

# 컴퓨터 그래픽스

## 제5장 2차원 그래픽스의 변환

2018년 2학기

# 5장 학습 내용

- 2차원 그래픽스 변환
  - 기본 변환: 이동, 회전, 신축
  - 그 외, 반사, 밀림
  - 동차 좌표계: 모든 변환을 똑같이 적용할 수 있도록 차수를 바꿈
  - 윈도우와 뷰포트: 무엇을 어디에 그리는가
  - 클리핑: 보이지 않는 부분의 객체를 그리지 않는다.

# 기본 기하 변환: 이동

- 기본 기하 변환

- 이동 (Translation)
- 회전 (Rotation)
- 신축 (크기 변환, Scale)

- Translation (이동)

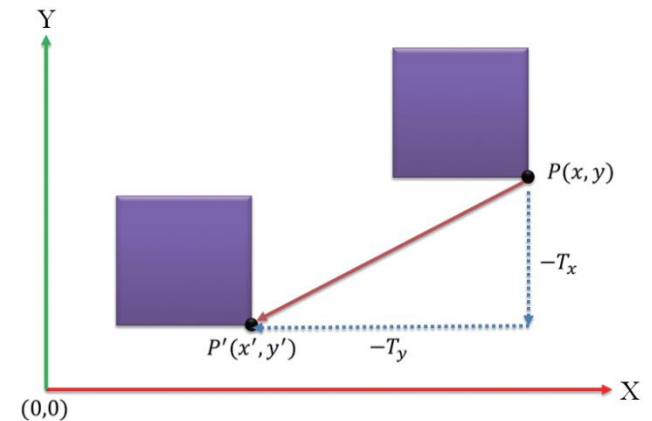
- 좌표계의 한 곳에서 다른 곳으로 직선 경로를 따라 객체의 위치를 바꾸는 것
- 객체의 크기나 모양, 방향 등은 바뀌지 않는다.
- $P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$

$$x' = x + t_x \quad y' = y + t_y$$

$(t_x, t_y)$ : 이동 벡터 (translation vector)

행렬을 사용하면

$P' =$



# 기본 기하 변환: 신축

- Scaling (신축, 확대/축소)

- 객체의 크기를 확대/축소 시킨다.
- 객체의 크기뿐 아니라 기준점으로부터의 위치도 비율에 따라 변한다.

- $P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$

$$x' = s_x \cdot x$$

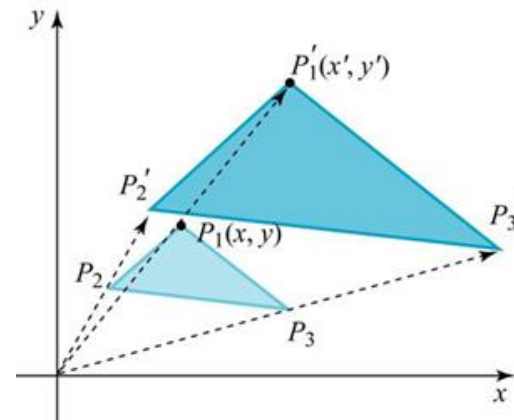
$$y' = s_y \cdot y$$

$(s_x, s_y)$ : 신축률 (scaling factor)

행렬을 사용하면

$$P' =$$

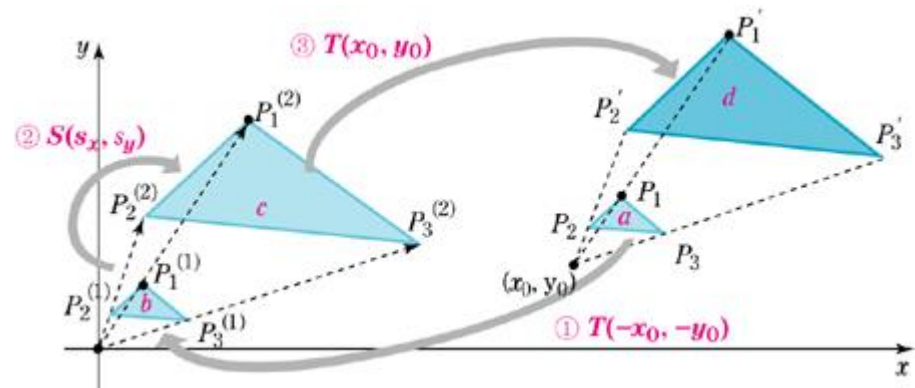
- $s > 1$ :
- $s = 1$ :
- $0 < s < 1$ :
- $s < 0$ :



# 기본 기하 변환: 신축

- 임의의 점  $(x_0, y_0)$ 에 대하여 신축률  $(s_x, s_y)$ 만큼 신축
  - 신축 기준점을 원점이 되도록 객체를 이동:  $T(-x_0, -y_0)$
  - 원점에 대하여 신축:  $S(s_x, s_y)$
  - 제자리로 이동:  $T(x_0, y_0)$

- $x' =$
- $y' =$



# 기본 기하 변환: 회전

- Rotation (회전)

- xy평면에서 원 경로를 따라 객체를 재배치
- 객체의 모양 변화는 없이 객체가 놓여있는 방향이 변한다.

