MÉCANIQUE INDUSTRIELLE
Etude Statique

OURS ASSURE PAR

Dr Hassan ELMINOR

Professeur de Mécanique

Première année Cycle d'ingénieur

Filière Génie de l'Energie et Systèmes innovants

Cours IV - Résolution des problèmes de statique (Statique plane)

Statique plane

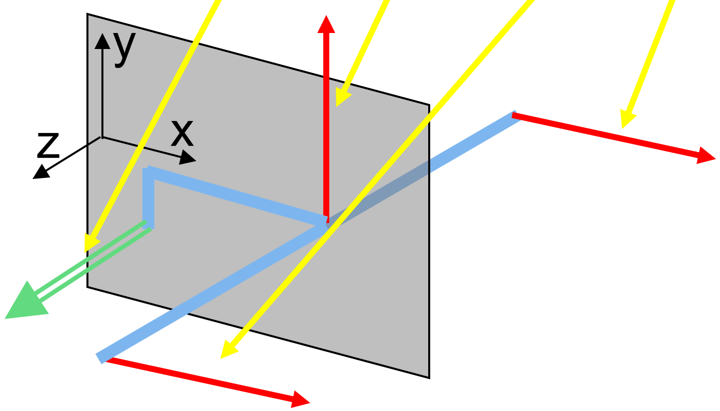
Qu’est-ce qu’un problème plan ?

Un problème plan est un problème pour lequel les actions mécaniques appliquées au solide sont :

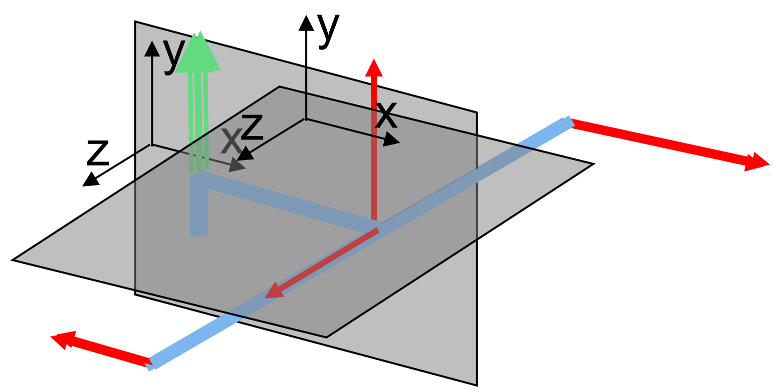
- soit des forces parallèles ou symétriques au plan de l’étude

- soit des moments d’axe perpendiculaires au plan de l’étude.

Exemple sur un solide isolé :



