

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG



BÁO CÁO BÀI TẬP LỚN

MÔN: GIẢI TÍCH

**ĐỀ TÀI: MÔ HÌNH CHUỖI THỨC ĂN
LOTKA-VOLTERRA**

Giảng viên hướng dẫn: PGS.TS Võ Hoàng Hưng

Nhóm thực hiện đề tài: Nhóm 4

| Họ và tên | MSSV |
|-------------------|---------|
| Trần Minh Huy | 2352410 |
| Trần Lâm Anh Khoa | 2352592 |
| Trần Đức Thiện | 2353134 |
| Hà Minh Tiến | 2353176 |
| Lương Hoàng Phát | 2352884 |

Thành phố Hồ Chí Minh, tháng 5 năm 2024

LỜI CẢM ƠN

Để hoàn thành bài báo cáo nhóm em xin được bày tỏ lòng biết ơn đến thầy Võ Hoàng Hưng - giảng viên hướng dẫn đã chỉ dạy, quan tâm và truyền đạt cho nhóm em những nền tảng kiến thức, kỹ năng cần thiết để hoàn thiện bài báo cáo của chúng em.

Mặc dù, đã rất cố gắng nhưng do trình độ chuyên môn còn hạn chế trong quá trình thực hiện nên nhóm em còn gặp nhiều khó khăn và không tránh khỏi những sai sót.

Vì vậy, chúng em rất mong nhận được những ý kiến đóng góp phản hồi từ phía thầy, cô để bài báo cáo của nhóm em được hoàn thiện hơn.

Tập thể nhóm xin trân trọng cảm ơn.

Mục lục

| | |
|--|----|
| Danh sách hình vẽ | 3 |
| I. GIỚI THIỆU | 4 |
| A. Lịch sử và ý nghĩa của mô hình Lotka-Volterra | 4 |
| B. Mục tiêu của bài báo cáo | 5 |
| C. Phạm vi nghiên cứu trong bài báo | 5 |
| II. CƠ SỞ LÝ THUYẾT | 6 |
| A. Các khái niệm về chuỗi thức ăn và mô hình | 6 |
| 1. Khái niệm về chuỗi thức ăn | 6 |
| 2. Mô hình Lotka-Volterra | 7 |
| 3. Ví dụ và ứng dụng của mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra | 15 |
| B. Phương trình Lotka-Volterra | 17 |
| 1. Phương trình vi phân hàm nhiều biến | 17 |
| 2. Mô hình con mồi - kẻ săn mồi | 18 |
| 3. Phân tích toán học của mô hình | 18 |
| C. Ổn định và điểm cân bằng | 19 |
| 1. Phân tích ổn định | 19 |
| 2. Điểm cân bằng không ổn định | 19 |
| 3. Điểm cân bằng ổn định | 19 |
| III. PHƯƠNG PHÁP LUẬN | 20 |
| A. Các phương pháp phân tích mô hình và giải phương trình vi phân Lotka-Volterra | 20 |
| 1. Phương pháp phân tích mô hình: | 20 |
| 2. Phương pháp số học dùng để giải phương trình: | 21 |
| B. Mô phỏng mô hình Lotka-Volterra qua biểu đồ pha. | 29 |
| 1. Khái quát về biểu đồ pha trong hệ động lực học: | 29 |
| 2. Biểu đồ pha của mô hình Lotka-Volterra | 30 |
| IV. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN VỀ MÔ HÌNH | 33 |
| A. Kết quả | 33 |
| B. Phân tích sự ổn định của mô hình | 33 |
| C. Tác động của tham số đến mô hình | 34 |
| 2. Phương pháp Runge-Kutta bậc 4 (RK4) | 35 |
| 3. So sánh | 36 |
| V. KẾT LUẬN | 37 |
| A. Tóm tắt các phát hiện chính | 37 |
| B. Hạn chế của mô hình | 38 |
| Tài liệu tham khảo | 40 |

Danh sách hình vẽ

| | | |
|----|--|----|
| 1 | <i>Chuỗi thức ăn trong tự nhiên</i> | 6 |
| 2 | <i>Lưới thức ăn trong tự nhiên</i> | 7 |
| 3 | <i>Đồ thị biến đổi theo thời gian tuyến tính hóa (Linearized Times Series Version)</i> | 8 |
| 4 | <i>Môi trường sinh thái tự nhiên.</i> | 10 |
| 5 | <i>Biểu đồ dòng chảy (Phase Portrait)</i> | 12 |
| 6 | <i>Biểu đồ biến đổi theo thời gian (Times Series))</i> | 12 |
| 7 | <i>Biểu đồ pha (Phase Plane Plot)</i> | 13 |
| 8 | <i>Ứng dụng vào nền kinh tế đa quốc gia.</i> | 16 |
| 9 | <i>Đồ thị trực quan mối quan hệ của con mồi và kẻ săn mồi (Euler)</i> | 24 |
| 10 | <i>Cửa sổ command window</i> | 24 |
| 11 | <i>Đồ thị trực quan mối quan hệ của con mồi và kẻ săn mồi(RK4)</i> | 29 |
| 12 | <i>Cửa sổ command window</i> | 29 |
| 13 | <i>Biểu đồ pha trong mô hình Lotka-Volterra</i> | 32 |
| 14 | <i>Cửa sổ command window</i> | 32 |

I. GIỚI THIỆU

A. Lịch sử và ý nghĩa của mô hình Lotka-Volterra

LỊCH SỬ:

- Xuất hiện vào quãng năm 1925, phương trình Lotka-Volterra chỉ về sự thay đổi mang tính tuần hoàn của dân số các loài sinh vật trong một môi trường sinh thái nào đó, mà ở đó có các con vật thuộc loại săn mồi và các con vật thuộc loại con mồi.
- Một trong các xuất phát điểm của mô hình Lotka-Volterra chính là các quan sát trong khoảng thời gian chiến tranh thế giới lần thứ nhất, khi lượng đánh bắt cá ở cảng Fiume (thuộc Italia vào thời điểm đó, nay thuộc Croatia) giảm đi, thì tỷ lệ cá thuộc loại thuộc nhóm cá săn mồi tăng lên đột biến so với những năm trước và sau đó. Nghĩa là khi quần thể người đạt giá trị tối đa, quần thể cá sẽ giảm dần và điều này sẽ dẫn đến một sự giảm đột ngột trong dân số.
- Số lượng kẻ săn mồi giảm cho phép quần thể cá có thể phát triển trở lại, dẫn đến quần thể người sẽ tăng và chu kỳ cứ thế lặp lại. Những mức độ thực sự của sự tăng giảm này phụ thuộc vào những quỹ đạo được vạch ra. Môi trường thay đổi có thể chuyển hệ sinh thái từ một quỹ đạo sang một quỹ đạo khác nhưng độ dao động tại từng thời điểm sẽ tiếp tục và không có khuynh hướng trở về một trạng thái cân bằng. Đây chính là điểm hạt nhân hợp lý.
- D'Aconna cung cấp các số liệu quan sát cho Vito Volterra sau khi theo dõi số lượng cá ở quần thể cảng Fiume, và Volterra đã nghiên cứu đưa ra mô hình toán học nhằm giải thích. Ngay sau đó, các mô hình sinh thái được nhà toán học người Mỹ tên là Alfred James Lotka nghiên cứu, dựa trên mô hình dân số của Volterra và của những người đi trước như là Pierre François Verhulst. Mô hình Lotka-Volterra trở nên nổi tiếng ở lĩnh vực dân số học trong sinh vật (population biology), các mô hình khác về tương tác dân số giữa loài đi săn và loài bị săn đều có thể coi là mở rộng của mô hình này.

Ý NGHĨA:

- Được đặc biệt sử dụng rộng rãi trong lĩnh vực động vật học và dân số học, phương trình Lotka-Volterra dựng lên mô hình về sự biến đổi số lượng cá thể trong quần thể động vật (mối quan hệ giữa chúng là thú săn mồi và con mồi) khi một bên đối tượng tăng về số lượng thì bên còn lại sẽ giảm và ngược lại.

B. Mục tiêu của bài báo cáo

- Nắm rõ bản chất **phương trình Lotka-Volterra**.
- Hiểu và ứng dụng kiến thức của đạo hàm, tích phân vào thực tiễn để nghiên cứu và tìm hiểu thêm về các lĩnh vực mà toán học có thể được áp dụng (trong bài báo cáo này là **ứng dụng của phương trình Lotka-Volterra** được xây dựng dựa trên kiến thức đạo hàm, tích phân).

C. Phạm vi nghiên cứu trong bài báo

- Phạm vi đối tượng: Mô hình Lotka-Volterra về sự biến đổi về số lượng cá thể trong quần thể sinh vật.
- Phạm vi thời gian: Từ tuần 5 đến tuần 12 dựa thời gian biểu học tập của Trường Đại học Bách Khoa - Đại học Quốc gia Hồ Chí Minh.
- Phạm vi không gian: Trường Đại học Bách Khoa - Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh.

II. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

A. Các khái niệm về chuỗi thức ăn và mô hình

1. Khái niệm về chuỗi thức ăn

Chuỗi thức ăn là một dãy gồm nhiều loài sinh vật có quan hệ dinh dưỡng với nhau, loài đứng trước là thức ăn của loài đứng sau. Mỗi loài là một mắt xích. Trong một chuỗi, một mắt xích vừa có nguồn thức ăn là mắt xích phía trước vừa là nguồn thức ăn của mắt xích phía sau.



Hình 1: *Chuỗi thức ăn trong tự nhiên*

Chuỗi thức ăn là một hệ thống mô tả mối quan hệ ăn thịt lẫn nhau giữa các loài trong một cộng đồng sinh vật. Nó bao gồm nhóm các loài được xếp theo mức độ tiêu thụ thức ăn, từ nguồn thức ăn thứ cấp trở xuống.

Chuỗi thức ăn phản ánh sự tương tác giữa các loài, cụ thể là giữa loài con mồi và loài săn mồi, và có vai trò quan trọng trong sinh thái học và giữ cân bằng trong hệ sinh thái.

1.1. Mô hình chuỗi thức ăn

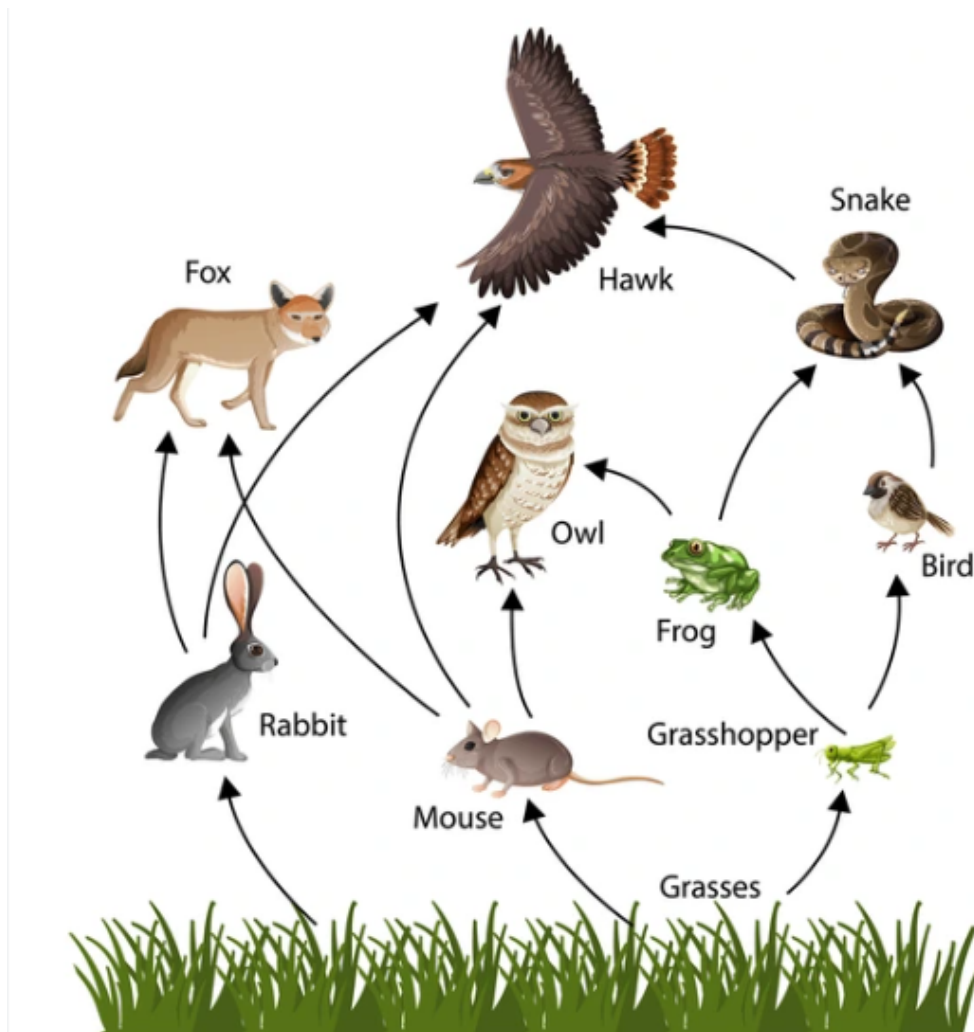
Mô hình chuỗi thức ăn là một công cụ toán học để mô tả mối quan hệ dinh dưỡng, tác động qua lại lẫn nhau giữa các loài trong hệ sinh thái. Nó sử dụng các phương trình vi phân để mô phỏng sự thay đổi số lượng của các loài theo thời gian.

