ĐẠI HỌC SÀI GÒN

Khoa Toán-Ứng dụng

CẤU TRÚC RỜI RẠC (858004, Số TC: 3)
Chương 3: Lý thuyết tập hợp - Quan hệ - Ánh xạ
(Bản thảo còn chỉnh sửa)

PGS.TS. Tạ Quang Sơn
Email: tqson09@gmail.com

Tài liệu học tập

[1] Keith Delvin, Set, Functions and Logic, Chapman & Hall, Newyork,1992

[2] Micheal L' Oleary, A first course in Mathematics and Set Theory, John Wiley & Sons, USA, 2016

[3] Phan Hữu Chân & Trần Lâm Hách, Nhập môn Lý thuyết tập hợp và Logic, NXB Giáo dục, 1977.

[4] D. Bonevac, N.M. Asher, R.C. Koons, Logic, Sets and Functions, Kelldan Hult Publisher Company, USA, 1999.

[5] Igor Lavrov et al., Problems in Set Theory, Mathematical Logic and The Theory of Algorithms, Kluwer Academic, 2003

Nội dung I

1. Lý thuyết tập hợp
   - Tập hợp
   - Mô tả một tập hợp
   - Tập con, tập hợp bằng nhau, tập rỗng
   - Tập hợp các phần của một tập hợp
   - Các phép toán trên tập hợp
     - Hợp của các tập hợp
     - Giao của các tập hợp
     - Phần bù của một tập hợp
     - Hiệu của hai tập hợp
   - Sơ đồ Venn
   - Khoảng số thực
   - Hợp tùy ý và giao tùy ý của các tập hợp
     - Hợp của một họ (vô hạn) các tập hợp
     - Giao của một họ (vô hạn) các tập hợp

Nội dung II

- Tập hợp tích (tích Descartes)

2. Quan hệ
    - Các định nghĩa
    - Các phép toán trên các quan hệ
    - Các loại quan hệ
    - Quan hệ tương đương
    - Quan hệ thứ tự
    - Thứ tự từ điển

3.1. Lý thuyết tập hợp
3.1.1. Tập hợp

• Khái niệm *tập hợp* hay *lớp* các đối tượng là một trong những khái niệm cơ bản của toán học. Không có định nghĩa cho tập hợp nhưng hoàn toàn chúng ta có thể nhận thức được khái niệm này.

• Ví dụ, chúng ta thường nói:
-Tập hợp các sinh viên của lớp học này.
-Tập hợp các ước số của 10.
-Tập hợp những tình nguyện viên của trường Đại học X.

• Một tập hợp được xác định thông qua tính chất hay thuộc tính của tập hợp. Ký hiệu A là một tập hợp:

- Để chỉ x thuộc tập hợp A, ta viết $x \in A$
- Để chỉ x không thuộc tập hợp A, ta viết $x \notin A$.

Các tập hợp số quen thuộc

Các tập hợp sau đây là các tập hợp quen thuộc trong toán học:
$\mathbb{N}$: tập các số tự nhiên, gồm các số 0, 1, 2, 3,...
$\mathbb{Z}$: tập các số nguyên, gồm các số ...-3, -2 ,-1, 0, 1, 2, 3, ...
$\mathbb{Q}$: tập các số hữu tỉ, tức là tập hợp các phân số.
$\mathbb{R}$: tập số các thực.
Chú ý:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Ngoài ra còn có
$\mathbb{C}$ là ký hiệu tập các số phức và
$\mathbb{I}$ ký hiệu tập số vô tỉ (Irrational number).
Số vô tỉ là số thực nhưng không phải là số hữu tỉ.
Ví dụ các số sau đây là vô tỉ: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \ldots$.

3.1.2. Mô tả tập hợp

Để mô tả tập hợp ta có thể dùng ký hiệu $\{\ldots\}$ như các cách sau đây:

• Nếu số lượng phần tử của tập hợp là ít, ta có thể dùng kiểu liệt kê, ví dụ

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{a, b, c\}$$

• Có thể dùng thêm dấu ba chấm $\ldots$ để có thể liệt kê nhiều hơn các phần tử, ví dụ

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 50\}, \{a, b, c, \ldots, z\}$$

• Đối với tập vô hạn, ta cũng có thể dùng thêm dấu ba chấm về cuối để mô tả, ví dụ

$$\{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}, \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