Problème plan

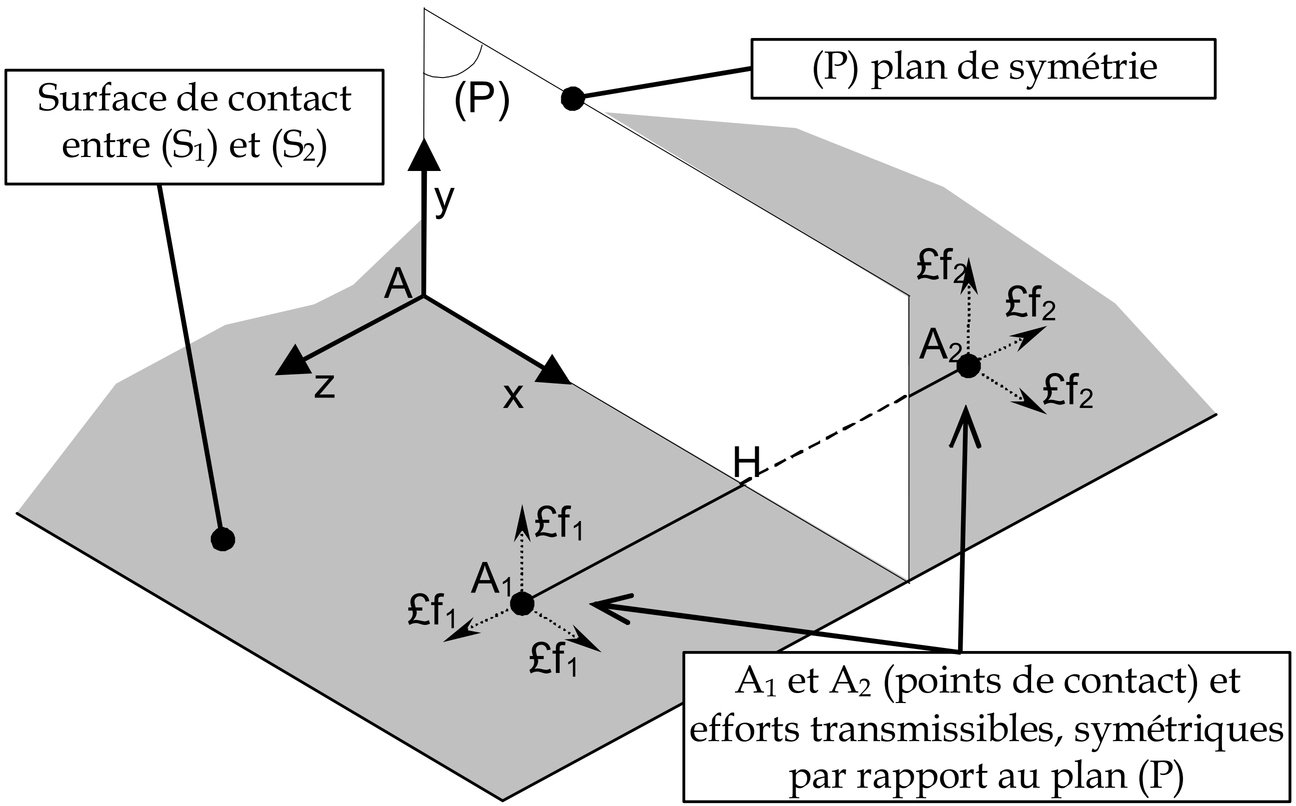


Problème spatial

Problème plan

Statique plane

Quelle est l'utilité d'un problème plan ?

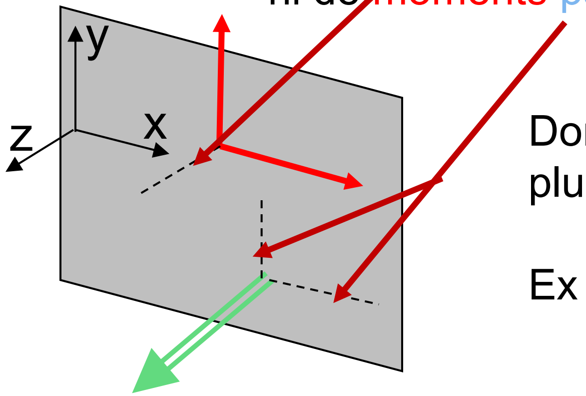


Statique plane

Cela va simplifier (et surtout alléger) nos calculs car dans un problème plan, nous ne pourrons pas avoir :

- de forces perpendiculaires au plan de l'étude
- ni de moments parallèles au plan de l'étude.

Ces actions seront considérées nulles

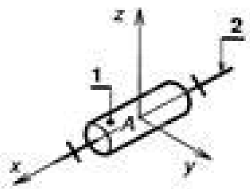
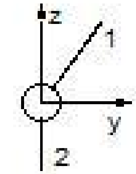
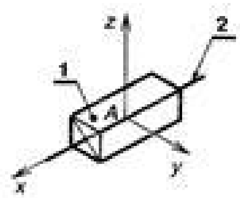
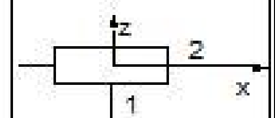
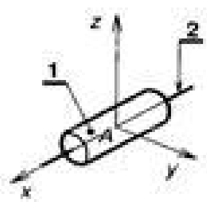
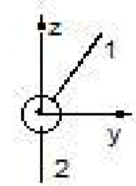


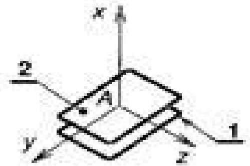
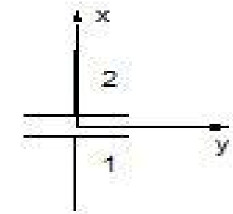
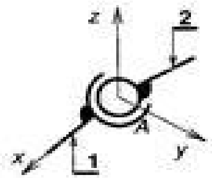
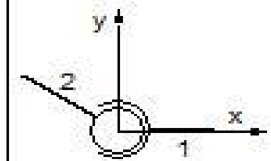
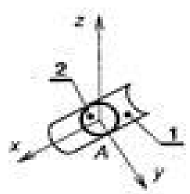
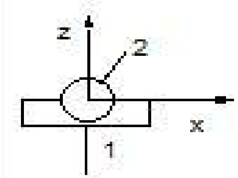
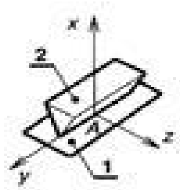
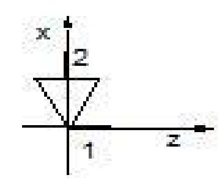
Donc, un torseur ne possède plus que trois inconnues...