Mô hình chuỗi thức ăn giúp chúng ta hiểu được sự phụ thuộc lẫn nhau của các loài và tác động của các yếu tố môi trường như tài nguyên thức ăn và áp lực săn mồi. Nó cũng cho phép dự đoán sự biến đổi của các loài trong chuỗi thức ăn theo thời gian, từ đó đưa ra các biện pháp quản lý và bảo vệ hệ sinh thái.

1.2. Ý nghĩa và ứng dụng của mô hình chuỗi thức ăn

Phương trình vi phân về mối tương quan trực tiếp giữa loài con mồi và loài săn mồi là một trong những công cụ để giải thích nguồn gốc của cân bằng sinh thái.

Mô hình chuỗi thức ăn đóng vai trò quan trọng trong sinh thái và quản lý hệ sinh thái. Nó cung cấp thông tin quan trọng về quy trình sinh thái và tương tác giữa các loài. Phân tích mô hình chuỗi thức ăn giúp đoán tác động của thay đổi môi trường và tác động của con người.



Hình 2: Lưới thức ăn trong tự nhiên

Điều này giúp đề xuất và thực hiện biện pháp quản lý hiệu quả để bảo vệ đa dạng sinh học và môi trường bền vững. Nghiên cứu mô hình chuỗi thức ăn cung cấp hiểu biết sâu hơn về hệ sinh thái tự nhiên và đánh giá tác động của con người.

2. Mô hình Lotka-Volterra

2.1. Giới thiệu về mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra

Phương trình Lotka–Volterra hay mô hình Lotka–Volterra là *phương trình kẻ săn mồi và con mồi*, hay gọi đơn giản là *bài toán về kẻ săn mồi và con mồi* là một dạng phương trình vi phân do Alfred J. Lotka đưa ra từ sự bổ sung, phát triển bởi Vito Volterra, phương trình này giải thích về sự cân bằng sinh thái trong hệ sinh thái giữa thú săn mồi và con mồi trong mối tương quan về dân số.

Mô hình được đặt theo tên của hai nhà toán học **Alfred J. Lotka** và **Vito Volterra**, người đã nghiên cứu và phát triển mô hình vào những năm 1920. Mô hình Lotka-Volterra giúp giải thích khả năng tương tác giữa những loài ăn thịt và những loài bị săn mồi. Đây là một công cụ mạnh mẽ để khám phá sự biến đổi của các quần thể sinh vật trong một môi trường sinh thái.

Mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra là một công cụ phổ biến trong lĩnh vực sinh học và sinh thái học để mô tả quan hệ tương tác giữa các loài trong một hệ động vật hoặc hệ sinh

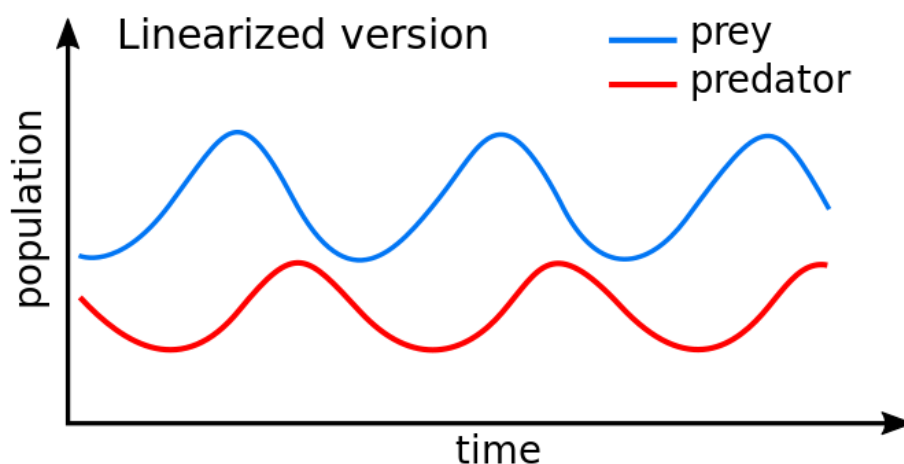
thái. Mô hình này dựa trên một số giả định cơ bản về việc phát triển số lượng và tương tác giữa các loài, giúp nhìn nhận và dự đoán sự biến đổi trong cộng đồng sinh vật. Với việc tạo ra một tác động môi trường ảo và mô phỏng các khía cạnh quan trọng của một hệ sinh thái, mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra đã trở thành một công cụ hữu ích cho các nghiên cứu sinh thái và hiểu hơn về quan hệ giữa các loài trong một cộng đồng sinh vật.

2.1.1 Nguyên lý cơ bản của mô hình

Mô phỏng sự tương tác giữa các loài trong một hệ sinh thái, thường là tương tác giữa loài săn mồi và loài con mồi (loài bị săn). Mô hình này mô tả sự biến động của các quần thể này theo thời gian, dưới đây là 5 nguyên lý cơ bản của mô hình Lotka-Volterra:

- Loài săn mồi (Predator) và loài con mồi (Prey): Mô hình tập trung vào sự tương tác giữa hai loài, trong đó một loài săn mồi (predator) săn loài con mồi (prey) để sống.
- Sự biến động dựa trên quy luật tự nhiên và tương tác: Mô hình giả định rằng số lượng cá thể của mỗi loài sẽ thay đổi theo thời gian dựa trên các quy luật tự nhiên như tăng trưởng tự nhiên, cạnh tranh, và sự ảnh hưởng của loài khác.
- Tương tác ăn thịt: Mô hình mô tả sự tương tác giữa hai loài thông qua quá trình săn mồi và bị săn bắt. Loài săn mồi sẽ tăng số lượng khi có nhiều con mồi để săn, nhưng số lượng con mồi sẽ giảm khi bị săn bắt nhiều.
- Độc lập với yếu tố môi trường: Mô hình giả định rằng sự biến động của các quần thể không phụ thuộc vào yếu tố môi trường bên ngoài, nhưng chỉ phụ thuộc vào sự tương tác giữa chúng.
- Sự biến động tuần hoàn: Mô hình Lotka-Volterra thường mô tả sự biến động tuần hoàn của các quần thể, trong đó số lượng của mỗi loài tăng và giảm theo chu kỳ.

Những nguyên lý này giúp mô hình Lotka-Volterra trở thành một công cụ hữu ích để hiểu và dự đoán sự biến động của các quần thể trong các hệ sinh thái phức tạp.



Hình 3: Đồ thị biến đổi theo thời gian tuyến tính hóa (Linearized Times Series Version)

2.1.2 Các thành phần trong mô hình

Mô hình Lotka-Volterra là một mô hình toán học đơn giản được sử dụng để mô phỏng sự tương tác giữa hai loài trong một hệ sinh thái. Trong trường hợp của mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra, hai loài được xem xét là loài săn mồi và loài con mồi.

Các thành phần chính của mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra bao gồm:

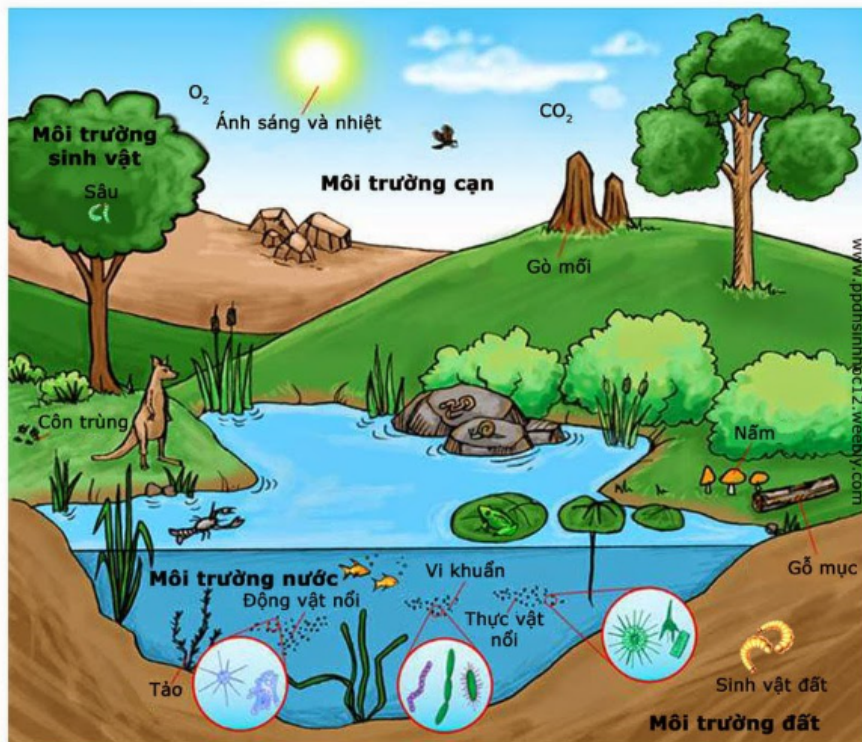
1. **Số lượng cá thể của loài con mồi** (kí hiệu bởi x): Đây là số lượng cá thể của loài con mồi tại thời điểm t .
2. **Số lượng cá thể của loài săn mồi** (kí hiệu bởi y): Đây là số lượng cá thể của loài săn mồi tại thời điểm t .
3. **Tỉ lệ tăng trưởng tự nhiên TỐI ĐA của loài săn mồi** (*maximum prey per capita growth rate*, kí hiệu bởi α): Đây là mức độ tăng trưởng tự nhiên của loài con mồi khi không có loài săn mồi.
4. **Sự ảnh hưởng của các loài săn mồi đến loài con mồi** (*the effect of the presence of predators on the prey death rate*, kí hiệu bởi β): Đây là tỉ lệ mà loài săn mồi tiêu thụ loài con mồi.
5. **Tỉ lệ tử vong của loài con mồi do bị săn** (*the predator's per capita death rate*, kí hiệu bởi γ): Đây là tỉ lệ mà số lượng cá thể của loài con mồi giảm đi do bị săn mồi.
6. **Sự ảnh hưởng của các loài ăn mồi đến loài săn mồi** (*the effect of the presence of prey on the predator's growth rate*, kí hiệu bởi δ): Khi có nhiều con mồi thì dân số loài săn mồi cũng tăng lên, ngược lại nếu dân số của loài con mồi lại giảm thì dân số loài đi săn giảm đi với tốc độ tỉ lệ thuận.

Các thành phần này được sử dụng để xây dựng các phương trình vi phân mô tả sự biến động của số lượng cá thể theo thời gian trong mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra. Chúng cùng nhau tạo thành một hệ thống phức tạp mô phỏng quan hệ ăn nhau giữa các loài trong một môi trường sinh thái.

2.1.3 Ứng dụng của mô hình Lotka-Volterra

Môi trường sinh thái tự nhiên, hay còn gọi là hệ sinh thái, là một mạng lưới tổng thể bao gồm đất, nước, không khí và các cơ thể sống trong một tổng thể toàn cầu. Nó bao gồm các tác động tích cực và tiêu cực của môi trường sống đối với sự phát triển của các loài sinh vật. Hệ sinh thái có vai trò quan trọng trong việc duy trì sự cân bằng và phát triển của nhân loại, và chúng ta cần hiểu rõ về nó để bảo vệ môi trường sống lành mạnh cho tương lai.