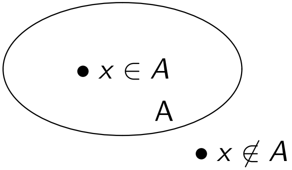
- Tập hợp còn được mô tả bởi thuộc tính. Ví dụ để chỉ tập hợp các số tự nhiên là số lẻ, ta viết

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k+1, k \in \mathbb{N}\},$$

để chỉ tập số nguyên dương, ta có thể viết

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}.$$

- Về mặt hình học, có thể mô tả phần tử thuộc hay không thuộc tập hợp theo cách sau:



Hình 3.1-Tập hợp và phần tử của tập hợp

3.1.3. Tập con, tập hợp bằng nhau, tập rỗng

• Tập hợp A được gọi là tập con của tập hợp B nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B, ta viết

$$A \subseteq B \text{ hay } B \supseteq A.$$

• Để chỉ rõ A là tập con thực sự của tập hợp B ta dùng ký hiệu

$$A \subset B \text{ hay } B \supset A.$$

• Nếu giữa hai tập hợp A và B có các quan hệ $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$ thì ta gọi đó là hai tập hợp bằng nhau (mỗi phần tử của tập hợp này cũng là phần tử của tập hợp kia và ngược lại) và ký hiệu $A = B$.

Chú ý 1.1

Để chứng minh $A = B$ ta phải chứng minh rằng

$$(\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Ví dụ 1.1

Ví dụ sau đây mô tả sự bằng nhau giữa các tập hợp.

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\} \\
\mathbb{Q} &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists m, n \in \mathbb{Z}, n > 0, nx = m\} \\
\{-1, 1\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\} \\
\{1, 2, 3, 4, 5\} &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.2 (Tập hợp mà phần tử của nó là tập hợp)

Gọi H là tập hợp các lớp tứ giác có hai đường chéo bằng nhau, V là lớp các hình vuông, T là lớp các hình thoi, CN là lớp các hình chữ nhật. Ta có

$$H = \{V, T, CN\}.$$

Ký hiệu tập hợp rỗng là $\emptyset$ hay $\{\}$. Tập hợp rỗng là tập hợp duy nhất chứa trong mọi tập hợp khác rỗng:

Mệnh đề 1.1

$$\emptyset \subset A, \ \forall A \neq \emptyset.$$

Ví dụ 1.3 (Vài ví dụ về tập rỗng)

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset,$$
$$\{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 1\} = \emptyset.$$

Chú ý 1.2

$$\emptyset \neq \{\emptyset\}.$$

Tập rỗng, $\emptyset$, không có phần tử nào. Trong khi đó tập hợp $\{\emptyset\}$ có một phần tử.

3.1.4. Tập hợp các phần của một tập hợp

Tập hợp các phần của một tập hợp X cho trước, ký hiệu $\mathcal{P}(X)$, là tập hợp gồm tất cả các tập hợp con của tập hợp đó.

Ví dụ 1.4

Cho $X = \{1, 2, 3\}$.

$$\mathcal{P}(X) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\Big\}$$

☛ Thảo luận 1.1

Một tập hợp X có n phần tử thì tập hợp $\mathcal{P}(X)$ có 2^n phần tử. Tại sao?

3.1.5. Các phép toán trên tập hợp
3.1.5.1. Hợp của các tập hợp

Xét một không gian X và trên không gian này xét hai tập hợp A và B. Ta xây dựng các phép toán giữa các tập hợp như sau:
Hợp của A và B là một tập hợp ký hiệu bởi $A \cup B$ được định nghĩa bởi

$$A \cup B := \{x \in X \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Đó là tập có tính chất mỗi phần tử hoặc thuộc A hoặc thuộc B.

Ví dụ 1.5

Trên không gian các tập số tự nhiên $\mathbb{N}$, *cho* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *và* $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Ví dụ 1.6

Trên không gian các tập số thực $\mathbb{R}$, cho

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}, \; B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 7\}.$$

Ta có,

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 7\}.$$

3.1.5.2. Giao của các tập hợp

Giao của A và B, ký hiệu bởi $A \cap B$, được định nghĩa là một tập hợp mà mỗi phần tử đều thuộc cả hai tập hợp.

$$A \cap B := \{x \in X \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Hai tập hợp gọi là phân biệt (rời nhau) khi $A \cap B = \emptyset$.