Ex : cas d'un plan d'étude (x,y) ➔

$$\left\{ \begin{array}{c|c} X & - \\ Y & - \\ - & N \end{array} \right\}$$

Pour cette même raison, les torseurs d 'actions transmissibles par les liaisons usuelles se simplifient eux aussi. Ils se réduisent au nombre de trois…

Désignation de la liaison	Schématisation spatiale	Mobilités	Torseur d'action mécanique transmissible	Torseur d'action mécanique Simplifié	Schématisation plane
Pivot d'axe $(A, \vec{x})$		$Tr\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix} \quad Rot\begin{vmatrix}Rx\\0\\0\end{vmatrix}$	$\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\ Y_{12} & M_{12}\\ Z_{12} & N_{12}\end{matrix}\right\}_A$	Symétrie par rapport à $(A, \vec{y}, \vec{z})$ $\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{12} & 0\\ Z_{12} & 0\end{matrix}\right\}_A$	
Glissière d'axe $(A, \vec{x})$		$Tr\begin{vmatrix}Tx\\0\\0\end{vmatrix} \quad Rot\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$	$\left\{\begin{matrix}0 & L_{12}\\ Y_{12} & M_{12}\\ Z_{12} & N_{12}\end{matrix}\right\}_A$	Symétrie par rapport à $(A, \vec{x}, \vec{z})$ $\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & M_{12}\\ Z_{12} & 0\end{matrix}\right\}_A$	
Pivot glissant d'axe $(A, \vec{x})$		$Tr\begin{vmatrix}Tx\\0\\0\end{vmatrix} \quad Rot\begin{vmatrix}Rx\\0\\0\end{vmatrix}$	$\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{12} & M_{12}\\ Z_{12} & N_{12}\end{matrix}\right\}_A$	Symétrie par rapport à $(A, \vec{y}, \vec{z})$ $\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y_{12} & 0\\ Z_{12} & 0\end{matrix}\right\}_A$	

Appui plan de normale (A, $\vec{x}$)		$Tr\left\lvert\begin{matrix}0\\Ty\\Tz\end{matrix}\right.$ $Rot\left\lvert\begin{matrix}Rx\\0\\0\end{matrix}\right.$	$\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\0 & M_{12}\\0 & N_{12}\end{matrix}\right\}_A$	Symétrie par rapport à (A, $\vec{x}$, $\vec{y}$) $\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\0 & 0\\0 & N_{12}\end{matrix}\right\}_A$	
Rotule de centre A		$Tr\left\lvert\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.$ $Rot\left\lvert\begin{matrix}Rx\\Ry\\Rz\end{matrix}\right.$	$\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\Y_{12} & 0\\Z_{12} & 0\end{matrix}\right\}_A$	Symétrie par rapport à (A, $\vec{x}$, $\vec{y}$) $\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\Y_{12} & 0\\0 & 0\end{matrix}\right\}_A$	
Linéaire annulaire d'axe (A, $\vec{x}$)		$Tr\left\lvert\begin{matrix}Tx\\0\\0\end{matrix}\right.$ $Rot\left\lvert\begin{matrix}Rx\\Ry\\Rz\end{matrix}\right.$	$\left\{\begin{matrix}0 & 0\\Y_{12} & 0\\Z_{12} & 0\end{matrix}\right\}_A$	Symétrie par rapport à (A, $\vec{x}$, $\vec{z}$) $\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & 0\\Z_{12} & 0\end{matrix}\right\}_A$	
Linéaire rectiligne de normale (A, $\vec{x}$) et de contact (A, $\vec{y}$)		$Tr\left\lvert\begin{matrix}0\\Ty\\Tz\end{matrix}\right.$ $Rot\left\lvert\begin{matrix}Rx\\Ry\\0\end{matrix}\right.$	$\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\0 & 0\\0 & N_{12}\end{matrix}\right\}_A$	Symétrie par rapport à (A, $\vec{x}$, $\vec{z}$) $\left\{\begin{matrix}X_{12} & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{matrix}\right\}_A$	

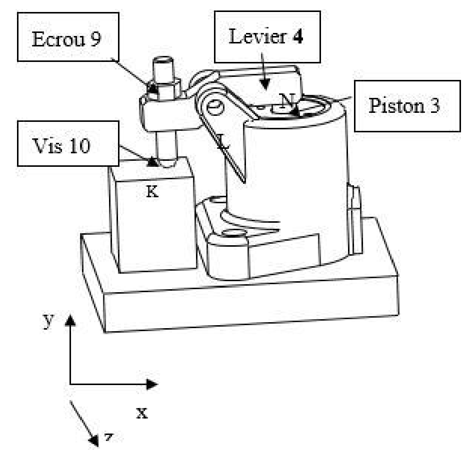
Application : Modélisation de la bride hydraulique (système avec plan de symétrie)

La bride hydraulique proposée est un dispositif permettant d'immobiliser une pièce en vue de son usinage.