- $P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$

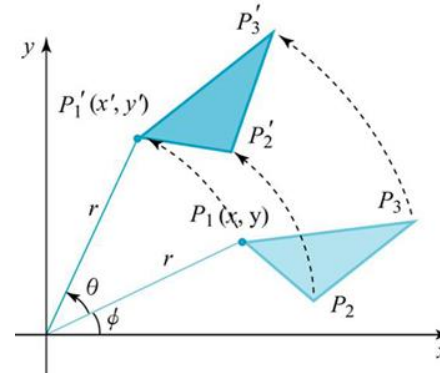
- $x' = r \cos(\Phi + \theta) = \underline{r \cos \Phi} \cos \theta - \underline{r \sin \Phi} \sin \theta = x \cos \theta - y \sin \theta$

- $y' = r \sin(\Phi + \theta) = \underline{r \cos \Phi} \sin \theta + \underline{r \sin \Phi} \cos \theta = x \sin \theta + y \cos \theta$

회전각 :  $\theta$ , 회전점 (Pivot Point):  $(x_r, y_r)$

- 행렬을 사용하면

$P' =$

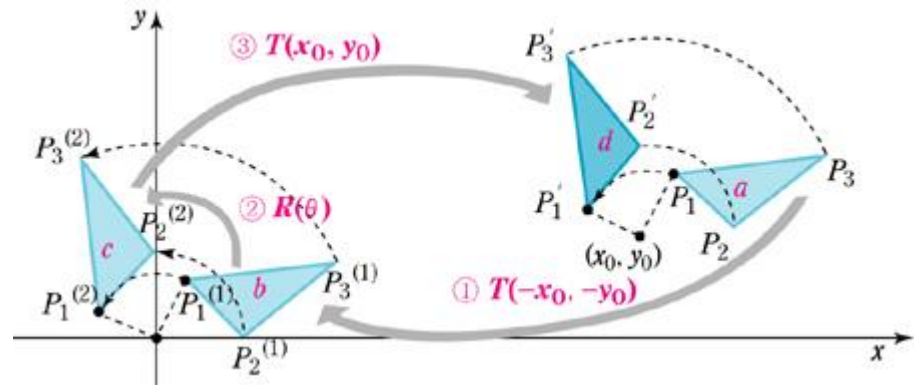


# 기본 기하 변환: 회전

- 임의의 점  $(x_0, y_0)$ 에 대하여  $\theta$ 만큼 회전
  - 회전 중심점이 원점이 되도록 객체를 이동:  $T(-x_0, -y_0)$
  - 원점을 중심으로  $\theta$ 만큼 회전:  $R(\theta)$
  - 반대 방향으로 이동:  $T(x_0, y_0)$

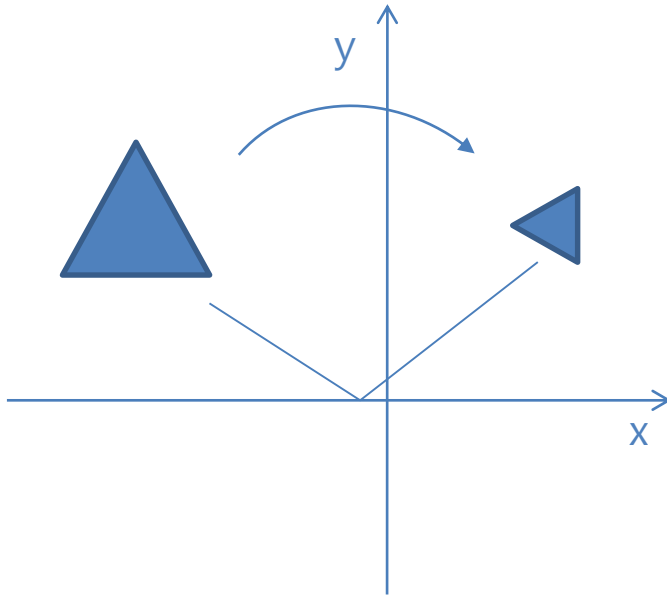
•  $x' =$

•  $y' =$

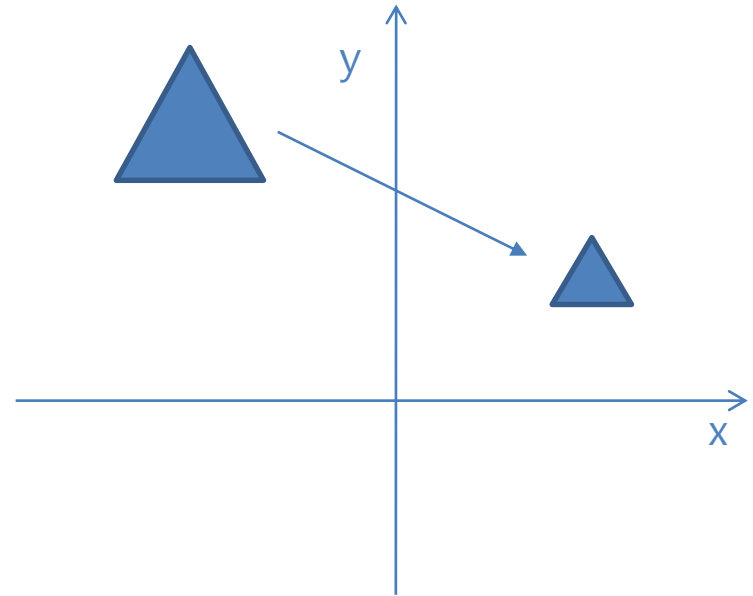


# 기본 기하 변환

- 기하 변환 예)



- 시계반대방향으로 90도, 2배 스케일
- 삼각형 좌표값  $(-5, 5)$   $(-10, 5)$   $(-8, 10)$   
→ 변환 좌표값은?



