MECANIQUE DU SOLIDE

Pr. M. BENTALEB

Division vectorielle :

Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de E, on se propose de déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ de E solution de l'équation :

$$\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$$

On dit que $\vec{x}$ est le résultat de la division vectorielle.

- Condition d'existence de la solution :

$\vec{a}$ et $\vec{b}$ doivent être orthogonaux $\left(\vec{a} \neq \vec{0}\right)$.

En conséquence, les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{a}$ sont contenus dans le plan perpendiculaire à $\vec{b}$.

Soit $\vec{x}_0$ une solution particulière telle que $\vec{x}_0 \cdot \vec{a} = 0$.

On a :

$$\vec{x}_0 \wedge \vec{a} = \vec{b}$$

$$\Longrightarrow \vec{a} \wedge (\vec{x}_0 \wedge \vec{a}) = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{a})}_{= \|\vec{a}\|^2} \vec{x}_0 - \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{x}_0)}_{= 0} \vec{a} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

On en déduit alors que :

$$\vec{x}_0 = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}$$

Or :

$$\begin{cases} \vec{x}_0 \wedge \vec{a} = \vec{b} \\ \vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b} \end{cases} \Longrightarrow (\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge \vec{a} = \vec{0}$$

D'où la solution générale est donnée par :

$$\vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} + \lambda \vec{a} \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}$$

I.5 Moment en un point d'un vecteur glissant :

Le moment d'un vecteur glissant $\vec{V}$, de support (D)passant par le point P, par rapport à un point A est défini par :

$$\vec{m}_A(\vec{V}) = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}$$

Soit $Q \in (D)$: $\vec{m}_A(\vec{V}) = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V} = \left(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP}\right) \wedge \vec{V}$

$$= \overrightarrow{AQ} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{QP} \wedge \vec{V} = \overrightarrow{AQ} \wedge \vec{V}$$

Le moment de $\vec{V}$ est indépendant du point P choisi sur (D).

I.6 Moment d'un vecteur par rapport à un axe :

Soit Δ un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$ et passant par le point O. Le moment de $\left(P, \vec{V}\right)$ par rapport à Δ est la projection sur cet axe du moment de $\left(P, \vec{V}\right)$ par rapport à O :

$$m_\Delta(\vec{V}) = \vec{m}_O\left(\vec{V}\right) \cdot \vec{u}$$

Ce résultat est valable quelque soit le point O sur l'axe Δ.

I-Champ de vecteurs équiprojectif et antisymétrique:

II.1 Application antisymétrique et linéaire :

$$\mathcal{L}: E \longrightarrow E$$
$$\vec{a} \longrightarrow \mathcal{L}(\vec{a})$$

Définition : L'application $\mathcal{L}$ est antisymétrique si :

$$\forall\ \vec{x} \text{ et } \vec{y} \in E : \quad \vec{x} \cdot \mathcal{L}(\vec{y}) = -\vec{y} \cdot \mathcal{L}(\vec{x})$$

Définition : L'application $\mathcal{L}$ est linéaire si:

$$\forall\ \vec{x} \text{ et } \vec{y} \in E, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \mathcal{L}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\, \mathcal{L}(\vec{x}) + \beta\, \mathcal{L}(\vec{y})$$

Propriété 1: Toute application antisymétrique $\mathcal{L}$ est linéaire.

En effet :

$\forall\ \vec{x}_1$ et $\vec{x}_2 \in E$, $\forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\alpha_1\, \vec{x}_1 + \alpha_2\, \vec{x}_2) \cdot \mathcal{L}(\vec{y}) = -\vec{y} \cdot \mathcal{L}(\alpha_1\, \vec{x}_1 + \alpha_2\, \vec{x}_2) \quad \forall \vec{y} \in E$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1\, \vec{x}_1 \cdot \mathcal{L}(\vec{y}) + \alpha_2\, \vec{x}_2 \cdot \mathcal{L}(\vec{y}) = -\vec{y} \cdot \mathcal{L}(\alpha_1\, \vec{x}_1 + \alpha_2\, \vec{x}_2)$$

Or $\mathcal{L}$ est une application antisymétrique, alors :

$$\vec{x}_1 \cdot \mathcal{L}(\vec{y}) = -\vec{y} \cdot \mathcal{L}(\vec{x}_1)$$

$$\vec{x}_2 \cdot \mathcal{L}(\vec{y}) = -\vec{y} \cdot \mathcal{L}(\vec{x}_2)$$

Par conséquent, on obtient :

$$-\vec{y} \cdot \left(\alpha_1\, \mathcal{L}(\vec{x}_1) + \alpha_2\, \mathcal{L}(\vec{x}_2)\right) = -\vec{y} \cdot \mathcal{L}(\alpha_1\, \vec{x}_1 + \alpha_2\, \vec{x}_2)$$

Cette relation étant vraie quel que soit $\vec{y}$, il en résulte :

$$\mathcal{L}(\alpha_1\, \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2) = \alpha_1\, \mathcal{L}(\, \vec{x}_1) + \alpha_2\, \mathcal{L}(\vec{x}_2)$$

Ce qui prouve que $\mathcal{L}$ est une application linéaire.

Propriété 2: Par rapport à une base orthonormée, une application antisymétrique est représentée par une matrice antisymétrique M $({}^tM = -M)$ qui s'écrit sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

En effet :

Soit M la matrice de l'application antisymétrique $\mathcal{L}$ dans la base orthonormée $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ et supposons que :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Avec

$$a_{ij} = \vec{e}_i \cdot \mathcal{L}(\vec{e}_j)$$

Or

$$a_{ij} = \vec{e}_i \cdot \mathcal{L}(\vec{e}_j) = -\vec{e}_j \cdot \mathcal{L}(\vec{e}_i) = -a_{ji} \Longrightarrow a_{ij} = -a_{ji}$$

$\Longrightarrow$ La matrice M est alors antisymétrique $({}^tM = -M)$.

En plus :

- $a_{ii} = -a_{ii} \Longrightarrow a_{ii} = 0 \Longrightarrow$ les éléments diagonaux sont nuls.

- Si on note d’une manière arbitraire :

$a_{12} = -c$; $a_{13} = b$ et $a_{23} = -a$, on aura :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

Propriété 3: $\mathcal{L}$ est une application antisymétrique si et seulement si $\exists!\ \vec{R} \in E$ tel que $\forall\ \vec{x} \in E$:

$$\mathcal{L}(\vec{x}) = \vec{R} \wedge \vec{x}$$

En effet :

$\Rightarrow$) $\mathcal{L}$ est une application antisymétrique $\Longrightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\vec{R} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

On vérifie que :

$$\mathcal{L}(\vec{x}) = \vec{R} \wedge \vec{x} \quad \forall\ \vec{x} \in E$$

Montrons que $\vec{R}$ est unique. Pour cela soient $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ deux solutions possibles, alors :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\vec{x}) = \vec{R}_1 \wedge \vec{x} \\ \mathcal{L}(\vec{x}) = \vec{R}_2 \wedge \vec{x} \end{cases} \quad \forall\, \vec{x} \in E$$

D'où :

$$\left(\vec{R}_1 - \vec{R}_2\right) \wedge \vec{x} = \vec{0} \;\; \forall\, \vec{x} \in E \;\Longrightarrow\; \vec{R}_1 = \vec{R}_2$$

$\Leftarrow)$ Supposons que $\exists\, \vec{R} \in E$ tel que $\forall\, \vec{x} \in E : \mathcal{L}(\vec{x}) = \vec{R} \wedge \vec{x}$ et montrons que $\mathcal{L}$ est une application antisymétrique :

$$\vec{x} \cdot \mathcal{L}(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \left(\vec{R} \wedge \vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \vec{R}, \vec{y}\right) = -\left(\vec{y}, \vec{R}, \vec{x}\right)$$

$$= -\vec{y} \cdot \left(\vec{R} \wedge \vec{x}\right) = -\,\vec{y} \cdot \mathcal{L}(\vec{x})$$

Donc $\mathcal{L}$ est une application antisymétrique.

II-2 Champ de vecteurs :

$$\vec{H} : \xi \longrightarrow E$$

$$M \longrightarrow \vec{H}(M)$$

- Exemples : Champ de vitesse

Champ électrique

Champ de force qui s'écrit par exemple :

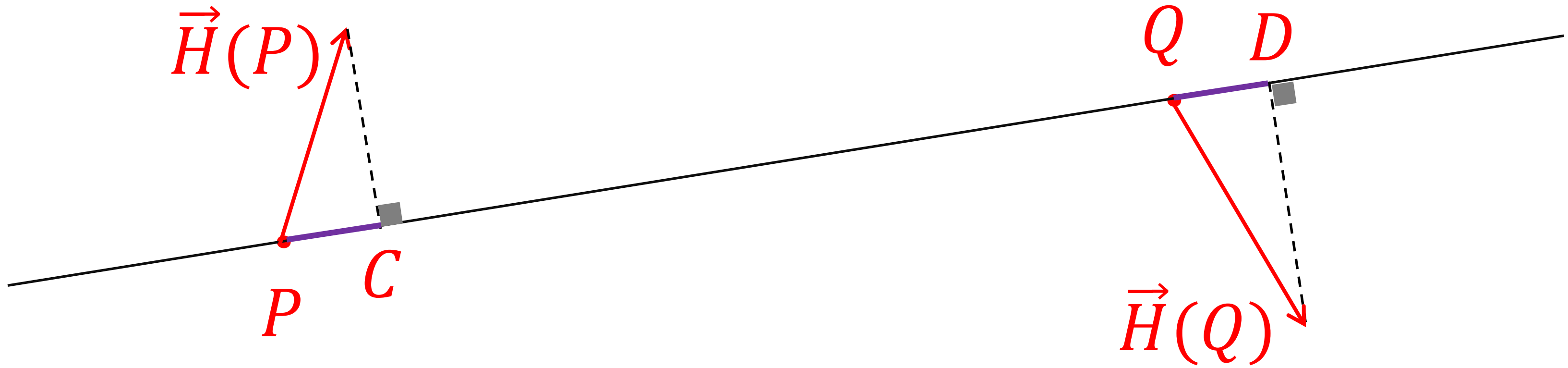
$$\vec{F} = xy\vec{i} + z\vec{j} + (y - z)\vec{k}$$

Champ d'accélération…..etc

II.3 Définition d'un champ de vecteurs équiprojectif :

Un champ de vecteurs $\overrightarrow{H}$ est dit équiprojectif si et seulement si :

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{H}(P) = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{H}(Q) \quad \forall\, P, Q \in \ \xi \times \xi$$



Ce qui signifie que :

$$PC = QD$$

II.4 Champ de vecteurs antisymétrique:

Définition : Un champ vectoriel $\vec{H}$ est antisymétrique s'il existe une application antisymétrique $\mathcal{L}$ telle que :

$$\forall\, P,Q \in \xi \quad \vec{H}(P) = \vec{H}(Q) + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{QP}\right)$$

$$\Updownarrow$$

Il existe un vecteur unique $\vec{R}$ tel que :

$$\forall\, P,Q \in \xi \quad \vec{H}(P) = \vec{H}(Q) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$$

On dit que $\vec{R}$ est la résultante générale du champ antisymétrique $\vec{H}$.

Proposition : Un champ de vecteurs équiprojectif est antisymétrique et réciproquement.

$\Longrightarrow$) Soit $\vec{H}$ un champ équiprojectif

$$\Longrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{H}(P) = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{H}(Q) \ \forall\ P, Q \in \ \xi$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \left[\vec{H}(P) - \vec{H}(Q)\right] = 0 \quad \forall\ \ P, Q\ \in \xi$$

$$\Longrightarrow \left[\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}\right] \cdot \left[\vec{H}(P) - \vec{H}(O) + \vec{H}(O) - \vec{H}(Q)\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}\right] \cdot \left[\vec{H}(P) - \vec{H}(O)\right] + \left[\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}\right] \cdot \left[\vec{H}(O) - \vec{H}(Q)\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}\right] \cdot \left[\vec{H}(P) - \vec{H}(O)\right] = -\left[\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}\right] \cdot \left[\vec{H}(O) - \vec{H}(Q)\right]$$

Comme $\vec{H}$ est équiprojectif alors :

$$\overrightarrow{PO} \cdot \left[\vec{H}(P) - \vec{H}(O)\right] = \overrightarrow{OQ} \cdot \left[\vec{H}(O) - \vec{H}(Q)\right] = 0$$

Donc :

$$\overrightarrow{OQ} \cdot [\vec{H}(P) - \vec{H}(O)] = -\overrightarrow{PO} \cdot [\vec{H}(O) - \vec{H}(Q)]$$
$$= -\overrightarrow{OP} \cdot [\vec{H}(Q) - \vec{H}(O)]$$

Considérons l'application $\mathcal{L}: E \longrightarrow E$

$$\overrightarrow{OP} \longrightarrow \mathcal{L}(\overrightarrow{OP}) = \vec{H}(P) - \vec{H}(O)$$

Alors :

$$\overrightarrow{OQ} \cdot \mathcal{L}(\overrightarrow{OP}) = -\overrightarrow{OP} \cdot \mathcal{L}(\overrightarrow{OQ})$$

Ce qui montre que l'application $\mathcal{L}$ ainsi définie est une application antisymétrique. Par conséquent, le champ $\vec{H}$ est antisymétrique puisqu'il existe une application antisymétrique $\mathcal{L}$ telle que :

$$\vec{H}(P) = \vec{H}(Q) + \mathcal{L}(\overrightarrow{QP})$$

$\Leftarrow$) Soit $\vec{H}$ un champ antisymétrique $\Longrightarrow$ $\exists\ \vec{R}$ tel que :

$$\vec{H}(P) = \vec{H}(Q) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP} \qquad \forall\ P, Q \in\ \xi$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{H}(P) = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{H}(Q) + \underbrace{\overrightarrow{PQ} \cdot \left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}\right)}_{=0} \quad \forall\ P, Q \in\ \xi$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{H}(P) = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{H}(Q) \quad \forall\ P, Q \in\ \xi$$

$\Longrightarrow$ $\vec{H}$ est un champ équiprojectif.

III. Torseurs :

Définition : Le torseur $(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{H}(O) \end{pmatrix}$

- Champ équiprojectif $\vec{H}$

$$\forall\, P, Q \in \xi \quad \vec{H}(P) = \vec{H}(Q) + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{QP}\right)$$

$\Leftrightarrow$ Il existe un vecteur unique $\vec{R}$ tel que :

$$\forall\, P, Q \in \xi \quad \vec{H}(P) = \vec{H}(Q) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$$

- Sa résultante générale $\vec{R}$ / Résultante générale du torseur.

$\vec{H}(O)$ moment du torseur au point $O \equiv \vec{m}(O)$

$\vec{R}$ et $\vec{m}(O)$ sont appelés les éléments de réduction du torseur (τ) au point O.

Remarque :

Connaissant $\vec{R}$ et $\vec{m}(O)$ $\longrightarrow$ $\vec{m}(P)$?

En effet :

$$\vec{m}(P) = \vec{m}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$$

(Loi de distribution ≡ relation de transport)

III.2 Opérations sur les torseurs :

a- Egalité des torseurs :

$$(\tau_1) = \begin{pmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{m}_1(A) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\tau_2) = \begin{pmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{m}_2(A) \end{pmatrix}$$

$$(\tau_1) = (\tau_2) \Leftrightarrow \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \text{ et } \vec{m}_1(A) = \vec{m}_2(A)$$

b- Somme de deux torseurs :

$$(\tau_1) = \begin{pmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{m}_1(A) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad (\tau_2) = \begin{pmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{m}_2(A) \end{pmatrix}$$

La somme des torseurs (τ_1) et (τ_2) est un torseur (τ) défini par :

$$(\tau) = (\tau_1) + (\tau_2) = \begin{pmatrix} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{m}(A) = \vec{m}_1(A) + \vec{m}_2(A) \end{pmatrix}$$

c- Multiplication d'un torseur par un scalaire :

Le produit du torseur (τ) par le scalaire λ est le torseur défini par :

$$(\lambda\tau) = \begin{pmatrix} \lambda\vec{R} \\ \lambda\vec{m}(A) \end{pmatrix}$$

d- Produit ou comoment de deux torseurs :

Le comoment des deux torseurs $(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}(A) \end{pmatrix}$ et $(\tau') = \begin{pmatrix} \vec{R}' \\ \vec{m}'(A) \end{pmatrix}$ est la quantité scalaire définie par :

$$(\tau) \times (\tau') = \vec{R} \cdot \vec{m}'(A) + \vec{R}' \cdot \vec{m}(A), \forall A \in \xi$$

Cette quantité est indépendante du point A :

$$(\tau) \times (\tau') = \vec{R} \cdot \vec{m}'(A') + \vec{R}' \cdot \vec{m}(A')$$

$$\vec{m}(A) = \vec{m}(A') + \vec{R} \wedge \overrightarrow{A'A}$$

III.3 Propriétés d'un torseur :

Invariant scalaire d'un torseur :

L'invariant scalaire de $(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{m}(A) \end{pmatrix}$ est défini par :

$$I_s = \vec{R} \cdot \overrightarrow{m}(A)$$

L'invariant scalaire est indépendant du point A.

En effet :

$$\forall B \in \xi : \overrightarrow{m}(B) = \overrightarrow{m}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$\Longrightarrow \vec{R} \cdot \overrightarrow{m}(B) = \vec{R} \cdot \overrightarrow{m}(A)$$

Axe central d'un torseur :

L'axe central Δ d'un torseur $(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}(O) \end{pmatrix}$ est l'ensemble des points P tel que $\vec{m}(P)$ est colinéaire à $\vec{R}$.

$$\Delta \equiv \left\{P \in \xi / \vec{m}(P) = k\vec{R}, k \in \mathbb{R}\right\} \equiv \left\{P \in \xi / \vec{m}(P) \wedge \vec{R} = \vec{0}\right\}$$

Cherchons l'équation de l'axe central Δ :

$$\vec{m}(P) = \vec{m}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = k\vec{R} \Longrightarrow \underbrace{\overrightarrow{OP}}_{\vec{x}} \wedge \underbrace{\vec{R}}_{\vec{a}} = \underbrace{\vec{m}(O) - k\vec{R}}_{\vec{b}}$$

La division vectorielle est possible si :

$$k = \frac{\vec{R} \cdot \vec{m}(O)}{\|\vec{R}\|^2} \qquad \vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} + \lambda\vec{a} \,;\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \left[\vec{m}(O) - k\vec{R}\right]}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda\vec{R} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{m}(O)}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda\vec{R}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Soient P et Q deux points quelconques de Δ, alors:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{m}}(O)}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda_P \vec{R} \qquad \overrightarrow{OQ} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{m}}(O)}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda_Q \vec{R}$$

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QP} = (\lambda_P - \lambda_Q)\vec{R}$$

L'ensemble cherché est une droite parallèle à $\vec{R}$ et passant par P_0 tel que :

$$\overrightarrow{OP_0} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{m}}(O)}{\|\vec{R}\|^2}$$

Remarques :

1°- Le moment du torseur est le même en tout point de l'axe Δ du torseur :

$$\text{Si } \forall\ P, Q \in \Delta: \quad \vec{m}(P) = \vec{m}(Q) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP} = \vec{m}(Q).$$

2°- La norme du moment du torseur est minimale sur l'axe du torseur.

Soit $Q \in \Delta$ et soit P un point quelconque $\notin\ \Delta$, alors :

$$\vec{m}(P) = \vec{m}(Q) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP} \ \Rightarrow \|\vec{m}(P)\|^2 = \|\vec{m}(Q)\|^2 + \left\|\vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}\right\|^2$$

Puisque : $\vec{R} \wedge \overrightarrow{QP} \ \perp\ \vec{R}$ et $\vec{m}(Q) \parallel \vec{R}$

Par conséquent : $\vec{m}(Q) \perp \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$

$$\Downarrow$$

$$\|\vec{m}(P)\| > \|\vec{m}(Q)\|$$

III.4 Torseurs particuliers :

a- Torseur nul :

Le torseur est nul si ses éléments de réduction sont nuls en un point de l'espace (il en résulte que le moment est nul partout)

b- Glisseur :

Un torseur est un glisseur si et seulement si :

$$\vec{R} \neq \vec{0} \text{ et } I_s = 0.$$

Théorème : Le moment sur l'axe central Δ_G d'un glisseur est nul :

$\vec{m}(P) = \vec{0} \; \forall P \in \Delta_G$

i.e : $$\Delta_G \equiv \{P \in \xi / \vec{m}(P) = \vec{0}\}$$

c- Couple :

Définition : Un torseur est un couple si et seulement si : $\vec{R} = \vec{0}$.

