



UNIVERSIDAD DE GRANADA

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

ALGORÍTMICA

Práctica 1: Análisis de Eficiencia de Algoritmos

Shao Jie Hu Chen
Mario Megías Mateo
Jesús Samuel García Carballo

Grupo Rojo

1 de abril de 2022

Resumen

Esto es una prueba

Índice

1. Introducción	1
1.1. Estructura de la memoria	1
1.2. Objetivos	1
1.3. Equipo empleado	1
2. Metodología	2
3. Eficiencia teórica	3
3.1. Algoritmo HeapSort	3
3.2. Algoritmo QuickSort	4
3.3. Algoritmo de inserción	6
3.4. Algoritmo de selección	7
3.5. Algoritmo de Floyd	7
3.6. Algoritmo Hanoi	8
4. Eficiencia empírica	8
4.1. Algoritmo QuickSort	9
4.2. Algoritmo de inserción	11
4.3. Algoritmo de Floyd	13
4.4. Algoritmo Hanoi	15
5. Comparación de ejecuciones con diferentes niveles de optimización	17
5.1. Conceptos teóricas	17
5.2. Tablas de ejecución	17
5.3. Observaciones	20
6. Comparación de los algoritmos de ordenación	21
6.1. Objetivos	21
7. Eficiencia de mejor y peor caso en los algoritmos de Inserción y Selección	25
7.1. Fundamento teórico	25
7.2. Resultados experimentales	25
8. Eficiencia híbrida	26
8.1. Algoritmo de inserción	26
8.2. Algoritmo QuickSort	28
8.3. Algoritmo Floyd	28
9. Conclusión	30

1. Introducción

En esta primera práctica de la asignatura Algorítmica vamos a realizar un análisis teórico y empírico de diversos algoritmos vistos en la asignatura. En particular, dicho análisis se hará de los siguientes:

- **Algoritmos de ordenación:** Inserción, selección, quicksort y mergesort.
- **Algoritmo de análisis de caminos mínimos sobre grafos:** Algoritmo de Floyd.
- **Hanoi.** Resolución del juego de las torres de Hanoi.

1.1. Estructura de la memoria

Esta memoria presenta la estructura típica de un trabajo académico. En primer lugar, presentamos brevemente el contexto en el que nos manejamos en esta práctica. Posteriormente, analizaremos teóricamente cada uno de los algoritmos propuestos para, seguidamente, comprobar mediante un análisis empírico las soluciones obtenidas. Asimismo, se ha realizado un análisis híbrido contrastando los resultados teóricos con los experimentales. Este análisis se ha realizado para cada algoritmo, extrayéndose información relevante asociada a ellas.

Además, para cada uno de los algoritmos considerados, se ha elaborado conjuntamente entre los miembros del grupo tablas asociadas a cada una de ellas, que se irán presentando a lo largo de esta memoria. Finalmente, se escribirán unas líneas asociadas a las conclusiones obtenidas tras el desarrollo de esta práctica, así como los resultados más relevantes obtenidos.

1.2. Objetivos

Entre los objetivos que vamos a realizar asociadas a esta práctica, caben destacar los siguientes:

- **Estudio teórico, empírico e híbrido y comparación** de los algoritmos de ordenación más empleados, verificando los resultados teóricos.
- **Estudio teórico, empírico e híbrido** de algoritmos de alta complejidad, poniendo especial énfasis en su **viabilidad** en diferentes equipos.
- Estudio del **aumento de eficiencia** de un mismo algoritmo para diferentes **tipos de optimización** del compilador.
- Determinación del algoritmo **más adecuado** para cada situación en función del estado de los datos.

1.3. Equipo empleado

Para el desarrollo de esta práctica, se han empleado diferentes equipos, cuyas respectivas especificaciones técnicas se especifican a continuación:

- **ASUS**
 - **Modelo:** ZenBook 15 UX534F
 - **Procesador:** Intel(R) Core(TM) i7-10510U CPU @ 1.80GHz5
 - **Memoria Ram:** 16 GB DDR4 @ 2.133 MHz.
 - **Sistema Operativo** Ubuntu 20.04.2 LTS

■ LENOVO

- **Modelo:** YOGA 530-14IKB
- **Procesador:** Intel(R) Core(TM) i5-8250U CPU @ 1.60GHz
- **Memoria RAM:** 8 GB DDR4
- **Sistema Operativo:** Ubuntu 20.04.4 LTS

■ HP

- **Modelo:** HP Pavilion Gaming Laptop 15-dk0xxx
- **Procesador:** Intel(R) Core(TM) i7-9750H CPU @ 2.60GHz
- **Memoria RAM:** 32 GB DDR4
- **Sistema Operativo:** Ubuntu 20.04.4 LTS

2. Metodología

Debido a las limitaciones técnicas de estos equipos, para el cálculo de la eficiencia empírica se ha optado por medir tiempos de ejecución en tiempos y **tamaños razonables** para obtener datos relevantes para el comportamiento tanto a pequeñas escalas como a nivel asintótico de ellas.

Con el fin de automatizar el desarrollo de esta práctica, se ha diseñado un proyecto a la que hemos llamado **GraphKiller**. Se trata de un conjunto de 6 scripts cuya última finalidad es la de automatizar la generación de los parámetros que aparecen en esta práctica. Un esquema de este proyecto puede encontrar en la figura 1.

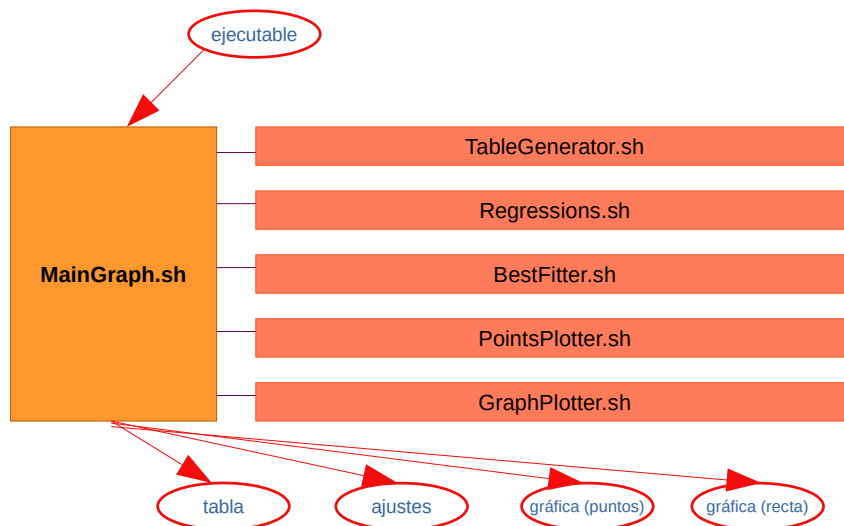


Figura 1: Esquema del funcionamiento de GraphKiller

Consta de las siguientes partes:

1. **TableGenerator.sh**. Se encarga de generar las tablas de datos, teniendo en cuenta número de repeticiones, valores iniciales y finales y cantidad de medidas experimentales a tomar.
2. **Regressions.sh**. Se encarga de generar una lista de las regresiones más empleadas en Algorítmica, dando información como función de ajuste y parámetros estadísticos como la varianza residual de la regresión.
3. **BestFitter.sh**. Su labor es la de escoger siempre la regresión que mejor se ajusta (con menor varianza residual). Presenta el inconveniente de que no sabe discriminar los datos, únicamente compara residuos.
4. **PointsPlotter.sh**. Produce un gráfico con los puntos de la tabla de datos obtenida.
5. **GraphPlotter.sh**. Produce un gráfico con los puntos de la tabla de datos obtenida, así como la curva de regresión óptima.
6. **MainGraph.sh**. Es el guión que articula todos los anteriores. Es el encargado de recibir el ejecutable de un programa y organizar todos los datos y gráficos en la jerarquía de archivos.

3. Eficiencia teórica

Para el análisis de los siguientes algoritmos se ha empleado la notación $O(\cdot)$.

3.1. Algoritmo HeapSort

```

1 static void heapsort(int T[], int num_elem)
2 {
3     int i;
4     for (i = num_elem/2; i >= 0; i--)
5         reajustar(T, num_elem, i);
6     for (i = num_elem - 1; i >= 1; i--)
7     {
8         int aux = T[0];
9         T[0] = T[i];
10        T[i] = aux;
11        reajustar(T, i, 0);
12    }
13 }
```

Listing 1: Implementación en C++ del algoritmo heapsort.

El heapsort es un algoritmo de ordenación por montículos que consta de dos bucles for independientes, que llaman a una función llamada reajustar. En la primera línea de código podemos encontrar una declaración de variable cuya eficiencia es $O(1)$ y luego los dos ciclos mencionados, que interan sobre el número de elementos del vector que denotaremos por n , luego realizaremos la eficiencia en torno a este dato. Ambos ciclos son independientes, así que vamos a analizar cada uno por separado y aplicando la regla del máximo nos quedaremos con el mayor.

La función reajustar trata de imitar el uso de un árbol APO mediante vectores y recorrerlo insertando elementos, luego como en un árbol APO la inserción se realiza con eficiencia $O(\log_2(n))$. Así que llamando $T(n)$ al números de operaciones asociadas al algoritmo, tenemos lo siguiente:

- Primer ciclo

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n/2+1} \log_2(i) = \log_2(k) \in O(n \log(n))$$

- Segundo ciclo

$$\sum_{i=2}^n \log_2(i) = \log_2(2) + \dots + \log_2(n) = \log_2(n!) \in O(n \log_2(n))$$

En conclusión vemos que como tenemos que aplicar la regla del máximo y ambos ciclos tienen de eficiencia $O(n \log(n))$ podemos afirmar que esa es la eficiencia teórica del algoritmo.

