Université Chouaib Doukali
Faculté des Sciences
Département de Physique
- El Jadida -

جامعة شعيب الدكالي
Université Chouaib Doukkali

Exercices et Examens Corrigés

Mécanique du Solide Indéformable

Pr. A. EL AFIF

Filière SMP S3

TORSEURS

Exercice 1

Dans un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct, on considère le champ de vecteurs $\vec{u}(M)$ défini par :

$$\vec{u}(M) = (a + (1 - b)\, x + by - b\, z)\vec{i} + (-2a - bx + (b - 1)y + b\, z)\, \vec{j} + (a + b\, x - b\, y + (1 - b)z)\vec{k}$$

Où x, y et z sont les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$, a et b sont deux constantes réelles.

1. Anti-symétriser ce champ.
2. Déterminer alors les éléments de réduction au point O du torseur associé.
3. Déterminer sa nature et son axe central dans les deux cas : a = 0 et $a \neq 0$

Solution

1. $\vec{u}(O) = a\vec{i} - 2a\,\vec{j} + a\,\vec{k}$

$$\vec{u}(M) - \vec{u}(O) = F\,.\,\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1-b} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{-b} & \boldsymbol{1-b} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{-b} & \boldsymbol{1-b} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$\vec{u}$ est antisymétrique $\Leftrightarrow$ $F = -F^t$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b = 1}$

Donc

$$F = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

$\vec{u}(M) = (a + y - z)\vec{i} + (-2a - x + z)\,\vec{j} + (a + x - y)\vec{k}$

2. Soit [T] le torseur associé au champ antisymétrique $\vec{u}$: $[\boldsymbol{T}]_{\mathbf{O}} = {}_{\mathbf{O}}\begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{R}} \\ \vec{u}(O) \end{Bmatrix}$

Soit $\vec{\mathbf{R}} = r_1\,\vec{i} + r_2\,\vec{j} + r_3\,\vec{k}$

$\vec{u}(M) - \vec{u}(O) = \vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{OM}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y - z = r_2\, z - r_3\, y \\ -x + z = -r_1\, z + r_3\, x \\ x - y = -r_2\, x + r_1\, y \end{cases}$ et ceci $\forall\, x, y\; et\; z$

$r_1 = -1$ $r_2 = -1$ *et* $r_3 = -1$ donc $\vec{\mathbf{R}} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ est unique !

$$[\boldsymbol{T}]_{\mathbf{O}} = {}_{\mathbf{O}}\begin{Bmatrix} -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \\ a\,\vec{i} - 2a\,\vec{j} + a\,\vec{k} \end{Bmatrix}$$

3. <u>Invariant scalaire</u> : $I_{[T]} = \vec{R}\,.\,\vec{u}(O) = 0$

$I_{[T]} = 0$ et $\vec{R} \neq \vec{0}$ donc le torseur $[\boldsymbol{T}]$ est un glisseur et par conséquent le moment central est nul.

<u>Axe central</u> : $\vec{\boldsymbol{R}} \neq \vec{0}$: l'axe central (Δ) existe et $\vec{\boldsymbol{R}}$ est son vecteur directeur .

<u>Cas 1</u> : a = 0 $\Rightarrow$ $\vec{u}(O) = \vec{0}$

L'axe central est la droite $\Delta(O, \vec{\mathbf{R}})$ qui passe par le point O et de vecteur directeur $\vec{\mathbf{R}}$,

<u>Equation cartésienne</u> : Soit $(x, y, z) \in \Delta$, alors $\overrightarrow{OM} = k\,\vec{R}$ où k est un scalaire.

L'équation cartésienne de (Δ) est : $x = y = z$

Cas 2 : $a \neq 0 \implies \vec{u}(O) \neq \vec{0}$

alors l'axe central est la droite $\Delta(A, \vec{R})$ qui passe par le point A et de vecteur directeur $\vec{\mathbf{R}}$, tel que :

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\vec{\mathbf{R}} \wedge \vec{u}(O)}{\vec{\mathbf{R}}^2} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -\mathbf{1} \\ -1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ -\mathbf{2a} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{a} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

Equation cartésienne : Soit $M(x, y, z) \in \Delta$, alors $\overrightarrow{AM} = k\vec{R}$ où k est un scalaire

$x + \mathbf{a} = y = z - \mathbf{a}$ est l'équation cartésienne de l'axe Δ

Exercice 2

Dans un repère $\mathcal{R}$ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé et direct, on considère deux torseurs dont les éléments de réduction en un point M quelconque sont respectivement $[\vec{R}_1, \vec{V}_{1M}]$ et $[\vec{R}_2, \vec{V}_{2M}]$. On définit le champ de vecteur $\vec{V}_M$ par :

$$\vec{V}_M = \overrightarrow{R_1} \wedge \vec{V}_{2M} - \overrightarrow{R_2} \wedge \vec{V}_{1M}$$

1. Montrer que le champ $\vec{V}_M$ est équiprojectif
2. Déterminer alors la résultante associée à ce champ.

Solution

1. *Equiprojectivité*

Soient M et N deux points quelconques de l'espace. Montrons que $(\vec{V}_M - \vec{V}_N).\overrightarrow{NM} = 0$

$$\begin{aligned}
\vec{V}_M - \vec{V}_N &= \left(\overrightarrow{R_1} \wedge \vec{V}_{2M} - \overrightarrow{R_2} \wedge \vec{V}_{1M}\right) - \left(\overrightarrow{R_1} \wedge \vec{V}_{2N} - \overrightarrow{R_2} \wedge \vec{V}_{1N}\right) \\
&= \overrightarrow{R_1} \wedge \left(\vec{V}_{2M} - \vec{V}_{2N}\right) - \overrightarrow{R_2} \wedge \left(\vec{V}_{1M} - \vec{V}_{1N}\right) \\
&= \overrightarrow{R_1} \wedge \left(\overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{NM}\right) - \overrightarrow{R_2} \wedge \left(\overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{NM}\right) \\
&= \left(\left(\overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{NM}\right)\overrightarrow{R_2} - \left(\overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{R_2}\right)\overrightarrow{NM}\right) - \left(\left(\overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{NM}\right)\overrightarrow{R_1} - \left(\overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{R_1}\right)\overrightarrow{NM}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{NM}\right)\overrightarrow{R_2} - \left(\overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{NM}\right)\overrightarrow{R_1} \\
&= \left(\overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{R_2}\right) \wedge \overrightarrow{NM}
\end{aligned}$$

$$\left(\vec{V}_M - \vec{V}_N\right).\overrightarrow{NM} = \left(\left(\overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{R_2}\right) \wedge \overrightarrow{NM}\right).\overrightarrow{NM} = 0$$

Donc le champ est équiprojectif

2. *Théorème de Delassus* : Equiprojectivité ⟺ Antisymétrie

Le champ $\vec{V}$ est équiprojectif donc il est antisymétrique : $\exists!\ \vec{R}$ tel que $\vec{V}_M - \vec{V}_N = \vec{R} \wedge \overrightarrow{NM}$

$$\vec{V}_M - \vec{V}_N = \left(\overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{R_2}\right) \wedge \overrightarrow{NM}$$

Donc la résultante du torseur est : $\vec{R} = \overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{R_2}$

Exercice 3

Dans un repère $\mathcal{R}$ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct, on considère les torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ dont les éléments de réduction au point O et au point O' (0, 1, 1) sont respectivement $[\vec{R}_1, \vec{M}_{1O}]$ et $[\vec{R}_2, \vec{M}_{2O'}]$ définis par :

$$[T_1(O)] = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & -a\sin\alpha \\ \sin\alpha & a\cos\alpha \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \qquad [T_2(O')] = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & -(a+1)\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -(a+1)\cos\alpha \\ 0 & \cos\alpha \end{Bmatrix}$$

Où a et α sont des constantes réelles.

1. Préciser la nature des deux torseurs.
2. Calculer $\vec{M}_{1O'}$.
3. Déterminer l'équation de l'axe central de $[T_1]$ et en déduire le moment $\vec{M}_{1P}$ en un point P de cet axe.
4. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles le torseur $[T] = [T_1] + [T_2]$ est un glisseur.
5. Trouver l'axe central de [T].
6. Calculer le co-moment des deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$.

Solution

1. *Invariant scalaire* : $I_{[T_1]} = \vec{R}_1 . \vec{M}_{1O} = -a \sin\alpha\cos\alpha + a\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$\vec{R}_1 \neq \vec{0}$ car $\nexists\, \alpha$ réel tel que : $\sin\alpha = 0$ et $\cos\alpha = 0$

$I_{[T_1]} = 0$ et $\vec{R}_1 \neq \vec{0}$ donc $[T_1]$ est un glisseur

Invariant scalaire : $I_{[T_2]} = \vec{R}_2 . \vec{M}_{2O'} = -(a+1)\sin\alpha\cos\alpha + (a+1)\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$I_{[T_2]} = 0$ et $\vec{R}_2 \neq \vec{0}$ donc $[T_2]$ est un glisseur

2. $$\vec{M}_{1O'} = \vec{M}_{1O} + \vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} -a\sin\alpha \\ a\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin\alpha \\ a\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(a-1)\sin\alpha \\ (a-1)\cos\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

3. *Axe central* :

$\vec{R}_1 \neq \vec{0}$ l'axe central existe. C'est la droite $\Delta_1(I_1, \vec{R}_1)$ qui passe par le point I_1 et de vecteur directeur $\vec{R}_1$ tel que :

$$\overrightarrow{OI_1} = \frac{\vec{R}_1 \wedge \vec{M}_{1O}}{\vec{R}_1^{\,2}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -a\sin\alpha \\ a\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = a\vec{k}$$

Equation cartésienne : Soit $M(x,y,z) \in \Delta_1$, alors $\overrightarrow{I_1 M} = \beta\vec{R}_1$ où β est un scalaire réel :

$$\begin{cases} x = \beta\cos\alpha \\ y = \beta\sin\alpha \\ z - a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \operatorname{tg}\alpha \\ z = a \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \alpha \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

C'est l'équation cartésienne de l'axe Δ_1 qui passe par le point $I_1(0,0,a)$ et qui appartient au plan $\Pi_1(I_1 xy)$.

Le point $P \in \Delta_1$ et comme $[T_1]$ est un glisseur alors $\vec{M}_{1P} = \vec{0}$ car le moment central d'un glisseur est nul.

Vérification :

$$\vec{M}_{1P} = \vec{M}_{1O} + \vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -a\sin\alpha \\ a\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \beta\cos\alpha \\ \beta\sin\alpha \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin\alpha \\ a\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\sin\alpha \\ -a\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

4. $[T] = [T_1] + [T_2]$

$$[T(O)] = [T_1(O)] + [T_2(O)] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_O = \vec{M}_{1O} + \vec{M}_{2O} \end{cases}$$

$$\vec{M}_{2O} = \vec{M}_{2O'} + \vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{O'O} = \begin{pmatrix} -(a+1)\sin\alpha \\ -(a+1)\cos\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin\alpha \\ -\ a\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_1 = 2\cos\alpha\,\vec{i}$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{1O} + \vec{M}_{2O} = -2a\sin\alpha\,\vec{i}$$

$$I_{[T]} = \vec{R}\,.\,\vec{M}_O = -4a\sin\alpha\cos\alpha$$

[T] est un glisseur $\Leftrightarrow \begin{cases} I = 0 \\ \vec{R} \neq \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha\cos\alpha = 0 \\ \cos\alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha\ = 0 \\ \cos\alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \equiv 0[\pi] \\ \alpha \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}$

[T] est un glisseur $\Leftrightarrow \quad \alpha \equiv 0[\pi]$

5. ***<u>Axe central</u>*** : l'axe central existe si $\vec{R} \neq \vec{0}$

$\vec{R} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \alpha \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

Soit $\Delta(A, \vec{R})$ l'axe central de [T] qui passe par le point A et de vecteur directeur $\vec{R}$. Alors :

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{\vec{R}^2} = \vec{0}$$

Donc $A \equiv O$: les point A et O sont confondus

L'axe central $\Delta(O, \vec{R})$ est la droite qui passe par le point O et de vecteur directeur $\vec{i}$: c'est l'axe (Ox)

6. ***<u>Le co-moment</u>*** :

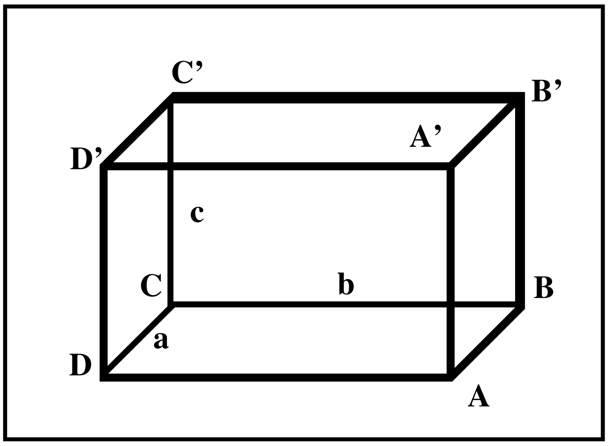
$$[T_1(O)\ ].[T_2(O)\ ] = \vec{R}_1.\vec{M}_{2O} + \vec{R}_2.\vec{M}_{1O} = -4a\sin\alpha\cos\alpha = -2\ a\sin 2\alpha$$

<u>Exercice 4</u>

Soit un parallélépipède ABCD A'B'C'D' de cotés a, b et c. On choisit $\mathcal{R}$ (C; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) comme repère orthonormé direct.

1. Déterminer les éléments de réduction au point C du torseur [T] constitué des vecteurs : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{D'D}$. En déduire l'axe central

2. Calculer le moment $\vec{M}_O$ du torseur au centre O du parallélépipède



<u>Solution</u>

1. Torseur $[T]\ =\ [T_1] + [T_2] + [T_3]$

Au point C : $[T]_C = [T_1]_C + [T_2]_C + [T_3]_C$

Nous avons : $[T_1]_B = {}_{\mathbf{B}}\begin{Bmatrix} \vec{R}_1 = \overrightarrow{AB} \\ \vec{M}_{1B} = \vec{0} \end{Bmatrix}$, $[T_2]_{C'} = {}_{\mathbf{C'}}\begin{Bmatrix} \vec{R}_2 = \overrightarrow{B'C'} \\ \vec{M}_{2C'} = \vec{0} \end{Bmatrix}$ et $[T_3]_D = {}_{\mathbf{D}}\begin{Bmatrix} \vec{R}_3 = \overrightarrow{D'D} \\ \vec{M}_{3D} = \vec{0} \end{Bmatrix}$

La résultante de $[T]$: $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{A'C} = -a\vec{\imath} - b\,\vec{\jmath} - c\,\vec{k}$

Le moment résultant de $[T]$: $\vec{M}_C = \vec{M}_{1C} + \vec{M}_{2C} + \vec{M}_{3C}$

$\vec{M}_{1C} = \vec{M}_{1B} + \vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = ab\,\vec{k}$

$\vec{M}_{2C} = \vec{M}_{2C'} + \vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{B'C} \wedge \overrightarrow{C'C} = bc\,\vec{\imath}$

$\vec{M}_{3C} = \vec{M}_{3D} + \vec{R}_3 \wedge \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'D} \wedge \overrightarrow{DC} = ac\,\vec{\jmath}$

Donc, on arrive à : $\vec{M}_C = bc\,\vec{\imath} + ac\,\vec{\jmath} + ab\,\vec{k}$

Finalement : $[T]_C = {}_{\mathbf{C}}\begin{Bmatrix} \vec{R} = -a\vec{\imath} - b\,\vec{\jmath} - c\,\vec{k} = \overrightarrow{A'C} \\ \vec{M}_C = bc\,\vec{\imath} + ac\,\vec{\jmath} + ab\,\vec{k} \end{Bmatrix}$

Axe central :

$\vec{R} \neq \vec{0}$ donc l'axe central existe. Soit Δ l'axe central de [T].

L'axe central est la droite $\Delta(I, \vec{R})$ qui passe par le point I et de vecteur directeur $\vec{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{CI} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_C}{\vec{R}^2} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\begin{pmatrix} a\,(c^2 - b^2) \\ b\,(a^2 - c^2) \\ c\,(b^2 - a^2) \end{pmatrix}$$

2. Le point O est le centre du parallélépipède : $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA'}$

$\vec{M}_O = \vec{M}_C + \vec{R} \wedge \overrightarrow{CO}$

$\vec{R} \wedge \overrightarrow{CO} = \vec{0}$ donc $\vec{M}_O = \vec{M}_C$

Exercice 5

Considérons les vecteurs $\vec{U} = a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath}$ et $\vec{V} = \vec{\jmath}$, liés respectivement aux points $A(1, 0,0)$ et B(1, 1, 0) et les torseurs $[G_1]$ et $[G_2]$ associés aux moments de $\vec{U}$ et $\vec{V}$, respectivement.

1. Montrer que $[G_1]$ et $[G_2]$ sont des glisseurs.

2. On pose $[G] = [G_1] + [G_2]$.

a. Calculer la résultante $\vec{R}$ de [G] et son moment en A. En déduire la nature de [G]

b. Déterminer l'équation cartésienne de l'axe central de [G]

Solution

Le moment en un point O d'un vecteur $\vec{V}$ lié à un point A est : $\vec{M}_O(\vec{V}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}$. Il est trivial de voir que : $\vec{M}_A(\vec{V}) = \vec{0}$. On peut par conséquent écrire la relation d'antisymétrie : $\vec{M}_O(\vec{V}) = \vec{M}_A(\vec{V}) + \vec{V} \wedge \overrightarrow{AO}$. Ceci définit un torseur (un glisseur) de résultante $\vec{V}$

1. $[G_1]_A = {}_{\mathbf{A}}\begin{Bmatrix} \vec{R}_1 = \vec{U} = a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath} \\ \vec{M}_{1A} = \vec{0} \end{Bmatrix}$

Invariant scalaire : $I_{[G_1]} = \vec{R}_1 . \vec{M}_{1A} = 0$

- Si $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ alors $\vec{R}_1 \neq \vec{0}$

$I_{[G_1]} = 0$ et $\vec{R}_1 \neq \vec{0}$ donc $[G_1]$ est un glisseur

- Si $a = 0$ et $b = 0$ alors $\vec{R}_1 = \vec{0}$

$I_{[G_1]} = 0$ et $\vec{R}_1 = \vec{0}$ alors $[G_1]$ est un couple

- $[G_2]_B = {}_{\mathbf{B}}\begin{Bmatrix} \vec{R}_2 = \vec{V} = \vec{j} \\ \vec{M}_{2B} = \vec{0} \end{Bmatrix}$

Invariant scalaire : $I_{[G_2]} = \vec{R}_2 . \vec{M}_{2B} = 0$

$I_{[G_1]} = 0$ et $\vec{R}_2 \neq \vec{0}$ donc $[G_1]$ est un glisseur

2. *Torseur* : $[G] = [G_1] + [G_2]$.

a. *Résultante* : $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_1 = \vec{U} + \vec{V} = a\,\vec{i} + (b+1)\,\vec{j}$

Moment résultant : $\vec{M}_A = \vec{M}_{1A} + \vec{M}_{2A}$

$\vec{M}_{2A} = \vec{M}_{2B} + \vec{R}_2 \wedge \vec{BA} = \vec{j} \wedge -\vec{j} = \vec{0}$

$\vec{M}_A = \vec{M}_{1A} + \vec{M}_{2A} = \vec{0}$

$$[G]_A = {}_{\mathbf{A}}\begin{Bmatrix} a\,\vec{i} + (b+1)\,\vec{j} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Invariant scalaire : $I_{[G]} = \vec{R} . \vec{M}_A = 0$

- Si $a \neq 0$ ou $b \neq -1$ alors $\vec{R} \neq \vec{0}$

$I_{[G]} = 0$ et $\vec{R} \neq \vec{0}$ alors $[G]$ est un glisseur

- Si $a = 0$ et $b = -1$ alors $\vec{R} = \vec{0}$

$I_{[G]} = 0$ et $\vec{R} = \vec{0}$ alors $[G]$ est un couple

b. *Axe central* :

- Si $a \neq 0$ ou $b \neq -1$ alors $\vec{R} \neq \vec{0}$ l'axe central existe.

$\vec{M}_A = \vec{0}$ et $\vec{R} \neq \vec{0}$

L'axe central est la droite $\Delta(A, \vec{R})$ passant par le point A et vecteur directeur $\vec{R}$

Equations de Δ: soit $M(x, y, z) \in \Delta$, alors $\overrightarrow{AM} = \beta\,\vec{R}$ où β est un scalaire réel :

Equation paramétrique :

$$\begin{cases} x - 1 = \beta\, a \\ y = \beta\,(b+1) \\ z = 0 \end{cases}$$

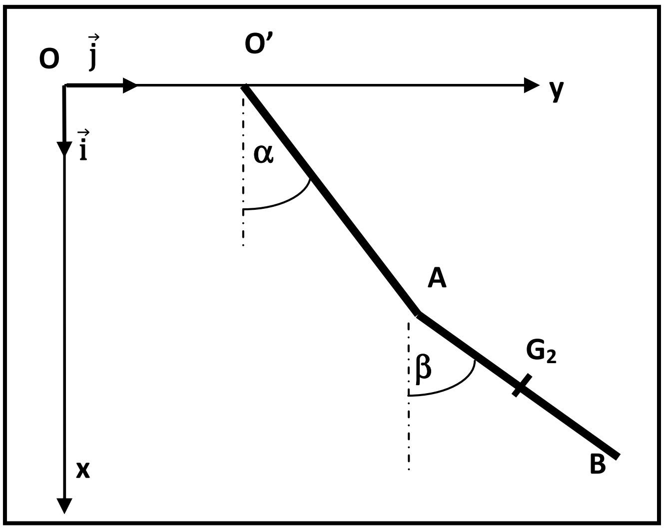
Equation cartésienne :

$$y = \frac{(b+1)}{a}(x-1) \qquad et \qquad z = 0 \qquad\qquad a \neq 0$$

CINEMATIQUE

Exercice 1

Un pendule double est constitué de deux tiges homogènes $(O'A)$ et (AB). La tige $(O'A)$ est en liaison pivot d'axe $(O', \vec{k})$ et est astreinte à se déplacer sans frottement sur l'axe (Oy). La tige (AB) de centre d'inertie G_2 est en liaison pivot d'axe $(A,\vec{k})$ avec la tige $(O'A)$. On donne trois repères :



- $\mathcal{R}\ (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ lié au bâti fixe.
- $\mathcal{R}_1(O';\ \vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k})$ lié à la tige $(O'A)$
- $\mathcal{R}_2(A;\ \vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k})$ lié à la tige (AB)

tels que :

$\overrightarrow{OO'} = y\,\vec{\jmath}$ $\qquad \overrightarrow{O'A} = 2a\,\vec{\imath}_1$ (a > 0); $\overrightarrow{AB} = 2b\,\vec{\imath}_2$ (b> 0);

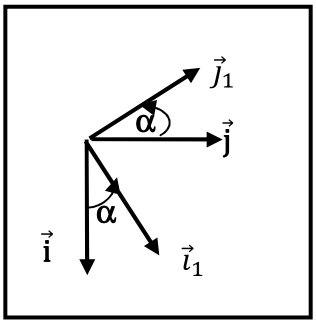
$\alpha = (\vec{\imath}, \vec{\imath}_1)$; $\qquad \beta = (\vec{\imath}, \vec{\imath}_2)$. $\qquad$ On posera : $K = \dot{\alpha}/\dot{\beta}$

Déterminer :

1. les torseurs cinématiques : $[\boldsymbol{\mathcal{V}}\ (O'A/\mathcal{R})]_{O'}$, $[\boldsymbol{\mathcal{V}}\ (AB/\mathcal{R})]_A$ et $[\boldsymbol{\mathcal{V}}\ (AB/O'A)]_A$. Préciser la nature et le moment central de chaque torseur.
2. l'axe central de chaque torseur.
3. les positions des centres instantanés de rotation dans le cas où $y = const$

Solution

1. ***Torseurs cinématiques*** :



- $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(O'A/\mathcal{R})]_{O'} = {}_{O'}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}\ (O'A/\mathcal{R}) \\ \vec{v}(O' \in O'A/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

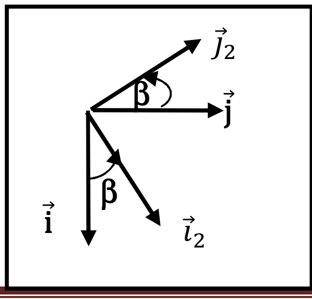
  $\vec{\Omega}\ (O'A/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}\ (\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\alpha}\vec{k}$

  $\vec{v}(O' \in O'A/\mathcal{R}) = \vec{v}(O'/\mathcal{R}) - \vec{v}(O'/\mathcal{R}_1) = \left(\dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} - \left(\dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \dot{y}\,\vec{\jmath}$

$$[\boldsymbol{\mathcal{V}}(O'A/\mathcal{R})]_{O'} = {}_{O'}\begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\vec{k} \\ \dot{y}\,\vec{\jmath} \end{Bmatrix}$$

Invariant scalaire : $I_{[\mathcal{V}]} = \vec{v}(O' \in O'A/\mathcal{R}).\ \vec{\Omega}\ (O'A/\mathcal{R}) = 0$ et $\vec{\Omega}\ (O'A/\mathcal{R}) \neq \vec{0}$

Le torseur cinématique est un glisseur, par conséquent le moment central est nul.



- $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(AB/\mathcal{R})]_A = {}_{A}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}) \\ \vec{v}(A \in AB/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

  $\vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}\ (\mathcal{R}_2/\mathcal{R}) = \dot{\beta}\vec{k}$

$$\vec{v}(\mathrm{A} \in AB/\mathcal{R}) = \vec{v}(\mathrm{A}/\mathcal{R}) - \vec{v}(\mathrm{A}/\mathcal{R}_2) = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} - \left(\frac{d\overrightarrow{AA}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} = \left(\frac{d(\mathrm{y}\,\vec{\mathrm{j}} + 2\mathrm{a}\,\vec{\mathrm{i}}_1)}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{y}\,\vec{j} + 2\mathrm{a}\dot{\alpha}\,\vec{\mathrm{j}}_1$$

$$[\boldsymbol{\mathcal{V}}(AB/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{A}} = {}_{\boldsymbol{A}}\begin{Bmatrix} \dot{\beta}\vec{k} \\ \dot{y}\,\vec{j} + 2\mathrm{a}\dot{\alpha}\,\vec{\mathrm{j}}_1 \end{Bmatrix}$$

<u>*Invariant scalaire*</u> : $I_{[\mathcal{V}\,]} = \vec{v}(\mathrm{A} \in AB/\mathcal{R}).\ \vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}) = 0$ et $\vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}) \neq \vec{0}$
Le torseur cinématique est un glisseur, par conséquent le moment central est nul.

- $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(AB/O'A)]_{\boldsymbol{A}} = {}_{\boldsymbol{A}}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}\ (AB/O'A\,) \\ \vec{v}(\mathrm{A} \in AB/\mathrm{O'A}) \end{Bmatrix}$

$$\vec{\Omega}\ (AB/O'A\,) = \vec{\Omega}\ (\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1\,) = \vec{\Omega}\ (\mathcal{R}_2/\mathcal{R}\,) - \vec{\Omega}\ (\mathcal{R}_1/\mathcal{R}\,) = (\dot{\beta} - \dot{\alpha})\vec{k}$$

$$\vec{v}(\mathrm{A} \in AB/\mathrm{O'A}) = \vec{v}(\mathrm{A}/\mathcal{R}_1) - \vec{v}(\mathrm{A}/\mathcal{R}_2) = \left(\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} - \left(\frac{d\overrightarrow{AA}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} = \left(\frac{d(2\mathrm{a}\,\vec{\mathrm{i}}_1)}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \vec{0}$$

$$[\boldsymbol{\mathcal{V}}(AB/O'A)]_{\boldsymbol{A}} = {}_{\boldsymbol{A}}\begin{Bmatrix} (\dot{\beta} - \dot{\alpha})\vec{k} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

<u>*Invariant scalaire*</u> : $I_{[\mathcal{V}\,]} = \vec{v}(\mathrm{A} \in AB/\mathrm{O'A}).\ \vec{\Omega}\ (AB/O'A\,) = 0$
Si $\dot{\beta} \neq \dot{\alpha}$ alors $\vec{\Omega}\ (AB/O'A\,) \neq \vec{0}$
Le torseur cinématique est un glisseur, par conséquent le moment central est nul.

2. <u>*Axes centraux*</u>:

- $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(O'A/R)]_{\boldsymbol{O'}} = {}_{\boldsymbol{O'}}\begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\vec{k} \\ \dot{y}\,\vec{j} \end{Bmatrix}$

$\vec{\Omega}\ (O'A/R\,) \neq \vec{0}$ l'axe central existe. Soit $\Delta_1(I_1, \vec{k})$ l'axe central, alors :

$$\overrightarrow{O'I_1} = \frac{\vec{\Omega}\ (O'A/R\,) \wedge \vec{v}(\mathrm{O'} \in O'A/\mathrm{R})}{\vec{\Omega}\ (O'A/R\,)^2} = \frac{\dot{\alpha}\vec{k} \wedge \dot{y}\,\vec{j}}{\dot{\alpha}^2} = -\frac{\dot{y}}{\dot{\alpha}}\vec{\imath}$$

L'axe central est l'axe $(I_1 z)$

- $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(AB/R)]_{\boldsymbol{A}} = {}_{\boldsymbol{A}}\begin{Bmatrix} \dot{\beta}\vec{k} \\ \dot{y}\,\vec{j} + 2\mathrm{a}\dot{\alpha}\,\vec{\mathrm{j}}_1 \end{Bmatrix}$

$\vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}\,) \neq \vec{0}$ l'axe central existe. Soit $\Delta_2(I_2, \vec{k})$ l'axe central, alors :

$$\overrightarrow{AI_2} = \frac{\vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}\,) \wedge \vec{v}(\mathrm{A} \in AB/\mathcal{R})}{\vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}\,)^2} = \frac{\dot{\beta}\vec{k} \wedge (\dot{y}\,\vec{j} + 2\mathrm{a}\dot{\alpha}\,\vec{\mathrm{j}}_1)}{\dot{\beta}^2} = -\frac{\dot{y}}{\dot{\beta}}\vec{\imath} - 2aK\,\vec{\mathrm{i}}_1$$

$$\overrightarrow{O'I_2} = \overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{AI_2} = -\frac{\dot{y}}{\dot{\beta}}\vec{\imath} - 2a(K-1)\,\vec{\mathrm{i}}_1$$

L'axe central est l'axe $(I_2 z)$

- $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(AB/O'A)]_{\boldsymbol{A}} = {}_{\boldsymbol{A}}\begin{Bmatrix} (\dot{\beta} - \dot{\alpha})\vec{k} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

Si $\dot{\beta} \neq \dot{\alpha}$ alors $\vec{\Omega}\ (AB/O'A\,) \neq \vec{0}$ l'axe central existe.

$\vec{v}(\mathrm{A} \in AB/\mathrm{O'A}) = \vec{0}$ et $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(AB/O'A)]$ est un glisseur alors l'axe central est la droite $\Delta_3(A, \vec{k})$ qui passe par le point central A et de vecteur directeur $\vec{k}$. C'est l'axe $(\boldsymbol{Az})$

3. <u>Centre Instantané de Rotation (CIR)</u>

$y = const$, donc $\dot{y} = 0$

Soit $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{O}; \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}})$ le plan de $(\mathcal{R}\,)$ qui contient O et qui est perpendiculaire à $\vec{\boldsymbol{k}}$. On a un mouvement plan sur plan.

- $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(O'A/R)]_{\boldsymbol{O'}} = {}_{\boldsymbol{O'}}\begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\vec{k} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

$\overrightarrow{O'I_1} = \vec{0}$ alors O' et I_1 sont confondus. Donc $\Delta_1(O', \vec{k})$ est l'axe central.

Soit $\Pi_1(O';\ \vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1)$ le plan de $(\mathcal{R}_1)$, lié au solide $(O'A)$, perpendiculaire à $\vec{k}$ et parallèle à Π.

$O' \epsilon\, \Pi_1 \cap \Delta_1$ et $\vec{v}(\mathrm{O'} \in O'A/\mathrm{R}) = \vec{0}$, Donc $\mathrm{O'} \equiv$ C. I. R.

- $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(AB/R)]_{\boldsymbol{A}} = {}_{\boldsymbol{A}}\begin{Bmatrix} \dot{\beta}\vec{k} \\ 2a\dot{\alpha}\,\vec{\jmath}_1 \end{Bmatrix}$

Soit $\boldsymbol{\Pi_2}(\boldsymbol{A};\ \vec{\boldsymbol{\imath}}_{\boldsymbol{2}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}_{\boldsymbol{2}})$ le plan de $(\mathcal{R}_{\boldsymbol{2}})$, lié au solide (AB), perpendiculaire à $\vec{\boldsymbol{k}}$ et parallèle à $\boldsymbol{\Pi}$

$\Delta_2(I_2, \vec{k})$ est l'axe central et : $\overrightarrow{O'I_2} = -2a(K-1)\,\vec{\imath}_1$ soit $\overrightarrow{AI_2} = -2aK\,\vec{\imath}_1$

$I_2\, \epsilon\, \Pi_2$ car : $\overrightarrow{AI_2}.\vec{k} = 0$ et $A\, \epsilon\, \Pi_2$ Donc : $I_2\, \epsilon\, \Pi_2 \cap \Delta_2$

$\vec{v}(I_2 \in AB/\mathcal{R}) = \vec{0}$ car I_2 est un point central et $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(AB/\mathcal{R})]$est un glisseur.

Donc $I_2 \equiv$ C. I. R.

- $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(AB/O'A)]_{\boldsymbol{A}} = {}_{\boldsymbol{A}}\begin{Bmatrix} (\dot{\beta} - \dot{\alpha})\vec{k} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

$\Pi_2(A;\ \vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2)$ est le plan, défini auparavant, qui est parallèle à $\Pi_1(O';\ \vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1)$; et $\Delta_3(A, \vec{k})$ est l'axe central,

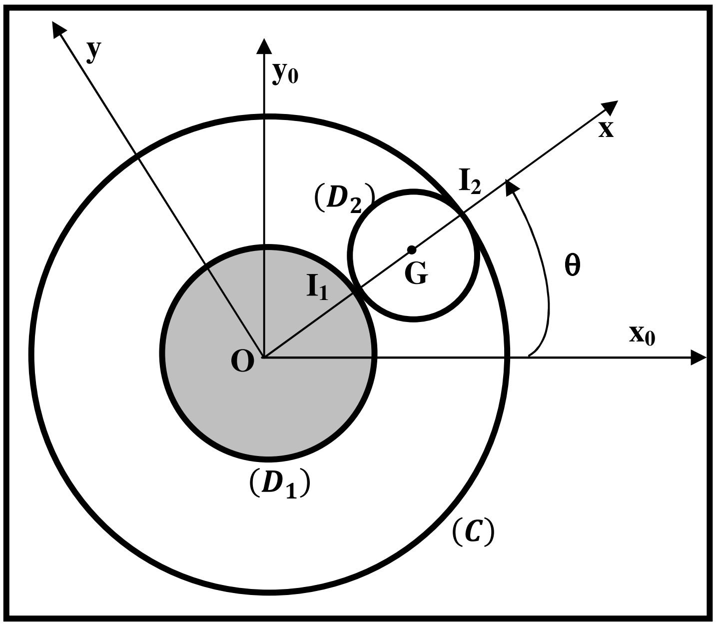
Donc : $A\, \epsilon\, \Pi_2 \cap \Delta_3$

$\vec{v}(\mathrm{A} \in AB/\mathrm{O'A}) = \vec{0}$ et $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(AB/O'A)]$ est un glisseur, donc : $\boldsymbol{A} \equiv$ **C. I. R.**

<u>Exercice 2</u>

On considère un disque (D_1) de rayon $\boldsymbol{R_1}$ et de centre O et un cerceau (C) de même centre O et de rayon $\boldsymbol{R_2 = 3R_1/2}$. Entre ces deux solides, on dispose un deuxième disque (D_2) de rayon **r**. On désignera par I_1 le point de contact entre (D_1) et (D_2) et par I_2 le point de contact entre (C) et (D_2). On admet que le roulement de (D_2) sur (D_1) et sur (C) est sans glissement. On désignera par $\mathcal{R}_0(\mathrm{O}, \vec{\mathbf{i}}_0, \vec{\mathbf{j}}_0, \vec{\mathbf{k}}_0)$ un repère fixe dont $\vec{\mathbf{k}}_0$ est perpendiculaire au plan vertical $(\vec{\mathbf{i}}_0, \vec{\mathbf{j}}_0)$ contenant les disques et le cerceau, et par $\mathcal{R}(\mathrm{O}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}_0)$ un repère en rotation autour de (Oz_0) et dont l'axe Ox passe constamment par le centre de masse G du disque

(D_2). L'angle θ caractérise la rotation du repère $(\mathcal{R})$ par rapport à $(\mathcal{R}_0)$. On donne $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(D_1/\mathcal{R}_0) = \omega\,\vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{0}}$ et $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(C/\mathcal{R}_0) = 2\omega\,\vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{0}}$ ($\boldsymbol{\omega}$ est une constante positive)



1. Calculer: $\vec{\boldsymbol{v}}(I_1 \in D_1/\mathcal{R}_0)$.
   En déduire $\vec{\boldsymbol{v}}(I_1 \in D_2/\mathcal{R}_0)$.
2. Calculer $\vec{\boldsymbol{v}}(I_2 \in C/\mathcal{R}_0)$.
   En déduire $\vec{\boldsymbol{v}}(I_2 \in D_2/\mathcal{R}_0)$
3. Déterminer alors $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(D_2/\mathcal{R}_0)$
4. Déterminer la nature de ce torseur. Trouver son moment central.
5. Déterminer, géométriquement et par calcul, la position du centre instantané de rotation I pour le disque (D_2).
6. Déterminer, la base et la roulante du mouvement plan sur plan de (D_2) par rapport à $(\mathcal{R}_0)$.
7. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}(G/\mathcal{R}_0)$.
   En déduire $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)$.

Solution

1. *Formule Fondamentale de la Cinématique du Solide appliquée à* (D_1) *:* ***F.F.C.S.***

$\vec{\boldsymbol{v}}(I_1 \in D_1/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) = \vec{\boldsymbol{v}}(O \in D_1/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) + \vec{\Omega}\ (D_1/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) \wedge \overrightarrow{OI_1} = \vec{0} + \boldsymbol{\omega}\,\vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{0}} \wedge R_1\vec{\imath} = R_1\boldsymbol{\omega}\vec{\jmath}$

Vitesse de glissement :

$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{g}}(I_1;\ D_1/D_2) = \vec{\boldsymbol{v}}(I_1 \in D_1/D_2) = \vec{\boldsymbol{v}}(I_1 \in D_1/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) - \vec{\boldsymbol{v}}(I_1 \in D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0})$

Roulement sans glissement : $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{g}} = \vec{\mathbf{0}}$;

$\vec{\boldsymbol{v}}(I_1 \in D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) = \vec{\boldsymbol{v}}(I_1 \in D_1/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) = R_1\boldsymbol{\omega}\vec{\jmath}$

2. *Formule Fondamentale de la Cinématique du Solide appliquée à* (C)*:* ***F.F.C.S.***

$\vec{\boldsymbol{v}}(I_2 \in C/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) = \vec{\boldsymbol{v}}(O \in C/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) + \vec{\Omega}\ (C/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) \wedge \overrightarrow{OI_2} = \vec{0} + 2\boldsymbol{\omega}\,\vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{0}} \wedge R_2\vec{\imath} = 2R_2\boldsymbol{\omega}\,\vec{\jmath} = 3R_1\boldsymbol{\omega}\,\vec{\jmath}$

Vitesse de glissement :

$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{g}}(I_2;\ C/D_2) = \vec{\boldsymbol{v}}(I_2 \in C/D_2) = \vec{\boldsymbol{v}}(I_2 \in C/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) - \vec{\boldsymbol{v}}(I_2 \in D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0})$

Roulement sans glissement : $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{g}} = \vec{\mathbf{0}}$;

$\vec{\boldsymbol{v}}(I_2 \in D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) = \vec{\boldsymbol{v}}(I_2 \in C/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) = 2R_2\boldsymbol{\omega}\,\vec{\jmath} = 3R_1\boldsymbol{\omega}\,\vec{\jmath}$

3. *Formule Fondamentale de la Cinématique du Solide appliquée à* (D_2)

On pose : $\vec{\Omega}\ (D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) = \dot{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{0}}$

$\vec{\boldsymbol{v}}(I_2 \in D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) = \vec{\boldsymbol{v}}(I_1 \in D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) + \vec{\Omega}\ (D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) \wedge \overrightarrow{I_1I_2}$

$3R_1\boldsymbol{\omega}\,\vec{\jmath} = R_1\boldsymbol{\omega}\,\vec{\jmath} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}\vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{0}} \wedge 2r\,\vec{\imath}$

$3R_1\boldsymbol{\omega} = R_1\boldsymbol{\omega} + 2r\dot{\boldsymbol{\alpha}}$

Comme $2r = R_2 - R_1 = \frac{R_1}{2}$ alors $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = 4\boldsymbol{\omega}$

4. *Torseur cinématique* : $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0})]_{I_1} = \underset{I_1}{\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}\ (D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) \\ \vec{\boldsymbol{v}}(I_1 \in D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) \end{Bmatrix}} = \underset{I_1}{\begin{Bmatrix} 4\boldsymbol{\omega}\,\vec{\mathbf{k}}_\mathbf{0} \\ R_1\boldsymbol{\omega}\,\vec{\jmath} \end{Bmatrix}}$

Invariant scalaire : $\boldsymbol{I}_{[\boldsymbol{\mathcal{V}}\,]} = \vec{\boldsymbol{v}}(I_1 \in D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}).\ \vec{\Omega}\ (D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) = \mathbf{0}$ et $\vec{\Omega}\ (D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) \neq \vec{\mathbf{0}}$

Le torseur cinématique est un glisseur, par conséquent le moment central est nul.

