Ví dụ 3.4

Tính tổng của n số nguyên lẻ đầu tiên.

$$
\begin{array}{lclllll}
S_n & = & 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + & (2n-1) & + & (2n+1) \\
 & & \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \ldots & \uparrow & & \uparrow \\
n: & & 1 \quad 2 \quad 3 \ldots & n & & (n+1)
\end{array}
$$

+ Dự đoán công thức:

n	1	2	3	4	5	...
S_n	1	4	9	16	25	

Công thức được dự đoán là $S_n = n^2$.

+ Chứng minh qui nạp:

- Với $n = 1$, $S_1 = 1$.
- Giả sử công thức đúng đến n, tức là $S_n = n^2$. Xét S_{n+1}, ta có:

$$S_{n+1} = S_n + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

☛ Thảo luận 3.1

Khi còn là học sinh ở bậc Tiểu học, Gauss[a] *đã giải rất nhanh bài toán tính tổng dưới đây:*

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = 5050.$$

i) *Hãy phát hiện lại qui tắc ấy và đưa ra công thức tính tổng của n số tự nhiên đầu tiên.*
ii) *Tìm một thể hiện hình học cho qui tắc trên.*

---

[a] Karl Friedrich Gauss (1777-1855) nhà toán học người Đức, sinh thời được mệnh danh là ông vua của toán học. Xem thêm ở địa chỉ http://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss