ĐẠI HỌC SÀI GÒN

Khoa Toán-Ứng dụng

CẤU TRÚC RỜI RẠC (858004, Số TC: 3)

Chương 3B: Ánh xạ

(Bản thảo còn chỉnh sửa)

PGS.TS. Tạ Quang Sơn
Email: tqson09@gmail.com

Cập nhật: Ngày 20 tháng 2 năm 2024

Tài liệu học tập

[1] Keith Delvin, Set, Functions and Logic, Chapman & Hall, Newyork,1992

[2] Micheal L' Oleary, A first course in Mathematics and Set Theory, John Wiley & Sons, USA, 2016

[3] Phan Hữu Chân & Trần Lâm Hách, Nhập môn Lý thuyết tập hợp và Logic, NXB Giáo dục, 1977.

[4] D. Bonevac, N.M. Asher, R.C. Koons, Logic, Sets and Functions, Kelldan Hult Publisher Company, USA, 1999.

[5] Igor Lavrov et al., Problems in Set Theory, Mathematical Logic and The Theory of Algorithms, Kluwer Academic, 2003

Nội dung I

1. Khái niệm về về ánh xạ
   - Định nghĩa
   - Đồ thị của ánh xạ $f : A \to B$
   - Các thuật ngữ
   - Đơn ánh xạ và toàn ánh xạ
   - Thu hẹp và mở rộng của ánh xạ
   - Các ánh xạ bằng nhau
2. Các định nghĩa khác về ánh xạ
   - Ánh xạ như một quan hệ
   - Ánh xạ như một tập hợp các cặp có thứ tự
   - Khái niệm ánh xạ (hàm) trong các ngôn ngữ lập trình
   - Một số ví dụ về hàm số
3. Các phép toán và một số khái niệm liên quan đến hàm số
   - Các phép toán trên hàm số

Nội dung II

- Dáng điệu của hàm số
- Tập hợp bị chặn và hàm số bị chặn
- Ảnh ngược và tập hợp mức

4. Ánh xạ hợp và ánh xạ ngược
   - Ánh xạ hợp
   - Ánh xạ ngược
5. Tập hợp đếm được và tập hợp không đếm được
   - Tập hợp hữu hạn và vô hạn
   - Tập hợp đếm được
   - Tập hợp không đếm được
6. Tập hợp tương đương và bản số của tập hợp
   - Các tập hợp tương đương nhau
   - Bản số của tập hợp

Thời gian của các bạn là có hạn, nên đừng phí phạm bằng cách sống cuộc đời của người khác. Đừng rơi vào bẫy của sự độc đoán, giáo điều của người khác. Đừng để những ý kiến ồn ào xung quanh đánh chìm tiếng nói bên trong bạn. Và quan trọng nhất, hãy có dũng cảm để đi theo tiếng gọi của trái tim và linh tính của chính mình mách bảo. Chúng biết bạn thực sự muốn gì. Mọi thứ khác chỉ là thứ yếu thôi!

Steve Jobs

4.1. Khái niệm về ánh xạ

• Ánh xạ là một khái niệm đã được đề cập trong chương trình toán của bậc Trung học Phổ thông, thường gặp dưới tên gọi là hàm số. Ví dụ hàm số cho bởi công thức

$$y = x^2 - 2x + 1 \tag{1}$$

xác định một ánh xạ từ tập hợp số thực đến tập hợp số thực, đó là hàm số bậc hai.

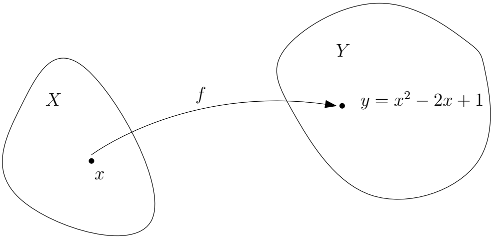
• Qui tắc này được ký hiệu bởi f và có thể mô tả lại bởi:

$$f(\cdot) = (\cdot)^2 - 2(\cdot) + 1. \tag{2}$$

Vậy

$$y = f(x) = x^2 - 2x + 1.$$

• Ta cũng nói y là ảnh của x qua qui tắc f. Hay cũng nói f là qui tắc để xác định ảnh của x. Ta sẽ gọi y **là ảnh của** x và x **được gọi là tạo ảnh của** y bởi qui tắc tương ứng f.



Hình: Qui tắc tương ứng

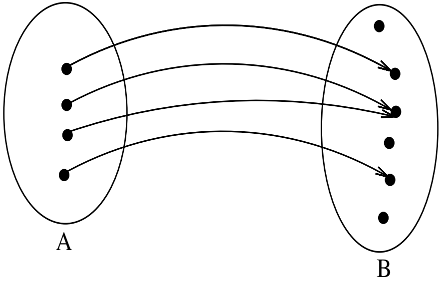
• Đặc điểm của qui tắc này là *với mỗi x cho trước đều có được giá trị y tương ứng và giá trị này là duy nhất.* Khi đó, qui tắc này gọi là ánh xạ hoặc hàm.

Trong chương này, *cách gọi ánh xạ được sử dụng thay vì gọi hàm*.

4.1.1. Định nghĩa

Định nghĩa 1.1

Cho A và B là hai tập hợp khác rỗng. Ta gọi một ánh xạ từ A vào B là **một qui tắc tương ứng sao cho với mỗi phần tử thuộc** A **có duy nhất một phần tử tương ứng thuộc** B.



Hình 4.1 -Ánh xạ

Để chỉ f là một ánh xạ từ A vào B, ta viết

$$f : A \to B.$$

Để chỉ phần tử a tương ứng với b qua ánh xạ f, ta viết

$$f : a \mapsto b.$$

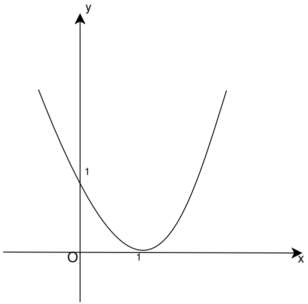
Với phần tử $a \in A$, phần tử $b \in B$ tương ứng với a được ký hiệu bởi $f(a)$, tức là $b = f(a)$.