5. *Centre Instantané de Rotation (CIR)*

Par calcul : $\vec{\Omega}\ (D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) \neq \vec{\mathbf{0}}$: l'axe central (Δ_2) existe et est de vecteur directeur $\vec{\Omega}\ (D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0})$ c'est-à-dire $\vec{\mathbf{k}}_\mathbf{0}$. Soit $I \in \Delta_2$ alors :

$$\overrightarrow{I_1I} = \frac{\vec{\Omega}\ (D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) \wedge \vec{\boldsymbol{v}}(I_1 \in D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0})}{\vec{\Omega}\ (D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0})^2} = -\frac{R_1}{4}\vec{\imath}$$

Soit $\boldsymbol{\Pi}_\mathbf{0}(O;\ \vec{\mathbf{i}}_0, \vec{\jmath}_0)$ le plan fixe de $(\boldsymbol{\mathcal{R}_0})$ et soit $\boldsymbol{\Pi}_\mathbf{2}\big(\boldsymbol{G};\ \vec{I}_\mathbf{2}, \vec{J}_\mathbf{2}\big)$ le plan du référentiel $\boldsymbol{\mathcal{R}}_2\big(\boldsymbol{G};\ \vec{I}_\mathbf{2}, \vec{J}_\mathbf{2}, \vec{\mathbf{k}}_\mathbf{0}\big)$ lié au disque (D_2), qui est perpendiculaire à $\vec{\mathbf{k}}_\mathbf{0}$ et parallèle à $\boldsymbol{\Pi}_\mathbf{0}$.

$\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GI_1} + \overrightarrow{I_1I} = -\dfrac{R_1}{2}\vec{\imath}$

$I \boldsymbol{\epsilon}\, \boldsymbol{\Pi}_\mathbf{2}$ car : $\overrightarrow{GI}.\vec{\mathbf{k}}_\mathbf{0} = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{G}\, \boldsymbol{\epsilon}\, \boldsymbol{\Pi}_\mathbf{2}$ Donc : $I\, \boldsymbol{\epsilon}\, \boldsymbol{\Pi}_\mathbf{2} \cap \boldsymbol{\Delta}_\mathbf{2}$

$\vec{\boldsymbol{v}}(I \in D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) = \vec{\mathbf{0}}$ car c'est le moment central

Donc $I \equiv$ **C. I. R.**

De plus : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OI_1} + \overrightarrow{I_1I} = \frac{3R_1}{4}\vec{\imath}$

Géométriquement :

$\vec{\boldsymbol{v}}(I_1 \in D_1/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) = R_1\boldsymbol{\omega}\vec{\jmath}$ $\qquad\qquad$ $\vec{\boldsymbol{v}}(I_2 \in C/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) = 3R_1\boldsymbol{\omega}\,\vec{\jmath}$

$\frac{\|\vec{\boldsymbol{v}}(I_2 \in C/\boldsymbol{\mathcal{R}_0})\|}{\|\vec{\boldsymbol{v}}(I_1 \in D_1/\boldsymbol{\mathcal{R}_0})\|} = \frac{\|\overrightarrow{I_2I}\|}{\|\overrightarrow{I_1I}\|} = 3,$ I, I_1 et I_2 sont alignés sur l'axe (Ox)

On utilise la méthode des triangles pour trouver la position de I (voir figure)

6. *Base* : Trajectoire du CIR = $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ dans le repère fixe $(\boldsymbol{\mathcal{R}_0})$.

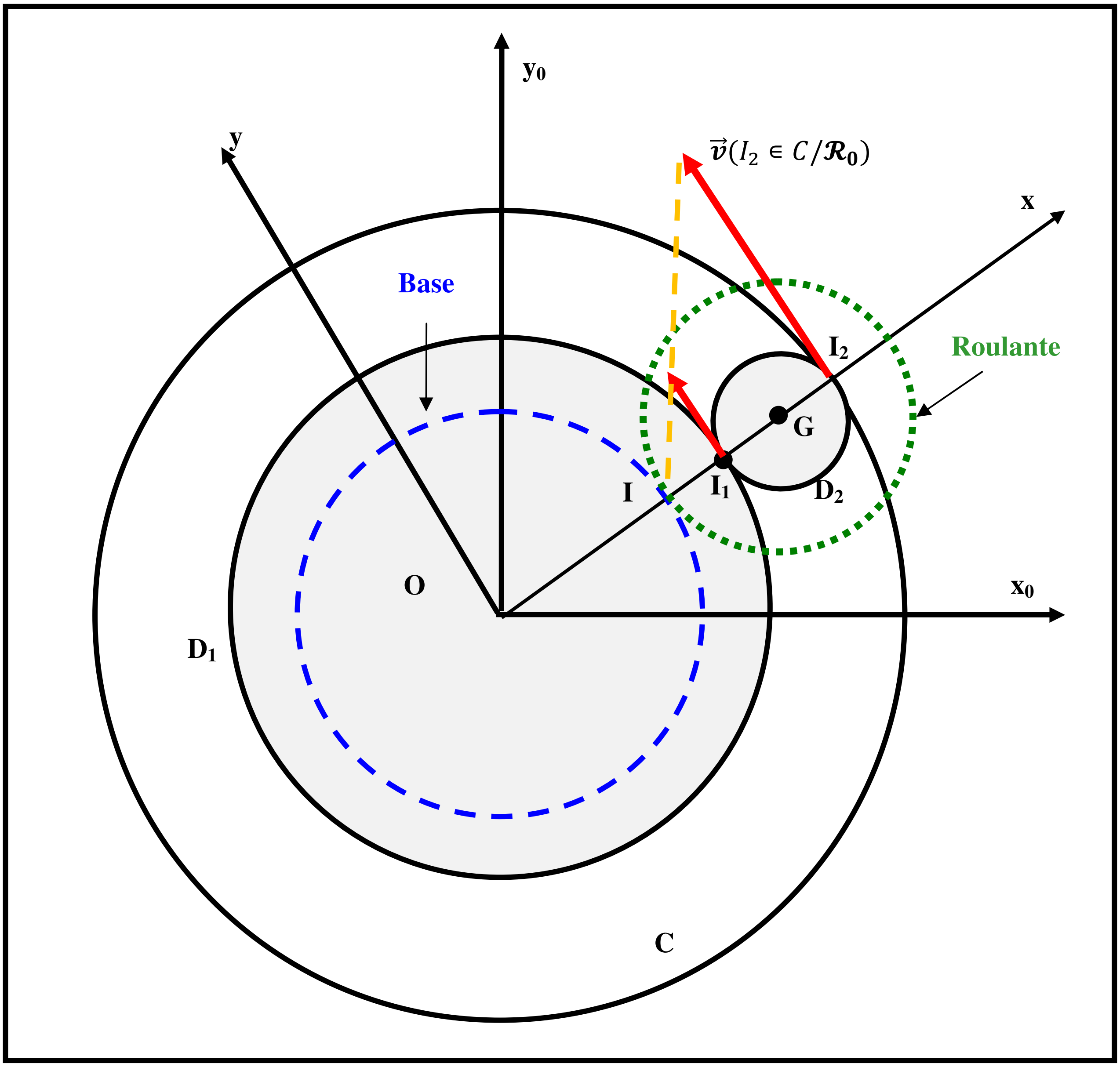
$\overrightarrow{OI} = \dfrac{3R_1}{4}\vec{\imath}$

Le vecteur $\vec{\imath}$ varie dans $(\boldsymbol{\mathcal{R}_0})$ alors la base (b) est le cercle de centre O et de rayon $\|\overrightarrow{OI}\| = \frac{3R_1}{4}$

Roulante : Lieu des points I dans le référentiel $\boldsymbol{\mathcal{R}}_2\big(\boldsymbol{G};\ \vec{I}_\mathbf{2}, \vec{J}_\mathbf{2}, \vec{\mathbf{k}}_\mathbf{0}\big)$ lié au solide (D_2)

$\overrightarrow{GI} = -\dfrac{R_1}{4}\vec{\imath}$

Le vecteur $\vec{\imath}$ varie dans $(\boldsymbol{\mathcal{R}_2})$ alors la roulante (r) est le cercle de centre $\boldsymbol{G}$ et de rayon $\|\overrightarrow{GI}\| = \frac{R_1}{4}$



7. ***Vecteur vitesse de G*** :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{5R_1}{4}\vec{\imath}$$

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \frac{5}{4}R_1\left(\frac{d\,\vec{\imath}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \frac{5}{4}R_1\left(\left(\frac{d\,\vec{\imath}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)\wedge\vec{\imath}\right) = \frac{5}{4}R_1\left(\dot{\theta}\,\vec{k}_0\wedge\vec{\imath}\right)$$

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}_0) = \frac{5}{4}R_1\dot{\boldsymbol{\theta}}\,\vec{\jmath}$$

Vecteur rotation instantané :

F.F.C.S. : G et I ∈ (D_2)

$$\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}}_0) = \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}\in D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}}_0) = \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{I}\in D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}}_0) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(D_2/\boldsymbol{\mathcal{R}_0})\wedge\overrightarrow{IG} = \vec{0} + 4\boldsymbol{\omega}\,\vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{0}}\wedge\frac{R_1}{2}\vec{\imath} = 2R_1\boldsymbol{\omega}\,\vec{\jmath}$$

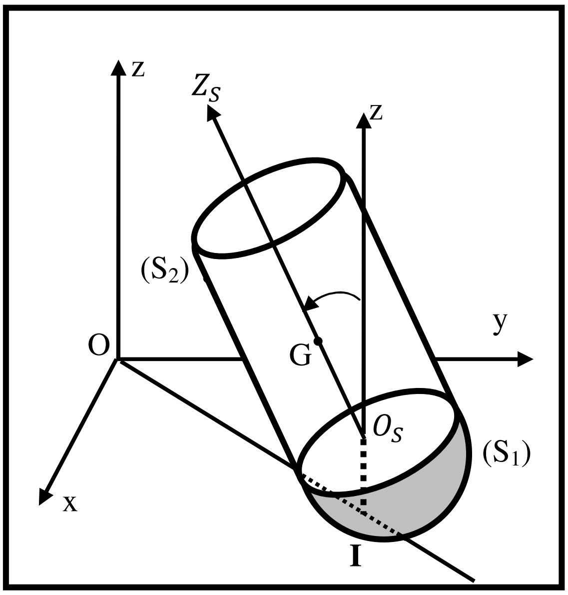
Ce qui donne : $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{8}{5}\boldsymbol{\omega}$

Le vecteur rotation est donc : $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{\mathcal{R}}/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) = \frac{8}{5}\boldsymbol{\omega}\,\vec{\mathbf{k}}_{\mathbf{0}}$

Exercice 3

Un solide de révolution (S) est composé d'un cylindre (S_2) de hauteur H fixé à un hémisphère (S_1) de rayon a et de centre $\boldsymbol{O_S}$. Soit $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ (Oxyz) un repère orthonormé direct fixe de base associée ($\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$) et soit I le point de contact de (S) avec le plan $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{O}\,\mathbf{xy})$. Soit $\boldsymbol{\mathcal{R}_S}(\boldsymbol{O_S X_S Y_S Z_S})$ le repère orthonormé direct lié à (S) de base associée ($\vec{\mathbf{I}}, \vec{\mathbf{J}}, \vec{\mathbf{K}}$) et d'axe de révolution ($\boldsymbol{O_S}\vec{\mathbf{K}}$) orienté de ($S_1$) vers ($S_2$). Soit G le centre de masse de (S) tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{O_S G}} = \boldsymbol{L}\,\vec{\mathbf{K}}$. On utilisera les angles d'Euler (ψ, θ, φ) et on désignera par ($\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{k}}$) et ($\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{K}}$) les deux bases intermédiaires.

On posera : $\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \mathbf{x}_{\boldsymbol{G}}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y_G}\,\vec{\mathbf{\jmath}} + \boldsymbol{z_G}\,\vec{\mathbf{k}}$



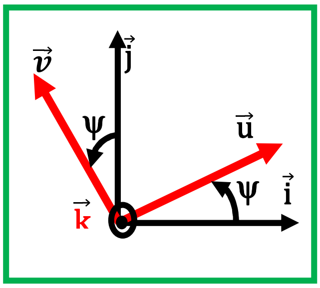
1. Représenter les figures planes de rotation et donner l'expression du vecteur rotation instantané de (S) par rapport à ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$).
2. Exprimer ses composantes dans la 2ème base intermédiaire ($\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{K}}$), ainsi que dans la base fixe ($\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$).
3. Déterminer la condition géométrique de contact entre (S) et le plan fixe $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{O}\,\mathbf{xy})$. Déterminer alors le nombre de degrés de liberté du système.
4. Calculer les vecteurs vitesse et l'accélération absolues de G.
5. Calculer la vitesse de glissement en I de (S) par rapport au plan $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{O}\mathbf{xy})$ et exprimer ses composantes dans la première base intermédiaire ($\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{k}}$).

Solution

1. *Figures planes de rotation*

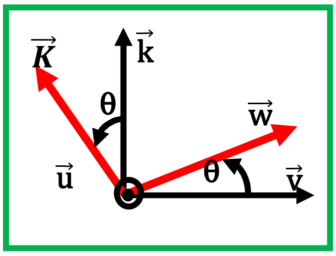
Translation de vecteur $\overrightarrow{OO_S}$: $\quad \boldsymbol{\mathcal{R}}\,(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{\textbf{Translation}} \boldsymbol{\mathcal{R}_{O_S}}\,(\boldsymbol{O_S}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ donc $\vec{\Omega}\,(\boldsymbol{\mathcal{R}_{O_S}}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \vec{\mathbf{0}}$

$\mathcal{R}_S(O_S X_S Y_S Z_S)$ est le repère orthonormé direct lié à (S) de base associée ($\vec{\mathbf{I}}, \vec{\mathbf{J}}, \vec{\mathbf{K}}$)



Précession : $\mathcal{R}_{O_S}\,(O_S; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{Rot(\vec{k},\psi)} \mathcal{R}_1\,(O_S; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$

$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\psi}\,\vec{k}$

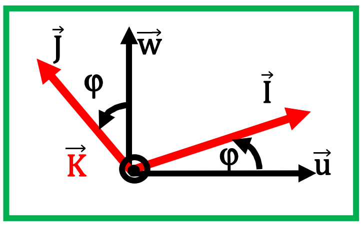


Nutation : $\mathcal{R}_1\,(O_S; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}) \xrightarrow{Rot\,(\vec{u},\theta)} \mathcal{R}_2\,(O_S; \vec{w}, \vec{v}, \vec{K})$

$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = \dot{\theta}\,\vec{u}$

Rotation proper: $\mathcal{R}_2\,(O_S; \vec{w}, \vec{v}, \vec{K}) \xrightarrow{Rot\,(\vec{K},\varphi)} \mathcal{R}_S\,(O_S; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$

$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_2) = \dot{\varphi}\,\vec{K}$



$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_2) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_{O_S}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_{O_S}/\mathcal{R})$$

En fonction des angles d'Euler :

$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \dot{\psi}\,\vec{k} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{K}$$

2. *Expression de* $\vec{\Omega}\,(S/\mathcal{R})$ *dans la 2ème base intermédiaire* $(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{w}}, \vec{\boldsymbol{K}})$,

$$\vec{k} = \sin\theta\,\vec{w} + \cos\theta\,\vec{K}$$

$$\vec{\Omega}\,(S/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{K}$$

Expression de $\vec{\Omega}\,(S/\mathcal{R})$ *dans la base* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

$$\vec{u} = \cos\psi\,\vec{w} + \sin\psi\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{v} = -\sin\psi\,\vec{\imath} + \cos\psi\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{K} = -\sin\theta\,\vec{v} + \cos\theta\,\vec{k} = \sin\theta\sin\psi\,\vec{\imath} - \sin\theta\cos\psi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{\Omega}\,(S/\mathcal{R}) = (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi)\,\vec{\imath} + (\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi)\,\vec{\jmath} + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\vec{k}$$

3. *Condition géométrique de contact*

$I \in P(Oxy)$ *Donc* $\overrightarrow{OI}.\vec{k} = 0$

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OO_S} + \overrightarrow{O_SI} = \mathbf{x}_{O_S}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}_{O_S}\vec{\mathbf{j}} + \boldsymbol{z}_{O_S}\vec{\mathbf{k}} - \mathbf{a}\,\vec{\mathbf{k}}$$

$\overrightarrow{OI}.\vec{k} = 0$ *donc* $\boldsymbol{z}_{O_S} = \mathbf{a}$

Paramétrage de *(S) :*

- 3 coordonnées pour $\mathbf{O_S}$ **:** $\mathbf{x_{O_S}}, \mathbf{y_{O_S}}, \mathbf{z_{O_S}}$
- 3 angles d'Euler : ψ, θ, φ

(S) possède $\mathrm{n} = 6$ paramètres primitifs. Mais on a une liaison de contact : $\mathbf{z}_{O_S} = \mathbf{a}$

Donc le nombre de liaison est : $\mathrm{N_l} = 1$.

Finalement le nombre de degrés de liberté est :

$\mathrm{N = n - N_l} = 6 - 1 = 5$: (S) possède 5 degrés de liberté.

4. *Vitesse absolue de G*

$\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \mathbf{x}_{\boldsymbol{G}}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{G}}\vec{\mathbf{j}} + \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{G}}\vec{\mathbf{k}}$ *et* $\boldsymbol{z}_G = \mathbf{a} + \mathbf{L}\cos\theta$

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{\mathbf{x}}_{\boldsymbol{G}}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \dot{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{G}}\vec{\mathbf{j}} + \dot{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{G}}\vec{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{x}}_{\boldsymbol{G}}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \dot{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{G}}\vec{\mathbf{j}} - \mathbf{L}\,\dot{\theta}\,\mathbf{sin}\theta\,\vec{\mathbf{k}}$$

Accélération absolue de G

$$\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}(G/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \ddot{\mathbf{x}}_{\boldsymbol{G}}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \ddot{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{G}}\vec{\mathbf{j}} - \mathbf{L}\left(\dot{\theta}^{\,2}\mathbf{cos}\theta + \ddot{\theta}\,\mathbf{sin}\theta\right)\vec{\mathbf{k}}$$

5. *Vitesse de glissement* **:**

$$\vec{v}_g(\mathrm{I};\,\mathrm{S/P}) = \vec{v}(I \in S/P) = \vec{v}(I \in S/\mathcal{R}) - \vec{v}(I \in \mathrm{P}/\mathcal{R})$$

(P) est fixe dans $(\mathcal{R})$: $\vec{v}(I \in \mathrm{P}/\mathcal{R}) = \vec{0}$

$$\vec{v}(I \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) = \vec{v}(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}\,(\mathrm{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{GI}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GI}} = \overrightarrow{GO_S} + \overrightarrow{O_SI} = -\mathbf{L}\,\vec{\mathbf{K}} - \mathbf{a}\,\vec{\mathbf{k}} = \mathbf{L}\sin\theta\,\vec{v} - (\mathbf{a} + \mathbf{L}\,\mathbf{cos}\theta)\,\vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\Omega}\,(S/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\,\vec{u} - \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{v} + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\vec{k}$$

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_G \cos\psi + \dot{y}_G \sin\psi \\ -\dot{\mathbf{x}}_G \sin\psi + \dot{y}_G \cos\psi \\ -\mathbf{L}\dot{\theta}\ \sin\theta \end{bmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{k})} \quad et \quad \vec{\Omega}\ (S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{GI}} = \begin{bmatrix} (a\dot{\varphi} - L\dot{\psi})\sin\theta \\ \dot{\theta}\,(\mathbf{a} + \mathbf{L}\cos\theta) \\ \mathbf{L}\dot{\theta}\ \sin\theta \end{bmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{k})}$$

La vitesse de glissement au point I :

$$\vec{v}(I \in S/\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_G \cos\psi + \dot{y}_G \sin\psi + (a\dot{\varphi} - L\dot{\psi})\sin\theta \\ -\dot{\mathbf{x}}_G \sin\psi + \dot{y}_G \cos\psi + \dot{\theta}\,(\mathbf{a} + \mathbf{L}\cos\theta) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{k})}$$

$\vec{v}_g.\vec{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$ *: La vitesse de glissement est dans le plan $P(Oxy)$.*

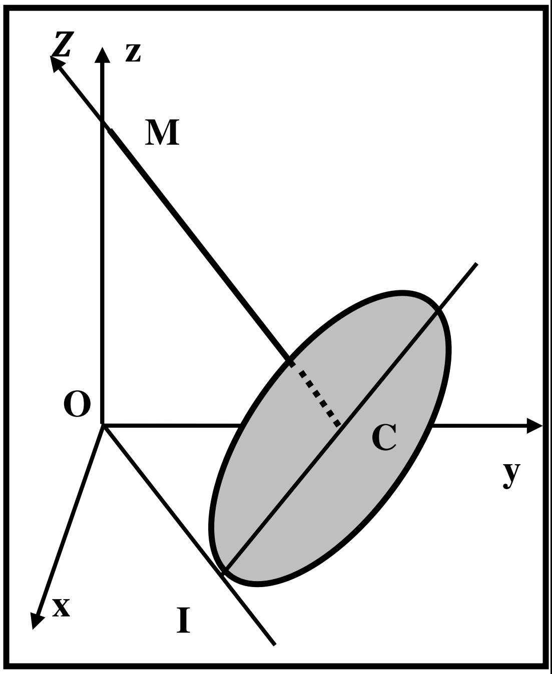
Remarque : On aurait pu également calculer la vitesse de glissement en utilisant la relation de composition :

$$\vec{v}(I \in S/\mathcal{R}) = \vec{v}(I/\mathcal{R}) - \vec{v}(I/\mathcal{R}_S) = \left(\frac{d\overrightarrow{OI}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} - \left(\frac{d\overrightarrow{O_S I}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_S}$$

$$\overrightarrow{OI} = \mathbf{x}_G\vec{\imath} + y_G\vec{\jmath} + z_G\vec{\mathbf{k}} - \mathbf{L}\vec{\mathbf{K}} - \mathbf{a}\vec{\mathbf{k}} \quad et \quad \overrightarrow{O_S I} = -\mathbf{a}\vec{\mathbf{k}}$$

Exercice 4

On considère un solide **(S)** constitué d'un disque de centre C et de rayon **R** auquel est soudée en son centre et selon son axe de révolution une tige rectiligne de longueur L. Soit $\mathcal{R}_S(CXYZ)$ un référentiel orthonormé direct de base associée $(\vec{\mathbf{I}},\vec{\mathbf{J}},\vec{\mathbf{K}})$, lié à (S) dont l'axe de révolution est (CZ). Soit $\mathcal{R}$ (Oxyz) un repère orthonormé direct fixe de base associée $(\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}})$ et soit I le point de contact de (S) avec le plan $P(O\,\mathbf{xy})$ tel que $\overrightarrow{\mathbf{OI}} = \mathrm{L}\cos(\omega_0 t)\,\vec{\mathbf{u}}$ où ω_0 est constante. On utilisera les angles d'Euler ψ, θ et φ et on désignera par $(\vec{\mathbf{u}}, \vec{v}, \vec{\mathbf{k}})$ et $(\vec{\mathbf{w}}, \vec{v}, \vec{\mathbf{K}})$ les deux bases intermédiaires.



Partie I :

La tige coupe constamment l'axe vertical (Oz) en un point M variable tel que : $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \mathbf{z}\,\vec{\mathbf{k}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{CM}} = \mathbf{Z}\,\vec{\mathbf{K}}$

1. Représenter les figures planes de rotation et donner l'expression du vecteur rotation instantané de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$.
2. Exprimer ses composantes dans la 2ème base intermédiaire.
3. Exprimer la condition de contact géométrique entre (S) et le plan fixe $P(O\,\mathbf{xy})$ en fonction de R, θ et z_C où $z_C = \overrightarrow{\mathbf{OC}}\,.\vec{\mathbf{k}}$. Déterminer alors le nombre de degrés de liberté du système.
4. Déterminer les vecteurs vitesse du point géométrique I par rapport à $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}_S)$
5. Calculer et exprimer dans la deuxième base intermédiaire les vitesses: $\vec{v}(I \in S/\mathcal{R})$, $\vec{v}(C \in S/\mathcal{R})$
6. Déterminer z et Z en fonction des paramètres du problème.
7. Calculer: $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ et $\vec{v}(M \in S/\mathcal{R})$

Partie II :

Cette fois-ci la tige coupe constamment l'axe vertical (Oz) en un point M fixe tel que : $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \mathbf{R}\,\vec{\mathbf{k}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{CM}} = -\mathbf{L}\,\vec{\mathbf{u}}$

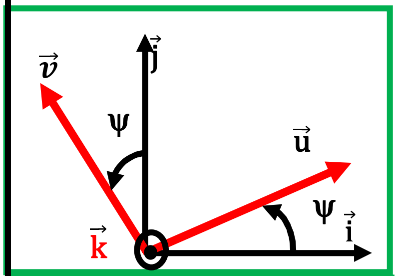
1. Montrer que les paramètres primitifs du système se réduisent à $\boldsymbol{\psi}$ et $\boldsymbol{\varphi}$.
2. Déterminer le vecteur rotation instantané de (S) par rapport à ($\mathcal{R}$). Exprimer le résultat dans ($\vec{\mathbf{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\mathbf{k}}$)
3. Calculer la vitesse de glissement en I de (S) par rapport au plan $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{O}\mathbf{xy})$.
4. Exprimer la condition du roulement sans glissement en I. Quel est alors le nombre de degré de liberté du système ?
5. En utilisant la **F.F.C.S**, calculer la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{O} \in \boldsymbol{S}/\mathcal{R})$ en fonction de R et $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$.
6. Calculer l'accélération $\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{O} \in \boldsymbol{S}/\mathcal{R})$ en fonction de R, L et $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$. Exprimer le résultat dans ($\vec{\mathbf{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\mathbf{k}}$)

Solution

Partie I:

1. *Translation de vecteur* $\overrightarrow{OC}$: $\mathcal{R}\,(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{Translation} \mathcal{R}_C\,(C, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ donc $\vec{\Omega}\,(\mathcal{R}_C/\mathcal{R}) = \vec{\mathbf{0}}$

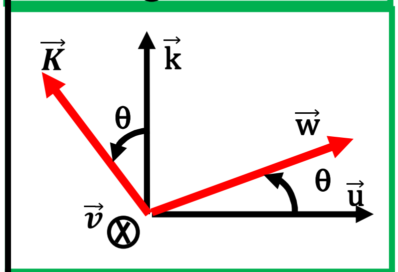
$\mathcal{R}_S(CXYZ)$ est le repère orthonormé direct lié à (S) de base associée ($\vec{\mathbf{I}}, \vec{\mathbf{J}}, \vec{\mathbf{K}}$)



Précession

$\mathcal{R}_C\,(C; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{Rot(\vec{\mathbf{k}},\psi)} \mathcal{R}_1\,(C;\ \vec{\mathbf{u}},\ \vec{\mathbf{v}},\ \vec{\mathbf{k}})$

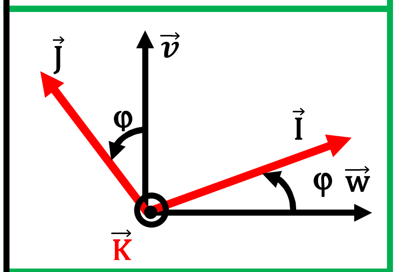
$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\boldsymbol{\psi}}\,\vec{\boldsymbol{k}}$



Nutation

$\mathcal{R}_1\,(C;\ \vec{\mathbf{u}},\ \vec{\boldsymbol{v}},\ \vec{\mathbf{k}}) \xrightarrow{Rot\,(\vec{v},\theta)} \mathcal{R}_2\,(C;\ \vec{\mathbf{w}},\ \vec{\boldsymbol{v}},\ \vec{\mathbf{K}})$

$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = -\,\dot{\boldsymbol{\theta}}\,\vec{\boldsymbol{v}}$



Rotation propre

$\mathcal{R}_2\,(C;\ \vec{\mathbf{w}},\ \vec{\boldsymbol{v}},\ \vec{\mathbf{K}}) \xrightarrow{(\vec{K},\varphi)} \mathcal{R}_S\,(C;\ \vec{\mathbf{I}},\ \vec{\mathbf{J}},\ \vec{\mathbf{K}})$

$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_2) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}\,\vec{\boldsymbol{K}}$

$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_2) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_C) + \vec{\Omega}\,(\mathcal{R}_C/\mathcal{R})$$

En fonction des angles d'Euler :

$$\vec{\Omega}\,(S/\mathcal{R}) = \dot{\psi}\,\vec{k} - \dot{\theta}\,\vec{v} + \dot{\varphi}\,\vec{K}$$

2. *Expression dans la 2ème base intermédiaire* ($\vec{\mathbf{w}}, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\mathbf{K}}$),

$\vec{k} = sin\theta\,\vec{w} + cos\,\theta\,\vec{K}$

$$\vec{\Omega}\,(S/\mathcal{R}) = \dot{\psi}\,sin\theta\,\vec{w} - \dot{\theta}\,\vec{v} + \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\,cos\,\theta\right)\vec{K}$$

3. *Condition géométrique de contact*

$I \in P(Oxy)$ *Donc* $\overrightarrow{OI}.\vec{k} = 0$

$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CI} = \mathbf{x_C}\,\vec{\imath} + y_C\,\vec{\jmath} + z_C\,\vec{k} - \mathbf{R}\,\vec{w}$

$\overrightarrow{OI}.\vec{k} = 0$ *donc :* $\mathbf{z_C} = \mathbf{R\,sin\theta}$

Paramétrage de (S) :

- 3 coordonnées pour **C**: $\mathbf{x_C}, \mathbf{y_C}, \mathbf{z_C}$
- 3 angles d'Euler : ψ, θ, φ

$\mathbf{n = 6}$ paramètres primitifs mais on a une liaison de contact : $\mathbf{z_C = R\,sin\theta}$

Nombre de liaisons : $\mathbf{N_l = 1}$

Nombre de degrés de libertés *:* $\boldsymbol{N = n - N_l = 6 - 1 = 5}$.

Le solide (S) possède 5 degrés de liberté : $\mathbf{x_C}$, $\mathbf{y_C}$, ψ, θ, φ

4. *Vecteurs vitesse du point géométrique I*

- $\vec{v}(I/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OI}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}(\mathrm{L}\cos(\omega_0 t)\ \vec{u})\right)_{\mathcal{R}} = -\mathrm{L}\,\omega_0\sin(\omega_0 t)\ \vec{u} + \mathrm{L}\cos(\omega_0 t)\ \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$

$$\vec{v}(I/\mathcal{R}) = -\mathrm{L}\,\omega_0\sin(\omega_0 t)\ \vec{u} + \mathrm{L}\,\dot{\psi}\cos(\omega_0 t)\ \vec{v}$$

- $\vec{v}(I/\mathcal{R}_S) = \left(\frac{d\overrightarrow{CI}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_S} = -R\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_S} = -R\left(\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_S)\wedge\vec{w}\right) = -R\left(-\dot{\varphi}\,\vec{K}\wedge\vec{w}\right) = R\dot{\varphi}\,\vec{v}$

$$\vec{v}(I/\mathcal{R}_S) = R\dot{\varphi}\,\vec{v}$$

Expression dans la 2ème base intermédiaire

$$\vec{v}(I \in S/\mathcal{R}) = \vec{v}(I/\mathcal{R}) - \vec{v}(I/\mathcal{R}_S) = \begin{bmatrix} -\mathrm{L}\,\omega_0\sin(\omega_0 t)\,cos\theta \\ \mathrm{L}\,\dot{\psi}\cos(\omega_0 t) - R\dot{\varphi} \\ \mathrm{L}\,\omega_0\sin(\omega_0 t)\sin\theta \end{bmatrix}_{(\vec{w},\vec{v},\vec{K})}$$

$$\vec{v}(C \in S/\mathcal{R}) = \vec{v}(I \in S/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})\wedge\overrightarrow{IC} = \begin{bmatrix} -\mathrm{L}\,\omega_0\sin(\omega_0 t)\,cos\theta \\ (\mathrm{L}\cos(\omega_0 t) + \mathrm{R}cos\theta)\dot{\psi} \\ R\dot{\theta} + \mathrm{L}\,\omega_0\sin(\omega_0 t)\sin\theta \end{bmatrix}_{(\vec{w},\vec{v},\vec{K})}$$

- ***Expressions de z et Z***

$\overrightarrow{OM} = \mathrm{z}\,\vec{k}$ et $\overrightarrow{CM} = \mathrm{Z}\,\vec{K}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CM}$

$$\mathrm{z}\,\vec{k} = \mathrm{L}\cos(\omega_0 t)\ \vec{u} + \mathbf{R}\,\vec{\mathbf{w}} + \mathrm{Z}\,\vec{K}$$

Projection sur $\vec{u}$:

$\mathrm{z}\,\vec{k}.\vec{u} = \mathrm{L}\cos(\omega_0 t)\ \vec{u}.\vec{u} + \mathbf{R}\,\vec{\mathbf{w}}.\vec{u} + \mathrm{Z}\,\vec{K}.\vec{u}$

$\vec{k}.\vec{u} = 0$ $\quad\vec{\mathbf{w}}.\vec{u} = \cos\theta$ $\quad$ et $\quad\vec{K}.\vec{u} = -\sin\theta$

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{L}\cos(\omega_0 t) + \mathrm{R}\cos\theta}{\sin\theta}$$

Projection sur $\vec{k}$:

$z\,\vec{k}.\vec{k} = L\cos(\omega_0 t)\ \vec{u}.\vec{k} + \mathbf{R}\,\vec{\mathbf{w}}.\vec{\mathbf{k}} + Z\,\vec{K}.\vec{k}$

$\vec{u}.\vec{k} = 0 \quad \vec{w}.\vec{k} = \sin\theta \quad$ et $\quad \vec{K}.\vec{k} = \cos\theta$

$$z = \frac{R + L\cos(\omega_0 t)\cos\theta}{\sin\theta}$$

7. *Expression de $\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{\mathcal{R}})$*

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{\boldsymbol{z}}\,\vec{\mathbf{k}} = -\left(\frac{\dot{\theta}\,(L\cos(\omega_0 t) + R\cos\theta)}{\sin^2\theta} + L\,\omega_0\sin(\omega_0 t)\,cotg\theta\right)\vec{\mathbf{k}}$$

Expression de $\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})$

$\vec{v}(M \in S/\mathcal{R}) = \vec{v}(C \in S/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{CM}$

$$= \begin{bmatrix} -L\,\omega_0\sin(\omega_0 t)\,cos\theta - \dot{\theta}\,\dfrac{L\cos(\omega_0 t) + R\cos\theta}{\sin\theta} \\ 0 \\ R\dot{\theta} + L\,\omega_0\sin(\omega_0 t)\sin\theta \end{bmatrix}_{(\vec{w},\vec{v},\vec{K})}$$

Partie II

$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{k}$ et $\overrightarrow{CM} = -L\,\vec{u}$

1. Paramétrage

$\overrightarrow{OI} = -\overrightarrow{CM} = L\,\vec{u} \quad$ donc $\quad \omega_0 t \equiv 0[2\pi]$

$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{k} \quad$ donc $\quad \theta = \frac{\pi}{2}$ et $\boldsymbol{z_C} = \mathbf{R}$

$\mathbf{x}_C = L\cos\psi$
$\boldsymbol{y}_C = L\sin\psi$

Au total, nous avons 4 liaisons : $N_l = 4$. Le nombre de degrés de liberté est :$N = n - N_l = 6 - 4 = 2$.

Le solide (S) possède 2 degrés de liberté : ψ et φ

2. Vecteur rotation instantané

$\theta = Const \quad$ donc $\quad \dot{\theta} = 0$ et $\quad \vec{K} = -\vec{u}$

$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \dot{\psi}\,\vec{k} - \dot{\varphi}\,\vec{u}$$

3. Vitesse de glissement

$\vec{v}(I \in S/P) = \vec{v}(I \in S/\mathcal{R}) - \vec{v}(I \in P/\mathcal{R})$

$\vec{v}(I \in P/\mathcal{R}) = \vec{0}$ car le plan (P) dans $(\mathcal{R})$

$$\vec{v}_g(I;\ S/P) = \vec{v}(I \in S/P) = \left(L\dot{\psi} - R\dot{\varphi}\right)\vec{v}$$

4. ***Roulement sans glissement*** : $\vec{v}_g(I;\ S/P) = \vec{0}$

Ce qui donne $\quad \dot{\psi} = \frac{R}{L}\dot{\varphi}$: Nouvelle liaison

Le système (S) possède 1 seul degré de liberté *:* φ

5. ***Expression de*** $\boldsymbol{\vec{v}(O \in S/\mathcal{R})}$

$$\vec{v}(O \in S/\mathcal{R}) = \vec{v}(I \in S/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{IO} = \vec{0} + \dot{\varphi}\left(\frac{R}{L}\vec{k} - \vec{u}\right) \wedge (-L\,\vec{u}) = -R\dot{\varphi}\vec{v}$$

6. ***Expression de*** $\boldsymbol{\vec{\gamma}(O \in S/\mathcal{R})}$

$$\vec{\gamma}(O \in S/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}(O \in S/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} - \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(O/\mathcal{R}_S)$$

$$\left(\frac{d\vec{v}(O \in S/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -R\ddot{\varphi}\vec{v} - R\dot{\varphi}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{\boldsymbol{v}} = -\dot{\psi}\,\vec{u} = -\frac{R}{L}\dot{\varphi}\,\vec{u}$$

$$\left(\frac{d\vec{v}(O \in S/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{R^2}{L}\dot{\varphi}^{\,2}\vec{u} - R\ddot{\varphi}\vec{v}$$

$$\vec{v}(O/\mathcal{R}_S) = \left(\frac{d\overrightarrow{CO}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_S} = -\left(\frac{d}{dt}(L\ \vec{u} + \mathbf{R}\,\vec{\mathbf{k}})\right)_{\mathcal{R}_S} = -\mathbf{R}\left(\frac{d\vec{\mathbf{k}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_S} = -R\left(\left(\frac{d\vec{\mathbf{k}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}) \wedge \vec{\mathbf{k}}\right)$$
$$= -R\dot{\varphi}\vec{v}$$

$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(O/\mathcal{R}_S) = \dot{\varphi}\left(\frac{R}{L}\vec{k} - \vec{u}\right) \wedge (R\dot{\varphi}\vec{v}) = -\frac{R^2}{L}\dot{\varphi}^{\,2}\vec{u} - R\dot{\varphi}^{\,2}\,\vec{k}$$

$$\vec{\gamma}(O \in S/\mathcal{R}) = 2\frac{R^2}{L}\dot{\varphi}^{\,2}\,\vec{u} - R\ddot{\varphi}\,\vec{v} + R\dot{\varphi}^{\,2}\,\vec{k}$$

Exercice 5

Soit une barre (AB) rigide et homogène de longueur L, en mouvement dans le plan vertical xOy du référentiel $\boldsymbol{\mathcal{R}}(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$. L'extrémité A glisse sur l'axe Ox, alors que l'extrémité B glisse sur un axe incliné fixe faisant un angle $\boldsymbol{\beta}$ avec l'horizontale (voir figure). Soit $\boldsymbol{\mathcal{R}}_1(A, \vec{\mathbf{I}}, \vec{\mathbf{J}}, \vec{\mathbf{k}})$ un référentiel lié à la barre (AB). Cette dernière est repérée dans $(\boldsymbol{\mathcal{R}})$ par l'angle $\boldsymbol{\alpha}$.

NB : Tous les résultats vectoriels doivent être exprimés dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{\mathbf{k}})$ de $(\boldsymbol{\mathcal{R}})$

1. Déterminer le torseur cinématique $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(AB/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{A}}$. Préciser sa nature.

2. Déterminer le moment central et l'axe central

3. Calculer de deux manières différentes les vecteurs vitesses : $\boldsymbol{\vec{v}}(\mathbf{B}/\boldsymbol{\mathcal{R}})$ et $\boldsymbol{\vec{v}}(\mathbf{O} \in \mathbf{AB}/\boldsymbol{\mathcal{R}})$.