Sinh thái học là ngành khoa học nghiên cứu về quan hệ giữa sinh vật và môi trường sống của chúng, xem xét các sinh vật ở cấp độ cá thể, quần thể, quần xã, hệ sinh thái và sinh quyển. Hệ sinh thái bao gồm cả các thành phần sống (sinh vật) và không sống (như nước, đất, không khí) và các quá trình sinh thái điều chỉnh dòng năng lượng và vật chất thông qua môi trường. Chúng cung cấp các dịch vụ hệ sinh thái quan trọng như thực phẩm, nhiên liệu, điều hòa khí hậu, lọc nước, và nhiều hơn nữa.



Hình 4: *Môi trường sinh thái tự nhiên.*

Trong sinh thái học, mô hình này giúp hiểu sự biến đổi của các quần thể sinh vật trong môi trường tự nhiên và tìm hiểu tác động của sự biến đổi này lên hệ sinh thái trong toàn bộ quần thể. Nó cũng được sử dụng trong quản lý tài nguyên tự nhiên, giúp các chuyên gia đánh giá và dự đoán sự tương tác giữa các loài và tác động của các biến đổi môi trường như biến đổi khí hậu.

Mô hình Lotka-Volterra cũng được áp dụng trong các lĩnh vực khác như kinh tế học, y học, và công nghệ thông tin để khám phá và dự đoán sự thay đổi của các hệ thống phức tạp. Đặc biệt trong lĩnh vực kinh tế, nó có thể được sử dụng để mô tả sự năng động trong một thị trường có nhiều đối thủ cạnh tranh, các nền tảng và sản phẩm bổ sung, nền kinh tế chia sẻ, ...

2.1.4 Một số đặc điểm và lợi ích của mô hình

Mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra có một số đặc điểm quan trọng.

Đầu tiên, nó cho phép mô phỏng và dự đoán sự biến động của các loài theo thời gian.

Thứ hai, mô hình này giúp hiểu và phân tích sự tương tác giữa các loài trong một cộng đồng sinh vật.

Ngoài ra, mô hình cũng đem lại lợi ích trong việc phân tích và dự đoán sự biến đổi của các hệ sinh thái dựa trên tác động của con người. Từ đó ta đưa ra các khuyến nghị cụ thể để bảo vệ và duy trì nguồn tài nguyên sinh học quý giá và tạo ra một tương lai bền vững cho hệ sinh thái.

2.2. Các phương trình và biểu đồ phân tích trong mô hình

2.2.1 Các phương trình và điều kiện cân bằng trong mô hình chuỗi thức ăn

Mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra dựa trên hai phương trình chính (loài con mồi và loài săn mồi). Điều kiện cân bằng của mô hình là khi số lượng sinh vật ăn thịt và bị ăn thịt duy trì ở một mức độ ổn định theo thời gian.

Để tìm điểm cân bằng, ta giải phương trình cho $\frac{dx}{dt}$ và $\frac{dy}{dt}$ bằng 0:

Điểm cân bằng cho loài săn mồi (x):

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy = 0$$

$$x(\alpha - \beta y) = 0$$

Điểm cân bằng cho loài con mồi (y):

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y = 0$$

$$y(\delta x - \gamma) = 0$$

Điều này xảy ra khi tỷ lệ sinh sản và tỷ lệ chết của các loài là cân bằng, và tốc độ tiêu thụ thức ăn của loài săn mồi bằng tốc độ sinh sản của loài thú săn mồi.

Tổng kết: Nhờ các phương trình này, mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra đã trở thành một công cụ quan trọng trong việc nghiên cứu các quy luật sinh thái và ảnh hưởng của các yếu tố môi trường đến cộng đồng sinh vật. Từ đó giải thích được nguồn gốc của cân bằng sinh thái.

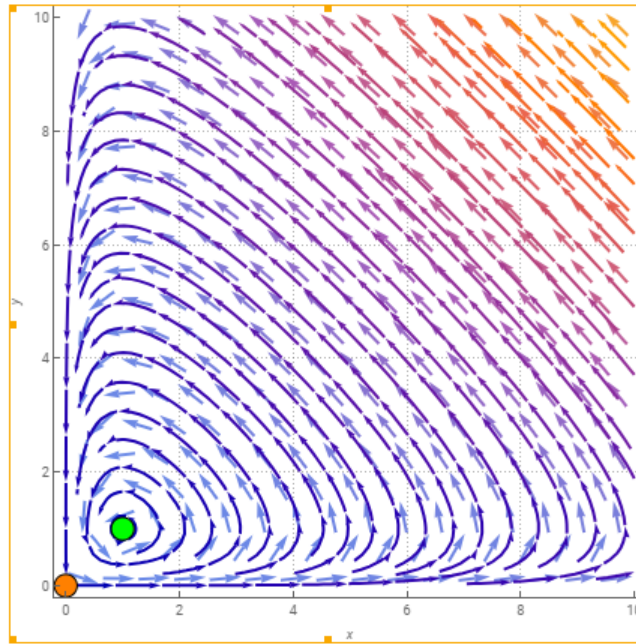
2.2.2 Biểu đồ phân tích trong mô hình chuỗi thức ăn

Trong mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra, chúng ta thường sử dụng các biểu đồ phân tích để hiểu sự biến động của các quần thể theo thời gian và tương tác giữa chúng.

Các biểu đồ phân tích cơ bản bao gồm:

- Biểu đồ dòng chảy
- Biểu đồ thời gian
- Biểu đồ pha

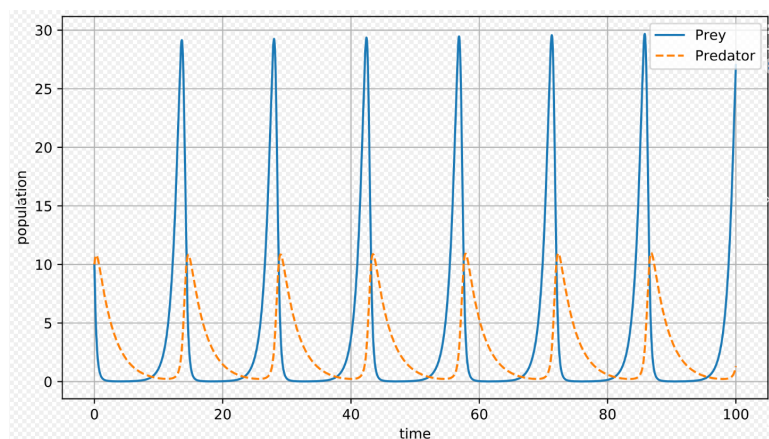
a) **Biểu đồ dòng chảy (Phase Portrait):**



Hình 5: *Biểu đồ dòng chảy (Phase Portrait)*

- Biểu đồ dòng chảy là một biểu đồ hai chiều, với trục hoành biểu thị số lượng cá thể của loài con mồi và trục tung biểu thị số lượng cá thể của loài săn mồi.
- Các dòng chảy trên biểu đồ thể hiện hướng di chuyển của các quần thể trong không gian phân tích.
- Điểm cân bằng (hay còn gọi là điểm ổn định) trên biểu đồ thể hiện sự ổn định của hệ thống, là nơi mà tỉ lệ thay đổi của cả hai quần thể là không.

b) **Biểu đồ biến đổi theo thời gian (Time Series Plot):**



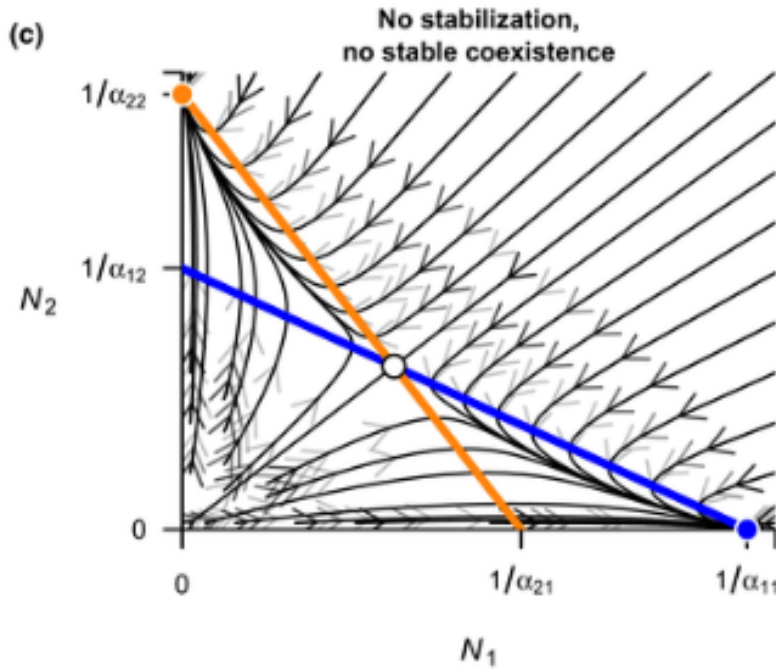
Hình 6: *Biểu đồ biến đổi theo thời gian (Times Series)*

- Biểu đồ biến đổi theo thời gian biểu diễn sự biến động của số lượng cá thể của loài săn mồi và loài con mồi theo thời gian.
- Mỗi đường biểu diễn số lượng cá thể của một loài trong một khoảng thời gian nhất định.

- Biểu đồ này cho phép quan sát sự biến động của các quần thể và xác định liệu chúng có hội tụ về một giá trị ổn định hay không.

c) Biểu đồ pha (Phase Plane Plot):

- Biểu đồ pha là một biểu đồ hai chiều biểu diễn mối quan hệ giữa tốc độ biến đổi của các quần thể.
- Trên biểu đồ này, trục hoành biểu thị tốc độ biến đổi của loài săn mồi và trục tung biểu thị tốc độ biến đổi của loài con mồi.
- Các đường định hình trên biểu đồ pha thể hiện sự biến đổi của hệ thống theo thời gian.



Hình 7: Biểu đồ pha (Phase Plane Plot)

Tổng kết: Các biểu đồ này giúp hiểu sâu hơn về tương tác giữa loài săn mồi và loài con mồi trong mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra và phản ánh sự biến động của hệ thống qua thời gian.

2.3. Phân tích và dự đoán trong mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra

Mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra là một công cụ phân tích và dự đoán sự biến đổi và tương tác trong một hệ thống các sinh vật ăn thịt và bị ăn trong một môi trường nhất định. Mô hình này được sử dụng để hiểu và mô phỏng sự tương tác giữa các loài trong chuỗi thức ăn, từ đó giúp dự đoán sự biến đổi và sự ổn định của hệ sinh thái.

Bằng cách phân tích các phương trình và điều kiện cân bằng của mô hình, chúng ta có thể xác định các yếu tố quyết định đến sự biến đổi và tương tác giữa các loài, như tỷ lệ sinh sản, tỷ lệ chết, và tốc độ tiêu thụ thức ăn. Cuối cùng, mô hình Lotka-Volterra cung cấp một cách để dự đoán sự biến đổi và tương tác trong chuỗi thức ăn, giúp chúng ta tìm ra cách quản lý và bảo vệ hệ sinh thái.

2.3.1. Sự biến đổi và tương tác giữa các loài trong mô hình

Khi số lượng cá thể của cả hai loài ở mức độ thấp, tỉ lệ tăng trưởng tự nhiên của loài săn mồi sẽ làm tăng số lượng cá thể của nó. Sự tăng này cũng sẽ làm tăng lượng thức ăn có

săn cho loài săn mồi, gây ra sự gia tăng của tỉ lệ tiêu hao đối với loài con mồi.

Khi số lượng cá thể của loài săn mồi tăng lên, sẽ có một số lượng lớn hơn của loài con mồi để săn, dẫn đến sự giảm của số lượng cá thể của loài con mồi.

Khi số lượng cá thể của loài con mồi giảm, làm giảm áp lực săn bắt đối với loài săn mồi, và do đó, số lượng cá thể của loài con mồi có thể tăng lên.

Quá trình này tiếp tục lặp lại và tạo ra một chu trình tuần hoàn của sự biến động giữa loài săn mồi và loài con mồi trong hệ sinh thái.

2.3.2. Các tham số ảnh hưởng đến sự biến đổi và tương tác

Trong mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra, sự biến đổi và tương tác giữa các loài được mô phỏng qua các tham số quyết định. Các tham số này bao gồm tỷ lệ sinh sản, tỷ lệ chết, và tốc độ tiêu thụ thức ăn.