4.1.2. Đồ thị của ánh xạ $f : A \to B$

Đồ thị của ánh xạ f là tập hợp con của $A \times B$ xác định bởi

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x), x \in A\}.$$

Nếu f là hàm số trên $\mathbb{R}$ thì $G(f)$ chính là biểu diễn hình học của đồ thị trên mặt phẳng tọa độ.



Hình 4.2 - Đồ thị của hàm số nói trong Ví dụ 1

4.1.3. Các thuật ngữ

Cho ánh xạ $f : A \to B$.

- Phần tử $a \in A$ gọi là đối và $f(a)$ gọi là giá trị của đối. Nếu dùng x để chỉ đại diện của các đối thuộc A, ta gọi x là biến và $f(x)$ là giá trị của biến. Biến và giá trị của biến còn có cách gọi khác tương ứng là tạo ảnh và ảnh.
- Tập A được gọi là miền xác định của ánh xạ và ký hiệu bởi $\mathrm{dom}f$. Khi đó, A còn gọi là tập nguồn và tập hợp B gọi là tập đích.
- Tập hợp $f(A) := \{y \in B \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$ được gọi là miền giá trị của ánh xạ f và ký hiệu bởi $\mathrm{Im}f$.
- Với tập hợp $S \subseteq A$, $f(S) := \{y \in B \mid y = f(x), x \in S\}$ được gọi là ảnh của S qua ánh xạ f.

Ví dụ 1.1

Goi P là tập tất cả người trên trái đất. Định nghĩa một quy tắc tương ứng $f : P \to P$ như sau:

$$f(p) = \text{ cha của p.}$$

Ví dụ 1.2

Gọi H là tập hợp các món hàng trong một siêu thị và M là tập hợp tất cả các mã vạch. Xét quan hệ giữa các tập hợp tất cả các món hàng H và tập hợp tất cả các mã vạch M: mỗi món hàng có gắn một mã vạch. Qui tắc tương ứng

$$\text{(hàng)} \mapsto \text{(mã vạch)}$$

thõa mãn các điều kiện của quan hệ ánh xạ.

Ví dụ 1.3

Dãy số $\{a_n\}$ là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào tập số thực $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f: \quad & 1 \mapsto f(1) = a_1 \\ & 2 \mapsto f(2) = a_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & n \mapsto f(n) = a_n \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ví dụ 1.4

Hàm số Sin:

$$f(x) = \sin x$$

là ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào đoạn $[-1, 1]$.

• Đặc biệt nếu các tập hợp A và B là các tập hợp số thực (hay tập hợp con của tập hợp các số thực), khi đó ta gọi f là hàm số trên biến số thực hay gọi tắt là hàm số.

Nhận xét: Đặc điểm của khái niệm ánh xạ từ A vào B là

- Mỗi phần tử thuộc A đều có phần tử tương ứng.
- Tương ứng của phần tử ấy là duy nhất.
- Không phải mọi phần tử của B đều có tạo ảnh.

Chú ý: Với tập hợp $A \neq \emptyset$, có một ánh xạ tầm thường trên A là ánh xạ đồng nhất. Ký hiệu ánh xạ đồng nhất trên A là I_A.

4.1.4. Đơn ánh xạ - Toán ánh xạ

- Một trong các yêu cầu của bất kỳ ánh xạ nào là với mỗi phần tử của tập nguồn phải có tương ứng một giá trị.

Xét hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, xác định bởi

$$f(x) = x^2.$$

Ta thấy $f(-1) = f(1)$. Nếu thay đổi miền xác định, chỉ xét trên tập hợp $\mathbb{R}_+$, thì $a_1 \neq a_2$ kéo theo $f(a_1) \neq f(a_2)$.

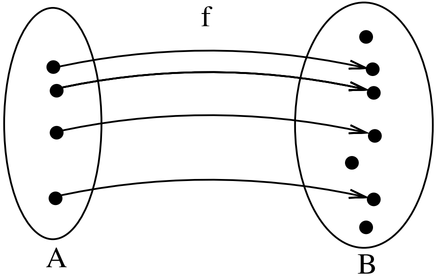
Định nghĩa 1.2

Ánh xạ $f : A \to B$ gọi là đơn ánh xạ (ánh xạ 1-1) nếu

$$(\forall a, b \in A)[a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)]$$

hay

$$(\forall a, b \in A)[(f(a) = f(b)) \Rightarrow (a = b)]$$



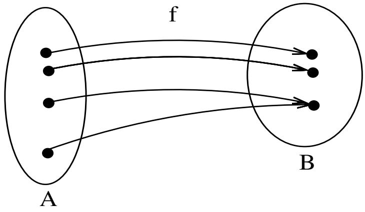
Hình 4.3 - Biểu diễn đơn ánh xạ

Cũng với hàm số $f(x) = x^2$ nêu trên, không phải mọi giá trị thuộc tập hợp đích đều có tạo ảnh. Chẳng hạn, nếu lấy $y = -1$ thì không thể có tạo ảnh $x \in \mathbb{R}$ nào để $f(x) = x^2 = -1$. Bằng cách thu hẹp tập hợp đích thành $\mathbb{R}_+$, mọi phần tử thuộc tập hợp đích của f giờ đây đều có tạo ảnh.

Định nghĩa 1.3

Ánh xạ $f : A \to B$ được gọi là toàn ánh xạ (hay ánh xạ trên) nếu

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)[f(a) = b].$$

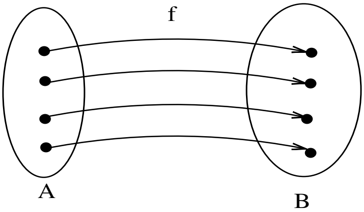


Hình 4.4 - Biểu diễn toàn ánh xạ

Nhận xét: Với $f : A \longrightarrow B$ là toàn ánh, mọi phần tử thuộc tập hợp đích đều có tạo ảnh.

