Course 1: Quantum Computing

Session No. 3 Qubits and quantum states

Alcides Montoya C.

Escuela de Física - Universidad Nacional de Colombia Sede Medellin

amontoya@unal.edu.co

Semillero en Computación Cuántica
March 28, 2023

Representación de estados

Deutsch en 1985 propuso:

1. Los procesos que se dan a nivel de la mecánica cuántica (en esencia todos) son realmente dificiles de simular usando la computación clásica
2. En principio, podrían construirse máquinas de computación parecidas al ordenador cuántico universal, que tendrían muchas propiedades notables no reproducibles por ninguna máquina de Turing.
3. Tendríamos un candidato a realizar computación de forma universal: computadores cuánticos

https://doi.org/10.1098/rspa.1985.0070

David Deutsch (1953)

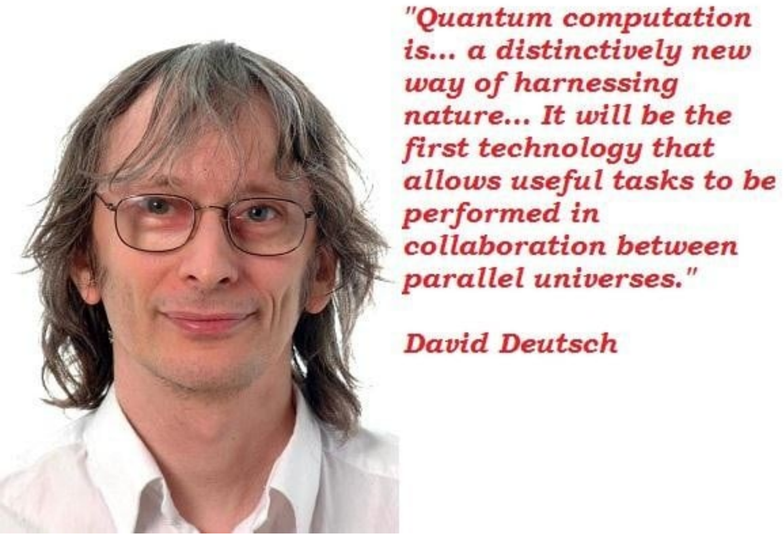


Figure: David Deutsch, Oxford University theoretical physicist

Principio de Church-Turing-Deutsch, 1985

Cualquier proceso físico puede simularse de forma eficiente y completa usando un computador cuántico universal

Ver artículo: Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer, David Deutsch, Julio 8 de 1985.

Representación de estados

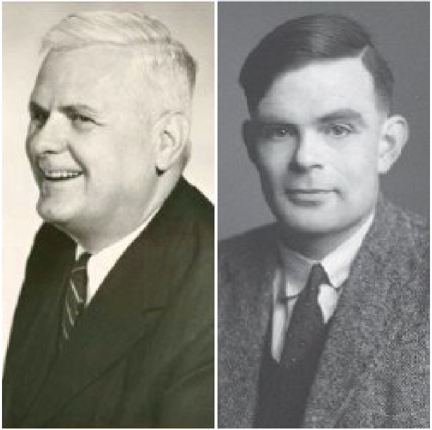


Figure: The Church-Turing Thesis: Logical Limit or Breachable Barrier?

https://cacm.acm.org/magazines/2019/1/233526-the-church-turing-thesis/fulltext

Representación de estados

Figure: Representación de los estados de una moneda en el aire. Fuente: https://ukedchat.com/2017/12/13/excel-coin-flipping/

Representación de estados

- En informática el “bit” es la unidad básica de la información, que nos permite discernir entre dos estados: 0 o 1
- Los bits se agrupan formando palabras binarias, una palabra binaria de 8 bits se conoce como un byte y nos permite representar 256 estados distintos
- El valor de un bit se almacena como un voltaje por encima o por debajo de un nivel estándar.
- Tomemos una moneda con sus dos caras, generalmente a una la llamamos cara a la otra cruz o cara y sello de acuerdo al país, lo que tenemos es un objeto que al ser lanzado puede caer en una de dos posibilidades, o por la cara o por la cruz.