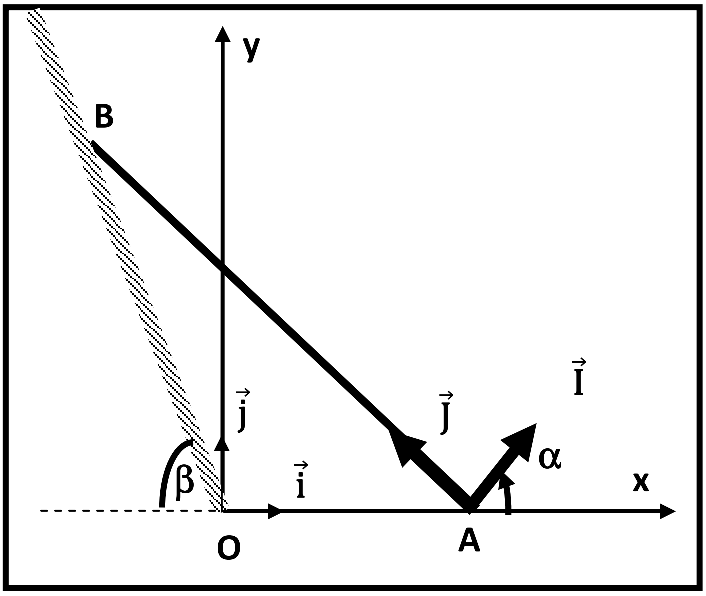
4. Calculer les vecteurs accélérations : $\vec{\gamma}(\mathbf{B}/\boldsymbol{\mathcal{R}})$ et $\vec{\gamma}(\mathbf{O} \in \mathbf{AB}/\boldsymbol{\mathcal{R}})$

5. Trouver géométriquement et par calcul, la position du centre instantané de rotation I du mouvement plan sur plan de la barre (AB) dans ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$)

6. Déterminer la base (b) et la roulante (r) du mouvement plan sur plan de la barre (AB) par rapport à ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$). Tracer la base et la roulante dans le cas où $\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$

7. Calculer les vecteurs vitesses du centre instantané de rotation: $\vec{\boldsymbol{v}}(\mathbf{I}/\mathbf{b})$ et $\vec{\boldsymbol{v}}(\mathbf{I}/\mathbf{r})$. Conclure

Rappel : Loi des sinus : $\frac{-\,OA}{\cos(\beta+\alpha)} = \frac{L}{\sin\beta} = \frac{OB}{\cos\alpha}$



Solution

1. ***Torseur cinématique*** : $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(AB/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{A}} = {}_{\boldsymbol{A}}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}\,) \\ \vec{v}(\mathrm{A} \in AB/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

$$\vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}\,) = \vec{\Omega}\ (\mathcal{R}_1/\mathcal{R}\,) = \dot{\alpha}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA} = \mathrm{OA}\,\vec{\imath} = -\frac{L}{\sin\beta}\cos(\beta+\alpha)\,\vec{\imath}$$

$$\vec{v}(\mathrm{A} \in AB/\mathcal{R}) = \vec{v}(\mathrm{A}/\mathcal{R}) - \vec{v}(\mathrm{A}/\mathcal{R}_1) = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{L\dot{\alpha}}{\sin\beta}\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath}$$

$$[\boldsymbol{\mathcal{V}}(AB/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{A}} = {}_{\boldsymbol{A}}\begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\vec{k} \\ \frac{L\dot{\alpha}}{\sin\beta}\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} \end{Bmatrix}$$

Invariant scalaire : $I_{[\mathcal{V}\ ]} = \vec{v}(\mathrm{A} \in AB/\mathcal{R}).\ \vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}) = 0$ et $\vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}) \neq \vec{0}$: $[\mathcal{V}\ ]$ est un glisseur

2. ***Moment central*** :

Le torseur cinématique est un glisseur, par conséquent le moment central est nul.

Axe central *:*

$\vec{\Omega}\ (\boldsymbol{AB}/\boldsymbol{\mathcal{R}}\,) \neq \vec{\mathbf{0}}$ donc l'axe central existe.

Soit $\Delta(\boldsymbol{I},\vec{\Omega})$ l'axe central, qui passe par le point I et de vecteur directeur $\vec{\Omega}$; alors :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}\,) \wedge \vec{v}(\mathrm{A} \in AB/\mathcal{R})}{\vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}\,)^2} = \frac{\dot{\alpha}\vec{k} \wedge \left(\frac{L\dot{\alpha}}{\sin\beta}\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath}\right)}{\dot{\alpha}^2} = \frac{L}{\sin\beta}\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath}$$

L'axe central est la droite $(\boldsymbol{Iz})$

3. * Vecteur vitesse $\vec{v}(\mathrm{B}/\mathcal{R})$ *:*

- *Calcul direct*

$$OB = \frac{L}{\sin\beta}\cos\alpha$$

Soit $\vec{\mathrm{u}} = -\cos\beta\,\vec{\mathrm{i}} + \sin\beta\,\vec{\mathrm{j}}$ *; alors* $\overrightarrow{OB} = \mathrm{OB}\,\vec{\mathrm{u}}$, avec $\vec{\mathrm{u}}$ étant fixe dans $(\mathcal{R})$

$$\vec{v}(\mathrm{B}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\mathrm{OB}}{dt}\right)\vec{\mathrm{u}} = -\frac{L\dot{\alpha}}{\sin\beta}\sin\alpha\,\vec{\mathrm{u}}$$

$$\vec{v}(\mathrm{B}/\mathrm{R}) = L\dot{\alpha}\sin\alpha\,(cotg\,\beta\,\vec{\mathrm{i}} - \vec{\mathrm{j}})$$

- *F.F.C.S.*

A, B $\in$ (AB) : $\vec{v}(B \in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = \vec{v}(\mathrm{A} \in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}\,(AB/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}$

$$\vec{v}(B \in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = \frac{L\dot{\alpha}}{\sin\beta}\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} + \dot{\alpha}\vec{k} \wedge \mathrm{L}\vec{J} = \frac{L\dot{\alpha}}{\sin\beta}\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} - \mathrm{L}\,\dot{\alpha}\vec{I}$$

$\vec{I} = \cos\alpha\,\vec{\mathrm{i}} + \sin\alpha\,\vec{\mathrm{j}}$; donc : $\vec{v}(B \in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = L\dot{\alpha}\sin\alpha\,(cotg\,\beta\,\vec{\mathrm{i}} - \vec{\mathrm{j}})$

De plus : $\vec{v}(B \in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = \vec{v}(B/\mathcal{R}) - \vec{v}(B/\boldsymbol{\mathcal{R}_1})$

$$\vec{v}(B/\boldsymbol{\mathcal{R}_1}) = \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\boldsymbol{\mathcal{R}_1}} = \left(\frac{dL\vec{J}}{dt}\right)_{\boldsymbol{\mathcal{R}_1}} = \vec{0}$$

Finalement :

$$\vec{v}(B/\mathcal{R}) = \vec{v}(B \in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = L\dot{\alpha}\sin\alpha\,(cotg\,\beta\,\vec{\mathrm{i}} - \vec{\mathrm{j}})$$

** ***Vecteur vitesse*** $\boldsymbol{\vec{v}(\mathrm{O} \in \mathrm{AB}/\mathcal{R})}$

- *Composition:*

$\vec{v}(\mathrm{O} \in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = \vec{v}(\mathrm{O}/\mathcal{R}) - \vec{v}(\mathrm{O}/\mathrm{AB})$

- $\vec{v}(\mathrm{O}/\mathcal{R}) = \vec{0}$
- $\vec{v}(\mathrm{O}/\mathrm{AB}) = \vec{v}(\mathrm{O}/\mathcal{R}_1) = \left(\frac{d\overrightarrow{AO}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{AO}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}\,(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1) \wedge \overrightarrow{AO}$
- $\vec{\Omega}\,(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1) = -\vec{\Omega}\,(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = -\dot{\alpha}\vec{k}$

$$= -\frac{L\dot{\alpha}}{\sin\beta}\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} + \left(-\dot{\alpha}\vec{k}\right) \wedge \frac{L}{\sin\beta}\cos(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} = -\frac{L\dot{\alpha}}{\sin\beta}\left(\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} + \cos(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath}\right)$$

$$\vec{v}(\mathrm{O} \in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = \frac{L\dot{\alpha}}{\sin\beta}\left(\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} + \cos(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath}\right)$$

- *F.F.C.S.*

O et A $\in$ (AB) $\quad \vec{v}(\mathrm{O} \in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = \vec{v}(\mathrm{A} \in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}\,(AB/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AO}$

$$= \frac{L\dot{\alpha}}{\sin\beta}\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} + \dot{\alpha}\vec{k} \wedge \frac{L}{\sin\beta}\cos(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} = \frac{L\dot{\alpha}}{\sin\beta}\left(\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} + \cos(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath}\right)$$

$$\vec{v}(\mathrm{O} \in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = \frac{L\dot{\alpha}}{\sin\beta}\left(\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} + \cos(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath}\right)$$

4. *Vecteur Accélération $\vec{\gamma}(B/\mathcal{R})$*

- *Calcul direct*

$$\vec{\gamma}(\mathrm{B}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}(\mathrm{B}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = L(\ddot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha)\,(cotg\,\beta\,\vec{\imath} - \vec{\jmath})$$

- *Champ :* A et B $\in$ (AB)

$$\vec{\gamma}(\mathrm{B}\in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}(\mathrm{A}\in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}) \wedge \left(\vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}\right)$$

Comme : $\vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{v}(A \in \mathrm{AB}/\mathcal{R})$ et $\vec{v}(A/\boldsymbol{\mathcal{R}_1}) = \vec{0}$

$$\vec{\gamma}(\mathrm{A}\in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}(\mathrm{A}\in\mathrm{AB}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} - \vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(A/\boldsymbol{\mathcal{R}_1}) = \left(\frac{d\vec{v}(\mathrm{A}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$
$$= \frac{L}{\sin\beta}\left(\ddot{\alpha}\sin(\beta+\alpha) + \dot{\alpha}^2\cos(\beta+\alpha)\right)\vec{\imath}$$

$$\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{AB} = \ddot{\alpha}\vec{k} \wedge \mathrm{L}\vec{J} = -\mathrm{L}\,\ddot{\alpha}\vec{I} = -\mathrm{L}\,\ddot{\alpha}\,(\cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{\jmath})$$

$$\vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}) \wedge \left(\vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}\right) = \dot{\alpha}\vec{k} \wedge \left(\dot{\alpha}\vec{k} \wedge \mathrm{L}\vec{J}\right) = -\mathrm{L}\dot{\alpha}^2\,\vec{J} = -\mathrm{L}\dot{\alpha}^2(-\sin\alpha\,\vec{\imath} + \cos\alpha\,\vec{\jmath})$$

$$\vec{\gamma}(\mathrm{B}\in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = \frac{L}{\sin\beta}\left(\ddot{\alpha}\sin(\beta+\alpha) + \dot{\alpha}^2\cos(\beta+\alpha)\right)\vec{\imath} - \mathrm{L}\,\ddot{\alpha}\,(\cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{\jmath})$$
$$- \mathrm{L}\dot{\alpha}^2(-\sin\alpha\,\vec{\imath} + \cos\alpha\,\vec{\jmath}) = L(\ddot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha)\,(cotg\,\beta\,\vec{\imath} - \vec{\jmath})$$

Car : $\frac{1}{\sin\beta}\sin(\beta+\alpha) - \cos\alpha = \sin\alpha\ cotg\beta$ et $\frac{1}{\sin\beta}\cos(\beta+\alpha) + \sin\alpha = \cos\alpha\ cotg\beta$

Comme : $\vec{v}(B/\mathcal{R}) = \vec{v}(B \in \mathrm{AB}/\mathcal{R})$ et $\vec{v}(B/\boldsymbol{\mathcal{R}_1}) = \vec{0}$

$$\vec{\gamma}(\mathrm{B}\in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}(\mathrm{B}\in\mathrm{AB}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} - \vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(B/\boldsymbol{\mathcal{R}_1}) = \left(\frac{d\vec{v}(\mathrm{B}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{\gamma}(\mathrm{B}/\mathcal{R})$$

Finalement :

$$\vec{\gamma}(\mathrm{B}/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}(\mathrm{B}\in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = L(\ddot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha)\,(cotg\,\beta\,\vec{\imath} - \vec{\jmath})$$

Vecteur Accélération $\boldsymbol{\vec{\gamma}(\mathrm{O}\in \mathrm{AB}/\mathcal{R})}$

- *Champ*

$$\vec{\gamma}(\mathrm{O}\in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}(\mathrm{B}\in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) + \left(\frac{d\vec{\Omega}\,(AB/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{BO} + \vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}) \wedge \left(\vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{BO}\right)$$

$$\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{BO} = \ddot{\alpha}\vec{k} \wedge L\cos\alpha(cotg\,\beta\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = \mathrm{L}\,\ddot{\alpha}\cos\alpha\,(cotg\,\beta\,\vec{\jmath} + \vec{\imath})$$

$$\vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}\ ) \wedge \left(\vec{\Omega}\ (AB/\mathcal{R}\ ) \wedge \overrightarrow{BO}\right) = \dot{\alpha}\vec{k} \wedge \left(\dot{\alpha}\vec{k} \wedge L\cos\alpha(cotg\,\beta\,\vec{\imath} - \vec{\jmath})\right) = -\mathrm{L}\,\dot{\alpha}^2\cos\alpha\,(cotg\,\beta\,\vec{\imath} - \vec{\jmath})$$

$$\vec{\gamma}(0 \in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = L(\ddot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha)\,(cotg\,\beta\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}) + \mathrm{L}\,\ddot{\alpha}\cos\alpha\,(cotg\,\beta\,\vec{\jmath} + \vec{\imath}) - \mathrm{L}\,\dot{\alpha}^2\cos\alpha\,(cotg\,\beta\,\vec{\imath} - \vec{\jmath})$$

$$\vec{\gamma}(0 \in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = \frac{L\ddot{\alpha}}{\sin\beta}\,(\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} + \cos(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath})$$

- *<u>Composition</u>*

$$\vec{\gamma}(0 \in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}(0/\mathcal{R}) - \vec{\gamma}(0/\mathcal{R}_1) - 2\,\vec{\Omega}\ (\mathcal{R}_1/\mathcal{R}\ ) \wedge \vec{v}(0/\mathcal{R}_1)$$

- $\vec{\gamma}(0/\mathcal{R}) = \vec{0}$
- $\vec{v}(0/\mathcal{R}_1) = -\frac{L\dot{\alpha}}{\sin\beta}\,(\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} + \cos(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath})$
- $\vec{\gamma}(0/\mathcal{R}_1) = \left(\frac{d\vec{v}(0/\mathcal{R}_1)}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{v}(0/\mathcal{R}_1)}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}\ (\mathcal{R}/\mathcal{R}_1\ ) \wedge \vec{v}(0/\mathcal{R}_1)$

$$\vec{\Omega}\ (\mathcal{R}/\mathcal{R}_1\ ) \wedge \vec{v}(0/\mathcal{R}_1) = \left(-\dot{\alpha}\vec{k}\right) \wedge \left(-\frac{L\dot{\alpha}}{\sin\beta}\,(\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} + \cos(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath})\right)$$

$$= \frac{L\dot{\alpha}^2}{\sin\beta}\,(\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath} - \cos(\beta+\alpha)\,\vec{\imath})$$

$$\left(\frac{d\vec{v}(0/\mathcal{R}_1)}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -\frac{L\ddot{\alpha}}{\sin\beta}\,(\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} + \cos(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath}) - \frac{L\dot{\alpha}^2}{\sin\beta}\,(\cos(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} - \sin(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath})$$

$$\vec{\gamma}(0/\mathcal{R}_1) = -\frac{L\ddot{\alpha}}{\sin\beta}\,(\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} + \cos(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath}) - \frac{2L\dot{\alpha}^2}{\sin\beta}\,(\cos(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} - \sin(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath})$$

$$\vec{\gamma}(0 \in \mathrm{AB}/\mathcal{R}) = \frac{L\ddot{\alpha}}{\sin\beta}\,(\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} + \cos(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath})$$

5. *<u>Centre Instantané de Rotation</u>* :*CIR*

D'après la question 2) $\Delta(I,\vec{k})$ est l'axe central tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{L}{\sin\beta}\,\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath}$

Soit $\Pi_1(\mathrm{A},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ le plan de $(\boldsymbol{\mathcal{R}_1})$, qui est perpendiculaire à $\vec{k}$ et parallèle à $\Pi(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ plan fixe de $(\mathcal{R})$.

$I \in \Pi_1$ car : $\overrightarrow{AI}.\vec{k} = 0$; $A \in \Pi_1$ car c'est l'origine. Donc : $I \in \Pi_1 \cap \Delta$

$\vec{v}(I \in AB/\mathcal{R}) = \vec{0}$ car I est un point central et $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(AB/\mathcal{R})]$ est un glisseur

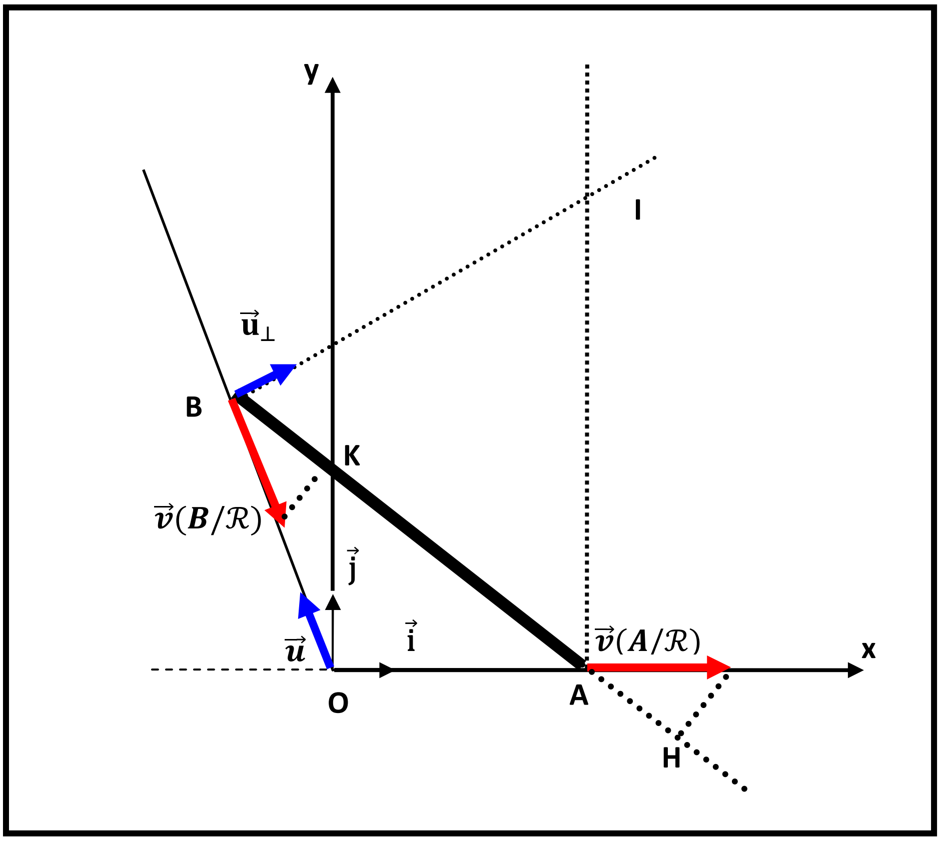
Donc $I \equiv$ C.I.R.

De plus : $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} = \frac{L}{\sin\beta}\,\sin\alpha(\sin\beta\ \vec{\imath} + \cos\beta\,\vec{\jmath})$

Soit $\vec{u}_\perp = \sin\beta\ \vec{\imath} + \cos\beta\,\vec{\jmath}$: $\vec{u}_\perp$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}$

Donc : $\overrightarrow{BI} = \frac{L}{\sin\beta}\,\sin\alpha\,\vec{u}_\perp$

Utilisant l'équiprojectivité, on a : $\overline{BK} = \overline{AH}$



6. ***Base*** : Trajectoire de $I(x, y, z)$ dans $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} = \frac{L}{\sin\beta}\left(-\cos(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} + \sin(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath}\right)$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{L}{\sin\beta}\cos(\beta+\alpha) \\ y = \dfrac{L}{\sin\beta}\sin(\beta+\alpha) \\ z = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne : $x^2 + y^2 = \left(\frac{L}{\sin\beta}\right)^2 \qquad \beta \neq 0[\pi]$

La base (b) est un quart de cercle de centre O et de rayon $\left|\frac{L}{\sin\beta}\right|$.

Roulante : Lieu des points I (X, Y) dans $\boldsymbol{\mathcal{R}_1}(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{L}{\sin\beta}\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath} = \frac{L}{\sin\beta}\sin(\beta+\alpha)\left(\sin\alpha\,\vec{I} + \cos\alpha\,\vec{J}\right) = X\,\vec{I} + Y\,\vec{J}$$

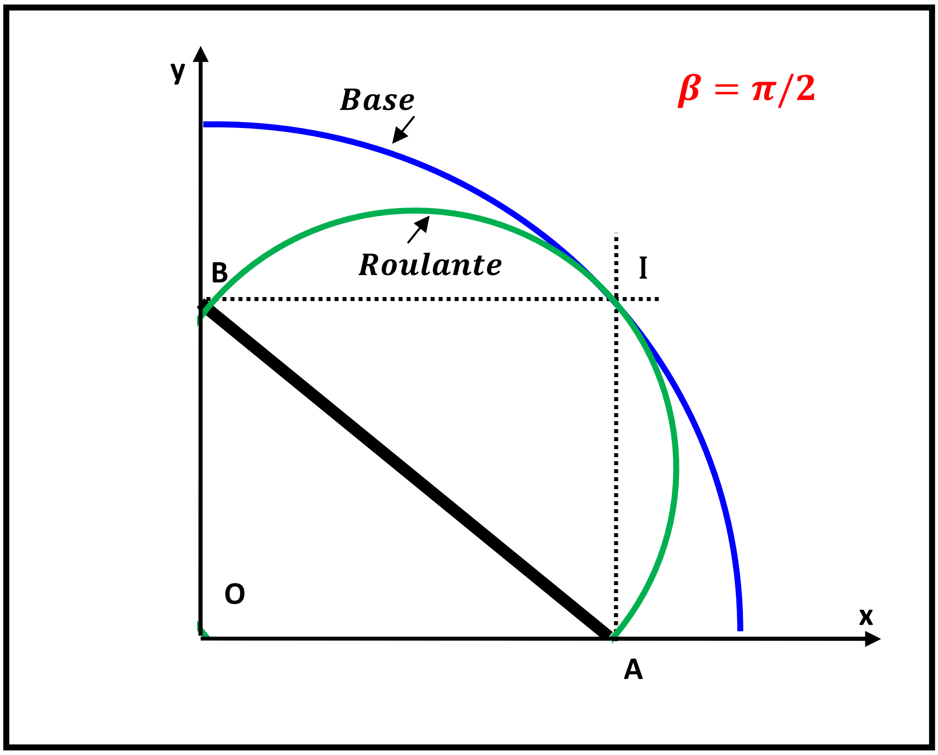
$$\begin{cases} X = \dfrac{L}{\sin\beta}\sin(\beta+\alpha)\sin\alpha = \dfrac{L}{2\sin\beta}\left(\cos\beta - \cos(\beta+2\alpha)\right) \\ Y = \dfrac{L}{2\sin\beta}\sin(\beta+\alpha)\cos\alpha = \dfrac{L}{2\sin\beta}\left(\sin\beta + \sin(\beta+2\alpha)\right) \end{cases}$$

Ce qui donne:

$$\left(X - \frac{L}{2}\operatorname{cotg}\beta\right)^2 + \left(Y - \frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{L}{2\sin\beta}\right)^2$$

$\beta \neq 0[\pi]$

La roulante (r) est un demi cercle de centre $(\frac{L}{2}\operatorname{cotg}\beta\,, \boldsymbol{L/2, 0})$ dans $(\boldsymbol{\mathcal{R}_1})$ et de rayon $\left|\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{2\sin\beta}}\right|$.



7. ***Vecteurs vitesse du CIR***: $\vec{\boldsymbol{v}}(\mathbf{I/b})$ et $\vec{\boldsymbol{v}}(\mathbf{I/r})$

- $\overrightarrow{OI} = \frac{L}{\sin\beta}\left(-\cos(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} + \sin(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath}\right)$

$$\vec{v}(I/b) = \left.\frac{d\overrightarrow{OI}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \frac{L\dot{\alpha}}{\sin\beta}\left(\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} + \cos(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath}\right)$$

- $\overrightarrow{AI} = \frac{L}{\sin\beta}\sin(\beta+\alpha)\;\vec{\jmath}$:

$$\vec{v}(I/r) = \left.\frac{d\overrightarrow{AI}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = \frac{L\dot{\alpha}}{\sin\beta}\left(\sin(\beta+\alpha)\,\vec{\imath} + \cos(\beta+\alpha)\,\vec{\jmath}\right)$$

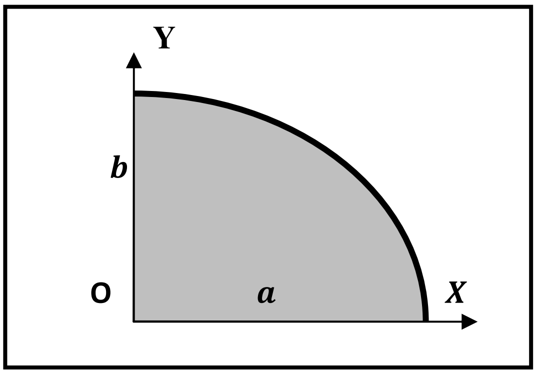
Conclusion:

$\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{I/b}) = \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{I/r})$ la base et la roulante sont tangentes en I

Donc $\vec{\boldsymbol{v}}(\mathbf{I} \in \mathbf{r}/\boldsymbol{b}) = \vec{\mathbf{0}}$: La base et la roulante roulent sans glisser l'une sur l'autre

GEOMETRIE DE MASSE ET CINETIQUE

Exercice 1



1. On considère un quart de plaque elliptique (P) homogène et de masse m. Soit $\mathcal{R}_P(\boldsymbol{OXYZ})$ un repère lié à la plaque (P) de base orthonormée directe associée $(\vec{\mathbf{I}}, \vec{\mathbf{J}}, \vec{\mathbf{K}})$. Déterminer le centre de masse G et la matrice d'inertie en O, $II_O(P)$, de (P). En déduire le moment d'inertie $\boldsymbol{I}_\Delta$ par rapport à l'axe $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{u}})$ avec $\vec{\boldsymbol{u}}(\mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ vecteur de $(\mathcal{R}_P)$.
2. Répondre aux mêmes questions pour un quart de disque, (D) homogène de rayon R. Trouver un repère principal pour (D).
3. La plaque (P) est en rotation autour de l'axe Oz d'un repère fixe $\mathcal{R}(\boldsymbol{Oxyz})$ de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\mathbf{k}} \equiv \vec{\mathbf{K}})$ avec la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ non constante. Déterminer les torseurs cinématique, cinétique et dynamique en G ainsi que l'énergie cinétique par rapport à $(\mathcal{R})$.

Solution

1. ***2ème Théorème de Guldin***

Surface de la plaque elliptique: $S = \iint dXdY$

Changement de variables : $\begin{cases} X = a\, r\, cos\theta \\ Y = b\, r\, sin\theta \end{cases}$ avec $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \end{cases}$

le Jacobien de la transformation est $\boldsymbol{J} = r$

$$S = ab \int_0^1 rdr \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi ab}{4}$$

Rotation autour de l'axe (Ox) :

Cette rotation engendre une demi-ellipsoïde pleine de volume : $\boldsymbol{V} = \iiint dXdYdZ$

Changement de variables : $\begin{cases} X = a\, r\, sin\theta cos\varphi \\ Y = b\, r\, sin\theta sin\varphi \\ Z = b\, r\, cos\theta \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

Le jacobien de la transformation est : $\boldsymbol{J} = r^2 sin\,\theta$

$$V = \iiint dXdYdZ = abc \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\pi/2} sin\,\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi ab^2}{3}$$

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{2\pi ab^2}}{\boldsymbol{3}}$$

La distance du centre d'inertie G à l'axe (Ox) est donc :

$$\boldsymbol{y_G} = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{2\pi S}} = \frac{\boldsymbol{2\pi ab^2/3}}{\boldsymbol{2\pi(\pi ab/4)}} = \frac{\boldsymbol{4b}}{\boldsymbol{3\pi}}$$

Par symétrie, on trouve que : $\boldsymbol{x_G} = \frac{\boldsymbol{4a}}{\boldsymbol{3\pi}}$

Donc le centre d'inertie G de la plaque a pour coordonnées dans $(\mathcal{R}_P)$: $\boldsymbol{G}\left(\frac{\boldsymbol{4a}}{\boldsymbol{3\pi}}, \frac{\boldsymbol{4b}}{\boldsymbol{3\pi}}, \boldsymbol{0}\right)$

Matrice d'inertie de la plaque (P)

La plaque est dans le plan (OXY) : $Z = 0$

La matrice d'inertie au point O s'écrit :

$$\text{II}_{O}(P) = \begin{bmatrix} \text{A} & -\text{F} & 0 \\ -\text{F} & \text{B} & 0 \\ 0 & 0 & \text{C} \end{bmatrix}_{(\vec{\text{I}},\vec{\text{J}},\vec{\text{k}})}$$

$\text{A} = \iint \text{Y}^2\text{dm}, \quad \text{B} = \iint \text{X}^2\text{dm}, \quad \text{F} = \iint \text{XYdm}, \quad \text{C} = \text{A} + \text{B}$

$\text{dm} = \sigma\text{dS}$

La plaque est homogène *:* $\sigma = \text{Const.}$ donc *:* $\text{m} = \sigma\,\text{S} = \sigma\frac{\pi ab}{4}$

- $\text{A} = \iint \text{Y}^2\text{dm} = \sigma \iint \text{Y}^2\text{dXdY} = \left(\frac{m}{\frac{\pi ab}{4}}\right)(ab^3)\int_0^1 r^3dr \int_0^{\pi/2} sin^2\theta d\theta = \frac{mb^2}{4}$
- $\text{B} = \iint \text{X}^2\text{dm} = \sigma \iint \text{X}^2\text{dXdY} = \left(\frac{m}{\frac{\pi ab}{4}}\right)(ba^3)\int_0^1 r^3dr \int_0^{\pi/2} cos^2\theta d\theta = \frac{ma^2}{4}$
- $\text{C} = \frac{m}{4}(a^2 + b^2)$
- $\text{F} = \iint \text{XYdm} = \sigma \iint \text{XYdXdY} = \left(\frac{m}{\frac{\pi ab}{4}}\right)(a^2b^2)\int_0^1 r^3dr \int_0^{\pi/2} cos\theta sin\theta d\theta = \frac{mab}{2\pi}$

$$\text{II}_{O}(P) = \begin{bmatrix} \dfrac{mb^2}{4} & -\dfrac{mab}{2\pi} & 0 \\ -\dfrac{mab}{2\pi} & \dfrac{ma^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m}{4}(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{\text{I}},\vec{\text{J}},\vec{\text{k}})}$$

Moment d'inertie

Soit $\boldsymbol{I}_\Delta$ le moment d'inertie de (P) par rapport à l'axe $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{O},\vec{\boldsymbol{u}})$ passant par O et de vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{2},\boldsymbol{1})$.

Le vecteur unitaire de $\vec{\boldsymbol{u}}$ est : $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\vec{\mathbf{u}}}{\|\vec{\mathbf{u}}\|} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{5}}\left(2\vec{\boldsymbol{j}} + \vec{\boldsymbol{k}}\right)$

Donc :

$$\mathbf{I}_{\boldsymbol{\Delta}} = {}^{\mathbf{t}}\hat{\mathbf{u}}\,.\,\mathbf{II}_{\mathbf{O}}(\mathbf{P}).\,\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}[\mathbf{0} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{1}].\begin{bmatrix} \text{A} & -\text{F} & 0 \\ -\text{F} & \text{B} & 0 \\ 0 & 0 & \text{C} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}(\mathbf{4}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$$

$$\mathbf{I}_{\boldsymbol{\Delta}} = \frac{\boldsymbol{m}}{\mathbf{20}}(\mathbf{5}a^2 + b^2)$$

Théorème de Huygens $\boldsymbol{I_\Delta} = \boldsymbol{I_{\Delta_G}} + \boldsymbol{md^2}$

La distance entre les deux axes parallèles est : $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\Delta_G},\Delta) = \boldsymbol{d}(\mathbf{G},\Delta) = \frac{\|\vec{\boldsymbol{u}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{OG}}\|}{\|\vec{\boldsymbol{u}}\|} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}\sqrt{\mathbf{5}}}\left(\sqrt{\mathbf{5}a^2 + b^2}\right)$

Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe $\boldsymbol{\Delta_G}$ est

$$\boldsymbol{I_{\Delta_G}} = \mathbf{I_\Delta} - \boldsymbol{md^2} = \frac{\boldsymbol{m}}{\mathbf{20}}(\mathbf{5}a^2 + b^2)\left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{64}}{\mathbf{9}\boldsymbol{\pi}^2}\right)$$

2. ***Quart de disque (D) de rayon R***

Un disque est un cas particulier d'une ellipse avec : $\text{a} = \text{b} = \text{R}$

A partir de la question 1), la matrice d'inertie est :

$$\mathrm{II}_O(\mathrm{D}) = \frac{mR^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{\pi} & 0 \\ -\frac{2}{\pi} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(\vec{\mathrm{I}},\vec{\mathrm{J}},\vec{\mathrm{k}})}$$

Le moment d'inertie est : $\mathbf{I}_{\Delta} = \frac{3}{10}mR^2$

Repère principal

Soit $\mathcal{R}_p(\boldsymbol{O}\mathbf{X_1Y_1Z_1})$) un repère telle que $(\vec{\mathbf{I}}_1,\ \vec{\mathbf{J}}_1,\ \vec{\mathbf{K}}_1)$ soit la base orthonormée directe lui étant associée et définie par :

$$\vec{\mathbf{I}}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{I}+\vec{J})$$

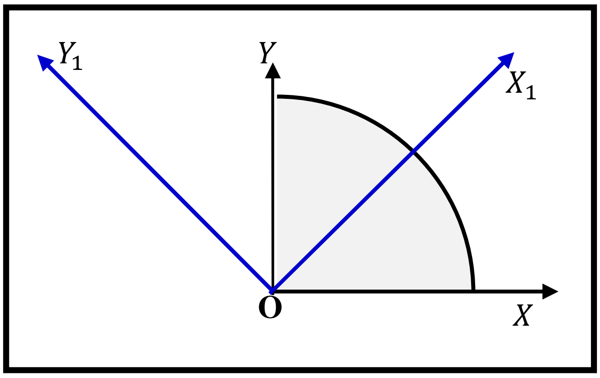
$$\vec{\mathbf{J}}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{I}+\vec{J})$$

$$\vec{\mathbf{K}}_1 = \vec{K} = \vec{k}$$

- $(\boldsymbol{O}\mathbf{X_1})$ est un axe de symétrie matérielle donc c'est un axe principal d'inertie
- $(\boldsymbol{O}\mathbf{X_1Z_1})$ est un plan de symétrie matérielle donc $(\mathbf{OY_1})$ est un axe principal d'inertie

Donc $\mathcal{R}_p(\boldsymbol{O}\mathbf{X_1Y_1Z_1}$) est un repère principal d'inertie de base principale $(\vec{\mathbf{I}}_1,\ \vec{\mathbf{J}}_1,\ \vec{\mathbf{K}}_1)$. La matrice principale d'inertie de (D) est diagonale et est de la forme :

$$\boldsymbol{II}_G^*(\boldsymbol{D}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_G^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B}_G^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C}_G^* \end{bmatrix}_{(\vec{\mathbf{I}}_1,\vec{\mathbf{J}}_1,\vec{\mathbf{K}}_1)}$$



Par diagonalisation de $\boldsymbol{II}_G^*(\boldsymbol{D})$, on trouve que :

$$\boldsymbol{A}_G^* = A + F = \frac{mR^2}{4}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)$$

$$\boldsymbol{B}_G^* = A - F = \frac{mR^2}{4}\left(1+\frac{2}{\pi}\right)$$

$$\boldsymbol{C}_G^* = 2A = \frac{mR^2}{2}$$

3. *Torseurs*

Torseur cinématique : $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{P}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}\ (\mathrm{P}/\mathcal{R}) \\ \vec{v}(G/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}\left(\boldsymbol{a}\,\vec{I} + b\,\vec{J}\right)$$

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \vec{v}(O \in \mathrm{P}/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}\ (\mathrm{P}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OG} = \omega\,\vec{\mathrm{k}} \wedge \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}\left(\boldsymbol{a}\vec{I} + b\vec{J}\right) = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}\omega\left(-\boldsymbol{b}\vec{I} + a\vec{J}\right)$$

$$[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{P}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} \omega\,\vec{\mathrm{k}} \\ \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}\omega\left(-\boldsymbol{b}\vec{I} + a\vec{J}\right) \end{Bmatrix}$$

Torseur cinétique : $[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{P}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\mathbf{G}}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{P}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \\ \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{G}}(\mathbf{P}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \end{Bmatrix}$

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{P}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{O}}(\boldsymbol{P}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) + \boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{OG}}$$

Moment cinétique au point $O \in (P)$: $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{P}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{II}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{P}).\vec{\Omega}\ (\mathrm{P}/\mathcal{R}) + \boldsymbol{m}\vec{v}(\boldsymbol{O} \in \mathrm{P}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{GO}}$

(P) est fixe dans ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$) : $\vec{\mathrm{v}}(\mathrm{O} \in \mathrm{P}/\mathcal{R}) = \vec{0}$

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{O}}(\boldsymbol{P}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \mathrm{II}_{O}(P)\,.\,\vec{\Omega}\ (\mathbf{P}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & -\mathrm{F} & 0 \\ -\mathrm{F} & \mathrm{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{C} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \omega \end{bmatrix} = \mathbf{C}\,\omega\,\vec{\mathrm{k}} = \frac{m}{4}(a^2+b^2)\omega\,\vec{\mathrm{k}}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\omega}\left(-\boldsymbol{b}\vec{\boldsymbol{I}} + \boldsymbol{a}\vec{\boldsymbol{J}}\right) \wedge \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}\left(\boldsymbol{a}\vec{\boldsymbol{I}} + \boldsymbol{b}\vec{\boldsymbol{J}}\right) = -\frac{16}{9\pi^2}(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2)\boldsymbol{\omega}\,\vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \frac{m}{4}(a^2+b^2)\left(\mathbf{1} - \frac{64}{9\pi^2}\right)\boldsymbol{\omega}\,\vec{\mathbf{k}}$$

$$[\boldsymbol{C}(\mathbf{P})]_{\boldsymbol{G}} = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}} m\omega\left(-\boldsymbol{b}\vec{I} + a\vec{J}\right) \\ \dfrac{m}{4}(a^2+b^2)\left(1 - \dfrac{64}{9\pi^2}\right)\omega\,\vec{\mathrm{k}} \end{array} \right\}_{\mathbf{G}}$$

Torseur dynamique : $$[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{P}/\boldsymbol{\mathcal{R}})] = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{P}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \end{array} \right\}_{\boldsymbol{G}}$$

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}(G/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}\left(-\left(a\omega^2 + b\frac{d\omega}{dt}\right)\vec{I} + \left(-b\omega^2 + a\frac{d\omega}{dt}\right)\vec{J}\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{P}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{G}}(\mathbf{P}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{m}{4}(a^2+b^2)\left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right)\ \frac{d\omega}{dt}\,\vec{\mathrm{k}}$$

$$[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{P}/\mathcal{R})] = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\mathbf{4}\boldsymbol{m}}{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}\left(-\left(a\omega^2 + b\dfrac{d\omega}{dt}\right)\vec{I} + \left(-b\omega^2 + a\dfrac{d\omega}{dt}\right)\vec{J}\right) \\ \dfrac{m}{4}(a^2+b^2)\left(1 - \dfrac{64}{9\pi^2}\right)\ \dfrac{d\omega}{dt}\,\vec{\mathrm{k}} \end{array} \right\}_{\mathbf{G}}$$

Energie cinétique :

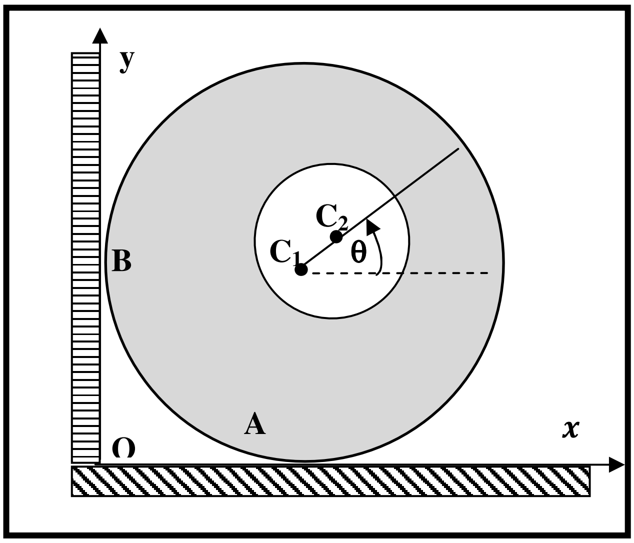
$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{P}/\mathcal{R}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{P}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{G}}.\,[\boldsymbol{C}(\mathbf{P}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{G}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left\{ \begin{array}{c} \omega\,\vec{\mathrm{k}} \\ \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}\omega\left(-\boldsymbol{b}\vec{I} + a\vec{J}\right) \end{array} \right\}_{\boldsymbol{G}} \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}} m\omega\left(-\boldsymbol{b}\vec{I} + a\vec{J}\right) \\ \dfrac{m}{4}(a^2+b^2)\left(1 - \dfrac{64}{9\pi^2}\right)\omega\,\vec{\mathrm{k}} \end{array} \right\}_{\mathbf{G}}$$

$$= \frac{m}{8}(a^2+b^2)\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}}$$