3.2. Algoritmo QuickSort

```

1 inline void quicksort(int T[], int num_elem)
2 {
3     quicksort_lims(T, 0, num_elem);
4 }
5
6 static void quicksort_lims(int T[], int inicial, int final)
7 {
8     int k;
9     if (final - inicial < UMBRAL_QS) {
10         insercion_lims(T, inicial, final);
11     } else {
12         dividir_qs(T, inicial, final, k);
13         quicksort_lims(T, inicial, k);
14         quicksort_lims(T, k + 1, final);
15     };
16 }
17
18
19 static void dividir_qs(int T[], int inicial, int final, int & pp)
20 {
21     int pivote, aux;
22     int k, l;
23
24     pivote = T[inicial];
25     k = inicial;
26     l = final;
27     do {
28         k++;
29     } while ((T[k] <= pivote) && (k < final-1));
30     do {
31         l--;
32     } while (T[l] > pivote);
33     while (k < l) {
34         aux = T[k];
35         T[k] = T[l];
36         T[l] = aux;
37         do k++; while (T[k] <= pivote);
38         do l--; while (T[l] > pivote);
39     };
40     aux = T[inicial];
41     T[inicial] = T[l];
42     T[l] = aux;
43     pp = l;

```

Listing 2: Implementación en C++ del algoritmo QuickSort.

En este apartado, consideramos n como el número de componentes del vector.

El código del algoritmo comienza en la función `quicksort_lims` en la línea 6. Tomaremos inicial como ñaa posición de comienzo del vector ($inicial = 0$), y final como el siguiente al último elemento, que coincide con el número de componentes del vector ($final = n$). Tenemos una estructura condicional que determina el comportamiento del algoritmo según si el tamaño del vector supera o no un cierto umbral, por lo que el tiempo de ejecución será una función definida a trozos. Si es menor que el umbral, ejecutamos la ordenación con el algoritmo de inserción previamente analizado, que es $O(n^2)$. De lo contrario, realizamos la ordenación según el propio algoritmo `quicksort`. Dicho algoritmo se basa en la técnica de Divide y Vencerás, implementándose de forma recursiva. En primer lugar, se realiza una llamada a la función `dividir_dividir_qs`, cuya eficiencia procedemos a analizar. En las líneas 24-26 y 40-43 tenemos sentencias de asignación que serán despreciadas. Siguiendo código de forma secuencial, en las líneas 27 y 30 tenemos dos bucles `do-while`, si consideramos el peor caso para el primero (el pivote es mayor que el resto de elemento) tiene eficiencia $O(n)$, y el caso contrario al anterior sería el más desfavorable para el segundo (el pivote es menor que el resto de los elementos), luego tendríamos $O(n)$. Como el caso más favorable para uno (eficiencia $O(1)$) es el más desfavorable para el otro, aplicando la regla del Máximo tenemos que la eficiencia de la parte del código de los `do-while` sería $O(n)$. A continuación, encontramos un bucle `while` que se ejecuta un número indeterminado de veces en función de la condición, luego podemos acotar estas ejecuciones por una constante c . En las líneas 34-36 tenemos sentencias de asignación que serán ignoradas, y a continuación dos bucles `do-while` con la misma funcionalidad que los analizados anteriormente. Por tanto, deducimos que la eficiencia del bucle `while` es $O(n)$, y aplicando la regla del Máximo con el bloque de código de los bucles `do-while` obtenemos que la eficiencia de la función es $O(n)$. A continuación hacemos dos llamadas recursivas, una que procesará los datos desde el comienzo del mismo hasta la posición en la que hemos ubicado el pivote con la función `dividir_dividir_qs`, y la otra se encarga de procesar el resto del vector. Por tanto, el tiempo de ejecución sería:

$$T(n) = \begin{cases} T(k_n) + T(n - k_n) + n & \text{si } n \geq \text{UMBRAL} \\ n^2 & \text{si } n < \text{UMBRAL} \end{cases} \quad (1)$$

Para el caso promedio, podemos considerar que $k_n = \frac{n}{2}$. Resolvamos la recurrencia de (1):

$$T(n) = T(k_n) + T(n - k_n) + n \text{ si } n \geq \text{UMBRAL} \quad (2)$$

Realizamos el cambio de variable $n = 2^m$ en la ecuación (2) obtenemos:

$$T(2^m) = 2T(2^{m-1}) + 2^m \text{ si } n \geq \log_2(\text{UMBRAL}) \quad (3)$$

$$T(2^m) - 2T(2^{m-1}) = 2^m \quad (4)$$

Renombramos la expresión anterior como $T(2^m) = t_m$ obtenemos:

$$t_m - 2t_{m-1} = 2^m \quad (5)$$

Obtenemos la siguiente ecuación de recurrencia de la ecuación (5):

$$(x - 2)^2 = 0 \quad (6)$$

Luego la solución general de la recurrencia es:

$$t_m = c_1 2^m + c_2 m 2^m \quad (7)$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$T(n) = c_1 n + c_2 n \log_2(n) \quad (8)$$

Por tanto $T(n) \in O(n \log_2(n))$ si $n \geq \text{UMBRAL}$.

3.3. Algoritmo de inserción

El código de este algoritmo lo podemos encontrar a continuación.

```

1 static void insercion_lims(int T[], int inicial, int final)
2 {
3     int i, j;
4     int aux;
5     for (i = inicial + 1; i < final; i++) {
6         j = i;
7         while ((T[j] < T[j-1]) && (j > 0)) {
8             aux = T[j];
9             T[j] = T[j-1];
10            T[j-1] = aux;
11            j--;
12        };
13    };
14 }

```

Listing 3: Implementación en C++ del algoritmo de inserción.

El análisis de eficiencia se ha de hacer sobre el número de elementos del vector n .

Para el análisis asintótico, calculamos el número de operaciones elementales asociadas al código. Las tres primeras líneas tienen complejidad $O(1)$. Para el ciclo for, démonos cuenta de que itera sobre el número de componentes del vector. Por su parte, dentro del for existe un while que realiza un conjunto de operaciones de orden $O(1)$ tantas veces como se indica en el iterador. Por tanto, llamando $T(n)$ al números de operaciones asociadas al algoritmo, tenemos que:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} k = \sum_{i=0}^{n-1} ki = k \frac{n(n-1)}{2}$$

Por tanto, deducimos que $T(n) \in O(n^2)$.

3.4. Algoritmo de selección

```
1 static void seleccion_lims(int T[], int inicial, int final)
2 {
3     int i, j, indice_menor;
4     int menor, aux;
5     for (i = inicial; i < final - 1; i++) {
6         indice_menor = i;
7         menor = T[i];
8         for (j = i; j < final; j++)
9             if (T[j] < menor) {
10                indice_menor = j;
11                menor = T[j];
12            }
13         aux = T[i];
14         T[i] = T[indice_menor];
15         T[indice_menor] = aux;
16     };
17 }
```

Listing 4: Implementación en C++ del algoritmo de selección.

La estructura principal del código anterior consta de dos bucles for anidados. Las primeras sentencias de declaración antes del inicio del primer bucle for no repercuten en el análisis. Procedamos a analizar la estructura repetitiva: el primer for recorre el vector desde su inicio hasta la penúltima componente del mismo incluida. El segundo for comienza en la posición dada por el índice del primero hasta la última componente del vector incluida. Dentro del bucle interno tenemos una operación elemental correspondiente a la comparación realizada en el if, que es $O(1)$. Dentro del bucle externo excluyendo el código del bucle interno nos encontramos con dos sentencias de asignación que no se tendrán en cuenta para el análisis. De igual modo, fuera del bucle externo al final del código nos encontramos con otras sentencias de asignación que también serán despreciadas. También tendremos en cuenta las operaciones elementales aritméticas correspondientes a la gestión de los bucles, que son $O(1)$. En conclusion, acotando las expresiones $O(1)$ por k tenemos que:

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i}^{n-1} k = \sum_{i=0}^{n-2} k(n-1-i+1) = \sum_{i=0}^{n-2} k(n-i) = kn \sum_{i=0}^{n-2} 1 - k \sum_{i=0}^{n-2} i \\ &= kn(n-2+1) - k \frac{(n-2)(n-1)}{2} = kn^2 + kn - \frac{kn^2 - 3kn + 2k}{2} \end{aligned}$$

Deducimos, por tanto, que $T(n) \in O(n^2)$.

3.5. Algoritmo de Floyd

A continuación se presenta el código de este algoritmo:

```
1 void Floyd(int **M, int dim)
2 {
3     for (int k = 0; k < dim; k++)
4         for (int i = 0; i < dim; i++)
5             for (int j = 0; j < dim; j++)
6                 {
7                     int sum = M[i][k] + M[k][j];
8                     M[i][j] = (M[i][j] > sum) ? sum : M[i][j];
9                 }
```

Listing 5: Implementación en C++ del algoritmo de Floyd.

En este caso, consideramos como n el número de filas/columnas de la matriz. Como los tres bucles iteran cada uno sobre n , siendo el número de iteraciones independientes entre sí y se realizan k operaciones en cada una de ellas, tenemos que llamando $T(n)$ al número de operaciones para un tamaño n , se verifica:

$$T(n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k = kn^3$$

Deducimos fácilmente que $T(n) \in O(n^3)$.

3.6. Algoritmo Hanoi

```

1 void hanoi (int M, int i, int j)
2 {
3     if (M > 0)
4     {
5         hanoi(M-1, i, 6-i-j);
6         // cout << i << " -> " << j << endl;
7         hanoi (M-1, 6-i-j, j);
8     }
9 }
```

Listing 6: Implementación en C++ del algoritmo de resolución de las torres de Hanoi.

Estamos ante el estudio de un algoritmo recursivo, así que si $T(n)$ es el número de movimientos necesarios para mover n discos, tenemos que el algoritmo sigue la recurrencia $T(n) = 2T(n-1) + 1 \forall n \geq 1$ y con $T(0) = 0$ como caso base. Por lo tanto, vamos a resolverla para hallar su eficiencia teórica.