Théorème : Un torseur est un couple si et seulement si $\overrightarrow{m}(P) = \overrightarrow{m}(Q)\ \forall P, Q \in \xi$.

Remarque : L'axe central d'un couple n'existe pas .

d- Exemples de torseurs particuliers :

i- Torseur associé à un vecteur lié :

Les moments de $\left(A,\vec{V}\right)$ en deux points P et Q quelconques de ξ sont :

$$\vec{m}_P\left(\vec{V}\right) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{V} \text{ et } \vec{m}_Q\left(\vec{V}\right) = \overrightarrow{QA} \wedge \vec{V}$$

$$\vec{m}_P\left(\vec{V}\right) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{V} = \left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA}\right) \wedge \vec{V} = \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{QA} \wedge \vec{V}$$

$$\Rightarrow \vec{m}_P\left(\vec{V}\right) = \vec{m}_Q\left(\vec{V}\right) + \vec{V} \wedge \overrightarrow{QP}$$

Ce qui montre que le moment d'un vecteur lié est un champ antisymétrique.

Par conséquent, le torseur (τ) de moment $\vec{m}$ et de résultante $\vec{V}$ est le torseur associé au vecteur lié $\left(A,\vec{V}\right)$.

Le torseur associé au vecteur lié $\left(A, \vec{V}\right)$ est un glisseur.

En effet :

$$\vec{V} \neq \vec{0} \;\text{ et }\; I_s = \vec{V} \cdot \vec{m}_P\left(\vec{V}\right) = \vec{V} \cdot \left(\overrightarrow{PA} \wedge \vec{V}\right) = 0$$

ii- Torseur associé à un ensemble de vecteurs liés :

Soit un ensemble de n vecteurs liés $(A_i, \vec{u}_i)$.

- La résultante de l'ensemble des vecteurs :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i$$

- Le moment au point Q de l'ensemble des vecteurs :

$$\vec{m}(Q) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{QA}_i \wedge \vec{u}_i$$

Le vecteur moment en un point P est :

$$\vec{m}(P) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{PA}_i \wedge \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{QA}_i \wedge \vec{u}_i$$

Soit :

$$\vec{m}(P) = \vec{m}(Q) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$$

On déduit que le moment de l'ensemble des vecteurs liés est un champ antisymétrique.

On peut donc associer à cet ensemble de vecteurs liés un torseur (τ) dont ses éléments de réduction en P sont:

$$(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i \\ \vec{m}(P) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{PA}_i \wedge \vec{u}_i \end{pmatrix}$$

e- Décomposition d'un torseur en un point P :

Tout torseur $(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}(P) \end{pmatrix}$ peut être décomposé, en tout point P, en la somme d'un glisseur (g) et d'un couple (c).

En effet :

$$(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}(P) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{pmatrix}}_{(g)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{m}(P) \end{pmatrix}}_{(c)}$$

f- Classification des torseurs :

La classification des torseurs $(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}(A) \end{pmatrix}$ se fait en fonction de l'invariant scalaire.

$1^{er}\, cas: I_s = 0$

- $\vec{R} \neq \vec{0}$: on a un glisseur non nul.
- $\vec{R} = \vec{0}$: deux cas à envisager :
  - $\vec{m}(A) = \vec{0}$: torseur nul
  - $\vec{m}(A) \neq \vec{0}$: couple non nul.

$2^{eme}\, cas: I_s \neq 0$

Dans ce cas, le torseur est quelconque. Il n'est ni glisseur ni couple.

Exercice d'application :

Soit le torseur (τ_1) défini par les trois vecteurs $\vec{V}_1 = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 7\vec{k}$; $\vec{V}_2 = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$ et $\vec{V}_3 = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 8\vec{k}$ définis dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et liés respectivement aux points $A(1,0,0), B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$ et le torseur $(\tau_2) = \begin{cases} \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{m}_2(O) \end{cases}$ où $\vec{R}_2 = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{m}_2(O) = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 7\vec{k}$.

1°- Déterminer les éléments de réduction du torseur $(\tau_1)_O$.

Conclusion.

$$(\tau_1)_O = \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0} \\ \overrightarrow{m}_1(O) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}_1 + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{V}_2 + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{V}_3 \\ \qquad = \vec{\imath} + 6\vec{\jmath} \end{cases}$$

Conclusion : (τ_1) est un couple.

2°- Déterminer l'axe central du torseur (τ_2).

L'axe central Δ est défini par l'ensemble des points P tel que :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{m}_1(O)}{\|\vec{R}_1\|^2} + \lambda\vec{R}_1, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{OP} = \left(-\frac{13}{14} + 2\lambda\right)\vec{\imath} + \left(\frac{5}{14} + \lambda\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{1}{2} + 3\lambda\right)\vec{k}$$

3°- Calculer la somme et le produit des deux torseurs.

$\rightarrow$ Somme des deux torseurs :

$$(\tau)_O = (\tau_1)_O + (\tau_2)_O = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k} \\ \overrightarrow{m}(O) = \overrightarrow{m}_1(O) + \overrightarrow{m}_2(O) = -2\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} - 7\vec{k} \end{cases}$$

$\rightarrow$ Produit des deux torseurs :

$$(\tau_1)_O \cdot (\tau_2)_O = \vec{R}_1 \cdot \overrightarrow{m}_2(O) + \vec{R}_2 \cdot \overrightarrow{m}_1(O) = -25$$

4°- Calculer l'invariant scalaire du torseur somme.

$$(\tau) = \begin{cases} \vec{R} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \\ \overrightarrow{m}(O) = -2\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k} \end{cases}$$

$$I = \vec{R} \cdot \overrightarrow{m}(O) = -17$$

III. Torseurs :

Définition : Le torseur $(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{H}(O) \end{pmatrix}$

- Champ équiprojectif $\vec{H}$

$$\forall\, P, Q \in \xi \quad \vec{H}(P) = \vec{H}(Q) + \mathcal{L}\left(\overrightarrow{QP}\right)$$

$\Leftrightarrow$ Il existe un vecteur unique $\vec{R}$ tel que :

$$\forall\, P, Q \in \xi \quad \vec{H}(P) = \vec{H}(Q) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$$

- Sa résultante générale $\vec{R}$ / Résultante générale du torseur.

$\vec{H}(O)$ moment du torseur au point $O \equiv \vec{m}(O)$

$\vec{R}$ et $\vec{m}(O)$ sont appelés les éléments de réduction du torseur (τ) au point O.

Remarque :

Connaissant $\vec{R}$ et $\vec{m}(O) \longrightarrow \vec{m}(P)$?

En effet :

$$\vec{m}(P) = \vec{m}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$$

(Loi de distribution ≡ relation de transport)

III.2 Opérations sur les torseurs :

a- Egalité des torseurs :

$$(\tau_1) = \begin{pmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{m}_1(A) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\tau_2) = \begin{pmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{m}_2(A) \end{pmatrix}$$

$$(\tau_1) = (\tau_2) \Leftrightarrow \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \text{ et } \vec{m}_1(A) = \vec{m}_2(A)$$

b- Somme de deux torseurs :

$$(\tau_1) = \begin{pmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{m}_1(A) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\tau_2) = \begin{pmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{m}_2(A) \end{pmatrix}$$

La somme des torseurs (τ_1) et (τ_2) est un torseur (τ) défini par :

$$(\tau) = (\tau_1) + (\tau_2) = \begin{pmatrix} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{m}(A) = \vec{m}_1(A) + \vec{m}_2(A) \end{pmatrix}$$

c- Multiplication d'un torseur par un scalaire :

Le produit du torseur (τ) par le scalaire λ est le torseur défini par :

$$(\lambda\tau) = \begin{pmatrix} \lambda\vec{R} \\ \lambda\vec{m}(A) \end{pmatrix}$$

d- Produit ou comoment de deux torseurs :

Le comoment des deux torseurs $(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}(A) \end{pmatrix}$ et $(\tau') = \begin{pmatrix} \vec{R}' \\ \vec{m}'(A) \end{pmatrix}$ est la quantité scalaire définie par :

$$(\tau) \times (\tau') = \vec{R} \cdot \vec{m}'(A) + \vec{R}' \cdot \vec{m}(A), \forall A \in \xi$$

Cette quantité est indépendante du point A :

III.3 Propriétés d'un torseur :

Invariant scalaire d'un torseur :

L'invariant scalaire de $(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{m}(A) \end{pmatrix}$ est défini par :

$$I_s = \vec{R} \cdot \overrightarrow{m}(A)$$

L'invariant scalaire est indépendant du point A.

En effet :

$$\forall B \in \xi : \overrightarrow{m}(B) = \overrightarrow{m}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$\Longrightarrow \vec{R} \cdot \overrightarrow{m}(B) = \vec{R} \cdot \overrightarrow{m}(A)$$

Axe central d'un torseur :

L'axe central Δ d'un torseur $(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}(O) \end{pmatrix}$ est l'ensemble des points P tel que $\vec{m}(P)$ est colinéaire à $\vec{R}$.

$$\Delta \equiv \left\{ P \in \xi / \vec{m}(P) = k\vec{R}, k \in \mathbb{R} \right\} \equiv \left\{ P \in \xi / \vec{m}(P) \wedge \vec{R} = \vec{0} \right\}$$

Cherchons l'équation de l'axe central Δ :

$$\vec{m}(P) = \vec{m}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = k\vec{R} \Longrightarrow \underbrace{\overrightarrow{OP}}_{\vec{x}} \wedge \underbrace{\vec{R}}_{\vec{a}} = \underbrace{\vec{m}(O) - k\vec{R}}_{\vec{b}}$$

$$\vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} + \lambda\vec{a} \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \left[\vec{m}(O) - k\vec{R}\right]}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda\vec{R} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{m}(O)}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda\vec{R}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

L'ensemble cherché est une droite parallèle à $\vec{R}$ et passant par P_0 tel que :

$$\overrightarrow{OP_0} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{m}(O)}{\|\vec{R}\|^2}$$

Remarques :

1°- Le moment du torseur est le même en tout point de l'axe Δ du torseur :

Si $\forall\, P, Q \in \Delta$: $\quad \vec{m}(P) = \vec{m}(Q) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP} = \vec{m}(Q)$

2°- La norme du moment du torseur est minimale sur l'axe du torseur.

Soit $Q \in \Delta$ et soit P un point quelconque $\notin$ Δ, alors :

$$\| \vec{m}(P)\| > \| \vec{m}(Q)\|$$

III.4 Torseurs particuliers :

a- Torseur nul :

Le torseur est nul si ses éléments de réduction sont nuls en un point de l'espace (il en résulte que le moment est nul partout)

b- Glisseur :

Un torseur est un glisseur si et seulement si :

$$\vec{R} \neq \vec{0} \text{ et } I_s = 0.$$

Théorème : Le moment sur l'axe central Δ_G d'un glisseur est nul :

$\vec{m}(P) = \vec{0}\ \forall P \in \Delta_G$

i.e : $$\Delta_G \equiv \{P \in \xi / \vec{m}(P) = \vec{0}\}$$

c- Couple :

Définition : Un torseur est un couple si et seulement si : $\vec{R} = \vec{0}$.

Théorème : Un torseur est un couple si et seulement si $\overrightarrow{m}(P) = \overrightarrow{m}(Q)\ \forall P, Q \in \xi$.

Remarque : L'axe central d'un couple n'existe pas .

e- Décomposition d'un torseur en un point P :

Tout torseur $(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}(P) \end{pmatrix}$ peut être décomposé, en tout point P, en la somme d'un glisseur (g) et d'un couple (c).

En effet :

$$(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}(P) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{pmatrix}}_{(g)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{m}(P) \end{pmatrix}}_{(c)}$$

f- Classification des torseurs :

La classification des torseurs $(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}(A) \end{pmatrix}$ se fait en fonction de l'invariant scalaire.

$1^{er}\, cas: I_s = 0$

- $\vec{R} \neq \vec{0}$: on a un glisseur non nul.
- $\vec{R} = \vec{0}$: deux cas à envisager :
  - ➢ $\vec{m}(A) = \vec{0}$: torseur nul
  - ➢ $\vec{m}(A) \neq \vec{0}$: couple non nul.

$2^{eme}\, cas: I_s \neq 0$

Dans ce cas, le torseur est quelconque. Il n'est ni glisseur ni couple.

Cinématique du solide

- Définition de la cinématique:

Partie de la mécanique qui étudie les mouvements des corps en fonction du temps indépendamment des causes (forces) qui les produisent.

Définition du solide indéformable ou rigide (S) :

$$(S) \equiv \left\{\forall A, B \in (S), \forall \mathrm{t} \quad \left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = \mathrm{Cste}\right\}$$

« Critère de rigidité »

Etude du mouvement nécessite un repérage du corps dans l'espace et dans le temps.

Repère d'espace et référentiel :

Repère d'espace : $\left(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$

L'adjonction du temps à un repère définit un référentiel $(\mathcal{R})$.

A tout solide rigide S on peut lui lier au moins un référentiel $\mathcal{R}_s(O_S, x_s, y_s, z_s)$(orthonormé diret arbitraire).

Pour étudier le mouvement de (S) par rapport à un $(\mathcal{R})$ cela revient à étudier le mouvement de $(\mathcal{R}_s)$ par rapport à $(\mathcal{R})$.

Paramétrage de la position d'un solide :

Pour repérer un solide dans l'espace :

- Connaitre la position d'un point O_s du solide :

Les trois coordonnées de O_s dits paramètres de translation.

- Savoir repérer l'orientation d'un trièdre d'origine O_s lié au solide par rapport au repère d'étude :

Trois paramètres supplémentaires (Les angles d'Euler qui sont des paramètres de rotation)

$$\Downarrow$$

On a donc besoin de 6 paramètres primitifs pour définir la position d'un solide qui n'est assujetti à aucune contrainte.

Nous dirons que le système possède 6 degrés de liberté et que le système est complètement libre dans le repère d'étude.

Nombre de degrés de liberté : est le nombre de paramètres indépendants parmi ses paramètres primitifs qu'il faut se donner pour déterminer de façon unique la position du système.

Si un solide est soumis à des liaisons, certains de ses paramètres primitifs deviennent des variables dépendantes.

Par conséquent, le nombre de degrés de liberté N est généralement inférieur au nombre de paramètres primitifs n :

$$N = n - N_l$$

Où N_l est le nombre de liaisons.

Si le mouvement d’un système n’est pas libre dans l’espace

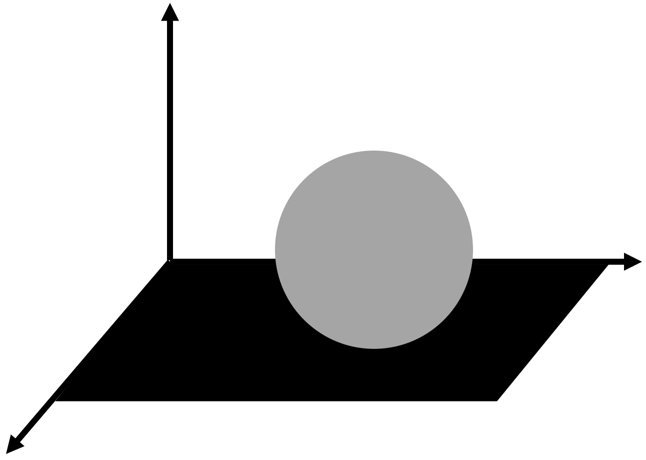
$\Downarrow$

On dit que le système est soumis à des liaisons.

Les liaisons sont exprimées par des relations mathématiques.

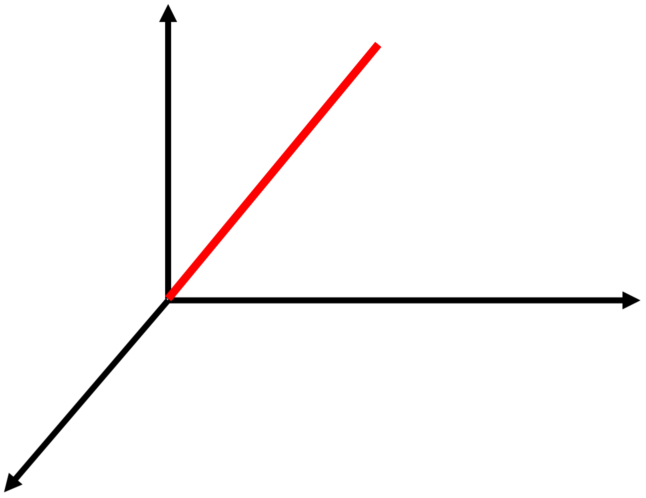
Exemples :

- Une sphère qui roule sur un plan horizontal :



5 degrés de liberté puisque la côte de son centre est fixe.

- Une barre rigide dont l'une des extrémités est confondue avec l'origine O du repère d'étude :



trois degrés de liberté correspondants à trois angles de rotation.
Dans le cas où cette barre est de section négligeable, il n'y a pas de rotation propre. Par conséquent, il y a juste deux degrés de liberté.

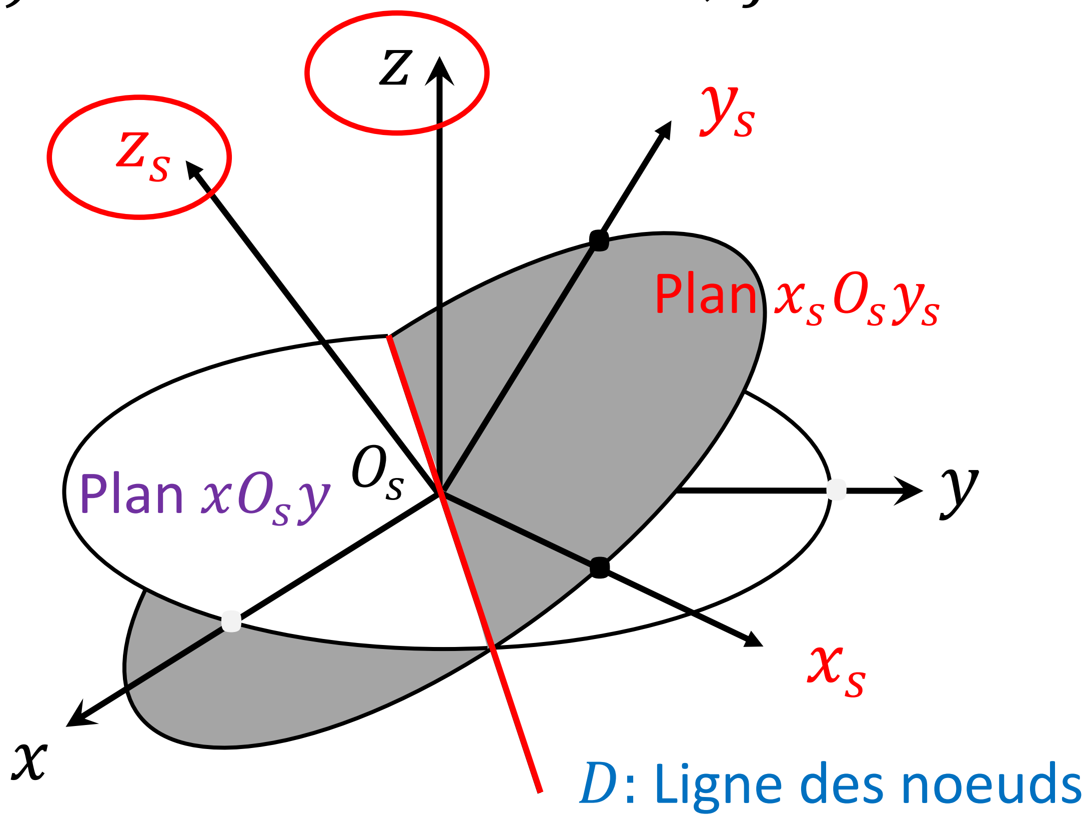
- Un système matériel libre composé de p points matériels et de s solides possède $3p + 6s$ degrés de liberté.