Representación de estados

- Cuando la moneda esá en el aire, no tenemos idea por cual se sus caras caerá, es decir, tenemos una probabilidad de $\frac{1}{2}$ de obtener una de las dos caras. Podemos representar el estado del sistema usando vectores, de la siguiente forma:

Cara o Cruz como un arreglo vectorial

$\textbf{Cara} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\textbf{Cruz} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Podemos decir también que el anverso corresponde al bit 0 y el reverso al bit 1. Y tenemos una probabilidad de $\frac{1}{2}$ de obtener un bit 0 o un bit 1.

Probabilidades, vector columna

Usar probabilidades para representar la información es más útil de lo que puede pensarse e un primer momento, para el caso de la moneda, el valor aleatorio de obtener un lado u otro lo podemos representar de forma vectorial como:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \tag{1}$$

Representación de estados

Table: Estados posibles de un sistema de bits

número de bits	**número de estados posibles**
1	2
2	4
3	9
4	16
n	2^n

Representación de estados

Definamos N_s el número de estados posibles del sistema, de acuerdo a la tabla anterior tendremos.

$$N_s = 2^n \tag{2}$$

Donde n es el número de bits. Tomando el logaritmo de la expresión anterior,podemos encontrar la definición explícita de número de bits de información disponibles, como:

$$\log_2 N_s = n \tag{3}$$

Representación de estados: Superposición

Superposición:

Los objetos o sistemas macroscópicos están siempre en un estado bien definido, pero los sistemas cuánticos no. Pueden estar en la superposición de diferentes estados, es decir, un fotón puede estar en un estado superpuesto formado por muchos estados de polarización diferentes. Cuando se mide el sistema, se colapsa a uno de los estados de la superposición. Solo podemos conocer las probabilidades de que el sistema esté en cada estado en el momento de la medición.

Representación de estados

En la naturaleza, donde la interacción entre sistemas físicos es compleja, el estado de un sistema tiene mucha más incertidumbre que la incertidumbre que en general manejamos en nuestra vida diaria con el lanzamiento de las monedas, o la variabilidad del clima o la cantidad de dinero que podemos ganar o perder si invertimos en acciones.

Amplitudes complejas

Esta es la razón por la cual a nivel de mecánica cuantica y grandes números usamos amplitudes complejas en lugar de probabilidades simples como las del lanzamiento de los dados.

Representación de estados: Regla de Max Born

Uno de los principios más profundos y misteriosos de toda la física es la Regla de Max Born. En mecánica cuántica, las partículas no tienen propiedades clásicas como posición o momento; más bien, hay una función de onda que asigna un número (complejo), llamado amplitud, a cada resultado de medición posible.

La regla de Born

La probabilidad de obtener cualquier resultado de medición posible es igual al cuadrado de la amplitud correspondiente. (La función de onda es solo el conjunto de todas las amplitudes).
$\mathrm{Probability}(x) = |\mathrm{amplitude}(x)|^2$.

Representación de estados

¿Cuál es la probabilidad de encontrar un valor en QM?

$$p(a_i) = \left|\langle a_i | \psi_S(t) \rangle\right|^2 \quad \textbf{Born Rule,}$$