L'énergie est fournie par de l'huile sous pression qui arrive dans la chambre située sous le piston **3**.

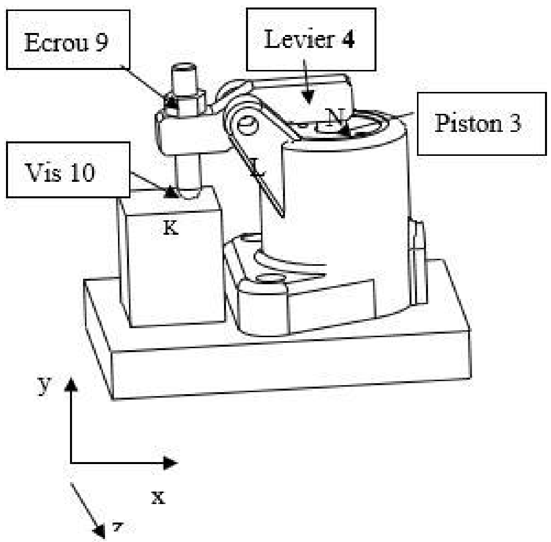
Celui-ci pousse alors vers le haut le levier **4** au point N. Le levier bascule alors autour de l'axe (L,), et la vis **10** appuie alors en K sur la pièce à usiner, la plaquant ainsi contre la table de la machine-outil.

Le ressort **7** permet le retour du piston à sa position initiale lorsque l'arrivée d'huile est coupée en vue de desserrer la pièce.



Hypothèses :

- Les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu et sans frottement).
- Le poids propre des pièces est négligé devant les efforts mis en jeu.
- Le système possède un plan de symétrie (O,x,y) aussi bien pour sa géométrie que pour les actions mécaniques qui lui sont appliquées.

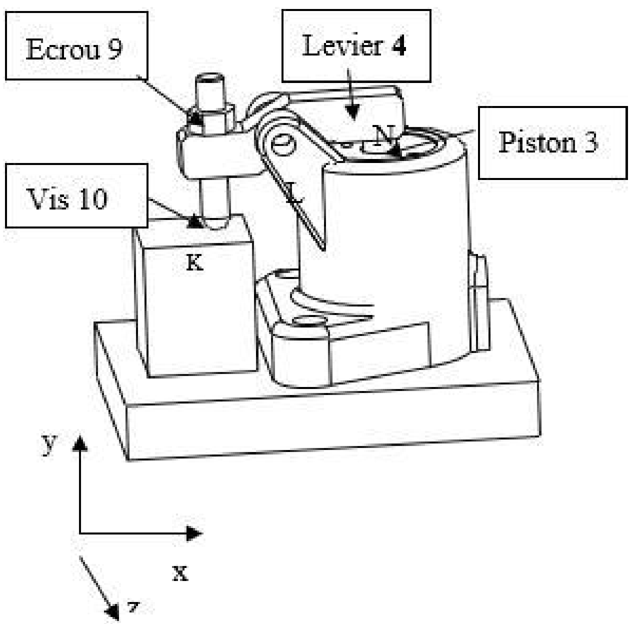


Données :

- L'effort vertical en K permettant l'immobilisation de la pièce sur la table durant l'usinage de celle-ci est estimé à **1500 N.**
- L’effort vertical exercé par le ressort **7** sur le piston **3** est évalué à **100 N.**

But de l'étude :

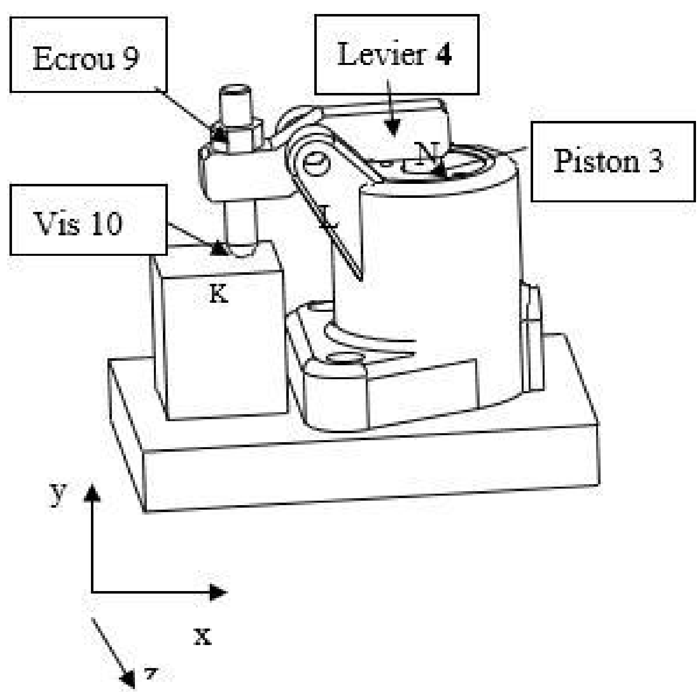
- Calculer la pression d'huile nécessaire pour obtenir cet effort de **1500 N** en K.