Tenemos que $t_n - 2t_{n-1} = 1$ luego si hacemos un cambio de variable nos queda como ecuación característica $(x-2)(x-1) = 0$, que son las propias raíces de la recurrencia luego la solución nos queda $t_n = c_1 1^n + c_2 2^n$. Como $t_0 = 0$, nos sale que $t_0 = c_1 + c_2$ y $t_1 = 2t_0 + 1 = 1$, luego en la solución $t_1 = c_1 + 2c_2$, de donde si resolvemos el sistema $c_1 = 1$ y $c_2 = -1$ nos queda la ecuación $2^n - 1^n$.

En consecuencia, deducimos que se trata de la ecuación que modela la recurrencia, lo que nos permite concluir que la eficiencia teórica del algoritmo es $O(2^n)$.

4. Eficiencia empírica

Para esta práctica hemos ejecutado en cada uno de los equipos un algoritmo de cada orden de eficiencia. Las tablas obtenidas, así como las gráficas correspondientes se representan a continuación.

Las tablas de los siguientes epígrafes presentan las siguientes características:

- La **primera columna** es el parámetro respecto al cual se busca la eficiencia del algoritmo.
- Las siguientes columnas t_{ASUS} , t_{HP} y t_{LENOVO} indican, respectivamente, el tiempo, en μs , empleado para ejecutar el algoritmo para el tamaño considerado por el equipo Asus, HP y Lenovo.

4.1. Algoritmo QuickSort

Empezamos analizando el algoritmo de menor orden de complejidad. La tabla con los valores obtenidos de la ejecución de cada algoritmo con sus respectivos tiempos de ejecución se pueden observar a continuación.

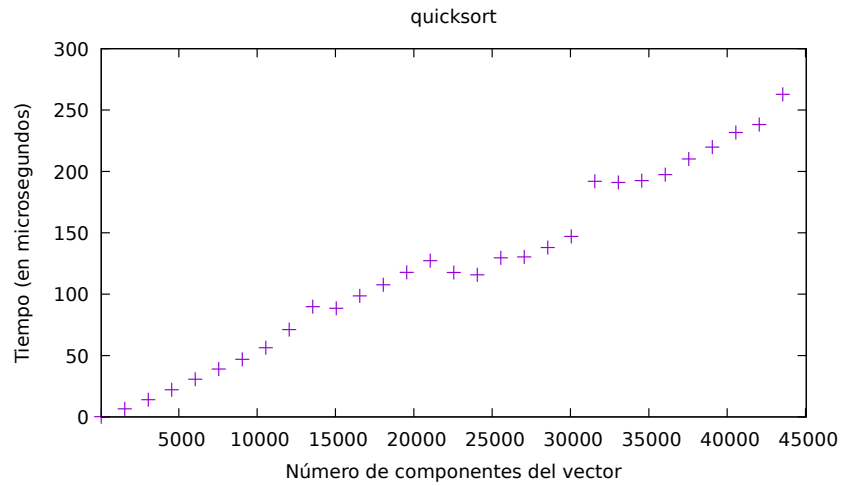
En la siguiente tabla se encuentran los datos obtenidos en este algoritmo por cada uno de los equipos en los que hemos ejecutado el algoritmo.

$N_{componentes}$	t_{ASUS}	t_{HP}	t_{LENOVO}
50	0.17	0.52	0.35
1550	6.61	15.61	15.56
3050	14.03	33.35	39.12
4550	22.15	52.27	39.49
6050	30.74	69.82	61.13
7550	39.04	85.79	64.00
9050	46.95	100.57	67.17
10550	56.34	118.18	77.66
12050	71.14	130.55	90.32
13550	89.81	125.28	101.90
15050	88.45	141.57	119.67
16550	98.56	132.63	134.65
18050	107.69	152.28	145.62
19550	117.73	162.04	150.02
21050	127.28	171.59	163.49
22550	117.67	161.47	175.83
24050	115.74	159.66	187.89
25550	129.62	170.87	205.24
27050	130.34	172.50	214.19
28550	137.97	168.90	228.24
30050	147.05	183.77	245.48
31550	191.97	167.76	254.54
33050	191.03	194.09	269.09
34550	192.52	195.92	281.52
36050	197.37	192.30	299.20
37550	210.15	217.35	326.10
39050	219.80	210.98	329.71
40550	231.73	224.96	336.20
42050	238.25	252.74	346.37
43550	262.80	258.55	358.76

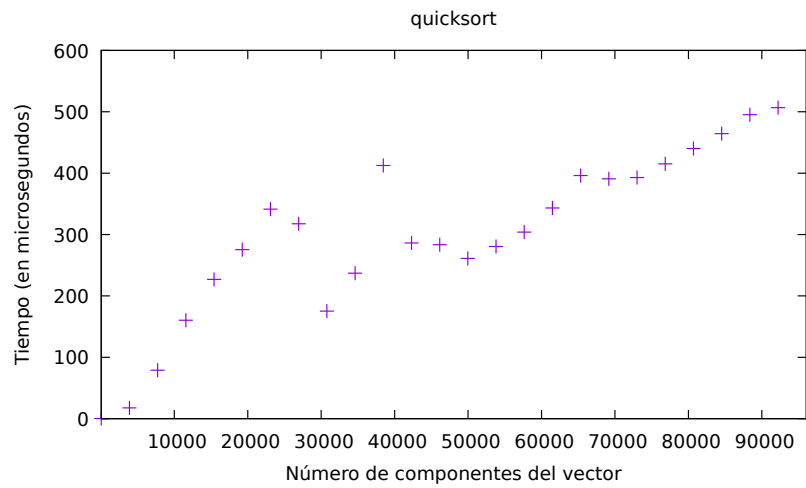
Cuadro 1: Tiempos de ejecución (en μs) del algoritmo de QuickSort

Así que como preveíamos, puesto que habíamos estudiado las características del hardware de cada ordenador, hemos visto que el ASUS al tener un i7 de 10ª generación ejecuta más rápido el algoritmo que el resto, mientras que el LENOVO es el computador que más tarda, lógicamente al tratarse de un i5, y el HP con un i7 de 9ª generación, que se correspondería con el equipo de nivel intermedio, tiene unos tiempos de ejecución levemente superiores al ASUS.

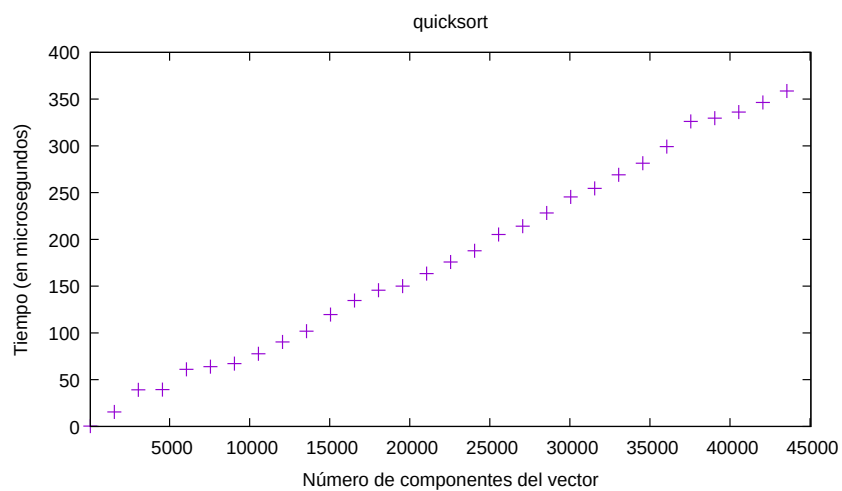
Ahora vamos a mostrar las gráficas resultantes tras calcular el tiempo que tarda la ejecución de este algoritmo para diferentes tamaños, en este caso, para distintos tamaños del vector.



(a) ASUS



(b) HP



(c) LENOVO

Figura 2: Representación gráfica de tiempos de ejecución del algoritmo de ordenación Quick-Sort.

4.2. Algoritmo de inserción

En la siguiente tabla se encuentran los datos obtenidos en este algoritmo por cada uno de los equipos en los que hemos ejecutado el algoritmo.

$N_{componentes}$	t_{ASUS}	t_{HP}	t_{LENOVO}
50	0.20	0.18	0.32
1550	75.77	165.44	113.40
3050	256.80	378.04	416.61
4550	568.78	586.46	818.87
6050	1009.34	1038.65	1318.29
7550	1563.83	1571.11	2040.42
9050	2223.38	2257.82	2893.16
10550	3041.16	3038.05	3937.94
12050	3990.62	3987.64	5111.43
13550	5006.11	5034.40	6412.50
15050	6150.48	6111.62	7911.75
16550	7465.37	7329.81	9605.05
18050	8826.78	8700.77	11396.08
19550	10378.18	10203.49	13402.47
21050	11990.83	11768.61	15511.25
22550	13870.88	13507.03	17763.31
24050	15767.71	15368.75	20213.18
25550	17623.01	17377.42	22797.11
27050	19843.40	19877.53	25575.44
28550	22034.17	22049.19	28426.29
30050	24340.38	24031.41	31521.96
31550	27098.83	26888.22	34782.56
33050	29862.88	29816.95	38191.71
34550	32503.73	32544.47	41713.63
36050	35181.93	34468.33	45353.92
37550	38327.38	38378.51	49245.56
39050	41369.21	41678.47	53230.43
40550	44358.82	44103.68	57379.06
42050	48124.07	47379.56	61712.14
43550	51624.04	50204.90	66215.14

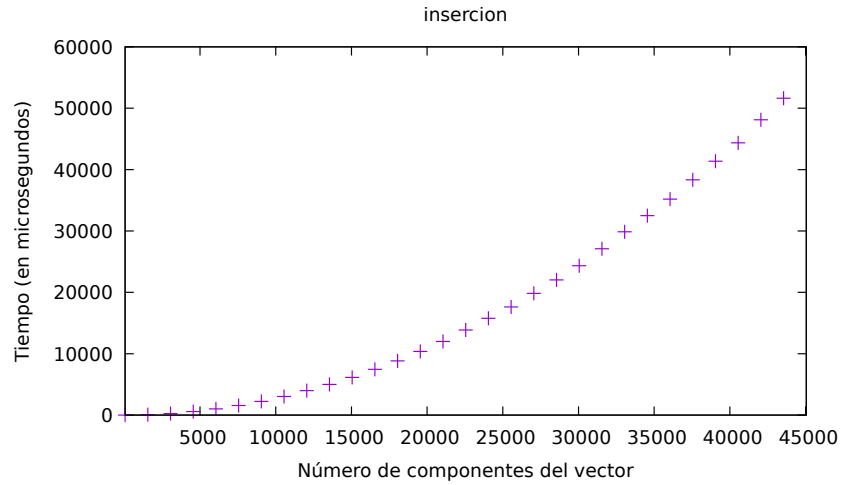
Cuadro 2: Tiempos de ejecución (en μs) del algoritmo de inserción

Tal y como podemos observar, tenemos que nuevamente el equipo de ASUS ofrece un **mejor rendimiento** respecto a los otros dos equipos en los que se ha realizado el análisis. Asimismo, el tiempo de ejecución aumenta considerablemente en cuanto el número de componentes de vector en comparación con los algoritmos de QuickSort o MergeSort.