Ví dụ 1.7

Với A và B là các tập hợp nói trong ví dụ 1.5, ta có

$$A \cap B = \{3, 4, 5\}.$$

Với A và B là các tập hợp nói trong ví dụ 1.6, ta có

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}.$$

3.1.5.3. Phần bù của một tập hợp

Khi đã xác định một không gian X, với một tập hợp A cho trước ta có thể xét đến tập hợp các phần tử không thuộc A. Tập hợp ấy ký hiệu là A' và gọi là phần bù của tập hợp đã cho

$$A' = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

Phần bù của tập hợp A còn có thể ký hiệu $\bar{A}$ hay $X \setminus A$.

Ví dụ 1.8

Xét $X = \mathbb{N}$. Gọi $2\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên chẵn, $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$. Ta có

$$(2\mathbb{N})' = \{1, 3, 5, 7, \dots\}.$$

Định lý 1.1

Trên X, xét các tập con A, B, C, ta có các kết quả sau đây:

$$
\begin{array}{rlcll}
1) & A\cup(B\cup C) & = & (A\cup B)\cup C & \textit{luật kết hợp}\\
2) & A\cap(B\cap C) & = & (A\cap B)\cap C & \textit{nt}\\
3) & A\cup B & = & B\cup A & \textit{luật giao hoán}\\
4) & A\cap B & = & B\cap A & \textit{nt}\\
5) & A\cup(B\cap C) & = & (A\cup B)\cap(A\cup C) & \textit{luật phân phối}\\
6) & A\cap(B\cup C) & = & (A\cap B)\cup(A\cap C) & \textit{nt}\\
7) & (A\cup B)' & = & A'\cap B' & \textit{luật De Morgan}\\
8) & (A\cap B)' & = & A'\cup B' & \textit{nt}\\
9) & A\cup A' & = & X & \textit{luật bù}\\
10) & A\cap A' & = & \emptyset & \textit{nt}\\
11) & (A')' & = & A &
\end{array}
\tag{1}
$$

3.1.5.4. Hiệu của hai tập hợp

Hiệu của hai tập hợp A và B là một tập hợp ký hiệu bởi $A \setminus B$ và được định nghĩa là tập hợp gồm các phần tử thuộc A mà không thuộc B.

$$A \setminus B := \{x \in X \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Ví dụ 1.9

Với A và B là các tập hợp nói trong ví dụ 1.5, ta có

$$A \setminus B = \{1, 2\}.$$

Với A và B là các tập hợp nói trong ví dụ 1.6, ta có

$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\} = [1, 2).$$

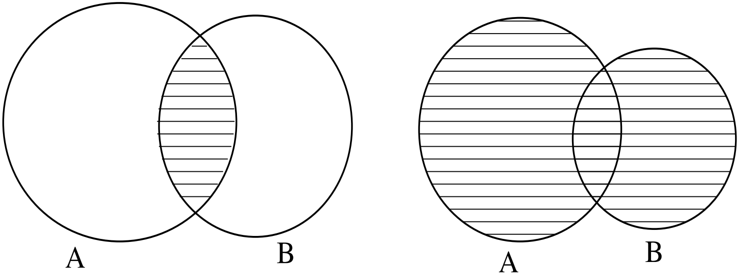
☛ Thảo luận 1.2

Về một mặt nào đó giữa các phép toán số học, phép suy luận logic và phép toán trên các tập hợp có sự tương đồng như bảng dưới đây:

Số học	*Logic*	*Tập hợp*
$m + n$	$p \vee q$	$A \cup B$
$m \times n$	$p \wedge q$	$A \cap B$
$-n$	$\neg q$	A'

3.1.6. Sơ đồ Venn

Để biểu diễn một tập hợp ta dùng phần bên trong của khoanh tròn để mô tả tập hợp đó. Khi cần mô tả cả không gian X ta dùng hình chữ nhật. Khi đó phần bên ngoài của khoanh tròn A xét trong hình chữ nhật X là phần bù cuả tập hợp A.