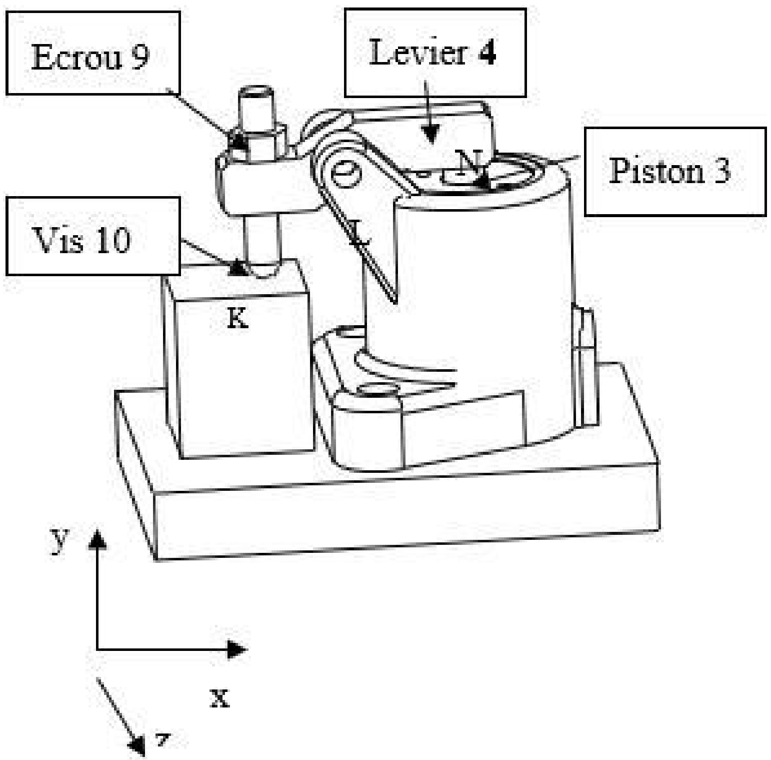


<u>Démarche :</u>

a) Calculer le torseur de l'A.M. transmissible par la liaison en N et en L.

b) En isolant le piston, en déduire l'effort nécessaire à transmettre par l'huile et en déduire la pression d'huile nécessaire si le diamètre du piston est de 20mm.