- $\frac{1}{2}$ 배 스케일, X축으로 10, Y축으로 -5 이동
- 삼각형 좌표값  $(-5, 5)$   $(-10, 5)$   $(-8, 10)$   
→ 변환 좌표값은?



# 동차 좌표계 (Homogeneous Coordinate System)

- 동차 좌표계

- 여러 단계의 변환행렬을 하나로 결합하여 표현하도록 하는 방법
- 순차적인 기하변환을 처리할 때 각 단계별 좌표 값을 구하지 않고 바로 계산 하려면 행렬의 합(A)을 제거해야 함

- $P_2 = M \cdot P_1 + A_1$

- $P_3 = M_2 P_2 + A_2 = M_2(M_1 P_1 + A_1) + A_2$   
 $= M_2 M_1 P_1 + M_2 A_1 + A_2$

- 동차 좌표계를 이용하여 기본 변환을 행렬 곱으로만 표현한다 → 변환을 간단히 처리, 계산량을 줄일 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} P_n &= M_{n-1} \cdot P_{n-1} = M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdot P_{n-2} = \dots \\ &= M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdot \dots \cdot M_1 \cdot P_1 \\ &= M \cdot P_1 \end{aligned}$$

# 동차 좌표계 (Homogeneous Coordinate System)

- 행렬식

- 2차원의 점  $P(x, y)$ 를 동차 좌표계로 표현하면 차원이 하나 증가된다. → 즉,  $P(hx, hy, h)$  ( $h \neq 0$ ) →  $h$ 는 임의의 값 → 한 점은 동차 좌표계에서  $h$ 의 값에 따라 여러 개의 좌표로 표현될 수 있다.

- 동차 좌표계에서 한 점의 좌표  $P(X, Y, h)$ 로 주어지면 → 2차원 기하 평면에서  $P(\frac{X}{h}, \frac{Y}{h})$ 로 대응된다.
- $P(x_1, y_1, h_1), P(x_2, y_2, h_2)$ 로 주어질 때,  $(\frac{x_1}{h_1}, \frac{y_1}{h_1}) = (\frac{x_2}{h_2}, \frac{y_2}{h_2})$  이면 2차원 기하 평면에서 동일한 점이 된다.

- $h = 1$  이면  $(x, y) \rightarrow (x, y, 1)$

- 이동의 3차원 행렬:  $T(t_x, t_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- 회전의 3차원 행렬:  $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

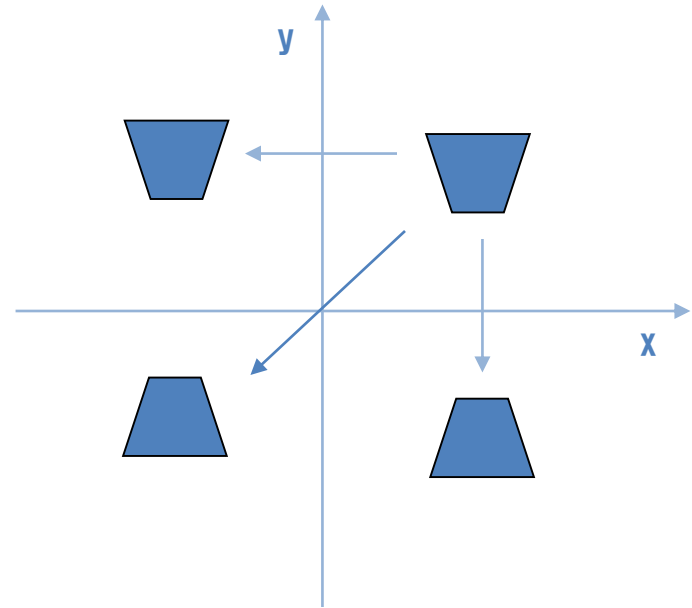
- 신축의 3차원 행렬:  $S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

