به نام خدا

نام و نام خانوادگی:محمد علی شمس ناطری

شماره دانشجویی:۴۰۱۱۹۹۳۳

گزارش تحقیق: مکان هندسی ریشه‌ها در سیستم‌های دارای تأخیر

زمستان۱۴۰۳

مقدمه

سیستم‌های دینامیکی دارای تأخیر زمانی در بسیاری از فرآیندهای مهندسی و کنترل صنعتی وجود دارند. این تأخیرها می‌توانند ناشی از زمان پردازش، انتقال داده، یا پاسخ فیزیکی اجزا باشند. وجود تأخیر در سیستم‌ها تأثیر مستقیمی بر پایداری، پاسخ زمانی، و رفتار کلی آن‌ها دارد. یکی از ابزارهای مهم برای تحلیل پایداری این سیستم‌ها، مکان هندسی ریشه‌ها (Root Locus) است که برای سیستم‌های بدون تأخیر به‌خوبی شناخته شده است. اما برای سیستم‌های دارای تأخیر، تحلیل این نمودار چالش‌هایی به همراه دارد.

در این گزارش، ابتدا معادله مشخصه سیستم‌های دارای تأخیر بررسی می‌شود. سپس روش‌های تحلیل مکان هندسی ریشه‌ها برای این سیستم‌ها ارائه می‌گردد. در نهایت، تأثیر تأخیر بر پایداری و عملکرد سیستم تحلیل خواهد شد.

۱) معادله مشخصه در سیستم‌های دارای تأخیر

یک سیستم کنترل معمولی را می‌توان با یک تابع تبدیل به‌صورت زیر مدل‌سازی کرد:

$$G(S)=\frac{N(S)}{D(S)}$$

که در آن N(S) و D(S) به‌ترتیب صورت و مخرج تابع تبدیل هستند. اما در یک سیستم دارای تأخیر زمانی ، تابع تبدیل شامل یک عبارت نمایی خواهد شد:

$$G(S)=\frac{N(S)}{D(S)}e^{-St}$$

معادله مشخصه حلقه بسته برای چنین سیستمی برابر است با:

$$D(s) + N(s)e^{-St}= 0$$

برخلاف سیستم‌های بدون تأخیر، این معادله یک معادله متعالی (Transcendental Equation) است، زیرا شامل جمله می‌شود که حل آن را پیچیده‌تر می‌کند. این عبارت باعث می‌شود که معادله بی‌نهایت تعداد ریشه داشته باشد و تحلیل مکان هندسی ریشه‌ها دشوار شود.

۲)روش‌های تحلیل مکان هندسی ریشه‌ها در سیستم‌های دارای تأخیر

در سیستم‌های کلاسیک بدون تأخیر، روش مکان هندسی ریشه‌ها برای بررسی تغییرات قطب‌های سیستم بر اساس یک پارامتر کنترلی (مانند بهرهK) استفاده می‌شود. برای سیستم‌های دارای تأخیر، تحلیل مکان هندسی ریشه‌ها به دو روش کلی انجام می‌شود:

۱) روش تقریب عددی(Approximate Method)

در این روش، تابع تأخیری با یک تقریب چندجمله‌ای جایگزین می‌شود. پرکاربردترین تقریب‌ها عبارتند از:

تقریب پاد (Pade Approximation) éدر این روش، تابع نمایی با یک تقریب کسر مختلط نمایش داده می‌شود:

$$e^{-t} \approx \frac{1\text{-}\frac{\mathrm{ST}}{2}}{1+\frac{\mathrm{ST}}{2}}$$

با جایگذاری این تقریب در معادله مشخصه، یک معادله جبری به‌دست می‌آید که می‌توان از روش‌های کلاسیک مکان هندسی ریشه‌ها برای تحلیل آن استفاده کرد.

۲) روش تحلیل مستقیم در صفحه مختلط(Direct Analysis in Complex Plane)

در این روش، معادله مشخصه D(s) + N(s)e^{-St}= 0 را مستقیماً در صفحه مختلط تحلیل می‌کنیم:

ریشه‌های این معادله از شرط مقدار مطلق و فاز استخراج می‌شوند.

با افزایش تأخیر ، قطب‌های سیستم به سمت نیم‌صفحه راست انتقال می‌یابند که نشان‌دهنده کاهش پایداری سیستم است.

تغییرات تأخیر تأثیر مستقیمی بر مسیر قطب‌ها و در نتیجه بر پایداری سیستم دارد.

۳) تأثیر تأخیر بر پایداری سیستم

تأخیر زمانی تأثیر مهمی بر پایداری و رفتار دینامیکی سیستم دارد. در این بخش، تأثیر تأخیر را بر روی مکان هندسی ریشه‌ها تحلیل می‌کنیم.

۱) جابجایی قطب‌ها با افزایش تأخیر

با افزایش مقدار T، قطب‌های سیستم به‌صورت غیرخطی در صفحه مختلط حرکت می‌کنند.

در بسیاری از موارد، تأخیر زیاد باعث می‌شود که برخی از قطب‌ها از نیم‌صفحه چپ (پایدار) به نیم‌صفحه راست (ناپایدار) حرکت کنند.

۲) نقاط بحرانی و حد پایداری

برای یافتن حد پایداری، مقادیر بحرانی تأخیر را پیدا می‌کنیم که در آن، سیستم از پایدار به ناپایدار تغییر وضعیت می‌دهد.

معمولاً این حد از شرط (ریشه‌ها بر روی محور موهومی) به‌دست می‌آید.

در این تحقیق، تحلیل مکان هندسی ریشه‌ها در سیستم‌های دارای تأخیر بررسی شد. وجود تأخیر در سیستم‌های کنترلی باعث می‌شود که روش‌های کلاسیک مکان هندسی ریشه‌ها به‌طور مستقیم قابل استفاده نباشند. بنابراین، از روش‌های تقریبی مانند تقریب پاد éو تحلیل مستقیم در صفحه مختلط استفاده می‌شود. تأخیر زمانی معمولاً موجب کاهش پایداری سیستم شده و مسیر حرکت قطب‌ها را در جهت ناپایداری تغییر می‌دهد.

برای مقابله با تأثیرات منفی تأخیر، معمولاً روش‌های جبرانی مانند کنترل پیش‌بین (Predictive Control) یا کنترل مقاوم (Robust Control)پیشنهاد می‌شوند. این موضوع، نیاز به تحقیقات بیشتر برای طراحی کنترل‌کننده‌های مناسب در سیستم‌های دارای تأخیر را نشان می‌دهد.