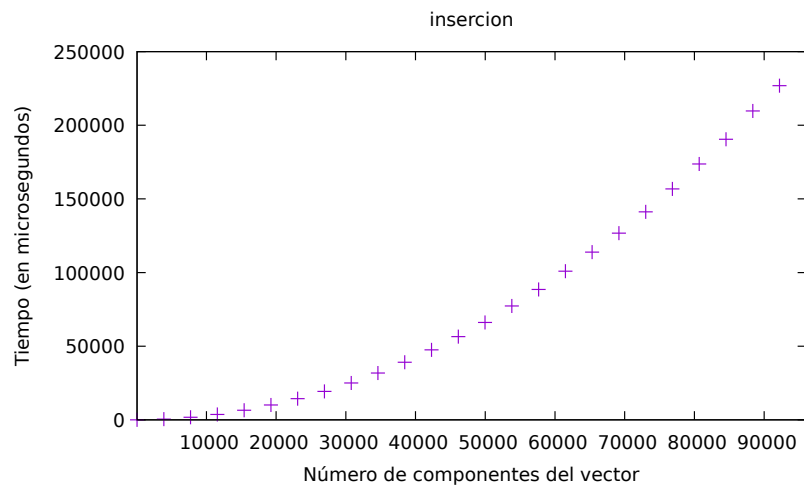


Figura 3: Ilustración del funcionamiento interno del algoritmo de inserción

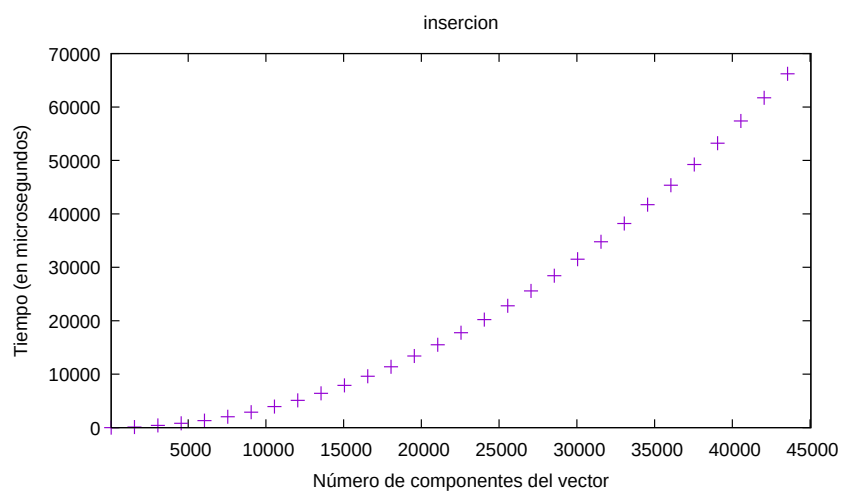
Las gráficas asociadas a cada equipo se pueden encontrar a continuación:



(a) ASUS



(b) HP



(c) LENOVO

Figura 4: Representación gráfica de tiempos de ejecución del algoritmo de inserción.

4.3. Algoritmo de Floyd

En la siguiente tabla se encuentran los datos obtenidos en este algoritmo por cada uno de los equipos en los que hemos ejecutado el algoritmo.

N_{nod}	t_{ASUS}	t_{HP}	t_{LENOVO}
5	0.09	0.10	0.13
35	4.63	5.04	3.79
65	28.11	36.27	22.68
95	98.97	59.42	76.20
125	206.65	291.02	171.84
155	250.74	340.20	294.25
185	368.58	490.17	466.89
215	572.04	588.29	727.49
245	846.54	873.17	1069.24
275	1193.13	1234.56	1530.57
305	1642.20	1666.67	2058.39
335	2164.11	2205.70	2755.76
365	2826.06	2846.01	3574.31
395	3528.34	3583.40	4484.65
425	4410.26	4465.64	5606.11
455	5383.56	5485.51	6820.05
485	6554.77	6483.90	8154.31
515	7855.67	7928.90	9760.62
545	9386.40	9268.55	11542.12
575	10957.08	10777.34	13740.25
605	12786.02	12425.00	15864.58
635	14618.06	14709.94	18181.38
665	16823.92	16768.84	21031.77
695	19147.07	18815.95	23953.15
725	21807.53	21948.21	27128.60

Cuadro 3: Tiempos de ejecución (en μs) del algoritmo de Floyd

En concordancia con los resultados obtenidos en las anteriores tablas, el ordenador que ofrece peores tiempos es el LENOVO, siendo el de ASUS el que ofrece resultados con mayor rapidez.

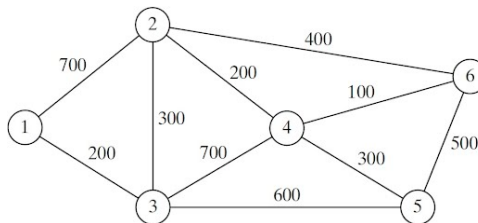
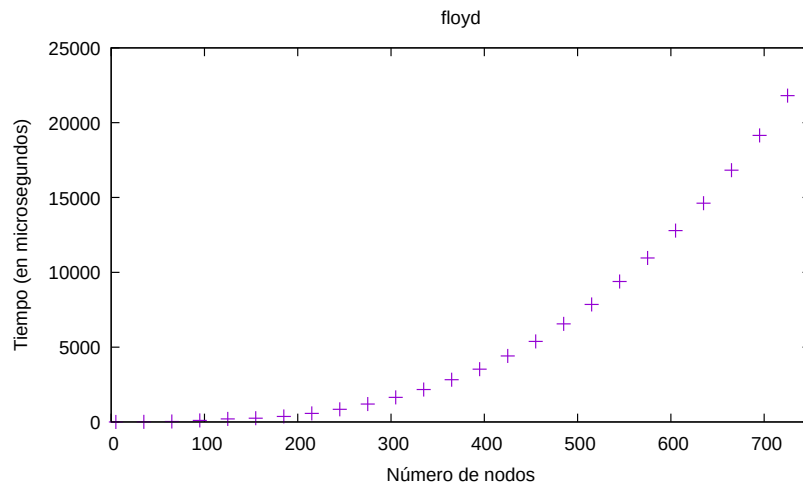
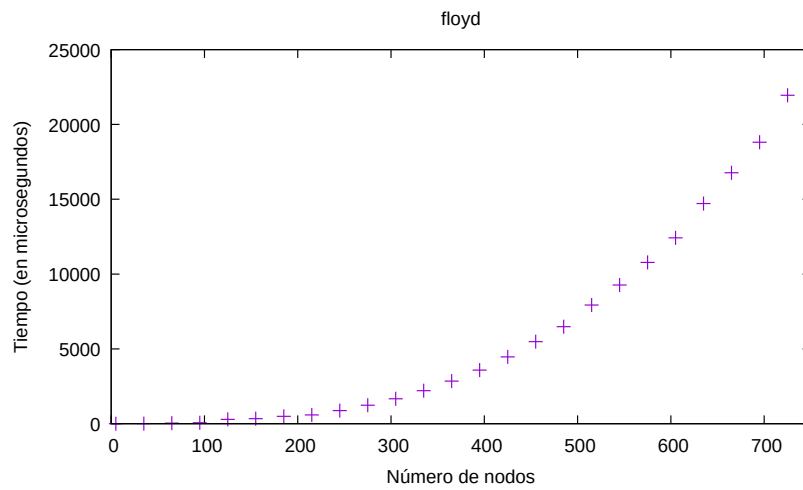


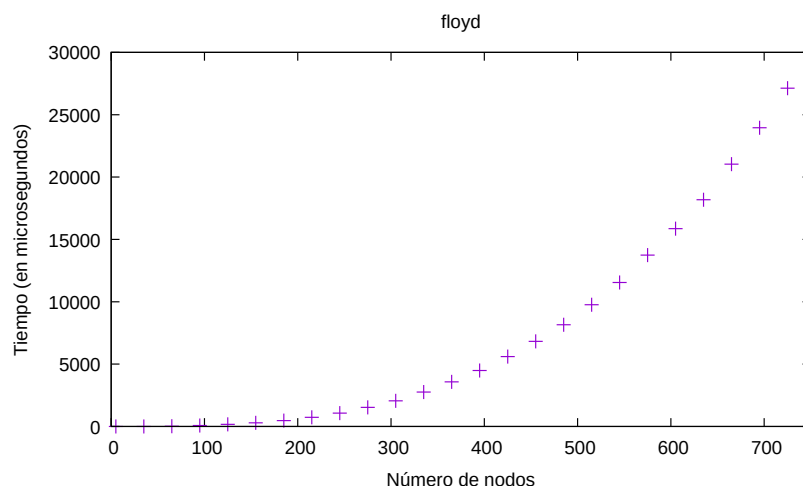
Figura 5: Representación gráfica de un grafo.



