

INSTITUT DE STATISTIQUES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

ANNÉE 2017-2018

Charline Mordelet

---

Implémentation d'un modèle de crédit  
stochastique au sein du modèle ALM d'un  
assureur

---



---

---

# Remerciements

Je tiens à remercier Romain THION de m'avoir accueillie en stage et alternance au sein de l'équipe ALM épargne de SOGECAP.

Je remercie également Thomas DALLER, tuteur de ce mémoire, pour sa grande disponibilité, sa bienveillance et ses nombreux conseils, ainsi qu'Iliass MAMOUNI pour son aide précieuse.

Merci également à toute l'équipe du département ALM de SOGECAP pour son accueil chaleureux et son professionnalisme.

Pour finir, je remercie le corps enseignant de l'ISUP, dirigé par Olivier LOPEZ, pour la qualité des enseignements ainsi que Jean-Marie NESSI, tuteur académique de ce mémoire, pour son implication et ses conseils.

---

# Résumé

*Mots clés : ALM, Modèle de crédit, Risque de crédit, Risque de défaut, Risque de migration, Processus stochastique, Spreads stochastiques, Probabilités de défaut stochastiques, Taux de recouvrement, Séniorité, Tests martingales, SCR, Best Estimate, Générateur de scénarios économiques, Modèle ALM, Univers risque-neutre, Taux concurrentiels, Algorithme de taux servi, Risque-neutralisation.*

Les compagnies d'assurance vie sont des structures particulièrement exposées au risque de crédit, du fait de la nature même de leur activité qui les conduit à détenir des portefeuilles obligataires pouvant s'élever à plusieurs centaines de milliards d'euros.

Mais alors qu'il ne s'entendait que pour les émetteurs dits « corporate », l'actualité financière de ces dernières années a mis en évidence que les lignes émises par des émetteurs jugés jusqu'alors peu ou pas risqués, pouvaient également être touchées, et sévèrement, par ce risque.

On comprend alors assez aisément qu'une modélisation adéquate de ce risque revêt un caractère primordial, d'autant qu'aux phénomènes exogènes de type économique évoqués précédemment, s'ajoutent des exigences réglementaires.

En particulier, Solvabilité II insiste sur l'importance du modèle utilisé, qui doit allouer un capital économique adéquat au profil de risque de l'assureur.

C'est donc dans ce contexte que s'inscrit ce mémoire, qui s'attachera à exposer chaque étape ayant permis à l'implémentation d'une méthode de modélisation stochastique, en univers risque-neutre, des risques de défaut et de spread des actifs obligataires présents à l'actif d'un assureur, au sein du modèle de projection utilisé pour les calculs du Best Estimate et du SCR.

Après avoir étudié deux modèles de crédit différents, nous présenterons les étapes de validation et d'implémentation du modèle retenu.

Nous expliquerons enfin les impacts de ce modèle de crédit implémenté dans la projection ALM et sur les résultats Solvabilité II obtenus à partir d'inputs tests.

L'ensemble du travail effectué pour ce mémoire pourra constituer, pour l'entreprise dans lequel il a été effectué, des premiers éléments de maîtrise et de recherche sur les modèles de crédit stochastiques.

Le modèle dit "final" implémenté pour ce mémoire pourra lui constituer des premiers exemples d'impacts pouvant être observés avec l'utilisation d'un modèle de crédit stochastique en particulier, mais ne marque en aucun cas la finalité des recherches réalisées par la compagnie dans ce domaine.

---

# Abstract

*Key words : ALM, Credit model, Credit risk, Default risk, Migration risk, Stochastic process, Stochastic spreads, Stochastic Default Probabilities, Recovery rate, Seniority, Martingal tests, SCR, Best Estimate, Economic scenario generator, ALM model, Risk-neutral universe, Competitive rates, Interest rate algorithm, Risk-neutralization.*

Life insurance companies highly prone to credit risk because of the very nature of their field, which leads them to hold bond portfolios that are worth up to hundreds of billions of Euros.

While it was clear that credit risk incriminated so-called "corporate bonds", the financial news of the past few years has shown that lines coming from issuers that had been said to be of little or no risk, could also be severely affected.

This makes it quite easy to understand why the importance of an adequate modeling of this risk is paramount, especially given that regulatory requirements come on top of the exogenous economic phenomena mentioned above.

Solvency II particularly emphasizes the significance of the chosen model, which must grant an economic capital in accordance with the risk profile of the insurer.

It is in this context that this dissertation is written. We will focus on disclosing each step that has allowed the implementation of a stochastic modeling method of the default and spread risks of interest rate products of an insurer in a risk-neutral universe, within the projection model used for Best Estimate and SCR calculations. After the study of two different credit models, we will present the validation and implementation steps of the chosen model.

Finally, we will explain the impacts of this credit model when implemented in the ALM projection, and focus on the Solvency II results.

All the work done for this dissertation will constitute, for the company in which it was carried out, the first elements of control and research on the stochastic credit models as well as the first examples of impacts that can be observed with the use of a chosen model.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Importance de la modélisation du risque de crédit</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Le risque de crédit</b>	<b>3</b>
1.1	Définition et corrélations avec les autres types de risques . . . . .	3
1.2	Le risque de crédit au sein de l'actualité financière . . . . .	4
1.3	Les investisseurs et les émetteurs . . . . .	5
1.4	Les agences de notation . . . . .	5
1.5	Le risque de crédit chez les assureurs . . . . .	6
1.6	Notions importantes . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Le risque de crédit dans la formule standard</b>	<b>8</b>
2.1	Solvabilité II . . . . .	8
2.2	Le calcul du Best Estimate . . . . .	8
2.3	Calcul du SCR . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Le modèle ALM</b>	<b>11</b>
3.1	Importance des scénarios économiques . . . . .	12
3.2	L'univers risque-neutre . . . . .	12
3.3	Les inputs de l'actif . . . . .	13
3.4	Modélisation des contrats Euro . . . . .	13
3.5	Facteurs influant sur la valeur du Best Estimate . . . . .	15
<b>4</b>	<b>La modélisation actuelle du défaut et ses limites</b>	<b>16</b>
4.1	Traitement actuel des actifs obligataires . . . . .	16
4.2	Réglementation . . . . .	18
4.3	Conclusion quant au modèle actuel . . . . .	18
<b>II</b>	<b>Les modèles de crédit disponibles</b>	<b>20</b>
<b>5</b>	<b>L'environnement de projection</b>	<b>20</b>
5.1	Le générateur de scénarios économiques . . . . .	20
5.2	Scénarios économiques et mouvement Brownien . . . . .	21
5.3	Les tests martingales . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Les modèles disponibles</b>	<b>23</b>
6.1	Principes de base des modèles G2 et G3 . . . . .	23
6.2	Le modèle G2 . . . . .	24
6.3	Le modèle G3 . . . . .	29
<b>7</b>	<b>Le calibrage des modèles</b>	<b>31</b>
7.1	Le calibrage du modèle G2 . . . . .	31
7.2	Le calibrage du modèle G3 . . . . .	32
<b>III</b>	<b>L'implémentation et la validation d'un modèle de crédit</b>	<b>33</b>
<b>8</b>	<b>Choix du modèle et validation des sorties</b>	<b>33</b>
8.1	Comparaison des modèles G2 et G3 . . . . .	33
8.2	Le modèle retenu . . . . .	35
8.3	Validation des sorties . . . . .	36
8.4	Tests martingales . . . . .	41

<b>9</b>	<b>L'implémentation au sein du modèle ALM</b>	<b>45</b>
9.1	Traitement des actifs obligataires avec un modèle de crédit . . . . .	45
9.2	Les contraintes du modèle ALM et leur solution . . . . .	46
9.3	La méthode d'interpolation et les maturités retenues . . . . .	47
9.4	Le modèle final implémenté . . . . .	53
9.5	Stabilité de la combinaison retenue sur les chiffres S2 . . . . .	54
<b>IV</b>	<b>Impacts et sensibilités</b>	<b>56</b>
<b>10</b>	<b>Les impacts sur la modélisation des actifs obligataires</b>	<b>56</b>
10.1	Impact sur les flux futurs . . . . .	56
10.2	Impact sur les valeurs de marché . . . . .	62
<b>11</b>	<b>Les impacts sur l'algorithme de taux servi et sur les chiffres Solvabilité II</b>	<b>64</b>
11.1	Impact sur l'algorithme de taux servi et sur les marges futures . . . . .	64
11.2	Impact sur le SCR . . . . .	72
<b>12</b>	<b>Sensibilité des marges futures et du ratio SCR au niveau des taux de recouvrement</b>	<b>72</b>
<b>13</b>	<b>Sensibilité des marges futures et du ratio SCR au niveau et à la volatilité du défaut</b>	<b>74</b>
13.1	Impact de la dégradation de rating sur l'algorithme de taux servi . . . . .	74
13.2	Impact de la dégradation de rating sur les marges futures et sur le ratio SCR . . . . .	77

# Introduction

La valorisation du bilan économique d'une compagnie devient cruciale dans le contexte actuel d'évolution des normes comptables IFRS et de la réglementation Solvabilité 2. Il semble ainsi nécessaire d'intégrer les risques financiers les plus significatifs dans le processus de valorisation des différents éléments du bilan économique.

Jusqu'alors, le risque de crédit était traité en considérant les actifs obligataires du portefeuille de l'entreprise comme des actifs obligataires non risqués avec des flux et un principal réduits : C'est le principe de l'ajustement par risque neutralisation.

Ce traitement n'est cependant pas complètement conforme aux préconisations réglementaires issues des textes de la commission européenne, d'avantage favorables à une modélisation spécifique du risque de crédit respectant le caractère volatil induit par le risque de défaut probable des émetteurs.

L'objectif de ce mémoire est donc de constituer une base solide de connaissances et d'exemples d'impacts pouvant être observés après l'ajout d'un modèle de crédit stochastique au sein du modèle ALM de l'entreprise. Le travail effectué consistera donc en l'intégration d'un risque de crédit stochastique au sein du modèle de projection utilisé pour le calcul du Best Estimate et du SCR de l'entreprise par le biais de l'implémentation d'un modèle de crédit stochastique.

La bonne compréhension des modèles de crédit disponibles dans le générateur de scénarios économiques de l'entreprise est primordiale afin de choisir le modèle qui répondra le mieux aux attentes du régulateur et aux contraintes du modèle ALM. C'est pourquoi la première étape de ce mémoire consistera en l'étude détaillée des deux modèles de crédit stochastiques proposés par le fournisseur du générateur de scénarios économiques. Cette étude des modèles, de leur comportement à leurs avantages et inconvénients, conduira au choix d'un modèle de crédit à implémenter.

La structure des sorties du générateur de scénarios économiques et les limites de taille des inputs du modèle ALM nous obligeront par la suite à une réduction des données de sortie du modèle de crédit afin qu'elles puissent être utilisables dans le modèle ALM. Les données finales retenues devront être validées sur des critères de martingalité et de stabilité des chiffres obtenus avant et après manipulation.

Pour finir, la maîtrise du modèle de crédit finalement implémenté sera rendue possible par une compréhension précise de ses impacts sur chaque partie du modèle ALM concernée, notamment la modélisation des actifs obligataires et l'algorithme de taux servi. Il est aussi important pour la gestion des risques de connaître les répercussions possibles du mouvement des paramètres du modèle sur les résultats réglementaires. Nous réaliserons donc des sensibilités sur les marges futures et ratio SCR de la compagnie.



---

## Première partie

# Importance de la modélisation du risque de crédit

Ce premier chapitre vise à expliciter la nécessité du passage de notre modèle de projection de flux actif/passif actuel à un modèle de crédit comprenant des spreads stochastiques pour la valorisation et projection des flux futurs de nos actifs obligataires.

Nous nous attacherons dans cette partie à présenter le risque de crédit dans un cadre général tout d'abord puis à travers le cadre de la directive européenne Solvabilité II qui impose aux compagnies d'assurance une gestion précise et adaptée des risques auxquels elles sont soumises.

Nous présenterons ensuite le modèle de projection de flux actif/passif actuel de l'entreprise, pour enfin nous pencher sur les limites de ce modèle actuel quant aux attentes réglementaires des agences de régulation concernant la modélisation des flux relatifs aux actifs obligataires présentant un risque probable de défaut.

## 1 Le risque de crédit

### 1.1 Définition et corrélations avec les autres types de risques

La définition donnée à l'article 13 de la directive européenne Solvabilité II [10] décrit le risque de crédit comme « le risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant de fluctuations dans la qualité de crédit des émetteurs de titres, des contreparties ou de n'importe quel autre emprunteur auquel l'assureur (ou le réassureur) est exposé. Cette exposition peut prendre la forme d'un risque de défaut d'une contrepartie, d'un risque de spread ou d'un risque de concentration. ».

En partant de cette définition, nous pouvons affiner l'explication en donnant les trois formes concrètes de risque que le risque de crédit peut prendre pour un émetteur :

- Un événement de crédit tel que le défaut
- La variation de son spread de crédit,
- Le changement de sa note auprès des agences de notations

Ces trois points sont par ailleurs grandement liés entre eux.

Par exemple, dans le cas d'une entreprise cotée, l'anticipation d'un défaut de paiement entraînera la hausse du spread de crédit des obligations qu'elle a émises (les investisseurs souhaitant être mieux rémunérés car ce titre de dette est devenu plus risqué) et les agences de notation pourront décider d'abaisser la note de l'émetteur ou du titre qu'il a émis.

Aussi le risque de crédit possède un lien avec certains autres types de risques financiers définis dans le cadre de la réglementation Solvabilité II auxquels sont confrontés les assureurs.

Rappelons succinctement ces risques :

1. Le risque de marché : risque de perte dû aux fluctuations des conditions de marché (prix, taux, taux de change, volatilités, etc...)
  - Le risque action : risque de perte de valeur d'un portefeuille dû à une variation du cours des actions,
  - Le risque de taux : risque de perte de valeur d'un instrument financier de taux dû à une variation des taux d'intérêt,
  - Le risque de change : risque de perte de valeur des actifs ou passifs libellés en devises étrangères dû à une variation des taux de change.
2. Le risque de liquidité : risque de ne pouvoir vendre, ou ne pouvoir vendre à son juste prix un titre financier. Il peut se traduire, soit par une impossibilité effective de le vendre, soit par une décote dite d'illiquidité.
3. Le risque opérationnel : les risques de fraude, d'erreurs des opérateurs, de pannes des systèmes, etc...

Considérons le cas d'une compagnie d'assurance qui a investi une partie de son actif en actions : Elle est donc soumise au risque de marché. Si la valeur de ces actions se met à diminuer à la suite d'une crise, la probabilité de défaut de la compagnie augmentera.

Aussi par exemple, l'impact du risque de défaut de la Grèce sur le niveau de l'Euro face au Dollar montre que le risque de défaut d'un Etat est fortement lié au risque de change. Ce risque de défaut impacte également la politique de taux de la Banque Centrale Européenne et l'aversion du marché à l'égard de la dette souveraine de pays dits périphériques, ce qui conduit donc aussi à un risque de taux.

Outre ces corrélations entre ces risques, notons que la distinction entre les différents types de risques peut se trouver compliquée : Il est par exemple difficile de distinguer le risque de taux du risque de crédit liés au changement de prix d'une obligation.

### 1.2 Le risque de crédit au sein de l'actualité financière

Le risque de crédit est aujourd'hui au coeur des problématiques que rencontrent les institutions financières, et donc les assureurs, au vu des événements de ces dernières années. Nous pouvons en effet citer :

- La crise des subprimes

Les subprimes sont des prêts immobiliers dont le taux d'intérêt varie en fonction de la valeur du bien qu'ils ont permis d'acheter : plus celui-ci vaut cher, et plus les intérêts que paie l'emprunteur sont bas. Quand le bien perd de la valeur, le taux d'intérêt augmente.

Or, en 2007, la valeur des biens immobiliers s'effondre aux États-Unis. Les taux d'intérêts augmentent donc considérablement, et des millions d'Américains ne peuvent plus rembourser leurs emprunts. Les entreprises de crédit qui ont accordé ces prêts les ont en grande partie revendus sous forme de titres (on parle de « titrisation ») à d'autres banques, auxquelles sont versés les remboursements effectués par les emprunteurs initiaux.

Les banques américaines et européennes possèdent un grand nombre de titres subprimes. Dans les faits, elles ne peuvent plus espérer toucher de versement de la part des emprunteurs, et le montant global de ce qu'elles possèdent vraiment diminue considérablement. Les banques vendent alors de nombreuses actions pour augmenter leurs réserves monétaires, ce qui fait chuter les cours des Bourses. La crise se diffusa par la suite dans le monde entier.

La banque Lehman Brothers, fait faillite le 15 septembre 2008 en raison de sa forte exposition aux subprimes (85 milliards de dollar de produits toxiques acquis en 2003 et 2004 et impossibles à liquider sur les marchés financiers). L'Etat américain n'intervient pas et aucun repreneur potentiel ne tente de sauver la 4ème banque d'affaires des Etats-Unis.

La crise des subprimes contamine par la suite le marché du crédit dans son ensemble, en Amérique comme en Europe.

- La crise de la dette souveraine

Cette crise commence en 2010 avec la crise de la dette grecque et se prolonge jusqu'à 2012, année de mise en place de politiques et de pactes visant la croissance et l'union bancaire pour les pays européens. La crise de la dette grecque, née de la menace croissante d'un risque de défaut de la Grèce sur ses obligations, se répand progressivement à 17 autres pays de l'Eurozone. Elle se manifeste par une hausse significative des taux d'emprunts de certains pays dits « périphériques » (le Portugal, l'Irlande, l'Italie, la Grèce et l'Espagne) sur le marché obligataire par rapport aux autres pays de la Zone Euro, notamment l'Allemagne.

Depuis le début de la crise financière, certains pays européens ont connu une très forte progression de leur dette publique, liée notamment à l'augmentation de leurs dépenses pour soutenir leur économie ou venir en aide à leur système bancaire.

L'épisode grec est loin d'être le premier. En effet, des défauts souverains ont eu lieu dans le passé récent. On peut citer le cas de l'Argentine en 2002 ou de la Russie en 1998.

Ces deux crises survenues ces dernières années ont eu d'importantes répercussions sur le marché du crédit européen, ayant comme conséquence la hausse des spreads de crédit.

Ci-dessous un graphique présentant l'évolution de 2000 à aujourd'hui d'un indice de spread européen pour des obligations gouvernementales et corporate de rating A et maturité 10 ans :

### Historique de spreads 10 ans - Rating A

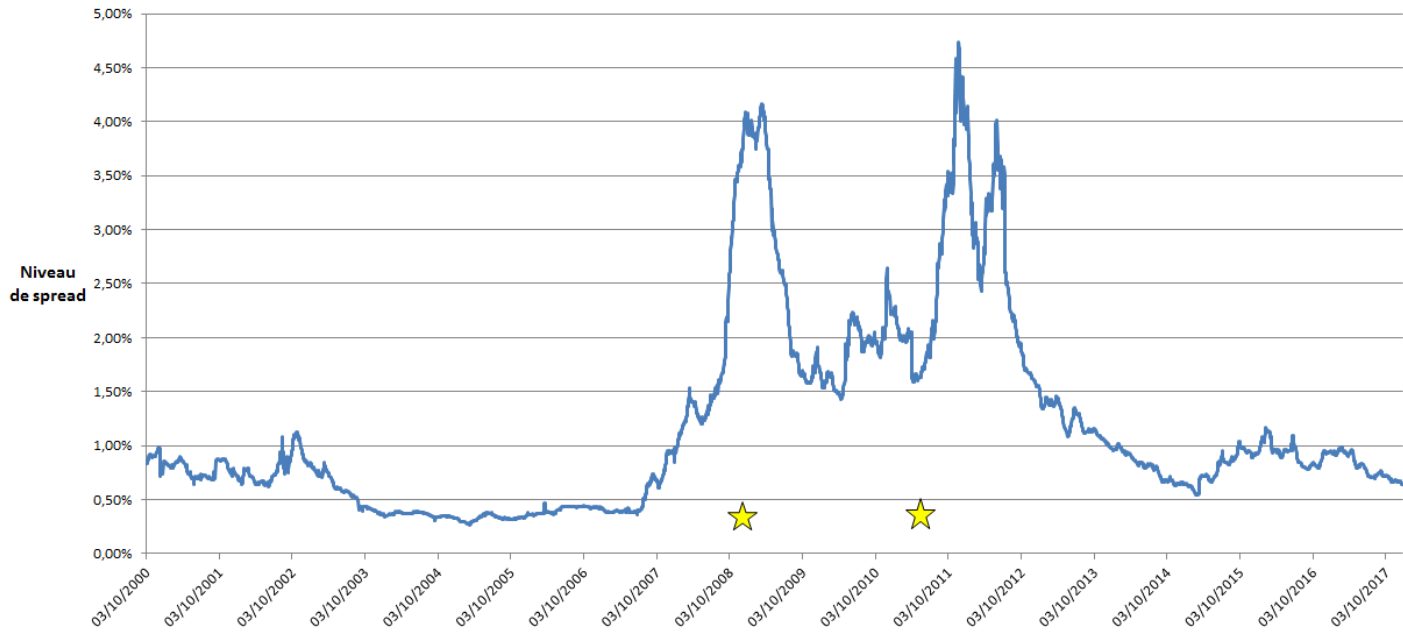


FIGURE 1 – Crises et niveau de spread

On remarque une très forte augmentation du niveau des spreads au moment des crises (Le début des crises est indiqué par des étoiles).

### 1.3 Les investisseurs et les émetteurs

Habituellement, les émetteurs sont des entreprises ou des états qui cherchent à financer leur activité où à faire face à un gap de trésorerie. Par exemple l'Etat Français émet régulièrement des obligations sur le marché primaire dans le but d'assurer son fonctionnement public normal. Tous les émetteurs n'empruntent pas avec le même taux. Celui-ci est directement relié à la qualité de crédit de l'entité. La différence entre le taux émis par une entité risquée et celui émis par une entité non risquée s'appelle le spread de crédit.

En face des émetteurs se trouvent les investisseurs. Ceux-ci sont en général de grandes institutions telles que des banques, des assurances, des entreprises ou des états qui cherchent à rémunérer leurs liquidités. Elles investissent donc dans des placements plus ou moins risqués en fonction de leur appétit au risque.

### 1.4 Les agences de notation

Le rôle des agences de notation est de mesurer précisément le risque de non remboursement des dettes que présente un emprunteur, c'est à dire le risque de solvabilité d'un emprunteur, par le biais d'une note. Ces notes peuvent être données à tout type d'emprunteur (Etats, entreprises privées ou publiques..) et tout type de titre de créance.

Cette note, pour une obligation par exemple, mesure la probabilité de remboursement du capital et des intérêts de cette dernière. En général, une note de crédit élevée conduit à un effet favorable sur la valeur de marché d'une obligation. Les notes de crédit (à long terme) sont généralement attribuées de la façon suivante : Le «AAA» est la note la plus élevée et le «BBB» est la note la plus faible dans la catégorie des Investment Grade (des normes réglementaires contraignent certains investisseurs institutionnels à ne détenir que des actifs de cette catégorie). Toutes les obligations dont le rating est en dessous de triple B sont communément appelées junk bonds ou Sub-Investment Grade.

Le marché des agences de notation est dominé par trois agences privées :

- Moody's Investor Services,
- Standard & Poors Corporation,
- Fitch rating.

Les deux premières représentent à elles seules environ 80 % du marché. Les agences de notation ont deux rôles principaux :

- Réduire l'asymétrie d'information entre les prêteurs et les emprunteurs,
- Améliorer la transparence et l'efficacité du marché obligataire.

Pour attribuer une note les agences se basent sur plusieurs éléments comme certains facteurs économiques (situation de restructuration, la réaction de l'émetteur aux cycles économiques), la structure de la dette émise (notamment la maturité et la faisabilité du projet sous-jacent), des facteurs financiers (comme la disponibilité de ressources suffisantes pour faire face à une demande de liquidité imprévue) ou des facteurs relatifs à la bonne gouvernance de l'émetteur. Notons également que le rating est accordé pour la durée de l'émission de l'obligation mais est soumis à une surveillance continue qui peut entraîner une révision.

Voici un tableau récapitulatif des ratings donnés par les trois plus grandes agences de notation ainsi que la définition correspondante en terme de risque de solvabilité :

Signification de la note	Moody's		Standard & Poor's		Fitch Ratings	
	Long terme	Court terme	Long terme	Court terme	Long terme	Court terme
<b>Prime</b> <b>Première qualité</b>	Aaa	P-1	AAA	A-1+	AAA	F1+
<b>High grade</b> <b>Haute qualité</b>	Aa1		AA+		AA+	
	Aa2		AA		AA	
	Aa3		AA-		AA-	
<b>Upper medium grade</b> <b>Qualité moyenne supérieure</b>	A1	P-2	A+	A-1	A+	F1
	A2		A		A	
	A3	P-3	A-	A-2	A-	F2
<b>Lower medium grade</b> <b>Qualité moyenne inférieure</b>	Baa1		BBB+		BBB+	
	Baa2	P-3	BBB	A-3	BBB	F3
	Baa3		BBB-		BBB-	
<b>Non-investment grade, speculative</b> <b>Spéculatif</b>	Ba1	Not prime	BB+	B	BB+	B
	Ba2		BB		BB	
	Ba3		BB-		BB-	
<b>Highly speculative</b> <b>Très spéculatif</b>	B1		B+		B+	
	B2		B		B	
	B3		B-		B-	
<b>Risque élevé</b>	Caa1	Non prime	CCC+	C	CCC	C
<b>Ultra spéculatif</b>	Caa2		CCC			
<b>En défaut, avec quelques espoirs de recouvrement</b>	Caa3		CCC-			
	Ca		CC		CC	
			C/C/R		C	
<b>En défaut sélectif</b>	C		SD	D	RD	D
<b>En défaut</b>			D		D	

FIGURE 2 – Définitions des notations

### 1.5 Le risque de crédit chez les assureurs

Comme toute institution financière, un assureur peut fortement s'exposer au risque de crédit.

Il peut en effet s'y retrouver exposé de manière directe par l'intermédiaire de ses créances envers les réassureurs (obligations, prêts..) ou des garanties de ses contrats ou bien de manière indirecte sous la forme de risque de spread au sein de son portefeuille d'actifs.

Ce risque de spread peut provenir du défaut probable d'un émetteur de titres ; dans cette situation l'assureur ne recouvre pas une partie des cash-flows associés au titre de dette qu'il détient (nous pouvons alors parler de risque de défaut).

Le risque de spread peut également provenir de la détérioration de la qualité de crédit d'un emprunteur, il s'en suivra alors une augmentation du prix des instruments émis comme les « obligations corporate » (obligations émises par des entreprises) ou les « obligations souveraines » (obligations émises par des Etats).

Comme on peut le voir sur le graphique ci-dessous, les obligations représentent une grande partie du portefeuille d'une compagnie d'assurance couvrant les fonds en Euro :

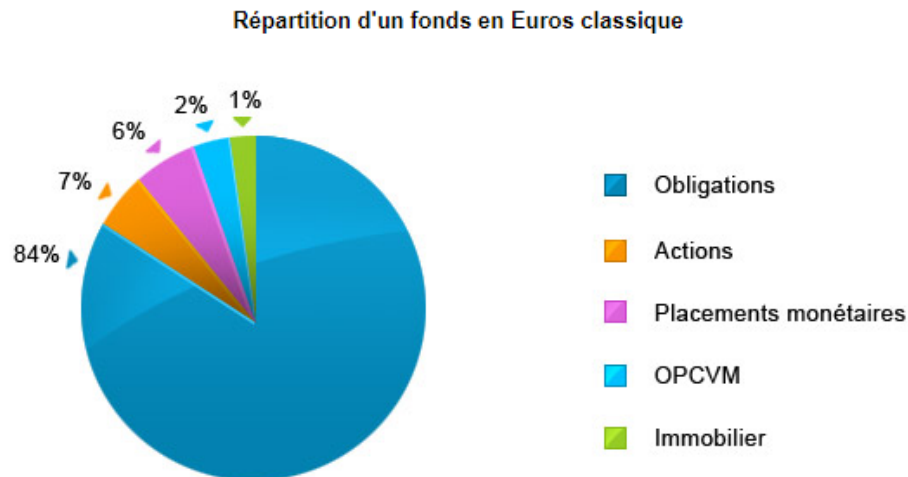


FIGURE 3 – Répartition d'un fonds en Euros classique

Dans le cadre réglementaire Solvabilité II, la modélisation du risque de crédit est donc primordiale et doit permettre la production d'éléments quantitatifs et qualitatifs robustes afin que la compagnie d'assurance concernée puisse avoir un capital économique adéquat et évaluer correctement les instruments financiers sensibles au risque de spread.

### 1.6 Notions importantes

Nous allons introduire quelques notions importantes qui concernent les instruments financiers sujets au risque de crédit que sont la séniorité et le taux de recouvrement.

#### La séniorité

Les sociétés qui font appel aux marchés obligataires pour se financer recourent de plus en plus souvent à la technique de la « subordination de dette ». Cette technique permet d'établir un ordre de priorité entre les différents types d'obligations émises par une même société, pour le cas où celle-ci se retrouverait dans l'impossibilité d'honorer ses différents engagements financiers.

En cas de problème de solvabilité, l'émetteur sera tenu de rembourser en premier lieu les obligations prioritaires. Les actifs restants après le remboursement des obligations prioritaires, seront, s'il en reste, affectés au remboursement des obligations disposant d'un niveau de priorité inférieur.

Avant d'investir dans une obligation, il importe donc de connaître le niveau de priorité dont cette dernière bénéficie : c'est ce qu'on appelle la séniorité. Bien que toutes les émissions soient différentes, la hiérarchie des obligations s'inscrit schématiquement dans le cadre suivant :

#### 1. Les obligations seniors sécurisées

Les obligations seniors sécurisées sont généralement considérées comme bénéficiant du plus haut niveau de priorité. Elles sont au même niveau que les obligations senior mais sont en plus garanties par un ou plusieurs actifs de la société émettrice. En cas d'insolvabilité, les actifs mis en gage seront par priorité affectés au remboursement de la dette sécurisée.

### 2. Les obligations seniors non-sécurisées

Les obligations seniors non-sécurisées ne donnent droit à aucun privilège particulier sur les actifs de la société émettrice. Le paiement des coupons ainsi que le remboursement de l'obligation à l'échéance sont simplement garantis par « la bonne foi et le crédit » de l'émetteur.

### 3. Les obligations seniors subordonnées

Les obligations seniors subordonnées possèdent un niveau de priorité moyen. Les détenteurs d'obligations seniors subordonnées se voient remboursés les premiers après que les détenteurs des obligations seniors ont été remboursés.

