MÉCANIQUE INDUSTRIELLE

Etude Statique

OURS ASSURE PAR

Dr Hassan ELMINOR

Professeur de Mécanique

Première année Cycle d'ingénieur

Filière Génie de l'Energie et Systèmes innovants

Cours III - Résolution des problèmes de statique

- Méthodes de résolution
- Statique analytique (cas 3D-Torseurs)

Méthodes de résolution

L'objectif de la statique est de calculer l'ensemble des actions mécaniques appliquées à un solide en équilibre.

Pour résoudre de tels problèmes, nous disposons de plusieurs méthodes de résolution, réparties en 2 « familles »

Analytique
(utilisée pour les problèmes en 2D et 3D)

- *Méthode des torseurs (3D)*
- *Théorème des moments*
- *Théorème des forces*

Graphique
(Utilisée pour les problèmes plans sans moments)

- *Solide soumis à deux forces*
- *Solide soumis à trois forces*

Méthodes de résolution

Quel que soit le problème à résoudre, la méthode devra commencer par la séquence qui suit afin de bien choisir la méthode de résolution.

Isoler le système étudié

Aidez-vous du graphe des liaisons

Modéliser les actions extérieures et les nommer

N'oubliez pas les actions à distance !

Faire le bilan de ces actions

- *Nom de l'action*
- *Point d'application*
- *Direction et sens*
- *Intensité*

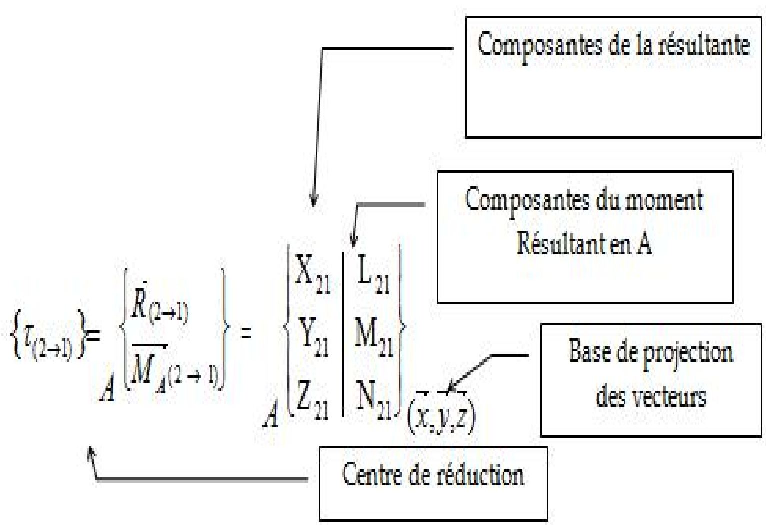
Résoudre le problème

Statique analytique- Les **torseurs**

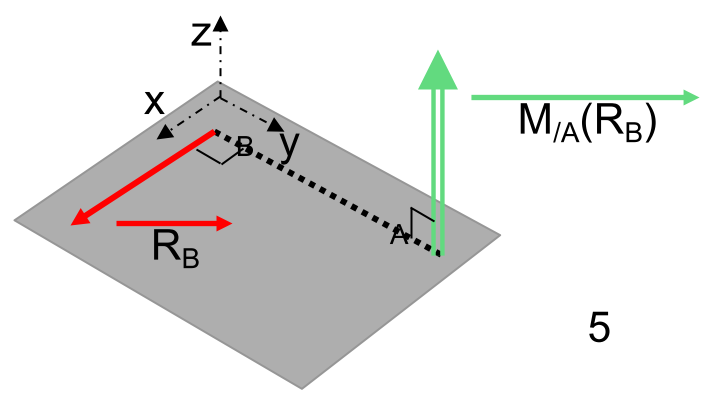
La résolution par les torseurs est de loin la **<u>plus puissante</u>**, la plus **<u>rigoureuse</u>**, mais aussi la plus **<u>longue</u>**. *Elle n'est à utiliser que lorsque les autres méthodes ne sont pas adaptées*.