Exercice 2

On considère un disque ($\mathbf{D_1}$) plein homogène, de centre $\mathbf{C_1}$, de rayon **R** et de densité surfacique $\boldsymbol{\sigma}$ évidé par un trou circulaire ($\mathbf{D_2}$) de rayon **r** et de centre $\mathbf{C_2}$ tel que $\mathbf{C_1C_2=a}$ (voir figure). Le système (S) ainsi formé, de centre d'inertie **G** et de masse **M**, est mis en rotation tout en maintenant le contact avec deux parois perpendiculaires, l'une horizontale et l'autre verticale formant les axes d'un référentiel $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ (O; $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$). Soit A le point de contact de (S) avec la paroi horizontale et soit B le point de contact avec la paroi verticale. Les coefficients de frottement de glissement des deux parois avec le disque évidé aux points A et B sont respectivement f_A et f_B. On néglige les moments de résistance au pivotement et au roulement. Initialement le disque évidé possède une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega_0}$. On posera $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \dot{\boldsymbol{\theta}}\vec{\boldsymbol{k}}$

1. Déterminer la position du centre d'inertie **G** de (S) (Indication : On utilisera une densité surfacique $+\sigma$ pour le disque (D_1) et une densité surfacique $-\sigma$ pour (D_2))
2. Déterminer la matrice d'inertie $II_G(S)$.
3. Déterminer au point G, le torseur cinétique de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$
4. Déterminer l'énergie cinétique de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$



Solution

1. C_1 est le centre d'inertie de (D_1) de densité σ et de masse $m_1 = \pi R^2\sigma$
   C_2 est le centre d'inertie de (D_2) de densité $-\sigma$ et de masse $m_2 = -\pi r^2\sigma$
   G est le centre d'inertie de $(S) = (D_1) \cup (D_1)$, alors :

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = m_1\overrightarrow{\boldsymbol{O}C_1} + m_2\overrightarrow{\boldsymbol{O}C_2}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{\boldsymbol{O}C_1} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{\boldsymbol{O}C_2} = \frac{R^2}{R^2-r^2}\overrightarrow{\boldsymbol{O}C_1} - \frac{r^2}{R^2-r^2}\overrightarrow{\boldsymbol{O}C_2}$$

ou encore :

$$\overrightarrow{C_1\boldsymbol{G}} = -\left(\frac{r^2}{R^2-r^2}\right)\overrightarrow{C_1C_2} = -\boldsymbol{\beta}\,\overrightarrow{C_1C_2}$$

avec $\boldsymbol{\beta} = \frac{r^2}{R^2-r^2}$

Comme : $\overrightarrow{C_1C_2} = \mathbf{a}(\mathbf{cos\,\theta}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{sin\,\theta}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}})$, alors :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = (\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta a}\,\boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{\theta})\vec{\boldsymbol{\imath}} + (\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta a}\,\boldsymbol{sin}\,\boldsymbol{\theta})\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

2. ***Matrice d'inertie de*** $(S) = (D_1) \cup (D_1)$

$$\mathrm{II}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S}) = \mathrm{II}_{\mathrm{G}}(D_1) + \mathrm{II}_{\mathrm{G}}(D_2)$$

Théorème de Huygens :

$$\mathrm{II}_{\mathrm{G}}(D_1) = \mathrm{II}_{C_1}(D_1) + \mathrm{II}_{\mathrm{G}}(C_1, m_1)$$
$$\mathrm{II}_{\mathrm{G}}(D_2) = \mathrm{II}_{C_2}(D_2) + \mathrm{II}_{\mathrm{G}}(C_2, m_2)$$

Soit $(\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k})$ une base liée à (S) tel que : $\overrightarrow{C_1C_2} = \mathbf{a}\,\vec{\imath}_1$

$$\vec{\imath}_1 = \frac{\overrightarrow{C_1C_2}}{\|\overrightarrow{C_1C_2}\|} = \mathbf{cos\,\theta}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{sin\,\theta}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$\vec{\jmath}_1 = -\,sin\,\boldsymbol{\theta}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{cos\,\theta}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$\mathrm{II}_{C_1}(D_1) = \frac{m_1R^2}{4}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix} = \frac{\pi R^4\sigma}{4}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{k})}$$

$$\text{II}_{C_2}(D_2) = \frac{m_2 r^2}{4}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} = -\frac{\pi r^4 \sigma}{4}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{k})}$$

$\overrightarrow{C_1\boldsymbol{G}} = -\boldsymbol{\beta}\,\overrightarrow{C_1C_2} = -\boldsymbol{\beta a}\,\overrightarrow{\imath_1}$

Donc :

$$\text{II}_{\text{G}}(C_1, m_1) = m_1\boldsymbol{\beta}^2\boldsymbol{a}^2\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\ \vec{\jmath}_1,\ \vec{k})}$$

$\overrightarrow{C_2\boldsymbol{G}} = -\boldsymbol{\beta}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \overrightarrow{C_1C_2} = -\boldsymbol{\beta a}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \overrightarrow{\imath_1}$

Donc :

$$\text{II}_{\text{G}}(C_2, m_2) = m_2\boldsymbol{\beta}^2\boldsymbol{a}^2\left(\frac{R}{r}\right)^4\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\ \vec{\jmath}_1,\ \vec{k})}$$

$$\text{II}_{\text{G}}(\text{S}) = \left(\frac{m_1R^2}{4} + \frac{m_2r^2}{4}\right)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} + \boldsymbol{\beta}^2\boldsymbol{a}^2\left(m_1 + m_2\left(\frac{R}{r}\right)^4\right)\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\text{II}_{\text{G}}(\text{S}) = \begin{bmatrix}\frac{M}{4}(R^2+r^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{M}{4}(R^2+r^2) - M\boldsymbol{\beta}^2\boldsymbol{a}^2\left(\frac{R}{r}\right)^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{M}{2}(R^2+r^2) - M\boldsymbol{\beta}^2\boldsymbol{a}^2\left(\frac{R}{r}\right)^2\end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\ \vec{\jmath}_1,\ \vec{k})}$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$\text{II}_{\text{G}}(\text{S}) = \begin{bmatrix}\text{A} & 0 & 0\\ 0 & \text{B} & 0\\ 0 & 0 & \text{C}\end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\ \vec{\jmath}_1,\ \vec{k})}$$

$$\text{A} = \frac{M}{4}(R^2+r^2)$$

$$\text{B} = \frac{M}{4}(R^2+r^2) - M\boldsymbol{\beta}^2\boldsymbol{a}^2\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

$$\text{C} = \frac{M}{2}(R^2+r^2) - M\boldsymbol{\beta}^2\boldsymbol{a}^2\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

3. ***Torseur cinétique*** : $[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\mathbf{G}}\begin{Bmatrix}\vec{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \boldsymbol{M}\,\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}})\\ \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{G}}(\mathbf{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})\end{Bmatrix}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \overrightarrow{\boldsymbol{O}C_1} + \overrightarrow{C_1\boldsymbol{G}} = \mathbf{R}(\vec{\boldsymbol{\imath}} + \vec{\boldsymbol{\jmath}}) - \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}\vec{\imath}_1$

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}\dot{\theta}\,\vec{\mathbf{j}}_1$$

$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{II}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{S}).\vec{\Omega}\ (\text{S}/\mathcal{R}) = \text{C}\,\dot{\theta}\,\vec{\text{k}}$

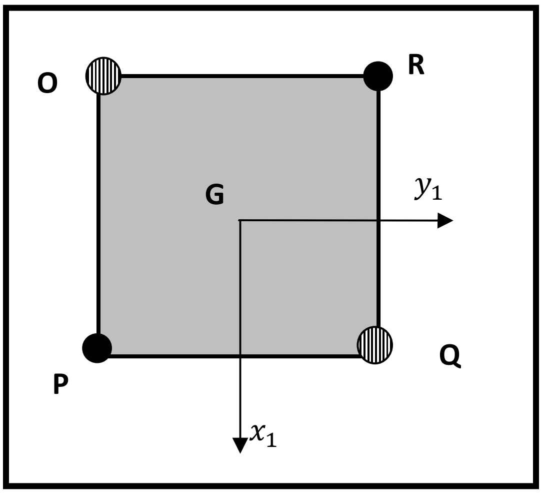
$$[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\mathbf{G}}\begin{Bmatrix}-\mathbf{M}\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}\dot{\boldsymbol{\theta}}\,\vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{1}}\\ \mathbf{C}\,\dot{\boldsymbol{\theta}}\,\vec{\mathbf{k}}\end{Bmatrix}$$

4. ***Energie cinétique*** :

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}[\mathcal{V}(S/\mathcal{R})]_G . [C(S/\mathcal{R})]_G = \frac{1}{2}\,{}_G\begin{Bmatrix} \dot{\theta}\,\vec{k} \\ -\beta\, a\dot{\theta}\,\vec{j}_1 \end{Bmatrix}\ {}_G\begin{Bmatrix} -M\beta\, a\dot{\theta}\,\vec{j}_1 \\ C\,\dot{\theta}\,\vec{k} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(C + M\beta^2 a^2)\dot{\theta}^2$$

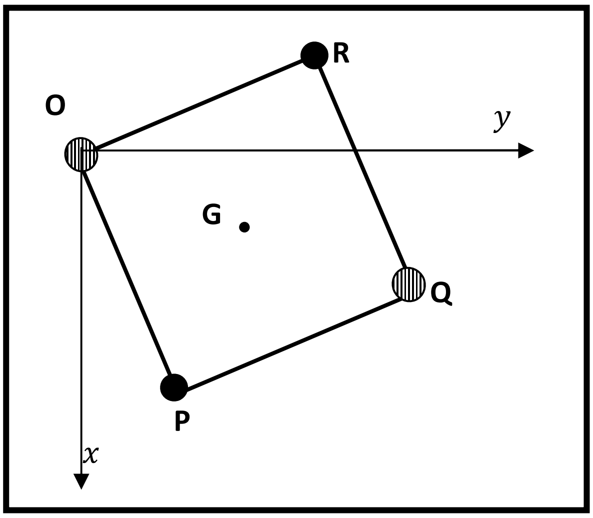
$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{M}{4}(R^2 + r^2 - 2\beta a^2)\dot{\theta}^2$$

Exercice 3



A. On considère un carré, (C), plein et homogène, de côté **a**, de masse m et de centre d'inertie G. Soit $\mathcal{R}_1(Gx_1y_1z_1)$, de base orthonormée directe $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ un référentiel lié au carré (C). Aux quatre sommets du carré, on fixe quatre masselottes : O et Q de masse $m_1/2$ chacune, et P et R de masse $m_2/2$ chacune avec $m_1 \neq m_2$ (voir figure). Le système (S) est ainsi formé du carré (C) et des quatre masselottes : O $(m_1/2)$, P$(m_2/2)$, Q$(m_1/2)$ et R$(m_2/2)$.

1. Montrer, par un calcul détaillé, que la matrice d'inertie, au point G, du système (S) s'écrit :
$II_G(S) = \begin{bmatrix} I_G & -J_G & 0 \\ -J_G & I_G & 0 \\ 0 & 0 & 2I_G \end{bmatrix}$. On exprimera I_G et J_G en fonction des données du problème.
2. En déduire la matrice d'inertie, au point O, du système (S), $II_O(S)$.
3. Le repère $(\mathcal{R}_1)$ est-il un repère principal d'inertie ? Admet-il un axe principal d'inertie ?(Justifier)
4. Trouver un repère principal d'inertie pour (S). Faites un schéma montrant la disposition des axes du repère principal d'inertie par rapport à ceux de $(\mathcal{R}_1)$.
5. Calculer le moment d'inertie I_{Δ_G}, du système (S), par rapport à l'axe $\Delta_G(G, \vec{u})$ avec $\vec{u}$ (0, 0, a) vecteur de $(\mathcal{R}_1)$. En déduire le moment d'inertie I_Δ par rapport à l'axe $\Delta(O, \vec{u})$.



B. On suppose maintenant que le système (S) est en rotation avec la vitesse angulaire non constante ω autour de l'axe (Oz) du repère fixe, $\mathcal{R}$(O **xyz**) de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \equiv \vec{k}_1)$. Dans la suite, on exprimera tous les résultats vectoriels dans la base mobile $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})$ liée à (S).

1. Déterminer au point G:
   a. le torseur cinématique : $[\mathcal{V}(S/\,\mathcal{R})]$
   b. le torseur cinétique : $[\mathcal{C}(S/\,\mathcal{R})]$
   c. le torseur dynamique : $[\mathcal{D}(S/\,\mathcal{R})]$
2. Déterminer l'énergie cinétique de (S) par rapport à $(\mathfrak{R})$ en fonction de ω et de I_Δ
3. En déduire la puissance développée dans le mouvement de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$.

Solution

A.

1. ***Matrice d'inertie au point G du Carré (C)***

- G est le centre d'inertie du Carré (C) sans masselottes. $\boldsymbol{\mathcal{R}_1}(\mathrm{G}\boldsymbol{x_1 y_1 z_1})$ est un repère principal d'inertie pour (C), car $(\mathrm{G}\boldsymbol{x_1})$ $\boldsymbol{et}$ $(\mathbf{G}\boldsymbol{y_1})$ sont deux axes de symétrie matérielle.
- Par symétrie $\boldsymbol{A_G = B_G}$.
- Le carré (C) est dans le plan $(\mathrm{G}\boldsymbol{x_1 y_1})$ donc $\boldsymbol{z_1} = 0$ et $C_G = 2A_G$

La matrice d'inertie de (C) s'écrit sous la forme :

$$II_{\,G}(C) = A_G \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k}_1)}$$

Elément de masse du Carré : $\boldsymbol{dm = \sigma dS}$

Comme (C) est homogène alors $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{Const.}$ d'où $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\sigma}\, a^2$

$$\mathrm{A_G} = \int_{(S)} {y_1}^2\, \boldsymbol{dm} = \boldsymbol{\sigma} \iint {y_1}^2\, \boldsymbol{d}x_1\, \boldsymbol{d}y_1 = \boldsymbol{\sigma} \int_{-\mathbf{a}/2}^{\mathbf{a}/2} \boldsymbol{d}x_1 \int_{-\mathbf{a}/2}^{\mathbf{a}/2} {y_1}^2\, \boldsymbol{d}y_1 = \frac{\boldsymbol{m}\, a^2}{\mathbf{12}}$$

$$II_{\,G}(C) = \frac{\boldsymbol{m}\, a^2}{\mathbf{12}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k}_1)}$$

Matrice d'inertie au point G du système (S)

$$(\boldsymbol{S}) = (\boldsymbol{C}) \cup \{\boldsymbol{O}(\boldsymbol{m_1}/\mathbf{2})\} \cup \{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{m_2}/\mathbf{2})\} \cup \{\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{m_1}/\mathbf{2})\} \cup \{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{m_2}/\mathbf{2})\}$$

$$II_{\,G}(S) = II_{\,G}(C) + II_{\,G}\left(O, \frac{\mathbf{m_1}}{\mathbf{2}}\right) + II_{\,G}\left(Q, \frac{\mathbf{m_1}}{\mathbf{2}}\right) + II_{\,G}\left(P, \frac{\mathbf{m_2}}{\mathbf{2}}\right) + II_{\,G}\left(R, \frac{\mathbf{m_2}}{\mathbf{2}}\right)$$

$\overrightarrow{\boldsymbol{GO}} = -\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}(\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1),$ $\quad II_{\,G}\left(O, \frac{\mathbf{m_1}}{2}\right) = \frac{\mathbf{m_1} a^2}{\mathbf{8}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{GP}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}(\vec{\imath}_1 - \vec{\jmath}_1),$ $\quad II_{\,G}\left(P, \frac{\mathbf{m_2}}{2}\right) = \frac{\mathbf{m_2} a^2}{\mathbf{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{GQ}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}(\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1),$ $\quad II_{\,G}\left(Q, \frac{\mathbf{m_1}}{2}\right) = \frac{\mathbf{m_1} a^2}{\mathbf{8}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{GR}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}(-\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1),$ $\quad II_{\,G}\left(R, \frac{\mathbf{m_2}}{2}\right) = \frac{\mathbf{m_2} a^2}{\mathbf{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$

Finalement, on a :

$$II_{\,G}(S) = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{\mathbf{4}}\left(\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2} + \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{3}}\right) & -\frac{a^2}{\mathbf{4}}(\mathbf{m_1} - \mathbf{m_2}) & 0 \\ -\frac{a^2}{\mathbf{4}}(\mathbf{m_1} - \mathbf{m_2}) & \frac{a^2}{\mathbf{4}}\left(\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2} + \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{3}}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2} + \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{3}}\right) \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$$

Ou encore :

$$II_G(S) = \begin{bmatrix} I_G & -J_G & 0 \\ -J_G & I_G & 0 \\ 0 & 0 & 2I_G \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$$

$$I_G = \frac{a^2}{4}\left(\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2} + \frac{\mathbf{m}}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad J_G = \frac{a^2}{4}(\mathbf{m_1} - \mathbf{m_2})$$

2. *Matrice d'inertie au point O du système (S)*

G est le centre d'inertie du carré (C). De plus :

$$\frac{\mathbf{m_1}}{\mathbf{2}}\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GQ}\right) + \frac{\mathbf{m_2}}{\mathbf{2}}\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GQ}\right) = \vec{\mathbf{0}}$$

Donc G est le centre d'inertie de (S).

Théorème de Huygens généralisé (des axes parallèles)

$$II_O(S) = II_G(S) + II_O(G, \mathbf{m_1} + \mathbf{m_2} + \mathbf{m})$$

$$II_O(S) = \begin{bmatrix} I & -J & 0 \\ -J & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$$

$$\boldsymbol{I} = \frac{a^2}{4}\left(2\mathbf{m_1} + 2\mathbf{m_2} + \frac{4\mathbf{m}}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{J} = \frac{a^2}{4}(2\mathbf{m_1} + \mathbf{m})$$

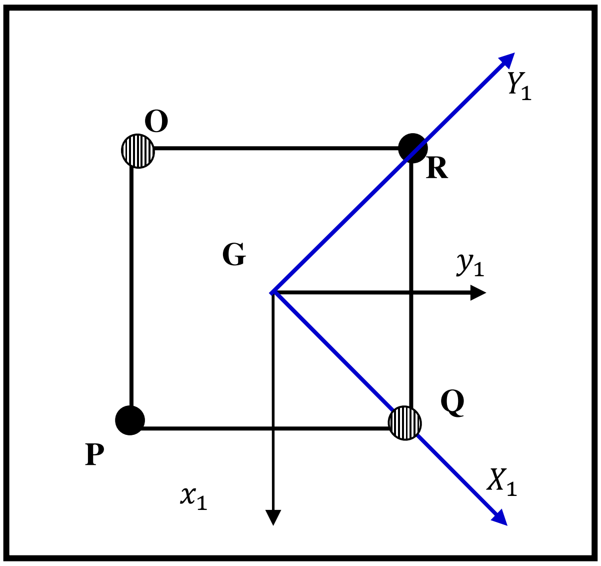
3. *Repère principal d'inertie*

Si $\mathbf{m_1} \neq \mathbf{m_2}$ alors $\boldsymbol{J_G} \neq \mathbf{0}$ **:** $II_G(S)$ n'est pas diagonale. Donc le repère $(\boldsymbol{\mathcal{R}_1})$ n'est pas un repère principal d'inertie.

$E_G = D_G = 0$ alors $(G\mathbf{z_1})$ est un axe principal d'inertie

4. *Repère principal d'inertie*

Soit $\boldsymbol{\mathcal{R}_p}(\boldsymbol{G}\mathbf{X_1Y_1Z_1})$ un repère tel que : $(\boldsymbol{G}\mathbf{X_1})$ soit confondu avec (GQ) *et* $(\boldsymbol{G}\mathbf{Y_1})$ soit confondu avec (GR). Soit $(\vec{\mathbf{I}}_1, \vec{\mathbf{J}}_1, \vec{\mathbf{K}}_1)$ la base orthonormée directe associée à $(\boldsymbol{\mathcal{R}_p})$ telle que :



$$\vec{\mathbf{I}}_1 = \frac{\overrightarrow{GQ}}{\|\overrightarrow{GQ}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1)$$

$$\vec{\mathbf{J}}_1 = \frac{\overrightarrow{GR}}{\|\overrightarrow{GR}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1)$$

$$\vec{\mathbf{K}}_1 = \vec{\mathbf{k}}_1$$

$(\boldsymbol{G}\mathbf{X_1})\boldsymbol{et}\ (\boldsymbol{G}\mathbf{Y_1})$ *sont deux axes de symétrie matérielle,* donc $\boldsymbol{\mathcal{R}_p}(\boldsymbol{G}\mathbf{X_1Y_1Z_1})$ est un repère principal d'inertie de base principale $(\vec{\mathbf{I}}_1, \vec{\mathbf{J}}_1, \vec{\mathbf{K}}_1)$ et la matrice principale d'inertie est de la forme :

$$\boldsymbol{II^*_G(S)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A^*_G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B^*_G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C^*_G} \end{bmatrix}_{(\vec{\mathbf{I}}_1,\vec{\mathbf{J}}_1,\vec{\mathbf{K}}_1)}$$

5. *Moment d'inertie du système (S), par rapport à l'axe* $\Delta_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{G}, \vec{\boldsymbol{u}})$ avec $\vec{\boldsymbol{u}}$ (0, 0, a) vecteur de $(\boldsymbol{\mathcal{R}_1})$.

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\vec{\mathbf{u}}}{\|\vec{\mathbf{u}}\|} = \vec{k}$$

$$\mathbf{I_{\Delta_G}} = {}^{\mathbf{t}}\hat{\mathbf{u}}\,.\,\mathbf{II_G(S)}.\,\hat{\mathbf{u}} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1}].\begin{bmatrix} I_G & -J_G & 0 \\ -J_G & I_G & 0 \\ 0 & 0 & 2I_G \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = 2I_G$$

Théorème de Huygens $\boldsymbol{I_\Delta} = \boldsymbol{I_{\Delta_G}} + (\boldsymbol{m} + \mathbf{m_1} + \mathbf{m_2})\boldsymbol{d^2}$

La distance entre les deux axes est : $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{G}, \Delta) = \frac{\boldsymbol{a}\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$

Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Δest :

$$\mathbf{I_\Delta} = \mathbf{2}\boldsymbol{I_G} + (\boldsymbol{m} + \mathbf{m_1} + \mathbf{m_2})\frac{\boldsymbol{a^2}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2}\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{a^2}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{2m_1} + \mathbf{2m_2} + \frac{\mathbf{4m}}{\mathbf{3}}\right)$$

Partie II

1. *Torseurs au point G*

a. *Torseur cinématique* : $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}\ (\mathrm{S}/\mathcal{R}) \\ \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \vec{v}(O \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}\ (\mathrm{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OG} = \vec{0} + \omega\,\vec{\mathrm{k}} \wedge \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}(\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathrm{a}\omega\ (-\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1)$$

$$[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} \omega\,\vec{\mathrm{k}} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathrm{a}\omega\ (-\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1) \end{Bmatrix}$$

b. *Torseur cinétique* : $[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\mathbf{G}}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = (\boldsymbol{m} + \mathbf{m_1} + \mathbf{m_2})\,\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) \\ \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{G}}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{II_G}(\boldsymbol{S}).\vec{\Omega}\ (\mathrm{S}/\mathcal{R}) = 2I_G\ \omega\,\vec{\mathrm{k}} = \boldsymbol{I_{\Delta_G}}\ \omega\,\vec{\mathrm{k}}$$

$$[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\mathbf{G}}\begin{Bmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathrm{a}\omega\ (\boldsymbol{m} + \mathbf{m_1} + \mathbf{m_2})(-\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1) \\ \boldsymbol{I_{\Delta_G}}\ \omega\,\vec{\mathrm{k}} \end{Bmatrix}$$

c. *Torseur dynamique* : $[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})] = {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} (\boldsymbol{m} + \mathbf{m_1} + \mathbf{m_2})\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}(G/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathbf{2}}\left(-\left(\omega^2 + \frac{d\omega}{dt}\right)\vec{\imath}_1 + \left(-\omega^2 + \frac{d\omega}{dt}\right)\vec{\jmath}_1\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{G}}(\mathbf{S}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{\Delta_G}}\ \frac{d\omega}{dt}\,\vec{\mathrm{k}}$$

$$[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})] = {}_{\mathbf{G}}\begin{Bmatrix} \dfrac{\mathrm{a}(\boldsymbol{m} + \mathbf{m_1} + \mathbf{m_2})}{\mathbf{2}}\left(-\left(\omega^2 + \dfrac{d\omega}{dt}\right)\vec{\imath}_1 + \left(-\omega^2 + \dfrac{d\omega}{dt}\right)\vec{\jmath}_1\right) \\ \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{\Delta_G}}\ \dfrac{d\omega}{dt}\,\vec{\mathrm{k}} \end{Bmatrix}$$

2. ***Energie cinétique***

$$\boldsymbol{E_c}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}}.\ [\boldsymbol{C}(\mathbf{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} \omega\,\vec{\mathrm{k}} \\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathrm{a}\omega\,(-\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1) \end{Bmatrix}\ {}_{\mathbf{G}}\begin{Bmatrix} \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathrm{a}\omega\,(\boldsymbol{m} + \mathbf{m_1} + \mathbf{m_2})(-\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1) \\ \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{\Delta_G}}\,\omega\,\vec{\mathrm{k}} \end{Bmatrix}$$

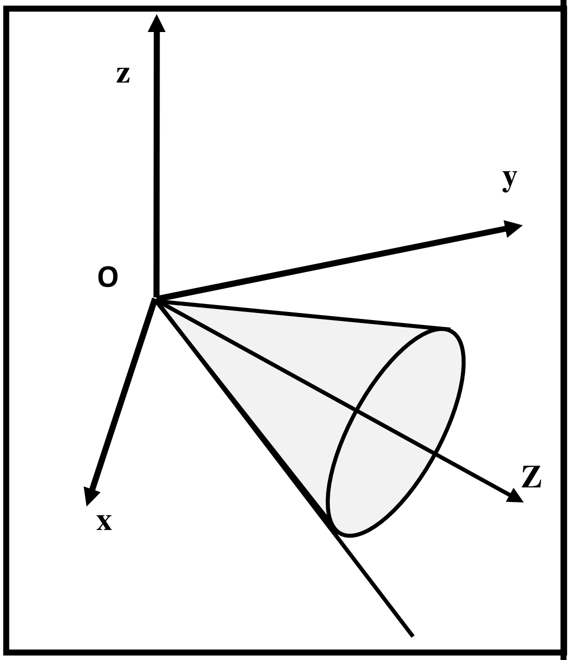
$$\boldsymbol{E_c}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{I_\Delta}\omega^2$$

3. ***Puissance***

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \frac{\mathrm{dE_c}\,(S/\mathcal{R})}{\mathrm{dt}} = \mathbf{I_\Delta}\,\omega\frac{d\omega}{dt}$$

Exercice 4

Soit $\mathcal{R}(\mathrm{O}; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$ un repère orthonormé direct fixe. On considère un cône (C) plein homogène de sommet O, de centre d'inertie G, de hauteur H, de rayon R, de masse $\boldsymbol{M}$ et de demi-angle au sommet $\boldsymbol{\alpha}$, en mouvement de rotation sans glissement sur le plan P(Oxy). Soit $\mathcal{R}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{OXYZ})$ un repère orthonormé direct de base associée $(\vec{\boldsymbol{I}}, \vec{\boldsymbol{J}}, \vec{\boldsymbol{K}})$ lié à $(\boldsymbol{C})$ et d'axe de révolution (OZ).



1. Déterminer le centre d'inertie G du cône
2. Déterminer la matrice d'inertie en O du cône: $II_{\,O}(C)$
3. Déterminer, en choisissant une base appropriée :
   a. Le torseur cinématique au point O : $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{C}/\,\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}}$
   b. Le torseur cinétique au point O : $[\boldsymbol{\mathcal{C}}(\boldsymbol{C}/\,\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}}$
   c. Le torseur dynamique au point O : $[\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{C}/\,\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}}$
4. Calculer le moment d'inertie $\boldsymbol{I}_\Delta$ par rapport à l'axe $\Delta(\mathrm{O},\vec{\boldsymbol{k}})$.
   En déduire le moment d'inertie $\boldsymbol{I}_{\Delta_{\boldsymbol{G}}}$, du cône par rapport à l'axe $\Delta_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{G},\vec{\boldsymbol{k}})$.
5. Déterminer l'énergie cinétique $\boldsymbol{E_c}(\boldsymbol{C}/\,\mathcal{R})$.
6. Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Koenig.

Solution

1. *Centre d'inertie G du cône*

Le Cône (C) de masse M et de volume V est homogène donc sa masse volumique est constante : $\boldsymbol{\rho = Cste}$ et $\boldsymbol{M = \rho V}$

Soit : $\overrightarrow{OG} = X_G \vec{I} + Y_G \vec{J} + Z_G \vec{K}$

(OZ) est un axe de symétrie révolution du cône (C) donc le centre de masse G ∈ (OZ)

Par conséquent : $X_G = 0$, $Y_G = 0$

$$Z_G = \frac{1}{M}\iiint_V \rho\, Z\, dV = \frac{1}{V}\iiint_V Z\, dV$$

Coordonnées cylindriques : (r, θ, Z):

$$\begin{cases} X = r\cos\theta \\ Y = r\sin\theta \\ Z \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le Z \le H \\ 0 \le r \le r(Z) \le R \end{cases}$$

Volume élémentaire : $dV = r dr d\theta dZ$

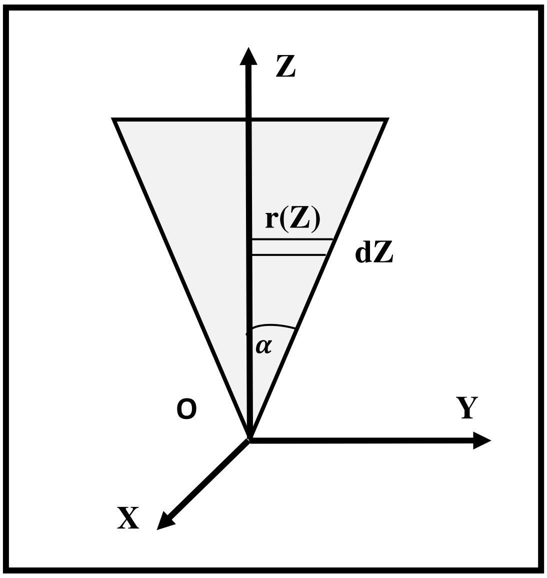
Donc : $V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dZ \int_0^{r(Z)} r dr$

or: $tg\alpha = \frac{R}{H} = \frac{r(Z)}{Z}$

$$V = 2\pi \int_0^H \frac{r^2(Z)}{2} dZ = \pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 \int_0^H Z^2 dZ = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

$$Z_G = \frac{3}{\pi R^2 H}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H Z dZ \int_0^{r(Z)} r(Z) dr$$

$$= \left(\frac{3}{\pi R^2 H}\right)(2\pi)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{R}{H}\right)^2 \int_0^H Z^3 dZ = \frac{3H}{4}$$



$$\overrightarrow{OG} = \frac{3H}{4}\vec{K}$$

2. *Matrice d'inertie en O du cône*

(OZ) est un axe de symétrie de révolution matérielle du cône, par conséquent, le repère $\mathcal{R}_C(OXYZ)$ lié au cône et de base associée $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est un repère repère principal d'inertie. La matrice d'inertie $II_O(C)$ est diagonale:

$$II_O(C) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\forall\, la\, base\, (-,-,\ \vec{K})}$$

avec

$$\mathrm{A} = \int_{(C)} (Y^2 + Z^2) dm \quad , \quad \mathrm{C} = \int_{(C)} (X^2 + Y^2) dm \quad \text{et} \quad A = \frac{C}{2} + \int_{(C)} Z^2 dm$$

$$C = \rho \iiint (X^2 + Y^2)\mathrm{dXdYdZ} = \frac{M}{V}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dZ \int_0^{r(Z)} r^3(Z) dr = \left(\frac{3M}{\pi R^2 H}\right)(2\pi)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{R}{H}\right)^4 \int_0^H Z^4 dZ$$

$$C = \frac{3}{10} M R^2$$

$$\int_{(C)} Z^2 dm = \frac{M}{V}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H Z^2 dZ \int_0^{r(Z)} r(Z)dr = \left(\frac{3M}{\pi R^2 H}\right)(2\pi)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{R}{H}\right)^2 \int_0^H Z^4 dZ = \frac{3}{5}MH^2$$

$$A = \frac{3}{20}MR^2 + \frac{3}{5}MH^2$$

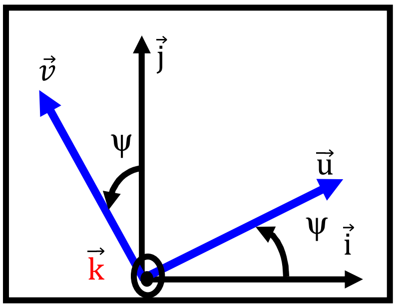
La matrice d'inertie en O du cône est :

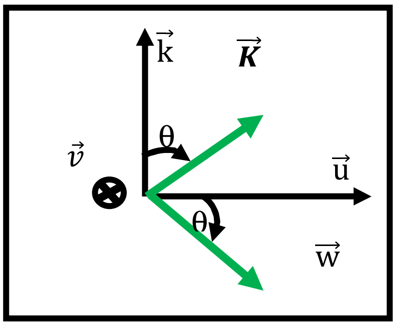
$$II_O(C) = \begin{bmatrix} \frac{3}{20}MR^2 + \frac{3}{5}MH^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}MR^2 + \frac{3}{5}MH^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}MR^2 \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{K})}$$

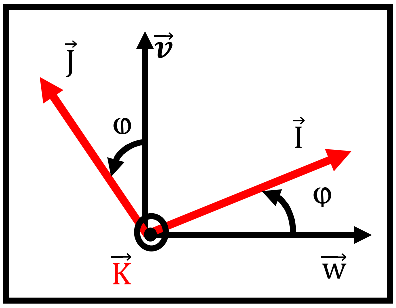
3. Torseurs

a. *Torseur cinématique* : $[\mathcal{V}(C/\mathcal{R})]_O = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}\ (C/\mathcal{R}) \\ \vec{v}(O\ \in\ C/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

$$(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}) \xrightarrow{Rot(\vec{k},\psi)} (\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{k}) \xrightarrow{Rot(\vec{v},\theta)} (\vec{w},\ \vec{v},\ \vec{K}) \xrightarrow{Rot(\vec{K},\varphi)} (\vec{I},\ \vec{J},\ \vec{K})$$







Le vecteur rotation instantané s'écrit :

$$\vec{\Omega}\ (C/\mathcal{R}) = \dot{\psi}\,\vec{k} + \dot{\theta}\,\vec{v} + \dot{\varphi}\,\vec{K}$$

Le cône possède un contact linéique avec le plan (Oxy), donc : $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha = Const.$ Par conséquent $\dot{\theta} = 0.$

Le vecteur rotation instantané devient :

$$\vec{\Omega}\ (C/\mathcal{R}) = \dot{\psi}\,\vec{k} + \dot{\varphi}\,\vec{K}$$

Vitesse de glissement : $\vec{v}_g(\mathrm{B};\ C/P) = \vec{v}(B\ \in\ C/P) = \vec{v}(B\ \in\ C/\mathcal{R}) - \vec{v}(B\ \in\ P/\mathcal{R})$

$\vec{v}(B\ \in\ P/\mathcal{R}) = \vec{0}$

$\vec{v}(B\ \in\ C/\mathcal{R}) = \vec{v}(O\ \in\ C/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}\ (C/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OB}$

Roulement sans glissement aux points B et O : $\vec{v}(B\ \in\ C/\mathcal{R}) = \vec{0}$ *et* $\vec{v}(O\ \in\ C/\mathcal{R}) = \vec{0}$

Comme :

$\vec{\Omega}\ (C/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OB} = \left(\dot{\psi}\vec{k} + \dot{\varphi}\vec{K}\right) \wedge OB\vec{u}$

On obtient donc : $\dot{\psi} + \dot{\varphi}\ \sin\alpha = 0$ C'est la condition de non-glissement.