### 4. Les obligations subordonnées

Les obligations subordonnées disposent d'un niveau de priorité faible. En cas d'insolvabilité, les détenteurs de telles obligations ne seront remboursés qu'après le remboursement intégral des détenteurs d'obligations non-subordonnées. Compte tenu du risque accru que présente ce type d'obligation, elles offrent généralement un rendement supérieur à celui offert par les obligations senior.

### 5. Les obligations juniors subordonnées

Les obligations juniors subordonnées disposent d'un niveau de priorité encore plus faible que les obligations subordonnées. En cas d'insolvabilité, les détenteurs de telles obligations ne seront remboursés qu'après le remboursement intégral des détenteurs d'obligations non-subordonnées et simplement subordonnées. Compte tenu du risque accru que présente ce type d'obligation, elles offrent généralement un rendement supérieur à celui offert par les obligations seniors et simplement subordonnées.

En pratique de telles obligations également appelées « obligations hybrides », sont souvent perpétuelles et confèrent parfois la possibilité à l'émetteur de suspendre temporairement ou définitivement le paiement d'un coupon.

#### Le taux de recouvrement

Le taux de recouvrement est le pourcentage de la valeur nominale de l'obligation récupéré en cas d'événement de crédit. Par exemple si pour un nominal de 100M €, 70M € sont récupérés suite à un événement de crédit, le taux de recouvrement sera de 70 % .

## 2 Le risque de crédit dans la formule standard

### 2.1 Solvabilité II

La directive européenne Solvabilité II, entrée en vigueur au 1er janvier 2016, s'articule autour de trois piliers : un pilier quantitatif, un pilier qualitatif, et un pilier de transparence et reporting.

Sous solvabilité II, l'actif est évalué en valeur de marché et le passif correspond à la somme des fonds propres, de la marge pour risque et du Best Estimate.

La directive impose également un niveau de fonds propres minimum à détenir : Le SCR (Solvency Capital Requirement).

### 2.2 Le calcul du Best Estimate

Le Best Estimate (BE) correspond à la valeur actuelle probable des flux générés par les passifs, c'est à dire l'espérance sous la probabilité risque-neutre des flux du passif actualisés.

Il est calculé grâce à la projection des flux actif-passif réalisés par le modèle ALM présenté ci-après.

Les flux du passif sont considérés dans le calcul du Best Estimate comme étant :

- Les primes périodiques ou programmées,
- Les rachats,
- Les décès,
- Les frais de l'assureur au titre de la gestion des contrats et des placements,
- La PM et la réserve PPE que doit reverser l'assureur aux assurés à la fin de la projection.

### 2.3 Calcul du SCR

Le SCR correspond au capital économique de Solvabilité 2. C'est le montant de fonds propres dont doit disposer la compagnie pour être considérée par le régulateur comme suffisamment solide pour garantir sa solvabilité.

L'entreprise utilise la formule standard, calibrée par l'EIOPA, pour le calcul du SCR.

La directive Solvabilité II propose une méthode de calcul du SCR qui s'appuie sur l'agrégation de certains risques auxquels les entreprises du secteur assurantiel sont exposées.

L'exigence de capital  $C_R$  requis au titre d'un facteur de risque R et correspondant au capital requis pour le sous-module de risque R est calculée comme la variation du niveau des fonds propres économiques constatée suite à un choc instantané sur le facteur R au niveau de risque 0,5%

$$\begin{aligned} C_R &= (A_0 - BE_0) - (A'_0 - BE'_0) \\ &= NAV_{centrale} - NAV_{choquée} \end{aligned}$$

Avec :

- $A_0$  la valeur de marché de l'actif à la date d'évaluation
- $BE_0$  le Best Estimate calculé à la date d'évaluation (cas central)
- $A'_0$  la valeur de marché de l'actif après un choc instantané sur le facteur de risque R au niveau de risque 0,5%
- $BE'_0$  le Best Estimate calculé après choc instantané sur le facteur de risque R au niveau de risque 0,5%
- La NAV correspond à la somme des fonds propres en 0 et de la valeur actualisée des résultats futurs liés au portefeuille d'assurance (la valeur actualisée des résultats futurs est également appelée marge future).

On agrège par la suite ces capitaux requis calculés par sous-module via des matrices de corrélation pour obtenir les SCR relatifs aux différents modules de risque.

Enfin on agrège via une nouvelle matrice de corrélation ces SCR relatifs à chaque module de risque pour obtenir le SCR global : le BSCR.

Le SCR final est obtenu après addition au BSCR d'une exigence de capital au titre du risque opérationnel et soustraction d'un ajustement au titre des propriétés d'absorption du risque des futures Participation aux Bénéfices et des impôts différés.

Voici le schéma correspondant à l'agrégation des sous-modules et modules du SCR décrite ci-dessus :

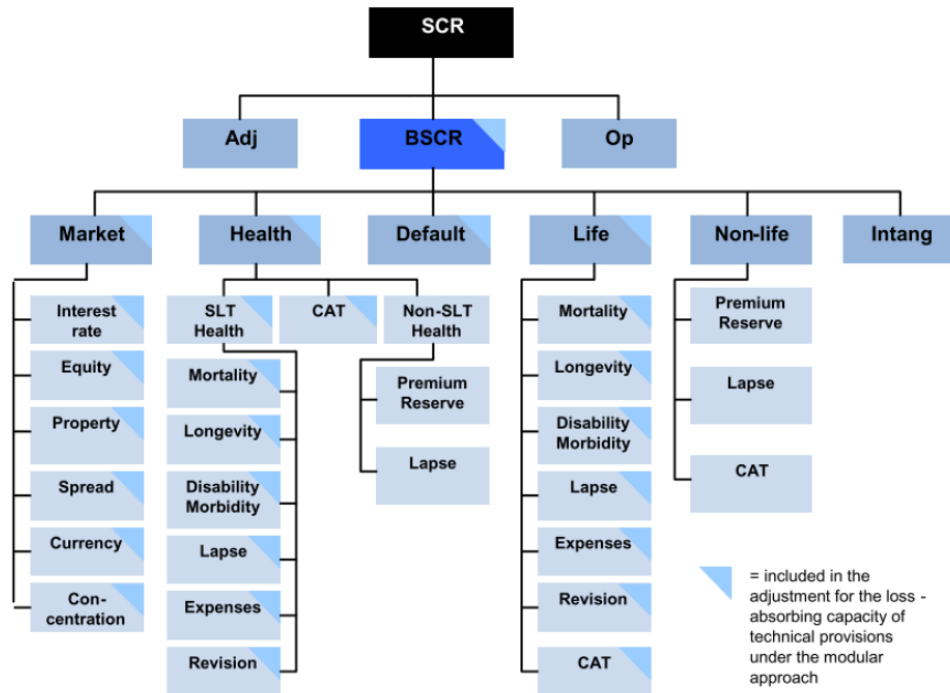


FIGURE 4 – Arborescence du SCR

Le SCR est calibré par l'EIOPA afin qu'il corresponde à la valeur à risque (Value-at-Risk– VaR) des fonds propres de base d'une entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de 99,5 % à l'horizon d'un an.

### 2.3.1 Sous-module risque de spread

La directive Solvabilité II définit le risque de spread comme la « sensibilité de la valeur des actifs, des passifs ou des instruments financiers aux changements affectant le niveau ou la volatilité des spreads de crédit par rapport à la courbe des taux sans risque ».

Le risque de spread mesure le risque lié à une dégradation de la qualité de crédit des émetteurs estimé à l'aide des spreads de taux.

Selon l'EIOPA, le sous-module risque de spread s'applique aux :

- Obligations (y compris les dépôts des établissements de crédit),
- Prêts garantis par des hypothèques,
- Dérivés de crédit, tels que les CDS, les total return swaps et les credit linked notes,
- Produits de crédit structurés, tels que les ABS et les CDO.

La charge de capital relative au risque de spread est déterminée par l'analyse des résultats d'un calcul issu d'un scénario dans lequel il y a augmentation du spread de crédit. Le sous-module risque de spread ne modélise pas explicitement les risques de changement de notation et de défaut. Ces risques sont en fait abordés implicitement, à la fois dans le calibrage des facteurs et dans les mouvements des spreads de crédit.

Par exemple, l'impact de la notation sera reflété dans les indices utilisés pour réaliser la calibration des facteurs. La situation choquée s'obtient en dégradant la valeur de marché de chaque titre grâce à des coefficients qui dépendent du rating du titre. Pour les obligations classiques :



rating/sensibilité	AAA	AA	A	BBB	BB	B	<CCC
<b>jusqu'à 5</b>	0,9%.sensi	1,1%.sensi	1,4%.sensi	2,5%.sensi	4,5%.sensi	7,5%.sensi	7,5%.sensi
<b>entre 5 et 10</b>	4.50% + 0.53 %.(sensi-5)	5.50% + 0.58%.(sensi-5)	7% + 0.70%.(sensi -5)	12.50% + 1.50%.(sensi -5)	22.50% + 2.51%.(sensi -5)	37.50% + 4.20%.(sensi -5)	37.50% + 4.20%.(sensi -5)
<b>entre 10 et 15</b>	7.15% +0.50 %.(sensi -10)	8.40% +0.50 %.(sensi -10)	10.50%+ 0.50 %.(sensi -10)	20% + 1%.(sensi -10)	35.05% +1.80 %.(sensi -10)	58.50% +0.50 %.(sensi -10)	58.50% + 0.50%.(sensi -10)
<b>entre 15 et 20</b>	9.65% + 0.50 %.(sensi -15)	10.90% + 0.50 %.(sensi -15)	13% + 0.50 %.(sensi -15)	25% + 1 %.(sensi -15)	44.05% + 0.50 %.(sensi -15)	61% + 0.50 %.(sensi -15)	61% + 0.50 %.(sensi -15)
<b>plus de 20</b>	12.15% + 0.50 %.(sensi -20)	13.40% + 0.50 %.(sensi -20)	15.50% + 0.50 %.(sensi -20)	30% + 0.50 %.(sensi -20)	46.55% + 0.50 %.(sensi -20)	63.50% + 0.50 %.(sensi -20)	63.50% + 0.50 %.(sensi -20)
<b>sensibilité max</b>	176	173	169	140	107	73	73

FIGURE 5 – chocs SCR spread

Ici les sensibilités sont en années et correspondent à la durée des titres. Dans l'hypothèse où le rating n'est pas disponible, la matrice devient :

rating/sensibilité	Choc
<b>jusqu'à 5</b>	3%. sensi
<b>entre 5 et 10</b>	15% + 1.68%.(sensi -5)
<b>entre 10 et 15</b>	23.40% + 1.16%.(sensi -10)
<b>entre 15 et 20</b>	29.20% + 1.16%.(sensi -15)
<b>plus de 20</b>	35% + 0.50 %.(sensi -20)
<b>sensibilité max</b>	130

FIGURE 6 – chocs SCR spread

La formule pour avoir le choc en VM est alors :

$$choc = \sum facteur_i \times VM_i$$

Par exemple, pour une obligation AA ayant pour sensibilité 7 ans, le choc en VM obtenu est de  $5.5\% + 0.58\%(7-5) = 6.66\%$ .

Ce risque s'applique aux obligations au sens large, aux structurés de crédit et aux dérivés de crédit. Cependant, cette matrice de choc de spread ne s'applique pas aux obligations souveraines de la zone Euro émises en euro : Solvabilité 2 considère qu'il n'existe pas de risque de défaut sur ces contreparties.

Pour finir, le capital  $C_R$  requis au titre du risque de spread est obtenu, comme vu partie précédente, par la formule :

$$C_R = NAV_{centrale} - NAV_{choquée}$$

### 3 Le modèle ALM

L'une des spécificités de l'assurance vie réside dans le lien étroit qui existe entre :

- La performance financière constatée à l'actif,
- Les engagements de l'assureur envers ses assurés, dirigés par les options et garanties proposés sur les contrats (Taux minimum garanti, rachats, arbitrages..)

Le calcul du Best Estimate en vie requiert donc l'utilisation d'un modèle de projection des flux actif-passif (modèle ALM) permettant de modéliser ces interactions qui existent entre l'actif et le passif de l'assureur.

### 3.1 Importance des scénarios économiques

La réglementation Solvabilité II imposant une évaluation du passif qui prend en considération toutes les éventualités possibles pour estimer le coût moyen des options et garanties, l'utilisation de scénarios économiques stochastiques apparaît alors indispensable.

Le générateur de scénarios économiques permet de projeter des variables économiques et financières de manière risque-neutre sur un horizon donné et ce sur un grand nombre d'itérations.

Les scénarios obtenus en sortie de générateur sont ensuite entrés en input du modèle ALM au même titre que les données d'actif et de passif de l'entreprise.

Le modèle ALM réalise par la suite 1000 projections des flux actif-passif en univers risque-neutre sur un horizon fixé à 30 ans. Les résultats sont ensuite analysés et reportés au régulateur (Best Estimate, NAV, SCR).

### 3.2 L'univers risque-neutre

#### 3.2.1 Les martingales

Un processus stochastique est une martingale par rapport à un ensemble d'information si son espérance en date  $t$  conditionnelle à l'information disponible en date  $s < t$  est égale à la valeur du processus en date  $s$ , c'est-à-dire qu'un processus  $A(u)$  est une martingale si l'espérance conditionnelle de  $A(t)$  par rapport à la filtration  $F(s)$  est  $A(s)$  (i.e :  $E[A(t) | F(s)] = A(s)$   $E[A(t) | \mathcal{F}_s] = A_s$   $E[A(t) | \mathcal{F}_s] = A_s$ ).

#### 3.2.2 Caractéristiques de l'univers risque-neutre

L'univers risque neutre est un univers fictif dans lequel le processus des prix actualisés des actifs ayant une source de risque commune est une martingale sous une unique probabilité appelée «probabilité risque-neutre». Le caractère martingal des prix actualisés implique que la meilleure information que l'on peut avoir à un temps  $t$  de l'évolution future du prix d'un sous-jacent est son prix à ce temps  $t$  : Il n'y a donc aucune opportunité d'arbitrage possible.

La martingalité des prix actualisés implique également que l'espérance des prix futurs actualisés est égale aux prix observés en 0.

L'univers risque-neutre a été introduit dans le but de faciliter la valorisation des produits dérivés. Il n'existe en effet dans cet univers pas de primes de risque et le fait que les actifs rapportent en moyenne le taux sans risque permet de calculer une valeur des options et garanties futures cohérente avec les prix d'options dérivées cotées sur le marché. L'objectif est donc une valorisation market-consistent, d'ailleurs préconisée par le régulateur.

Notons que les scénarios risque-neutres ne sont interprétables qu'en moyenne pour l'assureur puisqu'ils ne reflètent pas les attentes de ces derniers en terme d'évolution.

#### 3.2.3 Probabilité de défaut en univers risque-neutre

Les hypothèses risque-neutres obligatoires pour les projections des flux sous Solvabilité II impliquent que l'évolution des valeurs projetées sous cet univers diffère du réel.

Montrons cela pour les probabilités de défaut :

Soit  $P(T)$  le prix en zéro d'une obligation zéro-coupon risquée de maturité  $T$  avec un taux de recouvrement égale à 0.

Notons  $p$  la probabilité de défaut en univers risque réel et  $q$  la probabilité de défaut en univers risque neutre, alors :

En risque réel :  $P(T) = (1 - p)e^{-(R_f + s)T}$

En risque neutre :  $P(T) = (1 - q)e^{-(R_f)T}$

Où  $R_f$  désigne le taux sans risque et  $s$  correspond au spread qui est défini, en risque réel, comme le rendement supplémentaire qui rémunère l'investisseur pour sa plus grande prise de risque.

En égalisant les prix  $P(T)$  de notre obligation zéro-coupon en 0 sous les deux univers, on remarque que plus le spread est élevé en risque réel, plus les probabilités  $q$  risque neutres se doivent d'être supérieures aux probabilités de défaut réelles.

Nous verrons en effet qu'il existe un lien certain entre probabilité de défaut risque-neutre et spread réel dans les modèles de crédit risque-neutres.

### 3.3 Les inputs de l'actif

L'actif se décompose en 3 types de tables :

- Une pour les actifs obligataires et assimilés
- Une pour les actions et assimilés
- Une pour les produits dérivés

Dans le cadre de ce mémoire, la table de taux est celle qui nous intéresse le plus car c'est sur les instruments de taux que va venir s'appliquer le modèle de crédit implémenté. Cette table est modélisée et projetée ligne à ligne. Elle comprend :

- Les obligations à taux fixe
- Les obligations à taux variable
- Les obligations indexées inflation
- D'autres actifs obligataires (montages actions, convertibles)

Ci-dessous la structure de la table d'actifs obligataires rentrée en input du modèle ALM :

CATEGORIE ( TP1/4 )	FUND_NAME	ISIN	EMETTEUR	ASSET_NAME	MAT_DATE	CRED_T XT	COUT_A CQUI	PAR_VAL UE	BOOK_V ALUE	MKT_VAL UE	COUP_F REQ	COUP_RA TE
Obligations indexées inflation	cap_39	FR0000186413	FRANCE (GOVT OF)	OAT 3.40% 29 INDEXEE	25/07/2029	AA	5 741 198	7 492 233	7 430 558	11 219 469	1	0.034
Obligations indexées inflation	cap_39	FR0000186413	FRANCE (GOVT OF)	OAT 3.40% 29 INDEXEE	25/07/2029	AA	98 263	126 987	125 395	190 160	1	0.034
Obligations taux fixe classiques	cap_39	FR0000571085	FRANCE (GOVT OF)	OAT 8.50% 4/2023	25/04/2023	AA	0	4 000 000	4 944 830	5 818 800	1	0.085
Obligations à taux variable	cap_39	FR0010175984	BPCE	CNCEP TV25 CMS30 EMTN	04/04/2025	A	0	7 500 000	7 500 000	7 327 485	12	0
Obligations à taux variable	cap_39	FR0010192856	BPCE	CNCEP TV120525 CMS10	12/05/2025	A	0	2 000 000	2 000 000	1 937 000	12	0
Obligations taux fixe classiques	cap_39	FR0011182641	EDF - ELECTRICITE DE	EDF 3.875%22 EMTN	18/01/2022	A	0	9 100 000	9 704 771	10 414 495	1	0.03875

FIGURE 7 – Extrait de la table actifs obligataires

Elle contient, par colonne, des informations propres à chaque actif obligataire et propres à la date d'arrêt, notamment son nominal, sa valeur de marché à la date d'arrêt, sa maturité, sa séniorité, son taux de coupon..

Le rating final affiché est déterminé en gardant la 2ème meilleure note parmi les trois notes données par Moody's, Standard & Poor's et Fitch Ratings.

### 3.4 Modélisation des contrats Euro

Contrairement aux contrats en UC, les contrats Euro contiennent des options et garanties qui représentent un coût pour l'assureur :

- Le taux minimum garanti, associé au mécanisme de participation aux bénéfices,
- L'option de rachat,
- L'option d'arbitrage.

Ces spécificités contractuelles demandent des modélisations adaptées au sein du modèle ALM, qui se font principalement au travers de l'algorithme de participation aux bénéfices et de la modélisation du comportement des assurés.

#### 3.4.1 L'algorithme de participation aux bénéfices

La participation aux bénéfices

Les primes investies sur le fonds euros sont garanties par l'assureur : l'épargne ne peut pas diminuer et est revalorisée chaque année d'un rendement composé d'un taux minimum garanti (TMG) et d'une participation aux bénéfices.

La participation aux bénéfices correspond à la partie des bénéfices réalisés par l'assureur pendant l'année et

qui sont reversés aux assurés.

Notons que l'assureur dispose d'une certaine liberté pour la distribuer : le taux servi à l'assuré est en effet le résultat de l'algorithme de participation aux bénéfices expliqué plus loin.

La réglementation impose cependant de reverser un minimum de 85% des bénéfices financiers qu'elle réalise avec l'épargne des assurés dans un délai de huit ans.

Dans cet intervalle, l'assureur peut provisionner tout ou une partie de ce montant dû au assurés dans une provision appelée Provision pour Participation aux Excédents.

La Provision pour Participation aux Excédents est une réserve qui permet de lisser les rendements. Elle permet de mettre de côté le surplus de résultat de chaque année qu'elle n'a pas distribué aux assurés pour le distribuer en cas de baisse des rendements.

#### L'algorithme

L'algorithme de participation aux bénéfices prend en compte la réserve de Provision pour Participation aux Excédents, le taux cible et les marges cibles que l'assureur souhaite dégager.

**Le taux cible** est le taux que l'assureur désire servir aux assurés. Il est calculé en fonction du taux servi de l'année précédente et de la moyenne mobile du taux concurrentiel sur 2 ans.

Voici les 3 étapes de l'algorithme :

1. Si le taux servi initial (égal au taux de rendement de l'actif moins la marges cible de l'assureur) est supérieur au taux cible, alors le taux cible est servi et la PPE est dotée de l'écart restant.  
Sinon des PMVL sont réalisées afin d'atteindre le taux cible.
2. Si la limite autorisée de réalisation des PMVL n'est pas dépassée, alors le taux cible est servi.  
Sinon, la PPE est reprise afin d'atteindre le taux cible.
3. Si la limite autorisée de PPE reprise n'est pas dépassée, alors le taux cible est servi.  
Sinon, le taux cible est remplacé par le taux minimum garanti.

#### **3.4.2 La modélisation du comportement des assurés**

Les réactions des assurés face aux prestations offertes par l'assureur et face aux conditions de marché sont retranscrites dans le modèle à travers les mouvements de plusieurs indicateurs tels que :

- Les rachats partiels ou totaux de contrats
- Les arbitrages

##### Les rachats

Il existe deux types de rachats :

- Les rachats partiels : L'assuré décide de racheter une partie de son épargne afin de la placer ailleurs. Ces rachats peuvent être déclenchés par une situation économique défavorable ou bien lorsque les taux servis par les autres assureurs (le taux concurrentiel) sont plus élevés que le taux proposé.
- Les rachats totaux : L'assuré décide, pour les mêmes raisons qu'un rachat partiel, de racheter son épargne dans sa totalité.

##### Les arbitrages

L'arbitrage désigne le fait pour un assuré de transférer tout ou partie de son épargne d'un support vers un autre (UC vers Euro ou Euro vers UC), sans que cette épargne ne sorte du contrat d'assurance.

Les comportements des assurés se scindent ensuite en deux parties :

- Les comportements structurels
- Les comportement conjoncturels

Les comportements structurels correspondent à un nombre de rachats et d'arbitrages fixes que l'assureur constate sur son portefeuille en situation économique « normale ». Il est dans la plupart du temps fonction de l'ancienneté des contrats, de par la fiscalité liée à l'assurance vie.

Les comportements conjoncturels dépendent eux de la situation économique.

La dépendance à la conjoncture économique se calcule par le biais d'un indicateur : le ratio de satisfaction. Celui-ci correspond au ratio de la moyenne mobile des taux servis sur 2 ans et de la moyenne mobile du taux concurrentiel sur 2 ans :

$$\text{ratio de satisfaction} = \frac{\text{taux servi}(n) + \text{taux servi}(n-1)}{\text{taux conc}(n) + \text{taux conc}(n-1)}$$

Le taux concurrentiel doit représenter au mieux le taux que serviraient les concurrents sur le marché. Il est donc déterminé à partir :

- Du taux court, modélisant la concurrence des SICAV monétaires, dont les placements sont constitués essentiellement de titres de créances négociables à court terme et d'obligations à taux fixe ou variable proches de leur date de remboursement,
- Du taux long, modélisant la concurrence de nouveaux intervenants assureurs ne subissant pas l'impact de la baisse de la valeur de leur portefeuille obligataire en cas de hausse des taux,
- D'une moyenne mobile sur les 12 derniers mois du taux long, modélisant la concurrence des sociétés d'assurance déjà établies et qui, à la baisse des taux, bénéficient de l'inertie de leur portefeuille obligataire permettant de figer des rendements obligataires à des niveaux plus compétitifs.

Afin de rester cohérent lors de la modélisation, les taux courts et longs utilisés pour le calcul du taux concurrentiel doivent être issus de la courbe des taux à partir de laquelle nous valorisons notre actif.

Une utilisation de spread pour la valorisation de nos actifs obligataires conduira donc à un taux concurrentiel comprenant, par exemple, le spread moyen de notre portefeuille.

Les rachats conjoncturels sont activés lorsque le ratio de satisfaction tombe sous un certain seuil : le taux de rachat conjoncturel se calcule alors comme un facteur multiplié par le taux de rachat structurel.

### 3.5 Facteurs influant sur la valeur du Best Estimate

#### 3.5.1 La particularité des contrats en Unités de Compte

Dans les contrats en unités de compte, l'assureur s'engage uniquement sur un nombre d'unités de compte inscrites au contrat et non sur leur valeur.

Les contrats en unités de compte présentent donc un risque pour l'épargnant : en cas de baisse des marchés, la valeur du contrat peut diminuer et l'investissement supporter une perte en capital. L'épargnant peut donc retrouver au terme du contrat un capital global inférieur à l'épargne versée, sauf si des clauses spéciales ont été établies au préalable avec l'assureur afin de protéger une partie de l'épargne.

Ainsi ces contrats n'ont que peu de conséquence sur la valeur du Best Estimate car ils ne représentent pas un risque de perte ou de gain futur important pour l'assureur.

#### 3.5.2 Le Taux Minimum Garanti

Comme expliqué plus tôt, le TMG correspond au taux minimum de revalorisation annuelle des provisions mathématiques (PM). Il peut être défini contractuellement et être valable pour tout ou partie de la durée du contrat.

Le risque encouru par l'assureur est lié à la dissymétrie du partage des produits financiers entre l'assureur et l'assuré selon les scénarios : la totalité des pertes liées au service du TMG est supportée par l'assureur alors que les gains sont en grande partie reversés aux assurés par le biais de la participation aux bénéfices.

Ainsi si on imagine une projection de scénarios économiques présentant autant de taux favorables que défavorables au maintien du TMG par l'assureur, le modèle ALM calculerait plus de pertes sur la partie défavorable des taux que de gains sur la partie favorable des taux et les marges finales seraient négatives.

Une plus grande volatilité des scénarios économiques augmentant de manière symétrique les valeurs projetées (autant de baisse que de hausse des valeurs projetées), la dissymétrie du partage des produits financiers implique alors que plus la volatilité des scénarios est grande, plus la perte sur la marge future moyenne calculée sera importante.

#### 3.5.3 Survenance du flux sortant

Comme il a été vu précédemment, le Best Estimate est défini comme l'espérance sous la probabilité risque-neutre des flux du passif actualisés.

Cependant les déflateurs utilisés pour l'actualisation de chaque flux sortant de chaque année étant décroissants avec la maturité, plus les flux du passif seront importants en début de projection, plus la valeur finale du Best Estimate en sera diminuée.

Aussi, les taux de rachats et de décès correspondant aux flux sortants étant exprimés en pourcentage de PM restante, une hausse du taux de rachats en début de projection aura par exemple un impact beaucoup plus important sur la valeur finale du Best Estimate qu'une hausse du taux de rachats équivalente en fin de projection.

Voici en effet un graphique présentant l'écoulement de la PM euro moyenne sur une projection de 30 ans :

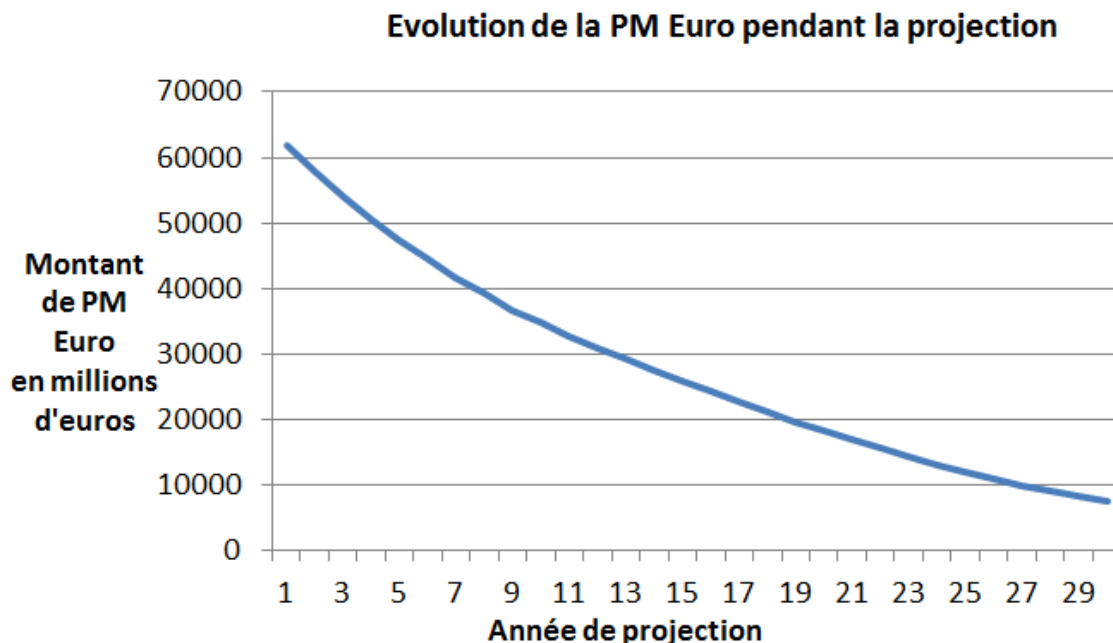


FIGURE 8 – Évolution de la PM Euro dans le scénario central du 31/12/2017

Il est clair que pour un même taux de rachat, le flux sortant correspondant sera bien plus important dans les premières années que dans les dernières années de projection.

## 4 La modélisation actuelle du défaut et ses limites

### 4.1 Traitement actuel des actifs obligataires

Nous prendrons une obligation comme exemple d'actif obligataire dans ce paragraphe. Bien que les obligations sont les actifs obligataires les plus répandus, la risque-neutralisation s'applique bien sûr de la même manière à tous les actifs obligataires.

Jusqu'ici, l'ajustement par risque-neutralisation dans le modèle de projection traitait le risque de crédit en considérant les obligations comme des obligations non risquées avec des coupons et un nominal réduits.

La risque neutralisation avait en effet pour objectif d'annuler le spread afin de retomber sur le taux sans risque : L'ensemble des flux était abaissé proportionnellement et de manière certaine sur tous les scénarios, il n'y avait donc aucune volatilité induite par le défaut des émetteurs.