# 동차 좌표계 (Homogeneous Coordinate System)

- 연속된 기본 변환을 동차 좌표계를 사용하여 하나의 행렬로 나타낼 수 있다.  
하나의 변환 행렬로 표현한 합성 변환에서는 한번의 행렬 곱셈만 필요하다
  - 이동: 연속적으로 2번 이동하는 경우
$$P' = T(t_{x2}, t_{y2}) \cdot T(t_{x1}, t_{y1}) \cdot P$$
$$= T(t_{x2} + t_{x1}, t_{y2} + t_{y1}) \cdot P$$
  - 신축: 연속적으로 2번 신축 하는 경우
$$P' = S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot P$$
$$= S(s_{x2} \cdot s_{x1}, s_{y2} \cdot s_{y1}) \cdot P$$
  - 회전 : 연속적으로 2번 회전하는 경우
$$P' = R(\theta_2) \cdot R(\theta_1) \cdot P$$
$$= R(\theta_2 + \theta_1) \cdot P$$
  - 임의의 점  $(x_0, y_0)$ 에 대하여 신축  $(s_x, s_y)$ 하는 경우
    - $P' = T(x_0, y_0) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_0, -y_0) \cdot P$
  - 행렬의 곱셈에서 결합법칙은 성립, 교환 법칙은 성립하지 않는다. 단, 같은 종류의 기하변환에서 교환 법칙은 성립한다.

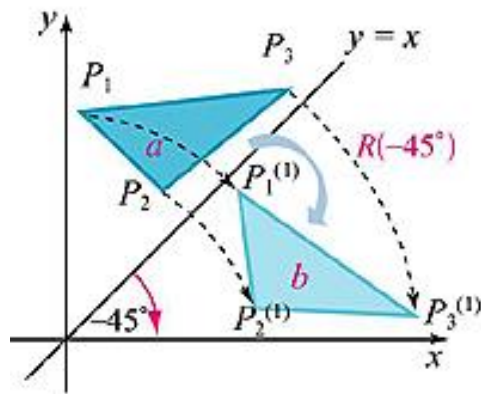
# 기타 기하 변환: 반사

- Reflection (반사): 거울 영상
  - $y=0$  (x축)에 대하여 반사
  - $x=0$  (y축)에 대하여 반사
  - 원점  $(0,0)$ 에 대하여 반사

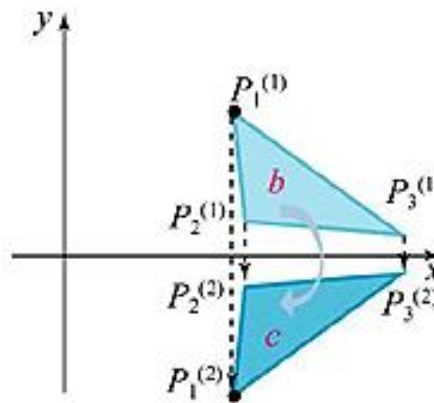


# 기타 기하 변환: 반사

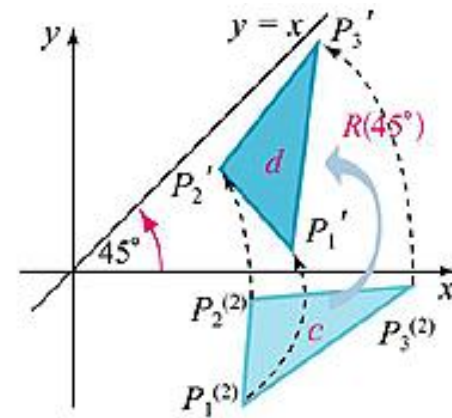
- $y = x$ 에 대한 반사
  - 시계방향으로 45' 회전
  - X축에 대하여 반사
  - 시계 반대 방향으로 45' 회전
- $y = -x$ 에 대한 반사



(a) 다각형과 반사축을 회전



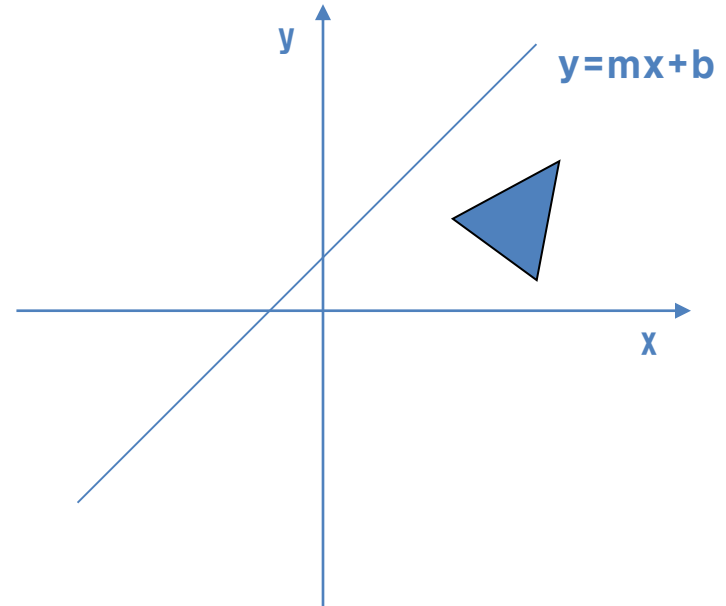
(b) 반사축을 기준으로 반사



(c) 반대방향으로 회전

# 기타 기하 변환: 반사

- $y = mx + b$ 에 대하여 반사



# 기타 기하 변환: 밀림

- 밀림 (Shearing)