$\vec{\Omega}\ (C/\mathcal{R}) = \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\varphi}\left(\cos\alpha\,\vec{u} + \sin\alpha\,\vec{k}\right) = \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\ \sin\alpha\right)\vec{k} + \dot{\varphi}\cos\alpha\,\vec{u}$

Finalement le vecteur rotation instantané s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\vec{\Omega}\ (C/\mathcal{R}) = -\dot{\psi}\,cotg\,\alpha\,\vec{u}}$$

<u>*Torseur cinématique*</u> : $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{O}\begin{Bmatrix} -\dot{\psi}\,cotg\,\alpha\,\vec{u} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

b. <u>***Torseur cinétique***</u> : $[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{M}\,\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) \\ \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

<u>*Résultante cinétique*</u> : $\vec{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R})$

$\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \boldsymbol{Z_G}\,\vec{\mathbf{K}}$

$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{Z_G}\left(\frac{d\vec{K}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{Z_G}\left(\left(\frac{d\vec{K}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_C} + \vec{\Omega}\ (C/\mathcal{R}) \wedge \vec{K}\right) = \boldsymbol{Z_G}\left(\vec{\mathbf{0}} + \dot{\psi}\cos\alpha\ \vec{v}\right)$

$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \left(\frac{\boldsymbol{3H}}{\boldsymbol{4}}\right)\dot{\psi}\cos\alpha\ \vec{v}$

$$\vec{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}) = \left(\frac{\boldsymbol{3MH}}{\boldsymbol{4}}\right)\dot{\psi}\cos\alpha\ \vec{v}$$

<u>*Moment cinétique au point $O \in (C)$*</u> : $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{II_O}(\boldsymbol{C}).\vec{\Omega}\ (C/\mathcal{R}) + \boldsymbol{M}\vec{v}(\boldsymbol{O} \in C/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{GO}}$

O est un point de (C) fixe dans ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$) : $\vec{v}(O \in C/\mathcal{R}) = \vec{v}(O/\mathcal{R}) - \vec{v}(O/C) = \vec{0}$

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{II_O}(\boldsymbol{C}).\vec{\Omega}\ (C/\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -\dot{\psi}\cos\alpha \\ \boldsymbol{0} \\ -\dot{\psi}\,cotg\,\alpha\cos\alpha \end{bmatrix} = -\dot{\psi}\cos\alpha\left(A\,\vec{w} + C\,cotg\,\alpha\,\vec{K}\right)$$

$$[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \left(\frac{\boldsymbol{3MH}}{\boldsymbol{4}}\right)\dot{\psi}\cos\alpha\ \vec{v} \\ -\dot{\psi}\cos\alpha\left(A\,\vec{w} + C\,cotg\,\alpha\,\vec{K}\right) \end{Bmatrix}$$

c. <u>*Torseur dynamique au point O*</u> : $[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{M}\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

<u>*Résultante dynamique*</u> : $\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{M}\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R})$

$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}(G/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\boldsymbol{3H}}{\boldsymbol{4}}\right)\left(\ddot{\psi}\ \vec{v} + \dot{\psi}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}\right)\cos\alpha$

$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}\ (\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{v} = \dot{\psi}\ \ \vec{k} \wedge \vec{v} = -\dot{\psi}\,\vec{u}$

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) = \left(\frac{\boldsymbol{3H}}{\boldsymbol{4}}\cos\alpha\right)\left(-\dot{\psi}^2\,\vec{u} + \ddot{\psi}\ \vec{v}\right)$$

Moment dynamique au point O : $\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{O}/\mathcal{R}) \wedge \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R})$

O est fixe dans $(\mathcal{R})$: $\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{O}/\mathcal{R}) = \vec{\mathbf{0}}$

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -\mathrm{A}\ddot{\psi}\cos\alpha\,\vec{\mathrm{w}} - \left((\mathrm{A} + \mathrm{C}\,cotg^2\,\alpha)\,\dot{\psi}^2\cos\alpha\sin\alpha\,\vec{v}\right) - C\ddot{\psi}cotg\,\alpha\cos\alpha\,\vec{\mathrm{K}}$$

Torseur dynamique au point O :

$$[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}} = \left\{\begin{matrix} \left(\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{MH}}{\mathbf{4}}\cos\alpha\right)\left(-\dot{\psi}^2\,\vec{\mathrm{u}} + \ddot{\psi}\,\vec{\mathrm{v}}\right) \\ -\mathrm{A}\ddot{\psi}\cos\alpha\,\vec{\mathrm{w}} - (\mathrm{A} + \mathrm{C}\,cotg^2\,\alpha)\,\dot{\psi}^2\cos\alpha\sin\alpha\,\vec{v} - C\ddot{\psi}cotg\,\alpha\cos\alpha\,\vec{\mathrm{K}} \end{matrix}\right\}_{\boldsymbol{O}}$$

4. *Moment d'inertie du cône par rapport à l'axe* $\Delta(\mathrm{O},\vec{\boldsymbol{k}})$ **:** $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\Delta}} = {}^{t}\vec{\mathbf{k}}.\mathbf{II}_{\mathbf{O}}(\mathbf{C}).\vec{\mathbf{k}}$

$\vec{\mathbf{k}} = -\cos\alpha\,\vec{\mathrm{w}} + \sin\alpha\,\vec{\mathrm{K}}$

$$\mathbf{I}_{\boldsymbol{\Delta}} = {}^{t}\vec{\mathbf{k}}.\mathbf{II}_{\mathbf{O}}(\mathbf{C}).\vec{\mathbf{k}} = [-\cos\alpha \quad \mathbf{0} \quad \sin\alpha].\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -\cos\alpha \\ \mathbf{0} \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{\boldsymbol{\Delta}} = \boldsymbol{A}\,(\cos\alpha)^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{C}\,(\sin\alpha)^{\mathbf{2}}$$

Moment d'inertie du cône par rapport à l'axe $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{G}}$

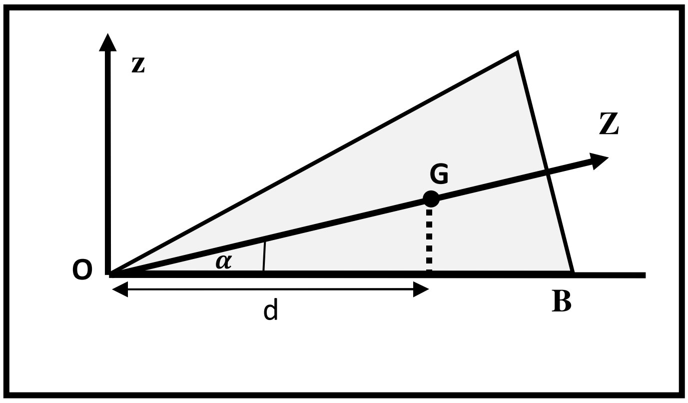
Théorème de Huygens $\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{\Delta}} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{G}}} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{d}^{\mathbf{2}}$

La distance entre les deux axes est :

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{G}}, \Delta) = \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{H}}{\mathbf{4}}\cos\alpha$$

$$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{G}}} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{\Delta}} - \boldsymbol{M}\left(\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{H}}{\mathbf{4}}\cos\alpha\right)^{\mathbf{2}}$$

$$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{G}}} = \left(\mathbf{A} - \boldsymbol{M}\left(\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{H}}{\mathbf{4}}\right)^{\mathbf{2}}\right)\cos\alpha^{\mathbf{2}} + \mathbf{C}\,\mathbf{sin}\,\alpha^{\mathbf{2}}$$



5. *Energie cinétique* :

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathrm{C}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}}.\,[\boldsymbol{C}(\mathrm{C}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}).\vec{\Omega}\,(C/\mathcal{R}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathrm{A} + \mathrm{C}\,cotg^2\,\alpha)\,\dot{\psi}^2\cos^2\alpha$$

Théorème de Koenig : $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}_G) + \frac{1}{2}\boldsymbol{M}\left(\vec{\mathrm{v}}(\mathrm{G}/\mathcal{R})\right)^2$

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}_G) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,{}^{t}\vec{\Omega}\,(C/\mathcal{R}).\boldsymbol{II}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{C}).\vec{\Omega}\,(C/\mathcal{R})$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[-\dot{\psi}\cos\alpha \quad 0 \quad -\dot{\psi}\,cotg\,\alpha\cos\alpha]\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{G}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{G}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{G}} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -\dot{\psi}\cos\alpha \\ \mathbf{0} \\ -\dot{\psi}\,cotg\,\alpha\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}_G) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{G}} + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{G}}\,cotg^2\,\alpha)\,\dot{\psi}^2\cos^2\alpha$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{M}\left(\vec{\mathrm{v}}(\mathrm{G}/\mathcal{R})\right)^2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{M}\left(\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{H}}{\mathbf{4}}\right)^{\mathbf{2}}\dot{\psi}^2\cos^2\alpha$$

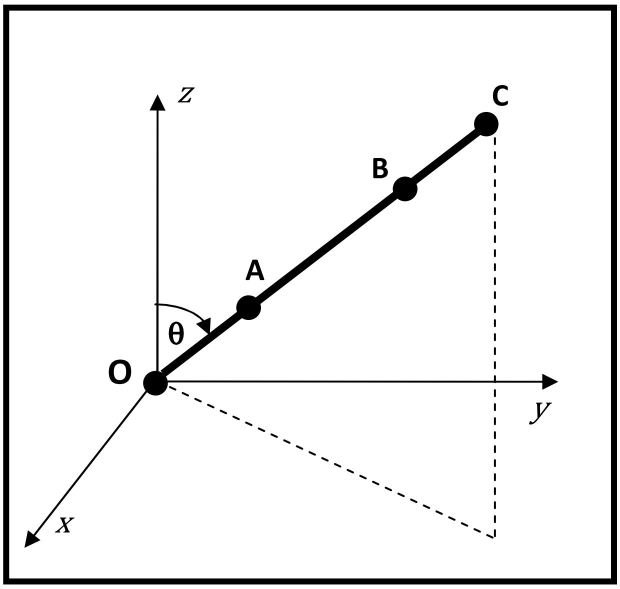
$$\boldsymbol{E_c}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathrm{A} + \mathrm{C}\, cotg^2\, \alpha)\, \dot{\psi}^2\, cos^2\, \alpha$$

$\mathrm{A} = \boldsymbol{A_G} + \boldsymbol{M}\left(\frac{\boldsymbol{3H}}{\boldsymbol{4}}\right)^{\mathbf{2}}$ *et* $\mathrm{C} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{G}}$

Exercice 5

On considère une tige rectiligne (T) homogène de longueur **4L**, de masse **4m**, dont une extrémité est en contact ponctuel fixe avec un bâti au point O, origine du repère fixe $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ (Oxyz) de base associée $(\vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$. On soude quatre masselottes identiques de masse **m** chacune à la tige (T). Le système (S), ainsi formé, a pour centre d'inertie G et est repéré par les deux angles d'Euler $\boldsymbol{\psi}$ et $\boldsymbol{\theta}$. Les quatre masselottes sont disposées, respectivement, en O, A, B et C tels que :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OC}} = \mathbf{4}\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = {}^{\mathbf{4}}/_{\mathbf{3}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = \mathbf{4}\boldsymbol{L}\,\overrightarrow{\boldsymbol{K}}\,.$$



N.B. Tous les résultats vectoriels doivent être exprimés dans la base $(\vec{w}, \vec{\boldsymbol{v}}, \overrightarrow{\boldsymbol{K}})$ associée au référentiel lié au système (S).

1) Déterminer le torseur cinématique de (S) en O par rapport à ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$). En déduire sa nature et déterminer le moment central.
2) Déterminer, par un calcul détaillé, la matrice d'inertie du système (S) en O et montrer qu'elle s'écrit sous la forme:

$$\boldsymbol{II_O}(\boldsymbol{S}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{K})}$$ avec $\boldsymbol{J}$ moment d'inertie à exprimer en fonction de **m** et **L**

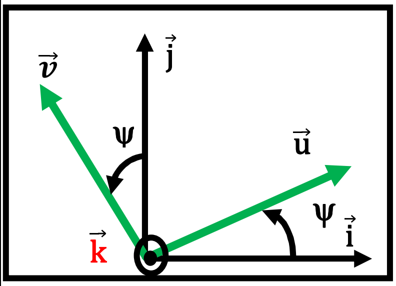
N.B. Dans la suite tous les résultats doivent être exprimés en fonction de J.

3) Déterminer la matrice d'inertie en G du système (S) : $\boldsymbol{II_G}(\boldsymbol{S})$
4) Calculer le moment d'inertie, $\boldsymbol{I_\Delta}$ par rapport à l'axe Δ (O, $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$) avec $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$ (L, 2L, 3L) vecteur de ($\boldsymbol{\mathcal{R}_S}$).
5) Déterminer le torseur cinétique en O et en C du système (S) par rapport à ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$)
6) Déterminer le torseur dynamique en O et en C du système (S) par rapport à ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$)
7) Déterminer l'énergie cinétique du système (S) par rapport à ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$) de deux manières différentes.

Solution

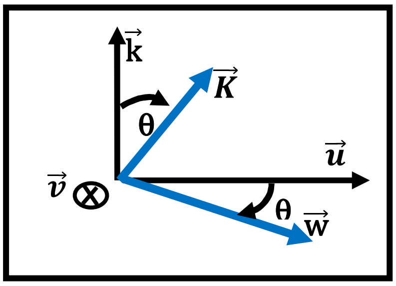
1. ***Torseur cinématique*** : $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{\mathbf{O}}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}\,(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \\ \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{O} \in \boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \end{Bmatrix}$

$\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{O} \in \boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{O}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) - \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{O}/\boldsymbol{S}) = \vec{\mathbf{0}}$



Précession: $\mathcal{R}\,(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{Rot(\vec{k},\psi)} \mathcal{R}_1\,(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$

donc $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\psi}\,\vec{k}$



Nutation

$\mathcal{R}_1\,(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}) \xrightarrow{Rot(\vec{v},\theta)} \mathcal{R}_S\,(O; \vec{w}, \vec{v}, \vec{K})$

$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_1) = \dot{\theta}\,\vec{v}$

$\mathcal{R}_S\,(O; \vec{w}, \vec{v}, \vec{K})$ étant le référentiel lié au système (S).

Vecteur rotation instantané:

$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\psi}\,\vec{k} + \dot{\theta}\,\vec{v}$$

Torseur cinématique:

$$[\mathcal{V}(S/\mathcal{R})]_O = {}_O\begin{Bmatrix} \dot{\psi}\,\vec{k} + \dot{\theta}\,\vec{v} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Invariant scalaire :

$I_{[\mathcal{V}]} = \vec{v}(O \in S/\mathcal{R}).\,\vec{\Omega}\,(S/\mathcal{R}) = 0$ et $\vec{\Omega}\,(S/\mathcal{R}) \neq \vec{0}$

Le torseur cinématique est un glisseur, par conséquent le moment central est nul.

2. Matrice d'inertie du système (S) en O

$(S) = (T) \cup \{O(m)\} \cup \{A(m)\} \cup \{B(m)\} \cup \{C(m)\}$

Donc le matrice d'inertie est :

$$II_O(S) = II_O(T) + II_O(O,\mathbf{m}) + II_O(A,\mathbf{m}) + II_O(B,\mathbf{m}) + II_O(C,\mathbf{m})$$

La masse totale du système est : $m_{(S)} = 8m$

Matrice d'inertie en O de la tige (T) de masse 4m

$$II_O(T) = \frac{\mathbf{4m}(4L)^2}{\mathbf{3}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{K})} = \frac{\mathbf{64m}L^2}{\mathbf{3}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{K})}$$

Matrices d'inerties en O des masselottes :

$\overrightarrow{OA} = L\,\vec{K}$ $\qquad II_O(A,m) = \mathbf{m}L^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{K})}$

$\overrightarrow{OB} = 3L\,\vec{K}$ $\qquad II_O(B,m) = 9\mathbf{m}L^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{K})}$

$\overrightarrow{OC} = 4L\,\vec{K}$ $\qquad II_O(C,m) = 16\mathbf{m}L^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{K})}$

Matrice d'inertie du système (S) en O

$$II_{O}(S) = \frac{\mathbf{142m}L^2}{\mathbf{3}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{(-,-,\vec{K})} = \begin{bmatrix}J & 0 & 0\\ 0 & J & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{(-,-,\vec{K})} \quad \text{avec} \quad J = \frac{\mathbf{142}}{\mathbf{3}}\mathbf{m}L^{\mathbf{2}}$$

3. *Matrice d'inertie en G du système (S)*

G est le centre d'inertie de la tige. De plus G est également centre d'inertie des quatre masselottes en effet : $\mathbf{m}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{GO}} + \overrightarrow{\boldsymbol{GA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{GB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{GC}}\right) = \vec{\mathbf{0}}$

Par conséquent, G est également centre d'inertie de (S). On peut appliquer le théorème de Huygens.

Théorème de Huygens Généralisé :

$$II_{O}(S) = II_{G}(S) + II_{O}(G, \mathbf{8m})$$

$$II_{G}(S) = II_{O}(S) - II_{O}(G, \mathbf{8m})$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \mathbf{2}\boldsymbol{L}\,\vec{K} \qquad II_{O}(G, 8m) = 32\mathbf{m}L^{\mathbf{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{(-,-,\vec{K})}$$

$$II_{G}(S) = \begin{bmatrix}J - 32\mathbf{m}L^{\mathbf{2}} & 0 & 0\\ 0 & J - 32\mathbf{m}L^{\mathbf{2}} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{(-,-,\vec{K})} = (J - 32\mathbf{m}L^{\mathbf{2}})\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{(-,-,\vec{K})}$$

4. *Moment d'inertie* du $\mathbf{I}_{\Delta}$ par rapport à l'axe Δ (O,$\vec{\mathbf{N}}$):

$\vec{N} = \mathbf{L}(\vec{w} + 2\vec{v} + 3\vec{K})$ et

Vecteur unitaire de $\vec{N}$: $\hat{\mathbf{N}} = \frac{\vec{\mathbf{N}}}{\|\vec{\mathbf{N}}\|} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{14}}}(\vec{w} + 2\vec{v} + 3\vec{K})$

$$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{\Delta}} = {}^{\mathbf{t}}\hat{\mathbf{N}}\,.\,\mathbf{II_O(S)}.\,\hat{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{14}}[\mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{3}].\begin{bmatrix}J & 0 & 0\\ 0 & J & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{3}\end{bmatrix} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{14}}\mathbf{J}$$

5. *Torseur cinétique au point O* : $[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{\mathbf{O}}\left\{\begin{matrix}\vec{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \mathbf{8}\boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R})\\ \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\mathbf{S}/\mathcal{R})\end{matrix}\right\}$

Résultante cinétique : $\vec{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \mathbf{8}\boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R})$

$\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \mathbf{2}\boldsymbol{L}\,\vec{K}$

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \mathbf{2L}\left(\frac{d\vec{\mathbf{K}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \mathbf{2L}\left(\left(\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{K}}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathcal{R}_S} + \vec{\Omega}\ (\mathcal{R}_S/\mathcal{R}) \wedge \vec{\mathrm{K}}\right) = \mathbf{2L}\left(\vec{\mathbf{0}} + (\dot{\psi}\,\vec{k} + \dot{\theta}\,\vec{v}) \wedge \vec{\mathrm{K}}\right)$$

$\vec{k} \wedge \vec{\mathrm{K}} = \sin\theta\,\vec{v} \qquad \vec{v} \wedge \vec{\mathrm{K}} = \vec{w}$

$$\vec{v}(\mathrm{G}/\mathcal{R}) = 2\mathrm{L}(\dot{\theta}\,\vec{w} + \dot{\psi}\,\sin\theta\,\vec{v})$$

Moment cinétique au point O ∈ (S) : $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{II}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{C}).\vec{\Omega}\ (\mathrm{S}/\mathcal{R}) + \mathbf{8}\boldsymbol{m}\vec{v}(\boldsymbol{O} \in S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{GO}}$

O est un point de (S) fixe dans ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$) : $\vec{v}(\boldsymbol{O} \in S/\mathcal{R}) = \vec{0}$

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{II}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}).\vec{\Omega}\ (\mathrm{S}/\mathcal{R}) = \begin{bmatrix}J & 0 & 0\\ 0 & J & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-\dot{\psi}\,\sin\theta\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\cos\theta\end{bmatrix} = \mathrm{J}(-\dot{\psi}\,\sin\theta\,\vec{w} + \dot{\theta}\,\vec{v})$$

Torseur cinétique au point O :

$$[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{\mathbf{O}}\begin{Bmatrix} 16\text{mL}\left(\dot{\theta}\,\vec{w} + \dot{\psi}\,\sin\theta\,\vec{v}\right) \\ \text{J}\left(-\dot{\psi}\,\sin\theta\,\vec{w} + \dot{\theta}\,\vec{v}\right) \end{Bmatrix}$$

Torseur cinétique au point C :

$$[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{C}} = {}_{\mathbf{C}}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \mathbf{8}\boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) \\ \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{C}}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$$

Relation d'antisymétrie : $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{C}}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) = \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) + \mathbf{8}\boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\text{OC}}$

$\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\text{OC}} = 2\text{L}\left(\dot{\theta}\,\vec{w} + \dot{\psi}\,\sin\theta\,\vec{v}\right) \wedge 4\text{L}\vec{\text{K}} = \mathbf{8}L^{\mathbf{2}}\left(\dot{\psi}\,\sin\theta\,\vec{w} - \dot{\theta}\,\vec{v}\right)$

Donc le moment cinétique au point C est :

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{C}}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) = \left(J - 64\mathbf{m}L^{\mathbf{2}}\right)\left(-\dot{\psi}\,\sin\theta\,\vec{w} + \dot{\theta}\,\vec{v}\right)$$

Torseur cinétique au point C :

$$[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{C}} = {}_{\mathbf{C}}\begin{Bmatrix} 16\text{mL}\left(\dot{\theta}\,\vec{w} + \dot{\psi}\,\sin\theta\,\vec{v}\right) \\ \left(J - 64\mathbf{m}L^{\mathbf{2}}\right)\left(-\dot{\psi}\,\sin\theta\,\vec{w} + \dot{\theta}\,\vec{v}\right) \end{Bmatrix}$$

6. *Torseur dynamique au point O* :

$$[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{\boldsymbol{O}}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \mathbf{8}\boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$$

Résultante dynamique : $\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \mathbf{8}\boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R})$

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}(G/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(G/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}\ (\mathcal{R}_2/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(G/\mathcal{R})$$

$$= 2\text{L}\left(\left(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2\,\sin\theta\cos\theta\right)\vec{w} + \left(\ddot{\psi}\,\sin\theta + 2\dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\cos\theta\right)\vec{v} - \left(\dot{\theta}^{\,2} + \dot{\psi}^2\,\sin^2\theta\right)\vec{K}\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \mathbf{16}\boldsymbol{m}\text{L}\left(\left(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2\,\sin\theta\cos\theta\right)\vec{w} + \left(\ddot{\psi}\,\sin\theta + 2\dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\cos\theta\right)\vec{v} - \left(\dot{\theta}^{\,2} + \dot{\psi}^2\,\sin^2\theta\right)\vec{K}\right)$$

Moment dynamique au point O :

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{O}/\mathcal{R}) \wedge \mathbf{8}\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R})$$

O est fixe dans $(\mathcal{R})$: $\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{O}/\mathcal{R}) = \vec{\mathbf{0}}$

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\mathbf{S}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\mathbf{S}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}_S} + \vec{\Omega}\ (\mathcal{R}_S/\mathcal{R}) \wedge \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\mathbf{S}/\mathcal{R})$$

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \text{J}\left(-\left(\ddot{\psi}\,\sin\theta + 2\dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\cos\theta\right)\vec{w} + \left(\dot{\theta}^{\,2} + \dot{\psi}^2\,\cos\theta sin\theta\right)\vec{v}\right)$$

Torseur dynamique au point O

$$[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{\mathbf{O}}\begin{Bmatrix} 16\text{mL}\left(\left(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2\,\sin\theta\cos\theta\right)\vec{w} + \left(\ddot{\psi}\,\sin\theta + 2\dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\cos\theta\right)\vec{v} - \left(\dot{\theta}^{\,2} + \dot{\psi}^2\,\sin^2\theta\right)\vec{K}\right) \\ \text{J}\left(-\left(\ddot{\psi}\,\sin\theta + 2\dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\cos\theta\right)\vec{w} + \left(\dot{\theta}^{\,2} + \dot{\psi}^2\,\cos\theta sin\theta\right)\vec{v}\right) \end{Bmatrix}$$

Torseur dynamique au point C

$$[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{C}} = {}_{\boldsymbol{C}}\begin{Bmatrix} \mathbf{8}\boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$$

Moment dynamique au point C

$\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{C}}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) = \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{O}}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) + \mathbf{8}\boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\text{OC}}$

$$\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\mathrm{L}\left(\left(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \sin\theta\cos\theta\right)\vec{w} + \left(\ddot{\psi}\sin\theta + 2\dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{v} - \left(\dot{\theta}^{\,2} + \dot{\psi}^2\sin^2\theta\right)\vec{K}\right) \wedge 4\mathrm{L}\vec{\mathrm{K}}$$

$$= \mathbf{8}L^{\mathbf{2}}\left(\left(\ddot{\psi}\sin\theta + 2\dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{w} - \left(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{v}\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = (J - 64\mathbf{m}L^{\mathbf{2}})\left(\left(\ddot{\psi}\sin\theta + 2\dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{w} - \left(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{v}\right)$$

Torseur dynamique au point C

$$[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{C}} = \left\{\begin{array}{c} 16\mathrm{mL}\left(\left(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{w} + \left(\ddot{\psi}\sin\theta + 2\dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{v} - \left(\dot{\theta}^{\,2} + \dot{\psi}^2\sin^2\theta\right)\vec{K}\right) \\ (J - 64\mathbf{m}L^{\mathbf{2}})\left(\left(\ddot{\psi}\sin\theta + 2\dot{\psi}\,\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{w} - \left(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{v}\right) \end{array}\right\}_{\mathrm{C}}$$

7. *Energie cinétique* :

Méthode 1

$$\boldsymbol{E_c}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{O}}.\ [\boldsymbol{C}(\mathbf{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{O}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}).\vec{\Omega}\ (\mathbf{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \frac{\boldsymbol{J}}{\mathbf{2}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\,2} + \dot{\boldsymbol{\psi}}^{\mathbf{2}}\sin^{\mathbf{2}}\boldsymbol{\theta}\right)$$

Méthode 2 : Théorème de Koenig

$$\boldsymbol{E_c}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{E_c}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}_G) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{8}\boldsymbol{m})\left(\vec{v}(\mathrm{G}/\mathcal{R})\right)^2$$

$\boldsymbol{E_c}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}_G) =$

$$\frac{1}{2}\ {}^{t}\vec{\Omega}\ (S/\mathcal{R}).\boldsymbol{II_G}(\boldsymbol{S}).\vec{\Omega}\ (S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}(J - 32\mathbf{m}L^{\mathbf{2}})\left[-\dot{\psi}\sin\theta,\quad \dot{\theta}\quad \dot{\psi}\cos\theta\right]\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-\dot{\psi}\sin\theta\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E_c}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}_G) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(J - 32\mathbf{m}L^{\mathbf{2}})\left(\dot{\theta}^{\,2} + \dot{\psi}^2\sin^2\theta\right)$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{8}\boldsymbol{m})\left(\vec{\mathrm{v}}(\mathrm{G}/\mathcal{R})\right)^2 = 16mL^{\mathbf{2}}\left(\dot{\theta}^{\,2} + \dot{\psi}^2\sin^2\theta\right)$$

Finalement**:**

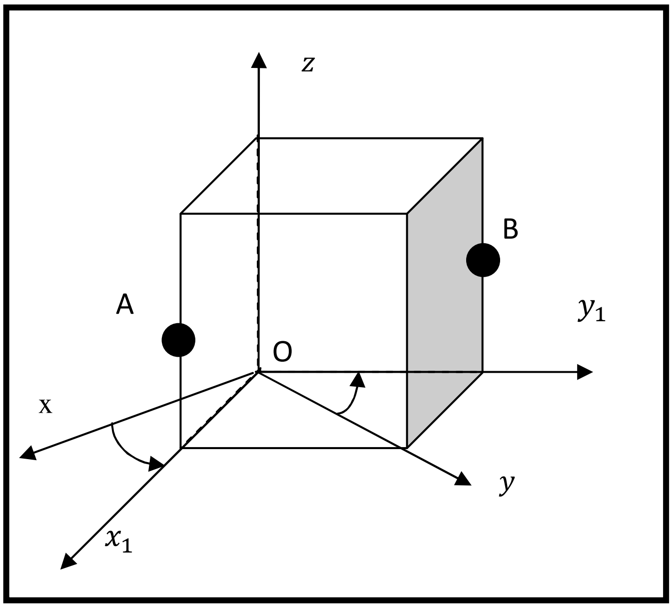
$$\boldsymbol{E_c}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \frac{\boldsymbol{J}}{\mathbf{2}}\left(\dot{\theta}^{\,2} + \dot{\psi}^2\sin^2\theta\right)$$

Exercice 6

On considère un cube (C), plein et homogène, de côté **2a**, de masse **m** et de centre d'inertie **G** en rotation avec la vitesse angulaire non constante **ω** autour de l'axe (Oz) du repère fixe $\boldsymbol{\mathcal{R}}(\boldsymbol{Oxyz})$ de base orthonormée directe $(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$. Soit $\boldsymbol{\mathcal{R}_1}(\boldsymbol{Gx_1y_1z})$ un référentiel lié au cube (C) de base $(\vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}}, \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{1}}, \vec{\mathbf{k}})$ où G désigne le centre de masse du cube. Aux milieux de deux arêtes parallèles à l'axe (Gz) et diamétralement opposées, on fixe deux masselottes identiques de masse $\boldsymbol{m/2}$ chacune aux points de coordonnées A(a,-a,0) et B(-a, a, 0) dans $(\boldsymbol{\mathcal{R}_1})$.

1. Déterminer la matrice d'inertie en G du cube, $II_{\ G}(C)$
2. Déterminer la matrice d'inertie en O du cube, $II_{\ O}(C)$
3. Déterminer les matrices d'inertie en G des deux masselottes, $II_{\ G}(A, m/2)$ et $II_{\ G}(B, m/2)$

4. En déduire les matrices d'inertie, $II_G(S)$ et $II_O(S)$ du système formé par le cube et les deux masselottes.
5. Le repère $(\boldsymbol{\mathcal{R}_1})$ est-il un repère principal d'inertie ? Admet-il un axe principal d'inertie ?
6. Trouver un repère principal d'inertie pour (S). Faites un schéma montrant la disposition des axes du repère principal d'inertie par rapport à ceux de $(\boldsymbol{\mathcal{R}_1})$
7. Diagonaliser la matrice et retrouver le repère principal d'inertie.
8. Déterminer la matrice principale d'inertie en G.
9. Calculer le moment d'inertie $I_{\Delta G}$ par rapport à l'axe $\Delta_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{G}, \vec{\boldsymbol{u}})$ avec $\vec{\boldsymbol{u}}$ (a, a, a) vecteur de $(\boldsymbol{\mathcal{R}_1})$. En déduire le moment d'inertie I_Δ par rapport à l'axe $\Delta(O, \vec{\boldsymbol{u}})$
10. Déterminer au point G et au point O :
    a. Le torseur cinématique : $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]$
    b. Le torseur cinétique : $[\boldsymbol{\mathcal{C}}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]$
    c. Le torseur dynamique : $[\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]$
11. Déterminer l'énergie cinétique de (S) par rapport à $(\boldsymbol{\mathcal{R}})$



Solution

1. ***Matrice d'inertie en G du cube :*** $II_G(C)$

G = Centre d'inertie du Carré (C) sans masselottes.

$\mathcal{R}_1$ $(Gx_1y_1z_1)$ est un repère principal d'inertie pour (C), car (Gx_1y_1) *et* (Gy_1z_1) sont deux plans de symétrie matérielle.

Par symétrie $A_G = B_G = C_G$

$$II_G(C) = A_G \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k})}$$

Elément de masse : $dm = \rho dV$

Cube homogène : $\rho = Const.$ donc $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\rho}\, a^3$

$$A_G = \int_{(C)} (y_1{}^2 + z_1{}^2)\, \boldsymbol{dm} = \boldsymbol{\rho} \int \iint (y_1{}^2 + z_1{}^2)\, \boldsymbol{d}x_1\, \boldsymbol{d}y_1\, \boldsymbol{d}z_1$$

$$= \boldsymbol{\rho} \int_{-a}^{a} \boldsymbol{d}x_1 \left(\int_{-a}^{a} y_1{}^2\, \boldsymbol{d}y_1 \int_{-a}^{a} \boldsymbol{d}z_1 + \int_{-a}^{a} z_1{}^2\, \boldsymbol{d}z_1 \int_{-a}^{a} \boldsymbol{d}y_1 \right) = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}} \boldsymbol{m}\, a^2$$

$$II_G(C) = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}} \boldsymbol{m}\, a^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)}$$

2. *Matrice d'inertie en O du cube :* $II_O(C)$

Théorème de Huygens généralisé : $II_O(C) = II_G(C) + II_O(G,m)$

$\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \boldsymbol{a}\left(\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1 + \vec{k}\right)$

$$II_O(G,m) = \boldsymbol{m}\,a^{\mathbf{2}}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$$

$$II_O(C) = \boldsymbol{m}\,a^{\mathbf{2}}\begin{bmatrix} 8/3 & -1 & -1 \\ -1 & 8/3 & -1 \\ -1 & -1 & 8/3 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$$

3. *Matrices d'inertie en G des deux masselottes* : $II_G\left(A,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{2}}\right)$ et $II_G\left(B,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{2}}\right)$

$\overrightarrow{\boldsymbol{GA}} = \mathbf{a}(\vec{\imath}_1 - \vec{\jmath}_1)$, $\qquad II_G\left(A,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{2}}\right) = \frac{\mathbf{m}a^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{GB}} = \mathbf{a}(-\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1)$, $\qquad II_G\left(B,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{2}}\right) = \frac{\mathbf{m}a^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$

4. *Matrice d'inertie* : $II_G(S)$

$$II_G(S) = II_G(C) + II_G\left(A,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{2}}\right) + II_G\left(B,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{2}}\right)$$

$$II_G(S) = \boldsymbol{m}\,a^{\mathbf{2}}\begin{bmatrix} 5/3 & 1 & 0 \\ 1 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$$

Matrice d'inertie : $II_O(S)$

G est le centre d'inertie du carré (C).

De plus G est également centre d'inertie des deux masselottes car : $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{2}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{GA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{GB}}\right) = \vec{\mathbf{0}}$

Donc G est centre d'inertie du système (S)

Théorème d'Huygens généralisé :

$$II_O(S) = II_G(S) + II_O(G,\mathbf{2m}) = \boldsymbol{m}\,a^{\mathbf{2}}\begin{bmatrix} 5/3 & 1 & 0 \\ 1 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})} + 2\boldsymbol{m}\,a^{\mathbf{2}}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$$

$$II_O(S) = \boldsymbol{m}\,a^{\mathbf{2}}\begin{bmatrix} 17/3 & -1 & -2 \\ -1 & 17/3 & -2 \\ -2 & -2 & 20/3 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$$

Pr. A. EL AFIF (alielafif2005@yahoo.fr)
Faculté des Sciences. Université Chouaib Doukkali

5. ***Repère principal d'inertie et axe principal d'inertie***

$II_G(S)$ n'est pas diagonale, donc *le* repère $(\mathcal{R}_1)$ n'est pas un repère principal d'inertie

$E_G = D_G = 0$ donc $(G\mathbf{z_1})$ est un axe principal d'inertie

6. ***Repère principal d'inertie pour* (S)**

Soit $\mathcal{R}_p(GX_1Y_1Z_1)$) un repère tel que :

(GY_1) *soit confondu avec (AB)* ***et*** (GZ_1) *soit confondu avec (Gz)*

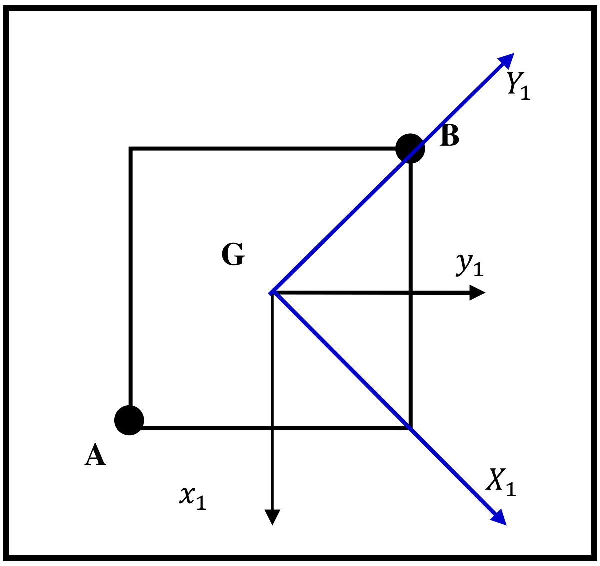
$(GZ_1) = (Gz)$ est un axe de symétrie matérielle donc c'est un axe principal d'inertie.

De plus : (GY_1z) est un plan de symétrie donc (GX_1) est un axe principal d'inertie

(**Rappel** : Tout axe perpendiculaire à un plan de symétrie est un axe principal d'inertie)

Donc $\mathcal{R}_p(GX_1Y_1Z_1)$) est un repère principal d'inertie.

Soit $(\vec{I}_1, \vec{J}_1, \vec{K}_1)$ la base orthonormée directe associée à $\mathfrak{R}_p$ telle que :



$$\begin{cases} \vec{I}_1 = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}_1 + \vec{j}_1) \\ \vec{J}_1 = \dfrac{\overrightarrow{GR}}{\|\overrightarrow{GR}\|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i}_1 + \vec{j}_1) \\ \vec{K}_1 = \vec{k}_1 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{R}_p(GX_1Y_1Z_1$) est un repère principal d'inertie de base principale $(\vec{I}_1, \vec{J}_1, \vec{K}_1)$ et dont la matrice principale d'inertie est de la forme :

$$II_G{}^*(S) = \begin{bmatrix} A^*{}_G & 0 & 0 \\ 0 & B^*{}_G & 0 \\ 0 & 0 & C^*{}_G \end{bmatrix}_{(\vec{I}_1,\vec{J}_1,\vec{K}_1)}$$

Par diagonalisation, on trouve que :

$$II_G{}^*(S) = \begin{bmatrix} -8/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{bmatrix}_{(\vec{I}_1,\vec{J}_1,\vec{K}_1)}$$

7. ***Moment d'inertie $I_{\Delta G}$ par rapport à l'axe*** $\Delta_G(G, \vec{u})$: $\vec{u} = a(\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1 + \vec{k})$

Vecteur unitaire de $\vec{u}$ est : $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\vec{\mathbf{u}}}{\|\vec{\mathbf{u}}\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{i}_1 + \vec{j}_1 + \vec{k})$

$$I_{\Delta_G} = {}^t\hat{u}\,.\,II_G(S).\hat{u} = \frac{m\,a^2}{3}[1 \quad 1 \quad 1].\begin{bmatrix} 5/3 & 1 & 0 \\ 1 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{8}{3}m\,a^2$$

Moment d'inertie $\boldsymbol{I_\Delta}$ ***par rapport à l'axe*** $\Delta(\mathrm{O}, \vec{\boldsymbol{u}})$

Théorème de Huygens $\boldsymbol{I_\Delta = I_{\Delta_G} + 2m\, d^2}$

La distance entre les deux axes est : $\boldsymbol{d(\Delta_G}, \Delta) \boldsymbol{= 0}$

Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Δ est: $\boldsymbol{I_\Delta = I_{\Delta_G} = \frac{8}{3} m\, a^2}$

8. Torseurs

a. *Torseur cinématique au point O* : $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{\boldsymbol{O}}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}\ (S/\mathcal{R}) \\ \vec{v}(\mathrm{O} \in S/\mathcal{R}) \end{Bmatrix} = {}_{\boldsymbol{O}}\begin{Bmatrix} \omega \vec{\mathrm{k}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

Torseur cinématique au point G : $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}\ (S/\mathcal{R}) \\ \vec{v}(\mathrm{G}/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \vec{v}(O \in S/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}\ (\mathrm{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OG} = \vec{0} + \omega \vec{\mathrm{k}} \wedge \mathbf{a}(\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1 + \vec{\mathrm{k}}) = \boldsymbol{a}\omega\, (-\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1)$$

$$[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} \omega \vec{\mathrm{k}} \\ \boldsymbol{a}\omega\, (-\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1) \end{Bmatrix}$$

b. *Torseur cinétique au point G* : $[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\mathbf{G}}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{2m\, \vec{v}(G}/\mathcal{R}) \\ \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{G}}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

Moment cinétique au point G:

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{II_G(S)}.\vec{\Omega}\ (\mathrm{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{m}\, a^{\boldsymbol{2}} \begin{bmatrix} 5/3 & -1 & 0 \\ -1 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \omega \end{bmatrix} = \boldsymbol{\frac{8}{3} m}\, a^{\boldsymbol{2}} \omega\, \vec{\mathrm{k}}$$

Torseur cinétique au point G

$$[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\mathbf{G}}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{2m}\mathrm{a}\omega\, (-\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1) \\ \boldsymbol{\frac{8}{3} m}\, a^{\boldsymbol{2}} \omega\, \vec{\mathrm{k}} \end{Bmatrix}$$

Torseur cinétique au point O : $[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{\mathbf{O}}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{2m\, \vec{v}(G}/\mathcal{R}) \\ \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

Moment cinétique au point O ∈ (S) : $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{II_O(C)}.\vec{\Omega}\ (\mathrm{S}/\mathcal{R}) + \boldsymbol{2m}\vec{v}(\boldsymbol{O} \in S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{GO}}$

O est fixe dans ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$) : $\vec{v}(\mathrm{O} \in S/\mathcal{R}) = \vec{0}$

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{II_O(S)}.\vec{\Omega}\ (\mathrm{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{m}\, a^{\boldsymbol{2}} \begin{bmatrix} 17/3 & -1 & -2 \\ -1 & 17/3 & -2 \\ -2 & -2 & 20/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \omega \end{bmatrix} = \boldsymbol{2m}\, a^{\boldsymbol{2}} \omega \left(-\vec{\imath}_1 - \vec{\jmath}_1 + \boldsymbol{\frac{10}{3}} \vec{\mathrm{k}}\right)$$

Torseur cinétique au point O :

$$[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{\mathbf{O}}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{2m}\mathrm{a}\omega\, (-\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1) \\ \boldsymbol{2m}\, a^{\boldsymbol{2}} \omega \left(-\vec{\imath}_1 - \vec{\jmath}_1 + \boldsymbol{\frac{10}{3}} \vec{\mathrm{k}}\right) \end{Bmatrix}$$

c. ***Torseur dynamique au point G*** : $[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{2m}\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

Résultante dynamique : $\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{2m}\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R})$

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}(G/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \mathrm{a}^2\left(-\left(\omega^2 + \frac{d\omega}{dt}\right)\vec{\imath}_1 + \left(-\omega^2 + \frac{d\omega}{dt}\right)\vec{\jmath}_1\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{2m}\mathrm{a}^2\left(-\left(\omega^2 + \frac{d\omega}{dt}\right)\vec{\imath}_1 + \left(-\omega^2 + \frac{d\omega}{dt}\right)\vec{\jmath}_1\right)$$

Moment dynamique au point G :

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{G}}(\mathbf{S}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{m}\,a^{\mathbf{2}}\ \frac{d\omega}{dt}\,\vec{\mathrm{k}}$$

Torseur dynamique au point **G**

$$[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\mathbf{G}}\begin{Bmatrix} 2\mathrm{ma}^2\left(-\left(\omega^2 + \frac{d\omega}{dt}\right)\vec{\imath}_1 + \left(-\omega^2 + \frac{d\omega}{dt}\right)\vec{\jmath}_1\right) \\ \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{m}\,a^{\mathbf{2}}\ \frac{d\omega}{dt}\,\vec{\mathrm{k}} \end{Bmatrix}$$

Torseur dynamique au point O : $[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{\boldsymbol{O}}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{2m}\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

Moment dynamique au point O : $\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{O}/\mathcal{R}) \wedge \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R})$

O est fixe dans $(\mathcal{R})$: $\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{O}/\mathcal{R}) = \vec{\mathbf{0}}$

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\mathbf{S}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\mathbf{S}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}_S} + \vec{\Omega}\ (\mathcal{R}_S/\mathcal{R}) \wedge \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\mathbf{S}/\mathcal{R})$$

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{2m}\,a^{\mathbf{2}}\left(\left(\omega^2 - \frac{d\omega}{dt}\right)\vec{\imath}_1 - \left(\omega^2 + \frac{d\omega}{dt}\right)\vec{\jmath}_1 + \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}\ \frac{d\omega}{dt}\,\vec{\mathrm{k}}\right)$$

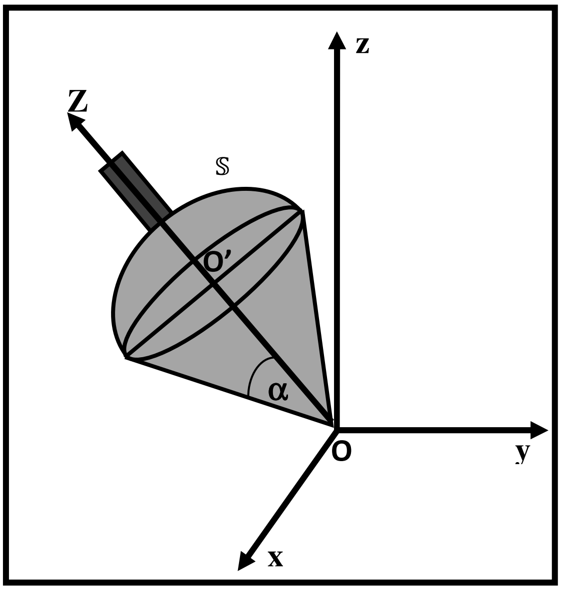
Torseur dynamique au point O :

$$[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{\boldsymbol{O}}\begin{Bmatrix} 2\mathrm{ma}^2\left(-\left(\omega^2 + \frac{d\omega}{dt}\right)\vec{\imath}_1 + \left(-\omega^2 + \frac{d\omega}{dt}\right)\vec{\jmath}_1\right) \\ \boldsymbol{2m}\,a^{\mathbf{2}}\left(\left(\omega^2 - \frac{d\omega}{dt}\right)\vec{\imath}_1 - \left(\omega^2 + \frac{d\omega}{dt}\right)\vec{\jmath}_1 + \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}\ \frac{d\omega}{dt}\,\vec{\mathrm{k}}\right) \end{Bmatrix}$$

9. ***Energie cinétique de (S) par rapport*** à $(\mathcal{R})$

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}}.\,[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,{}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} \omega\,\vec{\mathrm{k}} \\ \mathrm{a}\omega\,(-\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1) \end{Bmatrix}\ {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{2m}\mathrm{a}\omega\,(-\vec{\imath}_1 + \vec{\jmath}_1) \\ \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{m}\,a^2\omega\,\vec{\mathrm{k}} \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{m}\,a^{\mathbf{2}}\omega^2$$

Exercice 7



On considère le système $(\mathbb{S}) = (\boldsymbol{C}) \cup (\boldsymbol{S}) \cup (\boldsymbol{T})$ (voir figure) composé de:

- un cône (C) plein homogène de sommet O, de centre d'inertie G_C, de hauteur H, de rayon R, de densité volumique $\boldsymbol{\rho_C}$, de masse $\boldsymbol{m_C}$ et de demi-angle au sommet α.
- un hémisphère (S) plein homogène de centre O', de centre d'inertie G_S, de rayon R, de densité volumique $\boldsymbol{\rho_S}$ et de masse $\boldsymbol{m_S}$.
- une tige (T) homogène, de longueur L, de masse $\boldsymbol{m_T}$, de centre d'inertie G_T et de densité linéique λ_T.