Qu'est-ce qu'un torseur ?

Un torseur est une description complète d'une action mécanique, exprimé par rapport à un point particulier (point choisi).



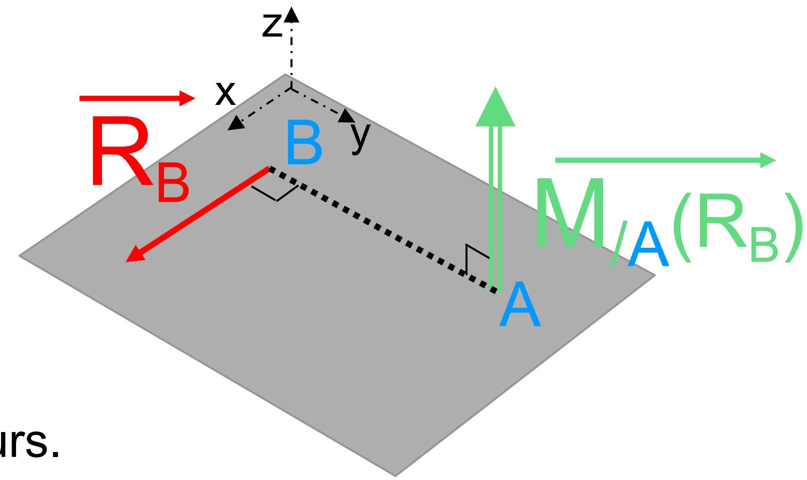
$$\{\tau_{(2\to1)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2\to1)} \\ \overrightarrow{M}_{A(2\to1)} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



Statique analytique- Les torseurs

…Qu'est-ce qu'un torseur ?

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_B} \\ \overrightarrow{M_{/A}(R_B)} \end{array} \right\}_A$$



Ces deux termes sont des vecteurs.

Ils possèdent donc tous deux des coordonnées dans le repère x,y,z :

$\overrightarrow{R_B}$ (X,Y,Z) $\overrightarrow{M_{/A}(\overrightarrow{R_B})}$ (L,M,N)

Le torseur de l'action mécanique $\overrightarrow{R_B}$, exprimé au point A s'écrit donc :

$$\left\{\mathcal{T}(\overrightarrow{R_B})\right\}_A = \left\{ \begin{array}{c|c} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_A$$

Coordonnées de la résultante

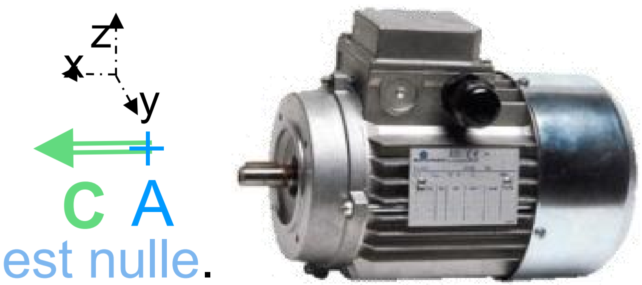
Coordonnées du moment

Statique analytique- Les torseurs

Exemples de torseurs particuliers :

- Torseur « couple »

$$\left\{\mathcal{T}(\vec{C})\right\}_A = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & C \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_A$$



C'est un torseur pour lequel la résultante est nulle.

- Torseur « glisseur »

C'est un torseur pour lequel le moment est nul.