- 2차원 평면상에서 객체의 한 부분을 고정시키고 다른 부분을 밀어서 생기는 변환

- 고정된 지점에서 멀수록 밀리는 거리가 커진다. (고정된 지점과의 거리에 비례하여 밀리는 경우가 결정된다)

- x축에 대한 밀림:

$$x' = x + h_x \bullet y$$

$$y' = y$$

- y축에 대한 밀림:

$$x' = x$$

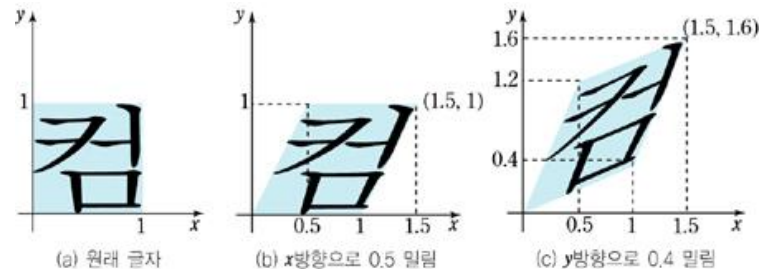
$$y' = y + h_y \bullet x$$

( $h_x$ : 밀림 비율)

( $h_y$ : 밀림 비율)

- 행렬을 사용하면,

$$P' =$$



# 윈도우와 뷰포트

- 뷰잉 파이프라인

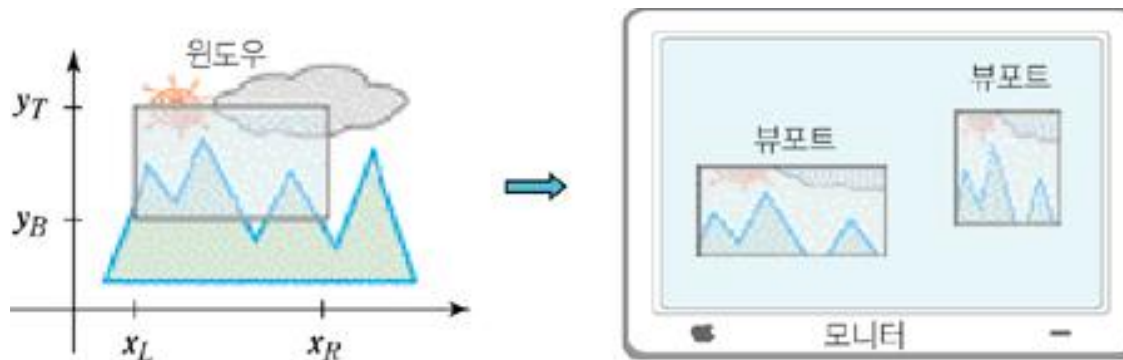
- 모델 좌표계: 개별 객체를 표현하기 위해 사용되는 좌표계
- 월드 좌표계: 각 모델 좌표계의 통합된 좌표계
- 뷰잉 좌표계: 출력장치에 출력 위히 및 크기 설정하여 뷰포트에 출력, 뷰포트 좌표계
- 정규 좌표계: 정규화된 좌표계
- 장치 좌표계: 출력하려는 장치 좌표계





# 윈도우와 뷰포트

- Window
  - 출력 장치에 표시하기 위해 선택된 세계 좌표 영역
- Viewport
  - 윈도우가 사상되는 출력 장치의 영역
- 윈도우-뷰포트 변환에 의한 효과
  - Zooming 효과: (zoom in/zoom out)
  - Panning 효과: 카메라 각도를 돌려가면서 비디오 촬영하는 것과 같은 효과
  - 한번에 여러 개의 화면을 가질 수 있다.



# 윈도우와 뷰포트

## • 윈도우-뷰포트 좌표 변환

–  $(x_w, y_w)$ : 윈도우 내의 점

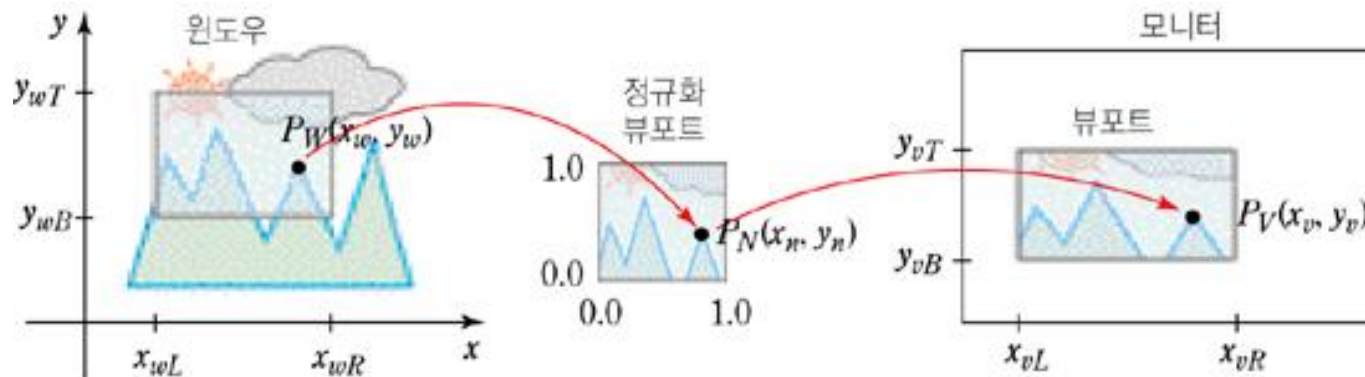
$(x_v, y_v)$ : 뷰포트 안의 점

$$\bullet \quad x_v = x_{vL} + (x_w - x_{wL})s_x, \quad s_x = \frac{(x_{vR} - x_{vL})}{(x_{wR} - x_{wL})}$$

$$\bullet \quad y_v = y_{vB} + (y_w - y_{wB})s_y, \quad s_y = \frac{(y_{vT} - y_{vB})}{(y_{wT} - y_{wB})}$$