- Tỷ lệ sinh sản của loài săn mồi tăng khi có nhiều thức ăn và giảm khi thiếu thức ăn.
- Tỷ lệ chết của loài săn mồi tăng khi bị săn mồi nhiều hơn và giảm khi không có loài thú săn mồi.
- Tốc độ tiêu thụ thức ăn của loài săn mồi tăng khi có nhiều loài thú săn mồi và giảm khi có ít loài thú săn mồi.

Từ đó, có thể thấy rằng sự biến đổi và tương tác giữa các loài trong mô hình phụ thuộc vào sự biến đổi của nguồn thức ăn và sự cạnh tranh giữa các loài. Điều này cho thấy tầm quan trọng của quản lý các tham số trong mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra để duy trì ổn định và cân bằng trong hệ sinh thái.

2.3.3. Dự đoán sự biến đổi và tương tác trong mô hình

Mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra cung cấp khả năng dự đoán chính xác sự biến đổi và tương tác trong một hệ sinh thái chuỗi thức ăn. Dự đoán này dựa trên các thông tin về 3 tham số như trên (tỷ lệ sinh sản, tỷ lệ chết, và tốc độ tiêu thụ thức ăn). Bằng cách thay đổi các giá trị của các tham số này, chúng ta có thể dự đoán sự biến đổi và tương tác giữa các loài, như sự gia tăng hoặc giảm số lượng loài, sự ổn định hoặc thay đổi vị trí của các loài trong chuỗi thức ăn.

⇒ Dự đoán này giúp chúng ta hiểu và quản lý tốt hơn các hệ sinh thái, đồng thời tạo ra các biện pháp bảo vệ và phục hồi môi trường tự nhiên.

3. Ví dụ và ứng dụng của mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra

3.1. Ví dụ về mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra

Dưới đây là một ví dụ về mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra áp dụng cho một cặp loài, ví dụ như rắn (săn mồi) và thỏ (con mồi):

1. Phương trình cho số lượng cá thể của rắn (x):

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

2. Phương trình cho số lượng cá thể của thỏ (y):

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

Trong đó:

- x là số lượng cá thể của thỏ.
- y là số lượng cá thể của rắn.
- α là tỉ lệ tăng trưởng tự nhiên của thỏ.
- β là tỉ lệ rắn tiêu thụ thỏ
- γ là tỉ lệ chết của thỏ do bị săn.
- δ là tỉ lệ giảm trưởng của rắn do hết mồi săn.

3. Điều kiện cân bằng:

Để tìm điểm cân bằng, ta giải hệ phương trình $\frac{dx}{dt} = 0$ và $\frac{dy}{dt} = 0$.

4. Sự biến đổi và tương tác giữa rắn và thỏ:

- Khi số lượng rắn ít, tỉ lệ tăng trưởng tự nhiên cao và rắn sẽ tăng nhanh chóng.
- Với số lượng rắn tăng, số lượng thỏ sẽ giảm do bị săn bắn nhiều hơn, làm giảm tỉ lệ tăng trưởng của thỏ.
- Khi số lượng thỏ giảm, áp lực săn bắn từ rắn cũng giảm, làm cho số lượng thỏ có thể tăng trở lại.
- Quá trình này tiếp tục diễn ra, tạo ra một chu trình tuần hoàn của sự biến động giữa số lượng rắn và số lượng thỏ trong hệ sinh thái.

Tổng kết: Thông qua mô hình này, chúng ta có thể dự đoán sự biến động của số lượng rắn và số lượng thỏ trong một khu vực cụ thể và hiểu được tương tác phức tạp giữa chúng trong một hệ sinh thái.

3.2. Ứng dụng của mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra vào thực tế cuộc sống

Mô hình Lotka-Volterra có nhiều ứng dụng trong thực tế, bao gồm các lĩnh vực như sinh thái học, kinh tế học và y học:

3.2.1. Ứng dụng trong sinh thái học

Nghiên cứu hệ sinh thái: Mô hình Lotka-Volterra giúp hiểu và dự đoán sự biến động của các loài trong hệ sinh thái, từ đó giúp trong việc quản lý và bảo vệ môi trường tự nhiên.

Quản lý nguồn lợi thủy sản: Áp dụng mô hình này để hiểu tương tác giữa các loài trong các hệ sinh thái thủy sản, từ đó có thể đưa ra các biện pháp quản lý hợp lý để duy trì và tăng sản lượng thủy sản.

3.2.2. Ứng dụng trong kinh tế học

Quản lý nguồn lực tự nhiên: Mô hình Lotka-Volterra có thể áp dụng trong kinh tế tài nguyên tự nhiên, giúp dự đoán và quản lý sử dụng các nguồn lực như nước, rừng, và động vật hoang dã.

Nghiên cứu thị trường và quản lý cung cầu: Mô hình này có thể được sử dụng để nghiên cứu và dự đoán sự biến động của các yếu tố kinh tế, như cung cầu, giá cả và mối quan hệ giữa các yếu tố này.



Hình 8: Ứng dụng vào nền kinh tế đa quốc gia.

Tổng kết: Mô hình Lotka-Volterra đóng vai trò quan trọng trong việc giúp chúng ta hiểu và dự đoán sự biến động của các hệ thống phức tạp và tìm ra các biện pháp quản lý và kiểm soát phù hợp.

B. Phương trình Lotka-Volterra

1. Phương trình vi phân hàm nhiều biến

Trong mô hình chuỗi thức ăn Lotka-Volterra, chúng ta sử dụng các phương trình vi phân để mô tả sự biến động của số lượng cá thể của loài săn mồi và loài con mồi theo thời gian. hệ phương trình vi phân Lotka-Volterra cho hai loài, thường là **loài con mồi** (số lượng cá thể được biểu thị bởi x) và **loài săn mồi** (số lượng cá thể được biểu thị bởi y):

a) Phương trình cho số lượng cá thể của loài con mồi (x):

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

Trong đó:

- $\frac{dx}{dt}$ là tỉ lệ thay đổi của số lượng cá thể của loài con mồi theo thời gian.
- α là tỉ lệ tăng trưởng tự nhiên của loài con mồi.
- β là tỉ lệ loài săn mồi tiêu thụ con mồi.
- x là số lượng cá thể của loài con mồi.
- y là số lượng cá thể của loài săn mồi.

b) Phương trình cho số lượng cá thể của loài săn mồi (y):

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

Trong đó:

- $\frac{dy}{dt}$ là tỉ lệ thay đổi của số lượng cá thể của loài săn mồi theo thời gian.
- γ là tỉ lệ tiêu hao con mồi do loài săn mồi.
- δ là tỉ lệ giảm trưởng của loài săn mồi do không đủ số lượng con mồi.
- x và y lần lượt là số lượng cá thể của loài con mồi và loài săn mồi.

Hệ phương trình này mô tả một hệ sinh thái đơn giản, trong đó **có sự tương tác giữa loài săn mồi và loài con mồi**, và cho phép **dự đoán sự biến động** của các quần thể qua thời gian.

2. Mô hình con mồi - kẻ săn mồi

Là một mô hình trong sinh thái học và lý thuyết tương tác loài, mô tả sự tương tác giữa hai loài trong một hệ sinh thái, một loài là con mồi và một loài là kẻ săn mồi. Mô hình được dùng để mô tả cơ chế tương tác giữa loài con mồi và loài săn mồi, trong đó con mồi là nguồn thức ăn cho kẻ săn mồi, và kẻ săn mồi làm giảm số lượng con mồi thông qua việc săn bắt. Một phần quan trọng của mô hình là nó có thể mô tả sự biến động của hai quần thể trong một hệ sinh thái và dự đoán các mẫu tương tác giữa chúng.

3. Phân tích toán học của mô hình

Trong quá trình nghiên cứu tính chất và hành vi của hệ phương trình vi phân, chúng ta có thể hiểu rõ hơn về động học của tương tác giữa con mồi và kẻ săn mồi trong hệ sinh thái. Dưới đây là một số phân tích toán học cơ bản của mô hình này:

a. Điểm cân bằng (Equilibrium Points):

Điểm cân bằng là nơi mà số lượng cá thể của cả con mồi và kẻ săn mồi không thay đổi theo thời gian.

Để tìm điểm cân bằng, giải hệ phương trình $\frac{dx}{dt} = 0$ và $\frac{dy}{dt} = 0$.

b. Stability Analysis (Phân tích ổn định):

Phân tích tính ổn định của các điểm cân bằng bằng cách xem xét ma trận Jacobian của hệ phương trình tại mỗi điểm cân bằng.

Sự ổn định của mỗi điểm cân bằng được xác định bằng các giá trị riêng của ma trận Jacobian. Nếu tất cả các giá trị riêng có phần thực âm, thì điểm cân bằng đó là ổn định.

c. Isooclines (Đường đồng dạng):

Đường đồng dạng là các đường trong không gian phân tích trong đó tỉ lệ thay đổi của một loài là không đổi.

Đường đồng dạng cho cả con mồi và kẻ săn mồi có thể được vẽ để hiểu rõ hơn về phân phối của chúng trong không gian phân tích.

d. Phase Portrait (Biểu đồ dòng chảy):

Biểu đồ dòng chảy là một công cụ mạnh mẽ để hiểu hành vi của hệ phương trình vi phân. Nó biểu diễn dòng chảy trong không gian phân tích dựa trên các điểm cân bằng và đường đồng dạng.

Biểu đồ dòng chảy giúp ta nhìn thấy hình dạng và hướng di chuyển của các quỹ đạo của con mồi và kẻ săn mồi trong không gian phân tích.

e. Bifurcation Analysis (Phân tích nhánh):

Phân tích sự thay đổi trong cấu trúc và tính chất của hệ phương trình khi các tham số của nó thay đổi.

Các biến thiên đột ngột trong hệ thống có thể xảy ra khi các điểm cân bằng thay đổi hoặc khi hệ phương trình có thêm các điểm cân bằng mới.

⇒ Thông qua các phân tích toán học trên, chúng ta đã có thể hiểu sâu hơn về động học của mô hình con mồi - kẻ săn mồi Lotka-Volterra và tương tác giữa con mồi và kẻ săn mồi trong hệ sinh thái.

C. Ổn định và điểm cân bằng

Trong mô hình con mồi - kẻ săn mồi Lotka-Volterra, ổn định của các điểm cân bằng quan trọng để hiểu hành vi của hệ sinh thái. Điểm cân bằng là nơi mà số lượng cá thể của cả con mồi và kẻ săn mồi không thay đổi theo thời gian. Sự ổn định của điểm cân bằng được xác định bằng phân tích các giá trị riêng của ma trận Jacobian tại điểm cân bằng.

1. Phân tích ổn định

- Để phân tích tính ổn định của một điểm cân bằng, chúng ta xem xét ma trận Jacobian của hệ phương trình tại điểm đó.
- Ma trận Jacobian J là ma trận các đạo hàm riêng của các phương trình vi phân theo các biến.
- Sau đó, ta tính toán giá trị riêng của ma trận Jacobian để xác định tính ổn định của điểm cân bằng.
- Nếu tất cả các giá trị riêng có phần thực âm, thì điểm cân bằng đó được coi là ổn định.

2. Điểm cân bằng không ổn định

- Nếu có *ít nhất một giá trị riêng có phần thực dương*, thì điểm cân bằng sẽ **không ổn định**.
- Trong trường hợp này, các biến sẽ biến đổi theo các hướng không ổn định khi tiến gần điểm cân bằng, dẫn đến sự dao động hoặc phân kỳ của hệ thống.

3. Điểm cân bằng ổn định

- Nếu *tất cả các giá trị riêng có phần thực âm*, điểm cân bằng sẽ được coi là **ổn định**.
- Trong trường hợp này, các biến sẽ hội tụ về điểm cân bằng khi tiến gần nó, dẫn đến sự ổn định và hồi phục tự nhiên của hệ thống sau các biến động nhỏ.

◊ Đây chính là **công cụ quan trọng** để ta hiểu rõ hơn về hành vi của mô hình con mồi - kẻ săn mồi Lotka-Volterra, từ đó dự đoán sự biến động của các quần thể trong hệ sinh thái theo thời gian một cách tối ưu và hiệu quả nhất.