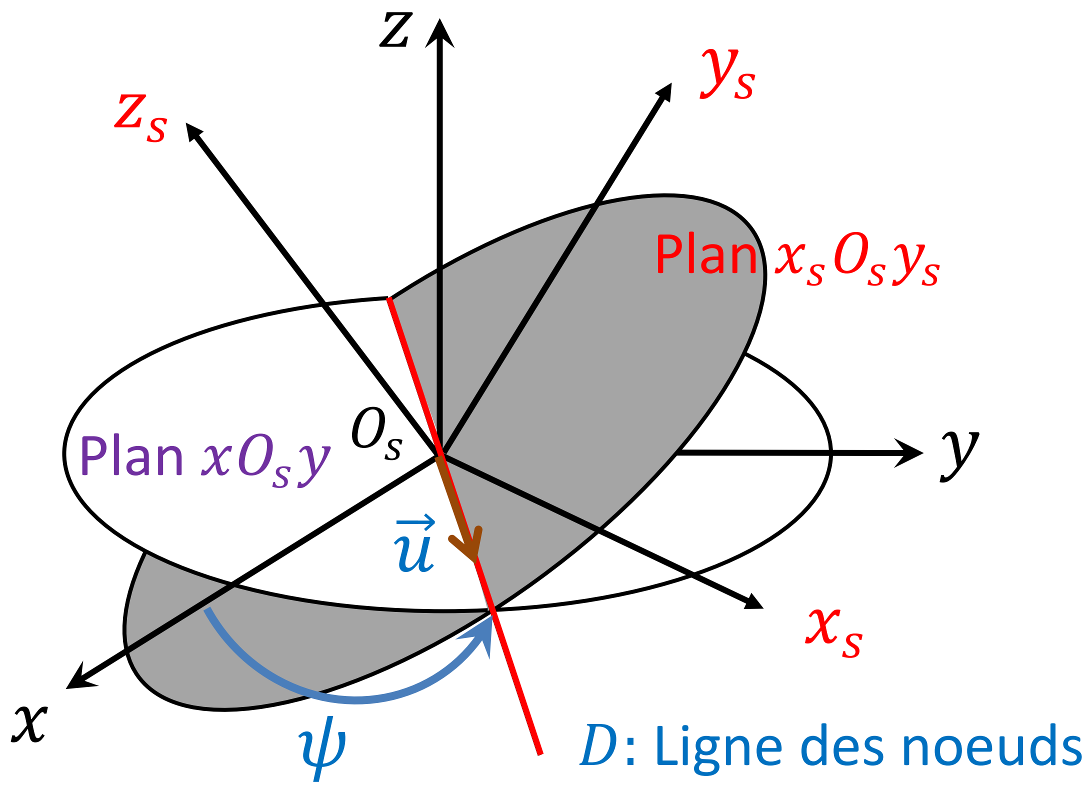
Les angles d'Euler :

3 paramètres indépendants notés (ψ, θ, φ) qui définissent l'orientation d'un $\mathcal{R}_s(O_s, x_s, y_s, z_s)$ par rapport à $\mathcal{R}(O_s, x, y, z)$.

$\mathcal{R}_s(O_s, x_s, y_s, z_s)$ de vecteurs unitaires $\vec{\imath}_s, \vec{\jmath}_s$ et $\vec{k}_s$

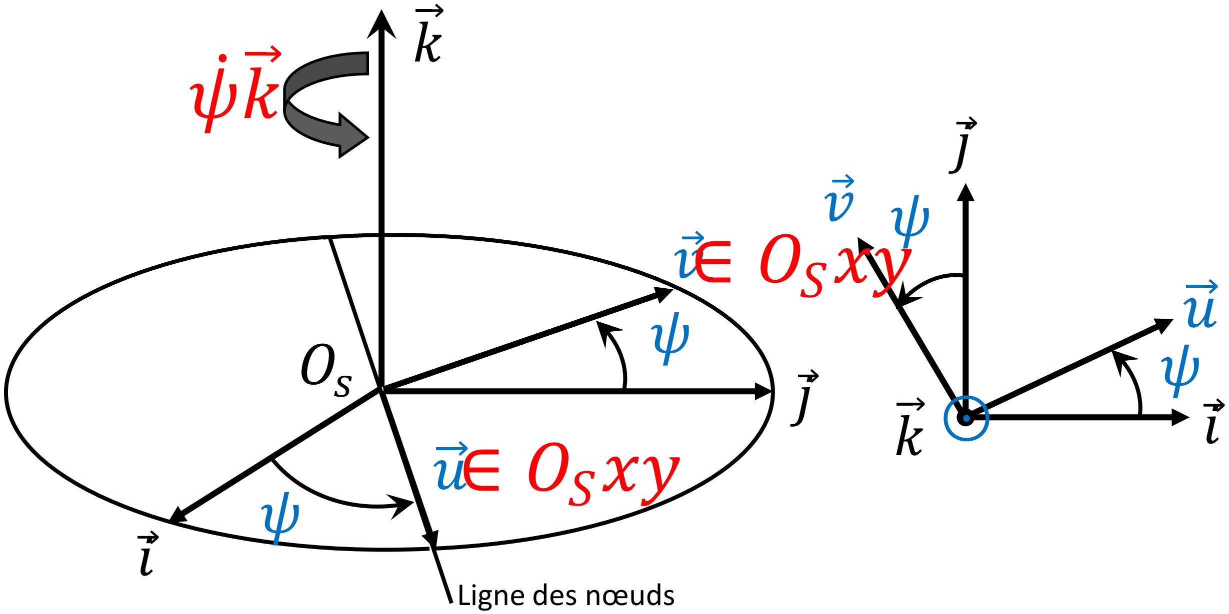
$\mathcal{R}(O_s, x, y, z)$ de vecteurs unitaires $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$





On oriente arbitrairement D par un vecteur unitaire $\vec{u}$.

✓ $\psi = \widehat{(\vec{\imath}, \vec{u})}$ angle orienté par $\vec{k}$, appelé précession (mouvement de rotation par rapport à un axe fixe).

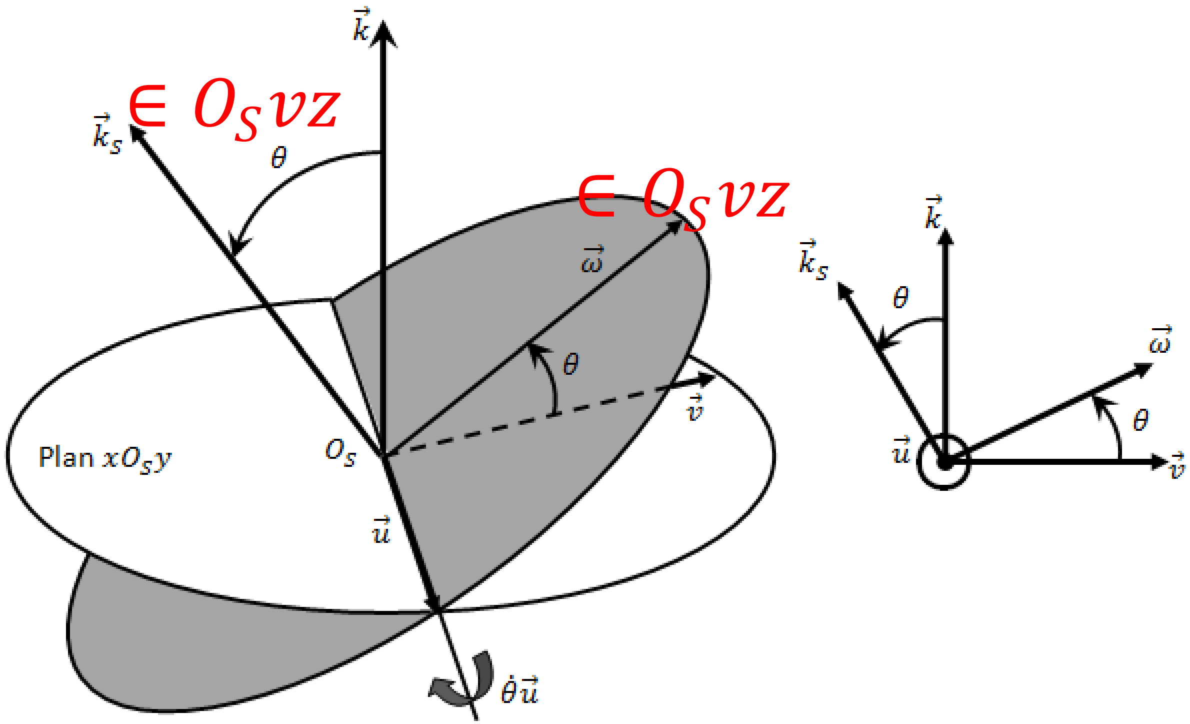


- $\mathcal{R}_1(O_s, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est déduit de $\mathcal{R}$ par rotation d'angle ψ autour de $\vec{k}$

$$\Longrightarrow \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} = \dot{\psi}\vec{k}$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'expriment par : $\begin{cases} \vec{u} = \cos\psi\,\vec{\imath} + \sin\psi\,\vec{j} \\ \vec{v} = -\sin\psi\,\vec{\imath} + \cos\psi\,\vec{j} \end{cases}$

✓ $\theta = (\widehat{\vec{k}, \vec{k}_s})$ angle orienté par $\vec{u}$, appelé nutation

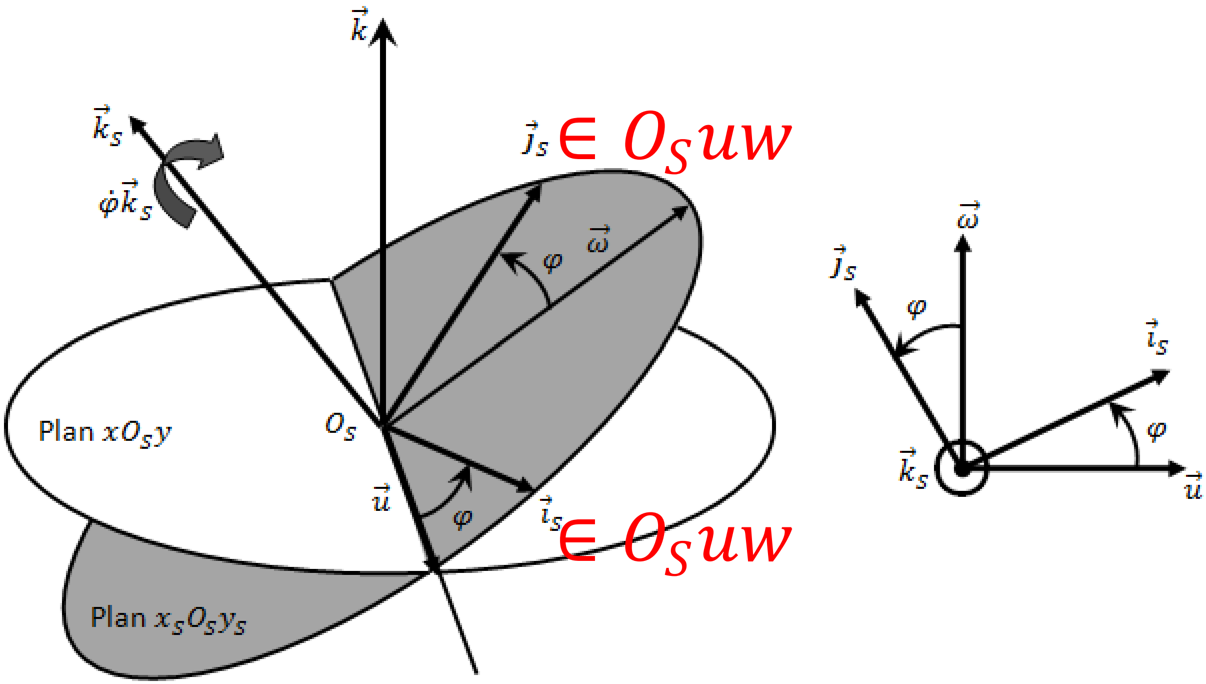


- $\mathcal{R}_2(O_s, \vec{u}, \vec{\omega}, \vec{k}_s)$ est déduit de $\mathcal{R}_1$ par rotation d'angle θ autour de $\vec{u} \Longrightarrow \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \dot{\theta}\vec{u}$

$\vec{\omega}$ et $\vec{k}_s$ s'expriment par :

$$\begin{cases} \vec{\omega} = \cos\theta\,\vec{v} + \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{k}_s = -\sin\theta\,\vec{v} + \cos\theta\,\vec{k} \end{cases}$$

✓ $\varphi = (\widehat{\vec{u}, \vec{i}_s})$ angle orienté par $\vec{k}_s$, appelé rotation propre



▪ $\mathcal{R}_s$ se déduit de $\mathcal{R}_2$ par la rotation propre φ autour de $\vec{k}_s$

$$\Longrightarrow \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_2} = \dot{\varphi}\vec{k}_s$$

$\vec{i}_s$ et $\vec{j}_s$ s'expriment par : $\begin{cases} \vec{i}_s = \cos\varphi\,\vec{u} + \sin\varphi\,\vec{\omega} \\ \vec{j}_s = -\sin\varphi\,\vec{u} + \cos\varphi\,\vec{\omega} \end{cases}$

$$\mathcal{R}(O_S,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}) \xrightarrow{(\psi/\vec{k})} \mathcal{R}_1(O_S,\vec{u},\vec{v},\vec{k}) \xrightarrow{(\theta/\vec{u})} \mathcal{R}_2(O_S,\vec{u},\vec{\omega},\vec{k}_S) \xrightarrow{(\varphi/\vec{k}_S)} \mathcal{R}_S(O_S,\vec{\imath}_S,\vec{\jmath}_S,\vec{k}_S)$$

Remarque :

Définir l'orientation d'un $\mathcal{R}_s(O_s,x_s,y_s,z_s)$ par rapport à $\mathcal{R}(O,x,y,z)$.

$\equiv$ Définir l'orientation d'un $\mathcal{R}_s(O_s,x_s,y_s,z_s)$ par rapport à $\mathcal{R}'(O_s,x,y,z)$.

$$\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}) \xrightarrow{\text{translation}} \mathcal{R}'(O_S,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}) \xrightarrow{(\psi,\vec{k})} \mathcal{R}_1(O_S,\vec{u},\vec{v},\vec{k}) \xrightarrow{(\theta,\vec{u})} \mathcal{R}_2(O_S,\vec{u},\vec{\omega},\vec{k}_S) \xrightarrow{(\varphi,\vec{k}_S)} \mathcal{R}_S(O_S,\vec{\imath}_S,\vec{\jmath}_S,\vec{k}_S)$$

II. Champ de vitesses et d'accélérations d'un solide- Torseur cinématique :

II.1 Rappel sur la cinématique du point :

- La vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}$ notée $\vec{V}_{M/\mathcal{R}}$ est définie par :

$$\vec{V}_{M/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

- L'accélération de M par rapport à $\mathcal{R}$ notée $\vec{\gamma}_{M/\mathcal{R}}$ est définie par :

$$\vec{\gamma}_{M/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{V}_{M/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}}$$

où $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est la vitesse instantanée de rotation du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

Propriétés :

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}}$$

- Si $\mathcal{R}'$ est en translation par rapport à $\mathcal{R} \Rightarrow \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}$$

- Si $\vec{u}$ est constant dans $\mathcal{R}' \Rightarrow \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \vec{0} \Rightarrow \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}$

C'est le cas des vecteurs de la base liée à $\mathcal{R}'$.

- La dérivée de $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est indépendante du référentiel :

$$\left.\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}$$

- $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}$ où $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$ sont trois référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre.

- $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = -\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}$

II.1 Champ de vitesses d'un solide :

Soit (S) un solide en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_S$ un référentiel lié à (S). D'après la formule de Bour :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_S} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_S/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad \forall A, B \in S$$

Or $\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_S} = \vec{0}$ puisque $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur constant dans $\mathcal{R}_S$ lié au solide (S). D'où :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right)}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{V}_{B/\mathcal{R}} - \vec{V}_{A/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_S/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\boxed{\vec{V}_{B/\mathcal{R}} = \vec{V}_{A/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AB}} \qquad \forall A, B \in S$$

La loi de distribution des vitesses de S en mouvement

Remarque :

La loi de distribution des vitesses établie ci-dessus est valable aussi pour des points P n'appartenant pas physiquement au solide mais vérifiant avec ses points le critère de rigidité. Un tel point P est dit rigidement lié au solide et vérifie :

$$\forall A \in (S), \forall \mathrm{t} \quad \left\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right\| = \mathrm{Cste}$$

Un exemple d'un tel point est le centre d'un cerceau.

a- Torseur cinématique :

L'ensemble de champ de vitesses et du vecteur rotation correspondant constitue le torseur cinématique de $S/\mathcal{R}$ noté $\mathcal{V}(S/\mathcal{R})$ et représenté par :

$$\mathcal{V}(S/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \\ \vec{V}_{A/\mathcal{R}} \end{pmatrix}_A$$

$\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$ et $\vec{V}_{A/\mathcal{R}}$ sont les éléments de réduction du torseur cinématique de $S/\mathcal{R}$ au point A.

Le champ de vitesse est équiprojectif :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}_{B/\mathcal{R}} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}_{A/\mathcal{R}} \quad \forall A, B \in S$$

b- Axe central du torseur cinématique:

Dans le cas où $\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \neq \vec{0}$ alors l'axe central du torseur cinématique noté $\Delta(S/\mathcal{R})$ existe et on l'appelle axe instantanée de rotation et de glissement ou axe de viration.

C'est le lieu des points dont les vitesses sont parallèles au vecteur rotation instantané.

L'axe central $\Delta(S/\mathcal{R})$ a pour équation :

$$\Delta(S/\mathcal{R}) \equiv \left\{ P/\ \overrightarrow{OP} = \frac{\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \vec{V}_{O/\mathcal{R}}}{\left\|\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right\|^2} + \lambda\, \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Si $O \in S$, alors: $\vec{V}_{P/\mathcal{R}} = \vec{V}_{O/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OP}$

$$= \vec{V}_{O/\mathcal{R}} + \frac{\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot \vec{V}_{O/\mathcal{R}}}{\left\|\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right\|^2} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} - \frac{\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}}{\left\|\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right\|^2} \vec{V}_{O/\mathcal{R}}$$

$$= \frac{I_s}{\left\|\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right\|^2} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Par conséquent, si :

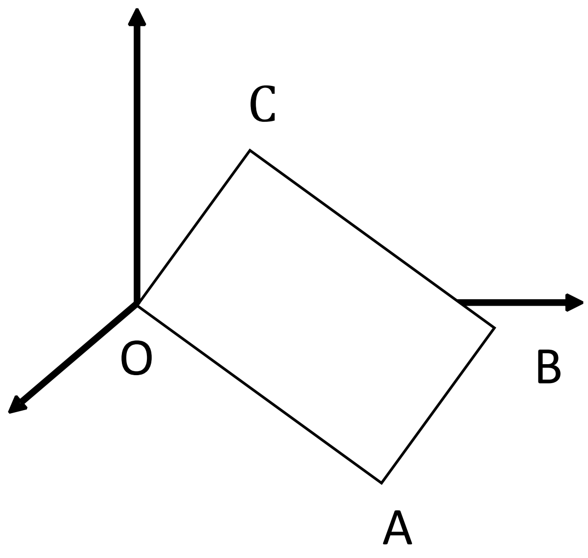
- $I_s = 0 \Longrightarrow \vec{V}_{P\in\Delta/\mathcal{R}} = \vec{0} \Longrightarrow$ On a un axe de rotation.
- $I_s \neq 0 \Longrightarrow \vec{V}_{P\in\Delta/\mathcal{R}} \neq \vec{0} \Longrightarrow$ On a un axe de viration.