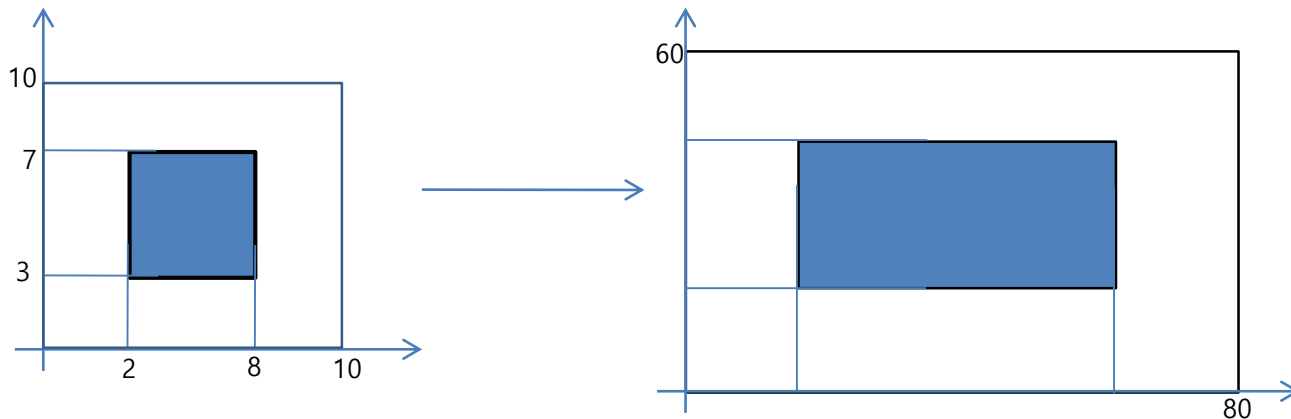
$x_{wR}, x_{wL}$ : 윈도우의 x방향 최대값, 최소값

$y_{wT}, y_{wB}$ : 윈도우의 y방향 최대값, 최소값



# 윈도우와 뷰포트

- 예) 다음의 도형에 대하여 윈도우-뷰포트 변환이 주어졌을 때 변환 좌표 값
  - 원도우 (0, 10, 0, 10)  $\rightarrow$  뷰포트 (0, 80, 0, 60)
  - 도형 좌표: (2, 3) (8, 7)로 이루어진 사각형이 윈도우-뷰포트 변환 후 좌표값:



# Clipping (클리핑)

- Clipping의 개념

- 윈도우-뷰포트 변환 시, 출력장치에 표시되어서는 안될 그림영역을 제거한 뒤, 나머지 그림영역을 출력화면에 나타내는 것
- 월드 좌표 클리핑:
  - 윈도우를 설정할 때 윈도우 바깥 영역을 제거하여 윈도우 내부 영역만 뷰포트로 매핑시키는 방법
- 뷰포트 클리핑:
  - 월드 좌표계를 표현된 그림 전부를 뷰포트로 매핑시킨 후 뷰포트 외부에 위치한 객체나 그림의 일부를 제거하는 방법
- 두 클리핑이 모두 결과는 같다.
- 월드 좌표계를 사용하면 계산 시간이 줄어든다.

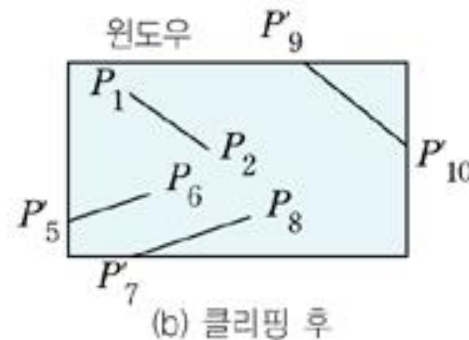
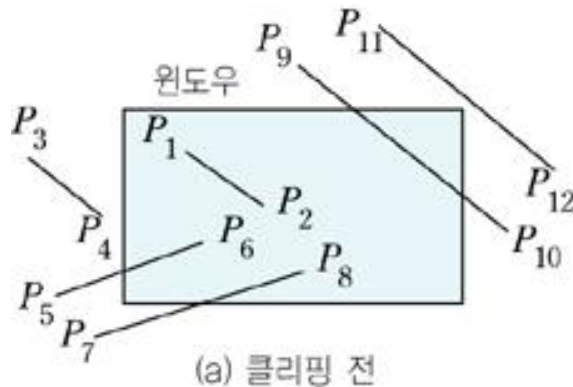
# *Clipping (클리핑): 점*

- 점 클리핑
    - 클리핑 되는 객체가 점
    - 한 점  $P(x, y)$ 는
      - $x_L \leq x \leq x_R, \quad y_B \leq y \leq y_T$
- 이면 그려진다.