III. PHƯƠNG PHÁP LUẬN

A. Các phương pháp phân tích mô hình và giải phương trình vi phân Lotka-Volterra

1. Phương pháp phân tích mô hình:

- Phương pháp phân tích là một trong những phương pháp tìm nghiệm chính xác cho các phương trình vi phân, tuy nhiên, điểm hạn chế của phương pháp này là chỉ được sử dụng cho một số trường hợp đặc biệt, khi các phương trình có thể được giải một cách chính xác.
- Ví dụ, xét hệ phương trình Lotka-Volterra sau đây:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \gamma y\end{aligned}$$

- Trong đó:
 - x là số lượng con mồi.
 - y là số lượng kẻ săn mồi.
 - $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các hằng số dương, được xác định như sau:
 - α : Tốc độ sinh sản tự nhiên của con mồi (Prey). Đây là tốc độ mà quần thể con mồi sẽ tăng lên nếu không có sự hiện diện của kẻ săn mồi.
 - β : Tốc độ mà con mồi bị kẻ săn mồi tiêu diệt. Nó phản ánh mức độ ảnh hưởng của kẻ săn mồi lên tỷ lệ tử vong của con mồi.
 - γ : Tốc độ tử vong tự nhiên của kẻ săn mồi (Predator). Đây là tốc độ mà quần thể kẻ săn mồi sẽ giảm xuống nếu không có sự hiện diện của con mồi.
 - δ : Tốc độ mà kẻ săn mồi tăng trưởng nhờ vào việc tiêu thụ con mồi. Nó phản ánh mức độ ảnh hưởng của con mồi lên sự sinh sản của kẻ săn mồi.
- Để tìm điểm cố định, ta giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \alpha x - \beta xy = 0 \\ \delta xy - \gamma y = 0 \end{cases}$$
- Từ đó, ta có thể tìm được điểm cố định trong mô hình là (x^*, y^*) , nơi mà tỷ lệ sinh sản và tỷ lệ tử vong của cả con mồi và kẻ săn mồi cân bằng nhau.
- Sau khi xác định được điểm cố định, ta có thể xem xét ma trận Jacobian tại điểm cố định và tìm các trị riêng của nó để phân tích sự ổn định của hệ thống. Nếu tất cả các trị riêng đều có phần thực âm, thì hệ thống là ổn định tại điểm cố định đó.
- Ma trận Jacobian trong phương trình Lotka-Volterra là ma trận chứa các đạo hàm riêng bậc nhất của hệ phương trình vi phân theo từng biến

- Ta có, với hệ phương trình vi phân Lotka-Volterra đã cho ở trên, ma trận Jacobian được xác định như sau:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\alpha x - \beta xy)}{\partial x} & \frac{\partial(\alpha x - \beta xy)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\delta xy - \gamma y)}{\partial x} & \frac{\partial(\delta xy - \gamma y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- Sau khi lấy đạo hàm riêng theo từng biến ta được:

$$J = \begin{bmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{bmatrix}$$

- Dựa vào ma trận Jacobian để phân tích tính ổn định của một mô hình Lotka-Volterra là một việc cần thiết khi nghiên cứu mô hình con mồi - kẻ săn mồi này, nó có một số ứng dụng quan trọng để:

1. **Dự Đoán Hành Vi Quần Thể:** Phân tích giúp dự đoán sự thay đổi của quần thể theo thời gian, bao gồm sự tăng giảm tuần hoàn hoặc hỗn loạn của số lượng cá thể.
2. **Quản Lý và Bảo Tồn:** Cung cấp thông tin cần thiết để quản lý các loài và bảo tồn đa dạng sinh học, đặc biệt trong các môi trường bị ảnh hưởng bởi hoạt động của con người.
3. **Nghiên Cứu Sinh Thái và Sinh Học Bảo Tồn:** Phân tích tính ổn định giúp các nhà sinh thái học và sinh học bảo tồn hiểu được cách thức tương tác giữa các loài ảnh hưởng đến sự tồn tại và phát triển của chúng.
4. **Mô Phỏng và Mô Hình Hóa:** Các mô hình toán học như Lotka-Volterra được sử dụng để mô phỏng và dự đoán kết quả của các can thiệp vào hệ sinh thái, giúp đưa ra quyết định quản lý dựa trên cơ sở khoa học.
5. **Giáo Dục và Nghiên Cứu:** Phân tích này cũng là công cụ giáo dục quan trọng, giúp sinh viên và các nhà nghiên cứu hiểu biết sâu sắc hơn về động lực học quần thể và mô hình hóa sinh thái.

2. Phương pháp số học dùng để giải phương trình:

2.1 Giải phương trình vi phân bằng sấp xỉ theo phương pháp Euler

2.1.1 Phương pháp chung:

- Ta có hệ phương trình vi phân:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned}$$

- Với $f(x, y)$ và $g(x, y)$ là các hàm số đã biết. Điều kiện ban đầu cho hệ phương trình là: $x(t_0) = x_0$ và $y(t_0) = y_0$.
- Theo phương pháp Euler, ta tính giá trị xấp xỉ của x và y tại các bước thời gian tiếp theo như sau:

- Chọn kích thước bước thời gian (h)
- Giá trị xấp xỉ của x và y tại bước thời gian tiếp theo được tính theo công thức:

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot g(x_n, y_n)$$
- Tiếp tục lặp lại quá trình này cho đến khi chúng ta tìm được giá trị xấp xỉ của x và y tại thời gian mong muốn.

2.1.2 Giải phương trình Lotka-volterra bằng xấp xỉ Euler

- Cho phương trình Lotka-Volterra có dạng:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

- Trong đó:
 - x là số lượng con mồi.
 - y là số lượng kẻ săn mồi.
 - $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các hằng số dương, được xác định như sau:
 α : Tốc độ sinh sản tự nhiên của con mồi (Prey). Đây là tốc độ mà quần thể con mồi sẽ tăng lên nếu không có sự hiện diện của kẻ săn mồi.
 β : Tốc độ mà con mồi bị kẻ săn mồi tiêu diệt. Nó phản ánh mức độ ảnh hưởng của kẻ săn mồi lên tỷ lệ tử vong của con mồi.
 γ : Tốc độ tử vong tự nhiên của kẻ săn mồi (Predator). Đây là tốc độ mà quần thể kẻ săn mồi sẽ giảm xuống nếu không có sự hiện diện của con mồi.
 δ : Tốc độ mà kẻ săn mồi tăng trưởng nhờ vào việc tiêu thụ con mồi. Nó phản ánh mức độ ảnh hưởng của con mồi lên sự sinh sản của kẻ săn mồi.

Theo phương pháp Euler, ta tính giá trị xấp xỉ của x và y tại các bước thời gian tiếp theo như sau:

- Chọn kích thước bước thời gian (h)
- Giá trị xấp xỉ của x và y tại bước thời gian tiếp theo được tính theo công thức:

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot (\alpha x_n - \beta x_n y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot (\delta x_n y_n - \gamma y_n)$$
- Tiếp tục lặp lại quá trình này cho đến khi chúng ta tìm được giá trị xấp xỉ của x và y tại thời gian mong muốn.

*****Code Matlab giải phương trình Lotke-Volterra bằng phương pháp Euler:**

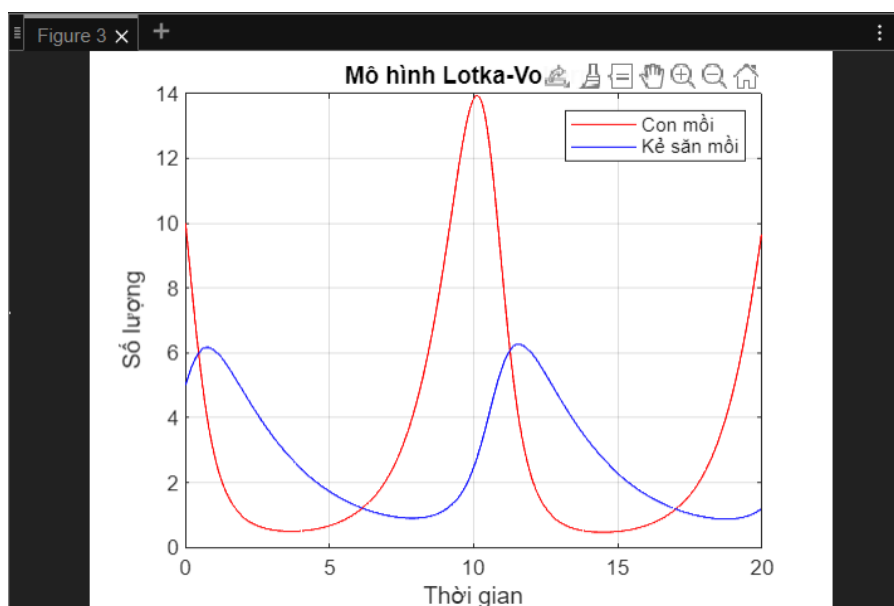
```
1 % Yeu cau nguoi dung nhap cac tham so
2 alpha = input('Nhap toc do sinh san cua con moi (alpha): ');
3 beta = input('Nhap toc do san moi (beta): ');
4 gamma = input('Nhap ty le tu vong cua ke san moi (gamma): ');
5 delta = input('Nhap hieu qua cua viec san moi len su sinh san cua
    ke san moi (delta): ');
6 x0 = input('Nhap so luong ban dau cua con moi (x0): ');
7 y0 = input('Nhap so luong ban dau cua ke san moi (y0): ');
8 h = 0.01;
9 numSteps = 2000;
10
11 % Khoi tao mang de luu tru ket qua
12 x = zeros(1, numSteps);
13 y = zeros(1, numSteps);
14 x(1) = x0;
15 y(1) = y0;
16
17 % Vong lap Euler de giai he phuong trinh
18 for i = 1:numSteps-1
19     x(i+1) = x(i) + h * (alpha * x(i) - beta * x(i) * y(i));
20     y(i+1) = y(i) + h * (delta * x(i) * y(i) - gamma * y(i));
21 end
22
23 % Ve do thi
24 t = 0:h:(numSteps-1)*h;
25 plot(t, x, 'r', t, y, 'b');
26 xlabel('Thoi gian');
27 ylabel('So luong');
28 title('Mo hinh Lotka-Volterra');
29 legend('Con moi', 'Ke san moi');
30 grid on;
```


***Mô tả trực quan kết quả chạy code bằng đồ thị:

Cho bài toán giả sử:

- Tốc độ sinh sản của con mồi (α) : 1.1
- Tốc độ săn mồi (β): 0.4
- Tỷ lệ tử vong của kẻ săn mồi (γ): 0.4
- Hiệu quả của việc săn mồi lên sự sinh sản của kẻ săn mồi (δ): 0.1
- Số lượng ban đầu của con mồi : 10
- Số lượng ban đầu của kẻ săn mồi: 5

Với kích thước bước thời gian $h = 0.01$ (ngày), Sau 20 ngày, số lượng con mồi và kẻ săn mồi thay đổi theo sơ đồ sau:



Hình 9: Đồ thị trực quan mối quan hệ của con mồi và kẻ săn mồi (Euler)

```
>> lotkam
Nhập tốc độ sinh sản của con mồi (alpha):
1.1
Nhập tốc độ săn mồi (beta):
0.4
Nhập tỷ lệ tử vong của kẻ săn mồi (gamma):
0.4
Nhập hiệu quả của việc săn mồi lên sự sinh sản của kẻ săn mồi (delta):
0.1
Nhập số lượng ban đầu của con mồi (x0):
10
Nhập số lượng ban đầu của kẻ săn mồi (y0):
5
```

Hình 10: Cửa sổ command window

2.2 Giải phương trình Lotka-Volterra bằng phương pháp Runge-Kutta bậc 4

2.2.1 Phương pháp Runge-Kutta bậc 4 trong lý thuyết vi phân:

- Phương pháp Runge-Kutta là một họ các phương pháp giải gần đúng cho các phương trình vi phân thường, được phát triển bởi C. Runge và M. W. Kutta vào khoảng năm 1900. Phương pháp này bao gồm cả các phương pháp ẩn (implicit) và hiện (explicit), trong đó phương pháp Euler cũng là một thành viên
- Runge-Kutta bậc 4 (RK4), hay còn được gọi là “phương pháp Runge-Kutta cổ điển”, là thành viên nổi tiếng nhất trong họ Runge-Kutta. Đây là một phương pháp hiện với bốn giai đoạn, cho phép tính toán giá trị gần đúng của hàm số tại các bước thời gian tiếp theo dựa trên thông tin từ bước thời gian hiện tại và độ dốc của hàm số.
- Phương pháp chung:

- Cho một bài toán giá trị ban đầu được chỉ rõ như sau:
$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- Ở đây, y có thể là một hàm số vô hướng hoặc một hàm vector chưa biết của thời gian t cần xác định nghiệm.
- y' là tốc độ thay đổi của hàm y theo thời gian t (đạo hàm của y theo t).
- Tại thời điểm t_0 , giá trị của y là y_0 . Hàm f và các số t_0, y_0 là các dữ liệu biết trước.
- Bây giờ chọn một bước kích thước $h > 0$ và định nghĩa

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$
$$t_{n+1} = t_n + h$$

với $n = 0, 1, 2, \dots$ và

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$
$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$
$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_3\right),$$
$$k_4 = f\left(t_n + h, y_n + hk_3\right).$$

- Ở đây y_{n+1} là giá trị gần đúng (xấp xỉ RK4) của y tại thời điểm t_{n+1} được xác định bằng giá trị hiện tại y_n cộng với trung bình trọng lượng của bốn số gia, trong đó mỗi gia là sản phẩm của kích cỡ của khoảng thời gian h và một độ dốc được ước tính từ hàm f .
- k_1 là độ dốc dựa trên độ dốc tại điểm ban đầu của khoảng thời gian, sử dụng y (phương pháp Euler);
- k_2 là độ dốc dựa trên độ dốc tại điểm giữa của khoảng thời gian, sử dụng $y + \frac{h}{2}k_1$.
- k_3 là độ dốc dựa trên độ dốc tại điểm giữa của khoảng thời gian, sử dụng $y + \frac{h}{2}k_2$.
- k_4 là độ dốc dựa trên độ dốc tại điểm cuối của khoảng thời gian, sử dụng $y + hk_3$.