Hình 3.3 - Giao và hợp của hai tập hợp

3.1.7. Khoảng số thực

- Cho $a, b \in \mathbb{R}$ với $a < b$. Ta gọi khoảng đóng $[a, b]$ (có tài liệu gọi là đoạn) là tập hợp

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

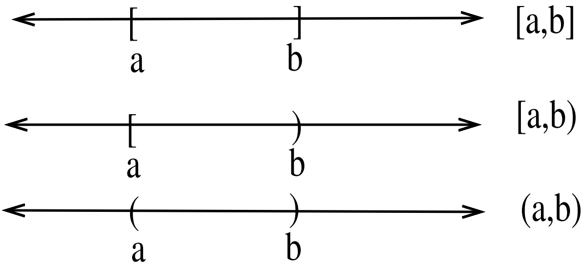
khoảng mở (a, b) là tập hợp

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Chú ý rằng đối với khoảng đóng $[a, b]$, các điểm a và b đều thuộc vào khoảng đó. Đối với khoảng mở (a, b), các điểm a và b không thuộc vào khoảng đó.
Các khái niệm trên được mở rộng ra khái niệm nửa khoảng mở (hay nửa khoảng đóng):

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



Hình 3.4 - Hình ảnh hình học của vài tập hợp số

Cuối cùng ta có khái niệm các nửa khoảng vô hạn:

$$\begin{aligned} [a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\ (-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \\ (a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\ (-\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \end{aligned}$$

Chú ý rằng ∞ không phải là một số. Vì vậy ký hiệu này không thể gắn liền với các dấu ngoặc vuông [hay]. Ký hiệu ∞ dùng để chỉ một số dương rất lớn không xác định, ký hiệu $-\infty$ được dùng cho số âm với nghĩa tương ứng.

3.1.8. Hợp tùy ý và giao tùy ý của các tập hợp

- Các phép toán hợp và giao của các tập hợp nói chung, chỉ đúng khi số các tập hợp là hữu hạn. Ví dụ, để tính tập hợp

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n$$

ta có thể lấy hợp từng bộ phận lại:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n = (((A_1 \cup A_2) \cup \ldots) \cup A_{n-1}) \cup A_n.$$

- Cũng như vậy, để tính giao của tập hợp

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n$$

ta cũng có thể lấy giao với từng bộ phận:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n = (((A_1 \cap A_2) \cap \ldots) \cap A_{n-1}) \cap A_n.$$

- Vô hạn tập hợp: Xét các ví dụ dưới đây. Với mỗi $i \in \mathbb{N}$, đặt

$$A_i = \left[-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right].$$

Ta có:

$$A_1 = [-1, 1], A_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], A_3 = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \ldots$$

Ta được một họ vô hạn các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$

- Dạng đánh số khác: Với mỗi số thực $r \geq 0$ (ký hiệu $\mathbb{R}_+$ chỉ tập hợp các số thực không âm), đặt

$$X_r = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x \leq r\}.$$

Khi r thay đổi, ta lại được một tập hợp khác. Rõ ràng rằng ta được một họ vô hạn các tập hợp nhưng các tập hợp này không thể đánh số liệt kê như hai trường hợp trước.

3.1.8.1. Hợp của một họ (vô hạn) các tập hợp

Hợp của họ các tập hợp $\{A_i \mid i \in I\}$ là một tập hợp gồm các phần tử mà mỗi phần tử này phải thuộc ít nhất một tập hợp của họ. Ký hiệu hợp các tập hợp của họ này là

$$\bigcup_{i \in I} A_i.$$

Vậy:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{a \mid \exists i \in I, a \in A_i\}. \tag{2}$$

3.1.8.2. Giao của một họ (vô hạn) các tập hợp

Giao của họ các tập hợp $\{A_i \mid i \in I\}$ là một tập hợp gồm các phần tử mà mỗi phần tử này phải thuộc mọi tập hợp của họ. Ký hiệu:

$$\bigcap_{i \in I} A_i.$$

Vậy:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{a \mid \forall i \in I, a \in A_i\}. \tag{3}$$

Hợp và giao vô hạn các tập hợp được hiểu khi tập I là tập vô hạn.