# Clipping (클리핑): 선

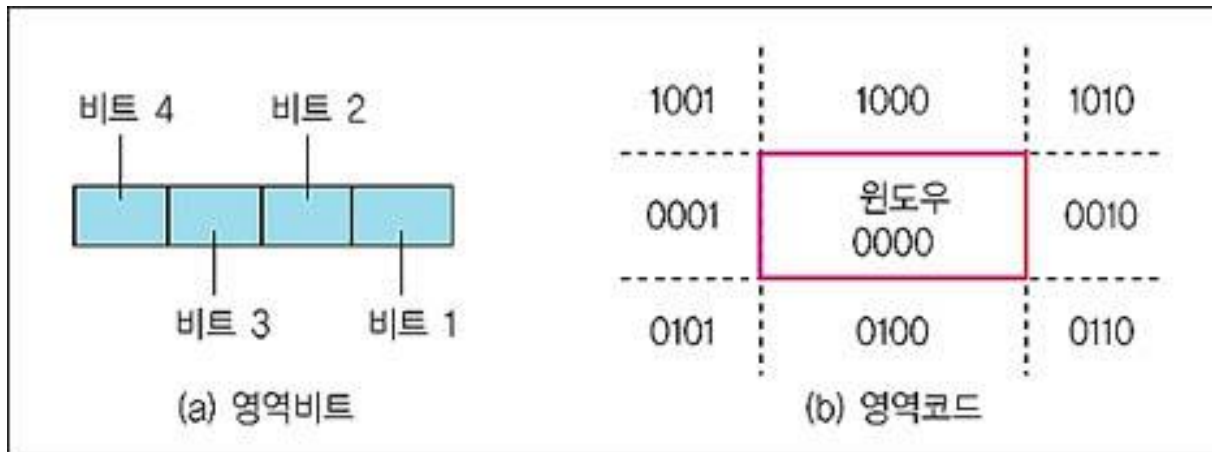
- 선 클리핑

- 클리핑 되는 객체가 선분
- 선분이 클리핑 영역의 내부 또는 외부에 완전히 포함되는가/포함되지 않는가
- 부분적으로 속하는가
- 속한다면 교차점은 어떻게 구하는가



# Clipping (클리핑): 선

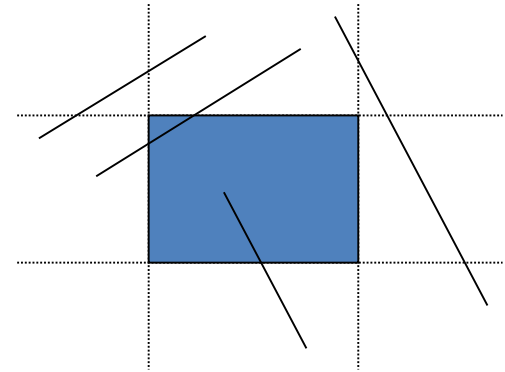
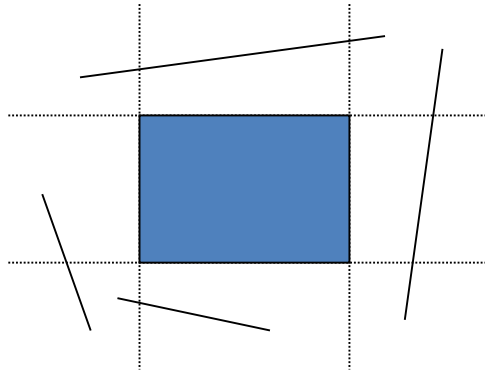
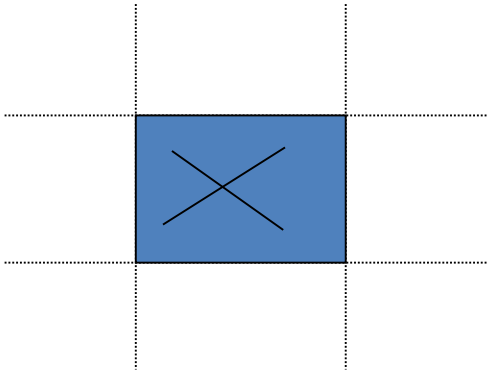
- Cohen-Sutherland 알고리즘
  - 윈도우를 중심으로 전체 그림 영역을 9개 영역으로 구분
  - 각 영역에 4비트를 사용하여 영역코드를 부여한다.
    - 비트 1: 윈도우의 왼쪽에 있으면 1
    - 비트 2: 윈도우의 오른쪽에 있으면 1
    - 비트 3: 윈도우의 아래쪽에 있으면 1
    - 비트 4: 윈도우의 위쪽에 있으면 1