Soit $\mathcal{R}_{\mathbb{S}}(OXYZ)$ un repère orthonormé direct lié à $(\mathbb{S})$ de base associée $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$, et soit $\mathcal{R}$(Oxyz) un repère orthonormé direct fixe de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On exprimera tous les résultats dans la base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$.

1. Déterminer le centre d'inertie G du système $(\mathbb{S})$. Trouver une condition pour que G et O' coïncident. On supposera que cette condition est satisfaite dans la suite du problème.
2. Déterminer la matrice d'inertie en G du système $(\mathbb{S})$: $II_G(\mathbb{S})$
3. Déterminer la matrice d'inertie en O du système $(\mathbb{S})$: $II_O(\mathbb{S})$

Le système $(\mathbb{S})$ se comporte comme une toupie en rotation par rapport à sa pointe O fixe dans $(\mathcal{R})$.

4. Déterminer :
   - **a.** Le torseur cinématique au point O : $[\mathcal{V}(\mathbb{S}/ \mathcal{R})]_O$
   - **b.** Le torseur cinétique au point O : $[\mathcal{C}(\mathbb{S}/ \mathcal{R})]_O$
   - **c.** Le torseur dynamique au point O : $[\mathcal{D}(\mathbb{S}/\mathcal{R})]_O$
   - **d.** L'énergie cinétique : $E_c(\mathbb{S}/ \mathcal{R})$
5. Retrouver les résultats précédents en utilisant le théorème de Koenig.

Solution

1. ***Centre d'inertie G du système*** $(\mathbb{S})$.

$(\mathbb{S}) = (C) \cup (S) \cup (T)$

G est le centre d'inertie de $(\mathbb{S})$, alors :

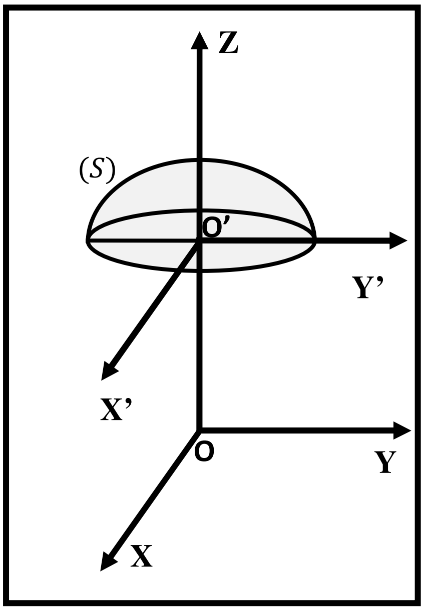
$$(m_C + m_S + m_T)\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = m_C\overrightarrow{\boldsymbol{O}G_C} + m_S\overrightarrow{\boldsymbol{O}G_S} + m_T\overrightarrow{\boldsymbol{O}G_T}$$

Soit $\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = X_G\vec{I} + Y_G\vec{J} + Z_G\vec{K}$

L'axe (OZ) est un axe de symétrie matérielle donc $G \in (OZ)$ et par conséquent : $X_G = Y_G = 0$

$$Z_G = \frac{1}{m_C + m_S + m_T}\left(m_C Z_{G_C} + m_S Z_{G_S} + m_T Z_{G_T}\right)$$

Centre d'inertie du Cône (C): (voir exercice 3 du chapitre 3) : $Z_{G_C} = \frac{3}{4}H$



Centre d'inertie de l' hémisphère $(\boldsymbol{S})$

$\overrightarrow{\boldsymbol{O}G_S} = \overrightarrow{\boldsymbol{O}\boldsymbol{O}'} + \overrightarrow{\boldsymbol{O}'G_S}$ avec $\overrightarrow{\boldsymbol{O}\boldsymbol{O}'} = \mathbf{H}\,\vec{\mathbf{K}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{O}'G_S} = Z'_{G_S}\vec{\mathbf{K}}$

Donc :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{O}G_S} = \left(\boldsymbol{H} + Z'_{G_S}\right)\vec{\mathbf{K}}$$

- L'hémisphère (S) de masse $\boldsymbol{m_S}$ et de volume $\boldsymbol{V_S}$ est homogène donc sa masse volumique est constante : $\boldsymbol{\rho_S} = \boldsymbol{Const.}$ donc $\boldsymbol{m_S} = \boldsymbol{\rho_S}\,\boldsymbol{V_S}$
- (O'Z) est un axe de symétrie de révolution, donc le centre de masse G∈(O'Z) par conséquent : $X'_{G_S} = \mathbf{0}$, $Y'_{G_S} = \mathbf{0}$

$$Z'_{G_S} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m_S}}\iiint_{(S)} \boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{dm_S} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{V_S}}\iiint_{V_S} \boldsymbol{Z'}\,\boldsymbol{dV}$$

Coordonnées cylindriques : $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{Z'})$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{X'} = \boldsymbol{r sin\theta cos\varphi} \\ \boldsymbol{Y'} = \boldsymbol{r sin\theta cos\varphi} \\ \boldsymbol{Z'} = \boldsymbol{r cos\,\theta} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{0} \le \boldsymbol{\theta} \le \boldsymbol{\pi/2} \\ \mathbf{0} \le \boldsymbol{\varphi} \le \mathbf{2}\boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{0} \le \boldsymbol{r} \le \boldsymbol{R} \end{cases}$$

Volume élémentaire : $\boldsymbol{dV} = \boldsymbol{r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi}$

Donc :

$$\boldsymbol{V_S} = \int_0^{\pi/2} \boldsymbol{sin\theta d\theta} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{d\varphi} \int_0^{R} \boldsymbol{r^2 dr} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi R^3}$$

$$Z'_{G_S} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi R^3}} \int_0^{\pi/2} \boldsymbol{cos\,\theta sin\theta d\theta} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{d\varphi} \int_0^{R} \boldsymbol{r^3 dr} = \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{R}}{\mathbf{8}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{O}G_S} = \left(\boldsymbol{H} + \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{R}}{\mathbf{8}}\right)\vec{\mathbf{K}}$$

Centre d'inertie de la tige (T)

Il est trivial de voir que :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{O}G_T} = \left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{R} + \frac{\boldsymbol{L}}{\mathbf{2}}\right)\vec{\mathbf{K}}$$

Finalement :

$$Z_G = \frac{1}{m_C + m_S + m_T}\left(m_C\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{H}}{\mathbf{4}} + m_S\left(\boldsymbol{H} + \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{R}}{\mathbf{8}}\right) + m_T\left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{R} + \frac{\boldsymbol{L}}{\mathbf{2}}\right)\right)$$

Cas particulier : On voudrait que : $G \equiv O'$ ce qui impliquerait que $Z_G = H$

Ceci est vrai si et seulement si : $2m_C H = (3m_S + 8m_T)R + 4m_T L$

2. *Matrice d'inertie en G* $\equiv O'$ *du système* $(\mathbb{S})$: $\boldsymbol{II_G}(\mathbb{S})$

- ***Matrice d'inertie en G*** $\equiv O'$ ***du Cône***

Théorème d'Huygens :

Au point O : $II_{\,O}(C) = II_{\,G_C}(C) + II_{\,O}(G_C, m_C)$

Au point $\boldsymbol{G} \equiv O'$: $II_{\,G}(C) = II_{\,G_C}(C) + II_{\,G}(G_C, m_C)$

En faisant la différence, on a : $II_{\,G}(C) = II_{\,O}(C) + II_{\,G}(G_C, m_C) - II_{\,O}(G_C, m_C)$

Matrice d'inertie en O du Cône (Voir Ch 3 ex.3)

$$\boldsymbol{II_O(C)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{20}m_C R^2 + \frac{3}{5}m_C H^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}Mm_C + \frac{3}{5}m_C H^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}m_C R^2 \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{K})}$$

Matrices d'inertie : $II_{\,O'}(G_C, m_C)$ *et* $II_{\,O}(G_C, m_C)$

$$\overrightarrow{OG_C} = \frac{3H}{4}\vec{K}, \qquad II_{\,O}(G_C, m_C) = \frac{9}{16}m_C H^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{K})}$$

$$\overrightarrow{GG_C} = -\frac{H}{4}\vec{K}, \qquad II_{\,G}(G_C, m_C) = \frac{1}{16}m_C H^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{K})}$$

Matrice d'inertie en $G \equiv O'$ *du* Cône :

$$II_{\,G}(C) = \begin{bmatrix} \frac{3}{10}m_C\left(\frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{10}m_C\left(\frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}m_C R^2 \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{K})}$$

- ***Matrice d'inertie en*** $\boldsymbol{G \equiv O'}$ ***de l'hémisphère*** (S)

(GZ) est un axe de symétrie de révolution donc la matrice d'inertie est diagonale et est de la forme :

$$\boldsymbol{II_G(S)} = \begin{bmatrix} A_S & 0 & 0 \\ 0 & A_S & 0 \\ 0 & 0 & C_S \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{K})}$$

$\boldsymbol{dm_S = \rho_S}\, \mathrm{d}\boldsymbol{V_S}$

La sphère (S) de masse $\boldsymbol{m_S}$ et de volume $\boldsymbol{V_S}$ est homogène donc sa masse volumique est constante :

$$\boldsymbol{\rho_S = Cste} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{m_S = \rho_S V_S = \frac{2}{3}\pi\rho_S R^3}$$

- $A_S = \iiint_{(S)} \left(Y'^2 + Z'^2\right) dm_S$
- $C_S = \iiint_{(S)} \left(X'^2 + Y'^2\right) dm_S$
- $2A_S = C_S + 2\iiint_{(S)} Z'^2 \ dm_S$

- $\iiint_{(S)} Z'^2 \; dm_S = \frac{m_S}{V_S}\iiint_{V_S} Z'^2 \; dV_S = \frac{m_S}{\frac{2}{3}\pi R^3}\int_0^{\pi/2} cos^2\,\theta sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^4 dr = \frac{m_S R^2}{5}$
- $C_S = \iiint_{(S)} \left(X'^2 + Y'^2\right) dm_S = \frac{m_S}{V_S}\iiint_{V_S} \left(X'^2 \; + Y'^2\right) dV_S = \frac{m_S}{\frac{2}{3}\pi R^3}\int_0^{\pi/2} sin^3\,\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^4 dr$

$$C_S = \frac{2}{5} m_S R^2 \quad \text{et} \quad A_S = \frac{2}{5} m_S R^2$$

$$II_G(S) = \frac{2}{5} m_S R^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{K})}$$

- ***<u>Matrice d'inertie en G $\equiv O'$ de la tige</u>*** $(\boldsymbol{T})$

<u>Théorème d'Huygens :</u>

$II_{\ G}(T) = II_{\ G_T}(T) + II_{\ G}(G_T, m_T)$

$$II_{\ G_T}(T) = \frac{m_T \boldsymbol{L^2}}{\boldsymbol{12}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{K})}$$

$\overrightarrow{\boldsymbol{G}G_T} = \left(\boldsymbol{R} + \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{2}}\right)\vec{\mathbf{K}}$, $\quad II_{\ G}(G_T, m_T) = m_T\left(\boldsymbol{R} + \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{(\vec{I},\vec{J},\ \vec{K})}$

<u>Matrice d'inertie en G $\equiv O'$ de la Tige</u>

$$II_{\ G}(T) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_T} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A_T} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{K})}$$

$$\boldsymbol{A_T} = m_T\left(\left(\boldsymbol{R} + \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{2}}\right)^2 + \frac{\boldsymbol{L^2}}{\boldsymbol{12}}\right)$$

- ***<u>Matrice d'inertie en G $\equiv O'$ du système</u>*** $(\mathbb{S})$

$$\boldsymbol{II_{\ G}}(\mathbb{S}) = \boldsymbol{II_{\ G}}(\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{II_{\ G}}(\boldsymbol{S}) + \boldsymbol{II_{\ G}}(\boldsymbol{T}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_G} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A_G} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C_G} \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{K})}$$

$$\boldsymbol{A_G} = \boldsymbol{A_C} + \boldsymbol{A_C} + \boldsymbol{A_T} = \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{10}}\boldsymbol{m_C}\left(\frac{\boldsymbol{R^2}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{H^2}}{\boldsymbol{3}}\right) + \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{5}}\boldsymbol{m_S R^2} + \boldsymbol{m_T}\left(\left(\boldsymbol{R} + \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{2}}\right)^2 + \frac{\boldsymbol{L^2}}{\boldsymbol{12}}\right)$$

$$\boldsymbol{C_G} = \boldsymbol{C_C} + \boldsymbol{C_C} + \boldsymbol{C_T} = \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{10}}\boldsymbol{m_C R^2} + \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{5}}\boldsymbol{m_S R^2}$$

3. *<u>Matrice d'inertie en O du système</u>* $(\mathbb{S})$: $\boldsymbol{II_O}(\mathbb{S})$

<u>Théorème d'Huygens généralisé</u> :

$$\boldsymbol{II_{\ O}}(\mathbb{S}) = \boldsymbol{II_{\ G}}(\mathbb{S}) + \boldsymbol{II}_{\ O}(G, m_C + m_S + m_T)$$

$\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \boldsymbol{H}\,\vec{\mathbf{K}}$

$m(\mathbb{S}) = m_C + m_S + m_T$

$$II_{\,O}(G, m_C + m_S + m_T) = (m_C + m_S + m_T)\boldsymbol{H^2}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{\mathbf{K}})}$$

Finalement:

$$\boldsymbol{II}_{\,\boldsymbol{O}}(\mathbb{S}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{\mathbf{K}})}$$

$\boldsymbol{A = A_G + (m_C + m_S + m_T)H^2}$

$\boldsymbol{C = C_G}$

4. *Torseurs*

a. ***Torseur cinématique au point O*** : $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{\boldsymbol{O}}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}\ (\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \\ \vec{\boldsymbol{v}}(\mathbf{O}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \end{Bmatrix}$

$$[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{\boldsymbol{O}}\begin{Bmatrix} \dot{\psi}\,\vec{k} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{K} \\ \vec{\mathbf{0}} \end{Bmatrix} = {}_{\boldsymbol{O}}\begin{Bmatrix} p\,\vec{I} + q\vec{J} + r\vec{K} \\ \vec{\mathbf{0}} \end{Bmatrix}$$

$p = \dot{\theta}cos\varphi + \dot{\psi}sin\theta sin\varphi$
$q = -\dot{\theta}sin\varphi + \dot{\psi}sin\theta cos\varphi$
$r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}cos\theta$

b. ***Torseur cinétique au point O*** : $[\boldsymbol{C}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{\mathbf{O}}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{p}}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = (m_C + m_S + m_T)\,\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \\ \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{G}}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \end{Bmatrix}$

Résultante cinétique : $\vec{\boldsymbol{p}}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = (m_C + m_S + m_T)\,\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}})$

$\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \boldsymbol{H}\,\vec{\mathbf{K}}$

$$\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \left(\frac{\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{OG}}}{\boldsymbol{dt}}\right)_{\boldsymbol{\mathcal{R}}} = \boldsymbol{H}\left(\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{K}}}{\boldsymbol{dt}}\right)_{\boldsymbol{\mathcal{R}}} = \boldsymbol{H}\,\vec{\Omega}\,(\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathbb{S}}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \wedge \vec{\mathbf{K}} = \boldsymbol{H}(p\,\vec{I} + q\vec{J} + r\vec{K}) \wedge \vec{\mathbf{K}} = \boldsymbol{H}(q\,\vec{I} - p\vec{J})$$

$$\vec{\boldsymbol{p}}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = (m_C + m_S + m_T)\,\boldsymbol{H}(q\,\vec{I} - p\vec{J})$$

Moment cinétique au point O ∈ (𝕊) : $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{II}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{C}).\vec{\Omega}\ (\mathbb{S}/\mathcal{R}) + (m_C + m_S + m_T)\vec{v}(\boldsymbol{O} \in \mathbb{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{GO}}$

O est fixe dans ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$) : $\vec{v}(\mathrm{O} \in \mathbb{S}/\mathcal{R}) = \vec{0}$

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \boldsymbol{II}_{\boldsymbol{O}}(\mathbb{S}).\vec{\Omega}\ (\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \\ \boldsymbol{r} \end{bmatrix} = \mathrm{A}p\,\vec{I} + Aq\vec{J} + Cr\vec{K}$$

Torseur cinétique au point O : $[\boldsymbol{C}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{\mathbf{O}}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{H}(q\,\vec{I} - p\vec{J}) \\ \mathrm{A}p\,\vec{I} + Aq\vec{J} + Cr\vec{K} \end{Bmatrix}$

c. ***Torseur dynamique au point O :*** $[\boldsymbol{D}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{\boldsymbol{O}}\begin{Bmatrix} (m_C + m_S + m_T)\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{O}}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \end{Bmatrix}$

Résultante dynamique : $\vec{a}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = (m_C + m_S + m_T)\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}})$

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \left(\frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}})}{\boldsymbol{dt}}\right)_{\boldsymbol{\mathcal{R}}} = \left(\frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}})}{\boldsymbol{dt}}\right)_{\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathbb{S}}} + \vec{\Omega}\ (\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \wedge \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}})$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}})}{\boldsymbol{dt}}\right)_{\mathfrak{R}_{\mathbb{S}}} = \boldsymbol{H}(\dot{q}\,\vec{I} - \dot{p}\vec{J})$$

$$\vec{\Omega}\ (\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \wedge \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \boldsymbol{H}(rp\vec{I} + rq\vec{J} - (p^2 + q^2)\vec{K})$$

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \boldsymbol{H}((\dot{q} + rp)\vec{I} + (-\dot{p} + rq)\vec{J} - (p^2 + q^2)\vec{K})$$

$$\vec{a}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = (m_C + m_S + m_T)\,\boldsymbol{H}((\dot{q} + rp)\vec{I} + (-\dot{p} + rq)\vec{J} - (p^2 + q^2)\vec{K})$$

Moment dynamique au point O : $\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{O}/\mathcal{R}) \wedge \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R})$

O est fixe dans ($\mathcal{R}$) : $\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{O}/\mathcal{R}) = \vec{\boldsymbol{0}}$

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{O}}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \left(\frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{0}}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})}{\boldsymbol{dt}}\right)_{\boldsymbol{\mathcal{R}}} = \left(\frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{0}}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})}{\boldsymbol{dt}}\right)_{\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathbb{S}}} + \vec{\Omega}\ (\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mathbb{S}}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \wedge \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{0}}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})$$
$$= \big(\mathbf{A}\dot{p} + rq(C - A)\big)\vec{I} + \big(\mathbf{A}\dot{q} + pr(A - C)\big)\vec{J} + C\dot{r}\vec{K}$$

Torseur dynamique au point O :

$$[\boldsymbol{D}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})] = {}_{\boldsymbol{O}}\begin{Bmatrix} (m_C + m_S + m_T)\boldsymbol{H}((\dot{q} + rp)\vec{I} + (-\dot{p} + rq)\vec{J} - (p^2 + q^2)\vec{K} \\ \big(\mathbf{A}\dot{p} + rq(C - A)\big)\vec{I} + \big(\mathbf{A}\dot{q} + pr(A - C)\big)\vec{J} + C\dot{r}\vec{K} \end{Bmatrix}$$

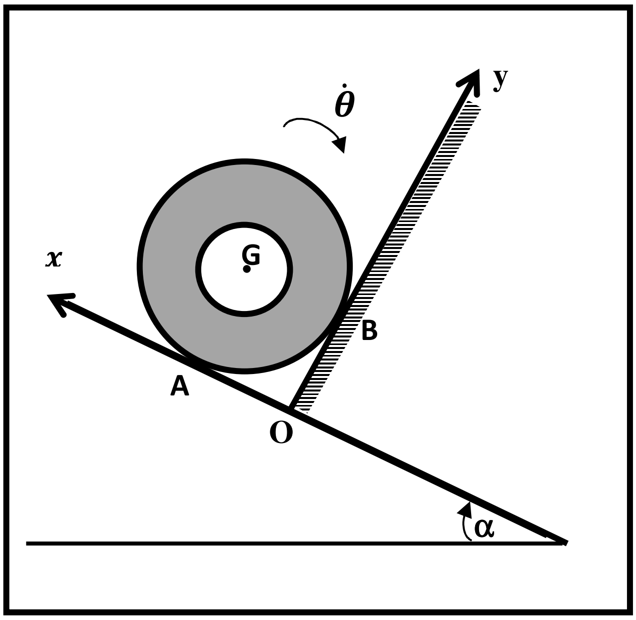
d. ***Energie cinétique*** :

$$\boldsymbol{E_c}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{O}}.\ [\boldsymbol{C}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{O}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ {}_{\boldsymbol{O}}\begin{Bmatrix} p\,\vec{I} + q\vec{J} + r\vec{K} \\ \vec{\mathbf{0}} \end{Bmatrix}\ {}_{\mathbf{O}}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{H}(q\,\vec{I} - p\vec{J}) \\ \mathbf{A}p\,\vec{I} + Aq\vec{J} + Cr\vec{K} \end{Bmatrix}$$
$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{A}(p^2 + q^2) + Cr^2)$$

$$\boldsymbol{E_c}(\mathbb{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\Big(\boldsymbol{A}\big(\dot{\psi}^2 sin\theta^2 + \dot{\theta}^2\big) + C\big(\dot{\varphi}\ + \dot{\psi}cos\theta\big)^2\Big)$$

DYNAMIQUE ET ENERGETIQUE

Exercice 1



Soit $\mathcal{R}$(Oxyz) un référentiel galiléen de base associée ($\vec{\mathbf{i}}$,$\vec{\mathbf{j}}$,$\vec{\mathbf{k}}$) orthonormée directe. On considère un disque plein homogène, de rayon **R** évidé en son centre par un trou de rayon **r**. Le système (S) ainsi formé, de centre d'inertie G et de masse **m**, est maintenu en contact avec deux parois perpendiculaires fixes, l'une parallèle à la pente d'angle $\boldsymbol{\alpha}$ disposée suivant l'axe (Ox) et l'autre parallèle avec l'axe (Oy) (voir figure). Soit A le point de contact de (S) avec la pente et soit B le point de contact avec la paroi perpendiculaire à la pente. Le système (S) est alors mis en rotation avec une vitesse angulaire initiale, $\boldsymbol{\omega_0}$. Les coefficients de frottement de glissement des deux parois avec le disque aux points A et B sont respectivement $\boldsymbol{f_A}$ et $\boldsymbol{f_B}$. On néglige les moments de résistance au pivotement et au roulement.

On posera : $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R}) = \dot{\boldsymbol{\theta}}\ \vec{\boldsymbol{k}}$

1. Déterminer la matrice d'inertie du disque évidé (S) au point G, $\mathbf{II}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$, en fonction de R, r et m.
2. Déterminer au point G, le torseur cinétique de (S) par rapport à ($\mathcal{R}$)
3. Déterminer l'énergie cinétique de (S) par rapport à ($\mathcal{R}$)
4. Déterminer au point G, le torseur des actions mécaniques extérieures agissant sur (S) dans ($\mathcal{R}$).
5. Déterminer les composantes tangentielles et normales des forces de contact.
6. Déterminer l'équation du mouvement de (S) par rapport à ($\mathcal{R}$). Calculer alors le temps nécessaire pour stopper le disque évidé. Comparer ce temps avec celui obtenu si le disque était plein.
7. Calculer la puissance développée dans le mouvement de (S) par rapport à ($\mathcal{R}$). L'énergie mécanique est-elle conservée ?

Solution

1. *Matrice d'inertie du disque évidé (S) au point G,* $\mathbf{II}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$

Soit $\mathcal{R}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{GXYZ})$ un repère lié à (S) de base ($\vec{\mathbf{I}}$, $\vec{\mathbf{J}}$, $\vec{\mathbf{k}}$). $(\boldsymbol{GZ})$ est un axe de symétrie de révolution pour $(\boldsymbol{S})$. Donc $(\mathcal{R}_{\boldsymbol{S}})$ est un repère principal d'inertie.

$$\mathbf{II}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A_G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A_G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C_G} \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{\mathbf{k}})}$$

(S) appartient au plan (Oxy) perpendiculaire à $\vec{\mathbf{k}}$ Donc $Z = 0$ et $\mathbf{2\ A_G = C_G}$

Masse élémentaire : $\boldsymbol{dm = \sigma\ ds}$

Système homogène : $\boldsymbol{\sigma} = Const.$ et donc $\boldsymbol{m = \sigma}\ S$

Surface du système : $\boldsymbol{S = \int_r^R \int_0^{2\pi} r' dr' d\theta = \pi(R^2 - r^2)}$

Ce qui permet d'écrire que: $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{\pi(R^2 - r^2)}}$

$$\mathrm{C_G} = \int_{(S)} \boldsymbol{(X^2 + Y^2)dm = \sigma \int_r^R \int_0^{2\pi} r'^3 dr' d\theta = \frac{m}{2}(R^2 + r^2)}$$

$$\mathrm{II}_{\,\mathrm{G}}(\mathrm{S}) = \boldsymbol{\frac{m}{4}(R^2 + r^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{\mathrm{k}})}$$

2. *Torseur cinétique* : $[\boldsymbol{C(S/\mathcal{R})}]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\mathbf{G}}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\vec{p}(S/\mathcal{R}) = m\,\vec{v}(G/\mathcal{R})} \\ \boldsymbol{\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R})} \end{Bmatrix}$

Résultante cinétique : $\boldsymbol{\vec{p}(S/\mathcal{R}) = m\,\vec{v}(G/\mathcal{R})}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{OG}} = \mathbf{R}\,\boldsymbol{\vec{\imath}} + \mathbf{R}\,\boldsymbol{\vec{\jmath}}$ donc $\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \vec{0}$

$$\boldsymbol{\vec{p}(S/\mathcal{R})} = \vec{0}$$

Moment cinétique au point G :

$$\boldsymbol{\vec{\sigma}_{\mathrm{G}}(S/}\mathcal{R}) = \boldsymbol{II_G(S)}.\vec{\Omega}\ (\mathrm{S}/\mathcal{R}) = \frac{m}{2}(R^2 + r^2)\ \dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}}$$

Torseur cinétique au point G :

$$[\boldsymbol{C(S/}\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\mathbf{G}}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \frac{m}{2}(R^2 + r^2)\,\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}} \end{Bmatrix}$$

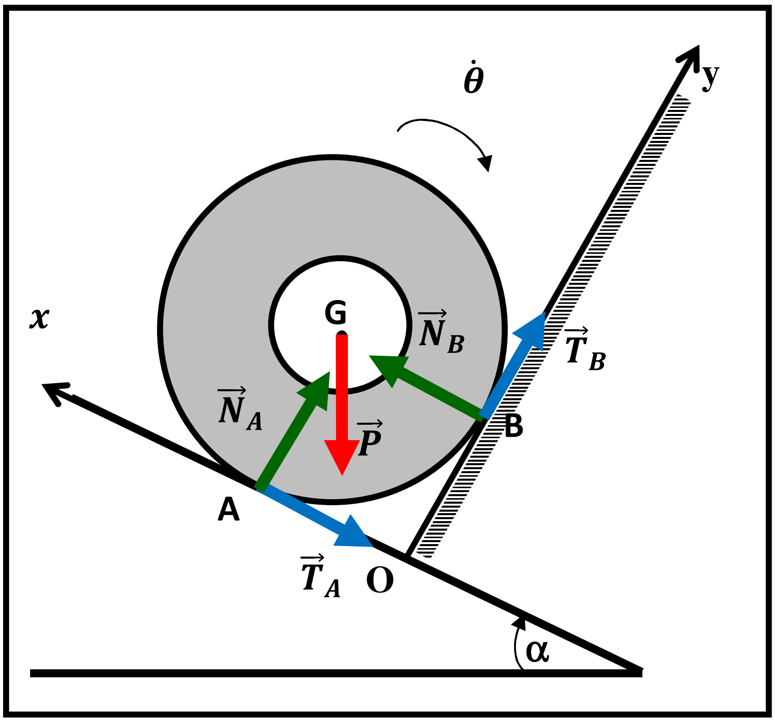
3. *Energie cinétique* :

$$\boldsymbol{E_c(S/}\mathcal{R}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}[\boldsymbol{\mathcal{V}(S/}\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}}.\ [\boldsymbol{C(S/}\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}\ {}_{\mathbf{G}}\begin{Bmatrix} \dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}\ {}_{\mathbf{G}}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \frac{m}{2}(R^2 + r^2)\,\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\frac{m}{4}}(R^2 + r^2)\dot{\theta}^2$$

4. *Torseur des actions mécaniques extérieures* : $[\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}(S)}]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\vec{R}_{ext}} \\ \boldsymbol{\vec{M}_{G,ext}} \end{Bmatrix}$

Résultante générale :

$$\boldsymbol{\vec{R}_{ext} = \vec{P} + \overrightarrow{T_A} + \overrightarrow{N_A} + \overrightarrow{T_B} + \overrightarrow{N_B} = (-mg\sin\alpha + N_B - T_A)\,\vec{\imath} + (-mg\cos\alpha + T_B + N_A)\ \vec{\jmath}}$$



Moment résultant au point G :

$$\vec{M}_{G,ext} = \vec{M}_G(\vec{P}) + \vec{M}_G(\vec{T_A}) + \vec{M}_G(\vec{N_A}) + \vec{M}_G(\vec{T_B}) + \vec{M}_G(\vec{N_B})$$

- $\vec{M}_G(\vec{P}) = \vec{GG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$: car G est le point d'application de $\vec{P}$
- $\vec{M}_G(\vec{T_A}) = \vec{GA} \wedge \vec{T_A} = (-R\ \vec{j}) \wedge (-T_A\,\vec{i}) = -RT_A\,\vec{k}$
- $\vec{M}_G(\vec{N_A})) = \vec{GA} \wedge \vec{N_A} = (-R\ \vec{j}) \wedge (N_A\,\vec{j}) = \vec{0}$
- $\vec{M}_G(\vec{T_B}) = \vec{GB} \wedge \vec{T_B} = (-R\ \vec{i}) \wedge (T_B\,\vec{j}) = -R\,T_B\,\vec{k}$
- $\vec{M}_G(\vec{N_B})) = \vec{GA} \wedge \vec{N_B} = (-R\ \vec{i}) \wedge (N_B\,\vec{i}) = \vec{0}$

Torseur des actions mécaniques extérieures :

$$[\mathcal{F}_{ext}(D)]_G = {}_G\begin{Bmatrix} (-mg\sin\alpha + N_B - T_A)\,\vec{i} + (-mg\cos\alpha + T_B + N_A)\ \vec{j} \\ -\mathrm{R}(T_A + T_B)\,\vec{k} \end{Bmatrix}$$

5. *Principe fondamental dans (ℛ) Galiléen* : $[D(S/\mathcal{R})] = [\mathcal{F}_{ext}(S)]$

Ou encore : $${}_G\begin{Bmatrix} m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) \\ \vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}) \end{Bmatrix} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R}_{ext} \\ \vec{M}_{G,ext} \end{Bmatrix}$$

Torseur dynamique : $[D(S/\mathcal{R})]_G = {}_G\begin{Bmatrix} m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) \\ \vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

Résultante dynamique

$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \vec{0}$

$\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) = \vec{0}$

$$\vec{a}(S/\mathcal{R}) = m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) = \vec{0}$$

Moment dynamique au point G :

$$\vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{m}{2}(R^2 + r^2)\ddot{\theta}\,\vec{k}$$

Torseur dynamique au point G : $[D(S/\mathcal{R})] = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \frac{m}{2}(R^2 + r^2)\,\ddot{\theta}\ \vec{k} \end{Bmatrix}$

Appliquons le PFD :

$$\begin{cases} -mg\sin\alpha + N_B - T_A = 0 \\ -mg\cos\alpha + T_B + N_A = 0 \\ \frac{m}{2}(R^2 + r^2)\,\ddot{\theta} = -\mathrm{R}(T_A + T_B) \end{cases}$$

Nous avons trois équations et cinq inconnues : θ, N_A, T_A, N_B et T_B! Nous avons besoin de deux équations supplémentaires.

Glissement et roulement :

Lois de Coulomb : $\boldsymbol{T_A = f_A N_A}$ et $\boldsymbol{T_B = f_B N_B}$

$$mg\sin\alpha = N_B - T_A = N_B - f_A N_A$$
$$mg\cos\alpha = T_B + N_A = N_A + f_B N_B$$

$$N_A = \frac{mg(\cos\alpha - f_B\sin\alpha)}{1 + f_A f_B} \quad et \quad N_B = \frac{mg(\sin\alpha + f_A\cos\alpha)}{1 + f_A f_B}$$

$$T_A = \frac{mgf_A(\cos\alpha - f_B\sin\alpha)}{1 + f_A f_B} \quad et \quad T_B = \frac{mgf_B(\sin\alpha + f_A\cos\alpha)}{1 + f_A f_B}$$

6. *Equation du mouvement* :

$$\frac{m}{2}(R^2 + r^2)\,\ddot{\theta} = -\mathbf{R}(\boldsymbol{T_A} + \boldsymbol{T_B}) = -\frac{\mathrm{mgR}}{1 + f_A f_B}(f_A(1 + f_B)\cos\alpha + f_B(1 - f_A)\sin\alpha)$$

On pose :

$$K_0 = \frac{2\mathrm{gR}}{(\boldsymbol{R^2} + \boldsymbol{r^2})}\left(\frac{f_A(1 + f_B)\cos\alpha + f_B(1 - f_A)\sin\alpha}{1 + f_A f_B}\right) = Const.$$

Equation du mouvement : $\ddot{\theta} + \boldsymbol{K_0} = \mathbf{0}$

Intégration entre les instants 0 et t:

$$\dot{\theta}(t) = -\boldsymbol{K_0 t} + \boldsymbol{\omega_0}$$

Etat final : à $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T_0}$ arrêt du disque évidé : $\dot{\theta}(\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T_0}) = 0$

$$T_0 = \frac{\omega_0}{K_0} = \frac{\omega_0(\boldsymbol{R^2} + \boldsymbol{r^2})(1 + f_B f_A)}{2\mathrm{Rg}(f_A(1 + f_B)\cos\alpha + f_B(1 - f_A)\sin\alpha)}$$

Disque plein : $\boldsymbol{r} = \mathbf{0}$

$$T'_0 = \frac{\omega_0\mathrm{R}(1 + f_B f_A)}{2\mathrm{g}(f_A(1 + f_B)\cos\alpha + f_B(1 - f_A)\sin\alpha)}$$

$\boldsymbol{T_0} = \boldsymbol{T'_0}\left(\mathbf{1} + \left(\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{R}}\right)^{\mathbf{2}}\right)$ DONC $\boldsymbol{T_0} > \boldsymbol{T'_0}$

Il faut plus de temps pour stopper un disque évidé !

7. *Puissance* :

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}_{ext} \longrightarrow S/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = [\mathcal{F}_{ext}(S)]_G \,.\, [\mathcal{V}(\mathrm{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_G$$

$$= \ _G\!\begin{Bmatrix} (-mg\sin\alpha + N_B - T_A)\,\vec{\imath} + (-mg\cos\alpha + T_B + N_A)\,\vec{\jmath} \\ -\mathrm{R}(T_A + T_B)\,\vec{\mathbf{k}} \end{Bmatrix} \ _G\!\begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}\,\vec{\mathbf{k}} \\ \vec{\mathbf{0}} \end{Bmatrix}$$

$$= -\mathrm{R}(T_A + T_B)\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\boldsymbol{m}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{R^2} + \boldsymbol{r^2})(-K_0)\,(-K_0 t + \omega_0) = \frac{\boldsymbol{m}}{\mathbf{2}}K_0^2(\boldsymbol{R^2} + \boldsymbol{r^2})\,(t - T_0)$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}_{ext} \longrightarrow S/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \frac{\boldsymbol{m}}{\mathbf{2}}K_0^2(\boldsymbol{R^2} + \boldsymbol{r^2})\,(t - T_0)$$

$\boldsymbol{t = T_0}$ $\quad\quad\quad\quad \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = 0$

$\boldsymbol{t < T_0}$: on a un mouvement de rotation et $\quad \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}) < 0$

$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\vec{\boldsymbol{g}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{0}$ car G est stationnaire: $\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \vec{0}$

$\boldsymbol{\mathcal{P}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{N_A}} + \overrightarrow{\boldsymbol{N_B}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}\right) = \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{T_A}} + \overrightarrow{\boldsymbol{T_B}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}\right) = \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}_{nc}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R})$

Théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{E_c}\,(S/\mathcal{R}) + \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\,\boldsymbol{E_p}(\boldsymbol{\mathcal{F}_c} \longrightarrow \boldsymbol{D}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}_{nc}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R})$$

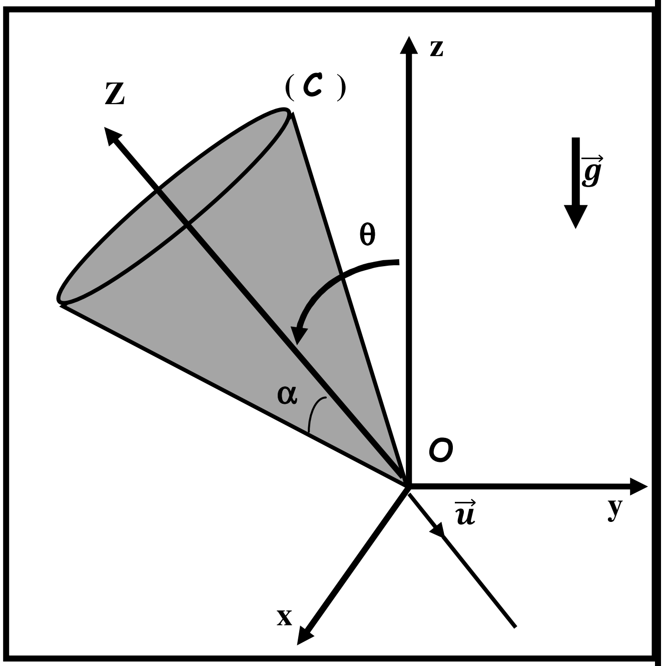
$$\mathrm{E_m}\,(S/\mathcal{R}) = \mathrm{E_c}\,(S/\mathcal{R}) + \boldsymbol{E_p}(\boldsymbol{\mathcal{F}_c} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{E_m}\,(S/\mathcal{R}) = \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}_{nc}} \longrightarrow \boldsymbol{S}/\mathcal{R}) < 0$$

Donc l'énergie mécanique n'est pas conservée : dissipation de l'énergie mécanique !