Định nghĩa 1.4

Ánh xạ $f : A \to B$ được gọi là song ánh xạ nếu f vừa là đơn ánh xạ và vừa là toàn ánh xạ.



Hình 4.5 - Biểu diễn song ánh xạ

Ví dụ 1.5

Xét ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ là song ánh xạ.

Bài tập 1

1. Cho $A := \{1, 2, 3, 4\}, B := \{a, b, c\}, C := \{x, y, z\}$. Xét các phép tướng ứng $f : A \to B$, $g := A \to C$, $h : B \to C$, $k : B \to A$. cho bởi các trường hợp sau:
   a) $f(1) = a, f(2) = (b), f(3) = c, f(4) = d$;
   b) $f(1) = a, f(2) = (b), f(3) = c, f(1) = b$;
   c) $g(1) = x, g(2) = y, g(3) = z, g(4) = x$;
   d) $h(a) = x, h(b) = y, h(c) = z$;
   e) $k(a) = 1, k(b) = 3, k(c) = 4$.
   i) Phép tương ứng nào là ánh xạ? Chỉ rõ đơn ánh, toàn ánh, song ánh nếu có.
   ii) Vẽ giản đồ minh họa các phép tương ứng nêu trên.
2. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ xác định bởi công thức $f(x) = \frac{x}{x-1}$.
   i) Chứng tỏ f là toàn ánh.
   ii) Ánh xạ này có là song ánh không.

4.1.5. Thu hẹp và mở rộng của anh xạ

Cho ánh xạ $f : X \to Y$, xét tập con $A \subset X$. Ánh xạ $f : A \to Y$ gọi là thu hẹp của ánh xạ f trên A. Ký hiệu ánh xạ thu hẹp trên A là f_A. Khi đó f được gọi là mở rộng của ánh xạ f_A.

Ví dụ 1.6

Xét ánh xạ $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = |x| + |y|.$$

Đặt $A = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$ và xét f_A. Ta có $f_A : A \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f_A(x, y) = x - y.$$

4.1.6. Các ánh xạ bằng nhau

Có thể nói gì về hai ánh xạ sau đây: $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f : (\cdot) \mapsto (\cdot - 1)^2 \quad \longrightarrow \quad f(n) = (n-1)^2$$

và

$$g : (\cdot) \mapsto (\cdot)^2 - 2(\cdot) + 1 \quad \longrightarrow \quad g(n) = n^2 - 2n + 1.$$

Mặc dù các qui tắc tương ứng là khác nhau nhưng các giá trị tương ứng với phần tử cho trước là bằng nhau.
Ta nói rằng hai ánh xạ bằng nhau khi có cùng miền xác định và với mỗi phần tử a thuộc miền xác định A, có $f(a) = g(a)$.

Định nghĩa 1.5

Cho f và g là các ánh xạ từ A vào B. Ta nói ánh xạ f bằng ánh xạ g và viết $f = g$ nếu

$$f(a) = g(a), \forall a \in A.$$

Bài tập 2

1. Cho phép tương ứng $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi công thức $f(x) = x^2 - 1$.
   i) Chứng tỏ f là ánh xạ.
   ii) Ánh xạ này có đơn ánh không, nếu không hãy hãy tìm một ánh xạ thu hẹp sao cho là đơn ánh.
2. Xét các ánh xạ xác định trên $\mathbb{R}$ cho bởi $f(x) = |x|$ và $g(x) = \max\{x, -x\}$.
   i) Chứng tỏ f và g là các ánh xạ bằng nhau.
   ii) Có thể nói gì về các ánh xạ $-f$ và $\min\{x, -x\}$?

4.2. Các định nghĩa khác về anh xạ
4.2.1. Ánh xạ như môt quan hệ

- Cho A và B là hai tập hợp khác rỗng. Ánh xạ f từ A vào B là một quan hệ f giữa A và B sao cho:
  a) $\mathrm{dom} f = A$,
  b) Với mỗi $a \in A$, nếu $b_1, b_2 \in B$ sao cho $(a, b_1), (a, b_2) \in f$ thì $b_1 = b_2$.
- Khi đó, $(x, y) \in f$ được viết là $f(x) = y$, $f(x)$ đọc là "f của x" và được gọi là giá trị của ánh xạ f tại x.

Chú ý: Yêu cầu b) ở trên có thể được viết lại bởi
$b')$ Với mỗi $a_1, a_2 \in A$, nếu $a_1 = a_2$ thì $f(a_1) = f(a_2)$.
Dùng mệnh đề phản đảo tương đương, có
$b'')$ Với mỗi $a_1, a_2 \in A$, nếu $f(a_1) \neq f(a_2)$ thì $a_1 \neq a_2$.

4.2.2.Ánh xạ như một tập hợp các cặp có thứ tự

Cho hai tập hợp A và B. Ta gọi một ánh xạ từ A vào B là một tập hợp các cặp có thứ tự của $A \times B$ sao cho với hai cặp phân biệt thì không có cùng thành phần thứ nhất.