# Clipping (클리핑): 선

## - 알고리즘 수행 과정

- 양 끝점의 코드가 모두 0000이면 →
- 양 끝점의 코드 중 한 쪽 코드는 0이고 다른 쪽 코드는 0이 아니면 →
- 양 끝점 코드가 모두 0이 아니고, 양 끝점 코드간 AND 연산이 0이 아니면 →
- 양 끝점 코드가 모두 0이 아니고, 양 끝점 코드간 AND 연산이 0이면 →





# Clipping (클리핑): 선

- 주어진 선분에 대한 교차점 구하기

- 수직 경계:  $x = x_L$  또는  $x = x_R$

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

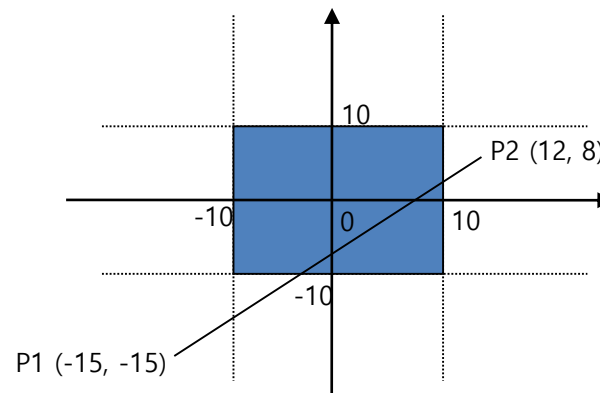
- 수평 경계:  $y = y_B$  또는  $y = y_T$

$$x = x_1 + (y - y_1)/m$$

$m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$  선분의 기울기,

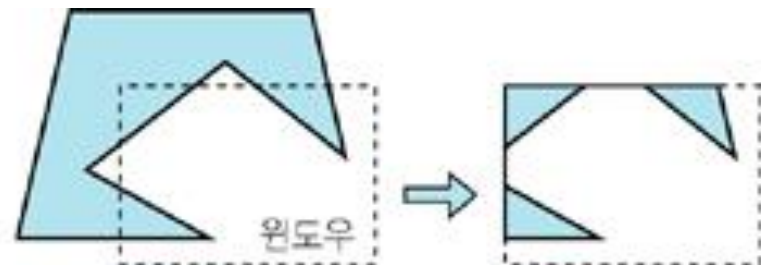
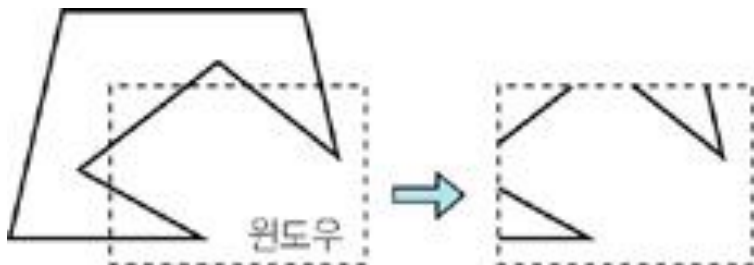
$x_1, y_1$ : 선분의 끝 점

$x_L, x_R, y_B, y_T$ : 윈도우의 경계



# Clipping (클리핑): 다각형

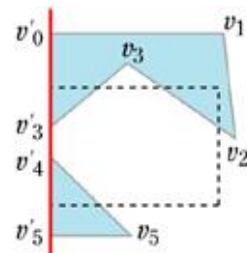
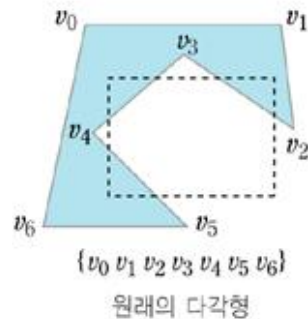
- 속이 빈 다각형(Hollow polygon) :
  - 선 클리핑 알고리즘 적용
- 속이 찬 다각형 :
  - 몇 개의 Closed filled polygon 생성



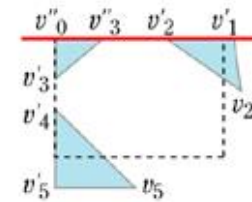
# Clipping (클리핑): 다각형

- Sutherland-Hodgeman 알고리즘

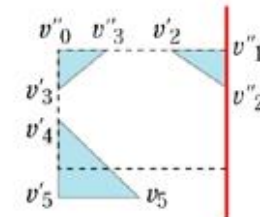
- 다각형의 모든 꼭지점이 윈도우의 내부 또는 외부에 완전히 포함되는지를 결정하여 다각형 전체를 제거하거나 선택하고 그 외의 경우에는 다음 알고리즘을 적용하여 다각형을 클리핑
- 한 경계변을 기준하여 이 변이 윈도우 바깥쪽 영역에 속하는 다각형 부분은 클리핑 소거



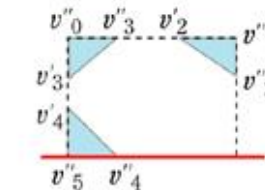
(a) 왼쪽 경계에서 클리핑



(b) 위쪽 경계에서 클리핑



(c) 오른쪽 경계에서 클리핑



(d) 아래쪽 경계에서 클리핑