Exercice 2

On considère un cône (C) plein homogène de sommet O, de centre d'inertie G, de hauteur H, de rayon R, de masse **M** et de demi-angle au sommet α. Soit $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ (Oxyz) un repère galiléen orthonormé direct fixe de base associée ($\vec{\mathbf{i}}$,$\vec{\mathbf{j}}$,$\vec{\mathbf{k}}$). Soit $\boldsymbol{\mathcal{R}_S}(\boldsymbol{OXYZ})$ un repère orthonormé direct lié à (C) de base associée ($\vec{\mathbf{I}}$,$\vec{\mathbf{J}}$,$\vec{\mathbf{K}}$). On suppose dans tout le problème que le cône n'effectue que le mouvement de de rotation d'angle $\boldsymbol{\theta}$ autour de l'axe fixe de vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{u}}$. On exprimera tous les résultats vectoriels dans la deuxième base intermédiaire : ($\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{w}}$, $\vec{\mathbf{K}}$)



1. Montrer que : $\overrightarrow{\mathbf{OG}} = \left(\frac{\mathbf{3H}}{\mathbf{4}}\right)\vec{\mathbf{K}}$

2. Montrer, par un calcul détaillé, que la matrice d'inertie, au point O, du cône s'écrit :

$$\mathbf{II}_{\mathbf{O}}(\mathbf{C}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{\mathbf{K}})} \quad \text{avec :} \quad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{20}}\mathbf{MR^2} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\mathbf{MH^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{J} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}\mathbf{MR^2}$$

On utilisera **I** et **J** dans toute la suite du calcul !

3. Calculer le moment d'inertie I_Δ du cône par rapport à l'axe Δ (O, $\vec{\boldsymbol{k}}$) en fonction de **I** et **J** et **θ**.
4. Déterminer le torseur cinétique au point O de (C) par rapport à ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$) : $[\boldsymbol{\mathcal{C}}(\boldsymbol{C}/\,\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{O}}$
5. Déterminer le torseur dynamique au point O de (C) par rapport à ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$) : $[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{C}/\,\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{O}}$
6. Calculer l'énergie cinétique de (C) par rapport à ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$)

7. En plus de la force de gravitation d'accélération $\vec{g} = -g\,\vec{k}$, le cône est soumis la force de contact en O qu'on notera par : $\vec{R} = R_1\vec{u} + R_2\,\vec{w} + R_3\vec{K}$. Ecrire, au point O, le torseur des actions mécaniques extérieures agissant sur (C) dans ($\mathcal{R}$).
8. Calculer la puissance développée lors du mouvement de (C) par rapport à ($\mathcal{R}$). En déduire l'expression de l'énergie potentielle $E_p(\theta)$ sachant qu'en $\theta = \pi/2 - \alpha$, $E_p = 0$.
9. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, montrer que l'équation du mouvement de (C) s'écrit :

$$\ddot{\theta} - \left[\frac{3HMg}{4\,I}\right]\sin\theta = 0$$

10. Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans ($\mathcal{R}$) et montrer que $R_1 = 0$.
11. Trouver alors les composantes R_2 et R_3 en fonction de H, I, M, g et θ sachant qu'en : $\theta = \pi/2 - \alpha$, le cône a une vitesse nulle.
12. Quelles sont les forces qui travaillent dans ($\mathcal{R}$) ? Calculer éventuellement leurs travaux, de deux manières différentes, quand le cône chute de sa position verticale pour atteindre le sol.

Solution

1. Voir exercice 4 du CH 3.

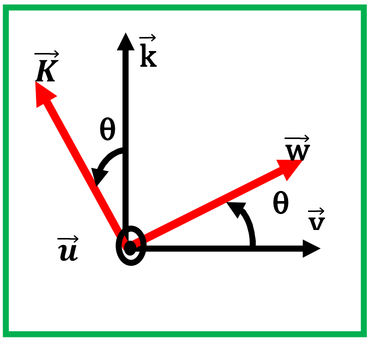
$$\overrightarrow{OG} = \frac{3H}{4}\vec{K}$$

2. Voir exercice 4 du CH 3

$$II_O(C) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{K})} \qquad \text{avec :} \quad I = \frac{3}{20}MR^2 + \frac{3}{5}MH^2 \quad \text{et} \quad J = \frac{3}{10}MR^2$$

3. ***Le moment d'inertie du Cône par rapport à l'axe $\Delta(O, \vec{k})$*** : $\quad I_\Delta = {}^T\vec{k}.II_O(C).\vec{k}$

$\vec{k} = \cos\theta\ \vec{K} + \sin\theta\,\vec{w}$



$$I_\Delta = {}^T\vec{k}.II_O(C).\vec{k} = [0 \quad \sin\theta \quad \cos\theta].\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$I_\Delta = I\ (\sin\theta)^2 + J\ (\cos\theta)^2$$

4. ***Torseur cinétique*** : $\quad [C(C/\mathcal{R})]_O = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{p}(C/\mathcal{R}) = M\,\vec{v}(G/\mathcal{R}) \\ \vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

Résultante cinétique : $\vec{p}(S/\mathcal{R}) = M\,\vec{v}(G/\mathcal{R})$

$\overrightarrow{OG} = Z_G\,\vec{K}$

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = Z_G\left(\frac{d\vec{K}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}, \qquad \left(\frac{d\vec{K}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{K}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_S} + \vec{\Omega}\ (C/\mathcal{R}) \wedge \vec{K}$$

$$\left(\frac{d\vec{K}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_S} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}\ (C/\mathcal{R}) \wedge \vec{K} = \dot{\theta}\,\vec{u} \wedge \vec{K} = -\,\dot{\theta}\,\vec{w}$$

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = -Z_G\dot{\theta}\,\vec{w} = -\left(\frac{3H}{4}\right)\dot{\theta}\,\vec{w}$$

$$\vec{p}(S/\mathcal{R}) = -\left(\frac{3MH}{4}\right)\dot{\theta}\,\vec{w}$$

<u>*Moment cinétique au point O ∈ (𝕊)*</u> : $\vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R}) = II_O(C).\vec{\Omega}\ (\mathbb{S}/\mathcal{R}) + (m_C + m_S + m_T)\vec{v}(O \in \mathbb{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{GO}$

O est fixe dans ($\mathcal{R}$) : $\vec{v}(O \in \mathbb{S}/\mathcal{R}) = \vec{0}$

$$\vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R}) = II_O(C).\vec{\Omega}\ (C/\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = I\,\dot{\theta}\,\vec{u}$$

<u>*Torseur cinétique au point O*</u> : $[C(C/\mathcal{R})]_O = {}_O\begin{Bmatrix} -\left(\frac{3MH}{4}\right)\dot{\theta}\,\vec{w} \\ I\,\dot{\theta}\,\vec{u} \end{Bmatrix}$

5. <u>*Torseur dynamique*</u>: $[D(C/\mathcal{R})]_O = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{a}(C/\mathcal{R}) = M\,\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) \\ \vec{\delta}_O(C/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

<u>*Résultante dynamique :*</u> $\vec{a}(C/\mathcal{R}) = M\,\vec{\gamma}(G/\mathcal{R})$

$$\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}(G/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -Z_G\left(\ddot{\theta}\ \vec{w} + \dot{\theta}\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}\right)$$

$$\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{w}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}\ (\mathcal{R}_2/\mathcal{R}) \wedge \vec{w} = \dot{\theta}\,\vec{u} \wedge \vec{w} = \dot{\theta}\,\vec{K}$$

$$\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) = -\left(\frac{3H}{4}\right)\left(\ddot{\theta}\ \vec{w} + \dot{\theta}^2\,\vec{K}\right)$$

$$\vec{a}(C/\mathcal{R}) = -\left(\frac{3MH}{4}\right)\left(\ddot{\theta}\ \vec{w} + \dot{\theta}^2\,\vec{K}\right)$$

<u>*Moment dynamique au point O*</u> : $\vec{\delta}_O(S/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{v}(O/\mathcal{R}) \wedge m\vec{v}(G/\mathcal{R})$

O est fixe dans ($\mathcal{R}$) : $\vec{v}(O/\mathcal{R}) = \vec{0}$

$$\vec{\delta}_O(C/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = I\ddot{\theta}\ \vec{u}$$

<u>*Torseur dynamique au point O*</u> : $[D(C/\mathcal{R})]_O = {}_O\begin{Bmatrix} -\left(\frac{3MH}{4}\right)\left(\ddot{\theta}\ \vec{w} + \dot{\theta}^2\,\vec{K}\right) \\ I\ddot{\theta}\ \vec{u} \end{Bmatrix}$

6. <u>*Energie cinétique*</u> :

$$E_c(C/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}[\mathcal{V}(C/\mathcal{R})]_O.\ [C(C/\mathcal{R})]_O = \frac{1}{2}\ {}_O\begin{Bmatrix} \dot{\theta}\,\vec{u} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}\ {}_O\begin{Bmatrix} -\left(\frac{3MH}{4}\right)\dot{\theta}\,\vec{w} \\ I\,\dot{\theta}\,\vec{u} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

7. <u>*Torseur des actions mécaniques extérieures*</u> : $[\mathcal{F}_{ext}(S)]_O = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{R}_{ext} \\ \vec{M}_{O,ext} \end{Bmatrix}$

Les forces extérieures agissant sur le cône :

Poids du cône : $\vec{P} = M\vec{g} = -Mg\,\vec{k} = -Mg\sin\theta\,\vec{w} - Mg\cos\theta\vec{K}$

La force de contact : $\vec{R} = R_1\vec{u} + R_2\,\vec{w} + R_3\vec{K}$

<u>RESULTANTE GENERALE</u>

$$\vec{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ext}} = \vec{\boldsymbol{P}} + \vec{\boldsymbol{R}} = \mathrm{R}_1\vec{\mathrm{u}} + (\mathrm{R}_2 - \boldsymbol{Mgsin\theta})\vec{\boldsymbol{w}} + (\mathrm{R}_3 - \boldsymbol{Mgcos\theta})\vec{\mathrm{K}}$$

<u>MOMENT RESULTANT AU POINT O</u> : $\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G,ext}} = \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O}}(\vec{\boldsymbol{R}}) + \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O}}(\vec{\boldsymbol{P}})$

$\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O}}(\vec{\boldsymbol{R}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{OO}} \wedge \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\mathbf{0}}$: O est le point d'application de $\vec{\boldsymbol{R}}$.

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{g} = \frac{3H}{4}\vec{\mathrm{K}} \wedge (-Mg\,\vec{k}) = -\frac{3}{4}MgH\,(\vec{\mathrm{K}} \wedge \vec{k}) = \frac{3}{4}MgHsin\theta\,\vec{\mathrm{u}}$$

Le torseur des actions mécaniques extérieures au point O est :

$$[\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{ext}}(\boldsymbol{C})]_{\boldsymbol{O}} = {}_{\boldsymbol{O}}\begin{Bmatrix} \mathbf{R_1}\vec{\mathbf{u}} + (\mathbf{R_2} - Mgsin\theta)\vec{w} + (\mathbf{R_3} - Mgcos\theta)\vec{\mathbf{K}} \\ \frac{3}{4}MgHsin\theta\,\vec{\mathrm{u}} \end{Bmatrix}$$

8. ***<u>Puissance</u>***

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{C}/\mathcal{R}) = [\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{ext}}(\boldsymbol{C})]_{\boldsymbol{O}} \cdot [\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{C}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{O}}]$$

$$= {}_{\boldsymbol{O}}\begin{Bmatrix} \mathrm{R}_1\vec{\mathrm{u}} + (\mathrm{R}_2 - \boldsymbol{Mgsin\theta})\vec{\boldsymbol{w}} + (\mathrm{R}_3 - \boldsymbol{Mgcos\theta})\vec{\mathrm{K}} \\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{MgHsin\theta}\,\vec{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \; {}_{\mathbf{O}}\begin{Bmatrix} \dot{\theta}\,\vec{\mathrm{u}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{C}/\mathcal{R}) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{MgH}\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{sin\theta}$$

Il est trivial de voir que :

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}_{ext} \longrightarrow C/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \frac{3}{4}MgH\,\dot{\boldsymbol{\theta}}\,sin\theta = -\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4}MgH\,cos\,\theta\right)$$

Ce qui permet d'écrire que :

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{C}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = -\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\,\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{C}/\boldsymbol{\mathcal{R}})$$

Donc l'énergie potentielle est de la forme :

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{MgH\,cos\,\theta} + \boldsymbol{Const}$$

$\boldsymbol{\theta} = \frac{\pi}{2} - \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\theta} = \frac{\pi}{2} - \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$ donc : $\boldsymbol{Const} = -\frac{3}{4}\boldsymbol{MgH\,sin\,\alpha}$

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{MgH}\,(\boldsymbol{cos\,\theta} - \boldsymbol{sin\,\alpha})$$

8. ***<u>Théorème de l'énergie cinétique</u>*** :

$$\frac{\mathbf{dE_c}\,(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{\mathcal{R}})}{\mathbf{dt}} = \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{C}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) + \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{int}} \longrightarrow \boldsymbol{C}/\boldsymbol{\mathcal{R}})$$

$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{int}} \longrightarrow \boldsymbol{C}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \mathbf{0}$ car solide unique

$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\mathbf{2}}$ par conséquent : $\frac{\mathbf{dE_c}(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{\mathcal{R}})}{\mathbf{dt}} = \mathbf{I}\,\dot{\boldsymbol{\theta}}\,\ddot{\boldsymbol{\theta}}$

$$\mathbf{I}\,\dot{\boldsymbol{\theta}}\,\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{3}{4}\boldsymbol{MgH}\,\dot{\boldsymbol{\theta}}\,\boldsymbol{sin\theta}$$

Ce qui donne l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} - \left[\frac{3HMg}{4\,I}\right]\sin\theta = 0$$

9. Principe fondamental dans ($\mathcal{R}$) Galiléen : $[D(S/\mathcal{R})] = [\mathcal{F}_{ext}(S)]$

Ou encore:

$$_O\begin{Bmatrix} m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) \\ \vec{\delta}_O(C/\mathcal{R}) \end{Bmatrix} = {_O}\begin{Bmatrix} \vec{R}_{ext} \\ \vec{M}_{O,ext} \end{Bmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} 0 = R_1 \\ -\left(\frac{3MH}{4}\right)\ddot{\theta} = R_2 - Mg\sin\theta \\ -\left(\frac{3MH}{4}\right)\dot{\theta}^2 = R_3 - Mg\cos\theta \\ I\ddot{\theta} = \frac{3}{4}MgH\sin\theta \end{cases}$$

Equation (1) donne $R_1 = 0$

10. En utilisant l'équation du mouvement : $\ddot{\theta} = \left[\frac{3HMg}{4\,I}\right]\sin\theta$, on obtient :

- $R_2 = -\left(\frac{3MH}{4}\right)\ddot{\theta} + Mg\sin\theta = Mg\sin\theta\left(1 - \frac{9MH^2}{16\,I}\right)$
- $R_3 = Mg\cos\theta - \left(\frac{3MH}{4}\right)\dot{\theta}^2$

L'intégration de l'équation du mouvement donne : $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\left[\frac{3HMg}{4\,I}\right]\cos\theta + Cste$

$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\dot{\theta} = 0$ donc $Cste = \left[\frac{3HMg}{4\,I}\right]\sin\alpha$

$$R_3 = Mg\cos\theta\left(1 + \frac{9MH^2}{8\,I}\right) - \frac{9M^2H^2}{8\,I}g\sin\alpha$$

11. Travaux des forces extérieures :

- $\vec{R}$ ne travaille pas dans ($\mathcal{R}$) car O est fixe dans ($\mathcal{R}$) : $\delta W(\vec{R}/\mathcal{R}) = 0$
- $\delta W(M\vec{g}/\mathcal{R}) = M\vec{g}\,.\,d\,\overrightarrow{OG} = M\vec{g}\,.\,\vec{v}(G/\mathcal{R})dt = (-Mg\vec{k}).\left(-\frac{3}{4}H\,\dot{\theta}\,\vec{w}\right) = \left(\frac{3}{4}MgH\right)(\vec{k}.\vec{w})\,\dot{\theta}dt$

$$\delta W(M\vec{g}/\mathcal{R}) = \frac{3}{4}MgH\sin\theta\, d\theta$$

Intégration entre $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

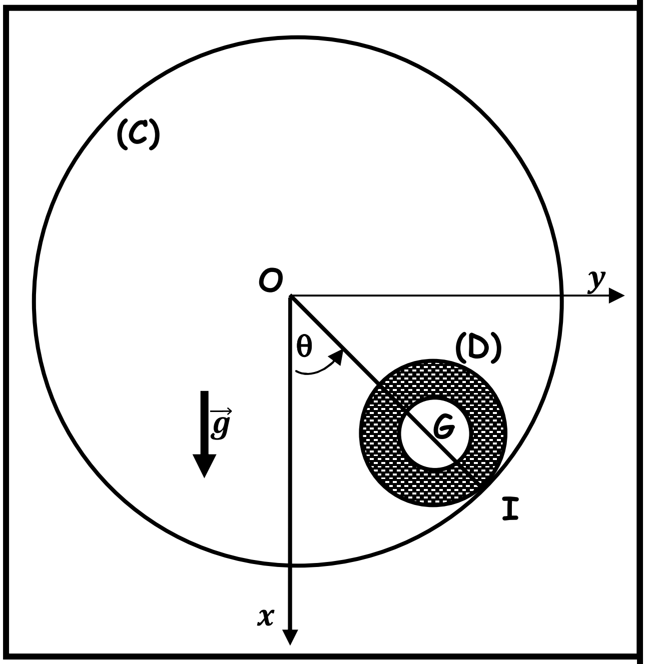
$$W(M\vec{g}/\mathcal{R}) = \frac{3}{4}MgH\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\sin\theta\, d\theta = \frac{3}{4}MgH(1 - \sin\alpha)$$

ou encore :

$\delta W(M\vec{g}/\mathcal{R}) = -d\,E_p$ car $M\vec{g}$ est une force conservative

$$W(M\vec{g}/\mathcal{R}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\delta W(M\vec{g}/\mathcal{R}) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}d\,E_p = E_p(0) - E_p\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{4}MgH(1 - \sin\alpha)$$

Exercice 3



On considère un cerceau (C) de centre O et de rayon **R**, à l'intérieur duquel roule, sans glisser au point de contact I, un disque plein homogène, de rayon **r** évidé en son centre par un trou de rayon $r/2$. Le disque évidé (D) de centre d'inertie G a une masse **M**. Soit $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère galiléen fixe d'origine O dont le vecteur $\vec{k}$ est perpendiculaire au plan vertical $(O, \vec{i}, \vec{j})$ contenant le disque évidé (D) et le cerceau (C). Le cerceau (C) est maintenu fixe dans $(\mathcal{R})$ durant tout le mouvement. Soit $\mathcal{R}'_1(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})$ un repère en rotation autour de l'axe (Oz) et dont l'axe (Ox_1) passe constamment par le centre de masse G du disque évidé (D). L'angle θ caractérise la rotation du repère $(\mathcal{R}_1)$ par rapport à $(\mathcal{R})$. On donne $\vec{\Omega}(D/\mathcal{R}) = \dot{\varphi}\,\vec{k}$ et $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'_1/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\,\vec{k}$. On exprimera tous les résultats vectoriels dans la base: $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})$.

A. Cinématique

1. Déterminer la condition de roulement sans glissement du disque évidé (D) par rapport au cerceau (C) au point I. En déduire le torseur cinématique au point I de (D) par rapport à $(\mathcal{R})$ en fonction de R, r et $\dot{\theta}$
2. Déterminer le moment central et l'axe central du torseur cinématique. Trouver le centre instantané de rotation.
3. Trouver les équations de la base et de la roulante du mouvement plan sur plan de (D) par rapport à $(\mathcal{R})$.

B. Cinétique

1. Montrer, par un calcul détaillé, que la matrice d'inertie, au point G, du disque évidé (D) s'écrit sous la forme:

$$\mathrm{II}_G(D) = \frac{5}{16} M r^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{k})}$$

2. Déterminer, le torseur cinétique au point G de (D) par rapport à $(\mathcal{R})$: $[\mathcal{C}(D/\mathcal{R})]_G$
3. Déterminer, le torseur dynamique au point G de (D) par rapport à $(\mathcal{R})$: $[\mathcal{D}(D/\mathcal{R})]_G$
4. Déterminer, en fonction de M, R, r et $\dot{\theta}$, l'énergie cinétique de (D) par rapport à $(\mathcal{R})$

C. Dynamique

1. Ecrire, au point G, le torseur des actions mécaniques extérieures agissant sur (D) dans $(\mathcal{R})$.
2. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, déterminer l'équation du mouvement de (D) par rapport à $(\mathcal{R})$.
3. Trouver les composantes, normale et de frottement N et T, de la force de contact au point I en fonction de θ, M et g sachant qu'à l'instant initial $\theta(t=0) = \theta_0$ le disque évidé (D) est lâché sans vitesse initiale. Pour quel angle θ_d, le disque (D) décolle–t-il du cerceau ?
4. Calculer la puissance développée dans le mouvement de (D) par rapport à $(\mathcal{R})$ et éventuellement l'énergie potentielle $E_p(\theta)$ sachant qu'en $\theta = 0$, $E_p(\theta = 0) = 0$. L'énergie mécanique, est-elle conservée ?

Solution

A. Cinématique

1. ***Vitesse de glissement*** : $\vec{v}_g(\mathrm{I};\ \mathrm{D/C}) = \vec{v}(I \in \mathrm{D}/C) = \vec{v}(I \in \mathrm{D}/\mathcal{R}) - \vec{v}(I \in \mathrm{C}/\mathcal{R})$

(C) est fixe dans $(\mathcal{R})$: $\vec{v}(I \in \mathrm{C}/\mathcal{R}) = \vec{0}$

$\vec{v}(I \in \mathrm{D}/C) = \vec{v}(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}\ (\mathrm{D}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{GI}}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = (\mathbf{R}-\mathbf{r})\,\vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}}$;

$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = (\mathbf{R}-\mathbf{r})\left(\frac{d\vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = (\mathbf{R}-\mathbf{r})\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}} \wedge \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{R}-\mathbf{r})\dot{\theta}\,\vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{1}}$

$\vec{\Omega}\ (\mathrm{D}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{GI}} = \dot{\varphi}\,\vec{\mathrm{k}} \wedge \mathrm{r}\,\vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{\varphi}}\,\vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{1}}$

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{g}}(\mathbf{I};\ \mathbf{D/C}) = \left((\mathbf{R}-\mathbf{r})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right)\vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{1}}$$

Roulement sans glissement : $\vec{v}_g(\mathrm{I};\ \mathrm{D/C}) = \vec{0}$; $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\dot{\theta} + \boldsymbol{r}\dot{\varphi} = 0$

$$\dot{\varphi} = -\left(\frac{R-r}{r}\right)\dot{\theta}$$

Torseur cinématique au point I :

$$[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{D}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{I}} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}\ (\mathbf{D}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \\ \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{I} \in \mathbf{D}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{I}} = \begin{Bmatrix} -\left(\frac{\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}}\right)\dot{\boldsymbol{\theta}}\,\vec{\mathbf{k}} \\ \vec{\mathbf{0}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{I}}$$

2. *Invariant scalaire* : $\boldsymbol{I}_{[\boldsymbol{\mathcal{V}}\,]} = \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{I} \in \mathbf{D}/\boldsymbol{\mathcal{R}}).\,\vec{\Omega}\ (\boldsymbol{D}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \mathbf{0}$ et $\vec{\Omega}\ (\boldsymbol{D}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \neq \vec{\mathbf{0}}$

Le torseur cinématique est un glisseur, par conséquent le moment central est nul.

$\vec{\Omega}\ (\boldsymbol{D}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \neq \vec{\mathbf{0}}$: l'axe central ((Δ) existe et est de vecteur directeur $\vec{\Omega}\ (\boldsymbol{D}/\boldsymbol{\mathcal{R}})$.

Comme, $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{D}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]$ est un glisseur et $\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{I} \in \mathbf{D}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \vec{\mathbf{0}}$ alors l'axe central est la droite $\Delta(\boldsymbol{I},\vec{\mathbf{k}})$ qui passe par le point I et de vecteur directeur $\vec{\mathbf{k}}$, c'est l'axe (Iz)

Centre instantané de rotation (CIR)

Soit $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\boldsymbol{D}}(\mathrm{G};\vec{\mathbf{I}},\vec{\mathbf{J}},\vec{\mathbf{k}})$ un référentiel lié au disque évidé (D).

Soit $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{O};\vec{\boldsymbol{\imath}},\vec{\boldsymbol{\jmath}})$ le plan de $(\boldsymbol{\mathcal{R}}\,)$ qui est perpendiculaire à $\vec{\boldsymbol{k}}$. On a un mouvement plan sur plan.

Soit $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{D}}\left(\boldsymbol{G};\ \vec{\mathbf{I}},\vec{\mathbf{J}}\right)$ le plan de $(\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\boldsymbol{D}})$qui est perpendiculaire à $\vec{\boldsymbol{k}}$ et parallèle à $\boldsymbol{\Pi}$. $\Delta(I,\vec{k})$ étant l'axe central,

Comme : $\overrightarrow{GI} = r\,\vec{\mathrm{i}}_1$ alors $\overrightarrow{GI}.\vec{k} = 0$. De plus $G \in \Pi_{\mathrm{D}}$ par conséquent : $I \in \Pi_{\mathrm{D}}$. Donc : $I \in \Pi_{\mathrm{D}} \cap \Delta$

$\vec{v}(I \in D/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \vec{0}$ car I est un point central et $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(D/\boldsymbol{\mathcal{R}})]$ est un glisseur

Donc $I \equiv$ C.I.R.

3. ***Base*** : Trajectoire de $I(x,y,z)$ dans $\mathcal{R}(\mathrm{O},\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}},\vec{\mathrm{k}})$.

$\overrightarrow{OI} = R\,\vec{\mathrm{i}}_1$, comme $\vec{\mathrm{i}}_1$ varie dans $(\mathcal{R})$, alors la base est le cercle de centre O et de rayon R

Roulante : Trajectoire de $I(x,y,z)$ de $\mathcal{R}_D(G;\vec{\mathbf{I}},\vec{\mathbf{J}},\vec{\mathbf{k}})$ lié au disque (D)

$\overrightarrow{GI} = r\,\vec{\imath}_1$, comme $\vec{\imath}_1$ varie dans $(\mathcal{R}_D)$, alors la roulante est le cercle de centre G et de rayon r

B. Cinétique

1. Soit $\mathcal{R}_D(GXYZ)$ un repère lié à (D) de base $(\vec{\mathbf{I}},\vec{\mathbf{J}},\vec{\mathbf{k}})$. (GZ) est un axe de symétrie de révolution pour (D). Donc $(\mathcal{R}_D)$ est un repère principal d'inertie.

$$\mathbf{II}_{\mathbf{G}}(\mathbf{D}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A_G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A_G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C_G} \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{\mathbf{k}})}$$

(D) appartient au plan (GXY) perpendiculaire à $\vec{\mathbf{k}}$. Donc $Z = 0$ et $\mathbf{2\,A_G = C_G}$

Masse élémentaire : $\boldsymbol{dm = \sigma\, ds}$

(D) est homogène : $\sigma = \mathrm{C_{TE}}$. $\mathrm{M} = \boldsymbol{\sigma}\,S$

$$\boldsymbol{S = \int_{r/2}^{r}\int_{0}^{2\pi} r'dr'd\theta = \pi\left(r^2 - \frac{r^2}{4}\right) = \frac{3}{4}\pi r^2}$$

$$\mathrm{C_G} = \int_{(S)} \boldsymbol{(X^2+Y^2)dm = \sigma \int_{r/2}^{r}\int_{0}^{2\pi} r'^3 dr'd\theta = \frac{5}{8}Mr^2}$$

$$\mathbf{II}_{\mathbf{G}}(\mathbf{D}) = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{16}}\mathbf{Mr^2}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix}_{(-,-,\ \vec{\mathbf{k}})}$$

2. ***Torseur cinétique*** : $[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{D}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\mathbf{G}}\left\{\begin{matrix} \vec{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \boldsymbol{M}\,\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \\ \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{G}}(\mathbf{D}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \end{matrix}\right\}$

Résultante cinétique : $\vec{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \boldsymbol{M}\,\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \mathbf{M}(R-r)\dot{\theta}\,\vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{1}}$

Résultante cinétique au point G : $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{II_G}(\boldsymbol{D}).\vec{\Omega}\ (\mathrm{D}/\mathcal{R})$

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \frac{5}{16}\mathrm{Mr}^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ -\left(\frac{R-r}{r}\right)\dot{\theta} \end{bmatrix} = -\frac{5}{8}\mathrm{Mr}(R-r)\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}}$$

Torseur cinétique au point G : $[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{D}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\mathbf{G}}\left\{\begin{matrix} \mathbf{M}(R-r)\dot{\theta}\,\vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{1}} \\ -\frac{5}{8}\mathrm{Mr}(R-r)\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}} \end{matrix}\right\}$

3. ***Torseur dynamique***: $[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\boldsymbol{G}}\left\{\begin{matrix} \vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{M}\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}) \end{matrix}\right\}$

Résultante cinétique : $\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}) = \boldsymbol{M}\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R})$

$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = (\mathbf{R}-\mathbf{r})\dot{\theta}\,\vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{1}}$

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}(G/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = (\mathbf{R}-\mathbf{r})\left(\ddot{\theta}\ \ \vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{1}} + \dot{\theta}\left(\frac{d\vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{1}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}\right)$$

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{j}}_1}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{\mathbf{j}}_1}{dt}\right)_{\mathcal{R}'_1} + \vec{\Omega}\ (\mathcal{R}'_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{\mathbf{j}}_1 = \dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}} \wedge \vec{\mathbf{j}}_1 = -\,\dot{\theta}\,\vec{\mathbf{i}}_1$$

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) = (\mathbf{R}-\mathbf{r})\left(-\,\dot{\theta}^2\,\vec{\mathbf{i}}_1 + \ddot{\theta}\ \ \vec{\mathbf{j}}_1\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{C}/\mathcal{R}) = M(\mathbf{R}-\mathbf{r})\left(-\,\dot{\theta}^2\,\vec{\mathbf{i}}_1 + \ddot{\theta}\ \ \vec{\mathbf{j}}_1\right)$$

<u>*Moment dynamique au point G*</u> : $\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{D}/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{\sigma}_G(\mathbf{D}/\mathcal{R})}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -\frac{5}{8}\mathrm{Mr}(R-r)\,\ddot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}}$

<u>*Torseur dynamique au point G*</u> : $[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\boldsymbol{O}}\begin{Bmatrix} M(\mathbf{R}-\mathbf{r})\left(-\,\dot{\theta}^2\,\vec{\mathbf{i}}_1 + \ddot{\theta}\ \ \vec{\mathbf{j}}_1\right) \\ -\frac{5}{8}\mathrm{Mr}(R-r)\,\ddot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}} \end{Bmatrix}$

4. <u>***Energie cinétique***</u> :

$$\boldsymbol{E_c}(\boldsymbol{D}/\mathcal{R}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{D}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}}.\,[\boldsymbol{C}(\mathbf{D}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} -\left(\frac{R-r}{r}\right)\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}} \\ (R-r)\dot{\theta}\,\vec{\mathbf{j}}_1 \end{Bmatrix}\ {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} \mathbf{M}(R-r)\dot{\theta}\,\vec{\mathbf{j}}_1 \\ -\frac{5}{8}\mathrm{Mr}(R-r)\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E_c}(\boldsymbol{D}/\mathcal{R}) = \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{16}}\mathbf{M}(R-r)^2\dot{\theta}^2$$

C. <u>Dynamique</u>

1. <u>***Torseur des actions mécaniques***</u> : $[\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}}(\boldsymbol{D})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ext}} \\ \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{ext}} \end{Bmatrix}$

<u>*Résultante générale*</u> : $\vec{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ext}} = \vec{\boldsymbol{P}} + \vec{\boldsymbol{T}} + \vec{\boldsymbol{N}} = (\boldsymbol{Mgcos\theta}\ -\mathbf{N})\,\vec{\mathbf{i}}_1 + (\mathbf{T}-\boldsymbol{Mgsin\theta})\ \vec{\mathbf{j}}_1$

<u>*Moment résultant au point G*</u> : $\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{ext}} = \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{T}}) + \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{N}}) + \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{P}})$

- $\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{T}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{GI}} \wedge \vec{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{r}\,\vec{\mathbf{i}}_1 \wedge \boldsymbol{T}\,\vec{\mathbf{j}}_1 = \mathbf{rT}\,\vec{\mathbf{k}}$
- $\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{N}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{GI}} \wedge \vec{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{r}\,\vec{\mathbf{i}}_1 \wedge -\boldsymbol{N}\vec{\mathbf{i}}_1 = \vec{\mathbf{0}}$
- $\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{P}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{GG}} \wedge \boldsymbol{M}\vec{\boldsymbol{g}} = \vec{\mathbf{0}}$: car G est le point d'application de $\vec{\boldsymbol{P}}$

Le torseur des actions mécaniques extérieures au point G est :

$$[\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}}(\boldsymbol{D})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} (\boldsymbol{Mgcos\theta}\ -\mathbf{N})\,\vec{\mathbf{i}}_1 + (\mathbf{T}-\boldsymbol{Mgsin\theta})\ \vec{\mathbf{j}}_1 \\ \mathbf{rT}\,\vec{\mathbf{k}} \end{Bmatrix}$$

2. Principe fondamental dans ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$) Galiléen : $[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}/\boldsymbol{\mathcal{R}})] = [\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}}(\boldsymbol{D})]$

Ou encore:
$$ {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \end{Bmatrix} = {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ext}} \\ \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{ext}} \end{Bmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} Mgcos\theta\ -\mathbf{N} = -\boldsymbol{M}(\mathrm{R}-\mathrm{r})\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\mathbf{2}} \\ \mathbf{T} - Mgsin\theta = \boldsymbol{M}(\mathrm{R}-\mathrm{r})\ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ \\ \mathrm{r}\,\mathrm{T} = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}\mathbf{Mr}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\,\ddot{\boldsymbol{\theta}} \end{cases}$$

Equation (3) donne : $\mathbf{T} = -\frac{5}{8}\mathbf{M}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\,\ddot{\boldsymbol{\theta}}$

On remplace dans (2) et on obtient l'équation du mouvement:

$$\ddot{\theta} + \left[\frac{8\,\mathrm{g}}{13\,(R-r)}\right]\sin\theta = 0$$

3. ***Composantes normale et tangentielle de la force de contact*** :

D'après l'équation du mouvement, on a : $\ddot{\theta} = -\left[\frac{8\,\mathrm{g}}{13\,(R-r)}\right]\sin\theta$

Composante tangentielle : $\mathbf{T}(\theta) = \frac{5}{13}\mathrm{Mg}\sin\theta$

Composantes normale :

$\mathrm{N} = M(\mathbf{R}-\mathbf{r})\dot{\theta}^2 + \boldsymbol{Mg\cos\theta}$

Intégration de l'équation du mouvement donne : $\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^2 - \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}_0^2 = \left[\frac{8\,\mathbf{g}}{13\,(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})}\right](\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} - \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}_0)$

$\boldsymbol{t} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t}=\mathbf{0}) = \boldsymbol{\theta}_0$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{t}=\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (le disque est lâché sans vitesse initiale)

$$\mathbf{N}(\theta) = \frac{29}{13}\mathrm{Mg}\left(\cos\theta - \frac{16}{29}\cos\theta_0\right)$$

Décollement si $\mathbf{N}(\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ $\qquad \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}_\mathbf{d} = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{29}}\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}_\mathbf{0}$

4. ***Puissance***:

$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{D}/\mathcal{R}) = [\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}}(\boldsymbol{D})]_{\boldsymbol{G}} . [\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{C}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}}$

$$= \left\{\begin{matrix}(\boldsymbol{Mg\cos\theta} - \mathrm{N})\,\vec{\mathbf{i}}_\mathbf{1} + (\mathrm{T} - \boldsymbol{Mg\sin\theta})\;\vec{\mathbf{j}}_\mathbf{1} \\ \mathbf{rT}\,\vec{\mathrm{k}}\end{matrix}\right\}_{\boldsymbol{G}} \left\{\begin{matrix}-\left(\frac{R-r}{r}\right)\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}} \\ (R-r)\dot{\theta}\,\vec{\mathbf{j}}_\mathbf{1}\end{matrix}\right\}_{\boldsymbol{G}}$$

$$= (\mathrm{T} - \boldsymbol{Mg\sin\theta})(R-r)\dot{\theta} - (R-r)T\dot{\theta}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{D}/\mathcal{R}) = -\boldsymbol{Mg}(R-r)\boldsymbol{\sin\theta}\dot{\theta}$$

ou encore :

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{D}/\mathcal{R}) = \frac{\mathrm{dE_c}\,(D/\mathcal{R})}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{8}}\mathbf{M}(R-r)^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{8}}\mathbf{M}(R-r)^2\dot{\theta}\left(-\left[\frac{8\,\mathrm{g}}{13\,(R-r)}\right]\sin\theta\right)$$

$$= -\boldsymbol{Mg}(R-r)\boldsymbol{\sin\theta}\dot{\theta}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{C}/\mathcal{R}) = -\boldsymbol{Mg}(R-r)\boldsymbol{\sin\theta}\theta = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}(\boldsymbol{Mg}(R-r)\,\boldsymbol{\cos\theta})$$

Comme : $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}} \longrightarrow \boldsymbol{C}/\mathcal{R}) = -\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\boldsymbol{E_p}(\boldsymbol{\mathcal{F}_c} \longrightarrow \boldsymbol{D}/\mathcal{R})$

$\boldsymbol{E_p}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{Mg}(R-r)\,\boldsymbol{\cos\theta} + \boldsymbol{Const}$

$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{E_p}(\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ $\qquad$ donc $\qquad \boldsymbol{Const} = -\boldsymbol{Mg}(R-r)$

$$\boldsymbol{E_p}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{Mg}(R-r)(\mathbf{1} - \boldsymbol{\cos\theta})$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique : $\mathcal{P}(\mathcal{F}_{ext} \longrightarrow D/\mathcal{R}) = \frac{\mathrm{dE_c}(D/\mathcal{R})}{\mathrm{dt}}$

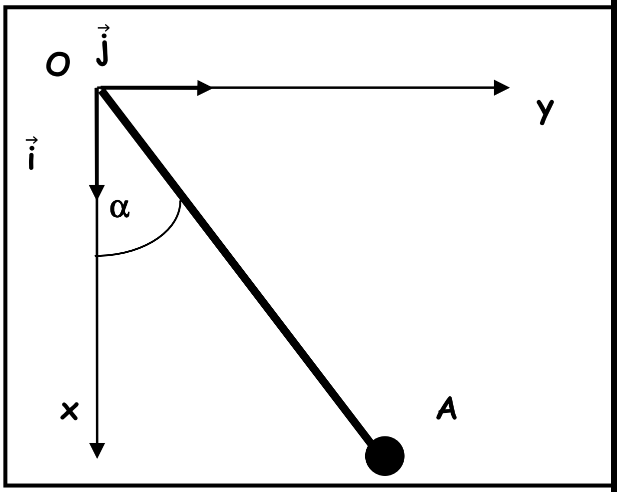
$$\mathcal{P}(\mathcal{F}_{ext} \longrightarrow D/\mathcal{R}) = -\frac{d}{dt}\, E_p(\mathcal{F}_c \longrightarrow D/\mathcal{R}) = \frac{\mathrm{dE_c}\,(D/\mathcal{R})}{\mathrm{dt}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{E_c}\,(D/\mathcal{R}) + \frac{d}{dt}\, E_p(\mathcal{F}_c \longrightarrow D/\mathcal{R}) = 0$$

$$\mathrm{E_m}\,(D/\mathcal{R}) = \mathrm{E_c}\,(D/\mathcal{R}) + E_p(\mathcal{F}_c \longrightarrow D/\mathcal{R}) = Conste$$

Donc l'énergie mécanique est conservée : pas de dissipation de l'énergie.

Exercice 4



On considère un système (S) constitué d'une tige (OA) homogène de masse **M**, de longueur L et de centre d'inertie G_1 à l'extrémité de laquelle on soude en A une masselotte de masse **m**. Le système (S), de centre d'inertie **G**, est en liaison pivot parfaite d'axe $(O, \vec{k})$ avec le bâti. On négligera les moments de résistance au pivotement et au roulement. Soient deux repères : $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié au bâti fixe et $\mathcal{R}_1(G;\ \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})$ lié au système (S) tel que : $\overrightarrow{OA} = L\,\vec{i}_1$ et $\alpha = (\vec{i}, \vec{i}_1)$.

1. Montrer que : $\overrightarrow{OG} = OG\ \vec{i}_1$. On exprimera OG en fonction de M, m et L.
2. Déterminer le torseur cinématique : $[\mathcal{V}\,(S/\mathcal{R})]_G$. Préciser sa nature et déterminer son moment central.
3. Trouver son axe central et la position du centre instantané de rotation.
4. Montrer, par un calcul détaillé, que la matrice d'inertie, au point G, du système (S) s'écrit :

$$II_{\,G}(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_G & 0 \\ 0 & 0 & I_G \end{bmatrix}_{(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})} \qquad avec \qquad I_G = \frac{ML^2}{12}\left(1 + \frac{3m}{M+m}\right).$$

On utilisera, I_G, dans toute la suite du calcul !