4.2.3. Ánh xạ trong ngôn ngữ lập trình

Trở lại ví dụ về hàm số cho bởi (1), hãy quan sát qui tắc

$$f(\square) = (\square)^2 - 2(\square) + 1,$$

$$a \mapsto a^2 - 2a + 1.$$

Với mỗi giá trị của đối, có một qui trình thực hiện để cho ra giá trị tương ứng. Điều này gợi ý cho việc quan niệm hàm như là hộp đen với mô hình như sau

$$\begin{pmatrix} \text{Đầu} \\ \text{vào} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{Hộp} \\ \text{đen} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{Đầu} \\ \text{ra} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Khái niệm hàm trong các ngôn ngữ lập trình bắt nguồn từ ý nghĩa nêu trên. Đó là các chương trình con thực hiện một nhiệm vụ nào đó theo qui tắc dữ liệu vào và dữ liệu ra như ở (3).
(Xem thêm ở http://www.vocw.edu.vn/content/m10555/latest/)

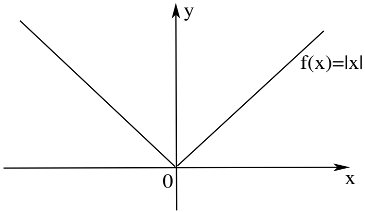
4.2.4. Ví dụ về hàm số

1) Hàm số dạng đa thức: $f(x) = x^2 - 2x + 1$

2) Hàm hữu tỉ $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$.

3) Hàm giá trị tuyệt đối

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$



Hình 4.6 - Hàm giá trị tuyệt đối

4) Một số hàm giải tích

$$f(x) = \sin x, f(x) = \cos x, f(x) = \log_a x, f(x) = e^x, \ldots$$

5) Hàm số tổ hợp từ các hàm nêu trên

$$f(x) = \frac{\sin 2x - x^2 + 2x - 1}{\cos^2 x + e^{2x}} + \log_a x.$$

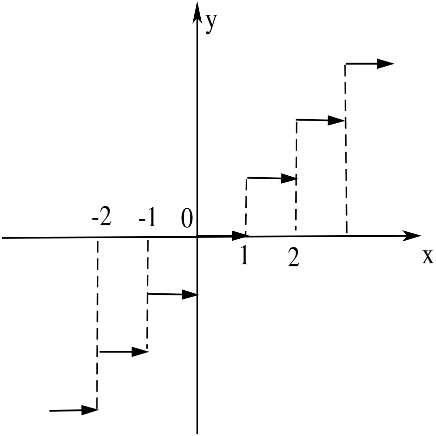
6) Hàm Dirichlét

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ,} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỉ.} \end{cases}$$

7) Hàm số phần nguyên: Với $x \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ định nghĩa bởi

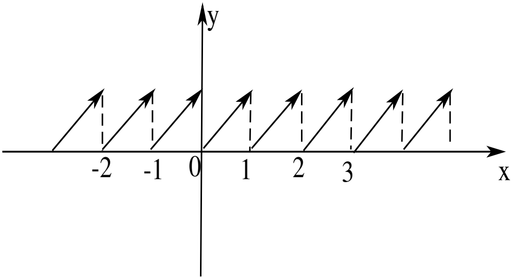
$$f(x) = \text{ số nguyên } z \text{ lớn nhất sao cho } r \leq x.$$

Ký hiệu hàm phần nguyên của x là $[x]$ thì $[x] \leq x < [x] + 1$.



8) Hàm số phần phân

$$f(x) = x - [x]$$



Hình 4.8 - Hàm phần phân

9) Hàm hằng: Cho hai tập hợp khác rỗng X và A, xét a cố định thuộc A. Hàm hằng $f : X \to A$ được định nghĩa bởi

$$f(x) = a, \ \forall x \in X.$$

10) Hàm đồng nhất $f : X \to X$ được định nghĩa bởi

$$f(x) = x, \ \forall x \in X.$$

Nếu $A \subset X$ và

$$f(x) = x, \ \forall x \in A$$

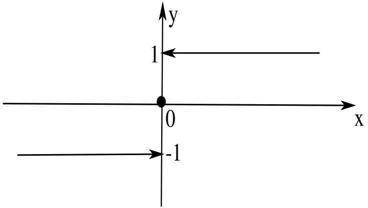
thì ta gọi đó là hàm đồng nhất trên A và ký hiệu f_A.
11) Hàm đặc trưng: Cho $A \subset X$. Hàm đặc trưng xác định bởi $\chi : X \to \{0, 1\}$

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in A \\ 0 & \text{nếu } x \notin A. \end{cases}$$

Hàm đặc trưng trên tập hợp A thường được ký hiệu bởi δ_A hay χ_A.

12) Hàm dấu: Hàm đặc trưng xác định bởi $S : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$

$$S(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0, \\ 1 & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$



Hình 4.8 - Hàm dấu

13) Phép chiếu: Xác định trên không gian tích $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$

$$f_{X_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i.$$

4.3. Phép toán và khái niệm liên quan đến hàm số
4.3.1. Các phép toán trên hàm số

Định nghĩa 3.1

Cho $A \subset \mathbb{R}$ và hai hàm số $f, g : A \to \mathbb{R}$. Tổng và tích của hai hàm số, tương ứng ký hiệu bởi $f + g$ và $f.g$, định nghĩa như sau:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \forall x \in A \quad \text{và}$$

$$(f.g)(x) := f(x).g(x), \forall x \in A.$$

Hiệu và thương của hai hàm số được định nghĩa như sau:

$$(f - g)(x) := f(x) - g(x), \forall x \in A \quad \text{và}$$

$$(f/g)(x) := f(x)/g(x), g(x) \neq 0, \forall x \in A.$$

Ví dụ 3.1

Cho $f(x) = \sin x, g(x) = x^2 + 1$. *Tìm tổng, hiệu, tích, thương của* f *với* g.

4.3.2. Dáng điệu hàm số

Định nghĩa 3.2

Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và tập con A của $\mathbb{R}$.

i) *f được gọi là tăng trên A nếu*

$$\forall x, x' \in A, x < x' \Rightarrow f(x) < f(x').$$

ii) *f được gọi là giảm trên A nếu*

$$\forall x, x' \in A, x < x' \Rightarrow f(x) > f(x').$$

iii) *f được gọi là không tăng trên A nếu*

$$\forall x, x' \in A, x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x').$$

iv) *f được gọi là không giảm trên A nếu*

$$\forall x, x' \in A, x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x').$$

v) *f được gọi là đơn điệu trên A nếu f là tăng hoặc là giảm trên A.*

Khái niệm tăng và giảm nói trên còn gọi là tăng nghiêm ngặt hoặc giảm nghiêm ngặt (tương ứng gọi là đơn điệu nghiêm ngặt).