Định lý 1.2

Cho họ các tập hợp $\{A_i \mid i \in I\}$ với I là tập các chỉ số. Với bất kỳ $i_0 \in I$, ta có

$$A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \text{ và } \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0}.$$

Định lý 1.3

Cho họ các tập hợp $\{A_i \mid i \in I\}$ với I là tập các chỉ số và B là một tập hợp tùy ý (tất các các tập hợp xét trên không gian X nào đó). Khi đó

i) $B \cup \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(B \cup A_i)$

ii) $B \cap \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(B \cap A_i)$

iii) $B \cap \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)$

iv) $B \cup \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i)$

v) $(\bigcup_{i\in I} A_i)' = \bigcap_{i\in I} A_i'$

vi) $(\bigcap_{i\in I} A_i)' = \bigcup_{i\in I} A_i'$

3.1.9. Tập hợp tích

Cặp có thứ tự: Cặp tạo bởi a và b, ký hiệu bởi (a, b), có tính chất

$$(a, b) = (x, y) \Leftrightarrow (a = x) \wedge (b = y).$$

Cặp (a, b) và (b, a) nói chung là khác nhau.
Tích Descartes: Cho trước hai tập hợp khác rỗng A và B, tích Descartes của A và B là tập hợp được ký hiệu và định nghĩa bởi

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

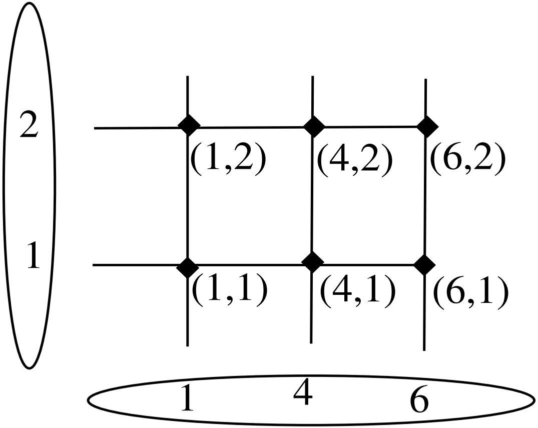
Chú ý rằng $A \times B \neq B \times A$.

Ví dụ 1.10

Cho $A = \{1, 2\}, B = \{1, 4, 6\}$. Khi đó

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 4), (2, 6)\},$$

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (4, 1), (4, 2), (6, 1), (6, 2)\}.$$



Hình 3.5 - Tích Descartes của hai tập hợp

Định lý 1.4

Cho các tập hợp A, B, C, D. Ta có:

i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,

ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,

iii) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,

iv) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Tích Descartes của n tập hợp:

Cho n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Tích Descartes của n tập hợp, ký hiệu bởi $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, là tập hợp gồm các bộ n phần tử có thứ tự được định nghĩa như sau:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Tập $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ còn được viết gọn bởi $\Pi_{i=1}^{n} A_i$.

☛ Thảo luận 1.3

Nếu tập hợp A có m phần tử, tập hợp B có n phần tử thì tập hợp $A \times B$ có bao nhiêu phần tử? Mở rộng nếu A_1 có n_1 phần tử, A_2 có n_2 phần tử, ..., A_k có n_k phần tử thì tập $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ có bao nhiêu phần tử?

3.2. Quan hệ hai ngôi
3.2.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 2.1

Cho A và B là hai tập hợp khác rỗng. Ta gọi một quan hệ từ A vào B là một tập con của tập hợp tích $A \times B$.

$$\mathcal{R} \text{ là quan hệ từ } A \text{ vào } B \Leftrightarrow \mathcal{R} \subset A \times B.$$

Khi $A = B$, ta gọi $\mathcal{R}$ là quan hệ trên A.

Ví dụ 2.1 (Cho $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.)

$\mathcal{R}_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5)\}$ *là một quan hệ của $A \times B$ vì mọi phần tử của $\mathcal{R}$ đều thuộc $A \times B$.*
$\mathcal{R}_2 = \{(1, 2), (2, 3), (5, 1)\}$ *không phải là một quan hệ của $A \times B$ vì phần tử $(5, 1)$ của $\mathcal{R}_2$ không thuộc $A \times B$.*

Chú ý 2.1

Với quan hệ $\mathcal{R}$ cho trước, khi $(a, b) \in \mathcal{R}$, ta viết $a\mathcal{R}b$. Khi đó

$$\mathcal{R} := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a\mathcal{R}b\}.$$

Định nghĩa 2.2

Cho trước một quan hệ $\mathcal{R}$. Miền xác định và miền giá trị của quan hệ $\mathcal{R}$, tương ứng ký hiệu là dom$\mathcal{R}$ và rge$\mathcal{R}$, được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}\mathcal{R} &:= \{a \mid a \in A, \exists b \in B, (a, b) \in \mathcal{R}\} \\ \mathrm{rge}\mathcal{R} &:= \{b \mid b \in B, \exists a \in A, (a, b) \in \mathcal{R}\}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.2