Prenons par exemple une obligation au pair remboursée in fine et à taux fixe de notre portefeuille d'actifs obligataires et suivons son traitement par le modèle avant implémentation du modèle de crédit. Voici ces caractéristiques :

maturité	7ans
rating	A
séniorité	2- Senior non sécurisée
nominal	100
taux de coupon	3%
valeur de marché	110

FIGURE 9 – obligation exemple

Supposons également une courbe des taux sans risque initiale plate à 1 %.  
Voici comment le modèle procède avec cette obligation :

L'obligation est, comme tous les actifs obligataires du portefeuille, considérée comme une obligation non risquée ; son rating ne nous sert donc pas lors de la modélisation. Le modèle calcule la valeur de marché "modèle" de l'obligation en 0 à partir de la courbe des taux sans risque initiale :

$$VM(0) = \sum_{i=1}^7 \frac{3\% \times 100}{(1 + 1\%)^i} + \frac{100}{(1 + 1\%)^7} = 113,46$$

Ainsi nous surestimons la valeur de marché de l'obligation en actualisant ses flux futurs à partir de la courbe des taux sans risque.

Si nous voulons être market-consistent et rester risque-neutre, il nous faut donc abattre les flux futurs réels de l'obligation de manière à retomber, en actualisant ces nouveaux flux abattus à partir de la courbe des taux sans-risque, sur sa valeur de marché réelle . C'est ce qu'on appelle la risque-neutralisation.

Le coefficient multiplicatif, dit coefficient de risque-neutralisation, qui va servir à l'abattement des flux est alors :

$$\alpha = \frac{VM(0)_{réelle}}{VM(0)_{modèle}} = 0,97$$

et on obtient donc un nouveau nominal de

$$100 \times \alpha = 97$$

Si on calcule la valeur de marché en 0 de notre obligation à partir de la courbe des taux sans risque en admettant que son nominal est à présent de 97 (son taux de coupon restant de 3 %), on retombe bien sur sa valeur de marché réelle : 110.

Ci-dessous l'explication graphique du traitement effectué lors de l'ajustement par risque-neutralisation :

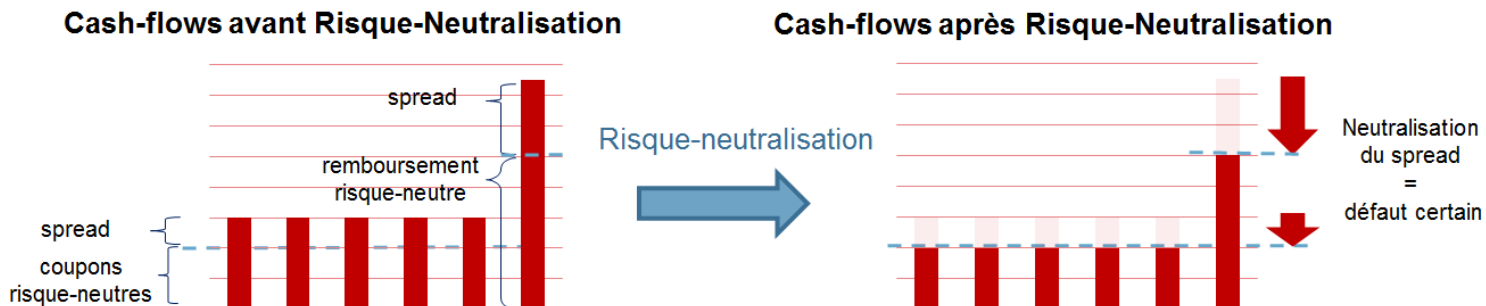


FIGURE 10 – Risque-neutralisation

Le spread réel de l'obligation en 0, censé rendre compte du risque sous-jacent à celle-ci, se transforme après risque-neutralisation en un abattement des flux futurs associés à cette dernière. Ainsi le risque représenté par

le spread réel de l'obligation en 0 est transformé en un défaut certain de chacun de ces flux futurs. Cependant cette perte sur les flux futurs est certaine et ne porte aucune volatilité propre au risque de défaut qui aurait pu être porté implicitement par le spread réel en 0.

## 4.2 Réglementation

La commission européenne, dans son article 22 (section 3, sous-section 1) du règlement délégué, concernant les hypothèses sous-tendant le calcul des provisions techniques, préconise :

### *Méthodes de calcul des provisions techniques*

#### Sous-section 1

### **Hypothèses sous-tendant le calcul des provisions techniques**

#### *Article 22*

#### **Dispositions générales**

1. Des hypothèses ne sont considérées comme réalistes, aux fins de l'article 77, paragraphe 2, de la directive 2009/138/CE, que lorsqu'elles remplissent l'ensemble des conditions suivantes:
  - (a) l'entreprise d'assurance ou de réassurance est en mesure d'expliquer et de justifier chacune des hypothèses utilisées, compte tenu de l'importance de l'hypothèse considérée, de l'incertitude qui lui est liée et des autres hypothèses pertinentes existantes;
  - (b) les circonstances dans lesquelles les hypothèses retenues seraient considérées comme fausses peuvent être clairement identifiées;
  - (c) sauf disposition contraire du présent chapitre, les hypothèses sont fondées sur les caractéristiques du portefeuille d'engagements d'assurance ou de réassurance, si possible sans tenir compte de l'entreprise d'assurance ou de réassurance détenant le portefeuille;
  - (d) l'entreprise d'assurance ou de réassurance utilise les hypothèses de manière cohérente dans la durée, à l'intérieur de groupes de risques et de lignes d'activité homogènes, sans changements arbitraires;
  - (e) les hypothèses tiennent compte de manière appropriée de toute incertitude relative aux flux de trésorerie.

FIGURE 11 – Article Commission européenne

On peut lire en e) : "les hypothèses tiennent compte de manière appropriée de toute incertitude relative aux flux de trésorerie."

Le modèle de projection des flux relatif au calcul des provisions techniques se doit donc de respecter le caractère volatile induit par les risques de défaut des émetteurs.

Une limite importante de notre approche actuelle par abattement est qu'elle fige l'effet du risque de spread en 0 ; début de projection.

Il faut en effet trouver un modèle qui apporte de la volatilité à la valeur des flux futurs des actifs obligataires du portefeuille de Sogecap en fonction des risques portés par ces derniers.

## 4.3 Conclusion quant au modèle actuel

Notre méthode actuelle de projection des flux des actifs obligataires ne prend pas en compte la volatilité des flux futurs induite par le risque de défaut des émetteurs.

C'est cependant ce qui est recommandé par la commission européenne. En réponse à cela, nous avons souhaité améliorer la modélisation simplifiée actuelle et implémenter un modèle de crédit stochastique au sein de notre modèle ALM.

Un modèle de crédit utilise l'expression de probabilités de défaut (directement reliées à des spreads de défaut) qui permettent de calculer les valeurs des flux futurs attendus pour chaque classe d'actif obligataire donnée par le modèle (la granularité des classes dépend des modèles). Le modèle va en effet corriger les flux de façon



à tenir compte du défaut éventuel. Plus le risque de défaut est important (et le rating mauvais), plus la prise en compte de ce risque va faire baisser la valeur du flux attendu.

Aussi, les spreads de défaut obtenus avec le modèle de crédit vont venir directement influencer sur le comportement des assurés en changeant le calcul du taux concurrentiel.

Celui-ci va en effet devoir prendre en compte les spreads correspondants aux taux courts et longs avec lesquels les actifs obligataires de notre portefeuille seront désormais valorisés.

---

## Deuxième partie

# Les modèles de crédit disponibles

Ce deuxième chapitre vise à présenter les modèles de crédit disponibles au sein du générateur de scénarios économiques ainsi que leur calibrage.

La bonne compréhension des modèles, de leur calibrage et de leurs sorties est une étape importante et nécessaire au choix du modèle retenu ainsi qu'à son implémentation au sein du modèle ALM.

## 5 L'environnement de projection

### 5.1 Le générateur de scénarios économiques

Dans le cadre de ce mémoire, le générateur de scénarios économiques (ESG) est l'outil qui va nous permettre la génération des spreads et probabilités de défaut stochastiques calibrés en fonction du modèle de crédit retenu.

Nous utilisons le générateur de scénarios économiques avec un horizon de projection de 30 ans et un nombre d'itérations de 1000. Le pas de projection utilisé est de 1 mois (Nous projetons donc sur 360 mois) et le format de sortie de la table de scénarios est un fichier Excel se présentant comme ceci :

itération	période	variable 1	variable 2	variable 3
1	1	X	X	X
1	2	X	X	X
1	3	X	X	X
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
1	360	X	X	X
2	1	X	X	X
2	2	X	X	X
2	3	X	X	X
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
2	360	X	X	X
3	1	X	X	X
...	...	...	...	...

FIGURE 12 – Format de sortie ESG

Les variables économiques et financières projetées par le générateur avant l'implémentation du modèle de crédit sont les suivantes :

- Les taux d'intérêts 1 mois, 3 mois, 6 mois, 9 mois, 1 an, 2 ans, 3 ans, 4 ans, 5 ans, 7 ans, 10 ans, 15 ans, 20 ans, 25 ans, 40 ans et 60 ans.
- Les indices CAC40, Eurostoxx 50 ainsi que des indices Hedgefund, Immobilier et Private Equity propres à SOGECAP
- Les dividendes associés à ces indices
- L'inflation

Le processus de génération des scénarios se présente ainsi :

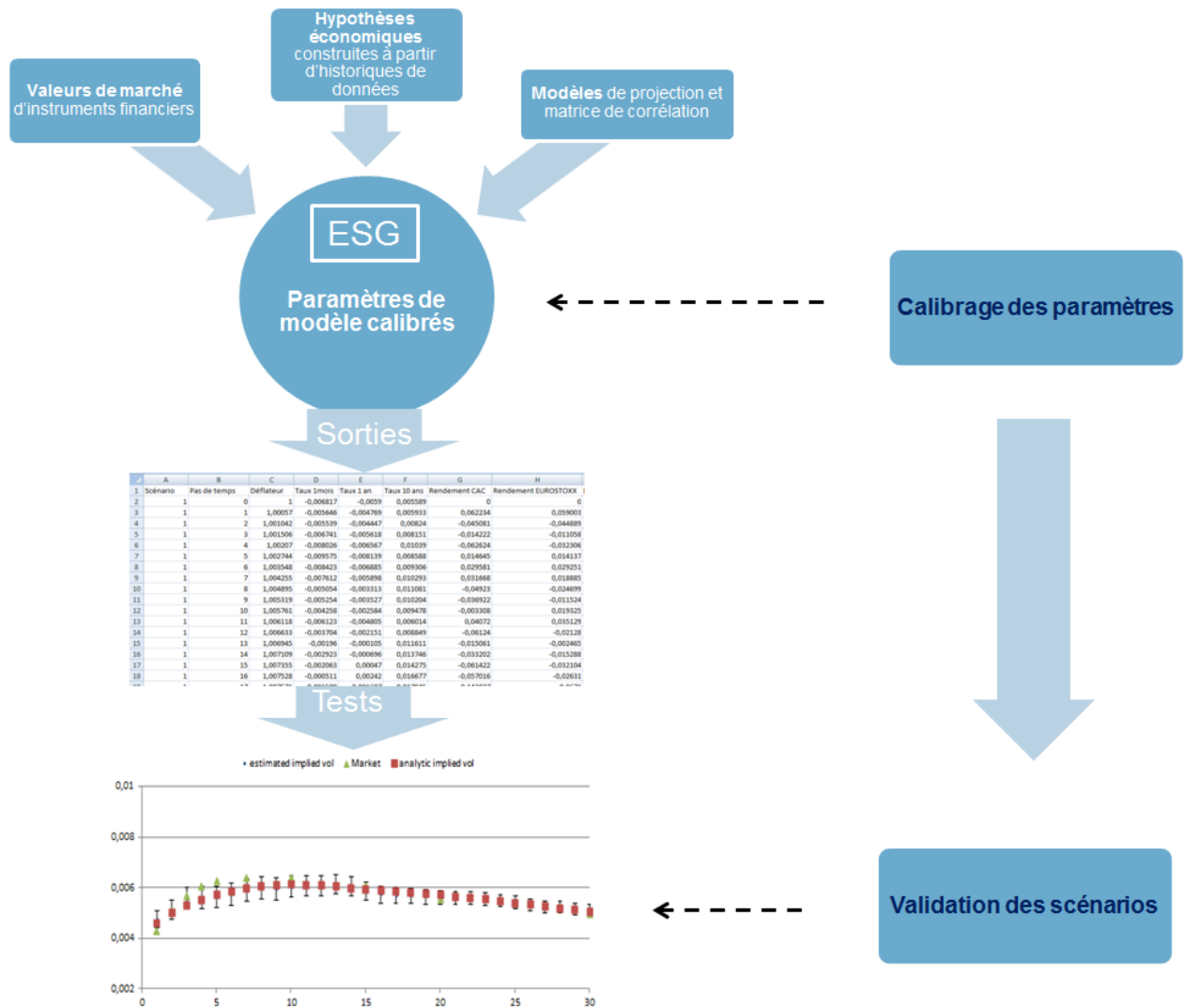


FIGURE 13 – Processus de génération des scénarios par l'ESG

Les projections sont effectuées en univers risque neutre et les scénarios obtenus sont ensuite utilisés pour les calculs réglementaires Solvabilité II.

## 5.2 Scénarios économiques et mouvement Brownien

Un mouvement Brownien, noté  $W(t)$  ou  $Z(t)$ , est le nom utilisé pour décrire l'évolution d'une variable aléatoire suivant une loi normale.

Ainsi,  $dW(t)$  ou  $dZ(t)$  représentent l'incrément normalément distribuée du mouvement Brownien, aussi appelé "choc" du mouvement Brownien.

Les mouvements Browniens sont à la base des équations stochastiques décrivant les variables économiques : taux d'intérêts, taux de change, rendement des actions, transition de crédit.. Toutes ces variables économiques sont en effet fonction d'un mouvement Brownien  $W(t)$  et du temps  $t$ , elles se définissent donc comme :  $f(W_t, t)$ . Par exemple sur une variable correspondant au taux de change USD/GBP :

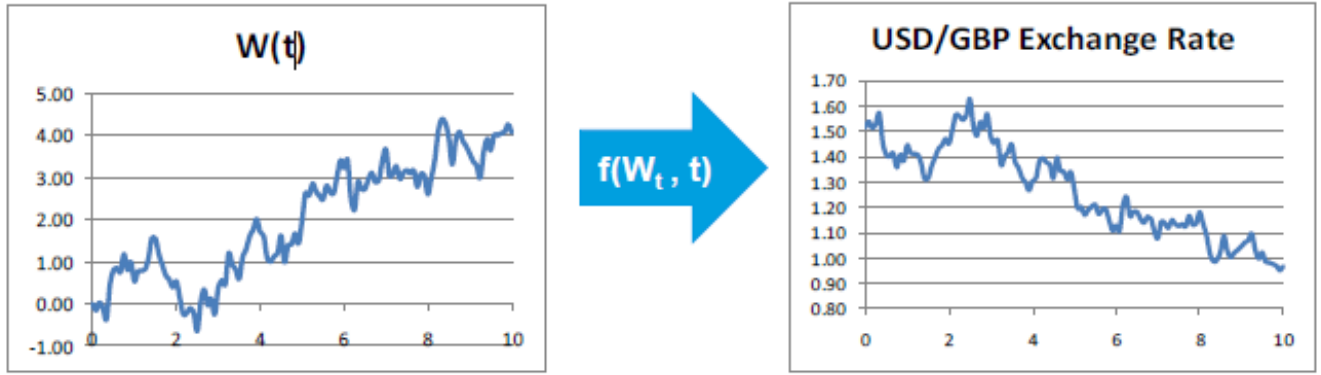


FIGURE 14 – Détermination d'une variable économique à partir d'un mouvement Brownien

Notons également que des corrélations établies entre les chocs  $dW(t)$  ou  $dZ(t)$  permettent d'assurer des relations économiques plausibles entre chaque actif modéliser par une fonction  $f(W_t, t)$ .

### 5.3 Les tests martingales

Deux types de tests sont réalisés en sortie de l'ESG afin de valider nos scénarios : les tests martingales et les tests de market-consistency.

Nous ne nous intéresserons dans le cadre de ce mémoire qu'aux tests martingales car ce sont les tests qui s'appliquent aux sorties propres au modèle de crédit, le caractère market-consistent étant vérifié sur les produits dérivés de taux uniquement, qui ne sont pas pris en compte pour la modélisation du défaut dans ce mémoire.

Ces tests ont pour but de vérifier la propriété martingale des prix actualisés générés par le modèle. Plus formellement, le test vérifie l'égalité suivante :

$$P(0) = E^Q[\text{Prix estimé}]$$

$$\Leftrightarrow P(0) = \frac{1}{n} \sum_i (\text{Prix actualisé du scénario } i)$$

Où

- $n$  est le nombre de scénarios projetés par l'ESG (1000 dans notre cas)
- $E^Q$  : l'espérance sous la mesure de probabilité risque-neutre  $Q$
- $P(0)$  : le prix évalué à partir de la courbe des taux initiale.
- Prix actualisé du scénario  $i$  : le prix actualisé calculé à partir de la projection du générateur lors de l'itération  $i$ .

Le caractère martingale des scénarios est contrôlé sur les indices action, les taux nominaux (par le biais des obligations ZC) et les taux réels (par le biais des obligations indexées inflation).

Le contrôle est effectué par un test statistique de rejet qui va tester  $H_0$  :

$$Y_n = \frac{X_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Avec :

- $X_n = E^Q[\text{Prix estimé}]$ ,
- $m = P(0)$ ,
- $n = 1000$  (nombre de simulations),
- $\sigma$  = la volatilité empirique du prix estimé, c'est à dire : écart-type (Prix estimé)

Contre  $H_1$  : Le prix estimé  $X_n$  ne suit pas la distribution normale ci-dessus.

La région de rejet est la région grisée sur le schéma ci-dessous ; elle correspond à une probabilité de  $\alpha/2$  de part et d'autre de la courbe et à un niveau de confiance de  $1-\alpha$ . Pour nos tests, nous prenons un niveau de confiance de 99,9% soit  $\alpha/2 = 0,05\%$

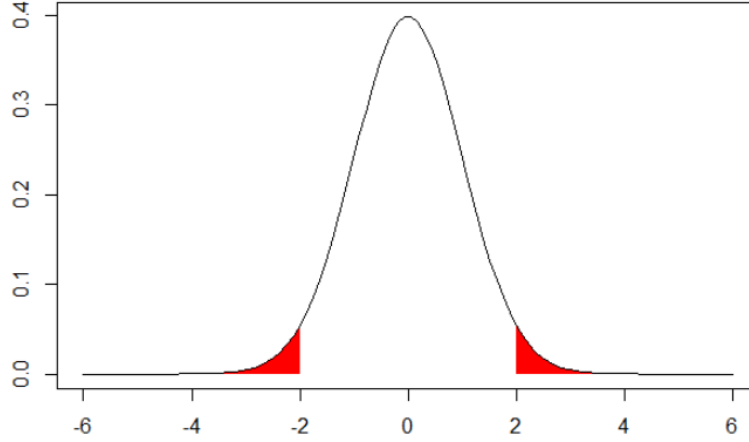


FIGURE 15 – Région de rejet d'une loi normale centrée réduite

La zone de rejet du test  $H_0$  contre  $H_1$  se trouve sur ce graphique dans la zone colorée en rouge d'aire totale  $\alpha$ .

## 6 Les modèles disponibles

L'ESG Moody's Analytics propose aujourd'hui deux modèles de crédit :

- Le modèle G2
- Le modèle G3

Ces deux modèles sont fournis avec le calibrage pour chaque date d'arrêt.

### 6.1 Principes de base des modèles G2 et G3

Le prix en  $t$  d'une obligation risquée de rating  $M$  et maturité  $T$  se détermine dans les deux modèles G2 et G3 par :

$$P_M(t, T) = P_{NR}(t, T)(1 - (1 - \delta)Prob_{Q,M}(t \leq \tau \leq t + T))$$

Avec :

- $P_M(t, T)$  le prix en  $t$  d'une obligation risquée de rating  $M$  et de maturité  $T$ ,
- $P_{NR}(t, T)$  le prix en  $t$  d'une obligation non risquée de maturité  $T$ ,
- $\delta$  le taux de recouvrement associé à l'obligation. Ce taux de recouvrement est directement lié à la séniorité de chaque actif obligataire.
- $Prob_{Q,M}(t \leq \tau \leq t + T)$  la probabilité risque-neutre que l'obligation fasse défaut avant sa maturité sachant qu'on est en  $t$ ,  $\tau$  étant la variable aléatoire représentant le temps auquel l'obligation fait défaut ( $Prob_Q$  est la probabilité risque-neutre).

La formule peut s'expliquer ainsi :

En partant, en  $t$ , d'une obligation non-risquée à laquelle on attribue un risque de faire défaut et un taux de recouvrement en cas de défaut :

- Si celle-ci fait défaut, événement de probabilité  $Prob_{Q,M}(t \leq \tau \leq t + T)$ , on récupère alors la valeur recouvrable de notre obligation, soit  $\delta \times P_{NR}(t, T)$ ,
- Si celle-ci ne fait pas défaut, événement de probabilité  $1 - Prob_{Q,M}(t \leq \tau \leq t + T)$ , on récupère alors la totalité de la valeur de notre obligation, soit  $P_{NR}(t, T)$ .

On a donc en conclusion :

$$\begin{aligned} P_M(t, T) &= P_{NR}(t, T) \times \delta \times Prob_{Q,M}(t \leq \tau \leq t + T) + P_{NR}(t, T) \times (1 - Prob_{Q,M}(t \leq \tau \leq t + T)) \\ &= P_{NR}(t, T)(1 - (1 - \delta)Prob_{Q,M}(t \leq \tau \leq t + T)) \end{aligned}$$

On retombe bien sur notre égalité.

Déterminons à présent l'expression du spread  $s_{t,T,M}$  qui vaut en  $t$  pour la période  $T$ .

Partons pour cela d'une obligation zéro-coupon risquée de valeur de remboursement  $N_t$  et de maturité  $T$  en  $t$ .

Les modèles de crédit proposés par Moody's ESG supposent que le spread réel de chaque obligation n'est représentatif que du défaut futur probable de cette dernière, et non du défaut et de l'illiquidité comme c'est le cas en réalité.

Sous cette hypothèse, en  $t$ , cette obligation vaut, selon que l'on calcule sa valeur avec le spread ou avec la probabilité de défaut comme réalisé plus haut :

$$P_M(t, T) = \frac{N_t}{(1 + r_{t,T})^T (1 + s_{t,T,M})^T} = (1 - (1 - \delta) \text{Prob}_{Q,M}(t \leq \tau \leq t + T)) \times \frac{N_t}{(1 + r_{t,T})^T}$$

Avec :

- $r_{t,T}$  le taux de maturité  $T$  en  $t$  et
- $s_{t,T,M}$  le spread de maturité  $T$  en  $t$  pour le rating  $M$ .

On a donc par élimination :

$$\frac{1}{(1 + s_{t,T,M})^T} = (1 - (1 - \delta) \text{Prob}_{Q,M}(t \leq \tau \leq t + T))$$

Et donc l'expression du spread  $s_{t,T,M}$  :

$$s_{t,T,M} = (1 - (1 - \delta) \text{Prob}_{Q,M}(t \leq \tau \leq t + T))^{-\frac{1}{T}} - 1$$

Notons que Moody's ne fournit aucun modèle qui comprend une corrélation entre spreads/indices actions et spreads/taux en univers risque-neutre.

Après avoir posé ces bases concernant le calcul des prix risqués des actifs obligataires avec un modèle de défaut et les spreads qui en découlent, intéressons-nous au modèle G2 et G3 plus en détails.

## 6.2 Le modèle G2

Le modèle G2 a pour avantage de modéliser les 3 risques relatifs au risque de crédit que sont, pour rappel :

- le risque de variation de spread,
- le risque de défaut,
- le risque de changement de notation.

Dans un univers risque-neutre, il modélise, grâce à une matrice de transition stochastique :

- Des transitions de rating à rating, et donc la migration de rating,
- Des transitions de rating à défaut, et donc des probabilités de défaut.

Les probabilités de défaut obtenues couplées à la séniorité de chaque obligation permettent ensuite la déduction directe des spreads propres à chaque obligation (voir principes de base des modèles partie 6.1).

### 6.2.1 Matrice de transition stochastique

Une matrice de transition correspond à une matrice de probabilités de passage d'un état à un autre à chaque pas de projection : de rating à rating ou de rating à défaut (le défaut étant l'état absorbant).

Voici un exemple d'une matrice de transition :

		To							
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
From	AAA	72%	7%	6%	5%	4%	3%	2%	1%
	AA	6%	67%	7%	6%	5%	4%	3%	2%
	A	5%	6%	64%	7%	6%	5%	4%	3%
	BBB	4%	5%	6%	63%	7%	6%	5%	4%
	BB	3%	4%	5%	6%	64%	7%	6%	5%
	B	2%	3%	4%	5%	6%	67%	7%	6%
	CCC	1%	2%	3%	4%	5%	6%	72%	7%

FIGURE 16 – Exemple de matrice de transition

Au vu de cette matrice, la probabilité de passer d'un rating AAA à AA pour une obligation durant la période donnée par la matrice est de 7% .

Notons à présent :

- $\Delta_{P,T}$  la matrice génératrice risque réel sur T ans
- $\Delta_{Q,T}(t)$  la matrice génératrice risque-neutre sur T ans
- $\Omega_{P,T}$  la matrice de transition risque réel sur T ans
- $\Omega_{Q,T}(t)$  la matrice de transition risque neutre sur T ans

Voici comment les probabilités de transition stochastiques sont déterminées :

En partant d'une matrice de transition fixe (non stochastique), correspondant à la matrice de transition risque réel sur 1 an  $\Delta_{Q,1}$ , on arrive à une matrice de transition stochastique valable au temps t de projection et sur une période de 1 an par :

$$\Omega_{Q,1}(t) = \exp(\pi(t) \times \Delta_{P,1})$$

Avec  $\Delta_{P,1} = \log(\Omega_{P,1})$  et

$\pi(t) \times \Delta_{P,1} = \Delta_{Q,1}(t)$  où  $\pi(t)$  est un processus de Cox-Ingersoll-Ross, c'est à dire que

$$d\pi(t) = \alpha(\mu - \pi(t))dt + \sigma\sqrt{\pi(t)}dZ(t)$$

où  $dZ(t)$  est un mouvement Brownien (décrit en 5.2) et  $\alpha$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  seront expliqués dans la partie suivante.

On a donc plus simplement :

$$\Omega_{Q,1}(t) = \exp(\Delta_{Q,1}(t))$$

La matrice de transition correspondante au temps t de projection et valable sur un temps T, c'est à dire qui donne au temps t de projection les probabilités de passage d'un état à un autre sur la période T, correspond à :

$$\Omega_{Q,T}(t) = \exp(\Delta_{Q,1}(t) \times (T - t))$$

### 6.2.2 Le rôle du processus de Cox-Ingersoll-Ross

Comme nous venons de le voir précédemment,  $\pi(t) \times \Delta_{P,1} = \Delta_{Q,1}(t)$  : la matrice génératrice risque-neutre est déterminée à partir de la matrice génératrice risque-réel multipliée par un processus de Cox-Ingersoll-Ross.

Le rôle de ce processus dans le calcul de la matrice génératrice risque-neutre est très important puisque c'est lui qui marque le passage de l'univers risque-réel à l'univers risque-neutre dans les modèles de crédit.

Il vient en effet multiplier de manière stochastique les probabilités de passage et de défaut réelles de la matrice de transition réelle.

Les paramètres  $\alpha$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  du processus contrôlent ainsi toute la distribution des probabilités de défaut et des spreads au sein des modèles.

C'est donc leur calibrage qui assure la martingalité des prix projetés avec les modèles de crédit et le fait que les ratings les plus bas soient plus enclins à faire défaut.

$\mu$  correspond au niveau de retour à la moyenne,  $\alpha$  contrôle la vitesse de retour à la moyenne et  $\sigma$  correspond à la volatilité du processus.

Ce processus est appelé dans le modèle : processus de risque de crédit stochastique.

### 6.2.3 Modélisation de la migration de ratings

Seule la partie de la matrice non absorbante est utilisée pour la migration de rating, ce qui correspond donc aux probabilités de passage de rating à rating (seule la dernière colonne correspondant au passage de rating à défaut n'est pas utilisée).

La migration de rating est ensuite modélisée ainsi :

A chaque pas de temps de projection, une obligation d'un rating donné va se scinder en des pourcentages d'obligations de différents ratings suivant les valeurs de la matrice de transition stochastique pour la période de pas de temps de projection.

Ainsi, en partant d'une situation de rating initiale correspondant exactement à celle du portefeuille détenu, le modèle G2 va multiplier à chaque pas de temps de projection le nombre d'obligations de ce portefeuille afin qu'il corresponde en pourcentage à ce que la matrice de transition prévoit.

Les pourcentages des matrices de transitions s'appliquent au nominal de chaque obligation :

- Le pourcentage de l'obligation qui passe du rating initial à un autre rating correspond à un pourcentage du nominal de départ qui va se retrouver "rattacher" à ce nouveau rating sous forme d'une nouvelle obligation.
- Le pourcentage de l'obligation qui passe à l'état "Défaut" correspond à un pourcentage du nominal de départ que l'on perd.