Exercice d'application : (exercice 1 de la série 2)

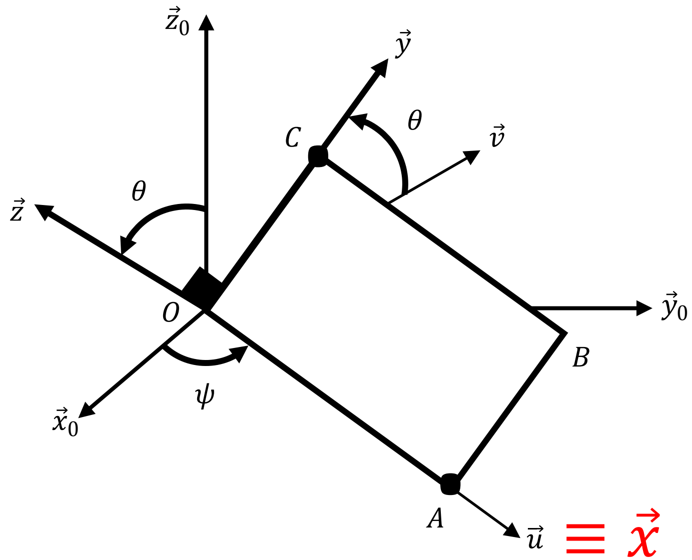
Soit une plaque rectangulaire $OABC$ mobile par rapport à un repère $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ tel que son sommet O reste fixe dans $\mathcal{R}_0$. OA reste dans le plan $(x_0 O y_0)$ avec $OA = a$ et $AB = b$.

1°- Déterminer les paramètres définissant le mouvement de la plaque.

2°- Trouver le champ de vitesses de la plaque(cas A, B, C ...).



1°- Déterminons les paramètres définissant le mouvement de la plaque :



Le mouvement de la plaque est celui d'un référentiel lié à la plaque.

Le point $O_S \equiv O$ du solide est fixe donc pas de translation.

$$\mathcal{R}_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0) \xrightarrow{(\psi,\vec{z}_0)} \mathcal{R}_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0) \xrightarrow{(\theta,\vec{u})} \mathcal{R}_2(O,\vec{u},\vec{y},\vec{z}) \equiv \mathcal{R}_S(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$$

$\Rightarrow$ deux paramètres de rotation :ψ et θ

$O_S \equiv O$ donc les paramètres de translation sont : $\begin{cases} x_O = 0 = cst \\ y_O = 0 = cst \\ z_O = 0 = cst \end{cases}$

Les paramètres de rotation sont : $\begin{cases} \psi \\ \theta \\ \varphi = cst \end{cases}$

OA est toujours dans le plan (Oxy)

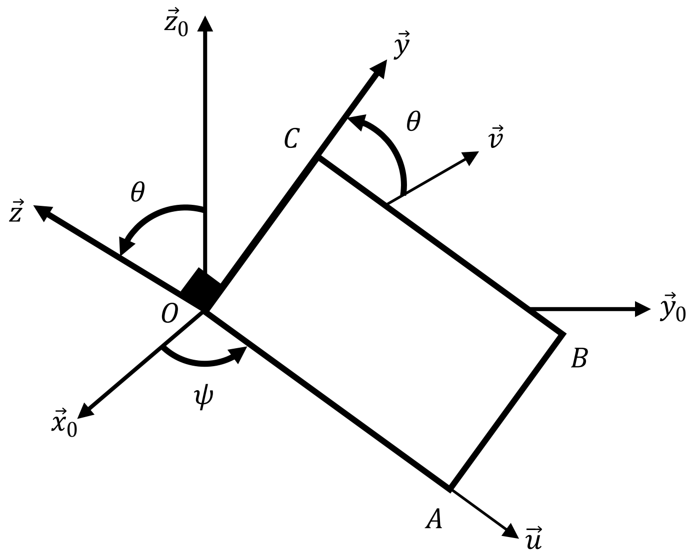
$\Rightarrow$ deux paramètres de rotation : ψ et θ

$O_S \equiv A$ donc les paramètres de translation sont : $\begin{cases} x_A \\ y_A \\ z_A = 0 = cst \end{cases}$

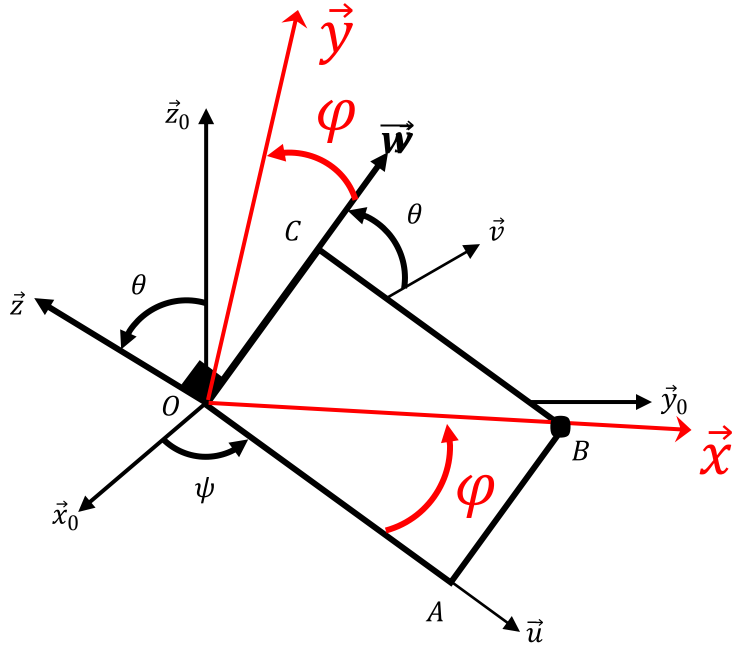
Les paramètres de rotation sont : $\begin{cases} \psi \\ \theta \\ \varphi = cst \end{cases}$

OA est toujours dans le plan (Oxy)

$$\begin{cases} x_A = a\cos\psi \\ y_A = a\sin\psi \\ z_A = 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow$ deux degrés de liberté : ψ et θ



Les paramètres de rotation sont : $\begin{cases} \psi \\ \theta \\ \varphi = cst \end{cases}$

OA est toujours dans le plan (Oxy)

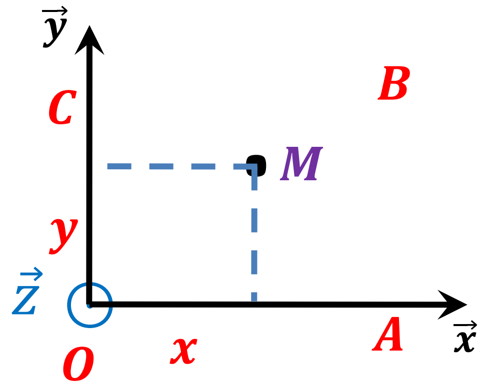
$\Rightarrow$ deux degrés de liberté : ψ et θ

2°- Champ de vitesse des points de la plaque :

Pour un point M de la plaque, on a :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{OM}$$

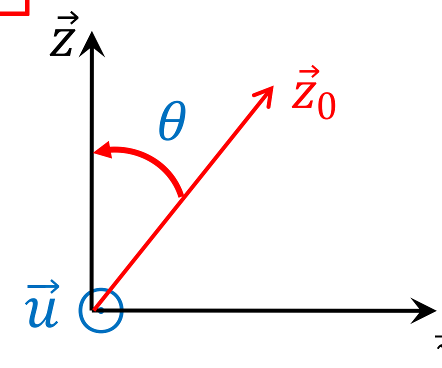
avec :



$$\overrightarrow{OM} = x\vec{x} + y\vec{y}$$

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} =$$

$$\dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\vec{z}_0 = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{x} \Longrightarrow \boxed{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0} = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{x}}$$



$$\mathcal{R}_0 \xrightarrow{(\psi, \vec{z}_0)} \mathcal{R}_1 \xrightarrow{(\theta, \vec{u})} \mathcal{R}_2 \equiv \mathcal{R}_S(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

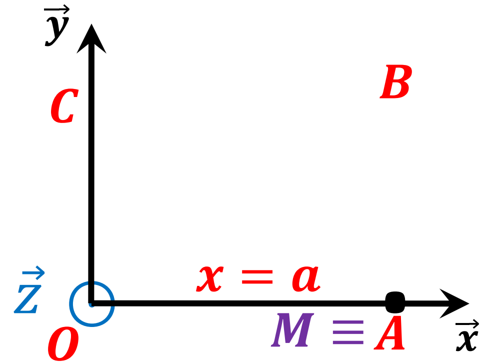
Or $\vec{z}_0 = \sin\theta\,\vec{y} + \cos\theta\,\vec{z}$:

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = -y\dot{\psi}\cos\theta\,\vec{x} + x\dot{\psi}\cos\theta\,\vec{y} + \left(y\dot{\theta} - x\dot{\psi}\sin\theta\right)\vec{z}}$$

$$\boxed{\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = -y\dot{\psi}\cos\theta\,\vec{x} + x\dot{\psi}\cos\theta\,\vec{y} + \left(y\dot{\theta} - x\dot{\psi}\sin\theta\right)\vec{z}}$$

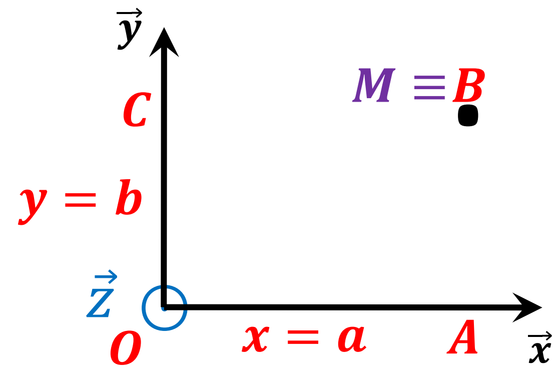
<u>Application aux points A, B et C :</u>

- $M \equiv A \quad \Longrightarrow x = a$ et $y = 0$ d'où:



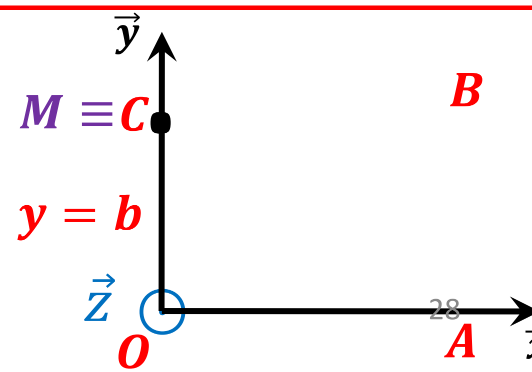
$$\boxed{\vec{V}(A/\mathcal{R}_0) = a\dot{\psi}\cos\theta\,\vec{y} - a\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{z}}$$

- $M \equiv B \quad \Longrightarrow x = a$ et $y = b$ d'où:



$$\boxed{\vec{V}(B/\mathcal{R}_0) = -b\dot{\psi}\cos\theta\,\vec{x} + a\dot{\psi}\cos\theta\,\vec{y} + \left(b\dot{\theta} - a\dot{\psi}\sin\theta\right)\vec{z}}$$

- $M \equiv C \Longrightarrow x = 0$ et $y = b$ d'où:



$$\boxed{\vec{V}(C/\mathcal{R}_0) = -b\dot{\psi}\cos\theta\,\vec{x} + b\dot{\theta}\vec{z}}$$

II.3 Champ des accélérations :

Définition : On appelle champ des accélérations d'un solide S dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$, l'application qui à tout point A lié au solide associe $\vec{\gamma}_{A/\mathcal{R}}$ de A par rapport à $\mathcal{R}$:

$$\vec{\gamma}_{A/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{V}_{A/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$\vec{V}_{A/\mathcal{R}} = \vec{V}_{B/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{BA} \qquad \forall A, B \in S$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\gamma}_{A/\mathcal{R}} = \vec{\gamma}_{B/\mathcal{R}} + \left.\frac{d\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{BA} + \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{BA}\right)}$$

Conclusion : Le champ des accélérations n'est pas antisymétrique et par conséquent il n'est pas représentable par un torseur.

II.4 Mouvements particuliers :

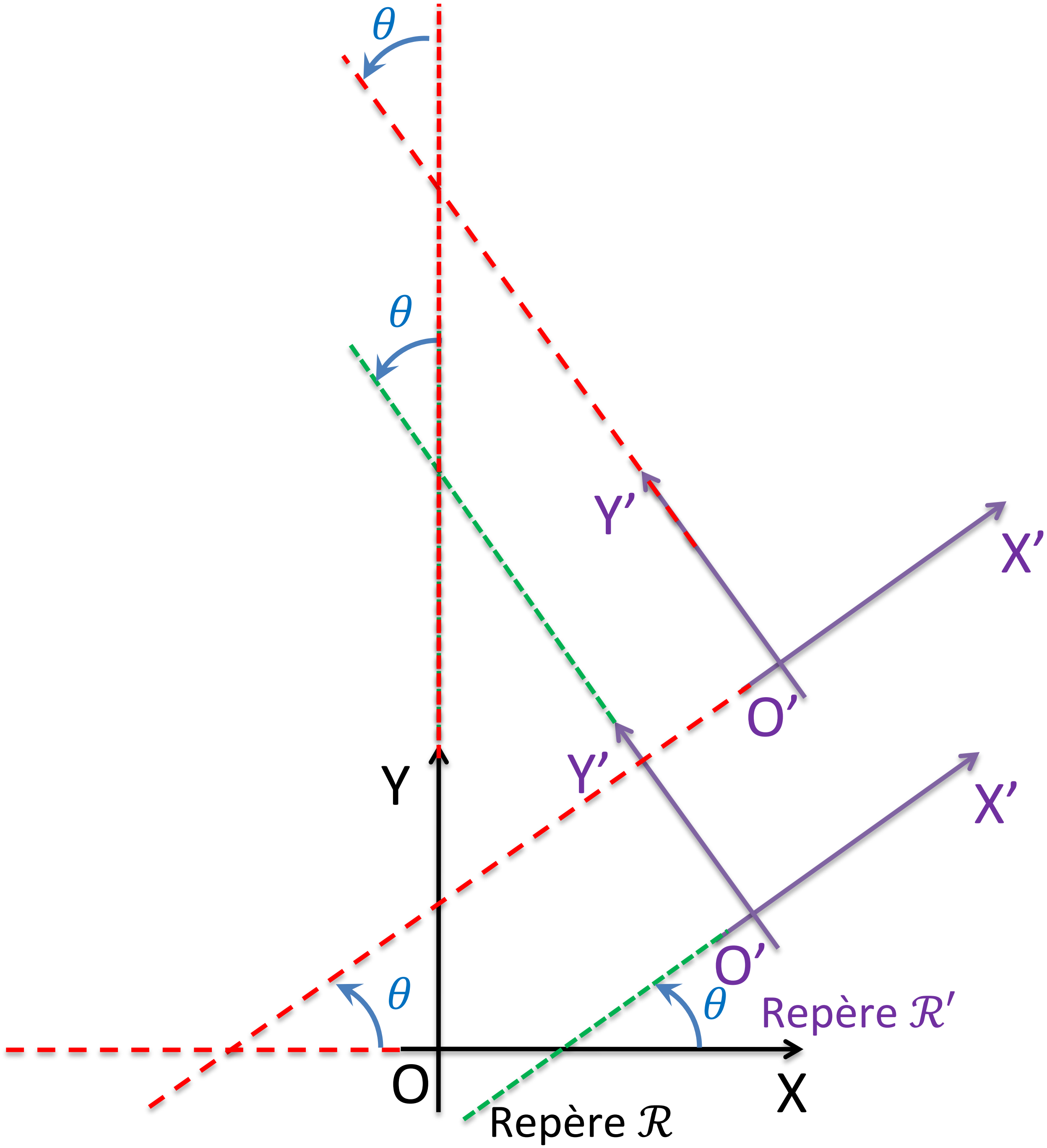
a- Mouvement de translation :

Le mouvement d'un solide S par rapport à $\mathcal{R}$ est un mouvement de translation si tout vecteur de S reste équipollent à lui-même au cours du mouvement :

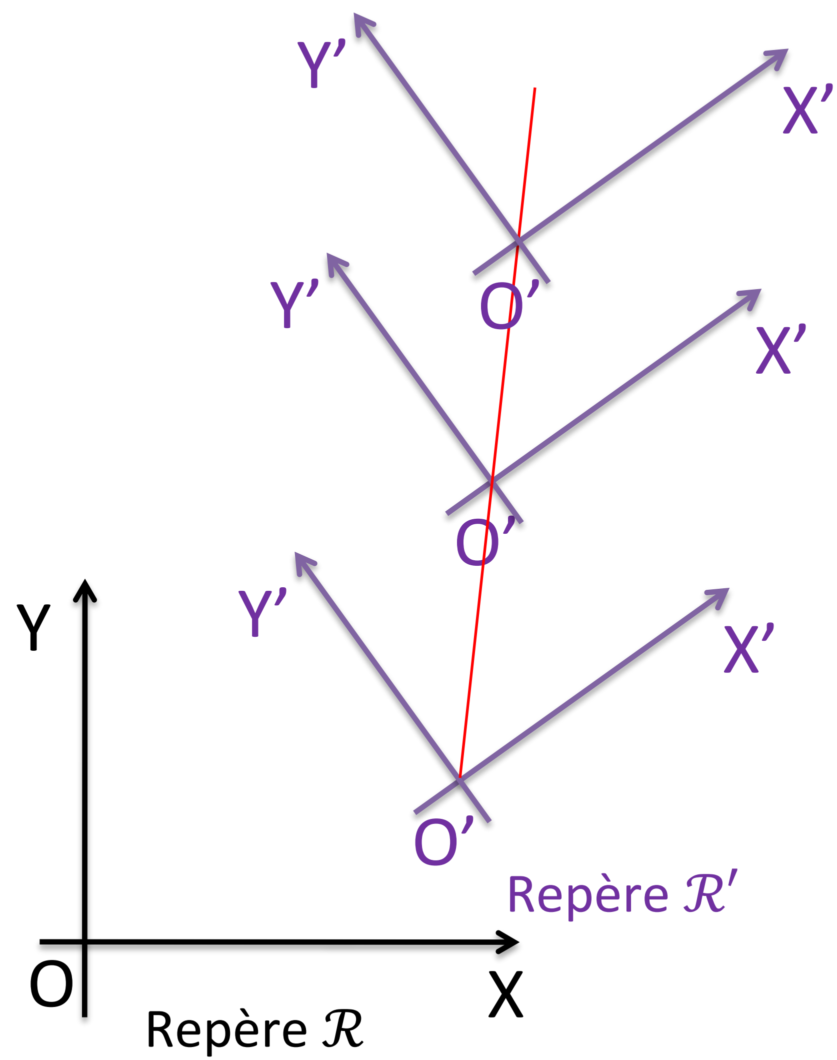
$$\forall A, B \in S;\ \forall t;\quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{cst}$$

Si en plus, un point lié au solide décrit :

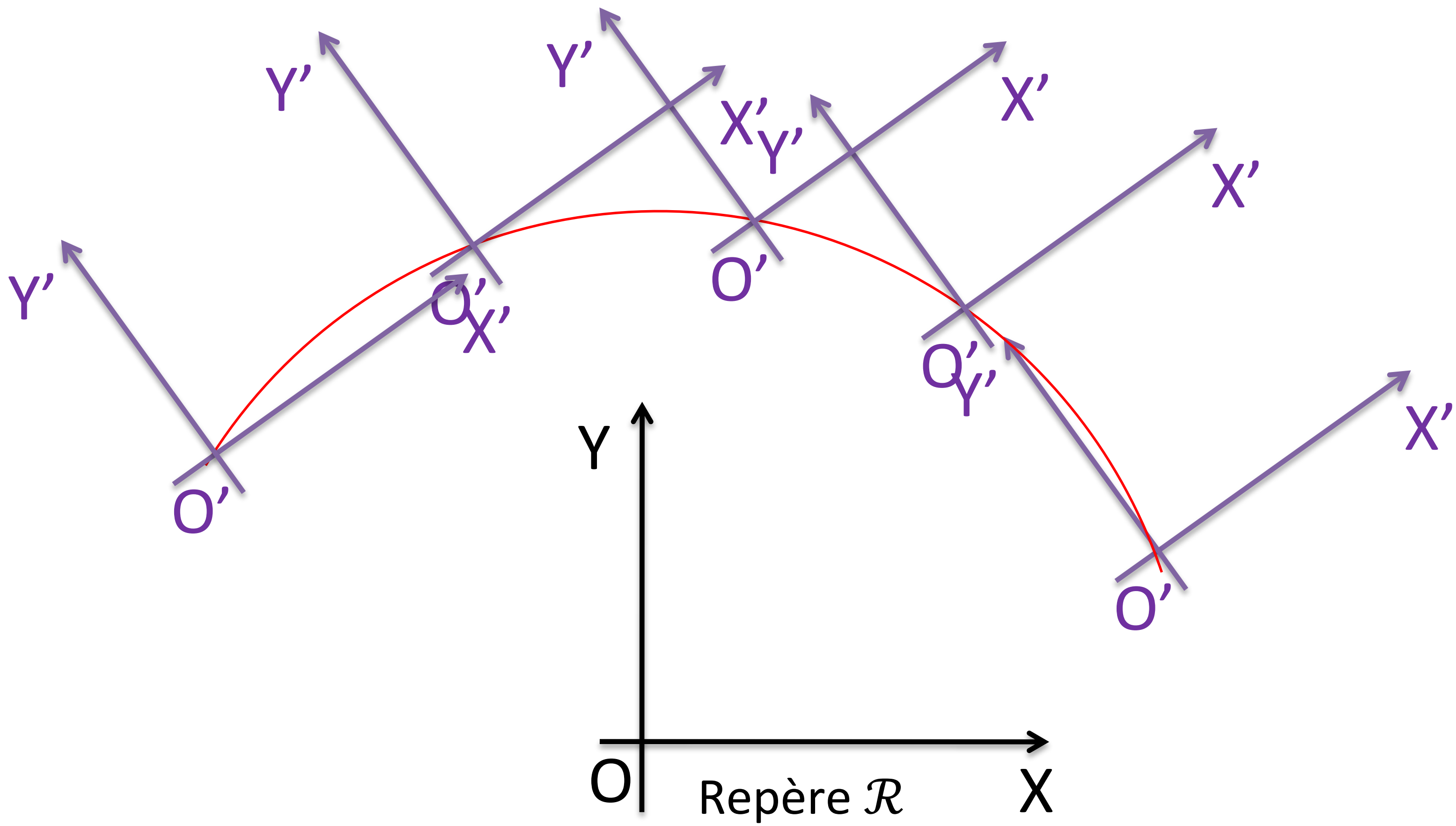
- une droite, on parle alors de translation rectiligne.
- un cercle, on parle alors de translation circulaire.
- une courbe quelconque, on parle de translation curviligne.