Cho tập hợp tích Descartes $A \times B$ với A và B nói trong Ví dụ 2.1. Gọi $\mathcal{R}$ là quan hệ trên $A \times B$ sao cho $a\mathcal{R}b$ nếu a là ước nguyên tố của b. Khi đó:

$$\mathcal{R} = \{(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6)\}.$$

$$\mathrm{dom}\mathcal{R} = \{2,3\},$$

$$\mathrm{rge}\mathcal{R} = \{2,3,4,6\}.$$

Định nghĩa 2.3

Cho trước một quan hệ $\mathcal{R}$, ta gọi quan hệ ngược của $\mathcal{R}$, ký hiệu $\mathcal{R}^{-1}$, là tập hợp

$$\mathcal{R}^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}.$$

Ví dụ 2.3

Với tập tích $A \times B$ và quan hệ $\mathcal{R}_1$ nói trong ví dụ 2.1,
$\mathcal{Q}_1 = \{(2,1),(3,2),(5,3)\}$ là quan hệ ngược của quan hệ $\mathcal{R}_1$.
$\mathcal{Q}_2 = \{(2,1),(3,2),(3,4)\}$ không phải là quan hệ ngược của $\mathcal{R}_1$ vì với phần tử $(3,4)$ thì của $(4,3) \notin \mathcal{R}_1$.

3.2.2. Các phép toán trên các quan hệ

Cho $\mathcal{R}$ và $\mathcal{S}$ là hai quan hệ.
i) Hợp của hai quan hệ $\mathcal{R}$ và $\mathcal{S}$, ký hiệu $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, được định nghĩa bởi

$$(\forall x, y), (x, y) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R} \vee (x, y) \in \mathcal{S}.$$

ii) Giao của hai quan hệ $\mathcal{R}$ và $\mathcal{S}$, ký hiệu $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$, được định nghĩa bởi

$$(\forall x, y), (x, y) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R} \wedge (x, y) \in \mathcal{S}.$$

iii) Hiệu của quan hệ $\mathcal{R}$ với $\mathcal{S}$, ký hiệu $\mathcal{R} - \mathcal{S}$, (hay $\mathcal{R} \setminus \mathcal{S}$) được định nghĩa bởi

$$(\forall x, y), (x, y) \in \mathcal{R} - \mathcal{S} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R} \wedge (x, y) \notin \mathcal{S}.$$

3.2.3. Các loại quan hệ

Chúng ta quan tâm một số quan hệ và tập hợp tương ứng sau đây:

Quan hệ	Tập hợp
ρ_1: {(1,1), (2,2), (2,4), (4,4)}	$A = \{1, 2, 4\}$
ρ_1': {(1,1), (2,2), (2,4)}	
ρ_2: "nhỏ hơn"	$\mathbb{R}$
ρ_3: $\perp$	Tập hợp đường thẳng trong mặt phẳng
ρ_4: $\parallel$	Tập hợp đường thẳng trong mặt phẳng
ρ_5: "là cha của"	Tập hợp người
ρ_6: "là bạn của"	Tập hợp người
ρ_7: "chia hết cho"	Tập hợp số tự nhiên

Chữ $\mathcal{R}$ là viết tắt của chữ Relation.

Định nghĩa 2.4

(Tính phản xạ) *Cho $\mathcal{R}$ là một quan hệ trên tập hợp A, quan hệ $\mathcal{R}$ được gọi là có tính phản xạ nếu với mỗi $a \in A$, $a\mathcal{R}a$.*

Ví dụ 2.4

Xét các quan hệ $\rho_1 - \rho_6$ trên tập hợp A nói trên.

i) ρ_1 *có tính phản xạ trên A, $\rho_1^{'}$ không phản xạ trên A vì $4 \in A$ nhưng $(4,4) \notin \rho_1^{'}$*

ii) ρ_2 *không có tính phản xạ.*

iii) ρ_3 *không có tính phản xạ.*

iv) ρ_4 *có tính phản xạ (nếu cho phép xem các đường thẳng trùng nhau là song song với chính nó).*

v) ρ_5 *không có tính phản xạ.*

vi) ρ_6 *không có tính phản xạ.*

vii) ρ_7 *có tính phản xạ.*

Định nghĩa 2.5

(Tính đối xứng) *Quan hệ $\mathcal{R}$ trên một tập hợp A được gọi là có tính đối xứng nếu với $a, b \in A$ mà $a\mathcal{R}b$ thì $b\mathcal{R}a$.*