Prenons par exemple un portefeuille avec 2 obligations AAA (obligation 1) et A (obligation 2) au temps initial et supposons une matrice de transition fixe aux temps 0 et 1 :

	AAA	AA	A	BBB	BB	Défaut
AAA	0,8	0	0,1	0	0	0,1
AA	0	0,8	0	0,1	0	0,1
A	0	0	0,8	0,1	0	0,1
BBB	0	0	0,1	0,8	0	0,1
BB	0	0	0	0	0,9	0,1
Défaut	0	0	0	0	0	1

FIGURE 17 – Exemple de matrice de transition

Voici ce qui est modélisé pour l'obligation A lors de la projection :

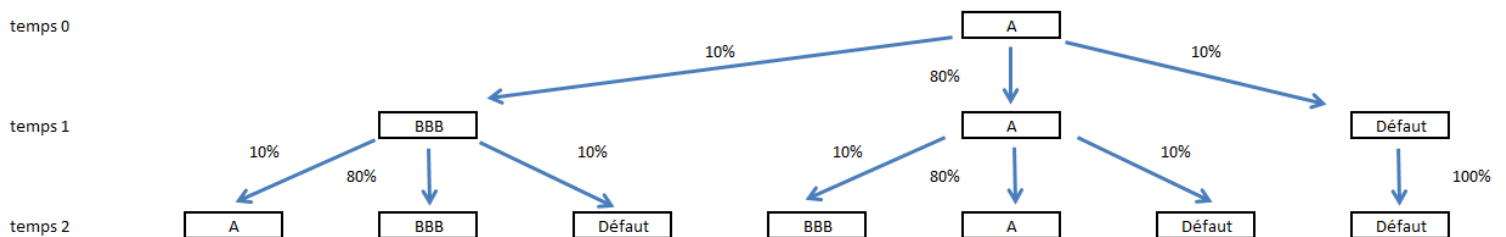


FIGURE 18 – Modèle de migration sur l'obligation A

On obtient alors en terme de nominal pour cette obligation :



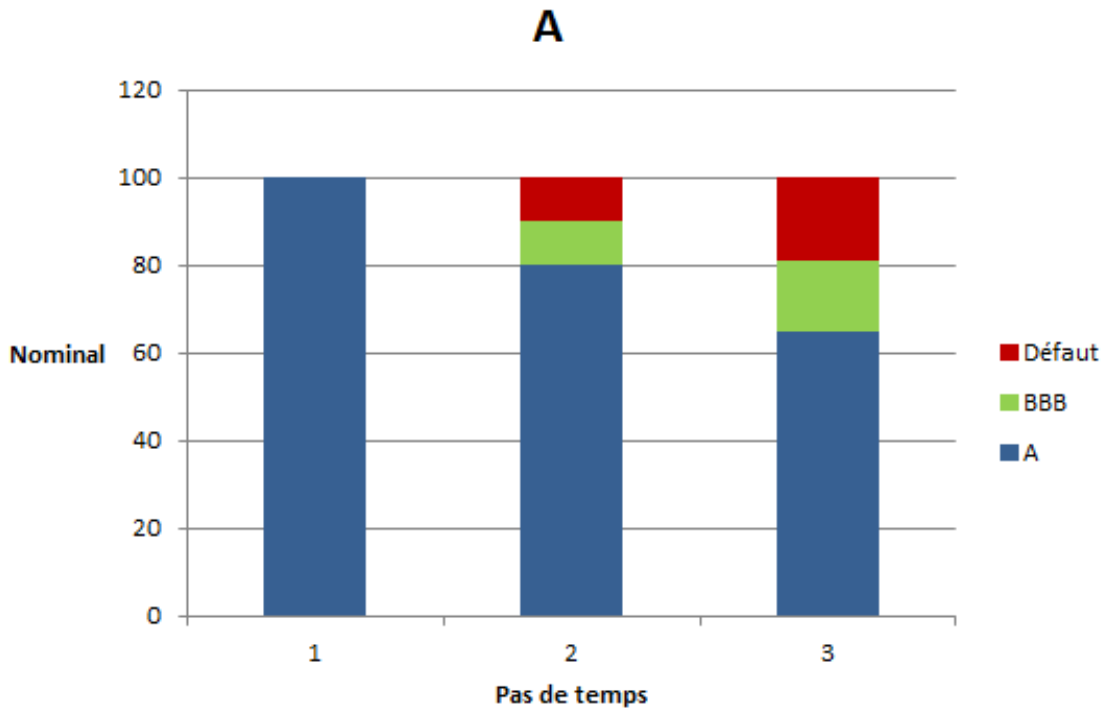


FIGURE 19 – Modèle de migration sur l'obligation A - Nominiaux

Le principe étant le même pour l'obligation AAA, voici ce qu'on obtient au final pour le portefeuille composé des 2 obligations 1 et 2 :

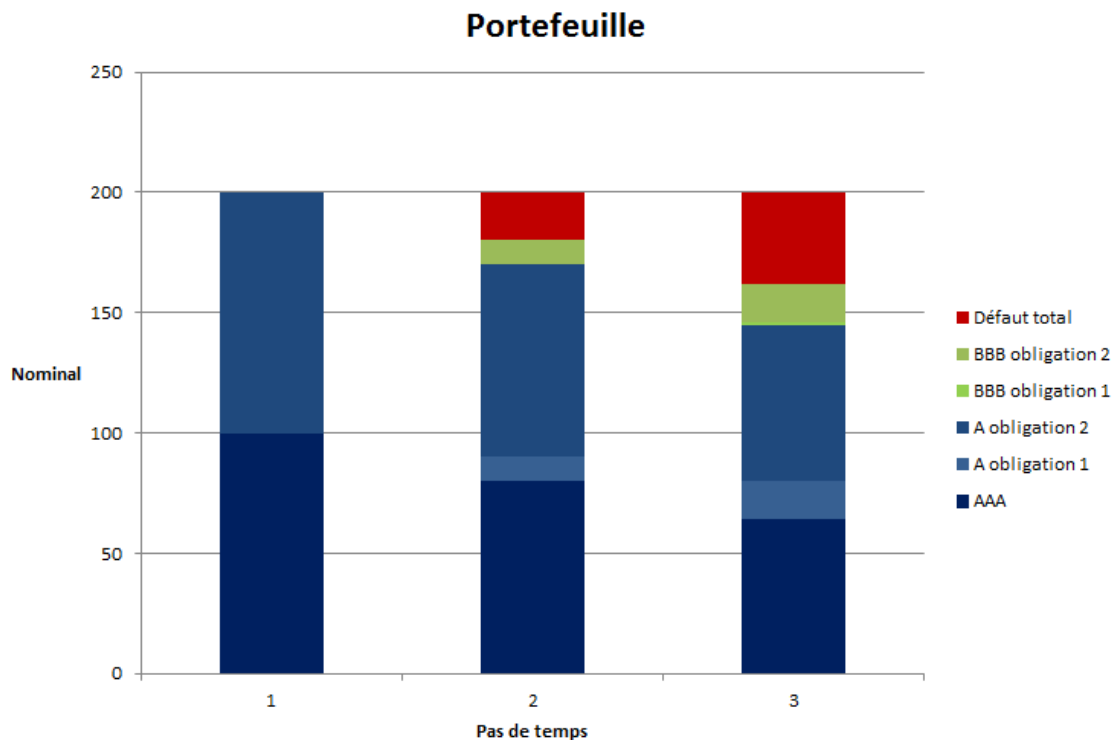


FIGURE 20 – Modèle de migration - Impact sur les nominaux du portefeuille

Le portefeuille initial qui comprenait 2 obligations et 2 ratings différents se retrouve en deux pas de projection

(et avec une matrice de transition très simplifiée) en un portefeuille à 5 obligations et 3 ratings différents.

Un des avantages de ce modèle à transition de ratings est qu'il permet d'affiner la stratégie financière en prenant en compte une allocation d'actifs dépendant des ratings des actifs, par exemple :

- Vendre des obligations lorsque celles-ci sont dégradées sous un niveau de rating prédéfini,
- Rebalancer de manière régulière le portefeuille global de sorte que la proportion d'obligations notées BBB ou moins ne dépasse pas un pourcentage pré-défini.

#### 6.2.4 Modélisation du défaut et des spreads

Nous savons, d'après les principes de base énoncés en 5.5, que le prix d'une obligation risquée correspond à :

$$P_M(t, T) = P_{NR}(t, T)(1 - (1 - \delta) \text{Prob}_Q(t \leq \tau \leq t + T))$$

Tout comme pour les probabilités de migration de rating, les probabilités de défaut stochastiques au temps de  $t$  projection et s'exerçant sur une période  $T$  vont directement être obtenues à partir de  $\Omega_{Q,T}(t)$  ; la matrice de transition risque-neutre stochastique pour une période de  $T$  ans.

Le principe est donc d'aller chercher la colonne de cette matrice correspondant aux probabilités de passage de rating à défaut et l'appliquer à chaque pas de temps à chaque obligation du portefeuille que l'on détient au temps  $t$  (le portefeuille bouge du fait de la migration, comme expliqué au-dessus).

La probabilité de défaut va venir s'appliquer, comme pour les probabilités de passage de rating en rating, directement au nominal. Elle va abattre à chaque pas de temps de projection le nominal de l'obligation en question. Les flux correspondants aux coupons, qui sont égaux à un pourcentage constant du nominal, se voient donc également réduits de la même manière que l'est le nominal au fil de la projection.

Le spread de chaque obligation au temps  $t$  de projection, utilisé pour la valorisation de l'obligation au temps  $t$  dans le modèle ALM, est ensuite calculé à partir des probabilités de défaut et du taux de recouvrement, lui-même déterminé à partir de la séniorité de chacune des obligations.

Voici un résumé graphique du fonctionnement du modèle de défaut sur le nominal et les coupons d'une obligation de nominal  $N$  en 0, en posant  $Q(i, j)$  la probabilité de défaut en  $i$  s'exerçant sur la période  $j$  :

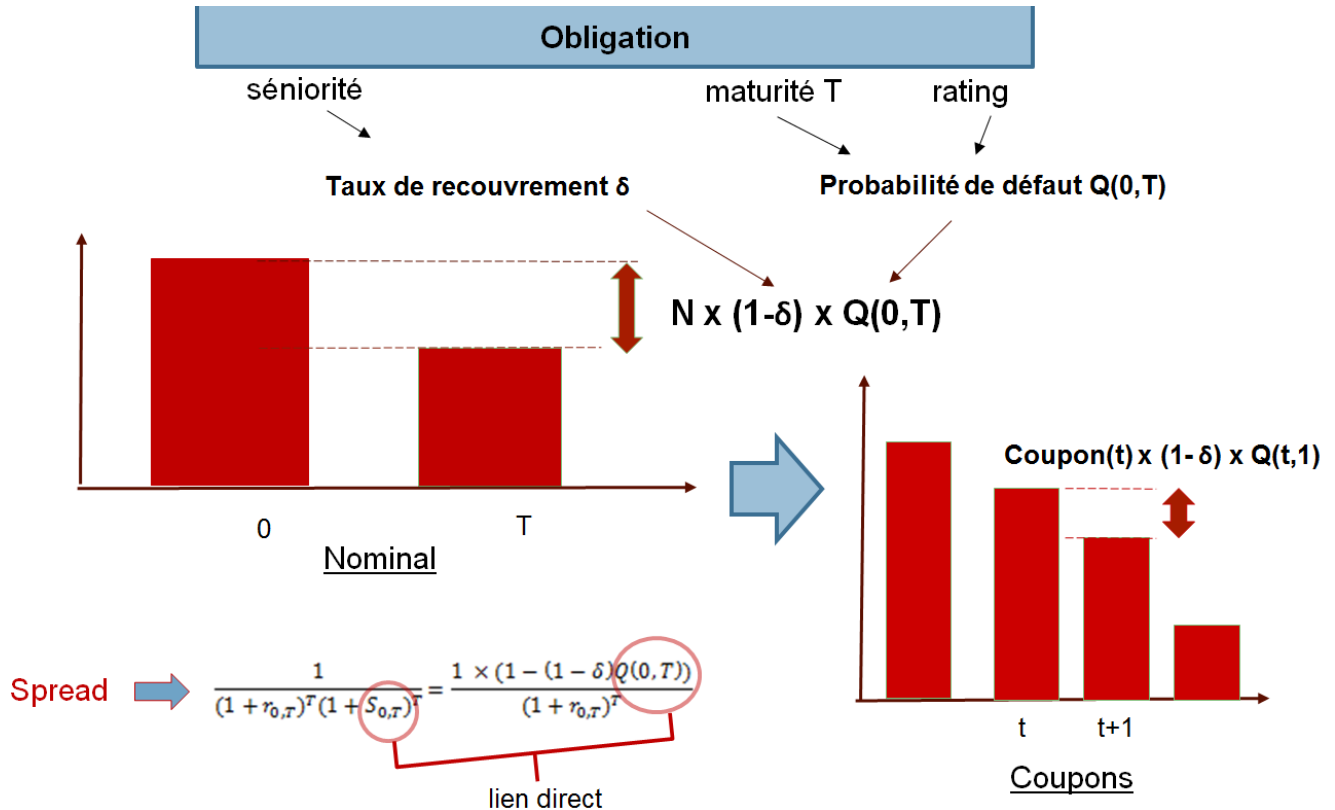


FIGURE 21 – Modèle de défaut - Impact sur les flux futurs

### 6.2.5 Les sorties du modèle G2

Le modèle G2 permet de sortir pour chaque date d'arrêt, les données suivantes calibrées :

- Les taux de recouvrement correspondant à chaque séniorité.
- Les probabilités de défaut modélisées, qui sont données en fonction de leur maturité (période de temps sur lesquelles elle valent) et du rating : Moody's donne ces probabilités de défaut pour des maturités allant de 1 an à 60 ans et pour les maturités 1 mois, 2 mois, 3 mois, 6 mois et 9 mois et pour des ratings AAA, AA, A, BBB, BB, B et CCC soit 7 ratings.
- Les spreads modélisés, qui sont donnés en fonction de leur maturité, de la séniorité et du rating : Moody's donne ces spreads pour les mêmes maturités et ratings que les probabilités de défaut et pour les 5 séniorités différentes (numérotées de 0 à 4).
- les probabilités de transition (ou de passage de rating à un autre), qui sont données en fonction du rating de départ, du rating d'arrivée et de leur maturité : Moody's donne ces probabilités de transition pour les mêmes maturités et ratings que les probabilités de défaut.

Remarquons que chaque spread de maturité T, rating M et séniorité S en sortie peut être recalculé à partir de la probabilité de défaut de maturité T, rating M et à partir du taux de recouvrement correspondant à la séniorité S (d'après formule partie 6.1).

## 6.3 Le modèle G3

Le modèle G3 modélise lui deux risques relatifs au risque de crédit :

- Le risque de variation de spread
- Le risque de défaut

Dans un univers risque-neutre, il modélise, grâce à un processus stochastique, lui-même combinaison de plusieurs processus stochastiques, des probabilités de défaut stochastiques.

Comme dans le modèle G2, les probabilités de défaut obtenues couplées à la séniorité de chaque obligation permettent ensuite la déduction directe des spreads propres à chaque obligation.

### 6.3.1 Les modèle à intensité

Le modèle G3 se place dans la catégorie des modèles de défaut dits "à intensité".

La base de ces modèles se trouve dans la supposition suivante : Il existe une fonction de t, noté  $\lambda(t)$ , et appelée fonction d'intensité de défaut, telle que la probabilité de faire défaut au cours d'un intervalle de temps  $\Delta_t$  à venir, soit égale au produit de l'intensité de défaut en t et de la durée de cet intervalle.

Cela équivaut mathématiquement à :

$$\lambda(t) \times \Delta_t = Prob_Q(t \leq \tau \leq t + \Delta_t)$$

Or, en posant  $S_t$  la probabilité de survie jusqu'au temps t, on sait que :

$$S_t - S_{t+\Delta_t} = S_t \times Prob_Q(t \leq \tau \leq t + \Delta_t)$$

En effet, la probabilité de faire défaut entre t et  $t + \Delta_t$  peut s'exprimer comme la probabilité de survivre jusqu'à t sans survivre jusqu'à  $t + \Delta_t$  ou comme la probabilité de survivre jusqu'à t et de faire défaut entre t et  $t + \Delta_t$ .

On a donc en combinant les deux équations précédentes :

$$S_t - S_{t+\Delta_t} = S_t \times \lambda(t) \times \Delta_t$$

D'où, en passant à la limite quand  $\Delta_t$  tend vers 0 :

$$\begin{aligned} dS_t &= -S_t \times \lambda(t) \times dt \\ \iff \frac{dS_t}{S_t} &= -\lambda(t) \times dt \\ \iff d\ln(S_t) &= -\lambda(t) \times dt \\ \iff S_t &= \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) \times dt\right) + cste \end{aligned}$$

Or :

$$S_0 = 1 = \exp\left(-\int_0^0 \lambda(t) \times dt\right) + cste \implies cste = 0$$

Et donc :

$$Prob_Q(t \leq \tau \leq t + T) = 1 - \exp\left(-\int_t^{t+T} \lambda(t) \times dt\right)$$

Le propre de chaque modèle à intensité se trouve ensuite dans la détermination de la fonction d'intensité  $\lambda(t)$ .

### 6.3.2 La fonction d'intensité du modèle G3

Le modèle G3 possède une fonction d'intensité pour chaque rating M, telle que :

$$\lambda^M(t) = \sum_{m=1}^M \pi^m(t)$$

Où chaque  $\pi^m$  correspond à un processus stochastique de Cox-Ingersoll-Ross propre au numéro de rating m (m=1 correspond au rating AAA, m=2 au rating AA.. et ainsi de suite).

Ainsi l'intensité de défaut augmente avec le numéro de rating, ce qui est cohérent.

L'intensité de défaut d'une obligation AA en t est par exemple égal à  $\pi^1(t) + \pi^2(t)$

On a donc :

$$d\pi^m(t) = \alpha^m(\mu^m - \pi^m(t))dt + \sigma^m \sqrt{\pi^m(t)} dW^m(t)$$

Où chacun des processus  $\pi^m$  sont indépendants les uns des autres et dirigés par des mouvements Browniens  $dW^m(t)$ .

Notons que l'expression de la fonction d'intensité de défaut  $\lambda^M(t)$  permet aussi d'introduire une corrélation entre les différents ratings puisque la probabilité de défaut de rating AA, égale à  $\pi^1(t) + \pi^2(t)$ , dépendra par exemple de la probabilité de défaut  $\pi^1(t)$  du rating AAA, et ainsi de suite.

### 6.3.3 Modélisation du défaut et des spreads

Le principe est ici le même que pour le modèle G2.

La différence réside dans le fait que les probabilités de défaut utilisées pour l'abattement des flux sont directement récupérées à partir de la formule énoncée au-dessus utilisant la fonction d'intensité de défaut propre à chaque rating :

$$Q(t, T) = Prob_Q(t \leq \tau \leq t + T) = 1 - \exp\left(-\int_t^T \lambda(t) \times dt\right)$$

Le spread de chaque obligation au temps t de projection, utilisé pour la valorisation de l'obligation au temps t dans le modèle ALM, est ensuite comme pour le modèle G2 calculé à partir des probabilités de défaut et du taux de recouvrement, lui-même déterminé à partir de la séniorité de chacune des obligations.

### 6.3.4 Les sorties du modèle G3

Le modèle G3 permet de sortir pour chaque date d'arrêt, les données suivantes calibrées :

- Les taux de recouvrement correspondant à chaque séniorité.
- Les probabilités de défaut modélisées, qui sont données en fonction de leur maturité (période de temps sur lesquelles elles valent) et du rating : Moody's donne ces probabilités de défaut pour des maturités allant de 1 an à 60 ans et pour les maturités 1 mois, 2 mois, 3 mois, 6 mois et 9 mois et pour des ratings AAA, AA, A, BBB, BB, B et CCC soit 7 ratings.
- Les spreads modélisés, qui sont donnés en fonction de leur maturité, de la séniorité et du rating : Moody's donne ces spreads pour les mêmes maturités et ratings que les probabilités de défaut et pour les 5 séniorités différentes.

Remarquons, comme pour le modèle G2, que chaque spread de maturité T, rating M et séniorité S en sortie peut être recalculé à partir de la probabilité de défaut de maturité T, rating M et à partir du taux de recouvrement correspondant à la séniorité S (d'après formule partie 6.1).

## 7 Le calibrage des modèles

### 7.0.1 Les cycles de calibrage et données utilisées

Le calibrage des modèles repose dans la détermination des paramètres  $\alpha$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  qui permettra au modèle d'avoir un comportement au plus proche du réel (probabilités de défaut plus importantes pour les ratings les plus bas) tout en évoluant de manière risque-neutre.

Deux cycles de calibrage sont réalisés par Moody's :

- Le calibrage annuel, qui revoit tous les paramètres dans leur ensemble en prenant pour base des historiques longs afin que le comportement général du modèle soit ajusté au mieux avec les comportements de défaut et spreads observés sur ces historiques longs.
- Le calibrage trimestriel, qui revoit seulement la valeur initiale du processus de risque de crédit stochastique  $\pi(0)$  afin que celle-ci fasse correspondre la courbe initiale des spreads du modèle avec la courbe initiale des spreads réellement observée en 0 (0 étant la date d'arrêt).

Notons que les spreads modélisés par les modèles sont des spreads qui doivent pouvoir être utilisables pour tous les actifs obligataires d'un portefeuille.

Les historiques de spreads utilisés pour le calibrage du modèle proviennent donc d'indices dits "Aggregate", c'est à dire qui mélangent spreads corporate et spreads souverains. Les données d'historique utilisées par Moody's proviennent de Thomson Reuters (ICE Merrill Lynch) et nous verrons que la profondeur d'historique dépend des modèles et calibrages.

### 7.1 Le calibrage du modèle G2

Le calibrage du modèle G2 se fait sur le processus de risque de crédit stochastique, la matrice de transition et les taux de recouvrement.

Le calibrage se déroule en 3 étapes que nous décrivons ci-dessous :

#### 1. Le calibrage de la matrice de transition risque-réelle

La matrice de transition risque-réelle est calibrée de manière à produire des probabilités de transition et défaut réalistes sur une période de un an. Les matrices de transition données par les agences de notation ainsi que des historiques de défaut et de transition sur du long terme sont ici utilisés par Moody's pour la détermination de cette matrice.

#### 2. Le calibrage du processus de risque de crédit stochastique

La méthode de calibrage du processus de risque de crédit stochastique consiste à adapter les caractéristiques de distribution des spreads de crédit produits par le modèle à des hypothèses de comportement observées réellement sur le marché.

Le calibrage a pour seule cible réelle les spreads et non les probabilités de défaut car les spreads sont le résultat final du modèle de défaut.

L'optimisation est obtenue en effectuant plusieurs itérations d'un algorithme jusqu'à converger vers une solution donnant le meilleur ajustement possible aux cibles réelles visées.

Voici les étapes de l'algorithme :

- (a) L'horizon de temps sur lequel les cibles de calibrage sont prises est fixé à 100 ans.
- (b) Initialisation des paramètres  $\alpha$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  aux valeurs déterminées avec l'itération précédente.
- (c) Calibrage de la valeur de  $\mu$  pour que la courbe de spread initiale d'une obligation de rating A et de maturité 7 modélisée par le modèle G2 se rapproche au plus de la courbe réelle de spread initiale.
- (d) La valeur de  $\mu$  étant fixé, calibrage des valeurs de  $\alpha$  et  $\sigma$  pour que la dispersion des valeurs des spreads des obligations A de maturité 7 ans et des obligations BBB de maturité 30 ans projetées par le modèle G2 soit au plus proche de la dispersion historique sur 100 ans.

Le calibrage du processus de risque de crédit stochastique du modèle G2 ne se fait que sur peu de cibles réelles de spreads pour deux raisons :

- Les spreads, dans le modèle G2, sont déterminés à partir des probabilités de défaut qui dépendent à la fois du processus  $\pi(t)$  et de la matrice de transition initiale. Le calibrage du processus de risque de crédit stochastique est donc déjà limité par le calibrage de la matrice de transition initiale.

- Il n'y a qu'un seul processus stochastique ( $\pi(t)$ ) qui décrit le mouvement des spreads pour tous les ratings à la fois. C'est en effet la matrice génératrice entière qui est multipliée par le processus  $\pi(t)$ .

Moody's calibre en effet le modèle G2 sur les cibles de rating et de maturité les plus prioritaires (le rating A est le rating le plus courant dans les portefeuilles de compagnie d'assurance et le rating BBB le rating "le moins bon" et donc le plus disperse souvent détenu par ces même compagnies) puis compte sur la réalité du modèle pour la justesse de la modélisation des autres ratings et maturités.

### 3. Le calibrage des taux de recouvrement

Les taux de recouvrement sont déterminés à partir d'études sur le court et long terme et à partir de données de taux de recouvrement historiques.

## 7.2 Le calibrage du modèle G3

Le calibrage du modèle G3 repose dans la détermination des paramètres  $\alpha^m$ ,  $\mu^m$  et  $\sigma^m$  (avec m le rating) propres à chaque processus stochastique  $\pi^m(t)$ . Le calibrage des taux de recouvrement est le même que dans le modèle G2.

Le calibrage du modèle G3 peut se permettre d'être très pointu dans l'atteinte des cibles de spreads réelles pour deux raisons :

- Le nombre de processus et donc de paramètres permet une précision non négligeable sur les cibles de calibrage, notamment un calibrage sur des cibles de spreads par maturité.
- La fonction de densité  $\lambda^M(t)$  définit un processus stochastique différent pour chaque rating, ce qui permet un calibrage sur des cibles de spreads par rating.

Le modèle de crédit G3 est en effet construit pour reproduire un environnement de spreads riche, défini pour chaque note de crédit et maturité individuellement.

Il requiert donc des données de marché étendues (Le maximum d'historique disponible est utilisé) pour calibrer chacun des processus de crédit  $\pi^m(t)$  sur des cibles de distribution définies note par note. Comme pour le modèle G3, les processus sont calibrés sur des cibles monde réel, selon la disponibilité des données de spreads à la date et pour le marché considéré.

Comme pour le calibrage du modèle G2, l'optimisation est obtenue en effectuant plusieurs itérations d'un algorithme jusqu'à converger vers une solution donnant le meilleur ajustement possible aux cibles réelles visées.

L'algorithme est le suivant :

1. Calibrage de la fonction d'intensité du rating numéro 1  $\lambda^1(t) = \pi^1(t)$ , dirigeant les spreads AAA, sur la dispersion, la volatilité et le niveau des spreads AAA de toutes les maturités disponibles : Détermination de  $\alpha^1$ ,  $\mu^1$  et  $\sigma^1$  selon la même méthode utilisée pour le calibrage des paramètres de l'unique processus stochastique du modèle G2.
2. Les paramètres du processus  $\pi^1(t)$  ayant été fixés par le calibrage de la fonction  $\lambda^1(t)$  des spreads AAA, calibrage de la fonction d'intensité du rating numéro 2  $\lambda^2(t) = \pi^1(t) + \pi^2(t)$ , dirigeant les spreads AA, sur la dispersion, la volatilité et le niveau des spreads AA de toutes les maturités disponibles : Détermination de  $\alpha^2$ ,  $\mu^2$  et  $\sigma^2$  selon la même méthode utilisée pour le calibrage des paramètres de l'unique processus stochastique du modèle G2.
3. Les paramètres des processus  $\pi^1(t)$  et  $\pi^2(t)$  ayant été fixés par le calibrage des fonctions d'intensité pour les spreads AAA et AA, calibrage de la fonction d'intensité  $\lambda^3(t) = \pi^1(t) + \pi^2(t) + \pi^3(t)$ , dirigeant les spreads A, sur la dispersion, la volatilité et le niveau des spreads A de toutes les maturités disponibles : Détermination de  $\alpha^3$ ,  $\mu^3$  et  $\sigma^3$  selon la même méthode utilisée pour le calibrage des paramètres de l'unique processus stochastique du modèle G2.
4. ...Ainsi de suite pour les fonction d'intensité des ratings suivants

Le modèle G3 a un comportement moins réaliste que le modèle G2 (pas de migration et hypothèse de modèle à intensité) mais il a été conçu avec un nombre plus important de processus stochastiques afin d'avoir la main sur beaucoup de paramètres de calibrage.

Le modèle G3 compte sur un très bon calibrage sur le maximum de cibles possible plutôt que sur une réalité de modélisation.

---

## Troisième partie

# L'implémentation et la validation d'un modèle de crédit

Ce troisième chapitre vise à présenter les critères qui ont menés au choix du modèle de crédit retenu pour ce mémoire ainsi que toutes les étapes qui ont été nécessaires à l'implémentation et à la validation du modèle final implémenté en fonction des contraintes rencontrées.

## 8 Choix du modèle et validation des sorties

### 8.1 Comparaison des modèles G2 et G3

Il nous faut à présent choisir un modèle de crédit qui correspond le mieux aux attentes du régulateur et qui puisse être correctement implémenté au sein de notre modèle ALM.

Comme on a pu le voir dans la partie précédente, chacun des deux modèles traite la modélisation du risque de crédit de deux manières bien différentes :

- Le modèle G2 a été construit dans une optique de reproduction très réaliste du comportement des actifs obligataires risqués : c'est une matrice de transition stochastique qui va faire évoluer de manière probabiliste chaque actif obligataire présent dans le portefeuille. La dégradation du portefeuille, induite par les probabilités de passage de rating à rating ou de rating à défaut, va directement jouer sur le niveau des spreads propres à chaque actif obligataire et ainsi apporter de la volatilité à la valeur des flux futurs attendus.
- Le modèle G3 s'attache à ce que la conséquence directe des comportements d'actifs obligataires risqués en terme de niveau, volatilité et dispersion des spreads soit au plus proche du réel, sans passer par une modélisation aussi réaliste que dans le modèle G2 des comportements des actifs obligataires risqués du portefeuille.

Les différences de structure de chaque modèle impliquent aussi des différences dans leur calibrage :

- Le modèle G2, dirigé par un seul processus stochastique, n'est calibré que sur les deux cibles réelles de spread jugées les plus importantes en terme de niveau et de dispersion. Le reste est assuré le calibrage de la matrice de transition initiale qui doit refléter au mieux les comportements historiques de transition et défaut observés. L'historique de calibrage est ici fixé à 100 ans.
- Le modèle G3, dirigé par plusieurs processus stochastiques, permet un calibrage plus fin sur les résultats finaux du modèle que sont les spreads. Il est calibré sur le maximum de cibles et d'historiques disponibles concernant le niveau, la dispersion et la volatilité des spreads.

En conclusion, le modèle G2 s'attarde sur la réalité comportementale de la dégradation des actifs obligataires risqués du portefeuille par le biais d'une matrice de transition et de son calibrage, tandis que le modèle G3 s'attarde sur une reproduction réelle du mouvement des spreads par le biais d'un modèle à multiples paramètres et d'un calibrage très fin de ces derniers.