Figure: The Copenhagen Interpretation of Quantum Mechanics

https://www.thoughtco.com/copenhagen-interpretation-of-quantum-mechanics-2699346

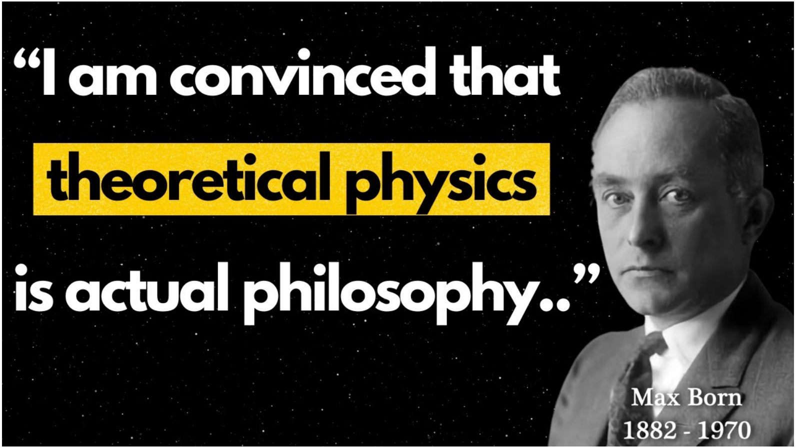
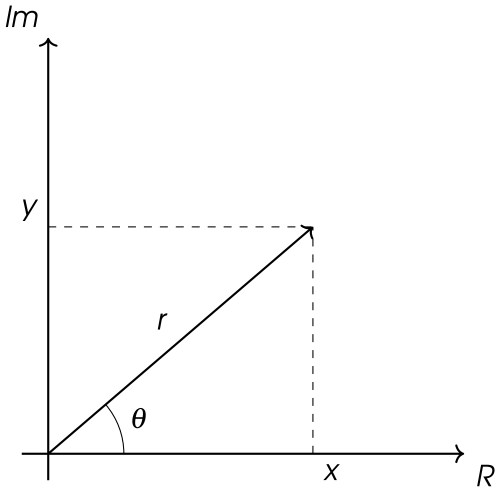


Figure: The Copenhagen Interpretation of Quantum Mechanics

Representación de estados: Números imaginarios



Representación de estados

$$z = x + iy \tag{4}$$

También se puede expresar en términos de sus coordenadas polares como:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)z = re^{i\theta} \tag{5}$$

Usando la identidad de Euler esta ecuación puede escribirse como:

$$z = re^{i\theta} \tag{6}$$

Representación de estados: Números complejos

- Suma y resta:

$$(a+ib)\pm(c+id)=(a\pm c)+i(b\pm d) \tag{7}$$

- Multiplicación:

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)=(re^{i\theta})(r'e^{i\theta'})=rr'e^{i(\theta+\theta')} \tag{8}$$

- Conjugado complejo: $z^*=\bar{z}=a-ib=re^{-i\theta}$
- Valor absoluto: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=r$, $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$
- Valor absoluto al cuadrado: $|z|^2=a^2+b^2=r^2$, una relación importante: $|z|^2=z\bar{z}$
- Inverso: $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$
- La identidad de Moivre: $z^n=|z|^n[cos(n\theta)+isin(n\theta)]$

Representación de estados

Amplitud de probabilidad

En mecánica cuántica, la amplitud de probabilidad es un número complejo utilizado para describir el comportamiento sistemas.

Densidad de probabilidad

El cuadrado del módulo de esta cantidad representa una densidad de probabilidad, La interpretación de los valores de una función de onda como la amplitud de probabilidad es un pilar de la interpretación de Copenhague de la mecánica cuántica.

Estado cuántico como vector $|\psi\rangle$

The Copenhagen Interpretation of Quantum Mechanics

Max Born fue un matemático y físico alemán, galardonado con el premio nobel de Física en 1954, en parte por esta explicación e interpretación en la mecánica cuántica.

Estado como vector $|\psi\rangle$

Cualquier sistema en mecánica cuántica está descrito por un estado, el cual es un vector $|\psi\rangle$ que reside en un espacio vectorial abstracto complejo, denominado espacio de Hilbert.