θ
θ
Y'
X'
O'
Y'
Y
X'
O'
θ
θ
Repère $\mathcal{R}'$
O
X
Repère $\mathcal{R}$

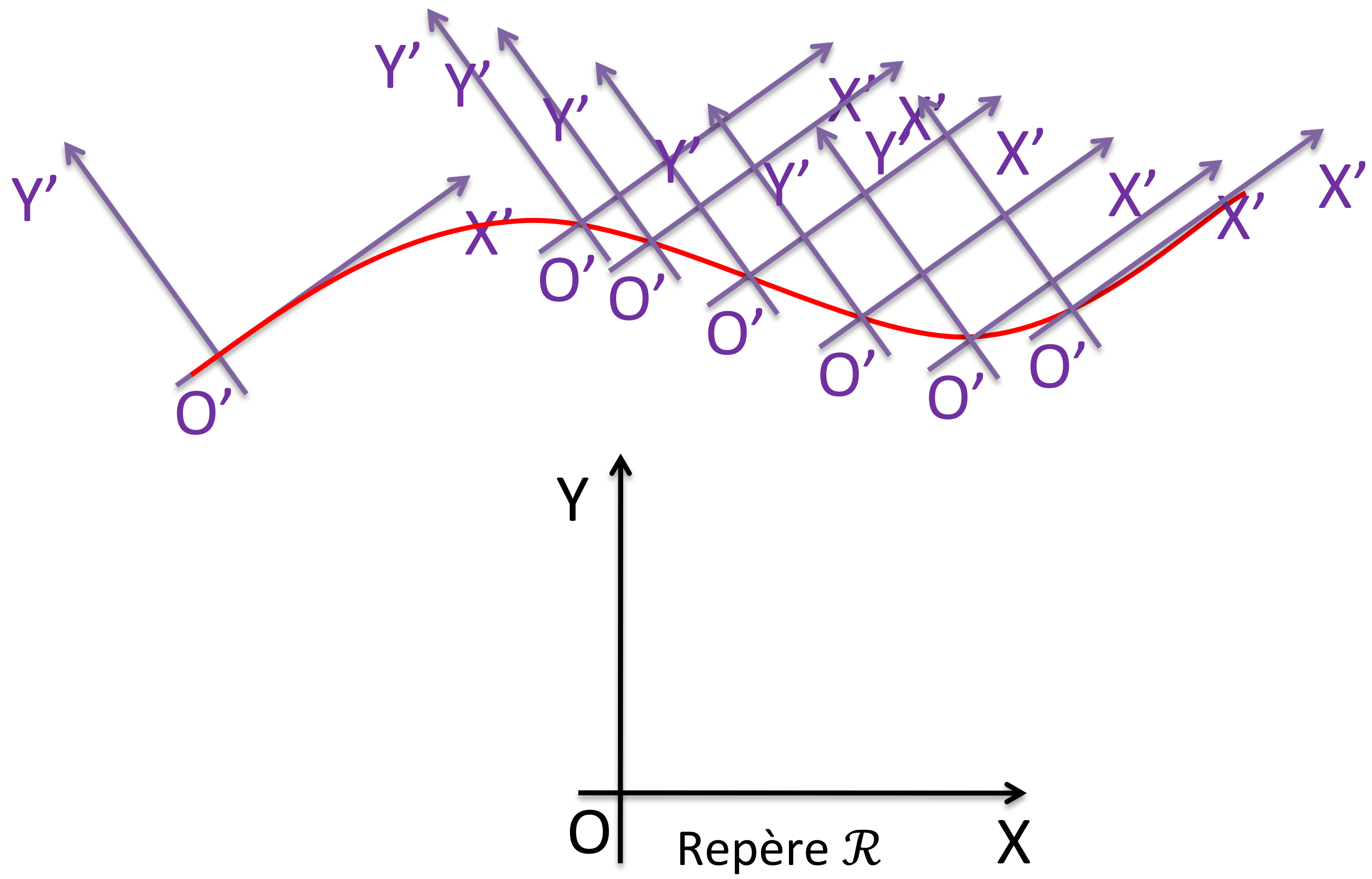
➢ O’ décrit une droite, on parle alors de translation rectiligne.



➢ O’ décrit un cercle, on parle de translation circulaire.



➢ O’ décrit une courbe quelconque, on parle de translation curviligne.



Remarques :

1°- Dans un mouvement de translation du solide (S) par rapport à $\mathcal{R}$, $\vec{\imath}_S, \vec{\jmath}_S$ et $\vec{k}_S$ lié au solide gardent des directions fixes dans $\mathcal{R}$:

$$\left.\frac{d\vec{\imath}_S}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{\jmath}_S}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{k}_S}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{0}$$

2°- A tout instant, les champs des vecteurs vitesse et accélération des points de S sont uniformes :

$$\vec{V}_{M/\mathcal{R}} = \vec{V}_{P/\mathcal{R}} \Leftrightarrow \vec{\gamma}_{M/\mathcal{R}} = \vec{\gamma}_{P/\mathcal{R}}$$

3°- Tous les points du solide en translation ont des trajectoires identiques.

4°- La translation est uniforme si :

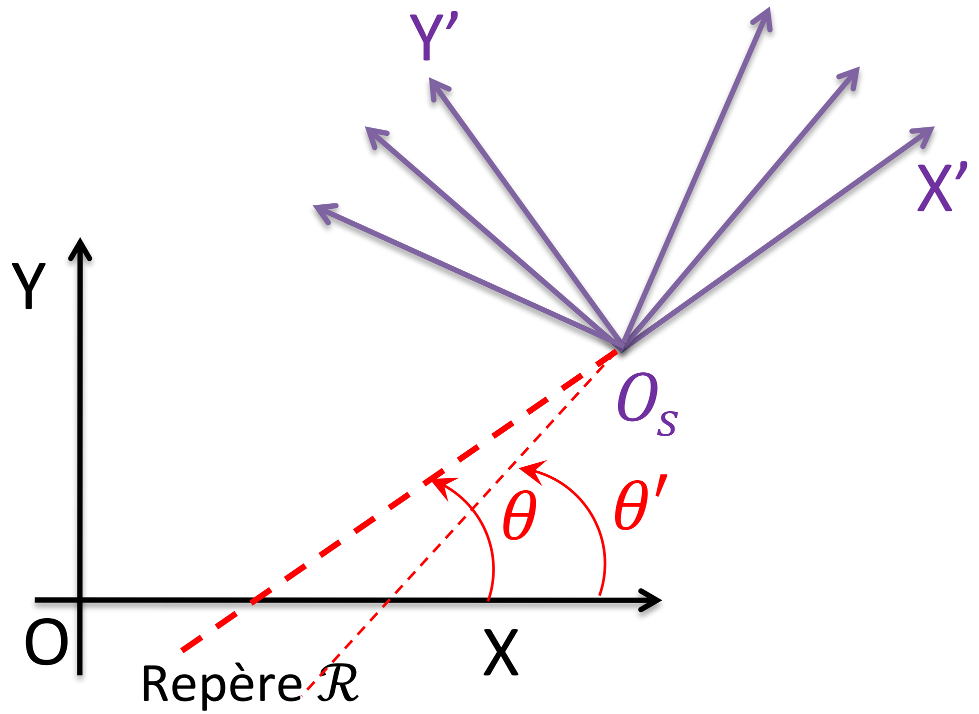
$$\forall\ M, P\ \in (S);\ \forall\ t :\ \vec{\gamma}_{M/\mathcal{R}} = \vec{\gamma}_{P/\mathcal{R}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_{M/\mathcal{R}} = \vec{V}_{P/\mathcal{R}} = \overrightarrow{cst}$$

Les points de (S) ont alors des trajectoires rectilignes.

Théorème : S a un mouvement de translation dans $\mathcal{R} \Leftrightarrow \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} = \vec{0} \Leftrightarrow$ le torseur cinématique est un couple $\Leftrightarrow \vec{V}_{B/\mathcal{R}} = \vec{V}_{A/\mathcal{R}} \quad \forall A, B \in S; \forall t$ c'est-à-dire que le champ des vitesses est uniforme.

b- Mouvement de rotation d'un solide:

Lorsque les vecteurs de base du référentiel $\mathcal{R}_S(O_S, \vec{\imath}_S, \vec{\jmath}_S, \vec{k}_S)$ lié au solide changent de directions dans $\mathcal{R}$ et $\overrightarrow{OO_S}$ est fixe, on dit que $\mathcal{R}_S$ (ou le solide (S)) est en rotation par rapport à $\mathcal{R}$ (sans translation).



$\vec{V}_{O_s/\mathcal{R}} = \vec{0} \Leftrightarrow$ le torseur cinématique se réduit à un glisseur. En plus :

$$\forall P \in (S): \vec{V}_{P/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O_s P}$$

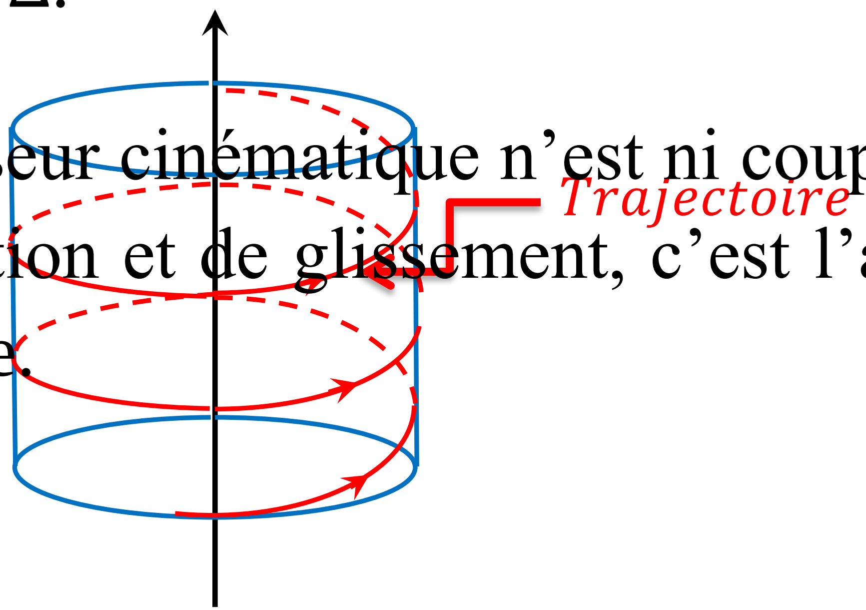
Remarque : Dans le cas général, lorsque $\overrightarrow{OO_S}$ et les directions sont variables, $\mathcal{R}_S$ est en translation et en rotation par rapport à $\mathcal{R}$.

c- Mouvement hélicoïdal:

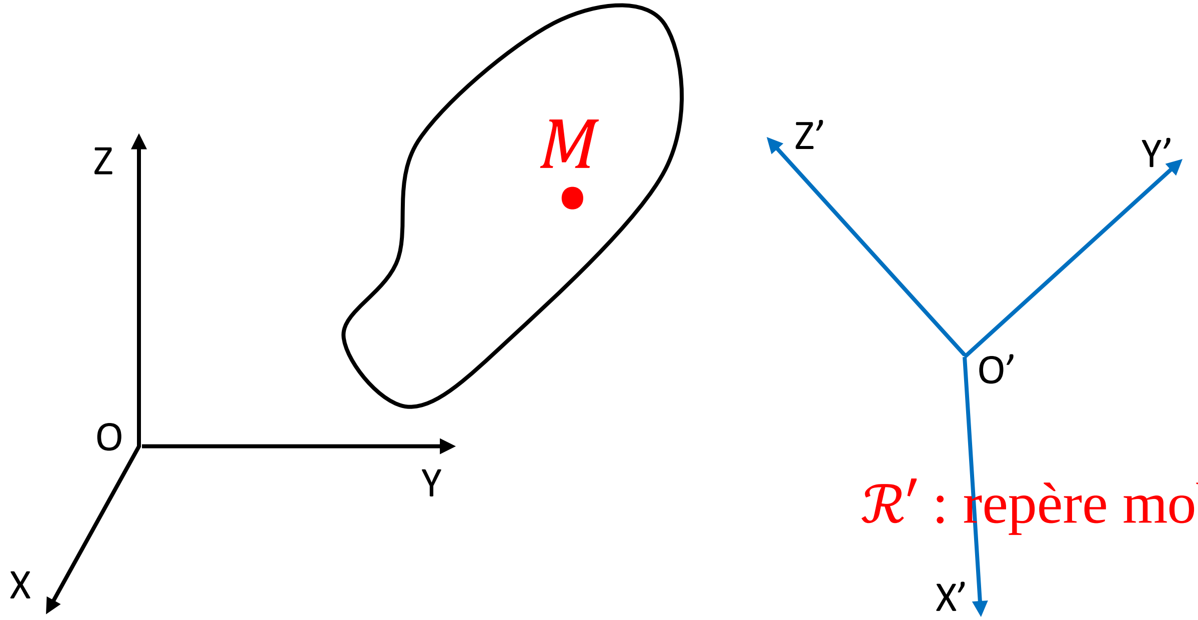
C'est un mouvement de rotation autour de Δ et de translation parallèle à Δ.

Tout point M de S et n'appartenant pas à Δ décrit une hélice circulaire autour de Δ.

Dans ce cas, le torseur cinématique n'est ni couple ni glisseur. Δ est l'axe de rotation et de glissement, c'est l'axe central du torseur cinématique.



II.5 Composition des mouvements :



$\mathcal{R}'$: repère mobile ou relatif

$\mathcal{R}$: repère fixe ou absolu

$\Downarrow$

Trouver les relations entre les grandeurs cinématiques ($\vec{V}_M, \vec{\gamma}_M$) dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^{'}$.

2°- Théorème de composition des vitesses :

$$\underbrace{\vec{V}_{M/\mathcal{R}}}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\vec{V}_{M/\mathcal{R}'}}_{\vec{v}_r} + \underbrace{\vec{V}_{O'}{}_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'}{}_{/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\vec{v}_e :\, \text{vitesse d'entrainement}}$$

$$|||$$

La vitesse absolue du point coïncidant M_c

$$|||$$

M_c est un point fixe de $\mathcal{R}'$ qui coïncide avec le point M à l'instant t

alors :
$$\left.\frac{d\,\overrightarrow{O'M_c}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$$

$$\left.\frac{d\,\overrightarrow{OM_c}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M_c}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{V}_{O'/\mathcal{R}} + \cancel{\left.\frac{d\,\overrightarrow{O'M_c}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M_c} = \vec{v}_e$$

$$M_c \equiv M \in \mathcal{R}'$$

$$\vec{v}_r(M_c) = \vec{V}_{M_c/\mathcal{R}'} = \vec{V}_{M\in\mathcal{R}'/\mathcal{R}'} = \vec{0}$$

Par conséquent, la vitesse d'entrainement s'écrit :

$$\vec{v}_e = \vec{v}_a(M_c) = \vec{v}_a(M \in \mathcal{R}') = \vec{V}_{M\in\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{V}(M \in \mathcal{R}'/\mathcal{R})$$

$$= \vec{V}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(M/\mathcal{R}') + \vec{V}(M \in \mathcal{R}'/\mathcal{R})$$

Remarques :

- $\vec{V}(M \in \mathcal{R}/\mathcal{R}') = \vec{V}(M \in \mathcal{R}/\mathcal{R}_0) + \vec{V}(M \in \mathcal{R}_0/\mathcal{R}')$
- $\vec{V}(M \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}) = -\vec{V}(M \in \mathcal{R}/\mathcal{R}')$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(M/\mathcal{R}') + \vec{V}(M \in \mathcal{R}'/\mathcal{R})$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}') = \vec{V}(M/\mathcal{R}) + \vec{V}(M \in \mathcal{R}/\mathcal{R}')$$

b- Loi de composition des torseurs cinématiques d'un solide rigide :

$$\mathcal{V}(S/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \\ \vec{V}_{A/\mathcal{R}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \\ \vec{V}_{A/\mathcal{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}'} \\ \vec{V}_{A/\mathcal{R}'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \\ \vec{V}_{A\in\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \end{pmatrix}_A$$

$$\mathcal{V}(S/\mathcal{R}) = \mathcal{V}(S/\mathcal{R}') + \mathcal{V}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$$

c- Théorème de composition des accélérations :

$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$$

- $\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_{M/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{v}_a(M)}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$: Accélération absolue

- $\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}_{M/\mathcal{R}'} = \left.\frac{d\vec{v}_r(M)}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}$: Accélération relative

- $\vec{\gamma}_c = 2\,\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{V}_{M/\mathcal{R}'}$: Accélération de Coriolis

- $\vec{\gamma}_e = \underbrace{\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}}}_{\vec{\gamma}_a(O')} + \frac{d\,\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$

: Accélération d'entrainement

$$\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}_{M_c/\mathcal{R}} = \vec{\gamma}(M \in \mathcal{R}'/\mathcal{R})$$

<u>Remarque :</u>

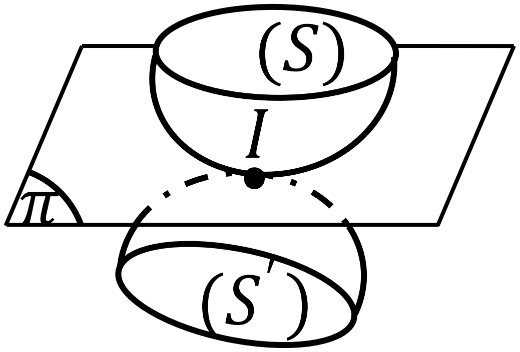
En général, $\vec{\gamma}_e \neq \left.\frac{d\vec{v}_e}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$ et l'égalité n'a lieu que lorsque $\mathcal{R}'$ est en mouvement de translation par rapport à $\mathcal{R}$ $(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0})$ ou lorsque M est au repos dans $\mathcal{R}'$ $(\vec{V}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{0}\,)$ puisque :

$$\vec{\gamma}_e = \left.\frac{d\vec{v}_e}{dt}\right)_{\mathcal{R}} - \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{V}_{M/\mathcal{R}'}$$

II.6 Cinématique de contact entre deux solides :

a- Contact ponctuel :

Soient S et S' en contact en un point géométrique I :



I peut être considéré soit comme un point de S.