Voici les graphiques provenant de Moody's montrant le niveau d'atteinte à fin 2016 (date à laquelle le dernier rapport de calibrage détaillé a été fourni par Moody's) des cibles de calibrage par le modèle G2 et G3 en terme de niveau, dispersion et volatilité des spreads (nous ne présentons pas de graphique pour les volatilités des spreads car le G2 ne réalise pas de calibrage avec des cibles de volatilités des spreads) :

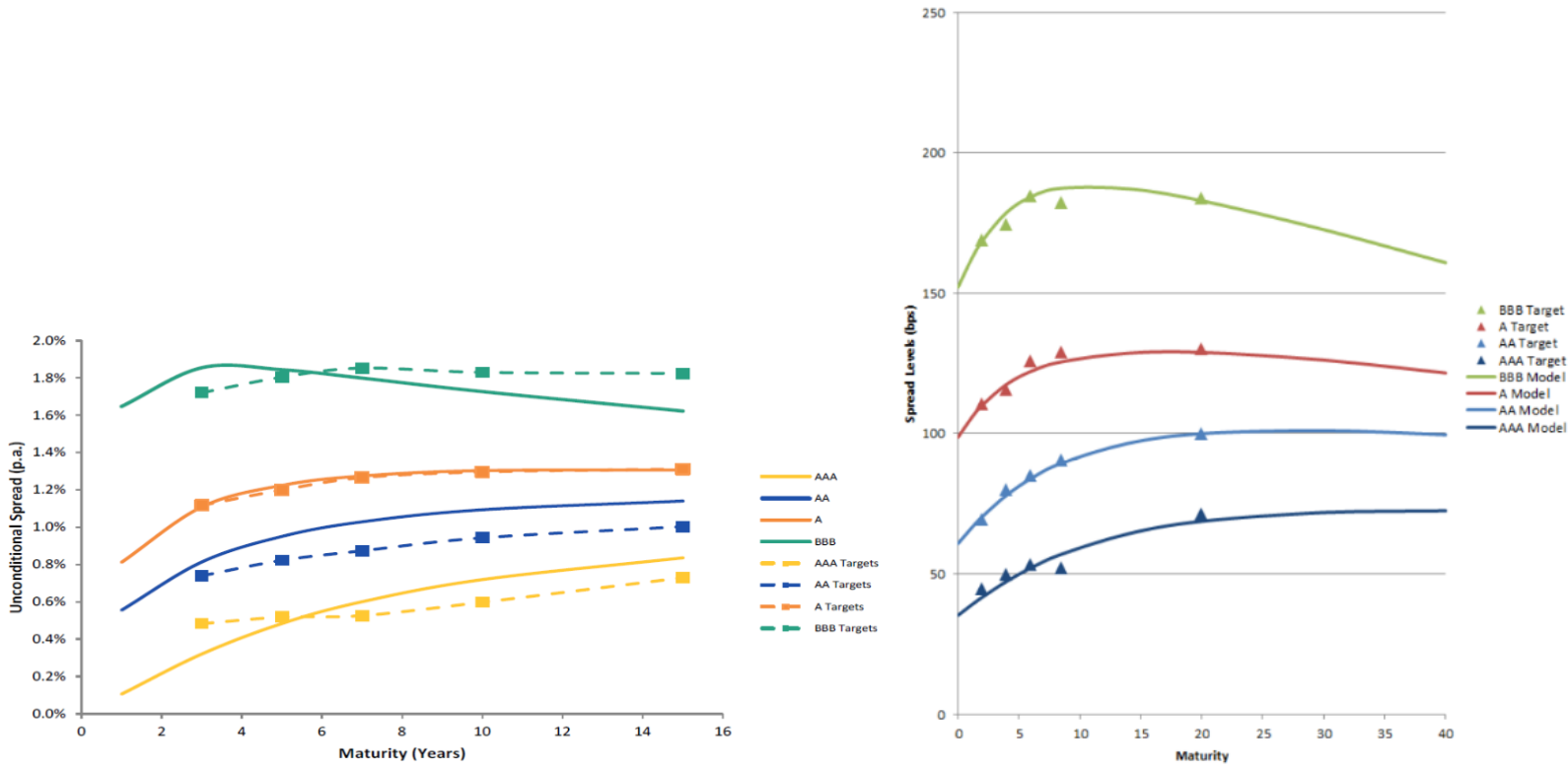


FIGURE 22 – Calibrage 2016 des modèles G2(gauche) et G3(droite) sur les niveaux des spreads

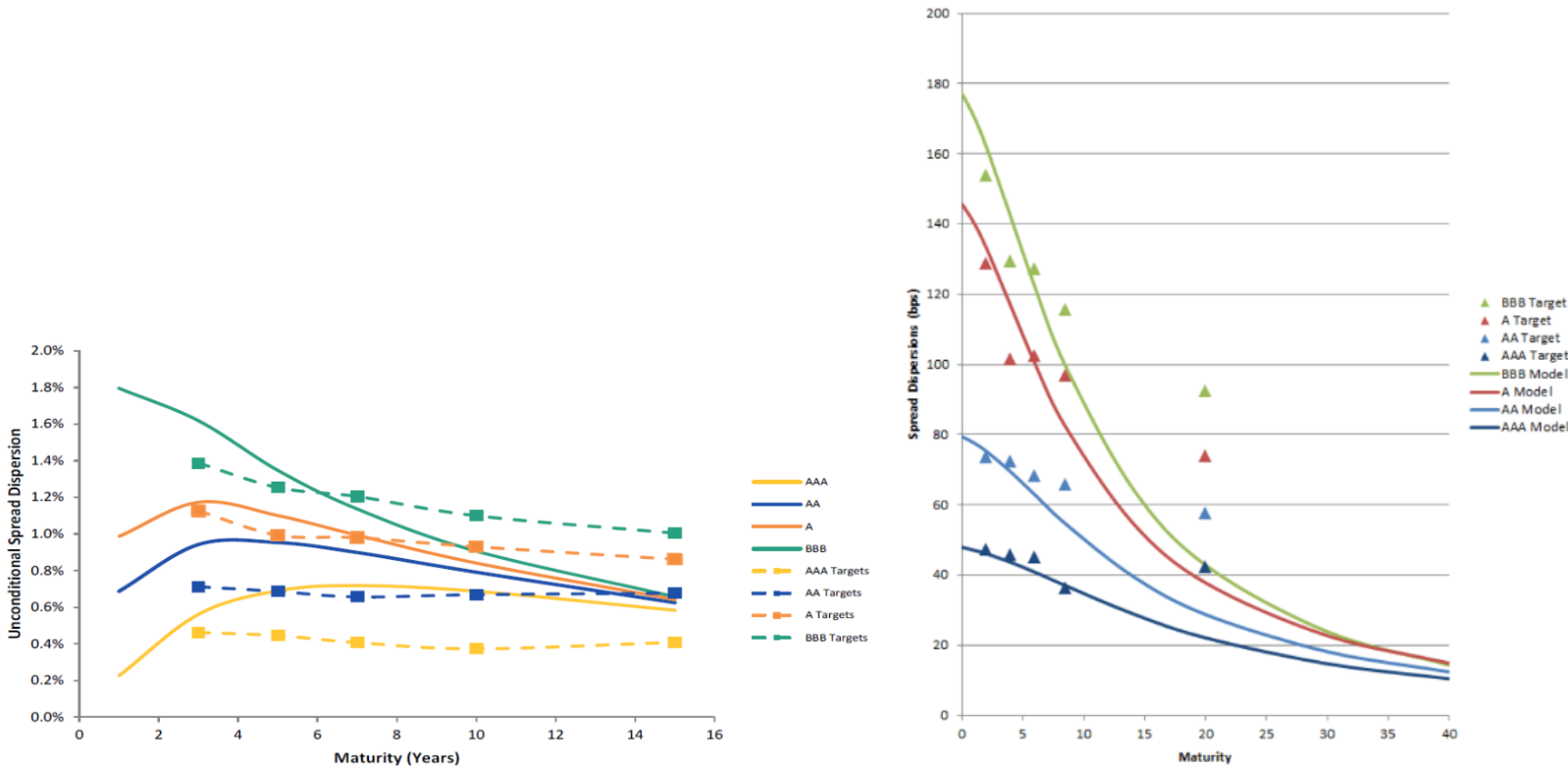


FIGURE 23 – Calibrage 2016 des modèles G2(gauche) et G3(droite) sur la dispersion des spreads



On peut voir que les cibles réelles de calibrage sont beaucoup mieux atteintes avec le calibrage du modèle G3 qu'avec le modèle G2.

## 8.2 Le modèle retenu

La commission européenne préconise un modèle qui respecte le caractère volatile induit par les risques de défaut possibles des actifs obligataires risqués du portefeuille.

Dans les deux modèles disponibles G2 et G3, cette caractéristique est respectée puisqu'une probabilité de défaut stochastique est modélisée.

Il reste maintenant à choisir parmi les caractéristiques des deux modèles celles qui nous conviennent le mieux, notamment pour la mise en place du modèle de crédit au sein du modèle ALM.

La mise en place du modèle G2 au sein du modèle ALM demanderait :

- Un changement dans la projection des flux futurs attendus relatifs à chaque actif obligataire du portefeuille : Utilisation des probabilités de défaut modélisées pour abattre les flux futurs.
- Un changement dans la valorisation des actifs obligataires à chaque temps de projection : Utilisation des spreads modélisés pour valoriser avec le taux sans risque et le spread.
- Un changement du portefeuille à chaque pas de projection : Utilisation des probabilités de passage à chaque pas de temps pour diviser chaque actif obligataire d'un rating en plusieurs actifs obligataires de ratings différents. Ce changement de portefeuille à chaque pas de projection permettrait cependant un pilotage de l'allocation d'actifs.

La mise en place du modèle G3 au sein du modèle ALM demanderait :

- Un changement dans la projection des flux futurs attendus relatifs à chaque actif obligataire du portefeuille : Utilisation des probabilités de défaut modélisées pour abattre les flux futurs.
- Un changement dans la valorisation des actifs obligataires à chaque temps de projection : Utilisation des spreads modélisés pour valoriser avec le taux sans risque et le spread.

La complexité induite par la multiplication constante (et exponentielle) du nombre d'actifs obligataires à traiter dans le modèle G2 représenterait un temps de calcul très important comparé à la justesse de modélisation que ce modèle représente.

Voici un résumé graphique des avantages et inconvénients de chaque modèle de crédit :

	Modèle G2	Modèle G3
Avantages	Réalisme du modèle	Facilité d'implémentation au sein du modèle ALM  Très bonne atteinte des cibles de calibrage
Inconvénients	Complexité de calcul lors de la projection par le modèle ALM  Mauvaise atteinte des cibles de calibrage	Risque de migration non modélisé (Impossibilité de piloter l'allocation d'actif)

FIGURE 24 – Avantages et inconvénients des modèles G2 et G3

Notre choix s'est donc porté sur le modèle G3, qui offre une bien meilleure reproduction des spreads que le modèle G2, tout en représentant une complexité de calcul bien plus faible pour notre modèle ALM. Notons que le modèle de crédit retenu pour ce mémoire ne modélisera donc pas le risque de migration mais seulement le risque de défaut et de changement de spread.

### 8.3 Validation des sorties

Nous nous baserons par la suite sur la date du 31/12/2017 pour effectuer tous nos tests de validation du modèle retenu.

Il sera bien évidemment important que ces tests soient de nouveau validés à chaque nouvelle date d'arrêt à laquelle le modèle de crédit sera utilisé.

Avant de procéder à l'implémentation du modèle de crédit au sein du modèle ALM, nous allons analyser les sorties de celui-ci.

La validation des sorties de l'ESG passe par une validation du bon calibrage de la courbe des spreads initiale, d'une comparaison des sorties avec des historiques ainsi que la réalisation de tests martingales.

Voici les paramètres de chaque processus  $\pi^M(t)$  déterminés après calibrage au 31/12/2017 :

Parameter	Hazard Rate Process Credit Rating						
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
StartVal	0.0007	0.0004	0.0016	0.0038	0.0126	0.0166	0.0514
Mu	0.0033	0.0057	0.0080	0.0097	0.0278	0.0289	0.1430
Alpha	0.0993	0.0941	0.0893	0.0928	0.1107	0.0955	0.0800
Sigma	0.0431	0.0638	0.0780	0.0671	0.1070	0.1305	0.2133

FIGURE 25 – Paramètres calibrés au 31/12/2017 pour le modèle G3

Le paramètre StartVal correspond au  $\pi^m(0)$  de chaque processus.

Les taux de recouvrement après calibrage au 31/12/2017 sont les suivants pour chaque séniorité :

Bond	Recovery Rate (%)
Senior Secured Bond	49.51
Senior Unsecured Bond	36.40
Senior Subordinated Bond	29.12
Subordinated Bond	21.84
Junior Subordinated Bond	14.56

FIGURE 26 – Taux de recouvrement calibrés au 31/12/2017 pour le modèle G3

#### 8.3.1 Les courbes initiales de spreads

La comparaison des cibles réelles initiales de spreads avec les courbes de spreads initiales données en sortie d'ESG permet de vérifier le bon calibrage des paramètres  $\pi^m(0)$  (ou StarVal pour Start Value) des processus stochastiques. Comme expliqué précédemment, ces paramètres sont calibrés par Moody's à chaque date d'arrêt, c'est à dire trimestriellement.

Moody's nous fournit ses données de cibles initiales réelles (pour une séniorité 1 : Senior Secured Bond) dans le tableau suivant :

Model Risky Bond Spreads - Investment Grade

Term	Model Spreads (basis points)			
	AAA	AA	A	BBB
1	6	11	24	53
2	7	13	28	59
3	8	16	32	64
4	8	18	36	69
5	9	20	39	74
7	10	23	45	82
10	12	27	52	92
15	14	33	61	103
20	15	37	68	110
25	16	40	72	115
30	17	42	74	117
40	18	44	77	118

Model Risky Bond Spreads - Sub-investment Grade

Term	Model Spreads (basis points)		
	BB	B	CCC
1	148	270	658
2	158	282	678
3	167	292	689
4	175	300	694
5	183	307	693
7	194	316	682
10	207	324	649
15	218	325	581
20	222	316	511
25	221	303	446
30	218	288	390
40	205	254	305

FIGURE 27 – Cibles réelles de calibrage de Moody's au 31/12/2017

En traçant les spreads obtenus en sortie d'ESG pour le 31/12/2017 et les cibles réelles correspondantes nous obtenons ce graphique :

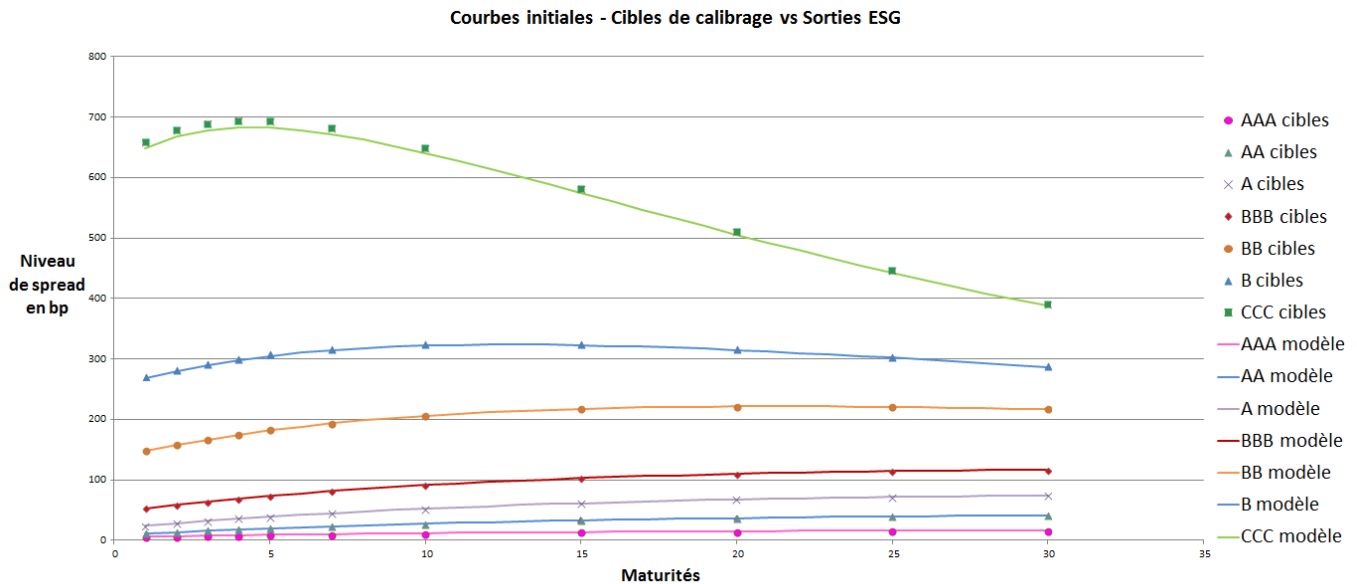


FIGURE 28 – Résultat du calibrage du modèle G3 au 31/12/2017 sur les courbes de spreads initiales

On remarque la très bonne qualité de calibrage du modèle G3 sur les cibles réelles initiales de spreads : Les écarts sont en effet minimales.

Le calibrage trimestriel est donc très bon.

### 8.3.2 Les nappes de spreads projetés

Il est important de voir graphiquement à quoi ressemblent les nappes de spreads projetées par l'ESG qui vont servir à la valorisation de nos actifs obligataires à chaque pas de temps de projection une fois que le modèle de crédit sera mis en place dans le modèle ALM.

Rappelons que l'ESG est paramétré pour sortir 1000 scénarios sur une durée de de projection de 30 ans.

Voici les graphiques des nappes projetées par l'ESG pour les ratings les plus présents dans notre portefeuille (Soit les ratings Investment Grade : AAA à BBB) et pour une séniorité de 2 (Senior Unsecured Bond). Nous avons fait le choix de représenter les spreads avec cette séniorité car c'est celle qui est le plus représentée dans notre portefeuille d'actifs obligataires :

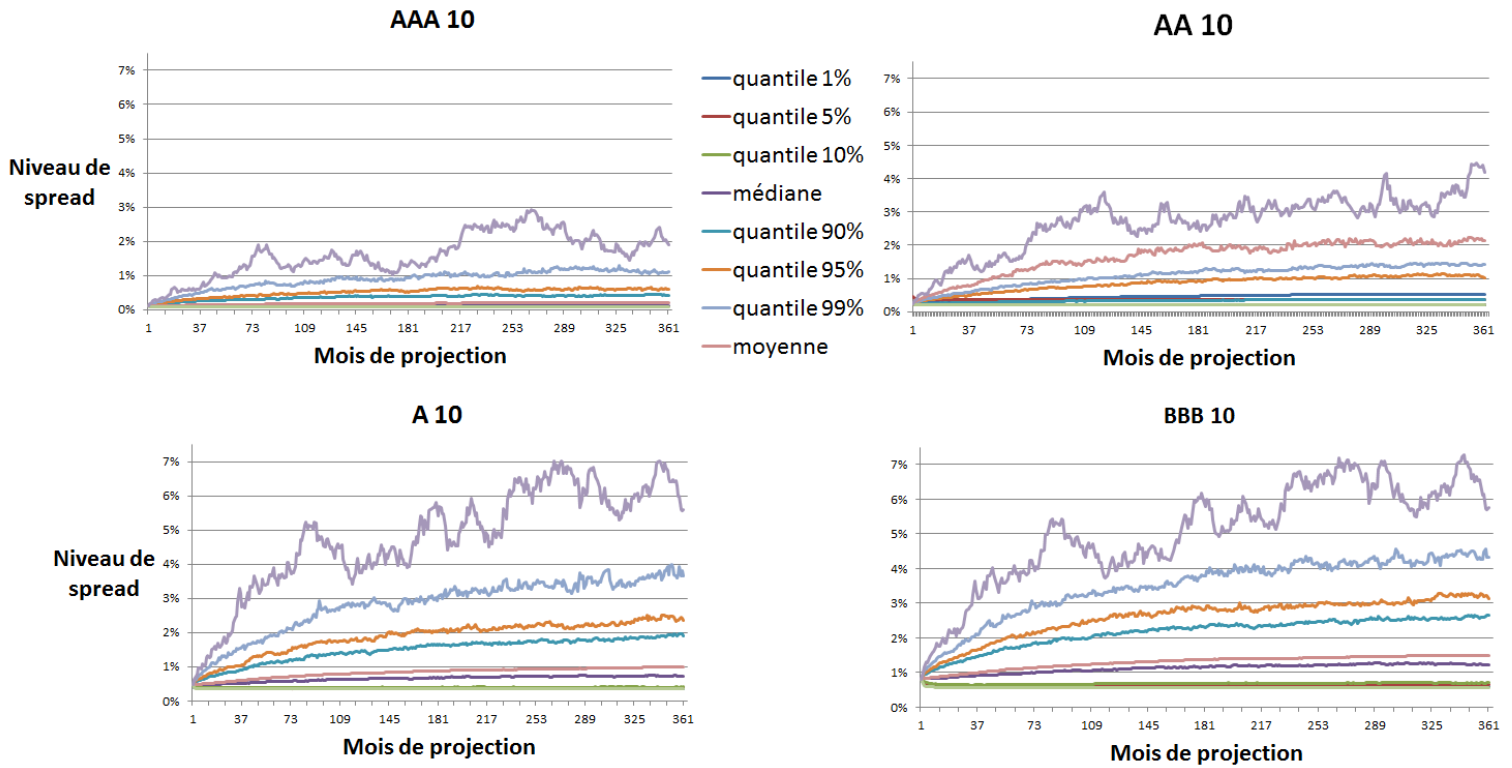


FIGURE 29 – Nappes de spreads projetés par l'ESG

On remarque une volatilité et un niveau croissants des spreads avec la dégradation de rating. Comparons maintenant sur un même graphique le niveau moyen des spreads projetés pour les ratings Investment Grade (Rating AAA à BBB) et pour les ratings Sub-Investment Grade (Ratings BB à CCC) :

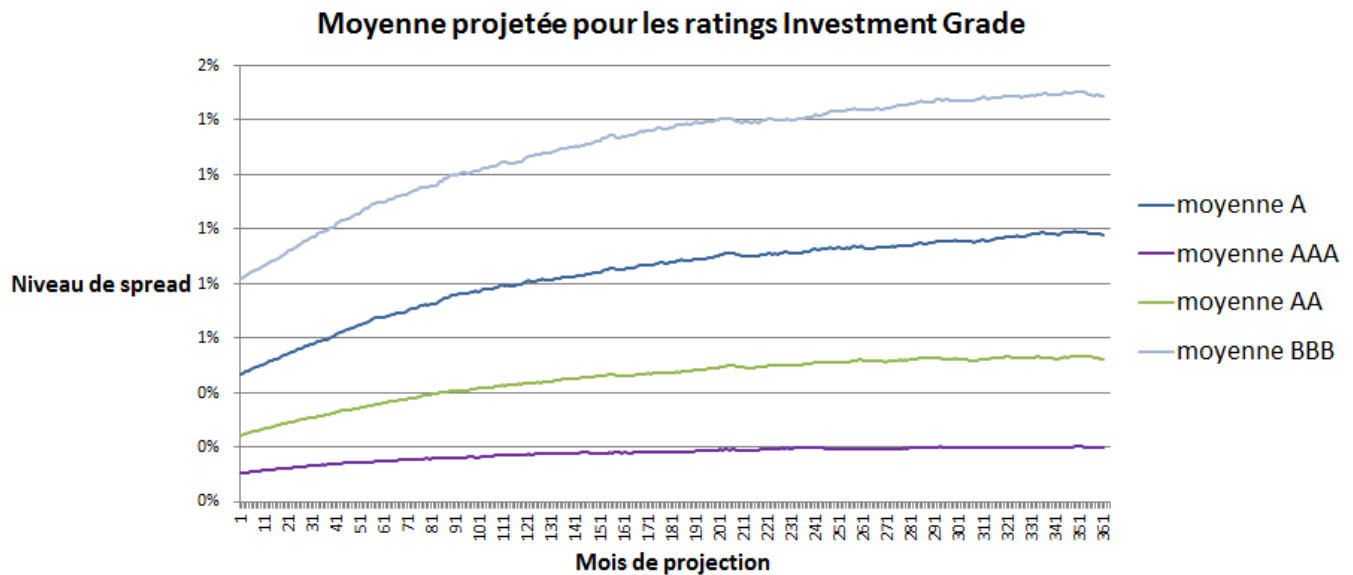


FIGURE 30 – Moyenne des spreads Investment-Grade projetée par l'ESG au 31/12/2017

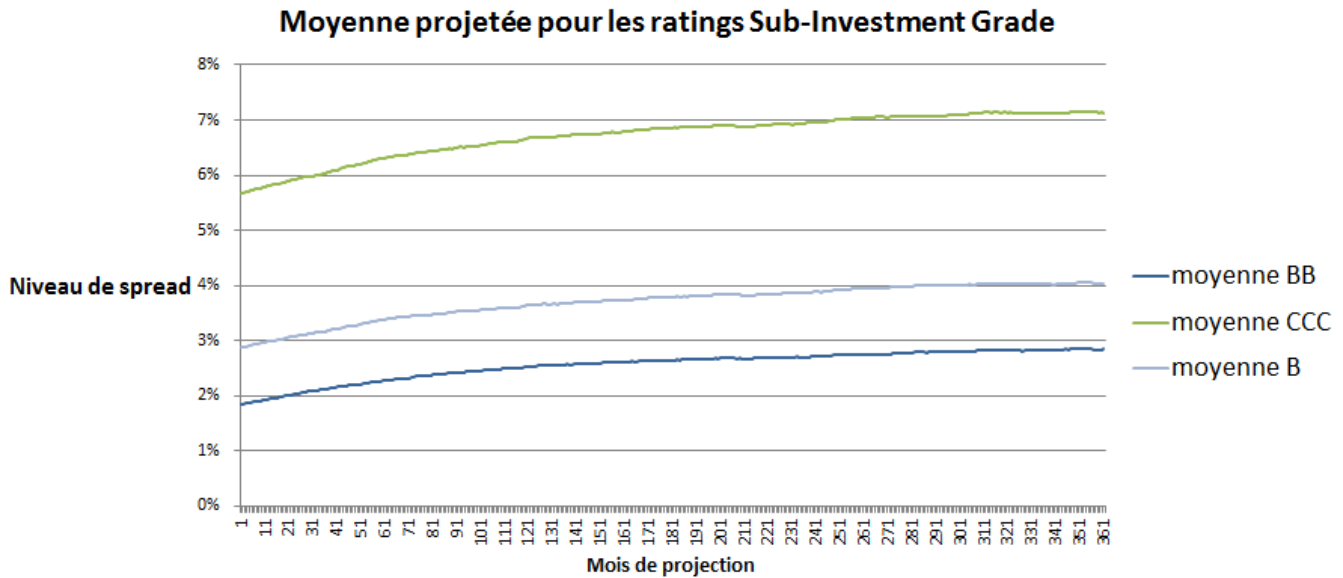


FIGURE 31 – Moyenne des spreads Sub-Investment-Grade projetée par l'ESG au 31/12/2017

La moyenne des spreads projetés est croissante avec la dégradation de rating sur toute la durée de projection.

### 8.3.3 Comparaison avec des historiques

Moody's ne fournit aucune donnée d'historique sur lesquelles ils se basent pour réaliser les calibrages annuels des paramètres  $\alpha$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  déterminant le mouvement des processus stochastiques  $\pi^m(t)$  dans le temps (et donc le mouvement des spreads sur la durée de projection).

On ne peut donc vérifier précisément, par le calcul, le bon calibrage de ces paramètres sur les données historiques.

Cependant, nous pouvons comparer des données historiques d'indices de spreads Européens Aggregate que nous sortons de Bloomberg avec les spreads que nous récupérons en sortie d'ESG afin de vérifier graphiquement que les comportements globaux en terme de volatilité, de dispersion et de niveau ne sont pas aberrants. Les indices que nous avons récupérés sur Bloomberg et qui pourraient correspondre le mieux aux sorties de l'ESG sont les suivants :

- LE3AOAS index pour les spreads AAA,
- LE2AOAS index pour les spreads AA,
- LE1AOAS index pour les spreads A et
- LEBAOAS index pour les spreads BBB.

Chacun de ces indices est constitué d'obligations libellées en euro à taux fixe, de rating énoncé et de maturité proche de 10 ans (Toutes les obligations constituant l'indice ne sont pas de maturité 10 ans exactement). Ce sont également des indices Aggregate, qui mélangent des obligations corporate et d'état.

Seuls les ratings Investment Grade sont disponibles pour ces indices, nous pouvons donc réaliser nos comparaisons seulement sur ces ratings.

Dans un premier temps, nous comparons ces historiques à nos projections en les affichant bout à bout. Nous avons récupéré les indices décrits ci-dessus sur un historique allant de début 2000 à fin 2017 et nous les prolongeons donc graphiquement par les nappes de spreads calibrés par Moody's à fin 2017 s'étalant sur une durée de 30ans.

Voici le résultat obtenu, toujours pour les ratings Investment-Grade constituant la majorité de notre portefeuille :

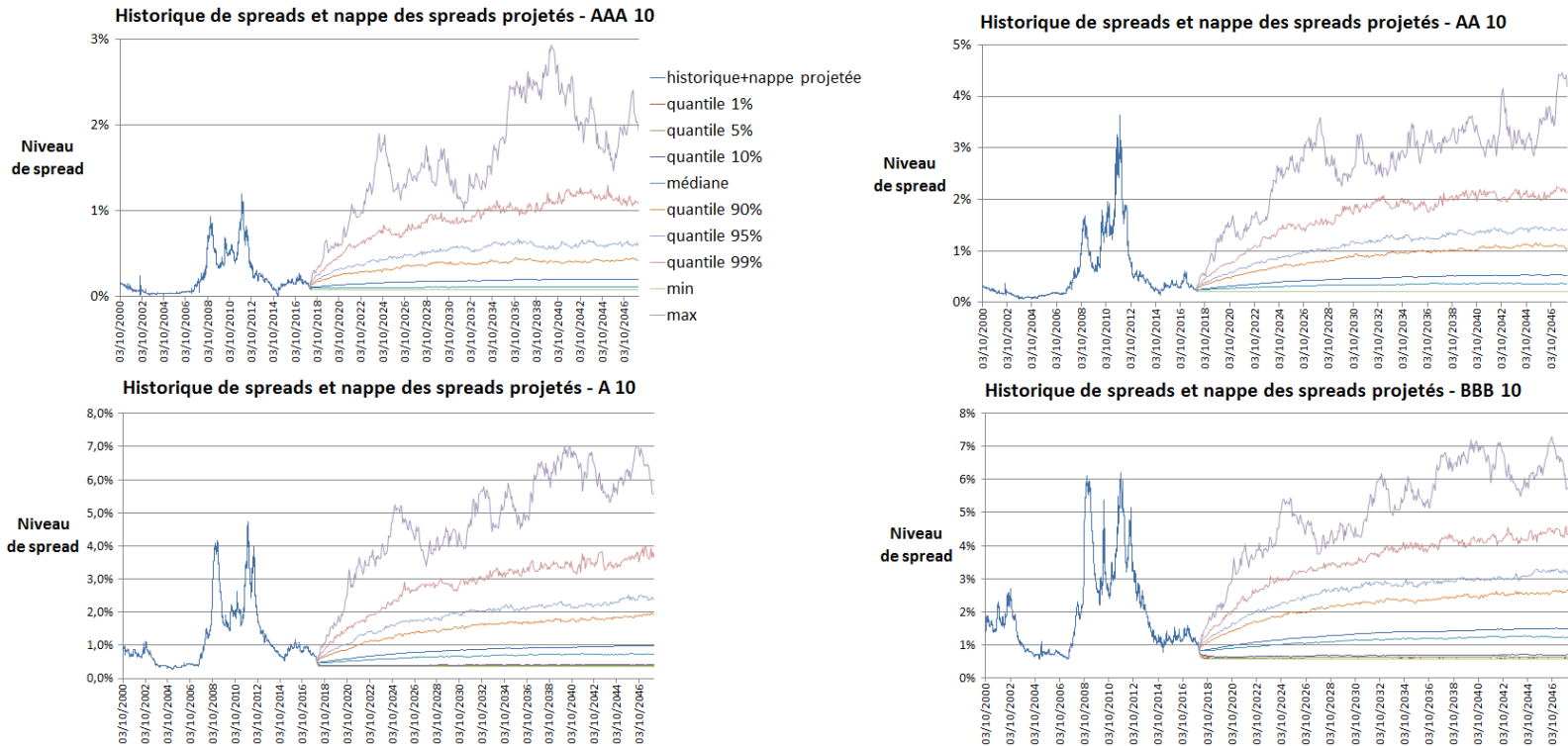


FIGURE 32 – Moyenne des spreads Sub-Investment-Grade projetée par l'ESG au 31/12/2017

Au vu des graphiques, on remarque la cohérence des nappes projetées et des historiques :

- Les valeurs historiques et en sortie d'ESG à fin 2017 coïncident à quelques bp près pour tous les ratings : Le calibrage initial est bon, comme montré précédemment.
- Les nappes de spreads projetées par l'ESG englobent les valeurs historiques pour chaque rating : Le calibrage assure une volatilité et des valeurs cohérentes avec l'historique.