2.2.2 Phương pháp Runge-Kutta bậc 4 trong giải phương trình Lotka-Volterra:

- Cho phương trình Lotka-Volterra có dạng:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \gamma y\end{aligned}$$

- Trong đó:

- x là số lượng con mồi.

- y là số lượng kẻ săn mồi.

- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các hằng số dương, được xác định như sau:

α : Tốc độ sinh sản tự nhiên của con mồi (Prey). Đây là tốc độ mà quần thể con mồi sẽ tăng lên nếu không có sự hiện diện của kẻ săn mồi.

β : Tốc độ mà con mồi bị kẻ săn mồi tiêu diệt. Nó phản ánh mức độ ảnh hưởng của kẻ săn mồi lên tỷ lệ tử vong của con mồi.

γ : Tốc độ tử vong tự nhiên của kẻ săn mồi (Predator). Đây là tốc độ mà quần thể kẻ săn mồi sẽ giảm xuống nếu không có sự hiện diện của con mồi.

δ : Tốc độ mà kẻ săn mồi tăng trưởng nhờ vào việc tiêu thụ con mồi. Nó phản ánh mức độ ảnh hưởng của con mồi lên sự sinh sản của kẻ săn mồi.

- Để giải phương trình Lotka-Volterra trên bằng phương pháp RK4 chúng ta cần xác định các điểm sau:

– Tính toán số gia đầu tiên:

$$k_{1x} = h(\alpha x_n - \beta x_n y_n),$$

$$k_{1y} = h(\delta x_n y_n - \gamma y_n),$$

– Tính toán số gia thứ hai:

$$k_{2x} = h\left(\alpha\left(x_n + \frac{k_{1x}}{2}\right) - \beta\left(x_n + \frac{k_{1x}}{2}\right)\left(y_n + \frac{k_{1y}}{2}\right)\right),$$

$$k_{2y} = h\left(\delta\left(x_n + \frac{k_{1x}}{2}\right)\left(y_n + \frac{k_{1y}}{2}\right) - \gamma\left(y_n + \frac{k_{1y}}{2}\right)\right),$$

– Tính toán số gia thứ ba:

$$k_{3x} = h\left(\alpha\left(x_n + \frac{k_{2x}}{2}\right) - \beta\left(x_n + \frac{k_{2x}}{2}\right)\left(y_n + \frac{k_{2y}}{2}\right)\right),$$

$$k_{3y} = h\left(\delta\left(x_n + \frac{k_{2x}}{2}\right)\left(y_n + \frac{k_{2y}}{2}\right) - \gamma\left(y_n + \frac{k_{2y}}{2}\right)\right),$$

– Tính toán số gia thứ tư:

$$k_{4x} = h(\alpha(x_n + k_{3x}) - \beta(x_n + k_{3x})(y_n + k_{3y})),$$

$$k_{4y} = h(\delta(x_n + k_{3x})(y_n + k_{3y}) - \gamma(y_n + k_{3y})),$$

– Cập nhật giá trị cho bước tiếp theo:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y}).$$

- Trong đó h là kích thước bước thời gian, và chỉ số n đại diện cho bước thời gian hiện tại. Bằng cách lặp lại quy trình này, ta có thể tìm được giá trị xấp xỉ của x và y tại các thời điểm khác nhau, từ đó mô tả được động lực của hệ sinh thái theo thời gian.

*****Code Matlab giải phương trình Lotke-Volterra bằng phương pháp RK4:**

```
1 % Yêu cầu người dùng nhập các tham số
2 alpha = input('Nhập tốc độ sinh sản của con mồi (alpha): ');
3 beta = input('Nhập tốc độ săn mồi (beta): ');
4 gamma = input('Nhập tỷ lệ tử vong của kẻ săn mồi (gamma): ');
5 delta = input('Nhập hiệu quả của việc săn mồi lên sự sinh sản của
    kẻ săn mồi (delta): ');
6 x0 = input('Nhập số lượng ban đầu của con mồi (x0): ');
7 y0 = input('Nhập số lượng ban đầu của kẻ săn mồi (y0): ');
8
9 % Khởi tạo các biến
10 h = 0.01; % Bước thời gian
11 n = 2000; % Số bước lặp
12 x = zeros(1, n+1); % Mảng lưu giá trị con mồi
13 y = zeros(1, n+1); % Mảng lưu giá trị kẻ săn mồi
14 x(1) = x0;
15 y(1) = y0;
16
17 % Lotka-Volterra
18 lotkaVolterra = @(t, x, y) [alpha*x - beta*x*y; delta*x*y - gamma
    *y];
19
20 % Vòng lặp RK4
21 for i = 1:n
22     t = (i-1)*h;
23     k1 = lotkaVolterra(t, x(i), y(i));
24     k2 = lotkaVolterra(t + h/2, x(i) + h/2*k1(1), y(i) + h/2*k1
```

```

        (2));
25     k3 = lotkaVolterra(t + h/2, x(i) + h/2*k2(1), y(i) + h/2*k2
        (2));
26     k4 = lotkaVolterra(t + h, x(i) + h*k3(1), y(i) + h*k3(2));
27
28     x(i+1) = x(i) + h/6*(k1(1) + 2*k2(1) + 2*k3(1) + k4(1));
29     y(i+1) = y(i) + h/6*(k1(2) + 2*k2(2) + 2*k3(2) + k4(2));
30 end
31
32 % Ve do thi
33 t = 0:h:n*h;
34 plot(t, x, 'r', t, y, 'b');
35 xlabel('Thoi gian');
36 ylabel('So luong');
37 title('Mo hinh Lotka-Volterra');
38 legend('Con moi', 'Ke san moi');
39 grid on;

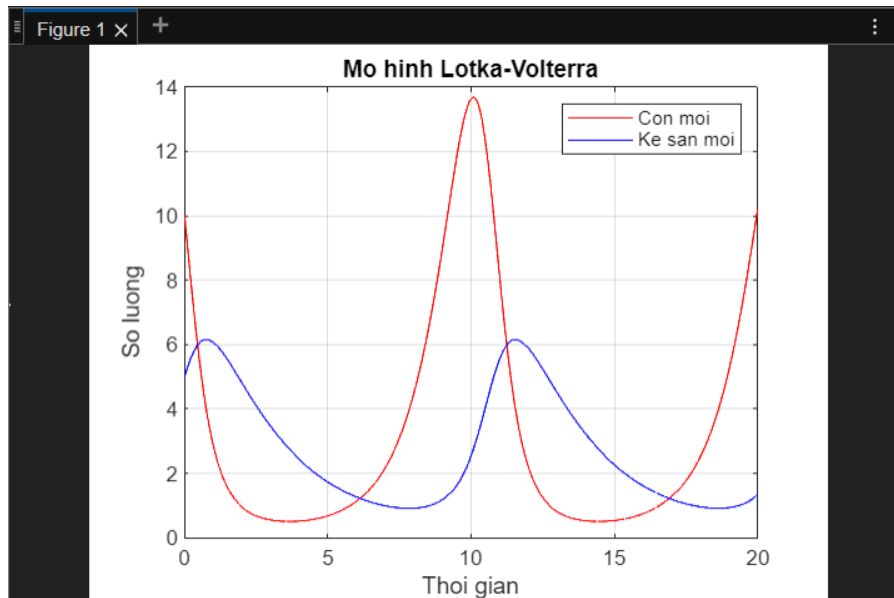
```

***Mô tả trực quan kết quả chạy code bằng đồ thị:

Cho bài toán giả sử:

- *Tốc độ sinh sản của con mồi (alpha) : 1.1*
- *Tốc độ săn mồi (beta): 0.4*
- *Tỷ lệ tử vong của kẻ săn mồi (gamma): 0.4*
- *Hiệu quả của việc săn mồi lên sự sinh sản của kẻ săn mồi (delta): 0.1*
- *Số lượng ban đầu của con mồi : 10*
- *Số lượng ban đầu của kẻ săn mồi: 5*

Với kích thước bước thời gian $h = 0.01$ (ngày), Sau 20 ngày, số lượng con mồi và kẻ săn mồi thay đổi theo sơ đồ sau:



Hình 11: Đồ thị trực quan mối quan hệ của con mồi và kẻ săn mồi(RK4)

```

Command Window
>> rk4
Nhập tốc độ sinh sản của con mồi (alpha):
1.1
Nhập tốc độ săn mồi (beta):
0.4
Nhập tỷ lệ tử vong của kẻ săn mồi (gamma):
0.4
Nhập hiệu quả của việc săn mồi lên sự sinh sản của kẻ săn mồi (delta):
0.1
Nhập số lượng ban đầu của con mồi (x0):
10
Nhập số lượng ban đầu của kẻ săn mồi (y0):
5
>>

```

Hình 12: Cửa sổ command window

B. Mô phỏng mô hình Lotka-Volterra qua biểu đồ pha.

1. Khái quát về biểu đồ pha trong hệ động lực học:

- Trong hệ động lực học, biểu đồ pha là một công cụ trực quan để biểu diễn và phân tích các trạng thái và hành vi của hệ thống động lực theo thời gian. Biểu đồ pha thường được sử dụng để mô tả sự thay đổi của các biến trạng thái trong không gian pha, nơi mỗi điểm trên biểu đồ đại diện cho một trạng thái cụ thể của hệ thống.
- Trong không gian pha, trục hoành thường biểu diễn một biến trạng thái (ví dụ: vị trí) và trục tung biểu diễn biến trạng thái khác (ví dụ: vận tốc). Đường cong trên biểu đồ pha, được gọi là quỹ đạo pha, cho thấy cách thức các biến trạng thái này thay đổi liên quan đến nhau theo thời gian. Điều này giúp nhà nghiên cứu hiểu được động lực của hệ thống và dự đoán hành vi của nó trong tương lai dựa trên các điều kiện ban đầu.
- Biểu đồ pha cung cấp thông tin quan trọng về tính ổn định, chu kỳ, điểm cố định, và hành vi giới hạn của hệ thống. Nó là một công cụ không thể thiếu trong việc phân tích các hệ thống động lực không tuyến tính, từ hệ thống sinh học đến hệ thống cơ điện.

2. Biểu đồ pha của mô hình Lotka-Volterra

Cho bài toán giả sử:

- *Tốc độ sinh sản của con mồi (alpha) : 1.1*
- *Tốc độ săn mồi (beta): 0.4*
- *Tỷ lệ tử vong của kẻ săn mồi (gamma): 0.4*
- *Hiệu quả của việc săn mồi lên sự sinh sản của kẻ săn mồi (delta): 0.1*
- *Số lượng ban đầu của con mồi lần lượt là 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50*
- *Số lượng ban đầu của kẻ săn mồi: 5*

Với kích thước bước thời gian $h = 0.01$ (ngày), Sau 20 ngày, số lượng con mồi và kẻ săn mồi thay đổi được thể hiện qua một biểu đồ pha, chúng ta sẽ phân tích tính ổn định của hệ Lotka-Volterra bằng biểu đồ pha này.