Ví dụ 2.5

Xét các quan hệ $\rho_1 - \rho_6$.

i) ρ_1 *không có tính đối xứng trên A vì* $(2, 4) \in \rho_1$ *nhưng* $(4, 2) \notin \rho_1$.

ii) ρ_2 *không có tính đối xứng.*

iii)+iv) ρ_3, ρ_4 *có tính đối xứng*

v) ρ_5 *không có tính đối xứng.*

vi) ρ_6 *có tính đối xứng.*

vii) ρ_7 *không có tính đối xứng.*

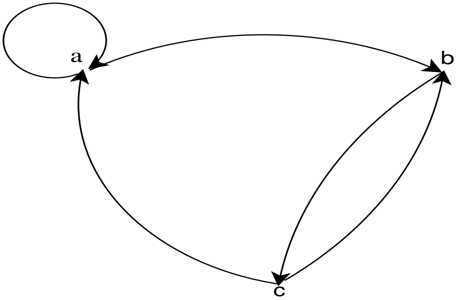
Định nghĩa 2.6

(Tính bắc cầu) *Quan hệ $\mathcal{R}$ trên một tập hợp A được gọi là có tính bắc cầu nếu với $a, b, c \in A$ mà $a\mathcal{R}b$ và $b\mathcal{R}c$ thì $a\mathcal{R}c$.*

Ví dụ 2.6

Xét các quan hệ $\rho_1 - \rho_6$.
i) ρ_1 *có tính bắc cầu trên A,*
ii) ρ_2 *có tính bắc cầu.*
iii) ρ_3 *không có tính bắc cầu*
iv) ρ_4 *có tính bắc cầu.*
v)+vi) ρ_5 *và* ρ_6 *không có tính bắc cầu.*
vii) ρ_7 *có tính bắc cầu.*

Với một quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập hợp A, chúng ta có thể dùng đồ thị để biểu diễn nó. Ví dụ với $A = \{a, b, c\}$ và $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (c, a)\}$, chúng ta có thể mô tả bởi đồ thị sau đây



Hình 3.6 - Quan hệ và đồ thị

3.2.4. Quan hệ tương đương

Định nghĩa 2.7

(Quan hệ tương đương - Lớp tương đương)
Quan hệ $\mathcal{R}$ trên một tập hợp A được gọi là quan hệ tương đương nếu có các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.
Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên A. Với $a \in A$, ta gọi lớp tương đương của a, ký hiệu [a], là tập hợp $\{b \in A \mid a\mathcal{R}b\}$.

Ví dụ 2.7

Quan hệ ρ_4 là quan hệ tương đương. Với một đường thẳng d cho trước trong mặt phẳng, lớp tương đương của d là tập tất cả các đường thẳng song song với nó.

Ví dụ 2.8

Trong mặt phẳng, xét tập hợp tất cả các tam giác và quan hệ đồng dạng giữa các tam giác. Quan hệ này là một quan hệ tương đương. Với một tam giác cho trước, lớp tương đương của tam giác này là tập hợp tất cả các tam giác đồng dạng với tam giác đó.

Định lý 2.1

Cho A là tập hợp khác rỗng và $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên A.

i) *Với mọi $a \in A$, $[a] \neq \emptyset$.*

ii) *Với $a, b \in A$, $[a] = [b]$ khi và chỉ khi $a\mathcal{R}b$.*

iii) *Với mọi $a, b \in A$, hoặc là $[a] = [b]$ hoặc là $[a] \cap [b] = \emptyset$.*

Ví dụ 2.9

Trên tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$. Xét quan hệ như sau $a\mathcal{R}b$ nếu $(a-b) \vdots 3$. Rõ ràng rằng $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên Z. Các lớp tương đương là

$[1] = \{\ldots - 5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$
$[2] = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$
$[3] = \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 6, \ldots\}$
$[4] = \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$

Lớp $[4] = [1]$. Tiếp tục khảo sát sẽ có $[5] = [2]$, $[6] = [3]$, $\ldots$ Quan hệ nầy chia tập hợp $\mathbb{Z}$ thành 3 lớp: $[0], [1]$, và $[3]$.