I peut être considéré soit comme un point de S'.

Soit π le plan tangent commun aux solides S et S' en contact.

Définition : La vitesse de I considéré comme fixe dans S', par rapport à S : $\vec{V}(I \in S'/S)$ est dite vitesse de glissement de S'/S au point I.

On a d'après la composition des vitesses :

$$\vec{V}(I/S) = \vec{V}(I \in S'/S) + \vec{V}(I/S')$$

La vitesse de glissement de S'/S est donc donnée par :

$$\vec{V}(I \in S'/S) = \vec{V}(I/S) - \vec{V}(I/S')$$

Remarques :

1°- La vitesse de glissement de S'/S est égale et opposée à la vitesse de glissement de S/S', c'est-à-dire :

$$\vec{V}(I \in S'/S) = -\vec{V}(I \in S/S')$$

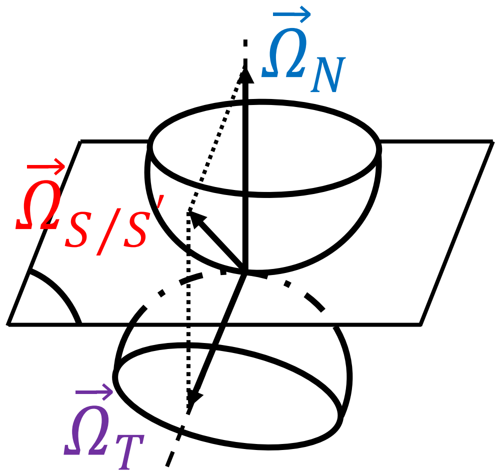
2°- $\vec{V}_g \in \pi$ plan tangent commun

Définition : S' roule sans glisser sur S en I, lorsqu'à tout instant, la vitesse de glissement de S'/S en I est nulle.

Conséquences :

→ Si S roule sans glisser sur S' en I, alors S' roule sans glisser sur S en I.

→ Les torseurs cinématiques $\mathcal{V}_{S'/S}$ et $\mathcal{V}_{S/S'}$ sont des glisseurs dont l'axe passe par I.



$$\vec{\Omega}_{S/S'} = \vec{\Omega}_N + \vec{\Omega}_T$$

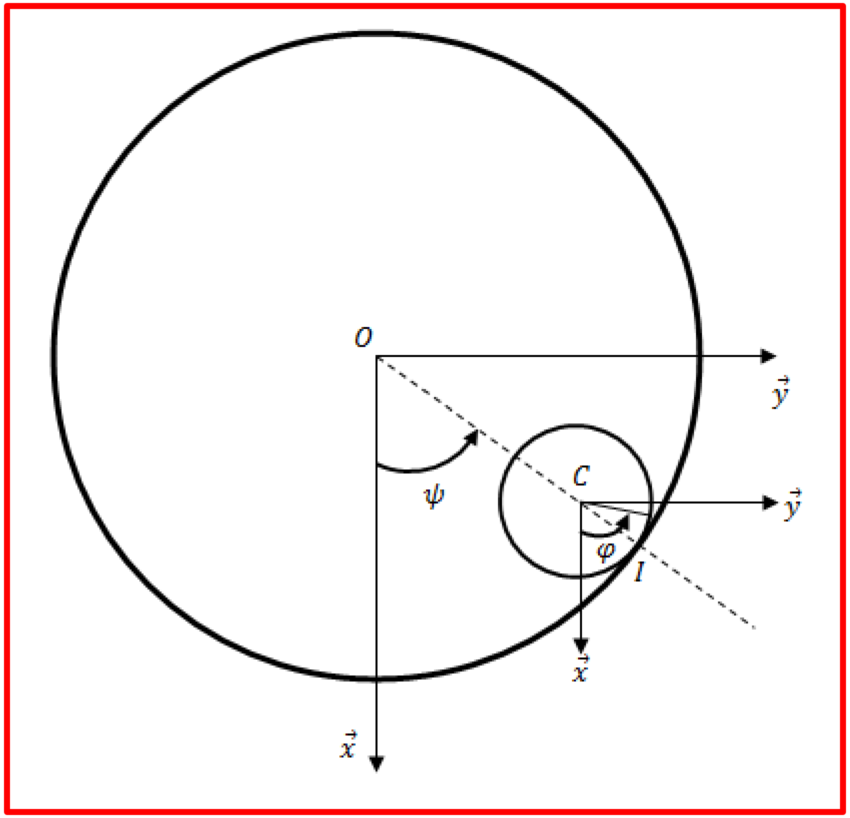
$\vec{\Omega}_N$: vecteur rotation instantanée de pivotement en I.

$\vec{\Omega}_T$: vecteur rotation instantanée de roulement en I.

Exercice d'application : Un disque mince de rayon r roule sans glisser à l'intérieur d'un anneau fixe de rayon R.

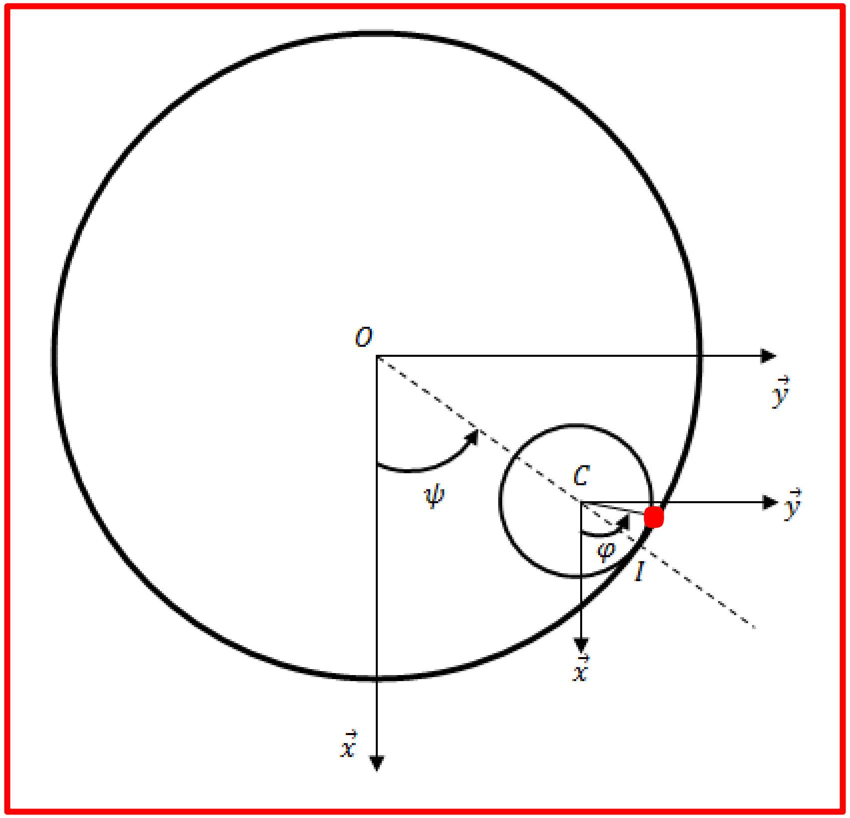
1°- Paramétrer la position du disque.

2°- Ecrire le non glissement.



1°- Paramétrons la position du disque :

La position du centre C du disque est déterminé par ψ et en plus le disque effectue une rotation d'angle φ autour de l'axe Cz. Par conséquent, deux degrés de liberté : ψ et φ



2°- Soit I le point de contact entre le disque et l'anneau. Le non glissement est donné par :

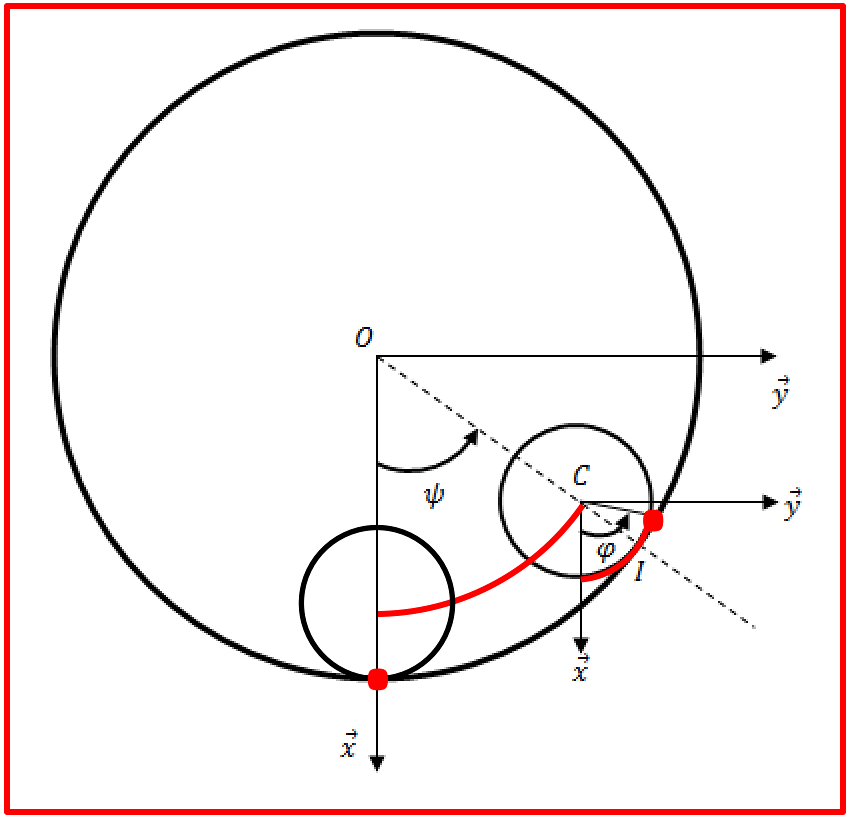
$$\vec{V}(I \in disque/anneau) = \vec{0} \text{ or}$$

$$\vec{V}(I \in disque/anneau) = \vec{V}(C/anneau) + \vec{\Omega} \wedge \vec{CI}$$

$$\Longrightarrow \vec{V}(C/anneau) = -[\dot{\varphi}\vec{k} \wedge r\vec{e}_r] = -r\dot{\varphi}\vec{e}_\theta$$

Or $\vec{V}(C/anneau) = (R-r)\dot{\psi}\,\vec{e}_\theta$; d'où : $(R-r)\dot{\psi} + r\dot{\varphi} = 0$

$$(R-r)\dot{\psi} + r\dot{\varphi} = 0$$



Cinétique du solide

I- Masse et centre de masse d'un système :

I-1 Masse d'un système matériel :

Masse : Quantité de matière contenue dans ce système.

- Invariable (mécanique classique)
- Propriété d'additivité (Grandeur extensive)
- Grandeur scalaire positive

Deux sortes de systèmes matériels à considérer: systèmes discrets et systèmes continus.

Définition du système matériel discret Σ : C'est un ensemble fini de N points matériels M_i de masses $m_i (i = 1, \dots \dots, N)$, alors la masse du système est donnée par :

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Définition du système matériel continu S: C'est une répartition continue de matière, alors la masse du système est donnée par :

$$m = \int_S dm$$

Où dm est la masse élémentaire d'un élément de matière de S donnée par :

- $dm = \lambda dl$ pour une répartition linéique de masse de densité λ.

- $dm = \sigma ds$ pour une répartition surfacique de masse de densité σ.

- $dm = \rho dv$ pour une répartition volumique de masse de densité ρ.

Le système S est dit homogène lorsque sa densité λ, σ ou ρ est constante sur tout le domaine. Dans ce cas :

- Pour une répartition linéique :

$$m = \int_S dm = \int_S \lambda dl = \lambda l$$

- Pour une répartition surfacique :

$$m = \int_S dm = \int_S \sigma ds = \sigma s$$

- Pour une répartition volumique :

$$m = \int_S dm = \int_S \rho dv = \rho v$$

I-2 Centre de masse ou centre d'inertie :

Le centre de masse ou le centre d'inertie G du système est le point unique donné par :

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \, \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \text{ pour un système discret}$$

$$\rightarrow \int_S \overrightarrow{GM} \, dm = \vec{0} \quad \text{pour un système continu}$$

I- 3 Le centre de masse et la propriété de symétrie du système :

Définition : Un système S possède une symétrie matérielle (par rapport à un point, une droite ou un plan) s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- S possède une symétrie géométrique.

  i.e : Si $\forall A \in S$, $\exists B$ symétrique de A par rapport au point, à la droite ou au plan tel que : $B \in S$.

- Les points symétriques ont la même masse pour un système discret ou la même densité pour un système continu.

  i.e : $m(A) = m(B)$(S: système discret)

  ou bien :

  - $\lambda(A) = \lambda(B)$ (S: système continu linéique)
  - $\sigma(A) = \sigma(B)$ (S: système continu surfacique)
  - $\rho(A) = \rho(B)$ (S: système continu volumique)

Cas particulier : Un système possède une symétrie matérielle de révolution autour de l'axe Δ, s'il possède une symétrie géométrique autour de Δ et si la densité de masse est la même pour tous les points situés sur un même cercle d'axe Δ.

Exemple : Le cylindre, le cône, la sphère etc….

Remarque :

Pour les systèmes homogènes, la symétrie géométrique entraine la symétrie matérielle.

Propriété : Le centre de masse d'un système ayant une symétrie matérielle de centre O, d'axe Δ ou de plan π est respectivement en O, sur Δ ou sur π.

Exemple : Une boule homogène de centre O et de rayon R admet O comme point de symétrie matérielle.

I-4 Détermination du centre de masse G :

a- Calcul direct :

Soit O un point donné quelconque de l'espace. Pour un système discret :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,\overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \iff \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\overrightarrow{OM_i}$$

Où m est la masse totale du système : $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$

On démontre de la même manière que le centre de masse pour un système continu est donné par :

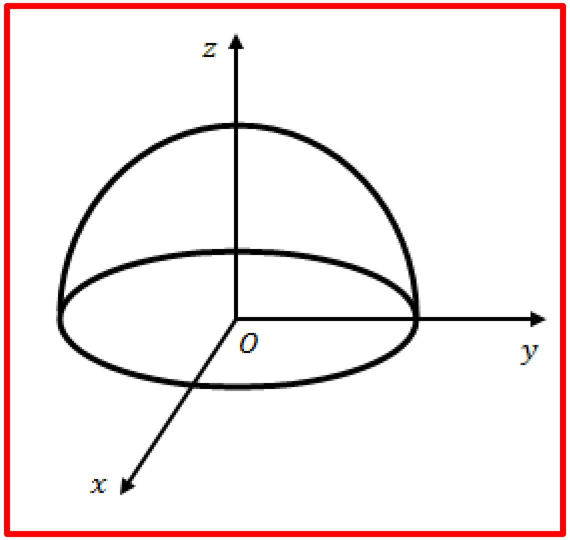
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_S \overrightarrow{OM}\,dm$$

Les coordonnées x_G, y_G et z_G de G dans un repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont données par :

Système discret	Système continu
$x_G = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i$	$x_G = \frac{1}{m}\int_S x\, dm$
$y_G = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\, y_i$	$y_G = \frac{1}{m}\int_S y\, dm$
$z_G = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\, z_i$	$z_G = \frac{1}{m}\int_S z\, dm$

$$x_G = \overrightarrow{OG} \cdot \vec{i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\overrightarrow{OM_i} \cdot \vec{i}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x_G = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i$$

Exemple : Calcul direct du centre de masse pour une demi-boule homogène de masse m et de rayon R.

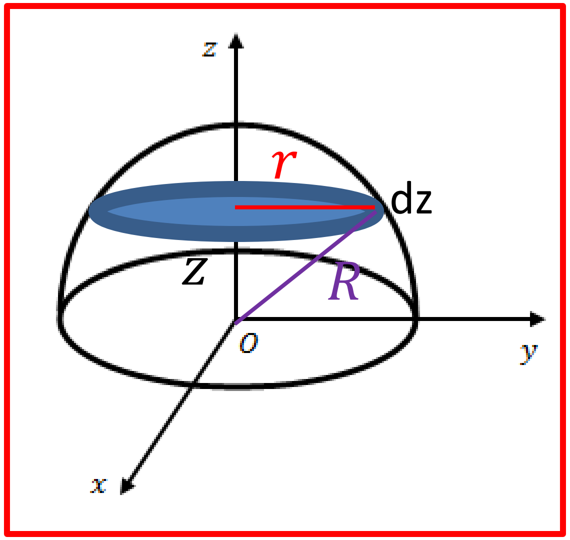


Cherchons les coordonnées x_G, y_G et z_G de G dans un repère $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

Par raison de symétrie, G est sur l'axe Oz, d'où :

$$x_G = y_G = 0 \text{ et } z_G = \frac{1}{m}\int_S z\,dm$$

$$z_G = \frac{1}{m}\int_S z\,(\rho dV) = \frac{\rho}{m}\int_S z\,dV = \frac{1}{V}\iiint_V z dV$$



Pour un élément de volume dV d'épaisseur dz et de rayon r, nous avons :

$$R^2 = r^2 + z^2 \Longrightarrow r^2 = R^2 - z^2$$

Or

$$dV = \pi(R^2 - z^2)dz \Longrightarrow z_G = \frac{1}{V}\int_S \pi(R^2 - z^2)zdz$$

Par conséquent :

$$z_G = \frac{\pi}{V}\frac{R^4}{4} \quad \text{avec } V = \frac{2}{3}\pi R^3 \Longrightarrow \boxed{z_G = \frac{3}{8}R}$$

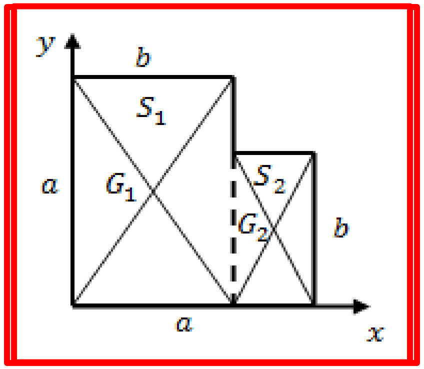
Le centre d'inertie possède la propriété d'associativité. Considérons un système S formé de n ensembles disjoints S_k de masses m_k et de centre de masse G_k.

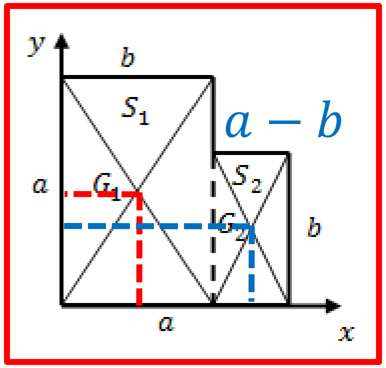
Propriété : Le centre de masse G du système S est le centre de masse des points G_k affectés des masses respectives m_k.

$$\equiv \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k\,\overrightarrow{OG_k}$$

Exemple : Déterminons la position du centre de masse d'une plaque homogène en forme d'équerre :

Décomposons la surface en deux rectangles S_1 et S_2 de centres de masses G_1 et G_2, de longueurs a et b et de largeurs b et $(a-b)$ respectivement.





$$x_G = \frac{m_1 x_{G_1} + m_2 x_{G_2}}{m}$$

Où

$$\begin{cases} x_{G_1} = \dfrac{b}{2} \quad \text{et} \quad y_{G_1} = \dfrac{a}{2} \\ x_{G_2} = a - \left(\dfrac{a-b}{2}\right) \quad \text{et} \quad y_{G_2} = \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

Et puisque le solide est homogène, alors :

$$m_1 = \sigma S_1, m_2 = \sigma S_2 \quad \text{et} \quad m = m_1 + m_2 = \sigma(S_1 + S_2)$$

$$x_G = \frac{S_1 x_{G_1} + S_2 x_{G_2}}{S_1 + S_2}$$

Or

$$S_1 = ab \quad \text{et} \quad S_2 = (a-b)b \quad \Longrightarrow \boxed{x_G = \frac{a^2 + ab - b^2}{4a - 2b} = y_G}$$

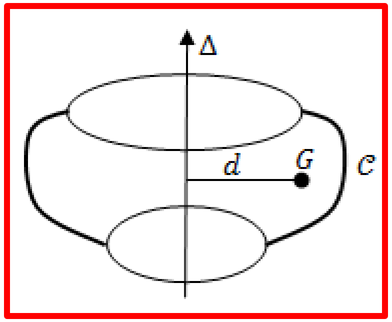
b- Utilisation des théorèmes de Guldin :

i- Premier théorème de Guldin :

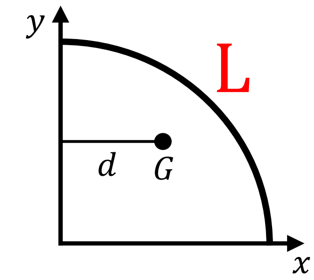
La rotation d'une courbe homogène plane $\mathcal{C}$, de longueur L et de centre de masse G, autour d'un axe de rotation Δ ne la traversant pas engendre une surface d'aire S.