(a) ASUS



(b) HP



(c) LENOVO

Figura 6: Representación gráfica de tiempos de ejecución del algoritmo Floyd.

4.4. Algoritmo Hanoi

En la siguiente tabla se encuentran los datos obtenidos en este algoritmo por cada uno de los equipos en los que hemos ejecutado el algoritmo.

N_{disk}	t_{ASUS}	t_{HP}	t_{LENOVO}
2	0.04	0.10	0.16
3	0.08	0.10	0.20
4	0.08	0.14	0.20
6	0.08	0.42	0.22
7	0.24	0.36	0.26
8	0.18	0.50	0.48
10	0.22	0.84	0.52
11	0.36	1.22	0.74
12	1.10	3.90	1.88
13	2.38	6.52	4.06
14	5.26	6.26	6.98
16	10.40	11.82	14.02
17	41.72	47.08	51.68
18	83.38	97.78	101.66
20	170.68	313.84	199.10
21	340.14	494.60	373.10
22	1185.76	1084.10	1605.38
23	1776.36	2082.46	2712.62
24	3295.08	3465.74	4693.84
26	6642.10	6844.50	9232.04

Cuadro 4: Tiempos de ejecución (en μs) del algoritmo de Floyd

Verificando los resultados obtenidos en los análisis anteriores, para el algoritmo de hanoi, ASUS ofrece unos mejores tiempos de ejecución, seguido de HP y en último lugar LENOVO, que genera tiempos de ejecución mayores.

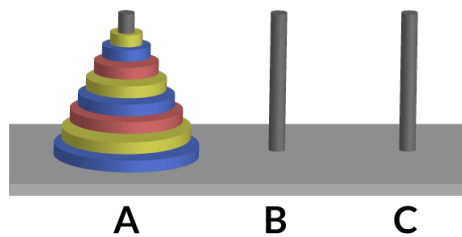
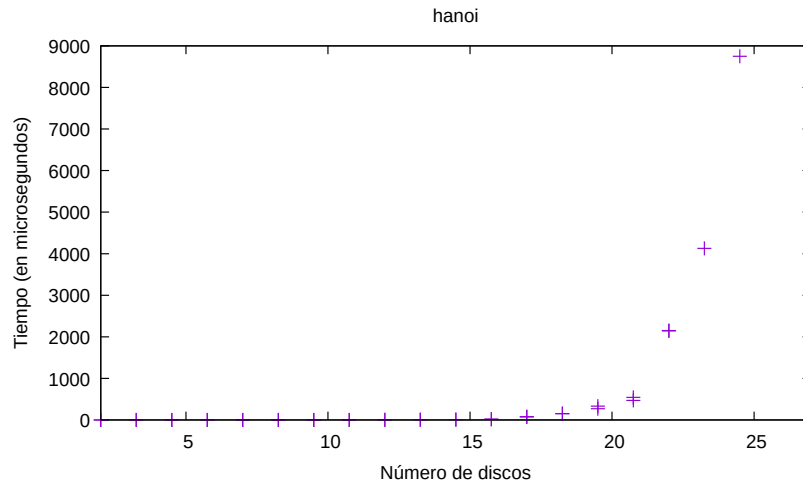
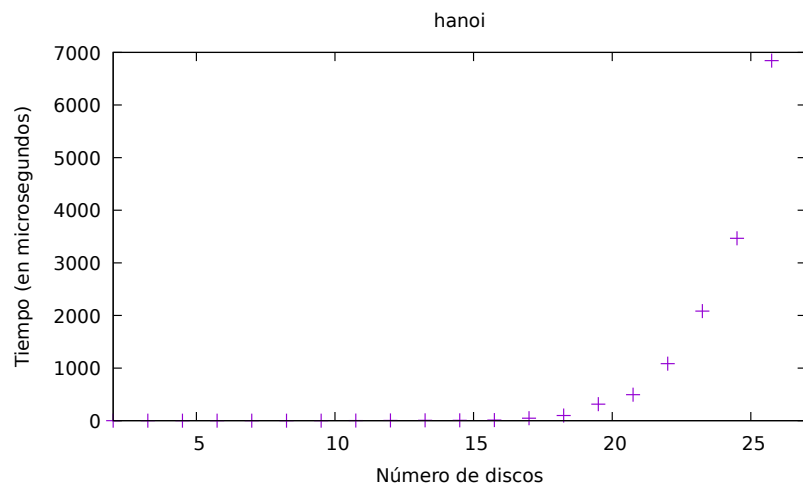


Figura 7: Representación gráfica del juego de las Torres de Hanoi.

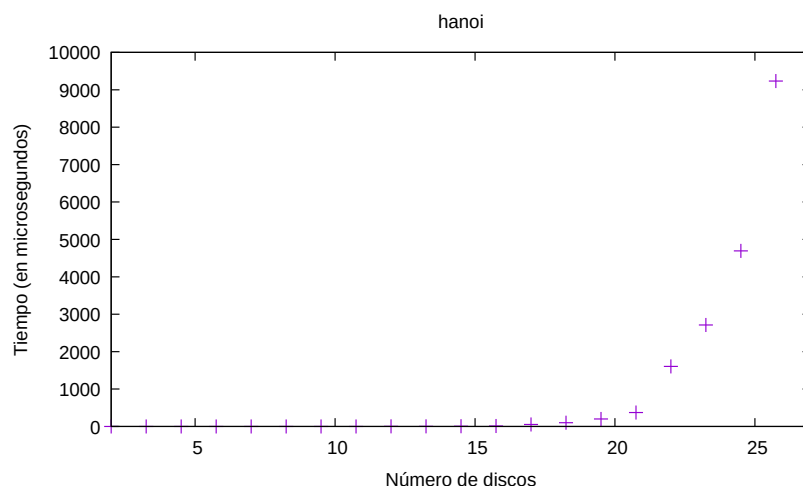
Ahora vamos a mostrar las gráficas resultantes tras calcular el tiempo que tarda la ejecución de este algoritmo para diferentes tamaños, en este caso, para distinto número de discos.



(a) ASUS



(b) HP



(c) LENOVO

Figura 8: Representación gráfica de tiempos de ejecución del algoritmo de resolución del juego de las Torres de Hanoi.

5. Comparación de ejecuciones con diferentes niveles de optimización

5.1. Conceptos teóricos

A continuación, usaremos el algoritmo de Floyd para ilustrar uno de los objetivos mencionados de la práctica, el cual consiste en analizar la eficiencia de un mismo algoritmo para optimizaciones del compilador diferentes. En concreto, al igual que en el resto de ejecuciones, usamos g++ como compilador, y analizaremos las siguientes opciones de optimización:

- **-O0 (sin optimización):** Desconecta por completo la optimización y es el predeterminado si no se especifica ningún nivel.
- **-O1:** El nivel de optimización más básico. El compilador intentará producir un código rápido y pequeño sin tomar mucho tiempo de compilación.
- **-O2:** Un paso delante de -O1. Es el nivel recomendado de optimización, a no ser que el sistema tenga necesidades especiales. -O2 activará algunas opciones añadidas a las que se activan con -O1. Con -O2, el compilador intentará aumentar el rendimiento del código sin comprometer el tamaño y sin tomar mucho más tiempo de compilación.
- **-O3:** El nivel más alto de optimización posible. Activa optimizaciones que son caras en términos de tiempo de compilación y uso de memoria. El hecho de compilar con -O3 no garantiza una forma de mejorar el rendimiento y, de hecho, en muchos casos puede ralentizar un sistema debido al uso de binarios de gran tamaño y mucho uso de la memoria.

5.2. Tablas de ejecución

Los tiempos de ejecución para los diferentes niveles de optimización se presentan en la siguiente tabla.

N_{nodos}	T_{O0}	T_{O1}	T_{O2}	T_{O3}
5	0.17	0.08	0.06	0.07
35	53.95	4.47	3.02	3.52
65	380.01	27.30	26.04	35.80
95	490.60	92.52	124.14	127.20
125	841.45	205.10	275.73	198.03
155	1494.98	386.86	360.05	219.22
185	2494.07	447.26	367.53	368.06
215	3892.51	688.94	564.97	573.63
245	5761.86	1032.51	849.70	843.58
275	8168.23	1443.59	1183.75	1205.76
305	10994.11	1997.49	1617.42	1629.11
335	14597.46	2648.92	2166.47	2158.78
365	19297.67	3386.93	2794.19	2793.36
395	24360.22	4255.16	3517.28	3520.41
425	30149.47	5370.36	4386.85	4494.97
455	37490.57	6552.51	5482.11	5511.59
485	46042.69	7993.95	6694.07	6717.87
515	53611.57	9620.67	7998.24	7933.97
545	63969.28	11346.75	9421.14	9432.59
575	76580.04	13442.25	11065.08	11010.14
605	87898.27	15581.91	12906.25	12797.45
635	102621.15	18516.74	14833.09	14603.30
665	117634.85	21025.31	16875.94	16933.83
695	133193.50	23857.43	19786.48	19152.38
725	152998.80	27005.65	22494.99	22495.65

Cuadro 5: Tiempos de ejecución (en μs) para algoritmo Floyd (Asus)

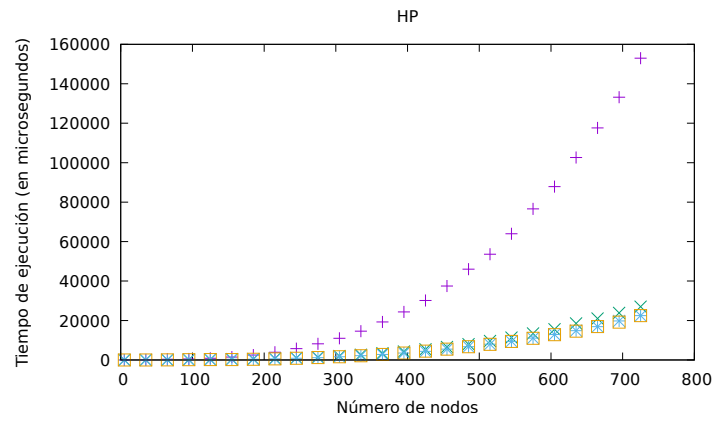


Figura 9: Gráfica de tiempos de ejecución (Asus)