Ví dụ 3.2

Hàm $f(x) = x^3$ là đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Hàm dấu, hàm phần nguyên là hàm không giảm. Hàm Dirichclét là hàm không tăng không giảm.

4.3.3. Tập hợp bị chặn và hàm số bị chặn

Định nghĩa 3.3

Cho tập hợp $S \subseteq \mathbb{R}$. Tập hợp S được gọi là
i) *Bị chặn trên nếu tồn tại $M \in \mathbb{R}$ sao cho $x \leq M$ với mọi $x \in S$.*
ii) *Bị chặn dưới nếu tồn tại $m \in \mathbb{R}$ sao cho $x \geq M$ với mọi $x \in S$.*
iii) *Bị chặn nếu vừa bị chặn trên và vừa bị chặn dưới.*

Định nghĩa 3.4

Hàm số f được gọi là bị chặn nếu tồn tại số thực M sao cho $|f(x)| \leq M$ với mọi $x \in \mathrm{dom} f$.

Ví dụ 3.3

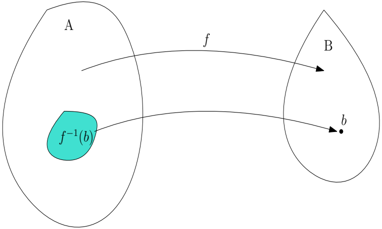
Các hàm $y = \sin x, y = \cos x$ là các hàm số bị chặn.
Hàm số $y = \frac{1}{x^2}$ là hàm số bi chặn dưới.

4.3.4. Ảnh ngược và tập hợp mức

Định nghĩa 3.5

Cho ánh xạ $f : A \to B$, ảnh ngược của phần tử $b \in B$ ký hiệu $f^{-1}(\{b\})$, có thể ký hiệu $f^{-1}(b)$, là tập hợp

$$\{x \in A \mid f(x) = b\}.$$



Ảnh ngươc của $\{b\}$

Ví dụ 3.4 (Nghiệm của phương trình là ảnh ngược)

Cho phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$.
Xét hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cho bởi công thức* $f(x) = x^2 - 3x + 1$.
Ảnh ngược của số 0, *ký hiệu* $f^{-1}(0)$, *là tập hợp* $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ *chính là nghiệm của phương trình đã cho.*

Định nghĩa 3.6

Cho hàm số $h : A \to \mathbb{R}$. *Tập mức của* h *ứng với một giá trị* $c \in \mathbb{R}$ *là tập hợp* $h^{-1}(c)$, *tức là tập hợp,*

$$\{x \in A \mid h(x) = c\}.$$

Ví dụ 3.5

Xét các hàm số cho bởi các công thức

$$h_1(x, y) = x + y,$$

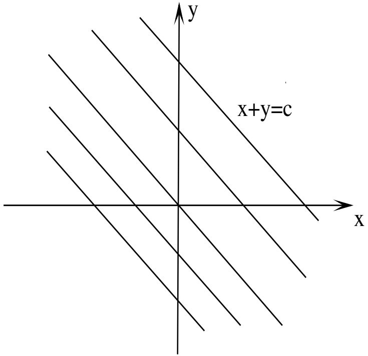
$$h_2(x, y) = x^2 + y^2,$$

$$h_3(x, y) = xy.$$

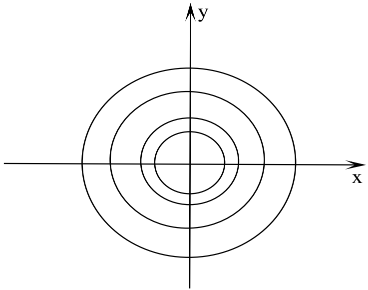
Với mỗi hàm số, xác định tập mức ứng với $c \in \mathbb{R}$.

Với hàm số h_1, với $c \in \mathbb{R}$, tập hợp mức ứng với c là đường thẳng $x + y = c$. Khi c thay đổi các tập hợp này tạo nên các đường thẳng song song nhau.
Với h_2, tập hợp mức là tập hợp rỗng nếu $c < 0$, tập hợp mức là điểm gốc tọa độ nếu $c = 0$. Khi $c > 0$ thay đổi, các tập hợp mức tạo nên các vòng tròn đồng tâm.
Với h_3, nếu $c = 0$ thì tập hợp mức là tập hợp các điểm trên hai

Ảnh ngược và tập hợp mức

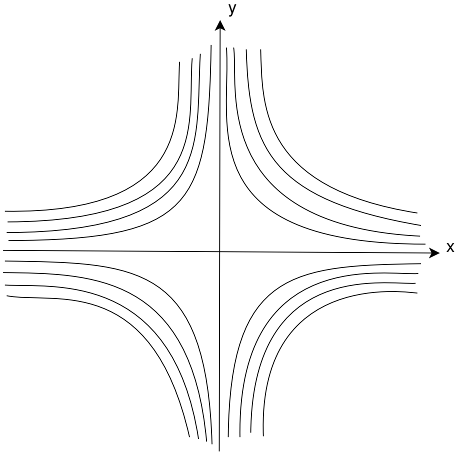


Hình 4.6 - Biểu diễn đường mức của hàm h_1



Hình 4.7 - Biểu diễn đường mức của hàm h_2

Ảnh ngược và tập hợp mức



Hình 4.8 - Biểu diễn đường mức của hàm h_3

Ví dụ 3.6

(Áp dụng) Biết tổng của hai số thực ở trong khoảng $[-8, 8]$ và tích của hai số ấy ở trong khoảng $[-20, 20]$. Tìm số lớn nhất của một trong hai số đó.