La distance de G à Δ est :

$$\boxed{d = \frac{S}{2\pi L}}$$



Exemple : Déterminer le centre de masse d'un quart de circonférence homogène de rayon R.



$$d = \frac{S}{2\pi L}$$

En faisant tourner le quart de circonférence de longueur L autour de Oy, on engendre une surface hémisphérique S:

$$S = 2\pi R^2 \quad \text{et} \quad L = \frac{\pi R}{2}$$

$$\Longrightarrow d = \frac{2\pi R^2}{\pi^2 R} = \frac{2R}{\pi} = x_G = y_G$$

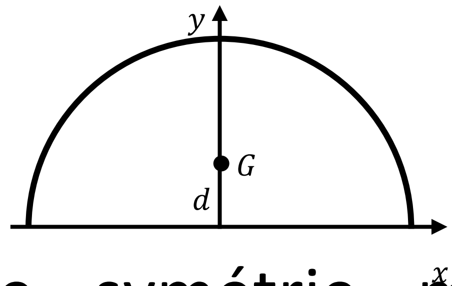
ii- Deuxième théorème de Guldin :

La rotation d'une surface homogène plane $\mathcal{S}$, d'aire S et de centre de masse G, autour d'un axe de rotation Δ ne la traversant pas engendre un volume V.

La distance de G à Δ est :

$$\boxed{d = \frac{V}{2\pi S}}$$

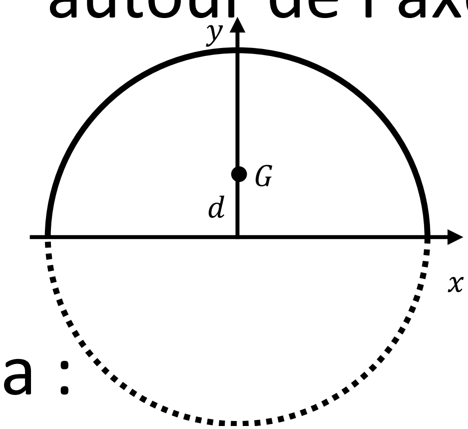
Exemple : Déterminer le centre de masse d'un demi disque de rayon R.



L'axe Oy est un axe de symétrie matérielle et par conséquent :

$$x_G = 0$$

La rotation du demi disque de surface $S = \frac{\pi R^2}{2}$ autour de l'axe Ox, engendre une sphère de volume :



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

d'après le deuxième théorème de Guldin, on a :

$$d = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi \frac{\pi R^2}{2}} \Longrightarrow \boxed{y_G = d = \frac{4R}{3\pi}}$$

I-5 Référentiel du centre de masse :

a- Définition :

On appelle référentiel du centre de masse (ou référentiel barycentrique), le référentiel noté $\mathcal{R}_G$, d'origine G et qui est en translation par rapport au référentiel d'étude $\mathcal{R}\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Remarques :

1°- Le centre de masse G est immobile dans $\mathcal{R}_G$.

2°- $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}} = \vec{0} \Longrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathcal{R}_G}$

quelque soit le vecteur $\vec{\mathrm{A}}$

b- Vecteurs vitesse et accélération du centre de masse G dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_G$:

i- Vecteur vitesse et accélération de G dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{G}/\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathcal{R}}$$

or $\quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_S \overrightarrow{OM}\, dm$

$$\Rightarrow \vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{G}/\mathcal{R}} = \frac{1}{m}\int_S \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathcal{R}} dm = \frac{1}{m}\int_S \vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}\, dm$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{G}/\mathcal{R}} = \frac{1}{m}\int_S \vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}\, dm}$$

et l'accélération $\vec{\gamma}_{G/\mathcal{R}}$ de G dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{\gamma}_{G/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{V}_{G/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{m}\int_S \vec{\gamma}_{M/\mathcal{R}}\, dm$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\gamma}_{G/\mathcal{R}} = \frac{1}{m}\int_S \vec{\gamma}_{M/\mathcal{R}}\, dm}$$

ii- Vecteur vitesse et accélération de G dans $\mathcal{R}_G$:

$$\vec{V}_{G/\mathcal{R}_G} = \left.\frac{d\overrightarrow{GG}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_G} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\gamma}_{G/\mathcal{R}_G} = \vec{0}$$

II- Opérateur d'inertie et matrice d'inertie d'un solide :

L'opérateur d'inertie du solide S au point O noté $\mathcal{J}_O^S$ est l'opérateur défini par :

$$\mathcal{J}_O^S(\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right) dm$$

Où $\vec{u} \in E$ et P est un point du solide de masse dm.

Propriété : L'opérateur d'inertie $\mathcal{J}_O^S$ du solide S au point O est symétrique.

C.a.d :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E: \ \vec{v} \cdot \mathcal{J}_O^S(\vec{u}) = \vec{u} \cdot \mathcal{J}_O^S(\vec{v})$$

Dém : Voir polycopié

Conséquence : L'opérateur d'inertie $\mathcal{J}_O^S$ du solide S au point O est linéaire.

a- Matrice d'inertie :

La matrice $I(O,S)$ de $\mathcal{J}_O^S$ dans toute base orthonormée $\{\vec{e}_i\}$ est une matrice symétrique donnée par :

$$I(O,S) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$$

où les éléments de la matrice $I(O,S)$ sont donnés par :

$$I_{ij} = I_{ji} = \vec{e}_i \cdot \mathcal{J}_O^S(\vec{e}_j) = \int_S \left(\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{OP}\right) \cdot \left(\vec{e}_j \wedge \overrightarrow{OP}\right) dm$$

$I(O,S)$ est la matrice d'inertie (tenseur d'inertie) de S en O dans $\{\vec{e}_i\}$.

$$\mathcal{J}_O^S(\vec{u}) = I(O,S).\vec{u}$$

$$I(O,S)=\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$$ Matrice d'inertie

moments d'inertie par rapport aux axes $(O,\vec{e}_i)$. Ils sont donnés par :

$$I_{11}=\int_S (y^2+z^2)\,dm\,; I_{22}=\int_S (x^2+z^2)\,dm; I_{33}=\int_S (x^2+y^2)\,dm$$

où x, y et z sont les coordonnées de P de masse dm dans le repère $\{O,\vec{e}_i\}$. En effet :

$$I_{ii}=\vec{e}_i\cdot\mathcal{J}_O^S(\vec{e}_i)=\int_S \left(\vec{e}_i\wedge\overrightarrow{OP}\right)\cdot\left(\vec{e}_i\wedge\overrightarrow{OP}\right)dm$$

Or $\vec{e}_1\wedge\overrightarrow{OP}=\vec{e}_1\wedge(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3)=y\vec{e}_3-z\vec{e}_2$

$$\Longrightarrow \left(\vec{e}_1\wedge\overrightarrow{OP}\right)\cdot\left(\vec{e}_1\wedge\overrightarrow{OP}\right)=y^2+z^2 \Rightarrow \boxed{I_{11}=A=\int_S (y^2+z^2)\,dm}$$

$$I(O,S) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$$

Les éléments non diagonaux de la matrice d'inertie sont appelés produits d'inertie de S par rapport à deux plans orthogonaux.

Par exemple, I_{23} est le produit d'inertie de S par rapport aux plans (Oxy) et (Oxz). Par conséquent :

$$I_{12} = -\int_S xy\, dm; \quad I_{13} = -\int_S xz\, dm; \quad I_{23} = -\int_S yz\, dm$$

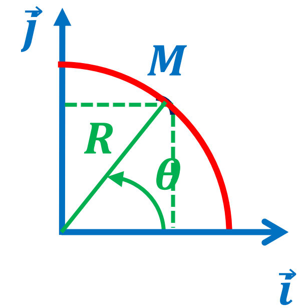
En effet :

$$I_{ij} = \vec{e}_i \cdot \mathcal{J}_O^S(\vec{e}_j) = \int_S \left(\vec{e}_i \wedge \overrightarrow{OP}\right) \cdot \left(\vec{e}_j \wedge \overrightarrow{OP}\right) dm$$

Remarques : Les moments d'inertie sont positifs ou nuls et les produits d'inertie peuvent être positifs, négatifs ou nuls.

Exemple : Déterminer la matrice d'inertie d'un quart de cerceau homogène de rayon R au point O relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Supposons que le solide est dans le plan Oxy, alors : $z = 0$.



Par conséquent :

$$I_{13} = -\int_S xz\, dm = 0 \text{ et } I_{23} = -\int_S yz\, dm = 0$$

Considérons un élément dl du cerceau, ses coordonnées polaires sont :

$$x = R\cos\theta \quad \text{et} \quad y = R\sin\theta \quad \text{avec} \quad dm = \lambda dl = \lambda R d\theta$$

Le cerceau étant homogène, alors :

$$m = \lambda L = \lambda \frac{\pi R}{2}$$

$$I_{11} = \int_S (y^2 + z^2)\,dm = \int_S y^2\,dm = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin^2\theta\,d\theta = \frac{mR^2}{2}$$

$$I_{22} = \int_S (x^2 + z^2)\,dm = \int_S x^2\,dm = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \cos^2\theta\,d\theta = \frac{mR^2}{2}$$

$$I_{33} = \int_S (x^2 + y^2)\,dm = I_{11} + I_{22} = mR^2$$

$$I_{12} = -\int_S xy\,dm = -\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin\theta\cos\theta\,d\theta = -\frac{mR^2}{\pi}$$

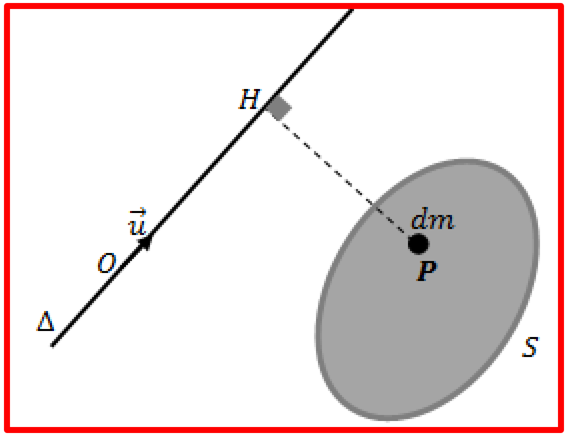
$$I(O,S) = \frac{mR^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\pi} & 0 \\ -\frac{2}{\pi} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b- Moments d'inerties :

Le moment d'inertie I_Δ du solide S par rapport à un axe $\Delta(O, \vec{u})$ est défini par :

$$I_\Delta = \vec{u} \cdot \mathcal{J}_O^S(\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{HP}^2 \, dm$$

où H est la projection orthogonale de P sur Δ. $HP = d(H, P)$ est la distance du point P du solide S à l'axe Δ.



Remarque : $I_\Delta = \vec{u} \cdot I(O, S) \cdot \vec{u}$

On définit de la même manière les moments d'inertie I_O par rapport à un point O ou I_π par rapport à un plan π par :

$$I_O = \int_S \overrightarrow{OP}^2\, dm \qquad I_\pi = \int_S \overrightarrow{HP}^2\, dm$$

où H est la projection orthogonale de P sur π.

Remarque : Soit $P(x, y, z) \in S$ dans $\mathcal{R}(O, xyz)$:

$$I_O = \int_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dm$$

$$I_{Ox} = \int_S (y^2 + z^2)\, dm; \; I_{Oy} = \int_S (x^2 + z^2)\, dm; \; I_{Oz} = \int_S (x^2 + y^2)\, dm$$

$$I_{Oxy} = \int_S z^2\, dm; \quad I_{Oxz} = \int_S y^2\, dm; \quad I_{Oyz} = \int_S x^2\, dm$$

$$I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz} = 2I_O; \quad I_{Oxy} + I_{Oxz} + I_{Oyz} = I_O$$

$$I_{Ox} = I_{Oxy} + I_{Oxz}; \quad I_{Oy} = I_{Oyz} + I_{Oxy}; \quad I_{Ox} = I_{Oxz} + I_{Oyz}$$

c- Eléments principaux d'inertie :

La matrice d'inertie $I(O,S)$ est symétrique

$\Downarrow$

La matrice d'inertie $I(O,S)$ est diagonalisable

$\Downarrow$

$\exists$ au moins un système de vecteurs propres $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ formant une base orthonormée dans laquelle $I(O,S)$ est diagonale.

Dans cette base, $I(O,S)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$I(O,S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)}$$

où A, B et C sont appelés les éléments principaux d'inertie.

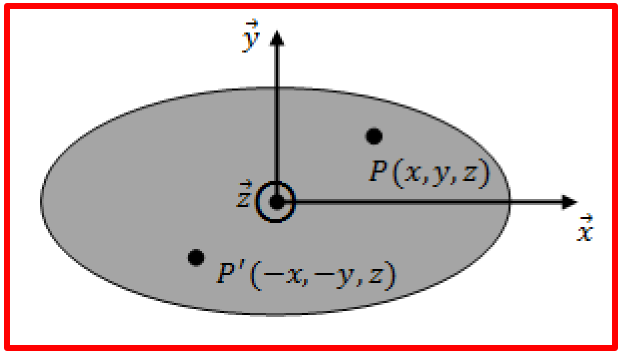
$(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est appelé repère principal d'inertie de S en O.

$(O, \vec{u}_1)$, $(O, \vec{u}_2)$ et $(O, \vec{u}_3)$ sont appelés axes principaux d'inertie de S en O.

Propriété 1 : Tout axe de symétrie matérielle est un axe principal d'inertie en chacun de ses points.

Supposons que l'axe (Oz) est un axe de symétrie matérielle de S.

$$I(O,S)\vec{z} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E \\ -D \\ C \end{pmatrix}$$



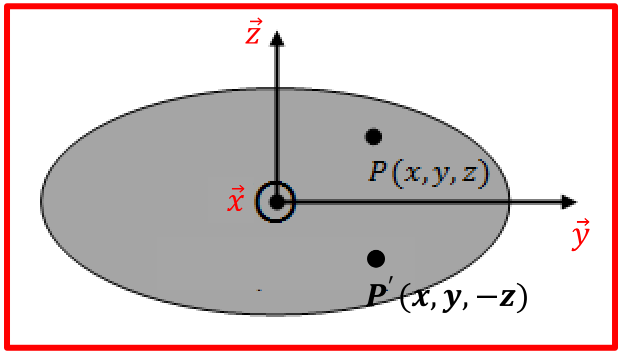
$$\text{or } E = -I_{13} = \int_S xz\,dm = 0 \text{ et } D = -I_{23} = \int_S yz\,dm = 0$$

$$\text{puisque } \int_{x\geq 0} xz\,dm = -\int_{x\leq 0} xz\,dm \ \text{ et } \int_{y\geq 0} yz\,dm = -\int_{y\leq 0} yz\,dm$$

$$\Longrightarrow I(O,S)\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix} = C\vec{z} = I_{33}\vec{z} \Longrightarrow I(O,S) = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ tout axe de symétrie matérielle est un axe principal d'inertie.

Propriété 2 : Tout axe perpendiculaire à un plan de symétrie matérielle est un axe principal d'inertie.



$$E = \int_S xz\,dm = 0 \text{ puisque } \int_{z\geq 0} xz\,dm = -\int_{z\leq 0} xz\,dm$$

De même

$$D = \int_S yz\,dm = 0 \text{ puisque } \int_{z\geq 0} yz\,dm = -\int_{z\leq 0} yz\,dm$$

$$\Longrightarrow I(O,S)\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix} = C\vec{z} = I_{33}\vec{z} \Longrightarrow I(O,S) = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$$

Donc l'axe (Oz) est un axe principal d'inertie.

Propriété 3 : Si un solide admet une symétrie matérielle de révolution autour de Oz alors le repère $(Oxyz)$ est un repère principal d'inertie dans lequel la matrice d'inertie est de la forme :

$$I(O,S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\ ,\ ,\vec{k})} \quad \text{avec } A = B = \frac{C}{2} + \int z^2\, dm$$

(Oz) est un axe de symétrie de révolution matérielle, alors tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan de symétrie matérielle.

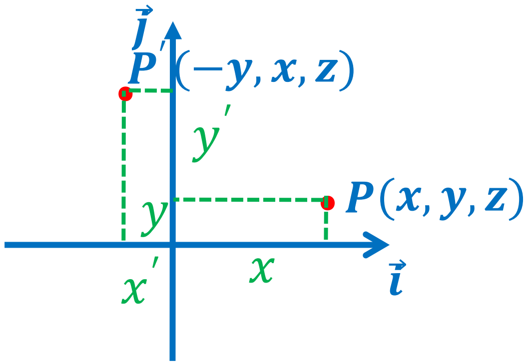
Par conséquent, les plans (xOz) et (yOz) sont deux plans de symétries matérielles.

$$\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$$

On déduit donc que :

$$\begin{cases} D = F = 0 \\ E = F = 0 \end{cases}$$

En plus, si on considère une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe (Oz) , alors :



$$P(x,y,z) \xrightarrow{\text{rotation d'angle } \frac{\pi}{2}} P'(-y,x,z)$$

Or :

$$A = \int_S (y^2 + z^2)\, dm \; ; \quad B = \int_S (x^2 + z^2)\, dm; \quad C = \int_S (x^2 + y^2)\, dm$$

$$\Longrightarrow A = B$$

$$A + B = C + 2\int_S z^2 dm \Longrightarrow A = B = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm$$

La matrice d'inertie du solide au point O, relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, s'écrit :

$$I(O,S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \text{avec } A = B = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm$$

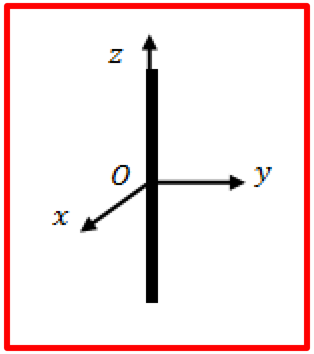
Ce qui prouve que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère principal d'inertie.

Remarque : Cette matrice a la même forme dans toute base orthonormée ayant $\vec{k}$ comme troisième vecteur.

En conséquence :

- Ox est un axe principal d'inertie $\Leftrightarrow E = F = 0$.
- Oy est un axe principal d'inertie $\Leftrightarrow D = F = 0$.
- Oz est un axe principal d'inertie $\Leftrightarrow D = E = 0$.
- Tout repère qui possède pour éléments de symétrie matérielle du système deux axes de symétrie est un repère principal d'inertie.
- Tout repère qui possède pour éléments de symétrie matérielle du système deux plans de symétrie est un repère principal d'inertie.

Exemple : Déterminer la matrice d'inertie d'une tige pleine de longueur L et de masse m.



Les axes Ox et Oy sont des axes de symétrie matérielle, donc $\mathcal{R}(O, xyz)$ muni de $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère principal d'inertie.