****Code Matlab mô phỏng mô hình Lotka-Volterra bằng biểu đồ pha:*

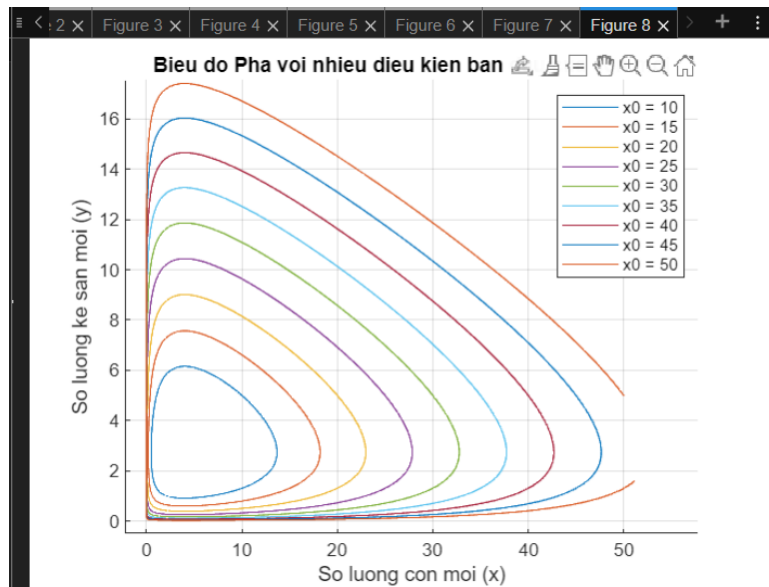
```
1 % Yeu cau nguoi dung nhap cac tham so
2 alpha = input('Nhap toc do sinh san cua con moi (alpha): ');
3 beta = input('Nhap toc do san moi (beta): ');
4 gamma = input('Nhap ty le tu vong cua ke san moi (gamma): ');
5 delta = input('Nhap hieu qua cua viec san moi len su sinh san cua
    ke san moi (delta): ');
6
7 % Khoi tao cac bien
8 h = 0.01; % Buoc thoi gian
9 n = 2000; % So buoc lap
10 x0_values = [10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50]; % Mang cac gia
    tri ban dau cua con moi
11 y0 = input('Nhap so luong ban dau cua ke san moi (y0): ');
12
13 % Ham Lotka-Volterra
14 lotkaVolterra = @(t, x, y) [alpha*x - beta*x*y; delta*x*y - gamma
    *y];
15
16 % Ve do thi pha cho moi gia tri ban dau cua con moi
17 figure; % Tao mot cua so do thi moi
18 hold on; % Giu cac duong ve tren cung mot do thi
19
20 for x0 = x0_values
21     x = zeros(1, n+1); % Mang luu gia tri con moi
22     y = zeros(1, n+1); % Mang lu gia tri ke san moi
```

```

23     x(1) = x0;
24     y(1) = y0;
25
26     % Vong lap RK4
27     for i = 1:n
28         t = (i-1)*h;
29         k1 = lotkaVolterra(t, x(i), y(i));
30         k2 = lotkaVolterra(t + h/2, x(i) + h/2*k1(1), y(i) + h/2*
            k1(2));
31         k3 = lotkaVolterra(t + h/2, x(i) + h/2*k2(1), y(i) + h/2*
            k2(2));
32         k4 = lotkaVolterra(t + h, x(i) + h*k3(1), y(i) + h*k3(2))
            ;
33
34         x(i+1) = x(i) + h/6*(k1(1) + 2*k2(1) + 2*k3(1) + k4(1));
35         y(i+1) = y(i) + h/6*(k1(2) + 2*k2(2) + 2*k3(2) + k4(2));
36     end
37
38     % Ve duong di cua moi cap gia tri ban dau
39     plot(x, y);
40 end
41
42 xlabel('So luong con moi (x)');
43 ylabel('So luong ke san moi (y)');
44 title('Bieu do Pha voi nhieu dieu kien ban dau cua con moi');
45 legend(arrayfun(@(x) ['x0 = ' num2str(x)], x0_values, '
    UniformOutput', false));
46 grid on;
47 hold off;

```


******Biểu đồ pha và cửa sổ lệnh:***



Hình 13: Biểu đồ pha trong mô hình Lotka-Volterra

```
>> lotkamorong
Nhập tốc độ sinh sản của con mồi (alpha):
1.1
Nhập tốc độ săn mồi (beta):
0.4
Nhập tỷ lệ tử vong của kẻ săn mồi (gamma):
0.4
Nhập hiệu quả của việc săn mồi lên sự sinh sản của kẻ săn mồi (delta):
0.1
Nhập số lượng ban đầu của kẻ săn mồi (y0):
5
```

Hình 14: Cửa sổ command window

IV. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN VỀ MÔ HÌNH

A. Kết quả

Mô hình Lotka-Volterra cho thấy sự dao động của số lượng con mồi và kẻ săn mồi theo thời gian. Biểu đồ mô phỏng của mô hình cho thấy sự thay đổi số lượng của hai quần thể, đồng thời thể hiện sự tăng trưởng và suy giảm luân phiên của cả hai loài.

Kết quả chi tiết:

- Tăng trưởng: Khi số lượng con mồi (x) dồi dào, kẻ săn mồi (y) có nhiều thức ăn và sinh sản nhanh chóng sẽ làm tăng số lượng (y) lên. Điều này dẫn đến việc kẻ săn mồi sẽ tiêu thụ nhiều hơn, khiến cho số lượng con mồi giảm xuống.
- Suy giảm: Khi số lượng con mồi (x) ít đi, kẻ săn mồi (y) thiếu thức ăn và số lượng cá thể sẽ giảm xuống. Việc số lượng kẻ săn mồi (y) bị giảm đi cho phép quần thể con mồi (x) được hồi phục.
- Chu kỳ lặp lại: Cả hai chu kỳ tăng trưởng và suy giảm trên sẽ được lặp lại liên tục, tạo ra dao động trong số lượng của cả hai quần thể. Biên độ dao động phụ thuộc vào giá trị của các tham số của mô hình: tỷ lệ sinh, tỷ lệ tử,...
- Cân bằng: Một số trường hợp thì mô hình sẽ đạt được trạng thái cân bằng, số lượng con mồi và kẻ săn mồi được giữ ở mức cân bằng. Tuy nhiên, trạng thái này thường không ổn định và rất dễ bị phá vỡ.
- Tuyệt chủng: Nếu tỷ lệ tử vong của quần thể con mồi do bị săn quá cao thì quần thể có thể bị tuyệt chủng. Ngược lại, nếu tỷ lệ sinh của kẻ săn mồi phụ thuộc hoàn toàn vào con mồi thì kẻ săn mồi cũng có thể bị tuyệt chủng nếu con mồi bị tuyệt chủng.

Mô hình Lotka-Volterra cung cấp cho ta một cái nhìn cơ bản về sự tương tác giữa hai quần thể ở trong một chuỗi thức ăn. Mô hình cho thấy sự dao động của số lượng cá thể của hai quần thể con mồi và kẻ săn mồi theo thời gian. Ngoài ra, có thể sử dụng mô hình Lotka-Volterra để nghiên cứu các khái niệm như tăng trưởng, suy giảm, cân bằng và tuyệt chủng.

B. Phân tích sự ổn định của mô hình

Ta có thể phân tích sự ổn định của mô hình bằng cách sử dụng các phương pháp sau:

1. Phân tích đồ thị pha:

- Quan sát hình dạng của quỹ đạo: Hình dạng của quỹ đạo cho ta biết mô hình có ổn định hay không.
 - Nếu quỹ đạo dao động quanh một giá trị trung bình, thì mô hình ổn định.
 - Nếu quỹ đạo dao động ngày càng xa giá trị trung bình, thì mô hình không ổn định.

- Nếu quỹ đạo đi vào vô cực, thì mô hình không ổn định.
- Xác định chu kỳ: Chu kỳ của mô hình cho ta biết thời gian cần thiết để số lượng con mồi và số lượng kẻ săn mồi quay trở lại giá trị ban đầu.
 - Nếu chu kỳ ngắn, thì mô hình ổn định hơn.
 - Nếu chu kỳ dài, thì mô hình ít ổn định hơn.

2. Phân tích toán học:

- Ma trận Jacobian: Ma trận Jacobian có thể được sử dụng để tính toán các giá trị riêng của hệ phương trình vi phân.
 - Nếu tất cả các giá trị riêng đều âm, thì mô hình ổn định.
 - Nếu có ít nhất một giá trị riêng dương, thì mô hình không ổn định.
- Hàm Lyapunov: hàm Lyapunov (còn gọi là Phương pháp thứ hai của Lyapunov dành cho ổn định) rất quan trọng đối với lý thuyết ổn định của các hệ thống động học và lý thuyết điều khiển cũng có thể dùng để phân tích sự ổn định trong mô hình Lotka-Volterra.

Ta lấy ví dụ biểu đồ pha ở hình 6 để phân tích:

Phân tích:

- **Điểm cố định:** Đồ thị cho thấy hai điểm cố định:
 - $(0,0)$: Đây là điểm mà cả số lượng con mồi và kẻ săn mồi đều bằng 0.
 - (x,y) : Đây là điểm mà số lượng con mồi và kẻ săn mồi đạt đến mức cân bằng. Tọa độ chính xác của điểm này không được hiển thị trong hình ảnh, nhưng có thể tính toán.
- **Ổn định:** Để xác định sự ổn định của mỗi điểm cố định, ta có thể dùng ma trận Jacobian để tính tại mỗi điểm.
- **Đồ thị:** Phân tích đồ thị cho thấy các đường cong dao động quanh điểm cố định (x,y) . Do đó, mô hình được xem là không ổn định tại điểm cố định này.

Kết luận: Mô hình Lotka-Volterra qua hình trên được mô tả là không ổn định. Các đường cong trong đồ thị cho thấy số lượng con mồi và kẻ săn mồi sẽ dao động quanh điểm cân bằng (x,y) . Điểm cân bằng (x,y) có thể tính được khi ta có đủ dữ liệu cần thiết.

C. Tác động của tham số đến mô hình

Tác động của các tham số đến mô hình Lotka-Volterra:

Mỗi tham số trong mô hình Lotka-Volterra đều có ảnh hưởng đến hành vi của hệ thống theo những cách khác nhau. Dưới đây là một số ví dụ:

- Tỷ lệ sinh (α, δ) :
 - Tăng tỷ lệ sinh (α, δ) : Dẫn đến sự gia tăng số lượng con mồi (x) và kẻ săn mồi (y) , và làm tăng biên độ dao động.

- Giảm tỷ lệ sinh (α, δ): Dẫn đến sự giảm số lượng con mồi (x) và kẻ săn mồi (y), và làm giảm biên độ dao động.
- Tỷ lệ tử vong (β, β):
 - Tăng tỷ lệ tử vong của con mồi (β): Dẫn đến sự giảm số lượng con mồi (x), và có thể dẫn đến sự tuyệt chủng của con mồi nếu giá trị β đủ cao.
 - Giảm tỷ lệ tử vong của con mồi (β): Dẫn đến sự gia tăng số lượng con mồi (x), và làm tăng biên độ dao động.
 - Tăng tỷ lệ tử vong của kẻ săn mồi (β): Dẫn đến sự giảm số lượng kẻ săn mồi (y), và có thể dẫn đến sự hồi phục của con mồi (x) nếu giá trị β đủ cao.
 - Giảm tỷ lệ tử vong của kẻ săn mồi (β): Dẫn đến sự gia tăng số lượng kẻ săn mồi (y), và làm tăng biên độ dao động.
- Giá trị ban đầu của số lượng con mồi (x_0) và kẻ săn mồi (y_0): Cũng có thể ảnh hưởng đến hành vi của hệ thống. Ví dụ, nếu số lượng con mồi ban đầu (x_0) cao, số lượng kẻ săn mồi (y) sẽ tăng nhanh chóng trong giai đoạn đầu.