Từ bài toán đã cho, ta có

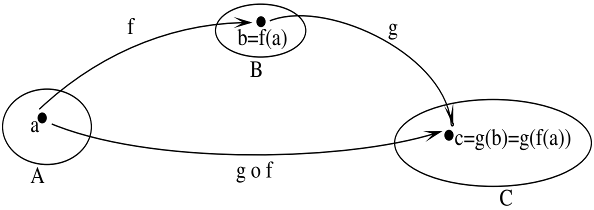
$$\begin{cases} |x+y| \leq 8 \\ |xy| \leq 20. \end{cases}$$

Nghiệm của bài toán nằm trong miền xác định bởi các tập hợp mức $x+y=8$, $x+y=-8$, $xy=20$, $xy=-20$. Vẽ các tập hợp mức này, chúng ta suy ra giá trị cần tìm là 10.

4.4. Ánh xạ hợp và ánh xạ ngược
4.4.1. Ánh xạ hợp

Cho $f : A \to B$ và $g : B \to C$ là các ánh xạ.
Với mỗi $a \in A$ có tương ứng $b = f(a) \in B$. Thực hiện qui tắc của ánh xạ g ta có tương ứng $c \in C$ sao cho $g(b) = c$, hay $g(f(a)) = c$. Ký hiệu qui tắc a tương ứng cho c bởi $g \circ f$. Ta nói $g \circ f : A \to C$ là ánh xạ hợp của f và g.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



Ví dụ 4.1

Cho $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 + 1$ và $g(x) = \sin x$. Tìm các ánh xạ $f \circ g$ và $g \circ f$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = \sin^2 x + 1,$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sin(x^2 + 1).$$

☛ Thảo luận 4.1

Cho các ánh xạ $f : A \to B$ và $g : B \to C$.
i) *Nếu f và g là các đơn ánh xạ thì có thể nói gì về tính đơn ánh xạ của ánh xạ hợp $g \circ f$.*
ii) *Nếu f và g là các toàn ánh xạ thì có thể nói gì về tính toàn ánh xạ của ánh xạ hợp $g \circ f$.*
iii) *Nếu $g \circ f$ là toàn ánh xạ thì trong các ánh xạ f và g, ánh xạ nào là toàn ánh xạ?*
iv) *Có thể nói gì về tính đơn ánh xạ của f, của g nếu $g \circ f$ là đơn ánh xạ?*

4.3.2. Ánh xạ ngược

• Nếu a tương ứng với b qua qui tắc của ánh xạ f, thì b có tương ứng với a qua qui tắc ánh xạ hay không? Nếu không thì với điều kiện nào qui tắc ấy sẽ là ánh xạ?

Định nghĩa 4.1

Cho ánh xạ $f : A \to B$. Ta nói rằng f là ánh xạ khả nghịch nếu tồn tại một ánh xạ $g : B \to A$ sao cho

$$g(b) = a \text{ nếu } f(a) = b.$$

Khi đó ta cũng nói g là ánh xạ ngược của f. Với ánh xạ f cho trước, ký hiệu ánh xạ ngược nếu có của f là f^{-1}.

Chú ý: Do ký hiệu f^{-1} được dùng để chỉ ánh xạ ngược, nên khi viết $f^{-1}(b)$ chúng ta phải hiểu rằng đó là ảnh của b qua ánh xạ f^{-1}.

Ví dụ 4.2

Xét ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $f(x) = 2x + 1$. Ta có:

$$f : x \mapsto y = 2x + 1.$$

Xét $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $g(y) = \frac{y-1}{2}$. Ta có

$$g : y \mapsto x = \frac{y-1}{2}, \text{ hay } g(y) = \frac{y-1}{2}.$$

Rõ ràng rằng

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x.$$

Để thống nhất cách viết, chúng ta luôn luôn dùng x để chỉ biến. Khi đó ánh xạ g được viết lại

$$g(x) = \frac{x-1}{2}.$$

Chú ý:

Cho $f : A \to B$ và $g : B \to A$. Ánh xạ g là ánh xạ ngược của f nếu và chỉ nếu

$$g \circ f = I_A \text{ và } f \circ g = I_B.$$

Định lý 4.1

Cho $f : A \to B$. Khi đó
i) *Ánh xạ f là khả đảo khi và chỉ khi f là song ánh xạ.*
ii) *Nếu ánh xạ f là khả nghịch thì ánh xạ ngược là duy nhất.*

Chú ý: Nếu f là song ánh xạ thì ánh xạ ngược cũng là song ánh xạ.

Bài tập 3

1. Trên $\mathbb{R}$ cho các hàm số $f(x) = 2^x, g(x) = x^3 - x, h(x) = x^2$.
   i) Khảo sát dáng điệu của các hàm số nêu trên.
   ii) Xác định công thức các hàm số
   $F := f \circ g \circ h, G := g \circ h \circ f, H := h \circ f \circ g$.
2. Tìm hàm ngược của các hàm số $f(x) = 2^x, g(x) = x^2 - x$.

4.5. Tập hợp đếm được và tập hợp không đếm được

• Một trong những ứng dụng hữu ích của khái niệm ánh xạ là cung cấp cho chúng ta phương cách để khảo sát các tập hợp vô hạn thông qua việc đặt tương ứng 1-1 giữa các phần tử của tập hợp với các số tự nhiên.

• Để thực hiện điều này, người ta thực hiện việc đánh số các phần tử của tập hợp. Phần tử đầu tiên được đánh số 1, ký hiệu là a_1; phần tử thứ hai là a_2 và cứ tiếp tục như vậy.

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n & \ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \ldots & \uparrow & \uparrow & \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n & \ldots \end{array} \tag{4}$$

• Nếu bước đếm kết thúc tại n, chúng ta nói tập hợp đã cho có n phần tử. Nếu bước đếm này cứ tiếp tục mãi, chúng ta nói rằng tập hợp đã cho là vô hạn. Đặc điểm của tập hợp vô hạn dạng này là các phần tử có thể được đếm theo các số tự nhiên.