Comparons maintenant les distributions des valeurs projetées par l'ESG avec les distributions historiques :

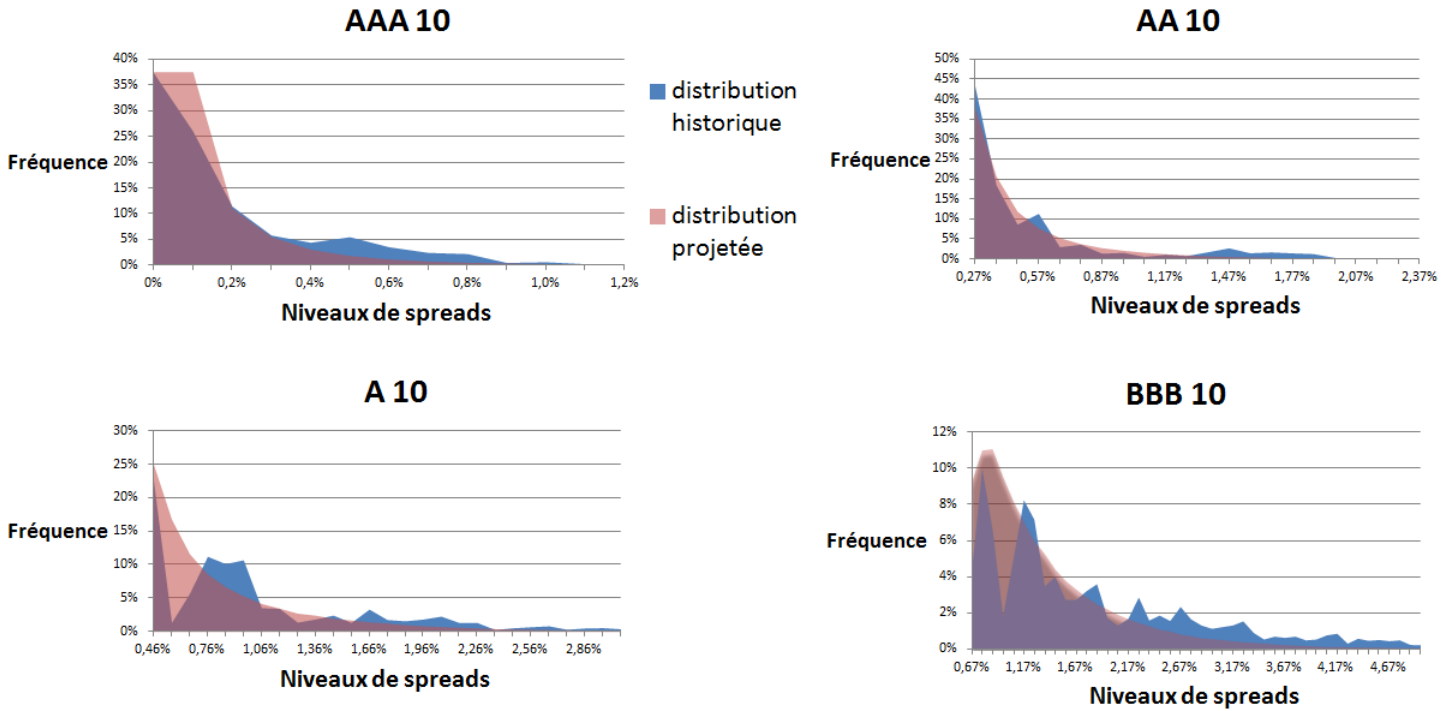


FIGURE 33 – Distribution historique vs distribution projetée pour les ratings Investment Grade au 31/12/2017

La distribution des spreads projetés par l'ESG semble correspondre à la distribution lissée des spreads historiques pour chacun des ratings.

Cependant, la distribution historique possède une queue de distribution plus épaisse que la distribution de spreads projetés par l'ESG. Cela peut s'expliquer par le manque de profondeur de notre historique. En effet, notre historique est de seulement 17 ans tandis que Moody's réalise son calibrage sur des historiques d'au moins 100ans.

## 8.4 Tests martingales

### 8.4.1 Théorie

Le test principal à réaliser sur les sorties du générateur de scénarios économiques (ESG) est le test martingale. Comme expliqué précédemment, ce test consiste à vérifier la martingalité des prix actualisés projetés par le générateur.

La formule énoncée en partie IV, qui doit être vérifiée pour tout T, est la suivante :

$$P(0) = E^Q[\text{Prix estimé}]$$

Avec  $P(0)$  le prix calculé à partir de la courbe initiale et le prix estimé la moyenne des prix actualisés calculés à partir la projection du générateur lors de l'itération i.

Pour tester nos valeurs de spreads en sortie d'ESG, il nous faut choisir un instrument dont le prix dépendra de nos spreads : C'est donc sur le prix des obligations zéro-coupon risquées que nous allons réaliser ce test. Nous prendrons pour tous les tests :  $\delta = 0$ , le taux de recouvrement égal à 0 afin de vérifier la martingalité des spreads sans le facteur séniorité, ce qui multiplierait le nombre de tests à effectuer par 5.

Prenons d'abord une obligation zéro-coupon non risquée de maturité T ans.

En T, le cash flow reçu est de 1 et le déflateur correspondant pour l'actualisation est  $D(0,T)$ .

L'égalité à vérifier pour les tests martingales est alors :

$$P(0) = E^Q[1 \times D_i(0,T)]$$

Avec  $P(0)$  le prix issu de la courbe des taux initiale, c'est à dire :

$$P(0) = \frac{1}{(1 + r(0, T))^T}$$

Avec

- $r(0, T)$  le taux zéro-coupon issu de la courbe des taux initiale,
- $D_i(0, T)$  le déflateur de maturité  $T$  issu de la projection par le générateur pour l'itération  $i$ , c'est à dire :

$$D_i(0, T) = \frac{1}{(1 + r_i(0, 1)) \times (1 + r_i(1, 1)) \times (1 + r_i(2, 1)) \times \dots \times (1 + r_i(T - 1, 1))}$$

Avec  $r_i(u, 1)$  le taux zéro-coupon de maturité 1 an vu au temps  $u$  de projection (on considère que le pas de temps auquel projette le générateur est de 1 an ici) et de l'itération  $i$ .

Le test effectué ci-dessus sur les obligations zéro-coupons est en effet notre test martingale actuel sur les taux zéro-coupons.

Supposons maintenant que notre obligation soit risquée et que son taux de recouvrement soit égale à 0.

L'égalité à vérifier est alors :

$$P(0) = E^Q[1 \times D_i(0, T) \times \frac{1}{(1 + s_i(0, T))^T}]$$

qui équivaut à

$$\frac{1}{(1 + r(0, T))^T (1 + s(0, T))^T} = E^Q[1 \times D_i(0, T) \times \frac{1}{(1 + s_i(0, T))^T}]$$

Avec

- $s(0, T)$  le spread de maturité  $T$  issu de la courbe initiale, qui dans le cas où  $\delta = 0$  vérifie :

$$\frac{1}{(1 + s(0, T))^T} = 1 - Prob_Q(0 \leq \tau \leq T)$$

avec  $Prob_Q(0 \leq \tau \leq T)$  la probabilité de défaut de maturité  $T$  en 0. d'après partie 6.1

- $s_i(0, T)$  le spread de maturité  $T$  issu de la projection par le générateur pour l'itération  $i$ , qui dans le cas où  $\delta = 0$  vérifie :

$$\frac{1}{(1 + s_i(0, T))^T} = 1 - Prob_{Q_i}(0 \leq \tau \leq T)$$

avec  $(1 - Prob_{Q_i}(0 \leq \tau \leq T))$  la probabilité de survie jusqu'en  $T$  issu de la projection du générateur pour l'itération  $i$ , qui vérifie :

$$1 - Prob_{Q_i}(0 \leq \tau \leq T) = (1 - Prob_{Q_i}(0 \leq \tau \leq 1)) \times (1 - Prob_{Q_i}(1 \leq \tau \leq 1)) \times \dots \times (1 - Prob_{Q_i}(t-1 \leq \tau \leq 1))$$

On sait également que, dans les modèles de crédit fournis par Moody's, les spreads sont indépendants des taux. On a donc :

$$E^Q[1 \times D_i(0, T) \times \frac{1}{(1 + S_i(0, T))^T}] = E^Q[1 \times D_i(0, T)] \times E^Q[\frac{1}{(1 + S_i(0, T))^T}]$$

Or, d'après la martingalité actuelle vérifiée de nos scénarios sur les taux zéro-coupons, on a :

$$\frac{1}{(1 + r(0, T))^T} = E^Q[1 \times D_i(0, T)]$$

Afin de tester la martingalité de nos scénarios avec l'ajout du modèle de crédit, il ne nous reste donc plus qu'à montrer :

$$\frac{1}{(1 + s(0, T))^T} = E^Q[\frac{1}{(1 + s_i(0, T))^T}]$$

ce qui équivaut après passage aux probabilités de défaut à :

$$1 - Prob_Q(0 \leq \tau \leq T) = E^Q[(1 - Prob_{Q_i}(0 \leq \tau \leq 1)) \times (1 - Prob_{Q_i}(1 \leq \tau \leq 2)) \times \dots \times (1 - Prob_{Q_i}(t-1 \leq \tau \leq t))]$$

Le test martingale sur les obligations risquées est donc un test sur les probabilités de survie.



### 8.4.2 Résultats

#### Tests de rejet

Comme expliqué partie 5.3, le contrôle du test martingale est effectué par un test statistique de rejet. Nous utilisons pour nos tests :  $\alpha = 0,05\%$ , c'est à dire que nos tests sont au seuil de confiance de 99,9%.

Voici le résultat graphique de nos tests sur les ratings AAA à BB pour les maturités 1 à 30 ans (Nous avons réalisé les tests martingales uniquement sur les ratings que nous avons dans notre portefeuille d'actifs obligataires, ce qui correspond aux AAA à BB) :

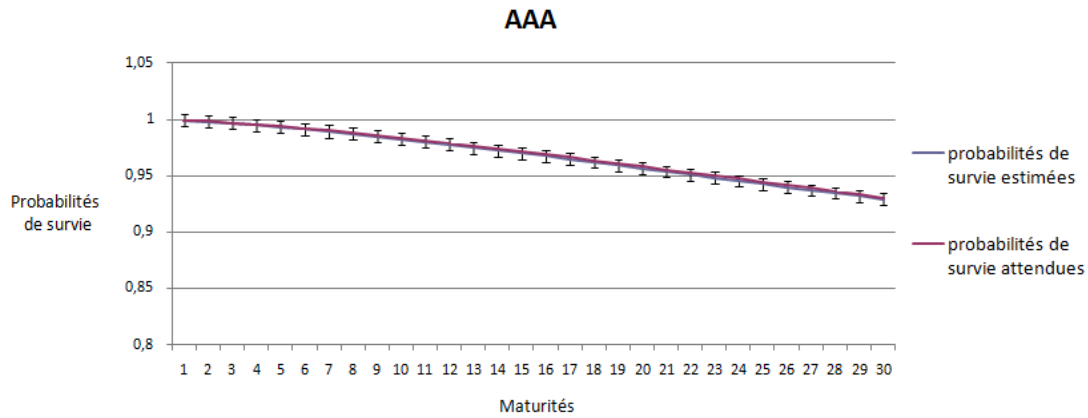


FIGURE 34 – Tests martingales rating AAA

Le test passe sur toutes les maturités pour le rating AAA.

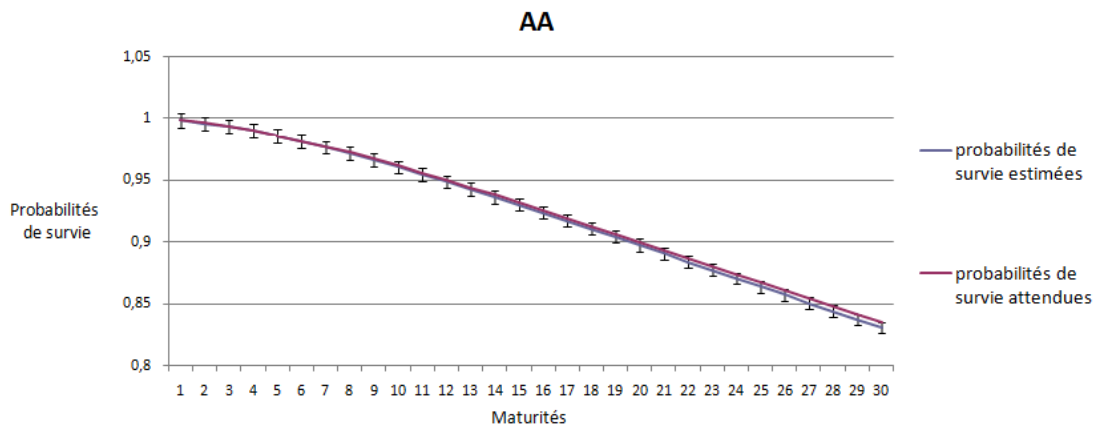


FIGURE 35 – Tests martingales rating AA

Le test passe sur toutes les maturités pour le rating AA.

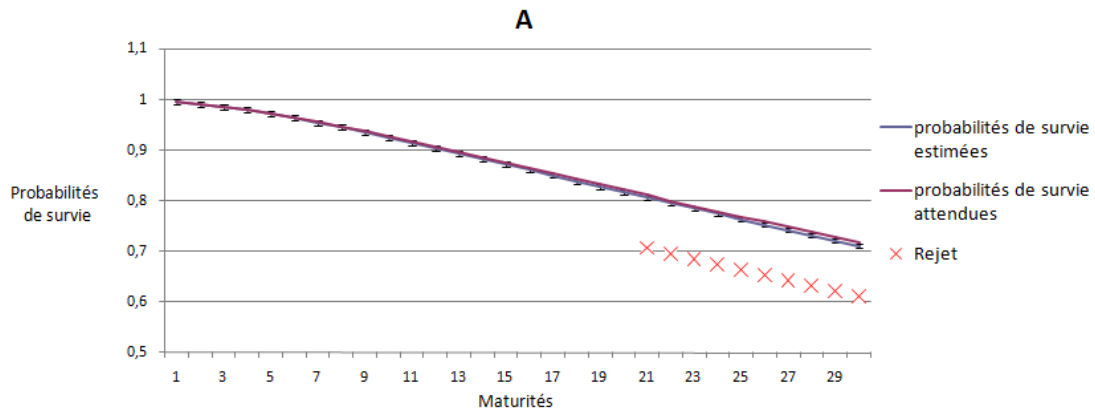


FIGURE 36 – Tests martingales rating A

Le test ne passe pas sur 33% des maturités pour le rating A ; il ne passe en effet pas sur les 10 dernières maturités. Nous ne serons cependant que peu ou pas impactés par cela étant donné que la quasi-totalité (plus de 99%) des maturités de notre portefeuille initial sont strictement inférieures à 18 ans.

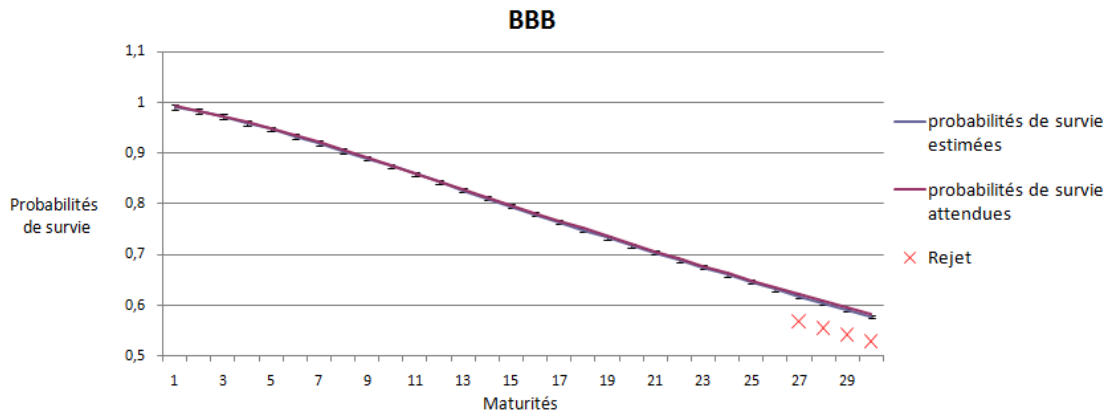


FIGURE 37 – Tests martingales rating BBB

Le test ne passe pas sur 13% des maturités pour le rating BBB ; il ne passe en effet pas sur les 4 dernières maturités. Pour la même raison que les tests martingales sur le rating A, nous ne serons cependant que peu ou pas impactés par cela.

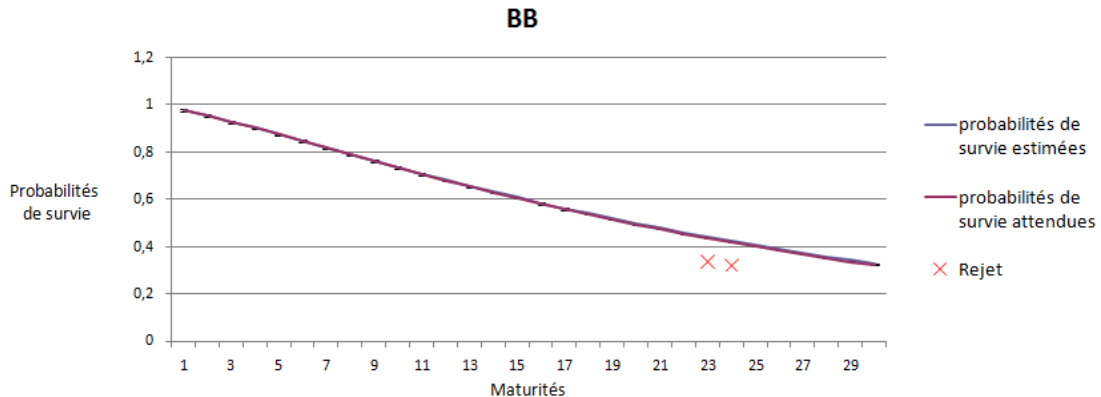


FIGURE 38 – Tests martingales rating BB

Le test ne passe pas sur 7% des maturités pour le rating BBB ; il ne passe en effet pas sur les maturités 23

et 24 ans. Pour la même raison que les tests martingales sur le rating A et BBB, nous ne serons cependant que peu ou pas impactés par cela.

### Tests de rejet pondéré

Si l'on regarde le passage des tests en le pondérant par les maturités et ratings de notre portefeuille au 31/12/2017, il n'y a qu'une maturité et un rating de notre portefeuille initial concerné par le rejet du test : le rating BBB de maturité 27, qui représente 0,427% de notre portefeuille initial en terme de valeur de marché. Le test de rejet relatif à notre portefeuille a donc de très bons résultats.

### Erreur martingale moyenne

Un autre moyen de vérifier la martingalité des tables de scénarios est de calculer l'erreur moyenne entre probabilités de survie attendues et probabilités de défaut estimées pour chaque rating sur toutes les maturités. Ce résultat est différent du test de passage sur chaque maturité : L'un évalue le résultat d'un test de rejet binaire "passage/non-passage" sur chaque maturité des séries "probabilités attendues" et "probabilité estimées" tandis que l'autre évalue une erreur moyenne sur l'ensemble des deux séries.

L'erreur moyenne est un résultat plus global sur la martingalité de la table de scénarios. Il est possible, sur deux tables de scénarios différentes, d'obtenir une différence inversée entre nombre de maturités qui passent les tests et erreur moyenne sur les tests.

Il est donc important de regarder les deux.

L'erreur moyenne sur nos probabilités de survie sorties par l'ESG est de 0,218 %.

### Erreur martingale moyenne pondérée

Si l'on regarde ici aussi l'erreur moyenne des tests martingales pondérée par les maturités et ratings de notre portefeuille au 31/12/2017, on obtient : 0,1037%. L'erreur moyenne relative à notre portefeuille divise donc par 2 la réelle erreur moyenne.

## 9 L'implémentation au sein du modèle ALM

Maintenant que les sorties du modèle de crédit sont validées, il nous reste à l'implémenter au sein de notre modèle ALM. Cependant quelques contraintes de format et de structure nous obligent à faire des hypothèses concernant le passage du générateur de scénarios économiques au modèle ALM (Moses).

### 9.1 Traitement des actifs obligataires avec un modèle de crédit

Les modifications à faire afin de mettre en place le modèle de crédit dans le modèle ALM concernent deux parties de la modélisation que sont :

- La valorisation des actifs obligataires : Le calcul de la valeur de marché d'un actif obligataire au temps  $t$  de la projection nécessite la valeur de son nominal à ce temps  $t$  ainsi que les taux et spreads à ce temps  $t$  et de maturité relative aux flux futurs relatifs à ce actif obligataire. Ce calcul est réalisé à la fin de chaque année dans le modèle.
- La projection du nominal à chaque pas de temps : La projection du nominal en  $t$  nécessite la valeur du nominal au pas de temps  $t-1$  précédent ainsi que la probabilité de défaut qui s'est exercée entre les pas de temps  $t$  et  $t-1$ .

Voici le résumé graphique des changements à effectuer dans le modèle ALM pour la mise en place du modèle de crédit.

Des changements concernant le calcul du taux concurrentiel seront abordés plus tard.

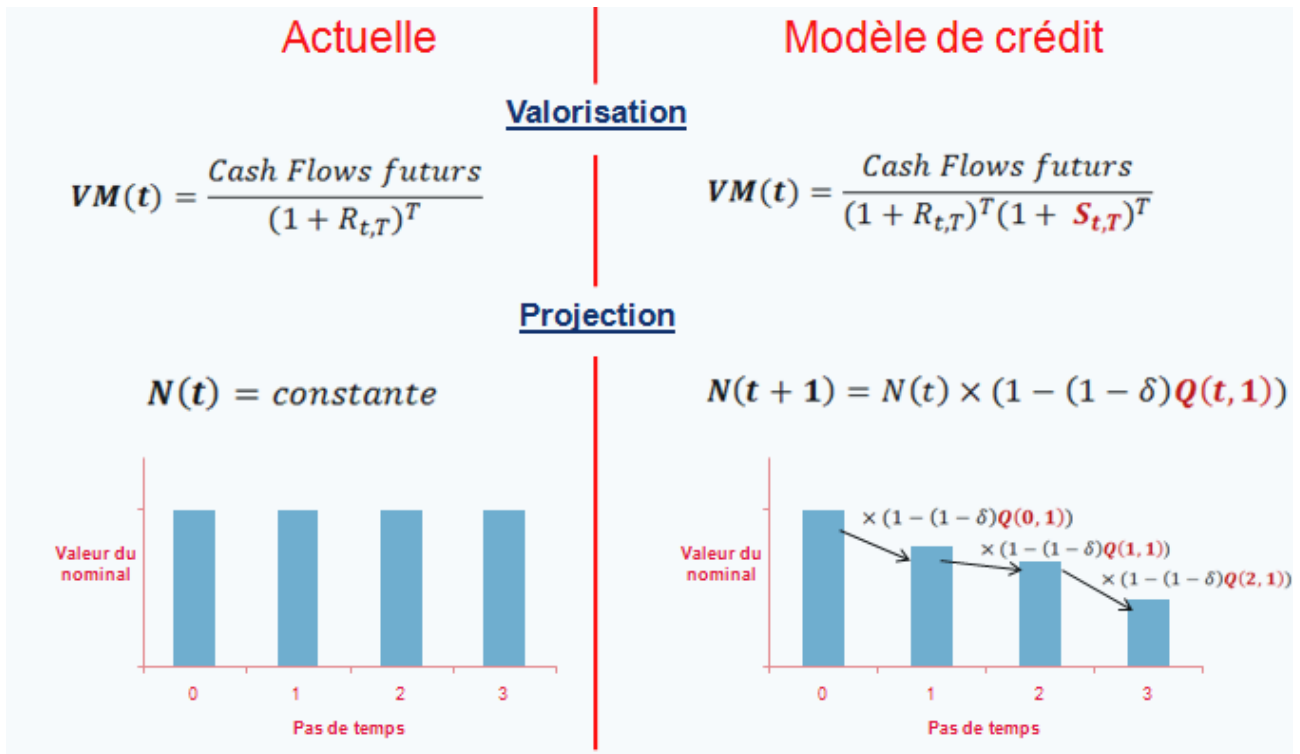


FIGURE 39 – Valorisation et projection au sein du modèle ALM

Le spread est utilisé en plus du taux sans risque pour la valorisation des actifs obligataires et la probabilité de défaut est utilisée pour abattre le nominal de chaque actif obligataire de pas de temps en pas de temps lors de la projection.

On a donc besoin :

- Des spreads de toutes les maturités pour la valorisation
- Des probabilités de défaut de maturité 1 mois (notre pas de projection est de 1 mois).

## 9.2 Les contraintes du modèle ALM et leur solution

### 9.2.1 Les sorties et leur format

Comme vu précédemment dans la présentation du modèle G3, le modèle permet de sortir pour chaque date d'arrêté, les données suivantes calibrées :

- Les taux de recouvrement correspondant à chaque séniorité (5 taux de recouvrement). Ces taux de recouvrement sont à récupérer dans un fichier de sortie du générateur et ne sortent pas directement dans le fichier Excel comportant la table de scénarios.
- Les probabilités de défaut modélisées, qui sont données en fonction de leur maturité (période de temps sur lesquelles elle valent) et du rating : Moody's donne ces probabilités de défaut pour des maturités allant de 1 an à 60 ans et pour les maturités 1 mois, 2 mois, 3 mois, 6 mois et 9 mois et pour des ratings allant de AAA à CCC soit 7 ratings.  
Dans le fichier de sortie de générateur correspondant à la table de scénarios, le générateur crée une colonne pour chaque probabilité d'un rating et d'une maturité, ce qui représente donc 455 colonnes pour les probabilités de défaut.
- Les spreads modélisés, qui sont donnés en fonction de leur maturité, de la séniorité et du rating : Moody's donne ces spreads pour les mêmes maturités et ratings que les probabilités de défaut et pour les 5 séniorités différentes.  
Dans le fichier de sortie de générateur correspondant à la table de scénarios, le générateur crée une colonne pour chaque spread d'un rating, d'une maturité et d'une séniorité, ce qui représente donc 2275 colonnes pour les spreads.

### 9.2.2 Les hypothèses à faire

Il semble évident qu'il serait impossible pour nous de sortir toutes les variables que le modèle permet : Notre fichier Excel de table de scénarios deviendrait trop lourd et inutilisable et le modèle ALM prendrait trop de temps pour récupérer chaque colonne de la table de scénarios en input.

Il nous faut donc trouver une solution qui permettrait de minimiser le nombre de colonnes sorties du générateur tout en perdant le moins possible d'informations.

Premièrement, il est décidé de ne sortir que les probabilités de défaut.

Les taux de recouvrement calibrés seront rentrés en tant que nouvelle colonne dans la table d'actifs obligataires puis récupérés pendant la projection du modèle ALM pour recalculer les spreads nécessaires à la valorisation des actifs obligataires concernés.

Ainsi voici la structure qu'il est décidé d'utiliser entre input ESG et modèle ALM :

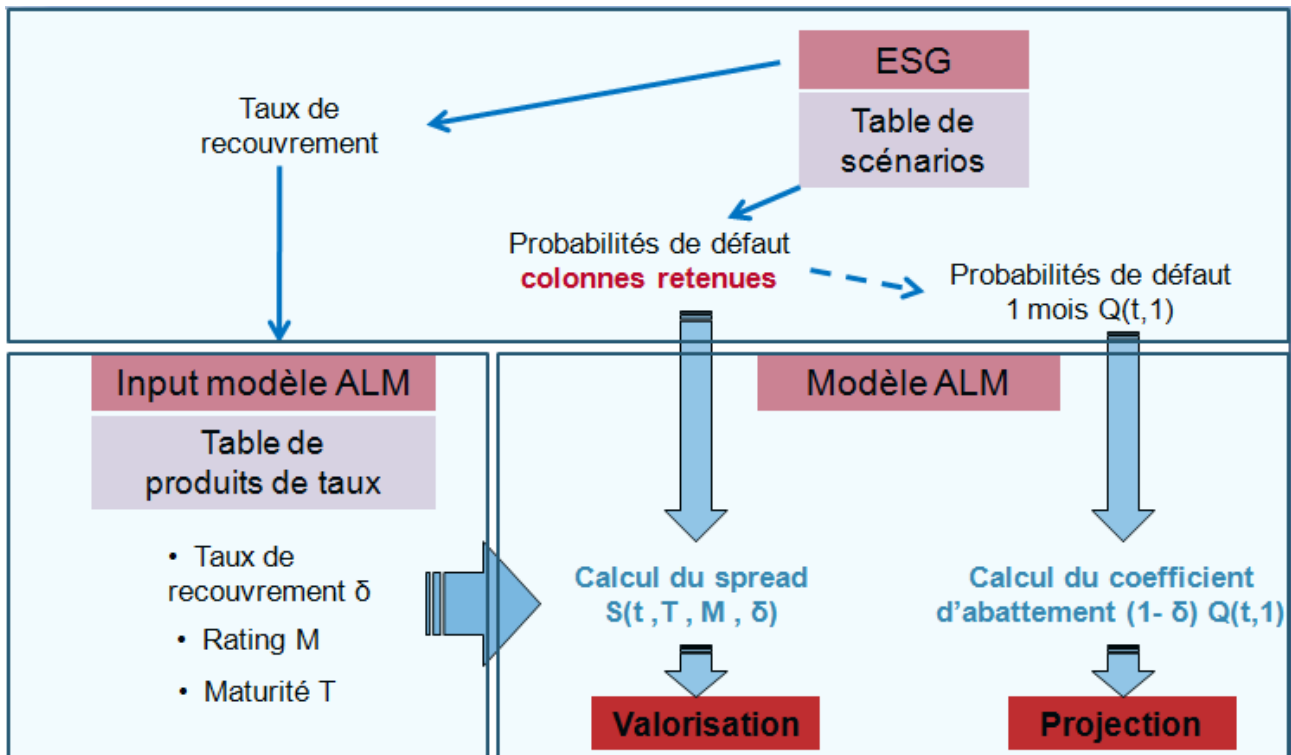


FIGURE 40 – Structure de la modélisation

Le modèle ALM prend donc en input une table de probabilités de défaut et vient recalculer les spreads en mettant en relation cette table de probabilités de défaut et les informations contenues dans la table d'actifs obligataires.