La tige est linéique confondue avec Oz donc :

$$x = y = 0 \Longrightarrow C = 0$$

$$A = B = \int_S z^2\, dm$$ puisque Oz est un axe de symétrie de révolution

$$\Longrightarrow A = B = \lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} z^2\, dz = \lambda \frac{L^3}{12} = \frac{mL^2}{12}$$

$$\Longrightarrow I(O, S) = \frac{mL^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})}$$

$$\mathcal{J}_O^S(\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right) dm$$

ii- Théorème de Kœnig relatif à l'opérateur d'inertie:

$$\boxed{\mathcal{J}_O^S(\vec{u}) = \mathcal{J}_O^{G(m)}(\vec{u}) + \mathcal{J}_G^S(\vec{u})}$$

$$\int_S \overrightarrow{OG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right) dm = \overrightarrow{OG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right) \int_S dm = m\, \overrightarrow{OG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right)$$

$$\int_S \overrightarrow{OG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}\right) dm = \overrightarrow{OG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \int_S \overrightarrow{GP}\, dm\right) = \vec{0}$$

$$\int_S \overrightarrow{GP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OG}\right) dm = \vec{0}$$

$$\int_S \overrightarrow{GP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}\right) dm = \mathcal{J}_G^S(\vec{u})$$

qu'on peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$I(O,S) = I(G,S) + I\big(O, G(m)\big)$$

Remarques :

1°- Les matrices d'inertie doivent être exprimées dans la même base.

2°- Si $I(G,S)$ est exprimée dans $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ et si (x_G,y_G,z_G) sont les coordonnées de G dans $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, alors :

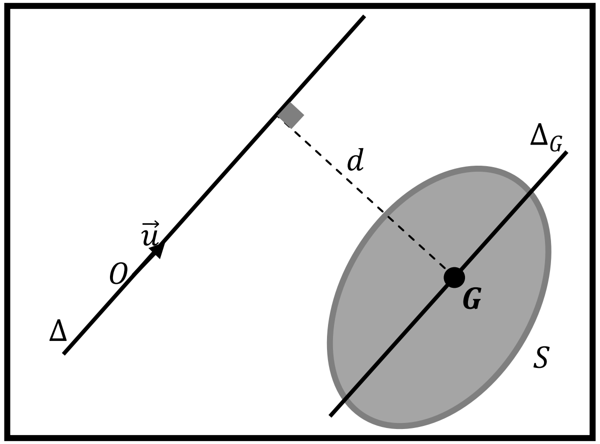
$$I(O,G(m)) = \begin{pmatrix} m(y_G^2+z_G^2) & -mx_Gy_G & -mx_Gz_G \\ -mx_Gy_G & m(x_G^2+z_G^2) & -my_Gz_G \\ -mx_Gz_G & -my_Gz_G & m(x_G^2+y_G^2) \end{pmatrix}$$

$$I_{11} = \int_{G(m)} (y_G^2+z_G^2)\,dm \qquad I_{12} = -\int_{G(m)} x_G y_G\,dm$$

iii- Application : Théorème d’Huygens :

Le moment d’inertie d’un solide S par rapport à une droite Δ est égale au moment d’inertie du solide par rapport à la droite Δ_G passant par G et parallèle à Δ augmenté du moment d’inertie qu’aurait toute la masse de S si elle était concentrée en G :

$$I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + md^2$$



III- Torseur cinétique, torseur dynamique et énergie cinétique :

1°- Quantité de mouvement d'un solide S :

La quantité de mouvement notée $\vec{P}(S/\mathcal{R})$ d'un solide S de masse m par rapport à un repère $\mathcal{R}$ est :

$$\vec{P}(S/\mathcal{R}) = \int_S \vec{V}_{M/\mathcal{R}}\, dm = m\vec{V}_{G/\mathcal{R}}$$

La quantité de mouvement d'un solide S est égale à celle de son centre de masse G affectée de la masse totale m.

Remarque : La quantité de mouvement d'un solide par rapport à $\mathcal{R}_G$ est nulle : $\vec{P}(S/\mathcal{R}_G) = \vec{0}$

2°- Moment cinétique d'un solide S :

Le moment cinétique de S % à O dans $\mathcal{R}$ est défini par :

$$\vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R}) = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_{M/\mathcal{R}} dm$$

Le moment cinétique de S par rapport à $\Delta(A, \vec{u})$ dans $\mathcal{R}$ est :

$$\sigma_\Delta(S/\mathcal{R}) = \vec{u} \cdot \vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R})$$

Propriété : $$\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_G)$$

Propriété : Le moment cinétique du solide S par rapport au référentiel $\mathcal{R}_G$ noté $\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}_G)$ est indépendant du point par rapport auquel il est calculé. Ainsi, $\forall$ A et B:

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}_G) = \vec{\sigma}_B(S/\mathcal{R}_G) = \vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_G) \underbrace{=}_{notation} \vec{\sigma}^*(S/\mathcal{R}_G)$$

$$\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}^*(S/\mathcal{R}_G)$$

i- Théorème de Koenig relatif au moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_A(G(m)/\mathcal{R}) + \boxed{\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_G)}$$

(moment cinétique interne)

3°- Quantité d'accélération d'un solide S :

La quantité d'accélération notée $\vec{a}(S/\mathcal{R})$ d'un solide S de masse m par rapport à un repère $\mathcal{R}$ est :

$$\vec{a}(S/\mathcal{R}) = \int_S \vec{\gamma}_{M/\mathcal{R}} dm = m\vec{\gamma}_{G/\mathcal{R}}$$

La quantité d'accélération d'un solide S est égale à celle de son centre de masse G affectée de la masse totale m.

Remarque : La quantité d'accélération d'un solide par rapport à $\mathcal{R}_G$ est nulle :

$$\vec{a}(S/\mathcal{R}_G) = \vec{0}$$

4°- Moment dynamique d'un solide S :

Le moment dynamique de S % à O dans $\mathcal{R}$ est défini par :

$$\vec{\delta}_O(S/\mathcal{R}) = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}_{M/\mathcal{R}} dm$$

Le moment dynamique de S par rapport à $\Delta(A, \vec{u})$dans $\mathcal{R}$ est :

$$\delta_\Delta = \vec{u} \cdot \vec{\delta}_A(S/\mathcal{R})$$

Propriété :

$$\boxed{\vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}) = \vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}_G)}$$

Propriété :

$$\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}_G) = \vec{\delta}_B(S/\mathcal{R}_G) = \vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}_G) \underbrace{=}_{notation} \vec{\delta}^*(S/\mathcal{R}_G)$$

i- Théorème de Koenig relatif au moment dynamique :

$$\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \vec{\delta}_A(G(m)/\mathcal{R}) + \boxed{\vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}_G)}$$

(moment dynamique interne)

5°- Energie cinétique d'un solide S :

L'énergie cinétique d'un solide S de masse m en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ est donnée par :

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\int_S \vec{V}^2_{M/\mathcal{R}}\, dm$$

Théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique :

$$E_c(S/\mathcal{R}) = E_c(G/\mathcal{R}) + \boxed{E_c(S/\mathcal{R}_G)}$$

Energie cinétique interne

Remarques :

$$S(G,m) = \cup\, S_i(G_i,m_i)$$

$$I(O, S = \{\cup\, S_i\}) = \sum_{i=1}^{N} I(O, S_i)$$

$$\vec{P}(S/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}(S_i/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_{G_i/\mathcal{R}}$$

$$\vec{a}(S/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{a}(S_i/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\gamma}_{G_i/\mathcal{R}}$$

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{\sigma}_A(S_i/\mathcal{R}) \qquad \vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{\delta}_A(S_i/\mathcal{R})$$

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{N} E_c(S_i/\mathcal{R})$$

III.6 Torseur cinétique :

Propriété : Le moment cinétique est antisymétrique.

$$\vec{\sigma}_P(S/\mathcal{R}) = \int_S \overrightarrow{PM} \wedge \vec{V}_{M/\mathcal{R}} dm$$

$$= \vec{\sigma}_Q(S/\mathcal{R}) + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{P}(S/\mathcal{R})$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_P(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_Q(S/\mathcal{R}) + \vec{P}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{QP}$$

$$[\sigma(S/\mathcal{R})] = \begin{cases} \text{Résultante cinétique: } \vec{P}(S/\mathcal{R}) = \int_S \vec{V}_{M/\mathcal{R}} dm = m\vec{V}_{G/\mathcal{R}} \\ \text{Moment cinétique: } \vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}_{M/\mathcal{R}} dm \end{cases}$$

$$\boxed{[\sigma(S/\mathcal{R})] = \sum_i [\sigma(S_i/\mathcal{R})]}$$

III.7 Torseur dynamique :

Propriété : Le moment dynamique est antisymétrique.

$$\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}_{M/\mathcal{R}} dm$$

$$= \vec{\delta}_B(S/\mathcal{R}) + \vec{a}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{BA}$$

$$[\delta(S/\mathcal{R})] = \begin{cases} \text{Résultante dynamique: } \vec{a}(S/\mathcal{R}) = \int_S \vec{\gamma}_{M/\mathcal{R}} dm = m\vec{\gamma}_{G/\mathcal{R}} \\ \text{Moment dynamique: } \vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}_{M/\mathcal{R}} dm \end{cases}$$

$$\boxed{[\delta(S/\mathcal{R})] = \sum_i [\delta(S_i/\mathcal{R})]}$$

III.8 Relation entre torseur cinétique et torseur dynamique :

$$\left.\frac{d\vec{P}(S/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{a}(S/\mathcal{R})$$

$$\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{V}_{A/\mathcal{R}} \wedge m\vec{V}_{G/\mathcal{R}}$$

Cas particuliers :

Si A est fixe dans $\mathcal{R}$ ou si A est constamment confondu avec G, nous avons :

$$\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \; ; \; \vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

III.9 Application:

a- Cas où le solide possède un point fixe O dans $\mathcal{R}$:

$$\forall P \in S: \quad \vec{V}_{P/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OP} \qquad \left(\vec{V}_{O/\mathcal{R}} = \vec{0}\right)$$

- $\vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R}) = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge \vec{V}_{P/\mathcal{R}} dm = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OP}\right) dm = \mathcal{J}_O^S\left(\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right)$

- $E_c(S/\mathcal{R}) = \dfrac{1}{2}\int_S \vec{V}_{P/\mathcal{R}}^2 \, dm = \dfrac{1}{2}\int_S \vec{V}_{P/\mathcal{R}} \cdot \left(\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OP}\right) dm$

$$\Longrightarrow E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot \int_S \overrightarrow{OP} \wedge \vec{V}_{P/\mathcal{R}} \, dm = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot \vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R})$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot \mathcal{J}_O^S\left(\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right) \Longrightarrow \boxed{E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot \mathcal{J}_O^S\left(\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right)}$$

- $\vec{\delta}_O(S/\mathcal{R}) = \left.\dfrac{d\vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left.\dfrac{d\mathcal{J}_O^S\left(\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right)}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$

b- Cas général :

$$\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_G) = \mathcal{J}_G^S\left(\overrightarrow{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right)$$

$$\vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}_G) = \left.\frac{d\mathcal{J}_G^S\left(\overrightarrow{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right)}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$E_c(S/\mathcal{R}_G) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot \mathcal{J}_G^S\left(\overrightarrow{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right)$$

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}_{G/\mathcal{R}} + \mathcal{J}_G^S\left(\overrightarrow{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right)$$

$$\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{\gamma}_{G/\mathcal{R}} + \left.\frac{d\left(\mathcal{J}_G^S\left(\overrightarrow{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right)\right)}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\vec{V}_{G/\mathcal{R}}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot \mathcal{J}_G^S\left(\overrightarrow{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right)$$

Cas où le solide S tourne autour d'un axe fixe $\Delta(O,\vec{u})$ avec une vitesse angulaire ω :

Le moment cinétique par rapport à un axe $\Delta(O,\vec{u})$ est :

$$\sigma_\Delta = \vec{u} \cdot \vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R})$$

Le moment dynamique par rapport à un axe $\Delta(O,\vec{u})$ est :

$$\delta_\Delta = \vec{u} \cdot \vec{\delta}_O(S/\mathcal{R})$$

$$\sigma_\Delta = I_\Delta\,\omega \qquad\qquad \delta_\Delta = I_\Delta\,\frac{d\omega}{dt}$$

I_Δ: le moment d'inertie de S par rapport à Δ.

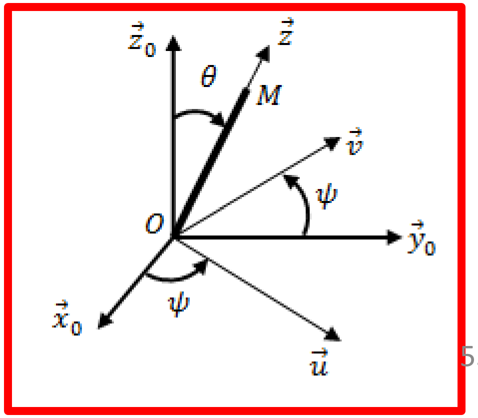
Exercice d'application :

Une barre homogène de longueur $OM = L$, de centre G est en mouvement dans un repère orthonormé fixe $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. On définit deux repères $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_s$ tels que :

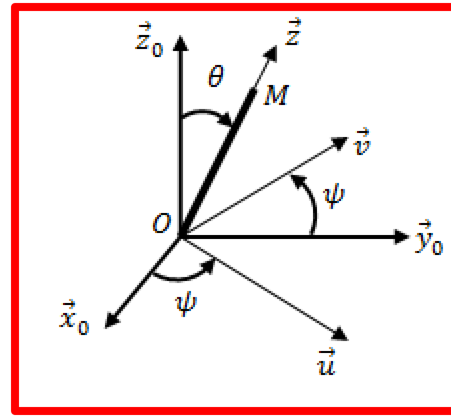
$\mathcal{R}_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ repère mobile tel que : $\psi = (\widehat{\vec{x}_0, \vec{u}}) = (\widehat{\vec{y}_0, \vec{v}})$

$\mathcal{R}_s(O, \vec{x}, \vec{v}, \vec{z})$ repère lié au solide tel que : $\theta = (\widehat{\vec{x}, \vec{u}}) = (\widehat{\vec{z}_0, \vec{z}})$

On prendra $\mathcal{R}_1$ comme repère de projection et comme repère relatif. Déterminer :



1°- La vitesse de rotation instantanée $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_0}$:



$$\mathcal{R}_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0) \xrightarrow{\psi/\vec{z}_0} \mathcal{R}_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$$

$$\xrightarrow{\theta\ /\vec{v}} \mathcal{R}_s(O,\vec{x},\vec{v},\vec{z})$$

$$\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} = \dot{\theta}\vec{v} + \dot{\psi}\vec{z}_0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_0} = \dot{\theta}\vec{v} + \dot{\psi}\vec{z}_0}$$

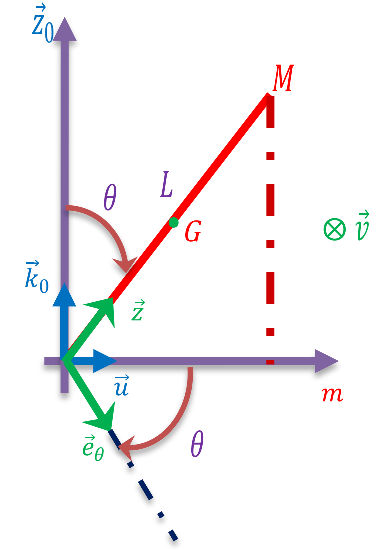
2°- La vitesse $\overrightarrow{V}_{G/\mathcal{R}_0}$ et $\vec{\gamma}_{G/\mathcal{R}_0}$ par composition de mouvement :

$$\overrightarrow{V}_{G/\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{V}_{G/\mathcal{R}_1} + \underbrace{\overrightarrow{V}_{O/\mathcal{R}_0} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OG}}}_{\text{vitesse d'entrainement}}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{V}_{G/\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{V}_{G/\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OG}} \quad \text{Puisque :} \quad \overrightarrow{V}_{O/\mathcal{R}_0} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{V}_{G/\mathcal{R}_0} = \frac{L}{2}\,\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\psi}\vec{z}_0 \wedge \frac{L}{2}\vec{z}\ ;\ \vec{e}_\theta \equiv \vec{x} \text{ et } \vec{v} \equiv \vec{y}$$

$$= \frac{L}{2}\,\dot{\theta}(\cos\theta\,\vec{u} - \sin\theta\,\vec{z}_0) + \frac{L}{2}\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{v}$$



$$\boxed{\vec{V}_{G/\mathcal{R}_0} = \frac{L}{2}\,\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u} + \frac{L}{2}\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{v} - \frac{L}{2}\,\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{z}_0}$$

$$\vec{\gamma}_{G/\mathcal{R}_0} = \vec{\gamma}_{G/\mathcal{R}_1} + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$$

$$\vec{\gamma}_{G/\mathcal{R}_1} = \left.\frac{d\vec{V}_{G/\mathcal{R}_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1}$$

$$\vec{\gamma}_{G/\mathcal{R}_1} = \frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)\vec{u} - \frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{z}_0$$

$$\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}_{O/\mathcal{R}_0} + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}}{dt} \wedge \overrightarrow{OG} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{OG}\right)$$

$$\Longrightarrow \vec{\gamma}_e = \vec{0} + \ddot{\psi}\vec{z}_0 \wedge \frac{L}{2}\vec{z} + \dot{\psi}\vec{z}_0 \wedge \left(\dot{\psi}\vec{z}_0 \wedge \frac{L}{2}\vec{z}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\gamma}_e = -\frac{L}{2}\dot{\psi}^2 \sin\theta\, \vec{u} + \frac{L}{2}\ddot{\psi} \sin\theta\, \vec{v}}$$

$$\vec{\gamma}_c = 2\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{V}_{G/\mathcal{R}_1} = 2\dot{\psi}\vec{z}_0 \wedge \frac{L}{2}\,\dot{\theta}(\cos\theta\,\vec{u} - \sin\theta\,\vec{z}_0)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\gamma}_c = L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{v}}$$

3°- $\vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R}_0)$ au point O exprimé dans $\mathcal{R}_1$:

$$\vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R}_0) = \mathcal{J}_O^S\left(\overrightarrow{\Omega}_{S/\mathcal{R}_0}\right)$$

puisque O est un point du solide fixe dans $\mathcal{R}_0$.

La matrice d'inertie au point O exprimée dans la base $\mathcal{R}_s$ est donnée par :

$$I(O,S) = I(G,S) + I(O,G(m))$$

$$I(G,S) = \begin{pmatrix} \frac{mL^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

$$I(O,G(m)) = \begin{pmatrix} \frac{mL^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

$$\Longrightarrow I(O,S) = \begin{pmatrix} \frac{mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

Par conséquent :

$$\vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R}_0) = \begin{pmatrix} \frac{mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}} \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

$$= -\frac{mL^2}{3}\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{x} + \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\vec{z}$$

Qu'on exprime dans la base $\mathcal{R}_1$ par:

$$\boxed{\vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R}_0) = \begin{cases} -\frac{mL^2}{3}\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta \\ \frac{mL^2}{3}\dot{\theta} \\ \frac{mL^2}{3}\dot{\psi}\sin^2\theta \end{cases}}$$

4°- $\vec{\delta}_O(S/\mathcal{R}_0)$ au point O exprimé dans $\mathcal{R}_1$:

$$\vec{\delta}_O(S/\mathcal{R}_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R}_0)}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} \text{puisque } O \text{ est un point fixe dans } \mathcal{R}_0$$

$$\Longrightarrow \vec{\delta}_O(S/\mathcal{R}_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R}_0)}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R}_0)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\delta}_O(S/\mathcal{R}_0) = \begin{cases} -\dfrac{mL^2}{3}\left[\ddot{\psi}\sin\theta\cos\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos^2\theta\right] \\ \dfrac{mL^2}{3}\left(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\right) \\ \dfrac{mL^2}{3}\left[\ddot{\psi}\sin^2\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\right] \end{cases}}$$

5°- L’énergie cinétique de la barre :

$$E_c(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}_{S/\mathcal{R}_0} \cdot \mathcal{J}_O^S\left(\overrightarrow{\Omega}_{S/\mathcal{R}_0}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}_{S/\mathcal{R}_0} \cdot \vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R}_0)$$

puisque O est un point du solide fixe dans $\mathcal{R}_0$.

$$E_c(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}\vec{v} + \dot{\psi}\vec{z}_0\right)$$

$$\cdot\left(-\frac{mL^2}{3}\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta\,\vec{u} + \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\vec{v} + \frac{mL^2}{3}\dot{\psi}\sin^2\theta\,\vec{z}_0\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{E_c(S/\mathcal{R}_0) = \frac{mL^2}{6}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta\right)}$$