4.5.1. Tập hợp hữu hạn và vô hạn

• Một tập hợp A được gọi là hữu hạn nếu có một số $n \in \mathbb{N}$ sao cho có một song ánh xạ $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$. Một tập hợp được gọi là vô hạn nếu nó không phải là tập hợp hữu hạn.

Ví dụ 5.1

Tập hợp các số chẵn nhỏ hơn 100 là tập hữu hạn.
Tập hợp các sinh viên trong lớp học là tập hữu hạn.
Tập hợp tất cả các cư dân trên hành tinh này là hữu hạn.

• Có những tập hợp không phải là tập hữu hạn các phần tử nhưng cũng không thể thực hiện được việc đếm các phần tử. Chẳng hạn đối với tập hợp khoảng các số thực $[0, 1]$, không thể tìm được phép tương ứng 1-1 nào giữa các phần tử của khoảng $[0, 1]$ với tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Điều này đòi hỏi phải có sự phân loại các tập hợp vô hạn theo một tiêu chuẩn nào đó.

4.5.5.1. Tập hợp đếm được

Định nghĩa 5.1

Tập hợp A vô hạn được gọi là đếm được nếu có một song ánh xạ

$$f : \mathbb{N} \to A.$$

• Từ định nghĩa trên có thể thấy rằng, tập hợp A gọi là đếm được nếu có thể đặt tương ứng 1-1 mỗi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ với một phần tử của tập hợp.

• Để thuận tiện trong các chứng minh, ta gọi một tập hợp là đếm được nếu nó là tập hợp hữu hạn hay vô hạn theo Định nghĩa 5.1.

Ví dụ 5.2

Các ví dụ:
i) Tập hợp $\mathbb{N}$ là tập đếm được vì có song ánh xạ đồng nhất từ nó lên chính nó.
ii) Tập hợp E các số chẵn là đếm được bởi song ánh xạ $f:\mathbb{N}\to E$,

$$f(n) = 2n.$$

iii) Tập các số nguyên âm $\mathbb{Z}_-$ là đếm được bởi song ánh xạ $f(n) = -n$.
iv) Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ là đếm được bởi song ánh xạ

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & , n \text{ chẵn} \\ -(n-1)/2 & , \text{ lẻ} \end{cases}$$

Định lý 5.1

Cho T là tập hợp đếm được và A là tập hợp khác rỗng. Nếu có một song ánh xạ $f : T \to A$ thì A là tập hợp đếm được.

Chứng minh.

Vì T là tập hợp đếm được nên có song ánh xạ $g : \mathbb{N} \to T$. Khi đó ánh xạ $f \circ g : \mathbb{N} \to A$ là song ánh xạ. □

Định lý 5.2

Mọi tập hợp con vô hạn của tập hợp $\mathbb{N}$ là tập hợp đếm được.

Chứng minh.

Gọi A là tập hợp con vô hạn của tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Xác định ánh xạ $f : \mathbb{N} \to A$ như sau:
- $f(1)$ là số nhỏ nhất của A,
- Với mọi $n > 1$, $f(n)$ là số nhỏ nhất của tập hợp A nhưng lớn hơn $f(n-1)$.

Ánh xạ xác định như trên là song ánh xạ (bạn đọc thử chứng minh xem như bài tập). □

Bổ đề 5.1

Mọi tập con vô hạn của tập đếm được là tập đếm được.

Chứng minh.

Gọi A là tập hợp vô hạn đếm được và B là tập hợp con vô hạn của A. Do A là tập hợp vô hạn đếm được nên có song ánh xạ $f : \mathbb{N} \to A$. Vì $B \subset A$ nên đặt

$$T = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \in B\}.$$

Do f là song ánh xạ nên T là tập con vô hạn của tập hợp đếm được. Vì vậy T đếm được và suy ra B đếm được. $\square$

Định lý 5.3

Tập hợp tích $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ là tập hợp vô hạn đếm được.

4.5.3. Tập hợp không đếm được

Định lý 5.4 (Định lý Cantor)

Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ là tập hợp không đếm được.

Chứng minh.

Giả sử ngược lại $\mathbb{R}$ là tập hợp đếm được. Xét một tập con của $\mathbb{R}$ là khoảng $(0, 1]$. Theo Bổ đề 5.1, khoảng $(0, 1]$ là tập hợp đếm được. Khi đó tồn tại song ánh xạ $f : \mathbb{N} \to (0, 1]$. Với mỗi số thực thuộc khảng $(0, 1]$, có một dạng biểu diễn duy nhất dưới dạng phân số thập phân vô hạn. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \in (0, 1]$. Đặt

$$f(n) = 0, d_1^n d_2^n d_3^n \dots d_i^n \dots$$

với d_i^n là số thập phân thứ i trong dạng biểu diễn nói trên thì □

Chứng minh.

$$
\begin{aligned}
&f(1) = 0, d_1^1 d_2^1 d_3^1 \dots d_i^1 \dots \\
&f(2) = 0, d_1^2 d_2^2 d_3^2 \dots d_i^2 \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&f(i) = 0, d_1^i d_2^i d_3^i \dots d_i^i \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Bây giờ chúng ta sẽ chỉ ra có một số thuộc $(0,1]$ mà khác với mọi số $f(n) \in (0,1]$. Xét số r như sau:

$$r = 0, r_1 r_2 r_3 \dots r_i \dots$$

trong đó với mỗi chỉ số i,

$$r_i = \begin{cases} 1 \text{ nếu } d_i^i \neq 1 \\ \quad \text{nếu } d_i^i = 1. \end{cases}$$

Chứng minh.