Cependant il est encore lourd pour la manipulation des tables de scénarios de sortir toutes les colonnes disponibles pour les probabilités de défaut.

Nous décidons donc de ne sortir que certaines colonnes de maturités pour chaque rating et de réaliser une interpolation entre ces maturités gardées pour récupérer les probabilités de défaut des maturités intermédiaires.

Afin de trouver la combinaison de maturités qu'il conviendrait le mieux de retenir, nous avons réalisé une étude sur plusieurs combinaisons de maturités et sur deux méthodes d'interpolation différentes au sein du modèle ALM.

Bien sûr il faudra que l'hypothèse retenue reste proche de la table initiale contenant toutes les colonnes de maturités et passe les tests de martingalité.

### 9.3 La méthode d'interpolation et les maturités retenues

Nous avons testé deux méthodes d'interpolation différentes :

- La méthode de spline cubique : Soit une série de points de données, ou nœuds, de coordonnées  $(X_i, Y_i)$ . On appelle spline d'interpolation la fonction par morceaux constituée d'un polynôme sur chaque intervalle entre nœuds. Le degré de la spline est défini par le polynôme de plus haut degré utilisé : Si tous les polynômes sont du troisième degré, on parle de spline cubique.
- La méthode linéaire : C'est une méthode de spline de degré 1 : On joint simplement les nœuds par des droites.

En plus de la méthode d'interpolation en elle-même, il nous faut choisir les nœuds sur lesquels interpoler.

Deux méthodes s'offrent en effet à nous :

- Utiliser les colonnes de probabilités de défaut que nous avons décidé de sortir comme nœuds pour l'interpolation.
- Calculer les spreads correspondant aux probabilités de défaut de maturité sorties en fixant un taux de recouvrement égal à 0, réaliser l'interpolation sur ces spreads puis recalculer une table de probabilités de défaut correspondant aux maturités interpolées.

### 9.3.1 Le portefeuille étudié

Avant de déterminer les combinaisons à tester, il est nécessaire d'étudier la composition du portefeuille d'actifs obligataires de la compagnie afin de cibler les maturités importantes à retenir en sortie de générateur.

Nous avons pour cela calculé la distribution des maturités du portefeuille en raisonnant sur les valeurs de marché et en distinguant les ratings.

Voici le graphique de distribution que nous obtenons :

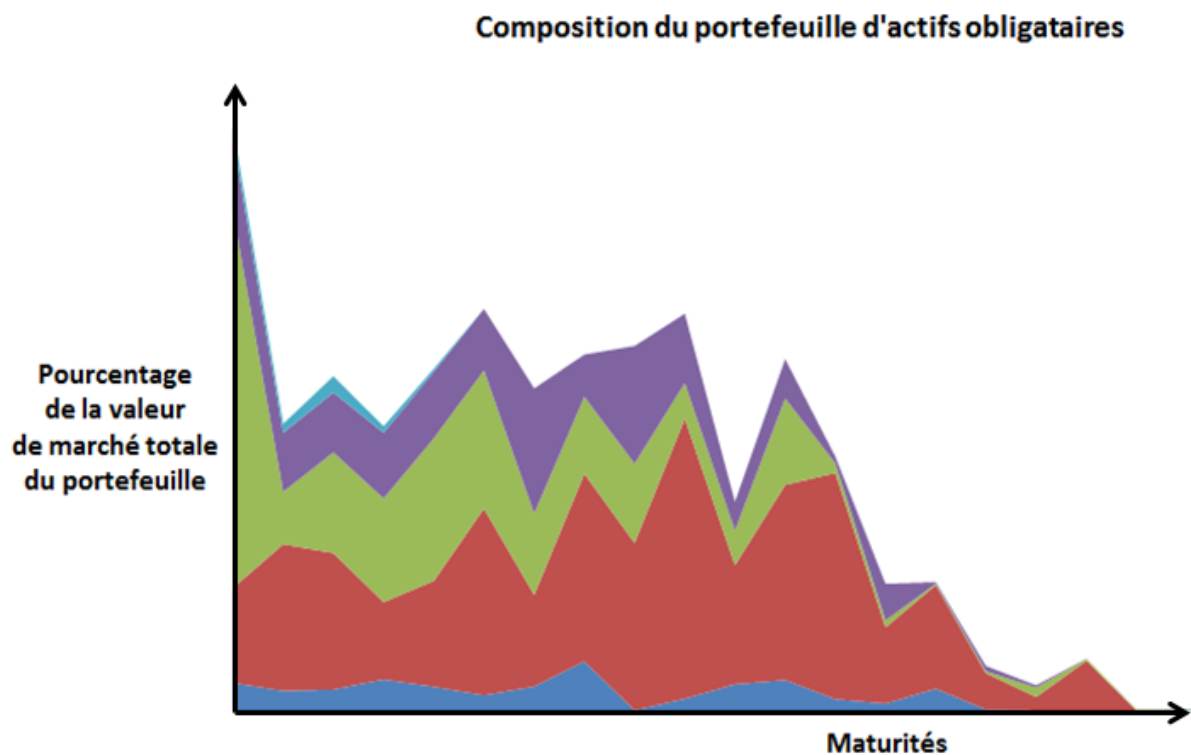


FIGURE 41 – Composition du portefeuille de Sogecap

Chaque couleur de ce graphique correspondant au pourcentage (en valeur de marché) d'actifs obligataires d'un rating dans notre portefeuille du 31/12/2017.

Cette analyse nous a ainsi permis de déterminer les maturités et ratings les plus représentés dans notre portefeuille, sur lesquels nous concentrerons la qualité de notre interpolation.

Bien sûr, il sera primordial de vérifier la qualité de notre interpolation sur l'ensemble des maturités et ratings projetés par l'ESG, mais nous pourrons grâce à cette étude en vérifier également la justesse par rapport à

notre portefeuille en pondérant nos résultats par la composition exacte de ratings et de maturités que nous détenons dans nos inputs.

### 9.3.2 Hypothèses testées et critères de validité

24 combinaisons différentes de colonnes de maturité ont été testées : 15 combinaisons à 4 colonnes de maturités par rating et 11 combinaisons à 5 colonnes de maturité par rating .

Il a été choisi de garder sur chaque combinaison obligatoirement les maturités 1 mois (importante pour la projection), 1 an et 30 ans.

Pour les combinaisons à 4 colonnes, nous rajoutons une colonne de maturité entre 1 et 15 ans, et pour les combinaisons à 5 colonnes, nous rajoutons 2 maturités entre 1 et 15 ans.

Les trois critères regardés seront les suivants :

- L'écart moyen entre table initiale et hypothèse testée,
- Le nombre de maturités qui passent les tests martingales
- L'erreur moyenne sur les tests martingales, soit l'erreur moyenne entre prix attendus et prix estimés.

### 9.3.3 Choix de la méthode d'interpolation

Les combinaisons à 4 colonnes sont numérotées de 1 à 11 et les 13 suivantes sont des combinaisons à 5 colonnes.

Voici les graphes des résultats obtenus pour les trois critères de validité sur toutes les combinaisons en distinguant méthode d'interpolation linéaire et de spline cubique :

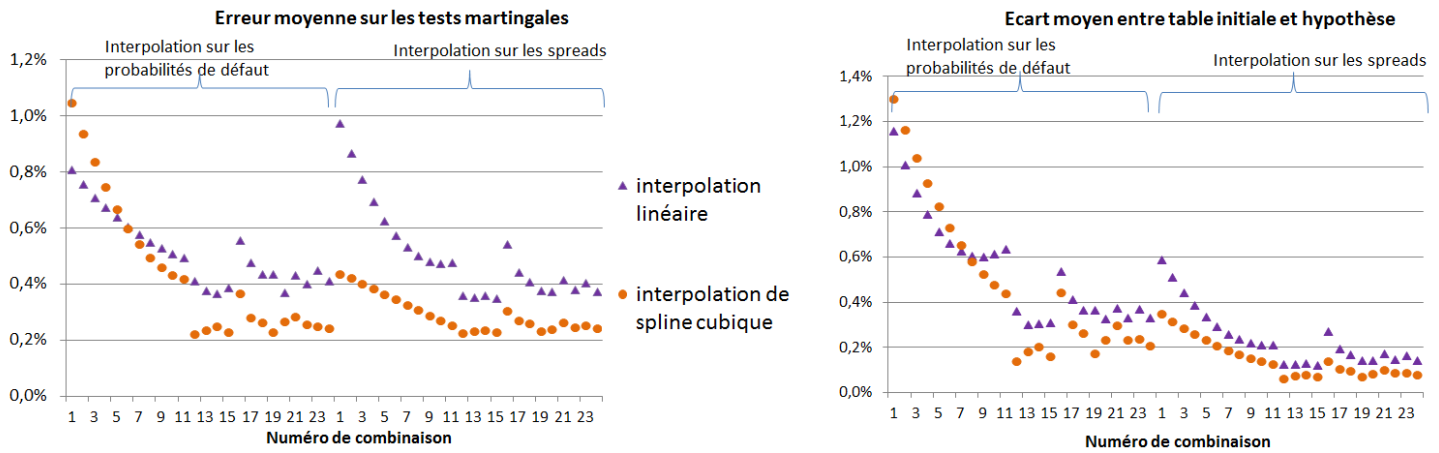


FIGURE 42 – Ecart moyen entre table initiale et hypothèse et erreur moyenne martingale

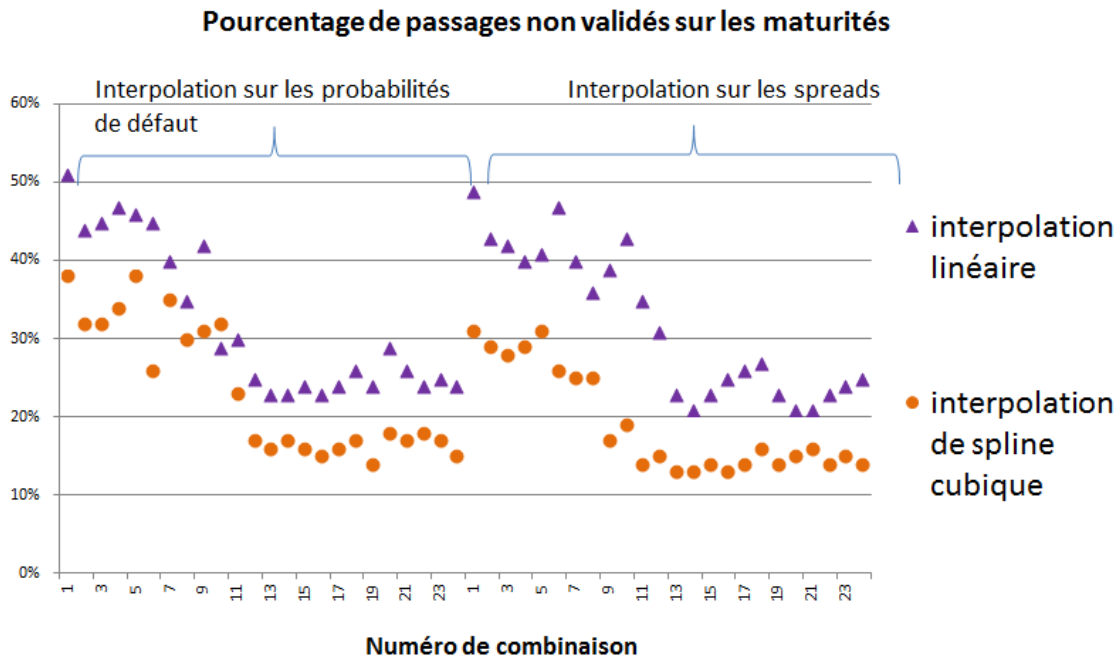


FIGURE 43 – Nombre de passages non validés sur les maturités

On remarque que l'interpolation de spline cubique améliore largement les résultats sur les trois critères en divisant presque par deux le nombre de maturités qui ne passent pas les tests martingales et en divisant par deux l'erreur moyenne sur les tests martingales.

On choisit donc cette interpolation pour notre implémentation.

Regardons à présent les résultats des trois critères de validité sur des interpolations de spline cubique pour les spreads et les probabilités de défaut séparément :

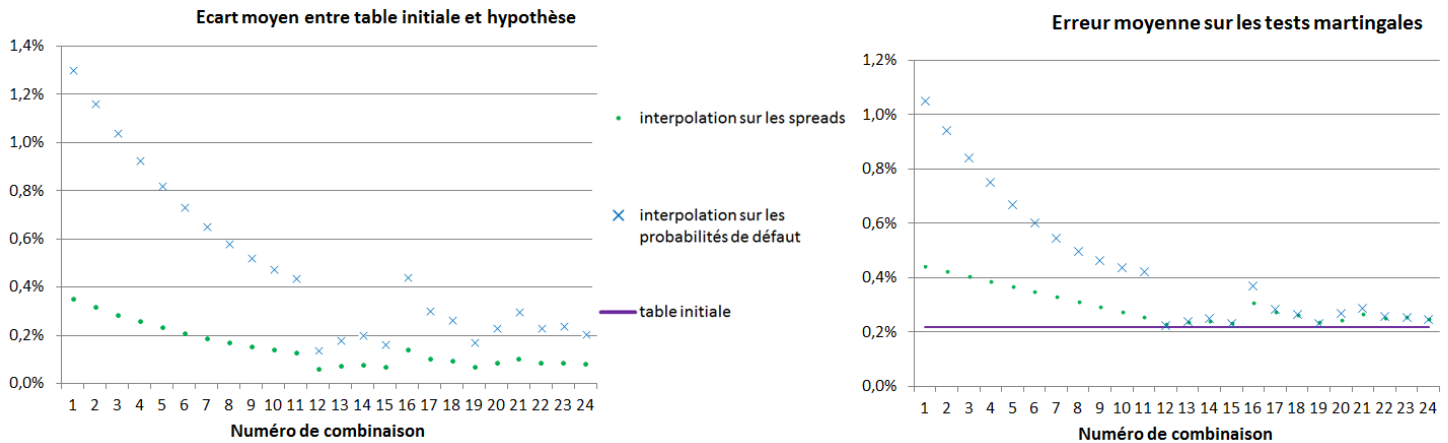


FIGURE 44 – Ecart moyen entre table initiale et hypothèse et erreur moyenne martingale



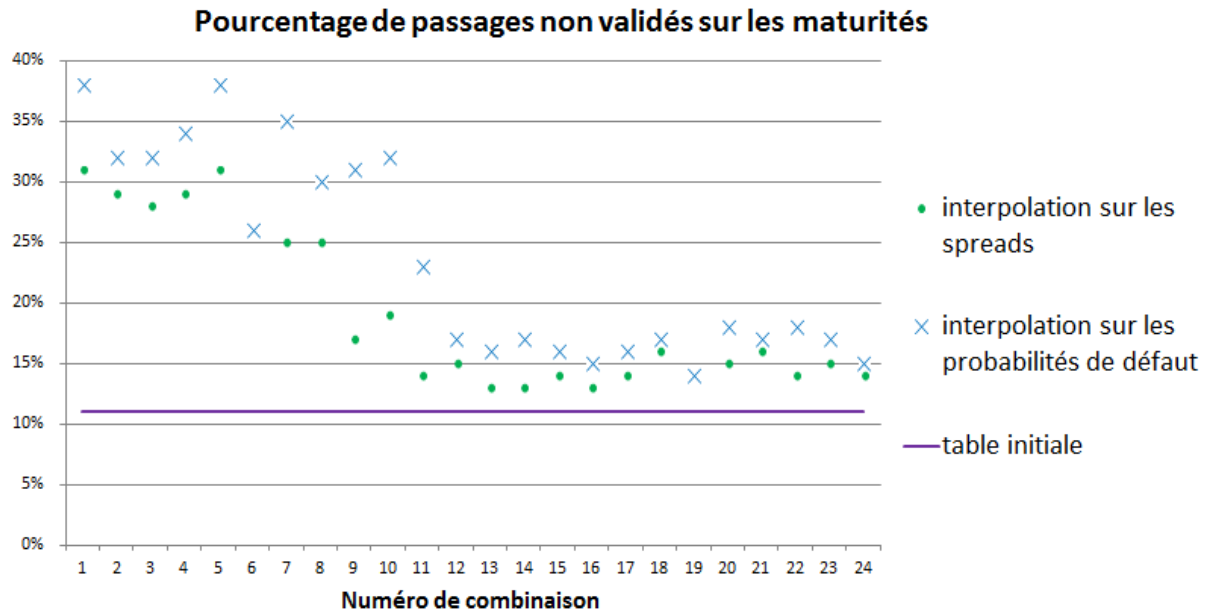


FIGURE 45 – Nombre de passages non validés sur les maturités

On remarque que les résultats sont bien meilleurs lorsque l'on réalise l'interpolation sur les spreads et non les probabilités de défaut.

La méthode d'interpolation finale retenue sera donc une interpolation de spline cubique sur les spreads.

Cependant, au vu des résultats d'erreur moyenne et de passage sur les tests martingales, on observe que bien que certaines combinaisons se rapprochent fortement en terme de résultats de la table initiale, la volatilité des résultats des combinaisons à 4 comme à 5 colonnes reste trop grande.

En effet, le choix d'une combinaison à 4 ou 5 colonnes ne permettra pas une bonne stabilité des résultats de validation de la combinaison retenue suivant les dates d'arrêt.

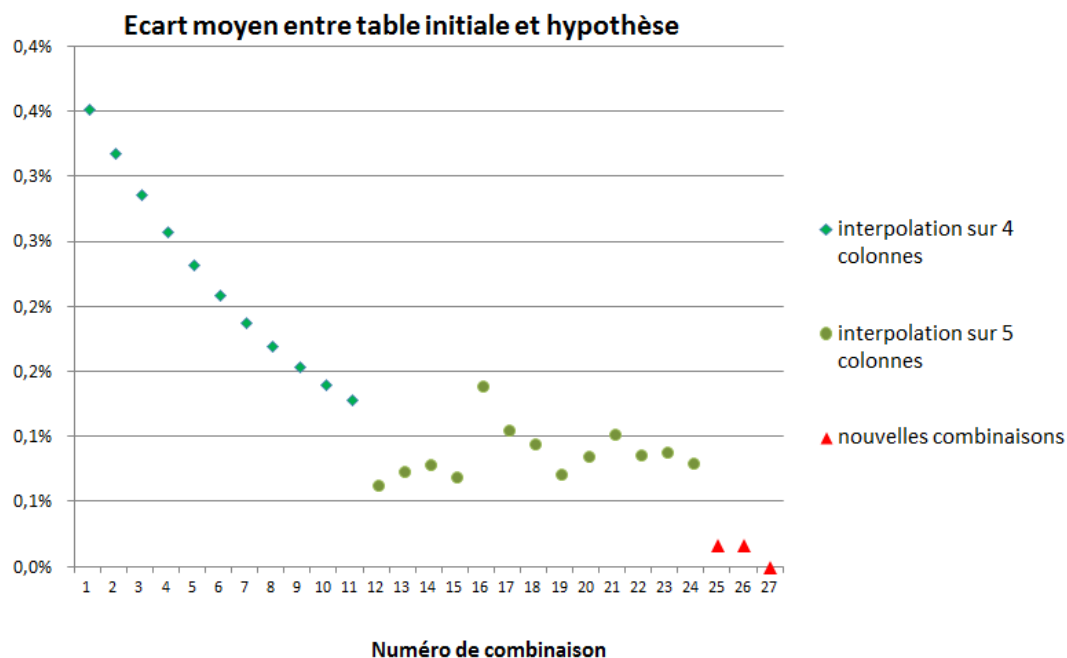
Nous avons donc testé 3 nouvelles combinaisons avec plus de colonnes qui permettraient une meilleure stabilité des résultats sur les tests martingales d'une date d'arrêt à une autre.

### 9.3.4 Choix des maturités gardées

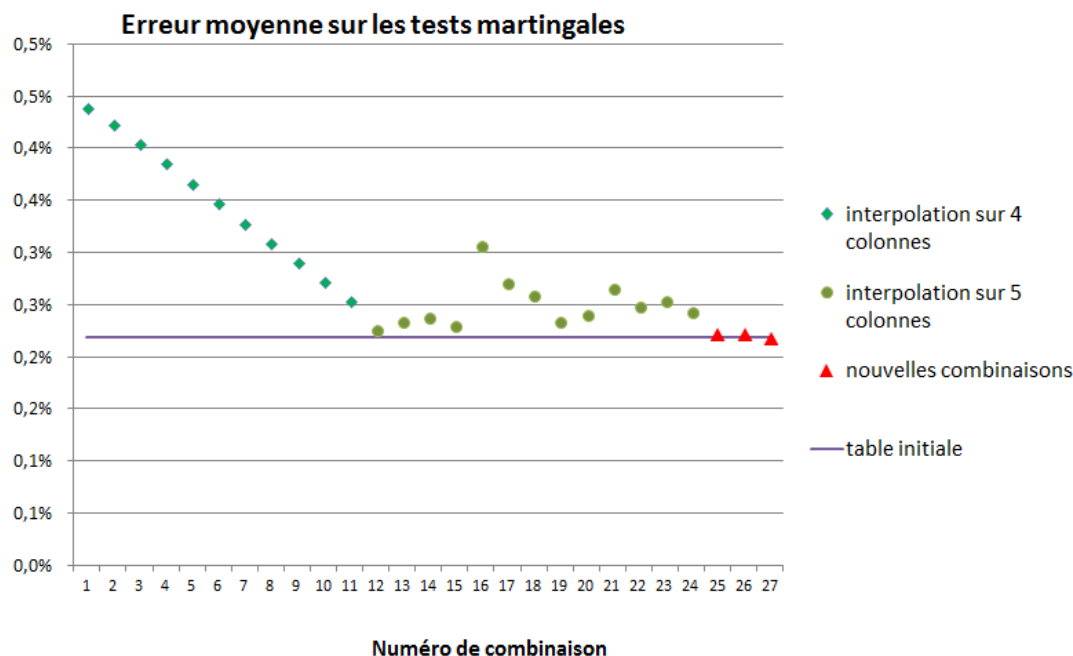
Nous choisissons donc de tester ces 3 nouvelles combinaisons au nombre plus important de colonnes :

- Combinaison 25 : 16 colonnes par rating : 1 mois, 2 mois, 3 mois, 6 mois, 9 mois, 1 an, 2 ans, 3 ans, 4ans, 5ans, 7 ans, 10 ans, 15 ans 20 ans, 25 ans et 30 ans.
- Combinaison 26 : 14 colonnes par rating : 1 mois, 2 mois, 3 mois, 6 mois, 9 mois, 1 an, 2 ans, 3 ans, 4ans, 5ans, 7 ans, 10 ans, 15 ans et 30 ans.
- Combinaison 27 : 11 colonnes par rating : 1 mois, 3 mois, 6 mois, 9 mois, 1 an, 3 ans, 5ans, 7 ans, 10 ans, 15 ans et 30 ans.

Voici les points correspondants à ces 3 nouvelles hypothèses testées rajoutés sur les graphiques de critères de validation :

FIGURE 46 – *Ecart moyen entre table initiale et hypothèse*

L'écart est nettement réduit avec nos nouvelles combinaisons. Il est en effet divisé de plus de 5 par rapport à la moyenne des écarts des combinaisons à 5 colonnes (numéro 12 à 24) pour ces 3 nouvelles combinaisons.

FIGURE 47 – *Erreur moyenne sur les tests martingales*

On remarque que l'erreur moyenne sur les tests martingales converge nettement vers l'erreur moyenne martingale de la table initiale pour ces 3 nouveaux points. L'écart sur l'erreur moyenne martingale entre combinaison et table initiale est réduite de plus de 10 pour ces 3 nouvelles combinaisons.

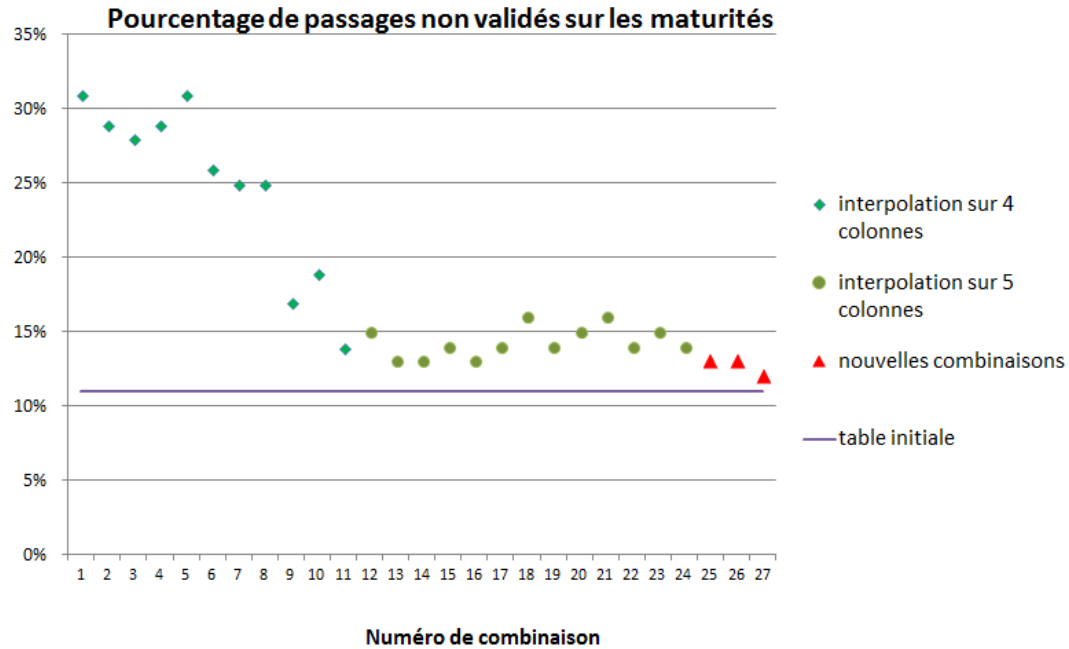


FIGURE 48 – Nombre de passages non validés sur les maturités

Le nombre de passages non validés sur les nouvelles combinaisons est très proche de nombre de passages non validés sur la table initiale.

Ces résultats sur les 3 nouvelles combinaisons nous confortent dans notre choix de prendre plus de colonnes. Les résultats sont plus stables et bien plus proche de la table initiale.

Regardons à présent les résultats pondérés par maturités et rating relatifs à notre portefeuille initial au 31/12/2017 pour faire notre choix parmi les 3 dernières combinaisons.

	Ecart moyen avec la table initiale pondéré	Erreur moyenne sur les tests martingales pondérée	Pourcentage de maturités du portefeuille initial concernées par le rejet
table initiale	0	0,1037%	0,427%
combinaison 25	0,000029%	0,1041%	0,451%
combinaison 26	0,000029%	0,1041%	0,451%
combinaison 27	0,000023%	0,1037%	0,435%

FIGURE 49 – Résultats pondérés par le portefeuille initial

Notre choix final est de garder la combinaison à 11 colonnes par rating. On remarque en effet que les 3 nouvelles combinaisons au nombre plus important de colonnes sont très proches de la table initiale en terme de résultat pondéré relatif à notre portefeuille. On peut donc se permettre de prendre la combinaison qui réduit le plus la taille de notre table de sortie d'ESG, soit la combinaison 25, qui a le moins de colonnes parmi les 3 nouvelles combinaisons.

## 9.4 Le modèle final implémenté

### 9.4.1 Le modèle de crédit

Voici le schéma du modèle de crédit final implémenté après validation par les tests martingales de la combinaison de colonnes retenue :

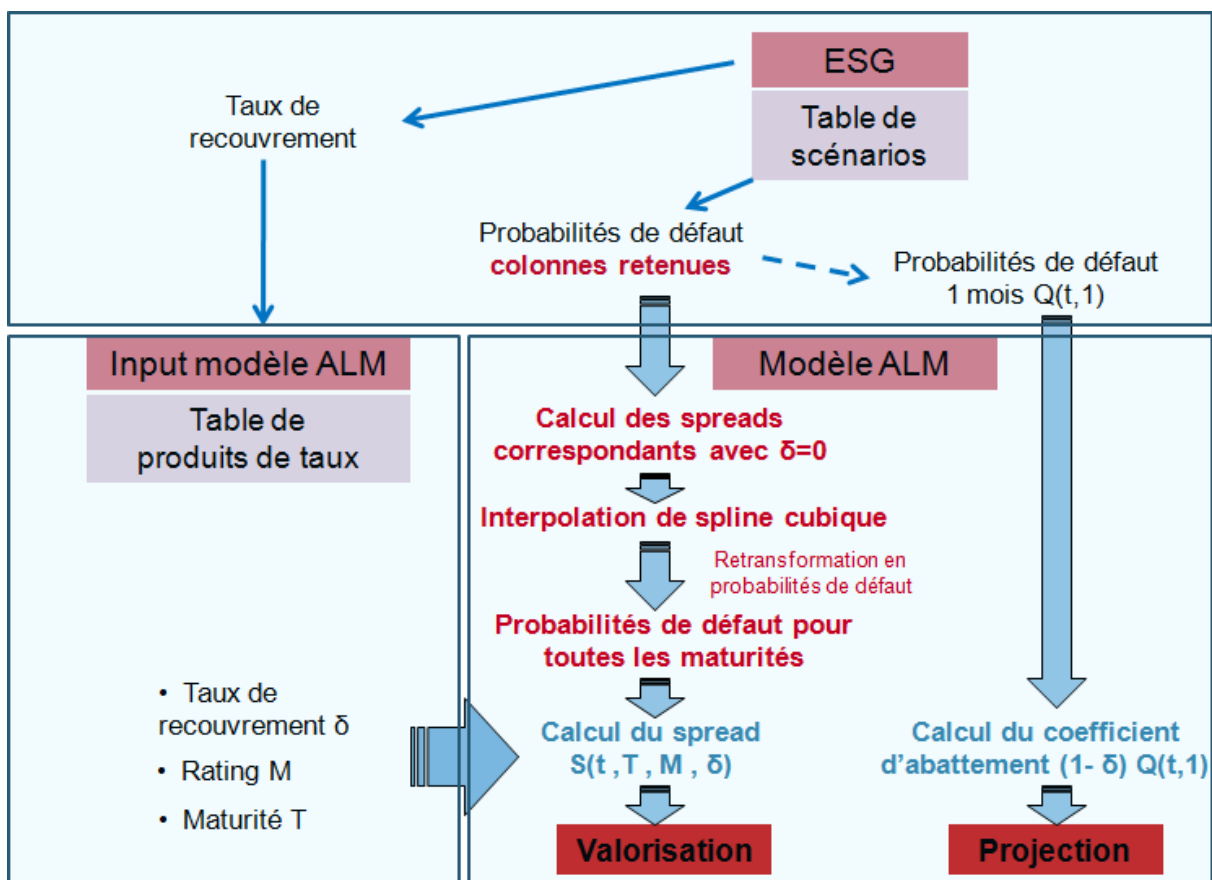


FIGURE 50 – Le modèle implémenté

#### 9.4.2 Les changements dans le calcul du taux concurrentiel

Maintenant que le modèle de crédit en lui-même est implémenté, il reste à vérifier que le modèle n'a pas de conséquence qui nécessite le changements dans d'autres parties du modèle.