N_{nodos}	T_{O0}	T_{O1}	T_{O2}	T_{O3}
5	0.21	0.10	0.09	0.10
35	39.48	3.78	6.07	5.20
65	251.96	46.40	48.65	42.72
95	574.10	179.56	146.43	145.99
125	793.83	301.52	266.95	175.65
155	1510.12	286.76	318.89	309.46
185	2495.91	449.75	376.88	404.58
215	3914.89	708.44	577.90	586.26
245	5701.98	1028.52	853.82	875.53
275	8082.82	1492.51	1207.13	1231.23
305	10928.36	1971.31	1638.46	1670.67
335	14455.55	2698.91	2178.86	2174.05
365	18929.88	3473.24	2837.69	2833.66
395	24332.74	4414.80	3564.82	3646.11
425	29848.49	5443.34	4421.02	4510.19
455	36908.89	6591.26	5360.57	5432.05
485	44582.97	8053.35	6493.54	6667.46
515	53470.68	9527.39	7778.40	7889.72
545	63172.00	11443.67	9345.16	9462.12
575	75819.62	13436.56	10767.32	10656.11
605	86390.05	15466.07	12933.42	12717.99
635	100187.65	17941.33	14708.66	14143.55
665	117042.70	20676.88	16400.16	16729.92
695	131518.20	23515.96	18637.03	19198.70
725	147998.15	26638.71	21326.99	21331.96

Cuadro 6: Tiempos de ejecución (en μs) para algoritmo Floyd (HP)

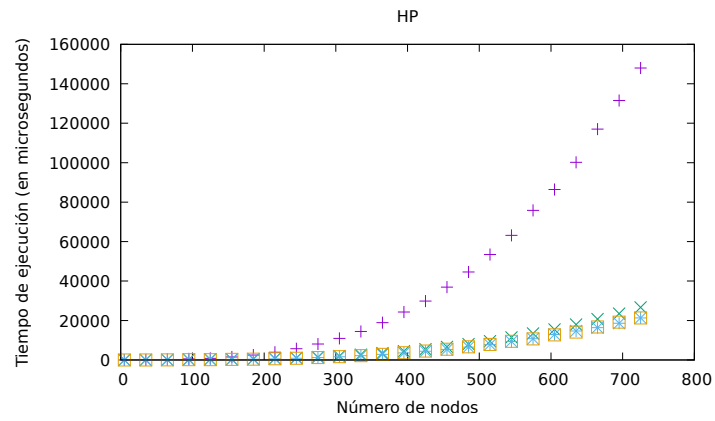


Figura 10: Gráfica de tiempos de ejecución (HP)

N_{nodos}	T_{O0}	T_{O1}	T_{O2}	T_{O3}
5	0.23	0.17	0.23	0.33
35	29.84	6.48	5.50	5.55
65	203.45	35.44	31.70	37.05
95	645.68	135.50	126.25	116.51
125	1138.86	294.69	266.38	199.54
155	2220.49	530.83	466.20	370.52
185	3524.26	866.54	794.60	661.22
215	5531.06	1340.55	1108.49	1120.88
245	9879.07	2039.46	1490.56	1765.31
275	14760.01	2775.61	1988.81	2839.12
305	21002.12	3709.97	2736.05	2645.93
335	21130.67	4774.23	3574.84	4324.62
365	28563.90	5061.25	4065.97	4587.72
395	35266.89	7312.15	5092.35	6049.83
425	43856.27	9466.16	6145.76	7357.14
455	63704.19	11719.27	8768.52	9735.48
485	71028.24	15156.26	10372.40	9273.38
515	85424.65	24115.51	13265.73	11000.40
545	103213.98	16958.10	14592.08	12854.59
575	123200.59	18765.49	15596.62	24142.65
605	134205.15	20772.30	17569.12	29495.03
635	197191.95	31057.76	20804.73	34560.04
665	224866.25	27874.88	28951.74	32018.41
695	203138.40	35154.18	46677.95	27752.09
725	214510.65	50098.56	40081.61	35497.00

Cuadro 7: Tiempos de ejecución (en μs) para algoritmo Floyd (Lenovo)

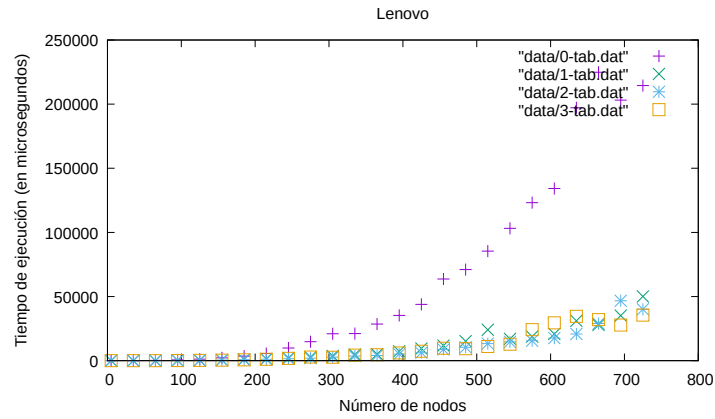


Figura 11: Gráfica de tiempos de ejecución (Lenovo)

5.3. Observaciones

Observando las gráficas se puede apreciar que, para pequeños valores del número de nodos, las diferencias entre los tiempos de ejecución para diferentes niveles de optimización son prácticamente despreciables. Sin embargo, a medida que va aumentando la complejidad del grafo, los

tiempos de ejecución para diferentes niveles de optimización se hacen más significativos, siendo que para el valor $n = 725$, el algoritmo optimizado es prácticamente el cuádruple de rápido que el algoritmo sin optimizar.

Por tanto, concluimos que, para ejecuciones de tamaños pequeños, las diferencias son apenas apreciables, mientras que para grandes valores la optimización sí que puede aumentar considerablemente los tiempos de ejecución. Se trata, por consiguiente, de un buen mecanismo de optimización del código.

6. Comparación de los algoritmos de ordenación

6.1. Objetivos

En esta sección compararemos los algoritmos de ordenación presentados previamente. El objetivo será sacar conclusiones relevantes relacionados con la adecuación de cada algoritmo a cada situación.

A continuación se presentan los tiempos de ejecución de cada algoritmo en cada equipo en los que se ha realizado esta experiencia.

$N_{componentes}$	T_{quick}	T_{heap}	T_{ins}	T_{sel}
50	0.17	0.23	0.20	0.00
1550	6.61	9.05	75.77	0.00
3050	14.03	18.94	256.80	405.64
4550	22.15	29.91	568.78	887.38
6050	30.74	41.86	1009.34	1743.89
7550	39.04	48.98	1563.83	2516.84
9050	46.95	59.41	2223.38	3478.01
10550	56.34	73.60	3041.16	4687.76
12050	71.14	111.73	3990.62	6069.77
13550	89.81	134.07	5006.11	7622.48
15050	88.45	91.58	6150.48	9379.73
16550	98.56	100.37	7465.37	11353.25
18050	107.69	110.64	8826.78	13419.11
19550	117.73	120.14	10378.18	15720.16
21050	127.28	130.39	11990.83	18222.62
22550	117.67	229.32	13870.88	20890.26
24050	115.74	175.66	15767.71	23723.39
25550	129.62	182.04	17623.01	26674.83
27050	130.34	171.59	19843.40	29887.24
28550	137.97	182.18	22034.17	33262.06
30050	147.05	193.19	24340.38	36738.72
31550	191.97	203.78	27098.83	40416.56
33050	191.03	214.28	29862.88	44399.06
34550	192.52	226.52	32503.73	48514.63
36050	197.37	234.89	35181.93	52767.88
37550	210.15	246.49	38327.38	57179.00
39050	219.80	256.88	41369.21	61972.05
40550	231.73	268.05	44358.82	66553.92
42050	238.25	278.93	48124.07	71651.73
43550	262.80	290.42	51624.04	76278.35

Cuadro 8: Tabla de comparación de tiempos de ejecución entre algoritmos de ordenación (Asus)