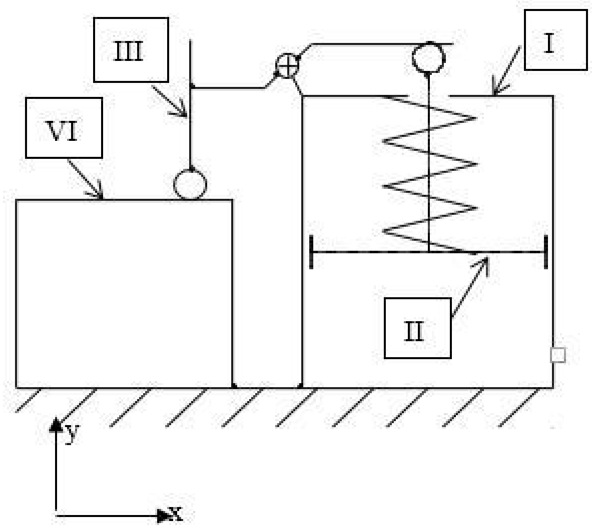


Schéma Technologiquee en vue plane du système

Hypothèse simplificatrice concernant le plan de symétrie

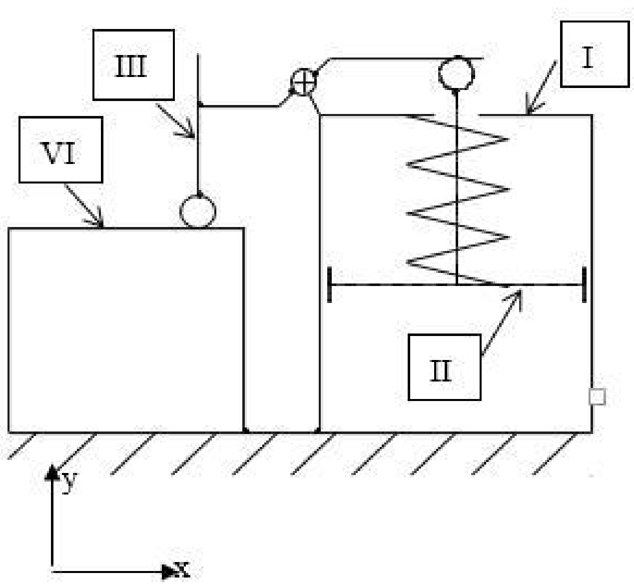
Si la géométrie d'un mécanisme ainsi que la actions mécaniques sont contenus dans un ou plusieurs plans parallèles ou si le mécanisme possède un plan de symétrie, on peut le représenter par une seule figure plane.

- Le système étudié possède un plan de symétrie (O,x,y) aussi bien pour sa géométrie que pour les actions mécaniques qui lui sont appliquées

Problème est alors plan. Le plan d'étude est (x,y)

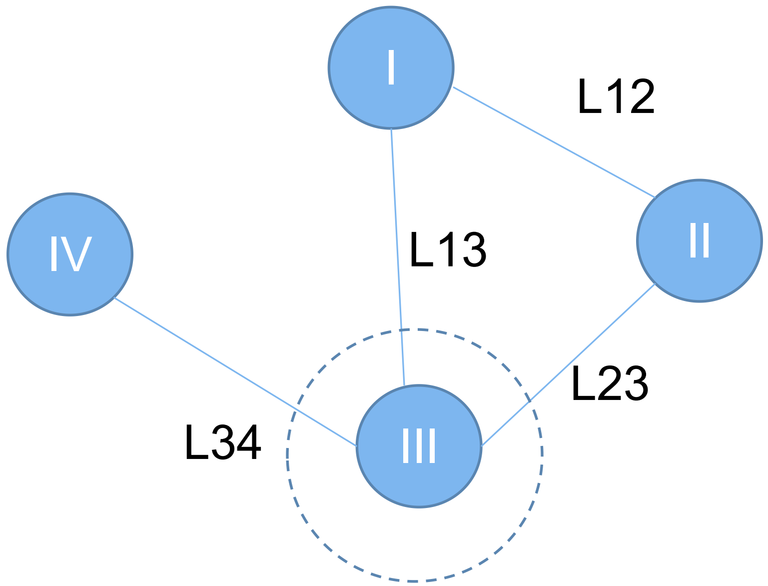
Etude des liaisons et des contacts :

- Liaison entre **I** et **II** en M : Pivot glissante d'axe (M,y)
- Liaison entre **I** et **III** en L : Pivot d'axe (L,z)
- Liaison entre **II** et **III** en N : Ponctuelle de normale (N,y)
- Liaison entre **III** et V**I** en K : Ponctuel de normale (K,y)



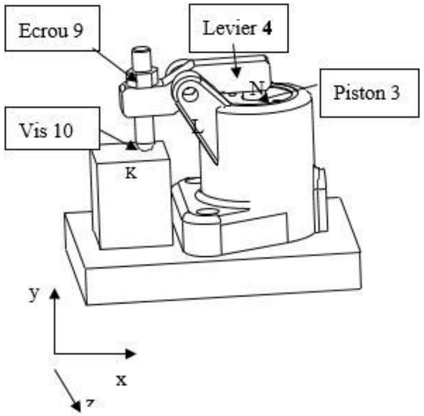
a) Calculer le torseur de l'A.M. transmissible par la liaison en N et en L.

