

به نام خدا

نام و نام خانوادگی: محمد علی شمس ناطری

شماره دانشجویی: ۴۰۱۱۹۹۳۳

پروژه درس کنترل خطی

عنوان پروژه: بررسی چرایی مشتق‌گیری در روش راث-هرویتز هنگام صفر
شدن کامل یک سطر

مقدمه

روش راث-هرویتز یکی از پرکاربردترین ابزارها در تحلیل پایداری سیستم‌های خطی با ضرایب ثابت است. این روش از طریق تشکیل جدولی به نام «جدول راث» بر اساس ضرایب معادله مشخصه سیستم، امکان تشخیص پایداری یا ناپایداری را فراهم می‌کند. با این حال، گاهی ممکن است در روند تشکیل این جدول، یک سطر به صورت کامل صفر شود. در چنین وضعیتی، برای تکمیل صحیح جدول و تشخیص درست تعداد و موقعیت قطب‌های سیستم، از مشتق‌گیری بر روی یک چندجمله‌ای کمکی (Auxiliary Polynomial) استفاده می‌شود. در این پروژه، دلایل اصلی و مفاهیم مرتبط با صفر شدن کامل سطر و ضرورت مشتق‌گیری در روش راث-هرویتز را بررسی می‌کنیم.

در مهندسی کنترل، بررسی پایداری سیستم‌های دینامیکی از مهم‌ترین مراحل طراحی و تحلیل محسوب می‌شود. پایداری به این معناست که پاسخ سیستم، در برابر ورودی‌ها و اغتشاشات متعارف، به مرور زمان به یک مقدار یا محدوده قابل پیش‌بینی برسد و از کنترل خارج نشود. روش‌های گوناگونی برای بررسی پایداری وجود دارد که از میان آن‌ها، روش‌های تحلیلی مانند معیار نایکوئیست، روش مکان هندسی ریشه‌ها، معیار لیاپانوف و نیز روش راث-هرویتز، جایگاه ویژه‌ای دارند.

روش راث-هرویتز به دلیل سادگی نسبی در محاسبات و عدم نیاز به یافتن صریح ریشه‌های معادله مشخصه، بسیار محبوب و کاربردی است. با این وجود، در شرایط خاصی مانند صفر شدن کامل یک سطر از جدول راث، شرایطی پیش می‌آید که بدون تمهیدات تکمیلی، ممکن است تفسیر غلطی از پایداری سیستم به دست آید. در این مواقع، «مشتق‌گیری» از چندجمله‌ای کمکی به عنوان راهکاری رسمی مطرح می‌شود که اطلاعات از دست‌رفته را بازیابی کرده و به مهندس طراح امکان می‌دهد تحلیل کامل‌تری از پایداری داشته باشد.

مروری بر روش راث-هرویتز

فرض کنید معادله مشخصه سیستم خطی مرتبه به صورت زیر است:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

که در آن ضرایب ثابت‌های حقیقی هستند و . هدف از روش راث-هرویتز آن است که بدون محاسبه مستقیم ریشه‌های این معادله، تشخیص دهیم آیا تمام ریشه‌های آن دارای قسمت حقیقی منفی هستند یا خیر. اگر همه ریشه‌ها دارای قسمت حقیقی منفی باشند، سیستم پایدار است؛ در غیر این صورت ناپایدار خواهد بود.

برای تشکیل «جدول راث»، مراحل کلی به‌صورت زیر است:

(۱) سطر اول از ضرایب توان‌های زوج (یا فرد) معادله تشکیل می‌شود. به این صورت که اگر فرد باشد، سطر اول شامل ضرایب است و اگر زوج باشد، ترتیب کمی تفاوت می‌کند ولی ایده کلی مشابه است.

(۲) سطر دوم از ضرایب توان‌های دیگر (یعنی زوج در صورت اول یا برعکس) تشکیل می‌شود؛ مثلاً اگر فرد باشد، این سطر شامل است.

(۳) سطرهای بعدی با فرمولی شبیه دترمینان جزئی و تقسیم بر المان ستون اول سطر قبلی ساخته می‌شوند.

پس از تشکیل این جدول، علامت المان‌های ستون اول کلید تشخیص پایداری است. اگر تمامی المان‌های ستون اول مثبت باشند (و هیچ‌کدام صفر نشود)، سیستم پایدار خواهد بود.

...	a_{n-4}	a_{n-2}	a_n
...	a_{n-5}	a_{n-3}	a_{n-1}
...	b_3	b_2	b_1
...	c_3	c_2	c_1
...	\vdots	\vdots	\vdots

صفر شدن کامل سطر

در حین محاسبات جدول راث، ممکن است ناگهان ملاحظه کنید که در مرحله‌ای، همه عناصر یک سطر به شکل صفر ظاهر می‌شوند. این پدیده اغلب در یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

(۱) وجود ریشه‌های تکراری روی محور موهومی: هنگامی که سیستم دارای قطب‌هایی به صورت جفت‌های مختلط با قسمت حقیقی صفر یا ریشه‌های چندگانه (Multiplicities) بالا بر روی محور موهومی باشد، ممکن است ضرایب در مرحله تشکیل جدول به گونه‌ای به هم خنثی شوند که یک سطر کامل در جدول به صفر متمایل شود.