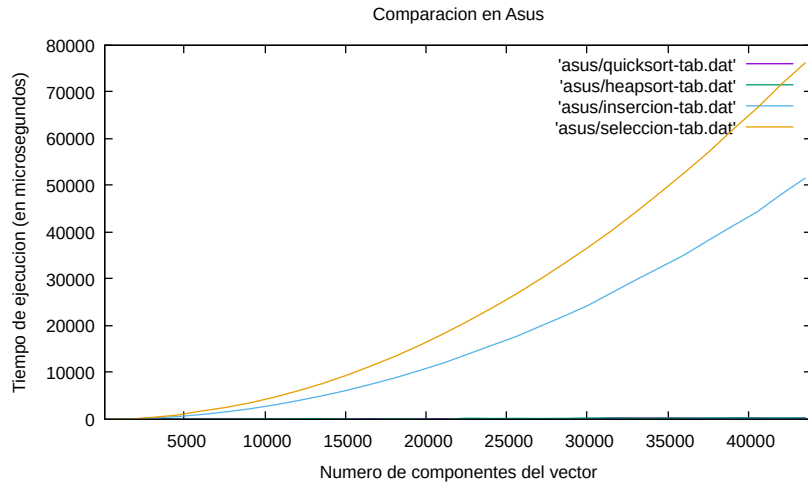
$N_{componentes}$	T_{quick}	T_{heap}	T_{ins}	T_{sel}
50	0.20	0.22	0.18	0.26
1550	5.24	7.20	65.22	93.16
3050	12.84	15.26	321.24	365.10
4550	24.10	26.14	647.40	940.48
6050	46.02	48.90	1036.40	1488.90
7550	64.02	71.06	1618.74	2126.38
9050	126.04	110.92	2280.68	3021.74
10550	164.94	153.54	3017.28	4092.94
12050	193.14	177.70	4005.42	5308.02
13550	222.10	204.18	5016.44	6881.72
15050	247.66	228.52	6221.24	8541.68
16550	271.48	251.66	7543.96	10907.70
18050	297.54	277.96	8895.32	12371.38
19550	313.38	304.58	10479.46	13904.10
21050	325.40	331.72	12000.74	16005.40
22550	268.34	355.20	13841.24	19573.20
24050	243.04	533.96	15701.64	20729.80
25550	301.44	256.20	17659.94	23292.68
27050	375.30	190.04	19860.74	28970.88
28550	464.68	201.76	22197.46	30344.76
30050	483.46	212.80	24393.30	34703.62
31550	518.08	229.00	27505.86	37670.52
33050	521.66	352.70	30478.94	38029.22
34550	549.56	404.38	33168.82	41404.42
36050	469.90	405.24	35869.34	44965.98
37550	490.40	294.02	39764.76	48548.56
39050	492.92	306.16	42636.54	52687.52
40550	531.98	320.70	46448.22	56478.82
42050	532.06	383.94	50855.00	60501.86
43550	558.84	331.54	54694.44	68268.24

Cuadro 9: Tabla de comparación de tiempos de ejecución entre algoritmos de ordenación (HP)

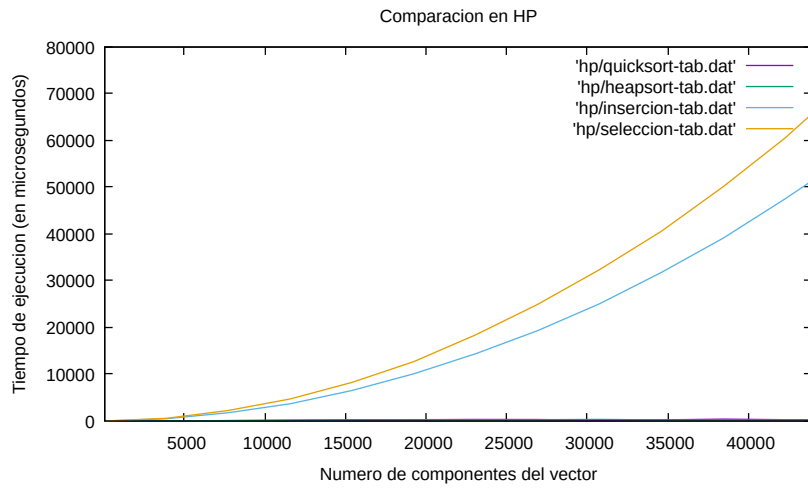
$N_{componentes}$	T_{quick}	T_{heap}	T_{ins}	T_{sel}
50	0.35	0.58	0.32	0.34
1550	15.56	30.47	113.40	150.44
3050	39.12	48.51	416.61	517.39
4550	39.49	60.96	818.87	1151.71
6050	61.13	67.12	1318.29	1969.91
7550	64.00	76.26	2040.42	3044.82
9050	67.17	105.57	2893.16	4373.70
10550	77.66	118.94	3937.94	5785.53
12050	90.32	138.07	5111.43	8933.87
13550	101.90	163.47	6412.50	13236.58
15050	119.67	176.82	7911.75	16256.42
16550	134.65	180.48	9605.05	19545.66
18050	145.62	209.31	11396.08	23262.00
19550	150.02	221.17	13402.47	27114.96
21050	163.49	231.88	15511.25	31358.34
22550	175.83	259.55	17763.31	35875.34
24050	187.89	266.38	20213.18	41767.30
25550	205.24	283.95	22797.11	50257.00
27050	214.19	312.24	25575.44	57776.30
28550	228.24	322.75	28426.29	62347.18
30050	245.48	342.44	31521.96	63689.96
31550	254.54	368.07	34782.56	70027.92
33050	269.09	388.03	38191.71	83165.06
34550	281.52	405.24	41713.63	91810.12
36050	299.20	428.18	45353.92	78691.24
37550	326.10	446.28	49245.56	76481.60
39050	329.71	456.01	53230.43	81182.66
40550	336.20	481.33	57379.06	90248.08
42050	346.37	504.41	61712.14	93852.48
43550	358.76	518.26	66215.14	103615.64

Cuadro 10: Tabla de comparación de tiempos de ejecución entre algoritmos de ordenación (Lenovo)

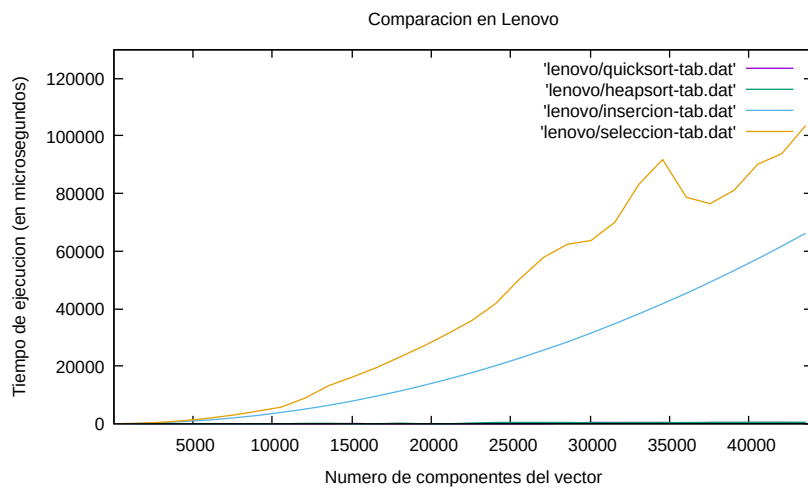
A continuación se presentan todas y cada una de las gráficas asociadas a las tablas anteriores:



(a) ASUS



(b) HP



(c) LENOVO

Figura 12: Comparación de los algoritmos de ordenación.

De las gráficas extraídas anteriores, podemos sacar las siguientes conclusiones:

- Para grandes valores de componentes de vector, los algoritmos de HeapSort y QuickSort presentan un muy buen comportamiento.
- Los algoritmos de inserción y de selección ofrecen peor rendimiento respecto a QuickSort y HeapSort (su orden de eficiencia es mayor).
- Para tamaños pequeños, las diferencias entre los cuatro algoritmos son prácticamente despreciables, por lo que su uso debería optarse más por la facilidad de implementación de dichos algoritmos.

7. Eficiencia de mejor y peor caso en los algoritmos de Inserción y Selección

El número de operaciones elementales que se realizan en cada uno de los algoritmos que hemos analizado fluctúan en gran medida en función de la configuración inicial de los valores de entrada. En esta sección analizaremos los algoritmos de Inserción y de Selección tanto para el mejor como el peor caso.

7.1. Fundamento teórico

Para ambos algoritmos, cuando nos fijamos en sus implementaciones podemos observar que el mayor número de operaciones elementales se realizan cuando los vectores están ordenados en orden decreciente (esto es, $a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$). Asimismo, cuando los vectores están totalmente ordenados en orden creciente, el número de operaciones es mínima ($a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$).

Por tanto, para poder probar tanto los mejores casos como los peores casos, se han creado 4 nuevos archivos fuentes, donde 2 proceden del mejor y peor caso para Inserción y 2 proceden del análogo para Selección. El único cambio con respecto a los originales es que, en lugar de inicializar los vectores con valores aleatorios, se ha optado por inicializar los valores con un cierto orden.

7.2. Resultados experimentales

Realizando lo expuesto en la subsección anterior, obtenemos las siguientes tablas y gráficas:

$N_{\text{componentes}}$	T_{mejor}	T_{prom}	T_{peor}
5	0.04	0.20	0.06
1807	0.28	75.77	225.06
3609	0.48	256.80	791.98
5410	0.70	568.78	1593.14
7212	0.90	1009.34	2845.48
9014	0.90	1563.83	4422.58
10816	1.04	2223.38	6348.80
12618	1.22	3041.16	8626.38
14419	1.40	3990.62	11245.12
16221	1.60	5006.11	14207.46
18023	1.90	6150.48	17528.46
19825	2.22	7465.37	21166.88
21627	2.86	8826.78	25169.66
23428	3.10	10378.18	29561.40
25230	3.34	11990.83	34248.52
27032	3.60	13870.88	39323.44
28834	3.80	15767.71	44735.92
30636	4.04	17623.01	50478.50
32437	4.26	19843.40	56589.34
34239	4.88	22034.17	63040.52
36041	5.84	24340.38	69836.20
37843	6.16	27098.83	77006.70
39645	6.48	29862.88	84496.20
41446	6.76	32503.73	92366.88
43248	8.98	35181.93	100561.40

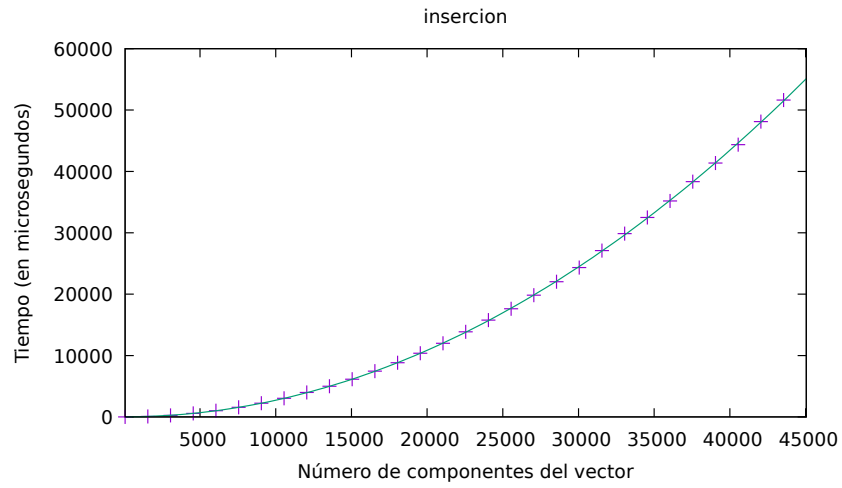
Cuadro 11: Tiempos de ejecución, en μs , para mejor caso, caso promedio y peor caso (Asus) para Inserción