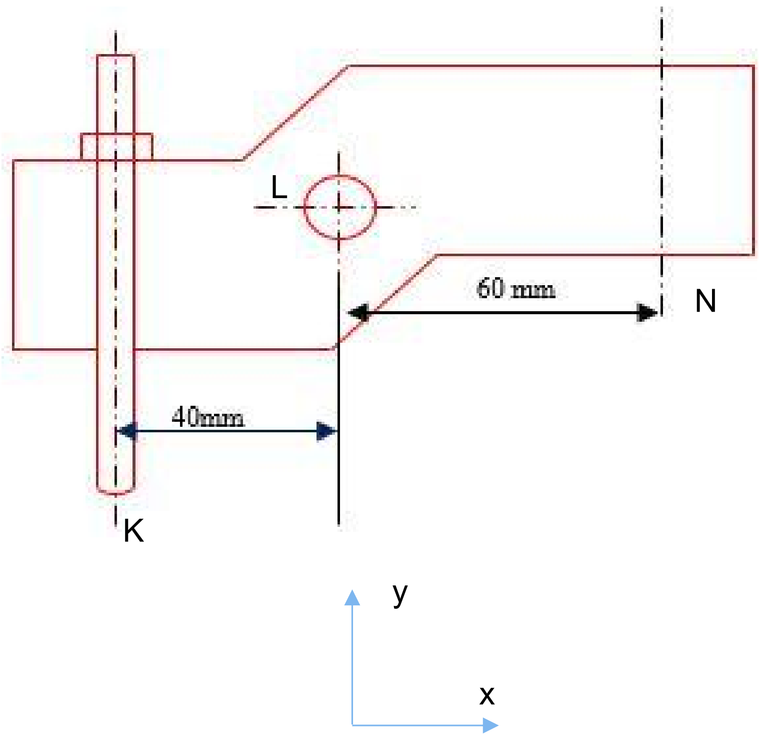
Graphe des liaisons :



L12: Pivot glissante d'axe (M,y)
L13 : Pivot d'axe (L,z)
L23 : Ponctuelle de normale (N,y)
L34 : Ponctuel de normale (K,y)

Isolons : S =III = {10 + 9 + 4}





- Mettre en place les points.
- Mettre en place le repère
- Mettre en place les distances

Bilan des actions mécaniques extérieures appliquées par $\overline{S}$ sur S :

Actions mécaniques de contact :

- Action de I sur III : Pivot d'axe (L,z)
- Action de II sur III : Ponctuelle de normale (N,y)
- Action de IV sur III : Ponctuel de normale (K,y)

Actions à distance :

- Action de la pesanteur (Le poids propre des pièces est négligé devant les efforts mis en jeu)

Le problème est plan (Plan d'étude est (x,y))

Les torseurs d'actions mécaniques transmissibles peuvent eux aussi être simplifiés :

Nbre d'inc = 3
Nbre d'éq = 3
Pbl est isostatique

Actions mécaniques de contact :

Action de I sur III : Pivot d'axe (L,z) $\{T_{13}\} = \begin{Bmatrix} X_{13} & 0 \\ Y_{13} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_L$

Action de II sur III : Ponctuelle de normale (N,y) $\{T_{23}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{23} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_N$

Action de IV sur III : Ponctuel de normale (K,y) $\{T_{43}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{43} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_K$

Sachant que l'action Y_{43} = 1500 N

Principe Fondamental de la statique

$$\Sigma\{T_{\overline{3}\to 3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_L$$

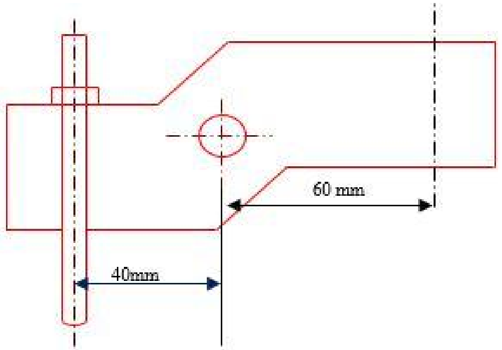
- <u>Théorème de la résultante :</u> $\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_1 + \ldots\ldots + \vec{F}_n = \vec{0}$

- <u>Théorème du moment :</u> $\sum \overrightarrow{M_A} = \vec{M}_A(\vec{F}_1) + \vec{M}_A(\vec{F}_2) \ldots\ldots + \vec{M}_A(\vec{F}_n) = \vec{0}$

Résolution

- **Théorème de la résultante :**

$$\begin{cases} \boxed{X_{13} = 0} \\ Y_{13} + Y_{23} + 1500 = 0 \end{cases}$$



- **Théorème du moment :**

Ecrire les moments au point L

$$\overrightarrow{M_{23/L}} = \overrightarrow{M_{23/N}} + \overrightarrow{LN} \wedge Y_{23}\vec{y} = (60\vec{x} + a\vec{y}) \wedge Y_{23}\vec{y} = 60Y_{23}\vec{z}$$

$$\overrightarrow{M_{43/L}} = \overrightarrow{M_{43/K}} + \overrightarrow{LK} \wedge 1500\vec{y} = (-40\vec{x} + b\vec{y}) \wedge 1500\vec{y} = -60000\vec{z}$$

$$60Y_{23} - 60000 = 0 \qquad \boxed{Y_{23} = 1000N}$$

$$Y_{13} + Y_{23} + 1500 \Rightarrow \boxed{Y_{13} = -2500\text{N}}$$

Actions mécaniques de contact :

Action de I sur III : Pivot d'axe (L,z)

$$\{T_{13}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -2500 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_L$$