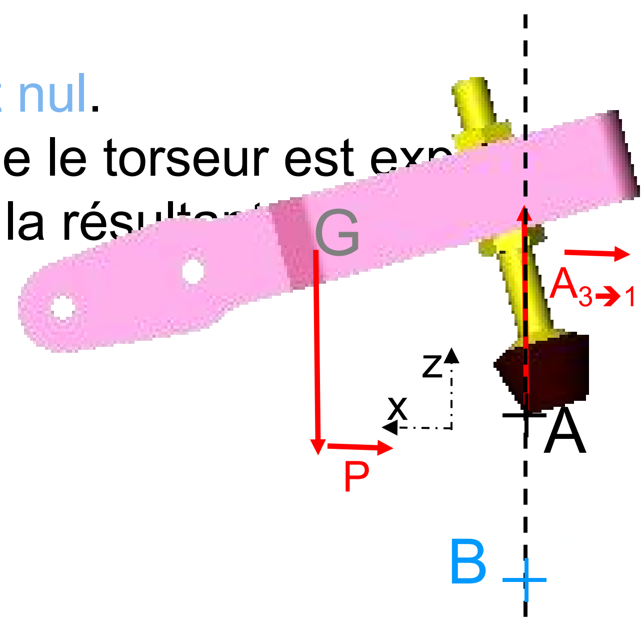
C'est le cas, par exemple à chaque fois que le torseur est exp… en un point situé sur la **droite d'action** de la résult…

$$\left\{\mathcal{T}(A_{3\rightarrow1})\right\}_A = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_A & 0 \end{array} \right\}_A$$

De même pour le poids…

$$\left\{\mathcal{T}(\vec{P})\right\}_G = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ P & 0 \end{array} \right\}_G$$

$$\left\{\mathcal{T}(A_{3\rightarrow1})\right\}_B = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_A & 0 \end{array} \right\}_B$$



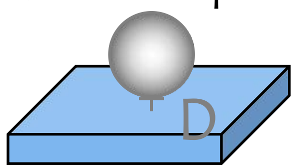
Statique analytique- Les torseurs

Exemples de torseurs particuliers :

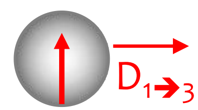
- Les Torseurs « de liaison »

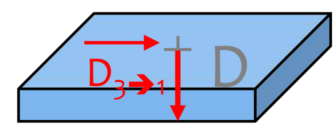
La présence d'un degré de liberté dans une liaison supprime toute possibilité de transmission d'action mécanique dans la direction correspondante.

Prenons l'exemple de la liaison ponctuelle :



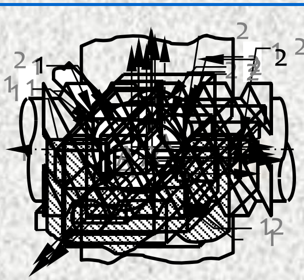
Le seul ddl bloqué est la translation suivant z…





…la seule action transmissible de la pièce 1 à la pièce 3 est précisément la force suivant z

La logique est la même pour toutes les autres liaisons…

Nom de la liaison	Exemple	Degrés de liberté	Torseur des actions mécaniques transmissibles	Nombre d'inconnues de statique
Hélicoïdale		$\begin{Bmatrix} Tx & Rx \\ Ty & Ry \\ Tz & Rz \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_A$	6 $L = -\frac{p}{2\pi}X$

Statique analytique- Les torseurs

…Comment appliquer le PFS avec les torseurs ?

Méthode des torseurs

Simple! Le PFS nous invite à faire la somme des actions mécaniques. Or, il se trouve que chaque torseur représente une action mécanique…

…il suffit donc d'effectuer la somme des torseurs et de déclarer cette somme égale à un torseur nul.

$$\sum \left\{ T_{\overline{S} \rightarrow S} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{matrix} \right\}_A + \left\{ \begin{matrix} X_B & L_B \\ Y_B & M_B \\ Z_B & N_B \end{matrix} \right\}_A + \ldots + \left\{ \begin{matrix} X_i & L_i \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_A$$

On additionne ensuite membre à membre pour obtenir un système de 6 équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A + X_B + \ldots + X_i = 0 \\ Y_A + Y_B + \ldots + Y_i = 0 \\ Z_A + Z_B + \ldots + Z_i = 0 \\ L_A + L_B + \ldots + L_i = 0 \\ M_A + M_B + \ldots + M_i = 0 \\ N_A + N_B + \ldots + N_i = 0 \end{array} \right.$$

Torseur de la liaison A exprimé au point A

Torseur de la liaison B exprimé au point A

Torseur de la liaison 'i' exprimé au point A

Statique analytique- Les torseurs

Simple! Le PFS nous invite à faire la somme des actions mécaniques.
Or, il se trouve que chaque torseur représente une action mécanique…