8. Eficiencia híbrida

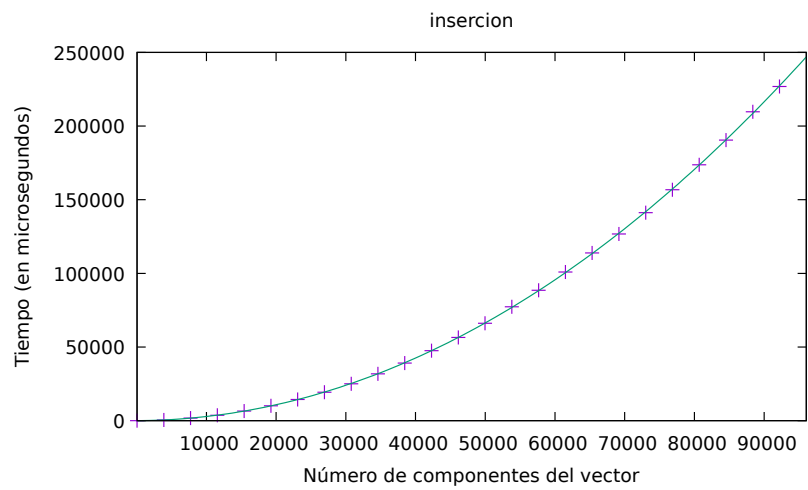
En esta sección trataremos los datos obtenidos de la sección anterior mediante técnicas estadísticas para comprobar la consistencia de los datos experimentales con los calculados teóricamente.

8.1. Algoritmo de inserción

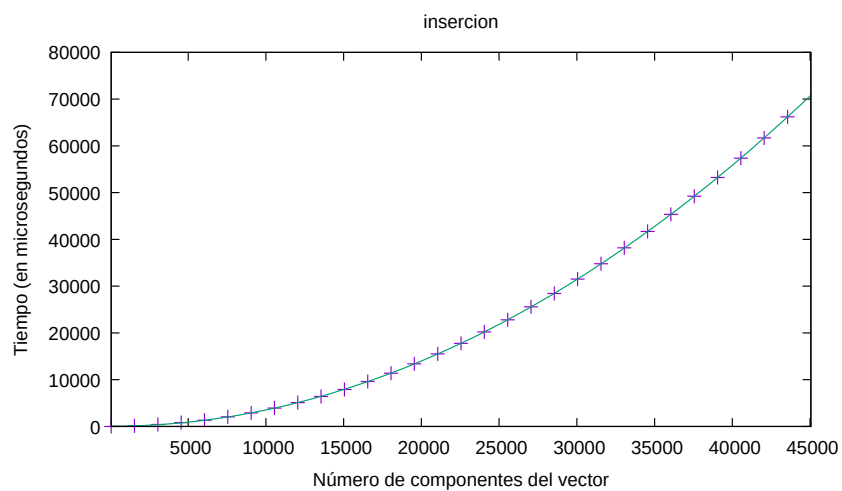
Las gráficas con las curvas de regresión son las siguientes:



(a) ASUS



(b) HP



(c) LENOVO

Figura 13: Gráficas de regresión de los algoritmos de Inserción.

Para cada una de ellas se han obtenido los siguientes datos:

Equipo	Función de regresión	Coeficiente de determinación
Asus	$2,719210^{-5}x^2 - 0,00212952x + 22,2497$	1,0000
HP	$2,6926810^{-5}x^2 - 0,0250169x + 353,105$	1,0000
Lenovo	$3,4895510^{-5}x^2 - 0,000620098x + 48,0855$	1,0000

Cuadro 12: Funciones de ajuste del algoritmo de Inserción en diferentes equipos

Por tanto, como en los tres casos el coeficiente de determinación es 1, el ajuste para el algoritmo de Inserción usando una función cuadrática es perfecto.

8.2. Algoritmo QuickSort

De acuerdo con lo calculado previamente, veamos si la regresión superlineal es un buen ajuste. Mediante técnicas estadísticas obtenemos los siguientes valores de regresión en cada uno de los equipos:

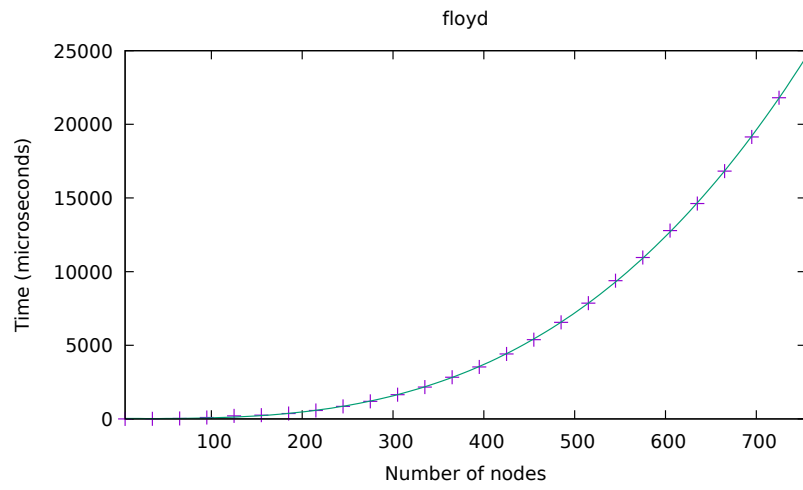
Equipo	Función de regresión	Coeficiente de determinación
Asus	$5,2110^{-4}x \log(x) + 5,112$	0,9798
HP	$3,6510^{-4}x \log(x) + 50$	0,7599
Lenovo	$7,7210^{-4}x \log(x) + 5,423$	0,9969

Cuadro 13: Funciones de ajuste del algoritmo QuickSort en diferentes equipos

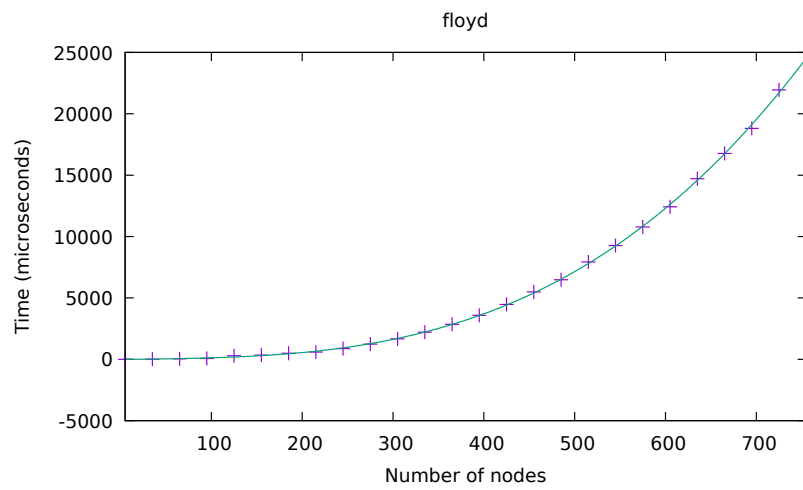
Las gráficas de regresión, así como los puntos experimentales obtenidos se pueden apreciar en las siguientes gráficas:

8.3. Algoritmo Floyd

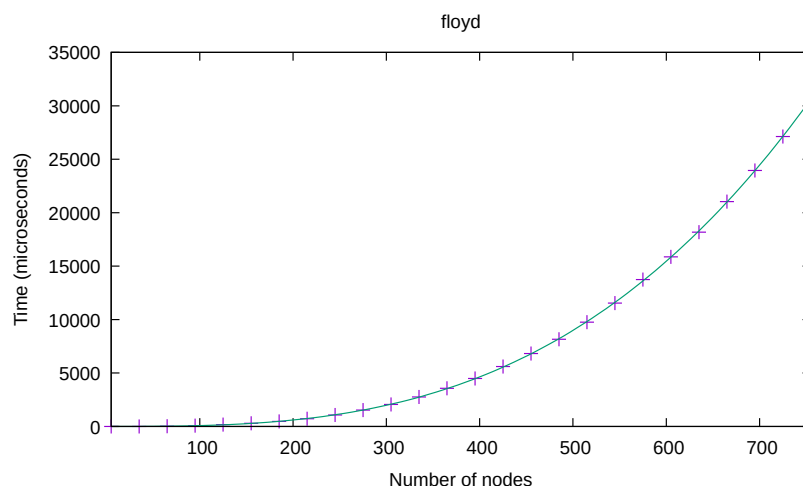
Las gráficas con las curvas de regresión son las siguientes:



(a) ASUS



(b) HP



(c) LENOVO

Figura 14: Gráficas de regresión de los algoritmos de Floyd.

Para cada una de ellas se han obtenido los siguientes datos:

Equipo	Función de regresión	Coefficiente de determinación
Asus	$5,5767610^{-5}x^3 + 0,00138722x^2 - 0,315202x + 34,0467$	1,0000
HP	$5,9684810^{-5}x^3 - 0,00353189x^2 + 1,17214x - 20,9986$	0,9997
Lenovo	$6,9666910^{-5}x^3 + 0,00112974x^2 - 0,00362409x + 0,857106$	1,0000

Cuadro 14: Funciones de ajuste del algoritmo de Floyd en diferentes equipos

Por tanto, como en los tres casos el coeficiente de determinación es 1, el ajuste para el algoritmo Floyd usando una función cúbica es perfecto.

9. Conclusión

En esta práctica hemos puesto a prueba