Representación de estados: Polarización de fotones

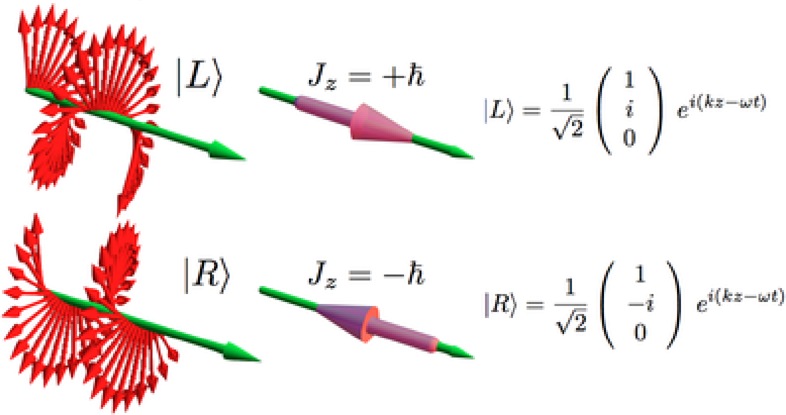


Figure: Left and right circular polarization and their associated angular momenta

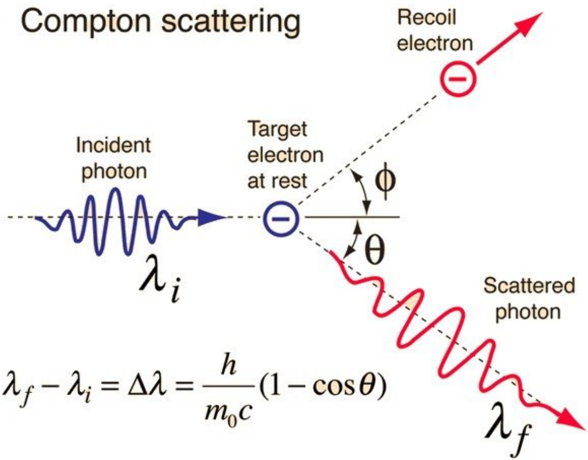


Figure: Left and right circular polarization and their associated angular momenta

Representación de estados: Polarización de fotones

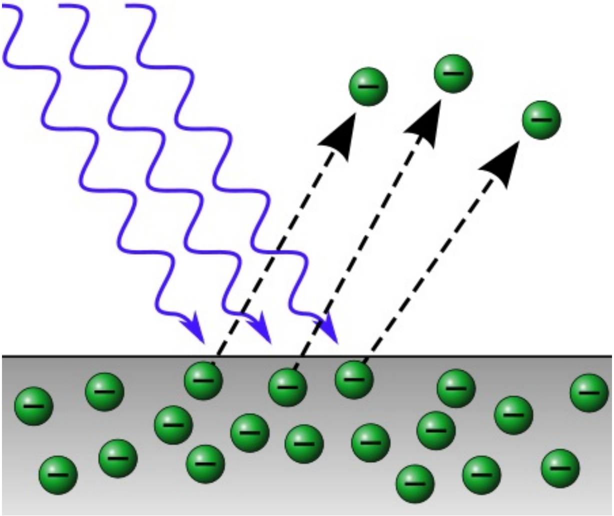


Figure: Understanding the Photoelectric Effect

Estado cuántico como vector $|\psi\rangle$

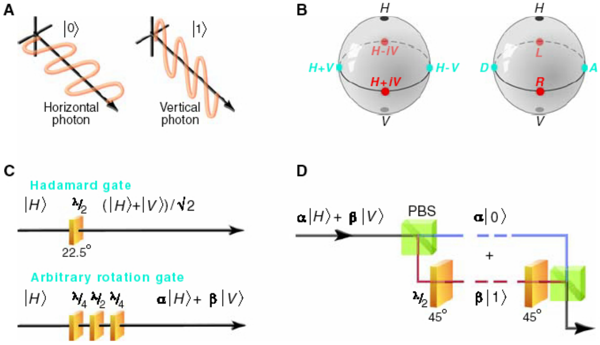


Figure: Single photon qubits.

https://www.arxiv-vanity.com/papers/0803.1554/