Rõ ràng rằng số r xây dựng như trên là thuộc khoảng $(0, 1]$. Vì f là song ánh xạ nên phải tồn tại số $k \in \mathbb{N}$ sao cho $f(k) = r$. Như vậy r và $f(k)$ phải có cùng biểu diễn số thập phân. Tại chỉ số thứ k, có $r_k = d_k^k$. Tuy nhiên theo định nghĩa của r, nếu $d_k^k \neq 1$ thì $r_k = 1$ và nếu $d_k^k = 1$ thì $r_k = 2$. Như vậy thì trong mọi trường hợp chúng ta đều có $r_k \neq d_k^k$. Điều này là mâu thuẫn. □

Với định lý này, lần đầu tiên Cantor khẳng định được có ít nhất hai loại tập hợp vô hạn có "số phần tử" khác nhau. Từ đây, khái niệm tương đương giữa hai tập hợp vô hạn được đề xuất.

4.6. Tập hợp tương đương và bản số của tập hợp
4.6.1. Các tập hợp tương đương nhau

Định nghĩa 6.1

Cho A và B là hai tập hợp khác rỗng. A và B gọi là hai tập hợp tương đương nếu có một song ánh xạ f từ A vào B.

Ví dụ 6.1

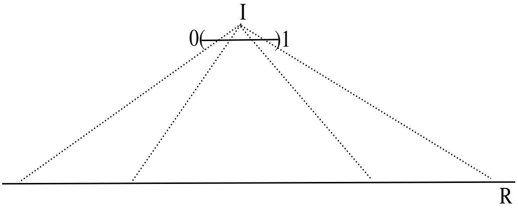
Sự tương đương của hai tập hợp vô hạn đếm được
Xét tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên và tập các số tự nhiên là số chẵn $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Đặt $f(n) = 2n$ thì f là song ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $2\mathbb{N}$. Vậy tập hợp $\mathbb{N}$ là tương đương với $2\mathbb{N}$. Không những thế trong trường hợp này tập hợp $\mathbb{N}$ là tương đương một tập con thực sự của nó. Điều này hoàn toàn không thể có với các tập hợp hữu hạn phần tử.

Ví dụ 6.2

Sự tương đương của hai tập hợp vô hạn không đếm được Khoảng $(0,1)$ là tương đương với tập số thực $\mathbb{R}$. Có thể thấy điều này bằng cách xét song ánh xạ $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = tg(\pi x - \pi/2).$$

Sự tương đương giữa khoảng $(0,1)$ và tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ còn có thể được mô tả thông qua phép chiếu với hình vẽ dưới đây. Xét phép chiếu tâm I chiếu điểm trên khoảng $(0,1)$ lên đường thẳng thực $\mathbb{R}$. Rõ ràng rằng mỗi điểm trong khoảng $(0,1)$ đều có ảnh trên đường thẳng thực $\mathbb{R}$. Khi dịch chuyển tâm chiếu càng gần vị trí khoảng $(0,1)$, điểm ảnh càng ra xa vô tận trên đường thẳng số.



Hình 4.10 - Phép chiếu khoảng (0,1) lên tập số thực R

Tương tự, chúng ta có thể chứng minh rằng mọi khoảng số thực (a, b) và (c, d) là tương đương nhau bởi song ánh xạ $f : (a, b) \to (c, d)$

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-ad}{b-a}.$$

Nếu chọn phép chiếu nêu trên một cách thích hợp chúng ta cũng dễ dàng thấy được mọi đoạn $[a, b]$ và $[c, d]$ là tương đương nhau.

4.6.2. Bản số của tập hợp

Định nghĩa 6.2

Cho hai tập hợp vô hạn A và B. Ta nói rằng A và B có cùng bản số (hay có cùng lực lực lượng) nếu có một song ánh xạ giữa A và B.

Với định nghĩa này, bản số của một tập hợp hữu hạn chính là số phần tử của tập hợp đó. Ký hiệu bản số của tập hợp A là $|A|$ hay Card(A).

Cũng với khái niệm bản số của tập hợp, ta thấy tập hợp các số thực thuộc khoảng $(0, 1)$ là có cùng lực lượng với tập hợp số thực $\mathbb{R}$. Ngoài ra một đặc điểm khá thú vị đối với tập hợp vô hạn đếm được là bản thân tập hợp đó có thể có cùng lực lượng với một tập con thực sự của nó.

Hệ quả 6.1

Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn rời nhau, thì

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Chứng minh.

Đặt $[k] = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ (qui ước $[0] = \emptyset$). Giả sử $|A| = m$ và $|B| = n$. Gọi f là song ánh xạ từ A vào $[m]$ và g là song ánh xạ từ B vào $[n]$. Xác định ánh xạ h từ $A \cup B$ vào $[m+n]$ như sau:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in A, \\ g(x) + m & \text{nếu } x \in B. \end{cases}$$

Có thể kiểm chứng được h là song ánh xạ. Từ đó suy ra điều cần chứng minh. □

Ngoài ra, chúng ta có thể so sánh được lực lượng (bản số) của hai tập hợp vô hạn theo định nghĩa dưới đây.

Định nghĩa 6.3

Cho hai tập hợp A và B. Nếu tồn tại một đơn ánh xạ từ A vào B ta nói rằng bản số của tập hợp là bé hơn hoặc bằng bản số của tập hợp B và ký hiệu $\mathrm{Card}A \leq \mathrm{Card}B$.
Nếu $\mathrm{Card}A \leq \mathrm{Card}B$ và không tồn tại song ánh xạ từ A vào B, ta nói $\mathrm{Card}A < \mathrm{Card}B$.

Nói cách khác, với hai tập hợp A và B, nếu A tương đương với một tập hợp con của B và B không tương đương với A hoặc B không tương đương với bất kỳ tập hợp con nào của A thì ta nói A có bản số nhỏ hơn B (khi đó cũng nói B có bản số lớn hơn A). Để chỉ bản số của tập hợp A là nhỏ hơn bản số của tập hợp B, ta cònviết

$$|A| < |B|.$$

Ví dụ 6.3

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}_+| = |\mathbb{Q}_+| < |\mathbb{R}|.$$

Hệ quả 6.2

Nếu $A \subseteq B$ *thì* $\mathrm{Card} A \leq \mathrm{Card} B$.