Định lý 2.2 (Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên một tập hợp A.)

Ta có

$$\bigcup_{a\in A}[a] = A.$$

3.2.5. Quan hệ thứ tự

Định nghĩa 2.8

(Tính phản xứng) *Quan hệ $\mathcal{R}$ trên một tập hợp A được gọi là có tính phản xứng nếu $a, b \in A$ mà $a\mathcal{R}b$ và $b\mathcal{R}a$ thì $a = c$.*

Ví dụ 2.10

Trên tập các số thực $\mathbb{R}$, ta xét quan hệ

$$x\mathcal{R}y := x \leq y.$$

Quan hệ này có tính phản xứng vì $x \leq y$ và $y \leq x$ kéo theo $x = y$.

Định nghĩa 2.9 (Quan hệ thứ tự)

Quan hệ $\mathcal{R}$ trên một tập hợp A được gọi là quan hệ thứ tự nếu có các tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu.
Nếu tồn tại một cặp (a, b) mà $(a, b) \notin \mathcal{R}$ hay $(b, a) \notin \mathcal{R}$ thì ta nói $\mathcal{R}$ là quan hệ thứ tự bộ phận. Ngược lại gọi là thứ tự toàn phần.

Ví dụ 2.11

Trên tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$, khảo sát xem quan hệ chia hết có là quan hệ thứ tự hay không?

Tính phản xạ: Với mọi $x \in \mathbb{Z}$, x chia hết x.
Tính phản xứng: Với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$, x chia hết y và y chia hết x thì hiển nhiên $x = y$.
Tính bắc cầu: Với mọi $x, y, z \in \mathbb{Z}$, x chia hết y và y chia hết z thì hiển nhiên x chia hết z.
Chia hết là q. hệ thứ tự bộ phận (không có mọi x đều chia hết y).

Ví dụ 2.12

Cho $A = \{1, 2, 3\}$ *và* $X = \mathcal{P}(A)$:

$$X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Xác định một quan hệ $\mathcal{R}$ *trên* X *như sau:*

$$(T, V) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow T \subseteq V.$$

Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ *là quan hệ thứ tự bộ phận.*

Dễ dàng kiểm chứng được quan hệ $\mathcal{R}$ nêu trên thỏa mãn các tính chất phản xạ, phản đối xứng, và bắc cầu nên nó là quan hệ thứ tự trên X. Ngoài ra có thể thấy có những tập hợp không so sánh được với nhau, chẳng hạn $\{1, 2\} \not\subset \{1, 3\}$ và $\{1, 3\} \not\subset \{1, 2\}$, nên $\mathcal{R}$ là quan hệ thứ tự bộ phận.

3.2.6. Thứ tự từ điển

Định nghĩa 2.10

Cho trước một tập hợp S có thứ tự, một thứ tự từ điển $\preceq$ xác định trên các chuỗi các phần tử của S được định nghĩa như sau: Với $a = a_1a_2a_3\ldots a_m$ và $b = b_1b_2b_3\ldots b_n$ (các $a_i, b_j \in S$).

$$(a \prec b) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 < b_1,\ \textit{hoặc là} \\ a_i = b_i \textit{với } 1 \le i \le k \textit{ và } a_{k+1} < b_{k+1},\ \textit{hoặc là} \\ a_i = b_i \textit{với } 1 \le i \le m \textit{ và } m < n. \end{array}\right.$$

Ví dụ 2.13

Xét các chuỗi $(2, 3, 4), (2, 1, 5), (2, 3, 7, 5), (2, 3, 7)$. Sắp xếp theo thứ tự từ điển, ta có

$$(2, 1, 5) \prec (2, 3, 4) \prec (2, 3, 7) \prec (2, 3, 7, 5).$$

Ví dụ 2.14

Tổng sắp huy chương SEA Games 24.

TT	Đoàn	HCV	HCB	HCĐ	Tổng
1	Thái lan	183	123	103	409
2	Malaysia	68	52	96	216
3	Việt Nam	64	54	82	204
4	Indonesia	55	64	83	203
5	Singapore	43	43	41	127
6	Philippines	41	91	96	228
7	Myanmar	14	26	47	87
8	Lào	5	7	32	44
9	Campuchia	2	5	11	18
10	Brunei	1	1	6	6
11	Đông Timore	0	0	0	0