…il suffit donc d'effectuer la somme des torseurs et de déclarer cette somme égale à un torseur nul.

$$\sum \left\{ T_{\overline{S} \rightarrow S} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{matrix} \right\}_A + \left\{ \begin{matrix} X_B & L_B \\ Y_B & M_B \\ Z_B & N_B \end{matrix} \right\}_A + \ldots + \left\{ \begin{matrix} X_i & L_i \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_A$$

Cette somme de torseurs n'est possible que si TOUS les torseurs sont exprimés en un MEME POINT !

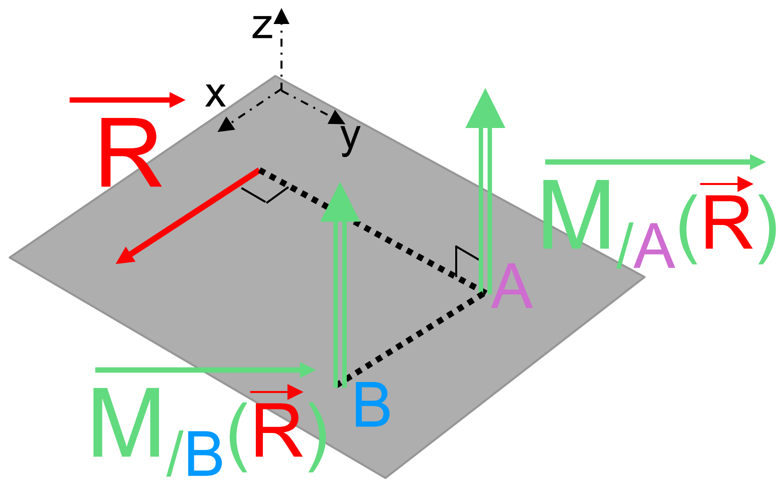
Le problème, c'est qu'au début, chaque action mécanique est exprimée en son point d'origine…

➔ Il faut donc trouver une méthode pour « transporter » les torseurs où bon nous semble

Statique analytique- Les torseurs

…Comment « Transporter » les torseurs ?

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}_{/B}(\vec{R}) \end{matrix} \right\}_B$$



$$\left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}_{/A}(\vec{R}) \end{matrix} \right\}_A$$

torseur de $\vec{R}$ exprimé au point B

$$\left\{ \begin{matrix} X & L_{/B} \\ Y & M_{/B} \\ Z & N_{/B} \end{matrix} \right\}_B$$

torseur de $\vec{R}$ exprimé au point A

$$\left\{ \begin{matrix} X & L_{/A} \\ Y & M_{/A} \\ Z & N_{/A} \end{matrix} \right\}_A$$

Quand on transporte un torseur, la résultante ne varie pas, seul le moment varie

$$\vec{M}_{/B}(\vec{R}) = \vec{M}_{/A}(\vec{R}) + \vec{BA} \wedge \vec{R}$$

…il faut donc calculer le moment par rapport au point « d'arrivée »

…avec la méthode « BABAR »

$$\begin{vmatrix} L_{/B} \\ M_{/B} \\ N_{/B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{/A} \\ M_{/A} \\ N_{/A} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{/A} + y_A - y_B \,.\, Z - z_A - z_B \,.\, Y \\ M_{/A} + z_A - z_B \,.\, X - x_A - x_B \,.\, Z \\ N_{/A} + x_A - x_B \,.\, Y - y_A - y_B \,.\, X \end{vmatrix}$$

Statique analytique- Les torseurs

En résumé…

La méthode de résolution reste identique aux précédentes.
Nous allons seulement devoir ajouter « *quelques* » étapes de calcul pour exprimer les torseurs en un point particulier.