Action de II sur III : Ponctuelle de normale (N,y)

$$\{T_{23}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1000 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_N$$

Action de IV sur III : Ponctuel de normale (K,y)

$$\{T_{43}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1500 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_K$$

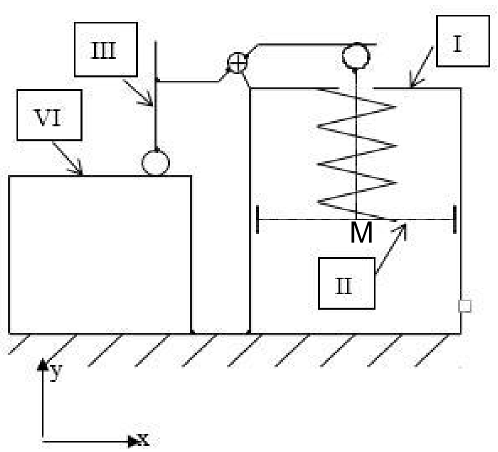
b) En isolant le piston, en déduire l'effort nécessaire à transmettre par l'huile et en déduire la pression d'huile nécessaire si le diamètre du piston est de 20mm.

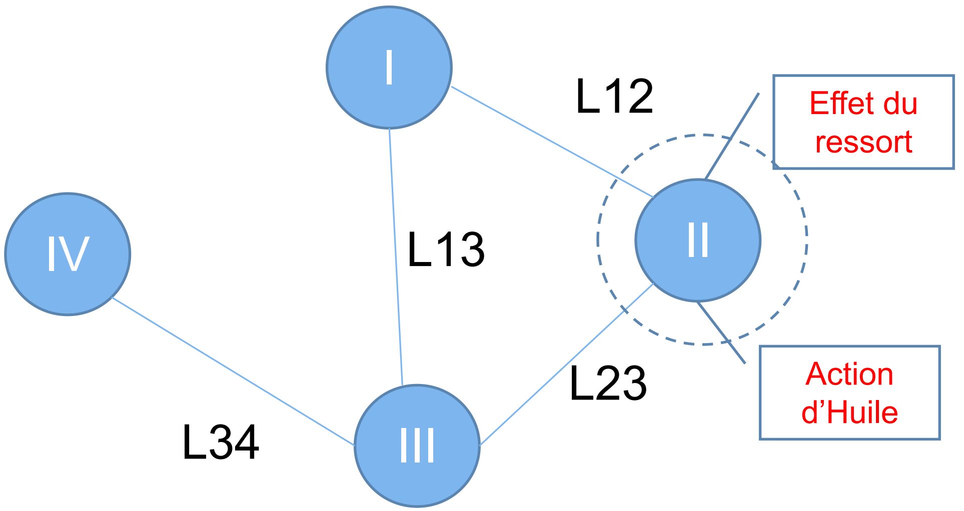
<u>Bilan des actions mécaniques de contact :</u>

Action de I sur II : Ponctuelle de normale (N,y) (action mutuelle)

Action de III sur II : Liaison pivot glissante d'axe (M,y)

L'effort vertical exercé par le ressort **7** sur le piston **3** est évalué à **100 N.**





- Action de III sur II : Ponctuelle de normale (N,y) :

(action mutuelle)

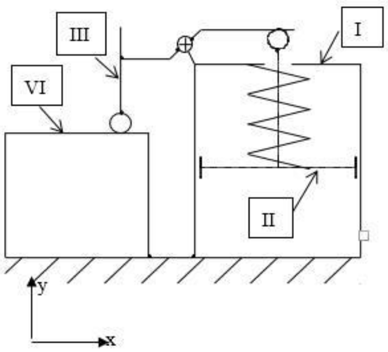
$$\{T_{32}\} = -\{T_{23}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -1000 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_N$$

- Action de I sur II : Liaison pivot glissante d'axe (M,y) :

$$\{T_{12}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_M$$

- L'effort vertical exercé par le ressort **7** sur le piston **3** est évalué à **100 N.**

$$\{T_{72}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -100 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_N$$



- L'action de la pression d'huile P :

$$\{T_{p2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_M$$

Principe Fondamental de la statique

$$\Sigma\{T_{\overline{2}\rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_M$$

Résolution

Théorème de la résultante :

$$\begin{cases} X_{13} = 0 \\ F - 1000 - 100 = 0 \end{cases}$$

Théorème du moment : N_{12}=0

En en déduit que :

$$\boxed{P = F.S = 1100x\ 5026{,}5 = 0{,}21 MPa}$$

(avec : d= 20mm)

Exercice à faire

Etude d’une Bride