5. En déduire la matrice d'inertie, au point O, du système (S) : $II_{\,O}(S)$.
6. Calculer le moment d'inertie $I_{\Delta G}$, en fonction de I_G, du système (S), par rapport à l'axe $\Delta_G(G, \vec{u})$ avec $\vec{u}$ (0,L,0) vecteur de $(\mathcal{R}_1)$. En déduire le moment d'inertie I_Δ par rapport à l'axe $\Delta(O, \vec{u})$.
7. Déterminer le torseur cinétique au point G de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$: $[\mathcal{C}(S/\,\mathcal{R})]_G$
8. Déterminer le torseur dynamique au point G de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$: $[D(S/\,\mathcal{R})]_G$
9. Calculer l'énergie cinétique de S par rapport à $(\mathcal{R})$
10. Ecrire, au point G, le torseur des actions mécaniques extérieures agissant sur (S) dans $(\mathcal{R})$ supposé Galiléen. On notera : $\vec{R} = R_1\vec{i} + R_2\vec{j} + R_3\vec{k}$ la résultante générale du torseur d'action mécanique de contact en O.

11. Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$) et déterminer l'équation du mouvement de (S) dans ($\boldsymbol{\mathcal{R}}$).

12. En déduire les composantes de $\vec{\boldsymbol{R}}$ sachant qu'à l'instant initial, $\alpha = \pi/2$ le système est lâché sans vitesse initiale.

Solution

1. ***Centre d'inertie*** :

$\boldsymbol{G_1}$ est le centre d'inertie de $(\boldsymbol{OA})$

$$(m+M)\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = M\overrightarrow{\boldsymbol{O}G_1} + m\overrightarrow{\boldsymbol{O}A}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \frac{M}{m+M}\overrightarrow{\boldsymbol{O}G_1} + \frac{m}{m+M}\overrightarrow{\boldsymbol{O}A} = \frac{1}{m+M}\left(\mathbf{M}\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{2}} + m\,L\right)\vec{\imath_1} = \boldsymbol{OG}\,\vec{\imath_1}$$

avec $\boldsymbol{OG} = \left(\frac{M+2m}{2(m+M)}\right)L$

2. ***Torseur cinématique*** : $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}\ (\mathrm{S}/\mathcal{R}) \\ \vec{v}(G/\mathcal{R}) \end{Bmatrix}$

$\vec{\Omega}\ (\mathrm{S}/\mathcal{R}) = \dot{\alpha}\,\vec{\mathrm{k}}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{OG}} = \boldsymbol{OG}\,\vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}}$;

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{OG}\left(\frac{d\vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{OG}\,\dot{\alpha}\,\vec{\mathrm{k}} \wedge \vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{OG}\,\dot{\alpha}\,\vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{1}} = \left(\frac{M+2m}{2(m+M)}\right)L\dot{\alpha}\,\vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{1}}$$

Torseur cinématique : $$[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]_{\boldsymbol{G}} = {}_{\boldsymbol{G}}\begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{\mathbf{k}} \\ \left(\frac{\boldsymbol{M+2m}}{\boldsymbol{2(m+M)}}\right)\boldsymbol{L}\dot{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{\mathbf{j}}_{\mathbf{1}} \end{Bmatrix}$$

Invariant scalaire : $\boldsymbol{I}_{[\mathcal{V}]} = \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}}).\ \vec{\Omega}\ (\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \mathbf{0}$

et $\vec{\Omega}\ (\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \neq \vec{\mathbf{0}}$ donc le torseur cinématique est un glisseur, par conséquent le moment central est nul.

3. Axe central

$\vec{\Omega}\ (\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) \neq \vec{\mathbf{0}}$: l'axe central (Δ) existe et est de vecteur directeur $\vec{\Omega}\ (\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})$.

Comme $[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}})]$ est un glisseur et $\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{O} \in \boldsymbol{S}/\boldsymbol{\mathcal{R}}) = \vec{\mathbf{0}}$

alors l'axe central est la droite $\Delta(\boldsymbol{O}, \vec{\mathbf{k}})$ qui passe par le point O et de vecteur directeur $\vec{\mathbf{k}}$.

C'est l'axe (Oz)

Centre instantané de rotation

$O \in \Delta$ et $\vec{v}(O \in \mathrm{S}/\mathcal{R}) = \vec{0}$;

$O \in plan\ \Pi(G;\ \vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1)$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{OG}}.\vec{\mathrm{k}} = \mathbf{0}$ **;** $O \in \Delta \cap \Pi$:

Donc $CIR \equiv O$

4. Matrice d'inertie au point G

L'axe $(\boldsymbol{G_1}\,\vec{\boldsymbol{i}}_1)$ est un axe de symétrie de révolution matérielle de la tige (OA), donc $(\boldsymbol{G};\ \vec{\boldsymbol{i}}_1, \vec{\boldsymbol{j}}_1, \vec{\boldsymbol{k}})$ est un repère principe d'inertie.

La tige est disposée selon l'axe $(\boldsymbol{G_1}\,\vec{\boldsymbol{i}}_1)$: $\boldsymbol{y_1 = z_1 = 0}$

La matrice d'inertie de la tige est : $\boldsymbol{II}_{G_1}(\boldsymbol{OA}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B_1} \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$

$$\boldsymbol{B_1 = \int_{(OA)} x_1^2\, dm}$$

Masse élémentaire: $\boldsymbol{dm = \lambda\, dx_1}$

Tige (OA) homogène : $\boldsymbol{\lambda = Cste \quad M = \lambda L}$

$$B_1 = \boldsymbol{\lambda} \int_{-\mathbf{L}/2}^{\mathbf{L}/2} x_1{}^{\mathbf{2}}\, \boldsymbol{d}x_1 = \frac{\mathbf{2M}}{\mathbf{L}} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{L}/2} x_1{}^{\mathbf{2}}\, \boldsymbol{d}x_1 = \frac{\mathbf{M}L^{\mathbf{2}}}{\mathbf{12}}$$

$$II_{G_1}(OA) = \frac{\mathbf{M}L^{\mathbf{2}}}{\mathbf{12}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$$

Théorème de Huygens : $II_G(OA) = II_{G_1}(OA) + II_G(G_1, M)$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{G}G_1} = \overrightarrow{\boldsymbol{GO}} + \overrightarrow{\boldsymbol{O}G_1} = -\left(\frac{M+2m}{2(m+M)}\right) L\vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}} + \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{2}}\vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}} = -\frac{mL}{2(m+M)}\vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}}$$

$$II_G(G_1, M) = \frac{Mm^2L^2}{4(m+M)^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$$

$$II_G(OA) = \left(\frac{\mathbf{M}L^{\mathbf{2}}}{\mathbf{12}} + \frac{Mm^2L^2}{4(m+M)^2}\right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$$

Matrice d'inertie du système : $(\boldsymbol{S}) = (\boldsymbol{OA}) \cup \{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{m})\}$

$$II_G(S) = II_G(OA) + II_G(A, m))$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{G}A} = \overrightarrow{\boldsymbol{GO}} + \overrightarrow{\boldsymbol{O}A} = -\left(\frac{M+2m}{2(m+M)}\right) L\vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}} + \mathbf{L}\vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}} = \frac{ML}{2(m+M)}\vec{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}}$$

$$II_G(A, m) = \frac{mM^2L^2}{4(m+M)^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$$

Finalement :

$$II_G(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_G & 0 \\ 0 & 0 & I_G \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})} \quad avec\ \ I_G = \frac{ML^2}{12}\left(1 + \frac{3m}{M+m}\right)$$

5. Matrice d'inertie au point O :

Théorème de Huygens : $II_O(S) = II_G(S) + II_O(G, m+M)$

$$II_G(G, m+M) = \frac{(M+2m)^2L^2}{4(m+M)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$$

$$II_O(S) = \left(I_G + \frac{(M+2m)^2L^2}{4(m+M)}\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k})}$$

6. *Moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe* $\Delta_G(G,\vec{u})$:

Vecteur unitaire de $\vec{u}$ est : $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\vec{\mathbf{u}}}{\|\vec{\mathbf{u}}\|} = \vec{j}_1$

$$\mathbf{I}_{\Delta_G} = {}^t\hat{\mathbf{u}}.\mathbf{II_G(S)}.\hat{\mathbf{u}} = [0 \quad 1 \quad 0].\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_G & 0 \\ 0 & 0 & I_G \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = I_G$$

Théorème de Huygens $I_\Delta = I_{\Delta_G} + (m+M)d^2$

La distance entre les deux axes est : $d(G,\Delta) = OG = \left(\frac{M+2m}{2(m+M)}\right)L$

Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Δ est:

$$\mathbf{I}_\Delta = I_G + (m+M)\left(\frac{M+2m}{2(m+M)}\right)^2 L^2 = I_G + \frac{(M+2m)^2}{4(m+M)}L^2$$

7. *Torseur cinétique* : $[C(S/\mathcal{R})]_G = \left\{\begin{matrix} \vec{p}(S/\mathcal{R}) = (m+M)\,\vec{v}(G/\mathcal{R}) \\ \vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}) \end{matrix}\right\}_G$

Résultante cinétique : $\vec{p}(S/\mathcal{R}) = (m+M)\,\vec{v}(G/\mathcal{R})$

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \left(\frac{M+2m}{2(m+M)}\right)L\dot{\alpha}\,\vec{\mathbf{j}}_1$$

$$\vec{p}(S/\mathcal{R}) = \frac{(M+2m)L}{2}\dot{\alpha}\,\vec{\mathbf{j}}_1$$

Moment cinétique au point G : $\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}) = II_G(S).\vec{\Omega}\ (S/\mathcal{R}) = I_G\,\dot{\alpha}\,\vec{k}$

Torseur cinétique au point G : $[C(S/\mathcal{R})]_G = \left\{\begin{matrix} \frac{(M+2m)L}{2}\dot{\alpha}\,\vec{\mathbf{j}}_1 \\ I_G\,\dot{\alpha}\,\vec{k} \end{matrix}\right\}_G$

8. *Torseur dynamique* : $[D(S/\mathcal{R})] = \left\{\begin{matrix} (m+M)\,\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) \\ \vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}) \end{matrix}\right\}_G$

Résultante dynamique : $\vec{a}(S/\mathcal{R}) = (m+M)\,\vec{\gamma}(G/\mathcal{R})$

$$\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}(G/\mathcal{R})}{dt}\right)_\mathcal{R} = \frac{(M+2m)L}{2(M+m)}\left(\ddot{\alpha}\quad \vec{\mathbf{j}}_1 + \dot{\alpha}\left(\frac{d\,\vec{\mathbf{j}}_1}{dt}\right)_\mathcal{R}\right)$$

$$\left(\frac{d\,\vec{\mathbf{j}}_1}{dt}\right)_\mathcal{R} = \dot{\alpha}\,\vec{k}\wedge\vec{\mathbf{j}}_1 = -\,\dot{\alpha}\,\vec{\mathbf{i}}_1$$

$$\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}) = \frac{(M+2m)L}{2(M+m)}(-\,\dot{\alpha}^2\,\vec{\mathbf{i}}_1 + \ \ddot{\alpha}\ \ \vec{\mathbf{j}}_1)$$

$$\vec{a}(S/\mathcal{R}) = \frac{(M+2m)L}{2}(-\,\dot{\alpha}^2\,\vec{\mathbf{i}}_1 + \ \ddot{\alpha}\ \ \vec{\mathbf{j}}_1)$$

Moment dynamique au point G : $\vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R})}{dt}\right)_\mathcal{R} = I_G\,\ddot{\alpha}\,\vec{k}$

Torseurt dynamique au point G : $$[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})] = \left\{\begin{matrix} \frac{(M+2m)L}{2}(-\dot{\alpha}^2\,\vec{\mathbf{i}}_\mathbf{1} + \ddot{\alpha}\,\vec{\mathbf{j}}_\mathbf{1}) \\ I_G\,\ddot{\alpha}\,\vec{\mathrm{k}} \end{matrix}\right\}_G$$

9. *Energie cinétique* :

$$\boldsymbol{E_c}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}}.\,[\boldsymbol{C}(\mathbf{S}/\mathcal{R})]_{\boldsymbol{G}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left\{\begin{matrix} \dot{\alpha}\,\vec{\mathrm{k}} \\ \left(\frac{M+2m}{2(m+M)}\right)L\dot{\alpha}\,\vec{\mathbf{j}}_\mathbf{1} \end{matrix}\right\}_G \left\{\begin{matrix} \frac{(M+2m)L}{2}\dot{\alpha}\,\vec{\mathbf{j}}_\mathbf{1} \\ I_G\,\dot{\alpha}\,\vec{\mathrm{k}} \end{matrix}\right\}_G = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{I}_\mathbf{\Delta}\dot{\alpha}^2$$

10. *Torseur des actions mécaniques* : $[\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}}(\boldsymbol{S})]_{\boldsymbol{G}} = \left\{\begin{matrix} \vec{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ext}} \\ \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{ext}} \end{matrix}\right\}_G$

Poids: $\vec{\boldsymbol{P}} = (\boldsymbol{m}+\boldsymbol{M})\,\vec{\boldsymbol{g}}$

La force de contact en O: $\vec{\mathrm{R}} = \mathrm{R}_1\vec{\imath} + \mathrm{R}_2\vec{\jmath} + \mathrm{R}_3\vec{\mathrm{k}}$

Résultante générale : $\vec{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ext}} = \vec{\boldsymbol{P}} + \vec{\boldsymbol{R}} = (\mathrm{R}_1 + (\boldsymbol{m}+\boldsymbol{M})\boldsymbol{g})\vec{\imath} + \mathrm{R}_2\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \mathrm{R}_3\vec{\mathrm{k}}$

Moment résultant au point G : $\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{ext}} = \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{R}}) + \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{P}})$

- $\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{R}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{GO}} \wedge \vec{\boldsymbol{R}} = \overrightarrow{\boldsymbol{GO}} \wedge (\mathrm{R}_1\vec{\imath} + \mathrm{R}_2\vec{\jmath} + \mathrm{R}_3\vec{\mathrm{k}})$
  $= \left(\frac{M+2m}{2(m+M)}\right)L\left(-\mathrm{R}_3\sin\boldsymbol{\alpha}\,\vec{\imath} + \mathrm{R}_3\cos\boldsymbol{\alpha}\,\vec{\jmath} + (\mathrm{R}_1\sin\boldsymbol{\alpha} - \mathrm{R}_2\cos\boldsymbol{\alpha})\vec{\mathrm{k}}\right)$
- $\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{P}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{GG}} \wedge \boldsymbol{M}\vec{\boldsymbol{g}} = \vec{\mathbf{0}}$

Torseur des actions mécaniques extérieures au point G :

$$[\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}}(\boldsymbol{S})]_{\boldsymbol{G}} = \left\{\begin{matrix} (\mathrm{R}_1 + (\boldsymbol{m}+\boldsymbol{M})\boldsymbol{g})\vec{\imath} + \mathrm{R}_2\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \mathrm{R}_3\vec{\mathrm{k}} \\ \left(\frac{M+2m}{2(m+M)}\right)L\left(-\mathrm{R}_3\sin\boldsymbol{\alpha}\,\vec{\imath} + \mathrm{R}_3\cos\boldsymbol{\alpha}\,\vec{\jmath} + (\mathrm{R}_1\sin\boldsymbol{\alpha} - \mathrm{R}_2\cos\boldsymbol{\alpha})\vec{\mathrm{k}}\right) \end{matrix}\right\}_G$$

11. *Principe fondamental dans (ℛ) Galiléen* : $[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R})] = [\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}}(\boldsymbol{S})]$

Ou encore: $$\left\{\begin{matrix} (\boldsymbol{M}+\boldsymbol{m})\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}) \end{matrix}\right\}_G = \left\{\begin{matrix} \vec{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ext}} \\ \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{ext}} \end{matrix}\right\}_G$$

Ce qui donne :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{(M+2m)L}{2}(-\dot{\alpha}^2\cos\boldsymbol{\alpha} - \ddot{\alpha}\sin\boldsymbol{\alpha}) &= \mathrm{R}_1 + (\boldsymbol{m}+\boldsymbol{M})\boldsymbol{g} \\ \frac{(M+2m)L}{2}(-\dot{\alpha}^2\sin\boldsymbol{\alpha} + \ddot{\alpha}\cos\boldsymbol{\alpha}) &= \mathrm{R}_2 \\ \mathbf{0} &= \mathrm{R}_3 \\ 0 &= -\left(\frac{M+2m}{2(m+M)}\right)L\mathrm{R}_3\sin\boldsymbol{\alpha} \\ 0 &= \left(\frac{M+2m}{2(m+M)}\right)L\mathrm{R}_3\cos\boldsymbol{\alpha} \\ I_G\,\ddot{\alpha} &= \left(\frac{M+2m}{2(m+M)}\right)L(\mathrm{R}_1\sin\boldsymbol{\alpha} - \mathrm{R}_2\cos\boldsymbol{\alpha}) \end{aligned}\right.$$

Equation, du mouvement

La dernière équation donne : $R_1\sin\boldsymbol{\alpha} - R_2\cos\boldsymbol{\alpha} = I_G\left(\frac{2(m+M)}{(M+2m)L}\right)\ddot{\alpha}$

On multiplie l'équation (1) par $\mathbf{sin}\boldsymbol{\alpha}$ et l'équation (2) par $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}$ et en faisant la différence on obtient :

$$-\frac{(M+2m)L}{2}\ddot{\alpha} = R_1\sin\alpha - R_2\cos\boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{m}+\boldsymbol{M})\boldsymbol{g}\sin\alpha$$

En réarrangeant, on a :

$$\ddot{\alpha} + \left[\frac{(2m+M)gL}{2\,\mathbf{I}_{\Delta}}\right]\sin\alpha = 0$$

$$\mathbf{I}_{\Delta} = I_G + \frac{(M+2m)^2}{4(m+M)}L^2$$

12. ***Composantes de $\vec{R}$***

- D'après l'équation (3) : $\mathbf{R_3} = \mathbf{0}$
- L'intégration de l'équation du mouvement donne : $\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 = \left[\frac{(2m+M)gL}{2\,\mathbf{I}_{\Delta}}\right]\mathbf{cos}\,\alpha$

  car à $\boldsymbol{t}=\mathbf{0}$, $\alpha(\boldsymbol{t}=\mathbf{0}) = \pi/2$ et $\dot{\alpha}(\boldsymbol{t}=\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (le système est lâché sans vitesse initiale)

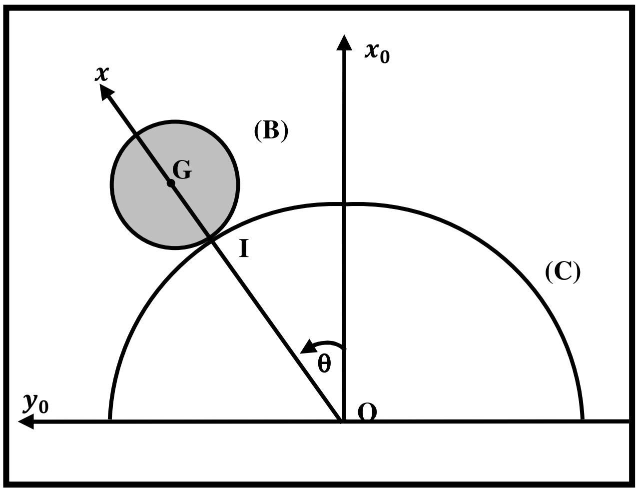
On trouve :

$$\mathbf{R_1} = -\frac{(M+2m)^2L^2g(3+\mathbf{cos}\,2\alpha)}{8\mathbf{I}_{\Delta}} - (\boldsymbol{m}+\boldsymbol{M})\boldsymbol{g}$$

$$\mathbf{R_2} = -\frac{3(M+2m)^2L^2g\sin2\alpha}{8\mathbf{I}_{\Delta}}$$

Exercice 5

On considère un cylindre (C) fixe de centre O et de rayon **R**, sur lequel roule sans glisser au point de contact I, une bille sphérique ***creuse*** (B) homogène de masse **m** et de rayon **r**. Soit $\boldsymbol{\mathcal{R}_0}(O, \vec{\mathbf{i}}_0, \vec{\mathbf{j}}_0, \vec{\mathbf{k}}_0)$ un repère galiléen fixe dont $\vec{\mathbf{k}}_0$ est perpendiculaire au plan vertical ($\vec{\mathbf{i}}_0, \vec{\mathbf{j}}_0$), et soit $\boldsymbol{\mathcal{R}}(O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}_0)$ un repère en rotation autour de (Oz_0) et dont l'axe (Ox) passe constamment par le centre de masse **G** de la bille (B). L'angle θ caractérise la rotation du repère $(\boldsymbol{\mathcal{R}})$ par rapport à $(\boldsymbol{\mathcal{R}_0})$. On donne $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(B/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}\,\vec{\mathbf{k}}_0$ et $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{\mathcal{R}}/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) = \dot{\boldsymbol{\theta}}\,\vec{\mathbf{k}}_0$



NB : Tous les résultats vectoriels doivent être exprimés dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{\mathbf{k}}_0)$

1. Déterminer la condition de roulement sans glissement de la bille (B) par rapport au cylindre (C) au point I. En déduire le torseur cinématique au point I de (B) par rapport à $(\boldsymbol{\mathcal{R}_0})$ en fonction de r, R et $\dot{\boldsymbol{\theta}}$
2. Montrer, par un calcul détaillé, que la matrice d'inertie, au point G, De la bille (B) s'écrit :

$$\boldsymbol{II}_{\,G}(\boldsymbol{B}) = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{mr}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{3}}\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}_{(-,-,-)}$$

3. Déterminer le torseur cinétique au point I de (B) par rapport à $(\boldsymbol{\mathcal{R}_0})$
4. Déterminer le torseur dynamique au point I de (B) par rapport à $(\boldsymbol{\mathcal{R}_0})$

5. Calculer l'énergie cinétique de (B) par rapport à $(\boldsymbol{\mathcal{R}_0})$
6. Ecrire le torseur, au point I, des actions mécaniques extérieures agissant sur (B) dans $(\boldsymbol{\mathcal{R}_0})$
7. Calculer la puissance développée dans le mouvement et éventuellement l'énergie potentielle $\boldsymbol{E_p}$sachant que $\boldsymbol{E_p\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)=0}$. En déduire que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.
8. Déterminer l'équation du mouvement de (B) par rapport à $(\boldsymbol{\mathcal{R}_0})$ en utilisant le théorème du moment dynamique au point I.
9. Trouver les composantes, normale et de frottement N et T, de la force de contact au point I en fonction de θ, m et g sachant qu'à l'instant initial $\theta(t=0)=0$ la bille est lâchée sans vitesse initiale.
10. Pour quel angle θ_d, la bille (B) décolle –t-elle du cylindre ?

Solution

1. *Vitesse de glissement* :

$$\vec{v}_g(\mathrm{I};\ \mathrm{B/C})=\vec{v}(I\in \mathrm{B}/C)=\vec{v}(I\in \mathrm{B}/\mathcal{R}_0)-\vec{v}(I\in \mathrm{C}/\mathcal{R}_0)$$

(C) fixe dans $(\mathcal{R}_0)$: $\vec{v}(I\in \mathrm{C}/\mathcal{R}_0)=\vec{0}$

$$\vec{v}(I\in \mathrm{B}/\mathcal{R}_0)=\vec{v}(G/\mathcal{R}_0)+\vec{\Omega}\ (\mathrm{B}/\mathcal{R}_0)\wedge\overrightarrow{\mathrm{GI}}$$

$\boldsymbol{\overrightarrow{OG}}=(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,\vec{\mathbf{i}}$;

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}_0)=\left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0}=(\mathbf{R}+\mathbf{r})\left(\frac{d\vec{\mathbf{i}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0}=(\mathbf{R}+\mathbf{r})\ \dot{\theta}\ \vec{\mathrm{k}}_0\wedge\vec{\mathbf{i}}=(\mathbf{R}+\mathbf{r})\dot{\theta}\,\vec{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\Omega}\ (\mathrm{B}/\mathcal{R}_0)\wedge\overrightarrow{\mathrm{GI}}=\dot{\varphi}\,\vec{\mathrm{k}}_0\wedge -\mathrm{r}\,\vec{\mathbf{i}}=-\mathbf{r}\dot{\varphi}\,\vec{\mathbf{j}}$$

$$\vec{v}_g(\mathrm{I};\ \mathrm{D/C})=\big((\mathbf{R}+\mathbf{r})\dot{\theta}-\boldsymbol{r}\dot{\varphi}\big)\,\vec{\mathbf{j}}$$

Roulement sans glissement :

$\vec{v}_g(\mathrm{I};\ \mathrm{B/C})=\vec{0}$ donc $(\mathbf{R}+\mathbf{r})\dot{\theta}-\boldsymbol{r}\dot{\varphi}=0$

$$\dot{\varphi}=\left(\frac{R+r}{r}\right)\dot{\theta}$$

Torseur cinématique : $$[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0)]_{\boldsymbol{I}}=\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}\ (\mathrm{B}/\mathcal{R}_0)\\ \vec{v}(I\in \mathrm{B}/\mathcal{R}_0)\end{Bmatrix}_{\boldsymbol{I}}=\begin{Bmatrix}\left(\frac{R+r}{r}\right)\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_{\boldsymbol{I}}$$

2. La bille $(\boldsymbol{B})$ possède la symétrie sphérique, alors tout repère d'origine G est un repère principal d'inertie et toute base associée est une base principale d'inertie.

$$\mathrm{II}_{\mathrm{G}}(\mathrm{B})=\begin{bmatrix}\mathrm{A_G}&0&0\\0&\mathrm{A_G}&0\\0&0&\mathrm{A_G}\end{bmatrix}_{(-,-,-)}=\mathrm{A_G}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{(-,-,\ -)}$$

$$\mathbf{A_G}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{I_G}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\iint \boldsymbol{r^2dm}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{r^2}\iint\boldsymbol{dm}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{m\,r^2}$$

$$\mathrm{II}_{\mathrm{G}}(\mathrm{B})=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathrm{mr}^2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{(-,-,-)}$$

3. *Torseur cinétique* : $[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0)]_{\boldsymbol{I}} = \left\{\begin{matrix} \vec{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0) = \boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}_0) \\ \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{I}}(\mathbf{B}/\mathcal{R}_0) \end{matrix}\right\}_{\mathbf{I}}$

Moment cinétique au point I :

Relation d'antisymétrie : $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0) = \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{B}/\mathcal{R}_G) + \mathbf{m}\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{\mathrm{GI}}$

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{B}/\mathcal{R}_G) = \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0) = \boldsymbol{II}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{B}).\vec{\Omega}\ (\mathrm{B}/\mathcal{R}_0) = \frac{2}{3}\mathrm{mr}^2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{0}\\ \left(\frac{R+r}{r}\right)\dot{\theta}\end{bmatrix} = \frac{2}{3}\mathrm{mr}(R+r)\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}}_0$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{\mathrm{GI}} = (\mathbf{R}+\mathbf{r})\,\dot{\theta}\,\vec{\mathbf{j}} \wedge -\mathbf{r}\,\vec{\mathbf{i}} = r(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}}_0$$

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{I}}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0) = \frac{5}{3}\mathrm{mr}(R+r)\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}}_0$$

Torseur cinétique au point I : $[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0)]_{\boldsymbol{I}} = \left\{\begin{matrix} \mathbf{m}(R+r)\dot{\theta}\,\vec{\mathbf{j}} \\ \frac{5}{3}\mathrm{mr}(R+r)\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}}_0 \end{matrix}\right\}_{\mathbf{I}}$

4. *Torseur dynamique* : $[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0)]_{\boldsymbol{I}} = \left\{\begin{matrix} \vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0) = \boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}_0) \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0) \end{matrix}\right\}_{\boldsymbol{I}}$

Résultante dynamique : $\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0) = \boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}_0)$

$$\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{\mathcal{R}_0}) = (\mathbf{R}+\mathbf{r})\dot{\boldsymbol{\theta}}\,\vec{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\vec{v}(G/\mathcal{R}_0)}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = (\mathbf{R}+\mathbf{r})\left(\ddot{\theta}\ \ \vec{\mathbf{j}} + \dot{\theta}\,\left(\frac{d\,\vec{\mathbf{j}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0}\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}_0) = (\mathbf{R}+\mathbf{r})\left(-\,\dot{\theta}^2\,\vec{\mathbf{i}} + \ \ddot{\theta}\ \ \vec{\mathbf{j}}\,\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0) = m(\mathbf{R}+\mathbf{r})\left(-\,\dot{\theta}^2\,\vec{\mathbf{i}} + \ \ddot{\theta}\ \ \vec{\mathbf{j}}\,\right)$$

Moment dynamique au point I : $\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{I}}(\mathbf{B}/\mathcal{R}_0)}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + \vec{v}(I/\mathcal{R}_0) \wedge \mathbf{m}\vec{v}(G/\mathcal{R}_0)$

$$\vec{v}(I/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OI}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \mathbf{R}\left(\frac{d\vec{\mathbf{i}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \mathbf{R}\,\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}}_0\ \wedge \vec{\mathbf{i}} = \mathbf{R}\dot{\theta}\,\vec{\mathbf{j}}$$

$\vec{v}(I/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{v}(G/\mathcal{R}_0)$ sont colinéaires : $\vec{v}(I/\mathcal{R}_0) \wedge \mathbf{m}\vec{v}(G/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{I}}(\mathbf{B}/\mathcal{R}_0)}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \frac{5}{3}\mathrm{mr}(R+r)\ddot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}}_0$$

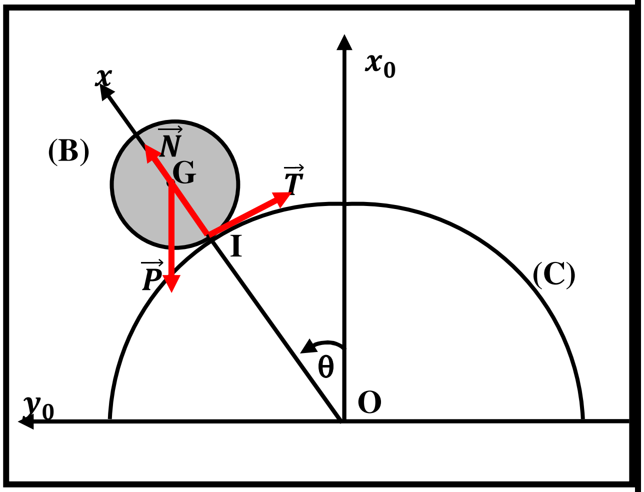
Torseur dynamique au point I : $[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0)]_{\boldsymbol{I}} = \left\{\begin{matrix} m(\mathbf{R}+\mathbf{r})\left(-\,\dot{\theta}^2\,\vec{\mathbf{i}} + \ \ddot{\theta}\ \ \vec{\mathbf{j}}\,\right) \\ \frac{5}{3}\mathrm{mr}(R+r)\ddot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}}_0 \end{matrix}\right\}_{\boldsymbol{I}}$

5. *Energie cinétique* :

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{B}/\mathcal{R}_0)]_{\boldsymbol{I}}.\ [\boldsymbol{C}(\mathbf{B}/\mathcal{R}_0)]_{\boldsymbol{I}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left\{\begin{matrix} \left(\frac{R+r}{r}\right)\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{\boldsymbol{I}} \left\{\begin{matrix} \mathbf{m}(R+r)\dot{\theta}\,\vec{\mathbf{j}} \\ \frac{5}{3}\mathrm{mr}(R+r)\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}}_0 \end{matrix}\right\}_{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\mathbf{m}(R+r)^2\dot{\theta}^2$$

6. ***Torseur des actions mécaniques extérieures*** :

$$[\mathcal{F}_{ext}(B)]_I = {}_I\begin{Bmatrix} \vec{R}_{ext} \\ \vec{M}_{I,ext} \end{Bmatrix}$$



Résultante générale

$$\vec{R}_{ext} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}$$
$$= (-mgcos\theta + \mathrm{N})\,\vec{\mathrm{i}} + (-\mathrm{T} + mgsin\theta)\ \vec{\mathrm{j}}$$

Moment résultant au point G

$$\vec{M}_{I,ext} = \vec{M}_I(\vec{T}) + \vec{M}_I(\vec{N}) + \vec{M}_I(\vec{P})$$

- $\vec{M}_I(\vec{T}) = \vec{II} \wedge \vec{T} = \vec{0}$
- $\vec{M}_I(\vec{N}) = \vec{II} \wedge \vec{N} = \vec{0}$
- $\vec{M}_I(\vec{P}) = \vec{IG} \wedge m\vec{g} = mgrsin\theta\ \vec{\mathrm{k}}_0$:

Le torseur des actions mécaniques extérieures est :

$$[\mathcal{F}_{ext}(B)]_I = {}_I\begin{Bmatrix} (-mgcos\theta + \mathrm{N})\,\vec{\mathrm{i}} + (-\mathrm{T} + mgsin\theta)\ \vec{\mathrm{j}} \\ mgrsin\theta\ \vec{\mathrm{k}}_0 \end{Bmatrix}$$

7. ***Puissance***:

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}_{ext} \longrightarrow B/\mathcal{R}_0) = [\mathcal{F}_{ext}(B)]_I \,.\, [\mathcal{V}(\mathrm{B}/\mathcal{R}_0)]_I$$

$$= {}_I\begin{Bmatrix} (-mgcos\theta + \mathrm{N})\,\vec{\mathrm{i}} + (-\mathrm{T} + mgsin\theta)\ \vec{\mathrm{j}} \\ mgrsin\theta\ \vec{\mathrm{k}}_0 \end{Bmatrix} {}_I\begin{Bmatrix} \left(\frac{R+r}{r}\right)\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}_{ext} \longrightarrow B/\mathcal{R}_0) = mg(R+r)sin\theta\dot{\theta}$$

On peut encore écrire que :

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}_{ext} \longrightarrow C/\mathcal{R}_0) = mg(R+r)sin\theta\theta = -\frac{d}{dt}(mg(R+r)\cos\theta)$$

Comme : $\mathcal{P}(\mathcal{F}_{ext} \longrightarrow B/\mathcal{R}_0) = -\frac{d}{dt}E_p(\mathcal{F}_c \longrightarrow B/\mathcal{R}_0)$

Alors : $E_p(\theta) = mg(R+r)\cos\theta + Const$

$\theta = \frac{\pi}{2}$, $E_p(\theta = \frac{\pi}{2}) = 0$ donc $Const = 0$

$$E_p(\theta) = mg(R+r)\cos\theta$$

Théorème de l'énergie cinétique :

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}_{ext} \longrightarrow B/\mathcal{R}_0) = -\frac{d}{dt}E_p(\mathcal{F}_c \longrightarrow B/\mathcal{R}_0) = \frac{\mathrm{dE_c}\,(B/\mathcal{R}_0)}{\mathrm{dt}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{E_c}\,(B/\mathcal{R}_0) + \frac{d}{dt}E_p(\mathcal{F}_c \longrightarrow B/\mathcal{R}_0) = 0$$

$$\mathrm{E_m}\,(B/\mathcal{R}_0) = \mathrm{E_c}\,(B/\mathcal{R}_0) + E_p(\mathcal{F}_c \longrightarrow B/\mathcal{R}_0) = Conste$$

Donc l'énergie mécanique est conservée : pas de dissipation de l'énergie.

8. *Théorème du moment dynamique en I* : $\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0) = \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{I},ext}$

$$\frac{5}{3}\mathrm{mr}(R+r)\ddot{\theta}\,\vec{\mathrm{k}}_0 = \boldsymbol{mgrsin\theta}$$

Donc l'équation du mouvement est :

$$\ddot{\theta} - \left[\frac{3\,\mathrm{g}}{5\,(R+r)}\right]\sin\theta = 0$$

9. ***Principe fondamental dans (ℛ) Galiléen*** : $[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}/\mathcal{R})] = [\boldsymbol{\mathcal{F}_{ext}}(\boldsymbol{D})]$

Ou encore:
$$_{\boldsymbol{I}}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{G}/\mathcal{R}) \\ \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{B}/\mathcal{R}_0) \end{Bmatrix} = {}_{\boldsymbol{I}}\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ext}} \\ \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{G},ext} \end{Bmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} -\boldsymbol{mgcos\theta} + \mathrm{N} = -m(\mathbf{R}+\mathbf{r})\dot{\theta}^2 \\ -\mathrm{T} + \boldsymbol{mgsin\theta} = m(\mathbf{R}+\mathbf{r})\ddot{\theta} \\ \\ \boldsymbol{mgrsin\theta} = \dfrac{5}{3}\mathrm{mr}(R+r)\ddot{\theta} \end{cases}$$

Composante tangentielle T

Equation (3) donne : $\mathbf{T} = \frac{2}{3}\mathrm{mg}\sin\theta$

Composante normale : $\mathrm{N} = -m(\mathbf{R}+\mathbf{r})\dot{\theta}^2 + \boldsymbol{mgcos\theta}$

Intégration de l'équation du mouvement donne: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\dot{\theta}^2 - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\dot{\theta}_0^2 = -\left[\frac{3\mathrm{g}}{5\,(R+r)}\right](\cos\theta - \cos\theta_0)$

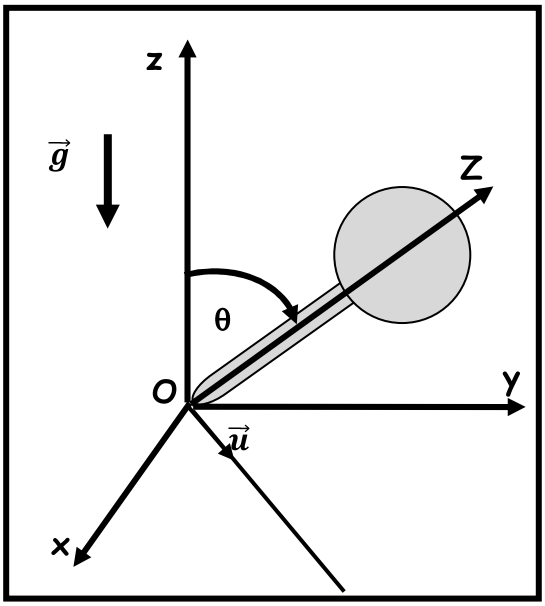
$\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$, $\theta = 0$, $\dot{\theta}\,(\boldsymbol{t} = \mathbf{0}) = 0$ le disque est lâché sans vitesse initiale

$$\mathbf{N}(\theta) = \frac{11}{5}\mathrm{mg}\left(\cos\theta - \frac{6}{11}\right)$$

Décollement si $\mathbf{N}(\theta = \theta_{\mathrm{d}}) = 0$ $\qquad \cos\theta_{\mathrm{d}} = \frac{6}{11}$

$$\theta_{\mathrm{d}} = 56{,}94$$

Exercice 6



Un solide (S) est composé d'une sphère pleine homogène (S_1) de masse M et de rayon R fixée à une tige homogène (S_2) de masse m et de longueur 2L (voir figure). Soit $\mathcal{R}$ (Oxyz) un repère galiléen orthonormé direct de base associée ($\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$) et soit O le point de contact fixe de (S) avec le plan $P(O\,xy)$. Soit $\mathcal{R}_S(OXYZ)$ le repère orthonormé direct lié à (S) de base associée ($\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$). On supposera que (S) n'effectue pas de mouvement de précession et sera donc décrit par les deux angles d'Euler (θ, φ). On désignera par ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{k}$) et ($\vec{w}$, $\vec{v}$, $\vec{K}$) les deux bases intermédiaires.

On Exprimera tous les résultats vectoriels dans la base: ($\vec{w}$, $\vec{v}$, $\vec{K}$).

On supposera que la matrice d'inertie de (S), au point O est de la forme: $\mathbf{II}_{\,O}(S) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}_{(-,\ -,\ \vec{K})}$

1. Déterminer le torseur cinématique au point O du mouvement de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$: $[\mathcal{V}(S/\mathcal{R})]_O$.
2. Sans faire de calcul, justifier brièvement pourquoi la matrice d'inertie $\mathbf{II}_{\,O}(S)$, s'écrit sous la forme ci-dessus.
3. Montrer que le centre d'inertie G de (S) est tel que : $\overrightarrow{OG} = Z_G\,\vec{K}$. Déterminer l'expression de Z_G.

On utilisera: Z_G, I et J dans toute la suite du problème sauf indication contraire!

4. Déterminer le torseur cinétique au point O de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$: $[\mathcal{C}(S/\mathcal{R})]_O$
5. Déterminer le torseur dynamique au point O de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$: $[\mathcal{D}(S/\mathcal{R})]_O$
6. Calculer, en fonction de I, J, $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$ l'énergie cinétique de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$
7. Ecrire, au point O, le torseur des actions mécaniques extérieures agissant sur (S) dans $(\mathcal{R})$.
8. Ecrire le principe fondamental de la dynamique et montrer que : $\varphi = Conste$ et déterminer l'équation du mouvement de (S) dans $(\mathcal{R})$.
9. Déterminer les expressions des composantes : R_1, R_2 et R_3, sachant qu'en $\theta = 0$, (S) a une vitesse nulle.
10. Calculer les travaux des forces extérieures agissant sur (S) quand celui-ci passe de sa position verticale à sa position horizontale.
11. Montrer que l'énergie mécanique est conservée
12. Déterminer, brièvement, les expressions de I et J en fonction de M, m, L et R.