- Choisir le solide à isoler *(voir graphe des liaisons)*
- Faire le bilan des actions *(pour choisir la bonne méthode)*
- Exprimer tous les torseurs en leur point d'application :

  Torseur de liaison, torseur couple, torseur glisseur…

- Transporter tous les torseurs en un même point :

  Méthode BABAR

- Appliquer le PFS :

  Écrire la somme des torseurs = 0

$$\sum \{T_{\bar{S}\to S}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

  Additionner membre à membre

- Application numérique   Résoudre le système d'équations

Cette méthode est à retenir

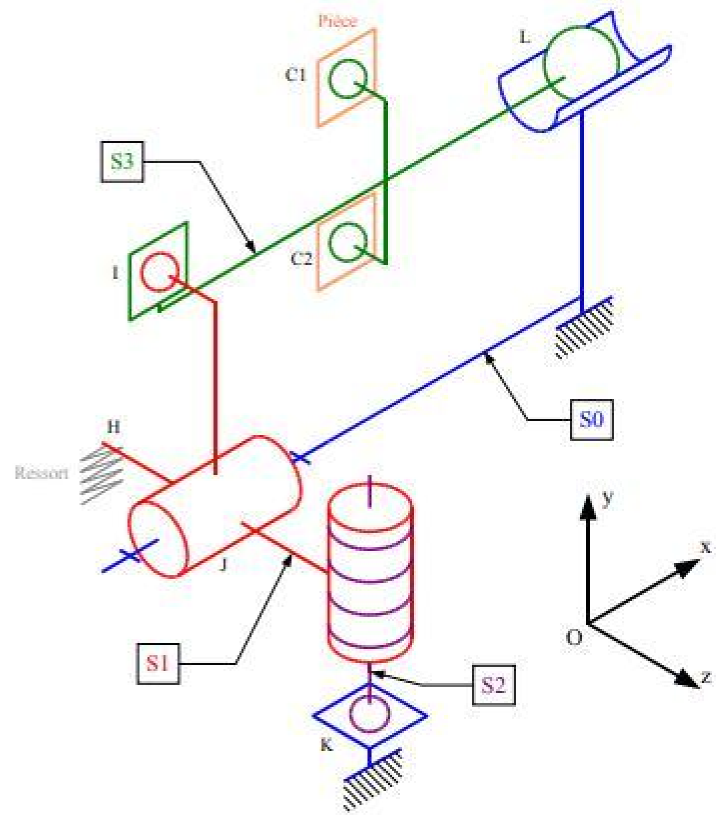
Application

Etude d’un montage d'usinage

Le montage d'usinage étudié permet le perçage d'une pièce. Le schéma ci-dessous a été obtenu après une étude des liaisons (non détaillée ici)

Hypothèses:

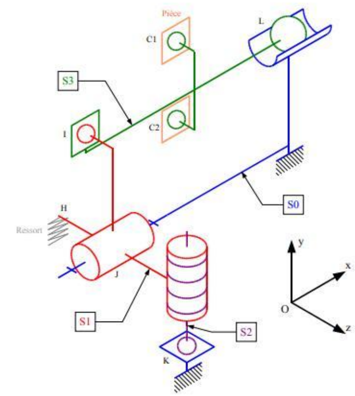
- La liaison en L est considérée comme une liaison linéaire annulaire (car L / D < 1,5)
- Les liaisons en K; I; C1; C2 sont considérées commes des liaisons ponctuelles (faible surface de contact)
- Les liaisons sont parfaites et sans frottements



Application

Hypothèses:

- La liaison en L est considérée comme une liaison linéaire annulaire (car L / D < 1,5)
- Les liaisons en K; I; C1; C2 sont considérées commes des liaisons ponctuelles (faible surface de contact)
- Les liaisons sont parfaites et sans frottements



Travail demandé:

1. Déterminer le nom et les actions mécaniques transmissibles par les liaisons en K; J; I; L; C1; C2.

2. Isoler {S1 + S2}
   - Faire le bilan des AME
   - Appliquer le PFS (point de réduction en J) et déterminer complètement les actions en I et J.

3. Isoler {S3}
   - Faire le bilan des AME
   - Appliquer le PFS (point de réduction en L), déterminer complètement les actions en L; C1 et C2