Đánh giá:

- Ưu điểm:
 - Dễ hiểu và dễ thực hiện.
 - Ít tốn thời gian tính toán.
- Nhược điểm:
 - Độ chính xác thấp, đặc biệt là khi bước thời gian lớn.
 - Có thể không ổn định cho một số hệ thống.

2. Phương pháp Runge-Kutta bậc 4 (RK4)

Phương pháp RK4 là một phương pháp giải tích số tiên tiến hơn so với phương pháp Euler. Phương pháp này sử dụng bốn bước để tính toán giá trị của biến trạng thái tại các thời điểm tiếp theo.

Đánh giá:

- Ưu điểm:
 - Độ chính xác cao hơn phương pháp Euler.
 - Ổn định hơn cho một số hệ thống.
 - Có thể sử dụng bước thời gian lớn hơn phương pháp Euler.
- Nhược điểm:
 - Phức tạp hơn phương pháp Euler.
 - Tốn thời gian tính toán hơn phương pháp Euler.

3. So sánh

| Tiêu chí | Phương pháp Euler | Phương pháp RK4 |
|---------------------|----------------------|-----------------|
| Độ chính xác | Thấp | Cao |
| Ổn định | Có thể không ổn định | Ổn định |
| Thời gian tính toán | Ít tốn thời gian | Tốn thời gian |
| Phức tạp | Dễ hiểu | Phức tạp |

Kết luận: Phương pháp RK4 thường được sử dụng hơn phương pháp Euler cho mô hình Lotka-Volterra vì độ chính xác và tính ổn định cao hơn. Tuy nhiên, nếu độ chính xác không quá quan trọng và thời gian tính toán không bị hạn chế, thì phương pháp Euler có thể là lựa chọn phù hợp hơn.

V. KẾT LUẬN

A. Tóm tắt các phát hiện chính

Mô hình Lotka-Volterra, hay còn gọi là mô hình của kẻ săn mồi mô tả tương tác giữa hai loài: một loài con mồi và một loài là kẻ săn mồi. Các phát hiện chính của mô hình bao gồm:

- Dao động dân số theo chu kỳ: Một trong những phát hiện quan trọng nhất của mô hình Lotka-Volterra là sự dao động theo chu kỳ của dân số con mồi và kẻ săn mồi. Số lượng con mồi và kẻ săn mồi không ổn định mà thay đổi theo thời gian theo một mô hình dao động. Cụ thể:
 - Giai đoạn tăng trưởng con mồi: Khi số lượng con mồi tăng lên do có đủ nguồn tài nguyên (thức ăn, không gian sống), kẻ săn mồi có nhiều thức ăn hơn và số lượng kẻ săn mồi cũng bắt đầu tăng.
 - Giai đoạn suy giảm con mồi: Khi số lượng kẻ săn mồi tăng quá mức, họ tiêu thụ con mồi nhanh chóng, dẫn đến giảm số lượng con mồi. Khi số lượng con mồi giảm xuống dưới mức cần thiết, kẻ săn mồi thiếu thức ăn và bắt đầu giảm số lượng.
 - Giai đoạn phục hồi con mồi: Khi số lượng kẻ săn mồi giảm, con mồi có cơ hội phát triển trở lại, bắt đầu chu kỳ mới.
- Điểm cân bằng: Mô hình Lotka-Volterra xác định các điểm cân bằng, nơi mà số lượng con mồi và kẻ săn mồi ổn định và không thay đổi theo thời gian. Điều này xảy ra khi:
 - Tốc độ sinh sản của con mồi cân bằng với tỷ lệ tiêu thụ của kẻ săn mồi.
 - Tốc độ chết của kẻ săn mồi cân bằng với tỷ lệ săn mồi thành công và nguồn thức ăn sẵn có.
 - Điểm cân bằng này có thể được tính toán bằng cách giải hệ phương trình vi phân của mô hình Lotka-Volterra.
- Tính bền vững và ổn định: Hệ sinh thái được mô tả bởi mô hình Lotka-Volterra có thể duy trì sự ổn định nếu cả hai loài duy trì được một tỷ lệ phù hợp giữa tốc độ sinh sản của con mồi và tốc độ săn mồi của kẻ săn mồi. Tuy nhiên, hệ thống này cũng nhạy cảm với các biến đổi đột ngột:
- Sự biến động số lượng: Nếu một loài bị biến đổi đột ngột về số lượng (do dịch bệnh, thay đổi môi trường, hoặc can thiệp của con người), hệ thống có thể mất cân bằng và dẫn đến sự tuyệt chủng của một hoặc cả hai loài.
- Khả năng phục hồi: Một hệ sinh thái khỏe mạnh có khả năng phục hồi sau những biến động nhờ vào các cơ chế tự điều chỉnh của nó.
- Ảnh hưởng của các tham số mô hình: Các tham số chính trong mô hình Lotka-Volterra bao gồm:
 - Tốc độ sinh sản của con mồi: Mức độ mà con mồi có thể sinh sản và gia tăng số lượng.

- Tỷ lệ tiêu thụ của kẻ săn mồi: Mức độ mà kẻ săn mồi tiêu thụ con mồi để sống sót và phát triển.
- Tỷ lệ chết của kẻ săn mồi: Mức độ tử vong tự nhiên của kẻ săn mồi khi không có đủ thức ăn.
- Thay đổi các tham số này có thể dẫn đến các kết quả khác nhau về biên độ và chu kỳ của dao động dân số:
 - Tăng tốc độ sinh sản của con mồi: Có thể dẫn đến chu kỳ dao động ngắn hơn và biên độ dao động lớn hơn.
 - Tăng tỷ lệ tiêu thụ của kẻ săn mồi: Có thể làm tăng biên độ dao động và tạo ra sự biến động mạnh mẽ hơn trong dân số.
 - Tăng tỷ lệ chết của kẻ săn mồi: Có thể làm giảm số lượng kẻ săn mồi và tạo ra sự cân bằng mới với số lượng con mồi cao hơn.
- Ứng dụng thực tiễn: Mô hình Lotka-Volterra có nhiều ứng dụng trong quản lý tài nguyên thiên nhiên và bảo tồn sinh thái, bao gồm:
 - Quản lý quần thể động vật hoang dã: Giúp hiểu rõ hơn về cách điều chỉnh số lượng con mồi và kẻ săn mồi để duy trì sự cân bằng sinh thái.
 - Kiểm soát dịch bệnh: Mô hình có thể được điều chỉnh để mô phỏng sự lan truyền của dịch bệnh giữa các quần thể, tương tự như sự tương tác giữa con mồi và kẻ săn mồi.
 - Nông nghiệp và thủy sản: Giúp quản lý sự tương tác giữa các loài cây trồng, vật nuôi, và các loài gây hại.

B. Hạn chế của mô hình

Mặc dù mô hình Lotka-Volterra là một công cụ hữu ích để hiểu về động lực học giữa con mồi và kẻ săn mồi, nó cũng có nhiều hạn chế. Các hạn chế chính của mô hình này bao gồm:

- Giả định về Tỷ lệ Sinh sản và Tử vong Không Thay đổi:
 - Mô hình giả định rằng tỷ lệ sinh sản của con mồi và tỷ lệ tử vong của kẻ săn mồi là không thay đổi và không phụ thuộc vào mật độ dân số của chính chúng hoặc các yếu tố môi trường khác. Trong thực tế, các tỷ lệ này thường thay đổi theo điều kiện môi trường và mật độ dân số.
- Giả định về Môi trường Đồng Nhất: Mô hình giả định rằng môi trường sống là đồng nhất và không thay đổi theo thời gian, tức là không có biến đổi về không gian và thời gian trong môi trường sống của con mồi và kẻ săn mồi. Tuy nhiên, môi trường thực tế thường có sự biến đổi lớn, ảnh hưởng đến khả năng sinh sản, tử vong và tương tác giữa các loài.
- Không xem xét đến sự đa dạng loài: Mô hình Lotka Volterra chỉ xem xét đến sự tương tác giữa hai loài: một loài con mồi và một loài kẻ săn mồi. Thế nhưng trong thực tế các hệ sinh thái thường bao gồm nhiều loài và các tương tác phức tạp giữa chúng, bao gồm cả sự cạnh tranh nội loài và ngoại loài.
- Không xem xét đến các yếu tố ngẫu nhiên: Mô hình không xem xét đến các yếu tố ngẫu nhiên, chẳng hạn như các biến cố ngẫu nhiên có thể ảnh hưởng đến dân số như thiên tai, dịch bệnh, hay biến đổi khí hậu. Các yếu tố này có thể gây ra các biến động lớn trong dân số mà mô hình không dự đoán được.

- Giả định về Sự Hiệu Quả Săn Mồi Không Đổi: Mô hình giả định rằng kẻ săn mồi có hiệu quả săn mồi không đổi, nghĩa là tỷ lệ con mồi bị bắt không thay đổi theo thời gian hoặc mật độ con mồi. Trong thực tế, hiệu quả săn mồi có thể thay đổi tùy thuộc vào kinh nghiệm săn mồi, thay đổi trong kỹ năng hoặc chiến lược săn mồi, và sự thay đổi trong hành vi của con mồi.
- Không Xem Xét Đến Hiệu Ứng Thời Gian Trì Hoãn: Mô hình giả định rằng các phản ứng của dân số con mồi và kẻ săn mồi đối với thay đổi dân số của nhau là tức thời. Trong thực tế, có thể có sự trì hoãn trong các phản ứng này do thời gian cần thiết để sinh sản, trưởng thành, hoặc phản ứng sinh lý khác.
- Giả định Tuyến Tính trong Mối Quan Hệ Giữa Con Mồi và Kẻ Săn Mồi: Mô hình giả định một mối quan hệ tuyến tính giữa con mồi và kẻ săn mồi. Tuy nhiên, trong thực tế, mối quan hệ này có thể phi tuyến tính do nhiều yếu tố như hành vi của loài, sự phát triển của quần thể, và các yếu tố môi trường.
- Không Xem Xét Đến Các Yếu Tố Sinh Thái Khác: Mô hình không xem xét đến các yếu tố sinh thái khác có thể ảnh hưởng đến tương tác giữa con mồi và kẻ săn mồi, chẳng hạn như sự có mặt của các loài cạnh tranh khác, sự biến đổi theo mùa, và các yếu tố môi trường khác như nguồn tài nguyên, khí hậu, và thảm thực vật.

* Kết luận:

Mặc dù mô hình Lotka-Volterra cung cấp một khung lý thuyết cơ bản để hiểu về tương tác giữa con mồi và kẻ săn mồi, nó có nhiều hạn chế cần được khắc phục hoặc mở rộng trong các mô hình phức tạp hơn để phản ánh chính xác hơn các động lực học của hệ sinh thái thực tế.

Tài liệu tham khảo

Tài liệu tham khảo

1. Wikipedia contributors. (n.d.). *Phương trình Lotka–Volterra*. Trong Wikipedia tiếng Việt. Truy cập ngày 20 tháng 5 năm 2024, từ https://vi.wikipedia.org/wiki/Ph%C6%B0%C6%A1ng_tr%C3%ACnh_Lotka%E2%80%93Volterra.
2. Wikipedia contributors. (n.d.). *Detailed descriptions about the prey/predators per capita growth rate*. Wikipedia, Lotka-Volterra equations, May 21st 2024, https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%93Volterra_equations
3. Strogatz, S. H. (2014). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview Press.
4. Lotka, A.J., *Elements of Physical Biology*, Williams and Wilkins, (1925)
5. May, R. M. (1974). *Stability and complexity in model ecosystems*. Princeton University Press.
6. Hairer, E., Norsett, S. P., & Wanner, G. (1993). *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Springer-Verlag.
7. Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.
8. Cao, V. T. (2010). *Phương pháp Runge-Kutta và ứng dụng*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.
9. Wikipedia contributors. (n.d.). *Phase diagram*. Trong Wikipedia, The Free Encyclopedia. Truy cập ngày 20 tháng 5 năm 2024, từ https://en.wikipedia.org/wiki/Phase_diagram^[1]^[1].
10. An Analysis on The Lotka-Volterra Food Chain Model: Stability
11. E. Chauvet, J.E. Paullet, J.P. Previte, Z. Walls, A Lotka Volterra Three Species Food Chain, *Mathematics Magazines*, Vol. 75(4), (2002), 243-255.
12. Lotka–Volterra equation ((anonymous) (awb.fyi))
13. Math 636 - Mathematical Modeling - Continuous Models Lotka-Volterra (sdsu.edu)