(۲) مقارن بودن ضرایب و شکل چندجمله‌ای: گاه شکل ریاضی معادله مشخصه چنان است که ضرایب در فرمول محاسبه سطر راث یکدیگر را کاملاً حذف می‌کنند. این حالت معمولاً به وجود چندجمله‌ای‌های مقارن (Symmetric Polynomials) مربوط است که جفت ریشه‌های را در معادله مشخصه به وجود می‌آورند.

ضرورت مشتق‌گیری: بازیابی اطلاعات پایداری

وقتی یک سطر کامل صفر می‌شود، بدون انجام اقدامی اضافی، ادامه روند تشکیل جدول راث غیرممکن یا مبهم خواهد شد. چرا که ستون اول دیگر حاوی اطلاعات جدیدی برای تداوم محاسبه نیست و حتی ممکن است صفر شدن این سطر به اشتباه به عنوان نشانه‌ای از ناپایداری کل سیستم تفسیر شود؛ حال آنکه این لزوماً صحیح نیست. در واقع، در این حالت ما با یک چندجمله‌ای کمکی روبه‌رو هستیم که بخشی از معادله مشخصه را نمایندگی می‌کند.

راه حل استاندارد و پذیرفته شده برای رفع این ابهام، تعریف یک چندجمله‌ای الحاقی از سطری است که بالای سطر صفر قرار داشته است. سپس از این چندجمله‌ای مشتق گرفته می‌شود تا اطلاعات مربوط به قطب‌های احتمالی روی محور موهومی یا جفت ریشه‌های مختلط با قسمت حقیقی صفر استخراج شود.

مراحل کلیدی به این صورت است:

(۱) تشکیل چندجمله‌ای الحاقی: ضرایب سطر بالایی را برداشته و بر اساس درجات مناسب (عموماً به شکل λ^k) یک چندجمله‌ای تشکیل می‌دهیم.

(۲) مشتق‌گیری: از این چندجمله‌ای با احترام به توان‌های آن، مشتق می‌گیریم.

(۳) جایگزینی در جدول راث: سطر صفر شده را با ضرایب به دست آمده از مشتق چندجمله‌ای الحاقی پر می‌کنیم تا بتوانیم روند معمول روش راث-هرویتز را ادامه دهیم.

با این تکنیک، می‌توانیم اطلاعات گم‌شده را احیا کنیم و در نهایت تشخیص دهیم آیا سیستم واقعاً پایدار است، یا دارای ریشه‌های) روی محور موهومی یا حتی ناپایدار است.

تحلیل مفهومی چرایی مشتق‌گیری

مهم‌ترین نکته درک این است که یک سطر صفر شده در جدول راث، نمایانگر جفت قطب‌های سیستم بر روی محور موهومی یا تکرار ریشه‌هاست. در این شرایط، چندجمله‌ای الحاقی معرف بخشی از معادله مشخصه است که در صورت وجود تکرار ریشه یا وجود ریشه روی محور موهومی، به شکل متقارن در ضرایب ظاهر می‌شود. مشتق‌گیری از یک چندجمله‌ای متقارن یا چندجمله‌ای دارای جفت ریشه‌های مختلط، می‌تواند به روشن شدن ساختار واقعی ریشه‌ها کمک کند. از دیدگاه ریاضی، مشتق‌گیری باعث می‌شود ریشه‌های چندگانه یا ریشه‌های با قسمت حقیقی صفر، در ضرایب جدید خود را نشان دهند و ما بتوانیم از طریق روش راث-هرویتز اصلاح‌شده) با آن سطر مشتق‌گیری شده)، تعیین کنیم که آیا ریشه‌ها واقعاً در سمت راست یا چپ آن در محور موهومی هستند؟

به بیان دیگر، اگر ما مشتق‌گیری را انجام ندهیم، فقط متوجه می‌شویم یک «اتفاق خاص» رخ داده است (صفر شدن سطر)، اما قادر نیستیم تحلیل کنیم که این اتفاق خاص به پایداری مرزی منجر می‌شود یا ناپایداری. در عمل نیز طراح کنترل وقتی با چنین شرایطی روبه‌رو می‌شود، به جای رها کردن مسئله، طبق رویه معیار راث-هرویتز اصلاحی (Extended Routh Array) عمل کرده و سطر صفر شده را با مشتق‌گیری از چندجمله‌ای جایگزین می‌کند.

نتیجه‌گیری

روش راث-هرویتز ابزاری توانمند در تحلیل پایداری سیستم‌های خطی است که از طریق آن می‌توان بدون محاسبه مستقیم ریشه‌ها، وضعیت پایداری را از روی ضرایب معادله مشخصه و تشکیل جدول راث بررسی نمود. با این حال، بروز پدیده «صفر شدن کامل یک سطر» ممکن است تحلیل را مختل سازد و تشخیص پایداری را دشوار کند. این رخداد معمولاً نشانه‌ای از وجود ریشه‌های تکراری روی محور موهومی یا جفت قطب‌های مختلط با قسمت حقیقی صفر است. برای جلوگیری از خطا در تشخیص و از دست رفتن اطلاعات، از چندجمله‌ای الحاقی مربوط به سطر قبلی مشتق گرفته شده و سطر صفر شده با این ضرایب جدید جایگزین می‌شود. این تکنیک موجب می‌شود فرم کامل جدول راث بازیابی گردد و مهندس کنترل بتواند تصویر صحیحی از پایداری یا ناپایداری سیستم ترسیم کند.