Comme vu en première partie, le taux concurrentiel se calcule dans le modèle ALM actuel sans modèle de crédit en fonction du taux long et du taux court issus de la courbe des taux sans risque que nous utilisons dans le modèle pour valoriser notre actif.

Le taux concurrentiel du modèle doit en effet représenter avec cohérence les taux servis par la concurrence. Étant donné que le modèle de crédit implique désormais une valorisation des actifs obligataires du portefeuille avec des spreads, il faut donc inclure ces spreads dans le calcul du taux concurrentiel.

Notre décision a été de se baser sur le spread du rating moyen et de la séniorité moyenne de notre portefeuille : le spread de rating AA et de séniorité 2 ; senior sécurisée.

Ce spread sera donc additionné aux taux utilisé pour le calcul du taux concurrentiel à chaque pas de temps de projection.

### 9.5 Stabilité de la combinaison retenue sur les chiffres S2

Nous avons lancé sur 3 inputs différents la combinaison à 11 colonnes par rating que nous avons retenue sur les critères de tests martingales, ainsi que la table initiale avec toutes les colonnes afin de vérifier qu'il n'y a aucun écart significatif engendré par notre choix de réaliser une interpolation sur des colonnes de la table initiale.

Notons que cette étape est une simple vérification finale. La validation des tests martingales sur les colonnes et la méthode d'interpolation retenue devrait en effet déjà nous assurer quant à la stabilité des chiffres obtenus entre la table initiale et notre interpolation.

Les inputs choisis sont trois inputs qui diffèrent volontairement beaucoup entre eux :

- **Des inputs tests, qui seront les inputs de référence au 31/12/2017 pour toute la réalisation de ce mémoire.** ,
- **Les inputs du scénario de stress A** : Le portefeuille initial est alors la projection déterministe du portefeuille que l'on obtiendrait en 2021 à partir du portefeuille des inputs de référence au 31/12/2017 en supposant un scénario de taux bas sur 3 ans (2018-2021) suivie d'une hausse instantanée des taux à fin 2021.
- **Les inputs du scénario de stress B** : Dans ces inputs, les indices et les taux sont stressés à la baisse.

Les 3 inputs sont différents en terme de portefeuille initial et de donnée de marché. Le scénario de stress A est un scénario aux taux très élevés par rapport au scénario de référence au 31/12/2017 tandis que le scénario de stress B est un scénario aux taux très bas par rapport au scénario de référence au 31/12/2017.

La comparaison des chiffres donnés par ces 3 inputs en y rajoutant le modèle de crédit avec la table initiale et avec l'hypothèse retenue permettra donc de valider le caractère stable, suivant les données de portefeuille et suivant les données de marché, de l'hypothèse retenue.

Voici ce que nous avons obtenu :

	Différence (en millions) sur les chiffres en utilisant la table de spread complète et la table de spread interpolée		
Input	31/12/2017	Scénario de stress A	Scénario de stress B
<b>Marges futures nettes</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>1</b>
Marges futures brutes	4	4	1
Marges futures brutes Euro	-2	3	1
Marges futures brutes UC	5	1	0
SCR	0	0	2
<b>Ratio de couverture SCR</b>	<b>0,0%</b>	<b>0,3%</b>	<b>0,0%</b>

FIGURE 51 – Chiffres S2 sur 3 inputs différents

Les chiffres sont très stables entre table initiale et combinaison retenue, au niveau des ratio SCR comme des marges.

La combinaison à 11 colonnes par rating est donc validée.

Nous rappelons qu'il sera important que les tests martingales soient de nouveau effectués à chaque nouvelle date d'arrêté afin de vérifier la validité de la méthode retenue sur les nouvelles données de probabilités de défaut et de spreads sortis par le générateur de scénarios économiques.

## Quatrième partie

# Impacts et sensibilités

Il est désormais important pour la bonne maîtrise du modèle de crédit d'en comprendre précisément les impacts sur chaque partie du modèle ALM, mais aussi de connaître les répercussions possibles des mouvements de ses paramètres sur nos résultats.

C'est pourquoi nous réalisons dans cette partie une étude détaillée des impacts du modèle de crédit sur la modélisation des actifs obligataires par le modèle ALM puis sur l'algorithme de taux servi. Nous étudions par la suite la sensibilité des résultats réglementaires Solvabilité II aux paramètres du modèle de crédit.

## 10 Les impacts sur la modélisation des actifs obligataires

### 10.1 Impact sur les flux futurs

#### 10.1.1 Risque-neutralisation

Jusqu'ici, la risque-neutralisation avait pour objectif d'annuler le spread afin de retomber sur la valeur de marché initiale des actifs obligataires du portefeuille, calculée à partir du taux sans risque. L'ensemble des flux était abaissé proportionnellement, par le biais de l'abattement du nominal en 0.

Repartons à présent de l'obligation que l'on avait prise comme exemple en partie 4.1 pour expliquer la différence entre traitement actuel et avec modèle de crédit des actifs obligataires.

Pour rappel, les caractéristiques de l'obligation étaient les suivantes :

maturité	7ans
rating	A
séniorité	2- Senior non sécurisée
nominal	100
taux de coupon	3%
valeur de marché	110

FIGURE 52 – obligation exemple

On avait également supposé une courbe des taux initiale plate à 1% .

Supposons en plus de cela cette courbe de spreads initiale pour le rating A et la séniorité 2 :

maturité	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	6 ans	7 ans
spread	0,200%	0,350%	0,390%	0,420%	0,425%	0,428%	0,430%

FIGURE 53 – courbe spreads exemple

Voici comment le modèle ALM avec le modèle de crédit procède avec cette obligation :

Le modèle calcule la valeur de marché "modèle" de l'obligation en 0 à partir de la courbe de taux sans risque initiale et de la courbe des spreads initiale associés au rating A et à la séniorité 2 :

$$VM(0) = \sum_{i=1}^7 \frac{3\% \times 100}{(1 + 1\%)^i (1 + s_{0,i})^i} + \frac{100}{(1 + 1\%)^7 (1 + s_{0,7})^7} = 110,40$$

En actualisant avec la courbe des taux sans risque comme le fait le modèle actuel sans modèle de crédit, on avait un nominal de 113,46. On est donc plus proche de la valeur de marché réelle de notre obligation en calculant sa valeur de marché avec le modèle ALM comprenant le modèle de crédit.

En effet, le modèle de crédit génère des spreads censés représenter au mieux, pour toutes les maturités, les spreads de chaque groupe défini par un rating et une séniorité. On retombe donc forcément plus proche de la valeur de marché réelle en 0 avec le modèle de crédit qu'avec le modèle actuel.

Cependant l'étape de risque-neutralisation reste tout de même obligatoire afin d'être market-consistent, et donc de retomber sur la valeur de marché exacte de chaque obligation en 0

Dans ce cas, le coefficient de risque-neutralisation est donc plus proche de 1 que dans le modèle ALM sans modèle de crédit. Il est en effet de 1,001.

Il s'apparente plus à un coefficient d'ajustement : le modèle de crédit permet d'être au plus proche de la valeur de marché de chaque actif obligataire de chaque groupe défini par un rating et une séniorité lors du calcul de la valeur de marché modèle, puis la risque-neutralisation permet l'ajustement exact à la valeur de marché propre à chaque actif obligataire individuellement au sein de ce groupe.

Afin de voir cet effet sur notre test du modèle de crédit au 31/12/2017, on peut calculer le coefficient de risque-neutralisation global, c'est à dire

$$\frac{\sum VM(0)_{réelles}}{\sum VM(0)_{modèle}}$$

Sur nos résultats obtenus avec nos inputs de référence au 31/12/2017, on obtient un coefficient de risque-neutralisation global égal à **1,00316** avec le modèle de crédit contre **0,97916** sans modèle de crédit.

L'écart avec 1 est alors de 0,00316 pour le modèle ALM avec modèle de crédit contre 0,02084 sans modèle de crédit.

On est donc en effet 10 fois plus proche de la réalité en calculant la valeur de marché de nos actifs obligataires en 0 avec le modèle de crédit que sans.

### 10.1.2 Décalage des flux

Nous allons montrer, à partir de l'égalité des valeurs de marché en 0 avec et sans modèle de crédit, que la risque-neutralisation avec modèle de crédit implique un décalage des flux relatifs aux actifs obligataires, qui vont se retrouver plus importants en début de projection puis moins importants à l'approche de leur maturité par rapport aux flux risque-neutralisés sans modèle de crédit.

$$VM(0)_{\text{avec modèle de crédit}} = VM(0)_{\text{sans modèle de crédit}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^T \frac{C \times 100 \times \alpha_1}{(1 + r_{0,i})^i (1 + s_{0,i})^i} + \frac{100 \times \alpha_1}{(1 + r_{0,T})^T (1 + s_{0,T})^T} = \sum_{i=1}^T \frac{C \times 100 \times \alpha_2}{(1 + r_{0,i})^i} + \frac{100 \times \alpha_2}{(1 + r_{0,T})^T}$$

Avec :

- C le taux de coupon,
- $\alpha_1$  le coefficient de risque-neutralisation du modèle ALM avec modèle crédit (proche de 1),
- $\alpha_2$  le coefficient de risque-neutralisation du modèle ALM sans modèle de crédit

En supposant un taux de recouvrement égale à 0, on a :

$$\frac{1}{(1 + s(0, i))^T} = 1 - Prob_Q(0 \leq \tau \leq i)$$

et donc l'égalité devient :

$$\sum_{i=1}^T \frac{C \times 100 \times \alpha_1 \times (1 - Prob_Q(0 \leq \tau \leq i))}{(1 + r_{0,i})^i} + \frac{100 \times \alpha_1 \times (1 - Prob_Q(0 \leq \tau \leq i))}{(1 + r_{0,T})^T} = \sum_{i=1}^T \frac{C \times 100 \times \alpha_2}{(1 + r_{0,i})^i} + \frac{100 \times \alpha_2}{(1 + r_{0,T})^T}$$

qui équivaut à :

$$\alpha_1 \times \left( \sum_{i=1}^T \frac{C \times (1 - Prob_Q(0 \leq \tau \leq i))}{(1 + r_{0,i})^i} + \frac{(1 - Prob_Q(0 \leq \tau \leq i))}{(1 + r_{0,T})^T} \right) = \alpha_2 \times \left( \sum_{i=1}^T \frac{C}{(1 + r_{0,i})^i} + \frac{1}{(1 + r_{0,T})^T} \right)$$

Si on pose de plus :

$$\frac{1}{(1 + r_{0,i})^T} = D_i$$

le déflateur de maturité  $i$  issu de la courbe initiale,  
on a alors :

$$\sum_{i=1}^T \alpha_1 \times (1 - Prob_Q(0 \leq \tau \leq i)) \times (C \times D_i) + (1 - Prob_Q(0 \leq \tau \leq T)) \times \alpha_1 \times D_T = \sum_{i=1}^T \alpha_2 \times (C \times D_i) + \alpha_2 \times D_T$$

Cependant, comme expliqué précédemment, le modèle de crédit est construit de manière à ce que, par groupe défini par un rating et une séniorité, on retombe exactement sur les valeurs de marché réelles en calculant les valeurs de marché modèle. Le coefficient  $\alpha_1$  se rapproche donc de 1.

En supposant le modèle parfait, on pose  $\alpha_1 = 1$ .

On aurait alors l'égalité :

$$\sum_{i=1}^T (1 - Prob_Q(0 \leq \tau \leq i)) \times (C \times D_i) + (1 - Prob_Q(0 \leq \tau \leq T)) \times D_T = \sum_{i=1}^T \alpha_2 \times (C \times D_i) + \alpha_2 \times D_T \quad (*)$$

Il apparaît alors clairement que le rôle du coefficient de risque-neutralisation  $\alpha_2$  du modèle ALM sans modèle de crédit est de prendre en compte le défaut implicite compris dans la valeur de marché réelle de nos actifs obligataires de manière constante dans le temps.

Désormais, avec le modèle de crédit, les flux sont abaissés au fur et à mesure du temps de projection : la fonction qui à  $i$ , la maturité, associe  $(1 - Prob_Q(0 \leq \tau \leq i))$ , la probabilité de survie sur le temps  $i$ , est décroissante. C'est cela qui permet de retomber très proche de la valeur de marché réelle des actifs obligataires en calculant leur valeur de marché modèle, et non sur une valeur de marché modèle supérieure à la valeur de marché réelle comme il était le cas sans modèle de crédit.

Voici le graphique résumant la différence de traitement en 0 de notre obligation :

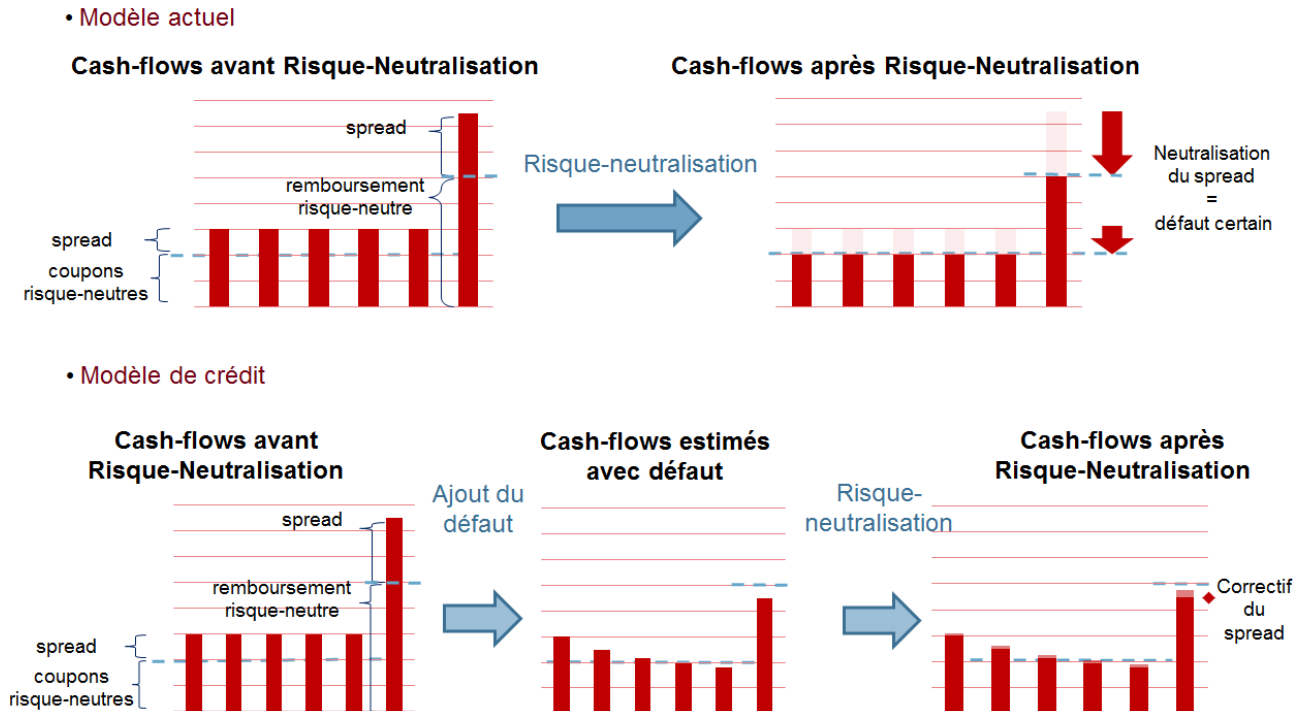


FIGURE 54 – Risque-neutralisation avec le modèle de crédit



On devrait alors observer un décalage des flux relatifs aux actifs obligataires, qui seront plus importants en début de vie des actifs obligataires avec modèle de crédit que sans modèle de crédit. En fin de vie des actifs obligataires, cette tendance s'inversera.

Notons que plus le rating sera dégradé, plus la pente correspondant aux flux avec modèle de crédit observée sera décroissante, puisqu'elle correspond aux  $(1 - Prob_Q(0 \leq \tau \leq i))$  avec  $Prob_Q(0 \leq \tau \leq i)$  croissant suivant la dégradation du rating pour  $i$  fixé.

### 10.1.3 Cas des achats d'actifs obligataires pendant la projection

Prenons l'exemple d'une obligation de nominal 100, de maturité 10 ans et de rating A achetée au pair pendant un scénario de la projection au temps  $t$  :

- Sans modèle de crédit, l'obligation achetée aura un taux de coupon (rendement) égale au taux 10 ans qui vaut pour ce scénario en  $t$ . Ce rendement sera constant jusqu'à maturité de l'obligation.
  - Avec modèle de crédit, l'obligation achetée aura un taux de coupon égale au taux 10 ans qui vaut en  $t$  pour ce scénario, auquel on additionne le spread 10 ans qui vaut en  $t$  pour ce scénario. Elle aura donc un taux de coupon supérieur avec le modèle de crédit.
- Le modèle de défaut va cependant venir abattre le nominal de cette obligation risquée au fur et à mesure de la projection, ce qui va donc venir faire baisser petit à petit les flux relatifs à cette obligation.

Les actifs obligataires achetés durant la projection présenteront donc le même décalage de richesse dans leur flux futurs que celui observé précédemment pour les actifs obligataires du portefeuille.

### 10.1.4 Estimation du point de décalage

Calculons maintenant à quel moment dans la vie de chaque obligation nous observerons le décalage de richesse, c'est-à-dire le moment auquel la pente correspondant aux flux avec modèle de crédit passe en dessous de la droite constante correspondant au flux risque-neutralisés sans modèle de crédit.

Nous supposons que nous sommes au temps 0 par soucis de simplification mais la démonstration est aussi valable au temps  $t$ .

On cherche donc la maturité  $i$  vérifiant :

$$(1 - Prob_Q(0 \leq \tau \leq i)) \times C = \alpha_2 \times C$$

Nous allons à présent faire l'hypothèse que la fonction qui à  $i$  associe  $Prob_Q(0 \leq \tau \leq i)$  est linéaire de coefficient  $\beta$  soit :

$$Prob_Q(0 \leq \tau \leq i) = \beta \times i$$

Alors le point  $i$  recherché vérifie :

$$(1 - \beta \times i) = \alpha_2$$

Et donc :

$$i^* = \frac{1 - \alpha_2}{\beta}$$

En remplaçant l'expression linéaire de la probabilité de défaut dans l'équation (\*) trouvée plus haut, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^T (1 - \beta \times i) \times (C \times D_i) + (1 - \beta \times T) \times D_T &= \sum_{i=1}^T \alpha_2 \times (C \times D_i) + \alpha_2 \times D_T \\ \iff \beta \times \left( \sum_{i=1}^T (i \times C \times D_i) + T \times D_T \right) &= (1 - \alpha_2) \times \left( \sum_{i=1}^T C \times D_i + D_T \right) \\ \iff \frac{1 - \alpha_2}{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^T (i \times C \times D_i) + T \times D_T}{\sum_{i=1}^T C \times D_i + D_T} = i^* \end{aligned}$$

On peut donc supposer que le point de décalage sera environ observé au point de duration de chacun des actifs obligataires.

La duration d'un actif obligataire étant inférieure mais proche de sa maturité, on recevra, avec le modèle de crédit, des flux décroissants supérieurs aux flux certains du modèle ALM sans modèle de crédit sur la

quasi-totalité de la durée de tombée des coupons, suivis de flux inférieurs aux flux certains du modèle ALM sans modèle de crédit sur les derniers coupons reçus et principalement sur le nominal.

Le rating ne devrait pas avoir beaucoup d'impact sur ce point de décalage. Seul le coefficient de la pente correspondant aux flux changera avec le rating : un rating très dégradé engendrera des flux de coupons très supérieurs avec le modèle de crédit suivi d'un remboursement très inférieur.

Notons qu'à partir de l'égalité (\*), on peut écrire :

$$\sum \text{flux futurs avec défaut actualisés} = \sum \text{flux futurs risque-neutres actualisés}$$

Ainsi, si l'actualisation n'avait pas d'impact dans cette égalité, et en supposant que les rachats d'actifs obligataires sont assez dispersés pendant la projection avec modèle de crédit, le rendement total n'en serait pas trop changé, puisqu'à un temps donné, le rendement initial supérieur d'un actif obligataire nouvellement acheté couvrirait en moyenne le défaut d'un autre qui arrive à sa maturité.

Cependant l'actualisation a bien un impact dans cette égalité, et on ne peut donc pas affirmer que le rendement moyen avec modèle de crédit est égal au rendement moyen sans modèle de crédit.

### 10.1.5 Coupons et remboursement

Alors que les flux futurs étaient certains dans le modèle ALM sans modèle de crédit, ils sont désormais stochastiques dans le modèle ALM avec modèle de crédit (de par la stochasticité des probabilités de défaut et spreads). On a en effet 1000 valeurs différentes de probabilités de défaut à chaque pas de temps, ce qui va engendrer de la volatilité dans les flux futurs de chaque actif obligataire de notre portefeuille.

On a donc, en plus du décalage de richesse observé, des flux futurs qui vont former une nappe de volatilité dans le modèle ALM avec modèle de crédit, tandis que ceux-ci sont constants sur les 1000 itérations dans le modèle ALM sans risque de crédit.

Voici en effet ce que l'on obtient en traçant les coupons tombés durant la projection du modèle pour une obligation émise au pair de notre portefeuille initial de maturité 15 ans, de nominal 14 700 000, de rating BB et de taux de coupon égal à 3% :

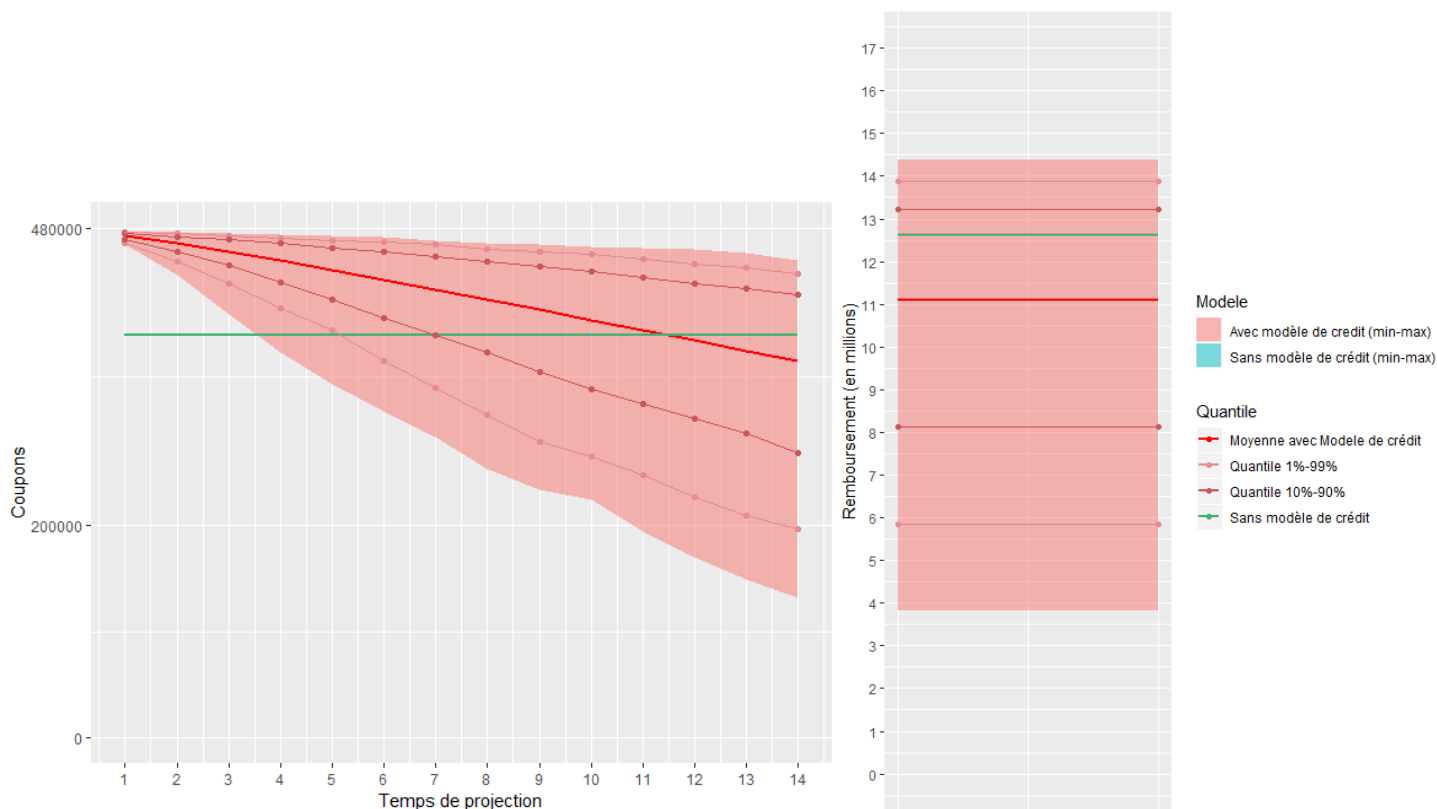


FIGURE 55 – Coupons et remboursement d'une obligation de rating BB de notre portefeuille avec et sans modèle de crédit

En calculant la durée de cette obligation, nous trouvons 12 ans. Cela correspond en effet à peu près au point d'intersection des droites rouges et vertes correspondant respectivement aux coupons avec modèle de crédit et sans modèle de crédit.

Le remboursement moyen avec modèle de crédit est comme prévu bien inférieur au remboursement prévu sans modèle de crédit.

Afin d'observer l'impact sur les flux de la volatilité des probabilités de défaut observée sur les nappes de spreads présentées en partie 3, nous avons relancé la même simulation en donnant les ratings extrêmes pour l'obligation : AAA et CCC.

Voici le résultat obtenu en donnant le rating AAA à notre obligation :

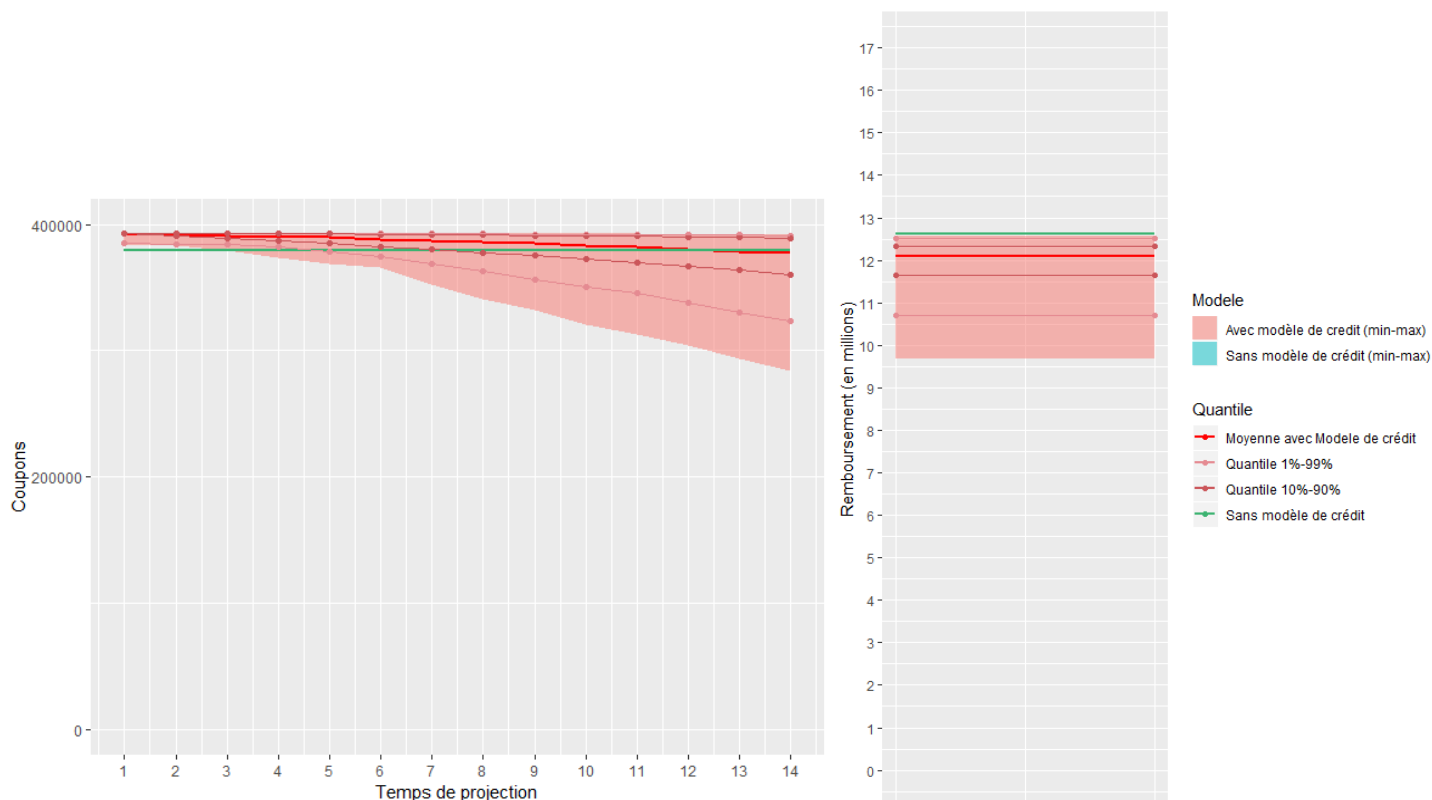


FIGURE 56 – Coupons et remboursement d'une obligation de rating AAA de notre portefeuille avec et sans modèle de crédit

La nappe de flux avec modèle de crédit est beaucoup moins étendue avec le rating AAA qu'avec le rating BB. L'intersection des courbes rouge et verte se fait toujours vers le même point (la durée) mais la pente de la courbe rouge correspondant aux flux avec modèle de crédit est beaucoup moins importante (presque plate) que la pente observée pour le rating BB du cas précédent.

Voici le résultat obtenu en donnant le rating CCC à notre obligation :

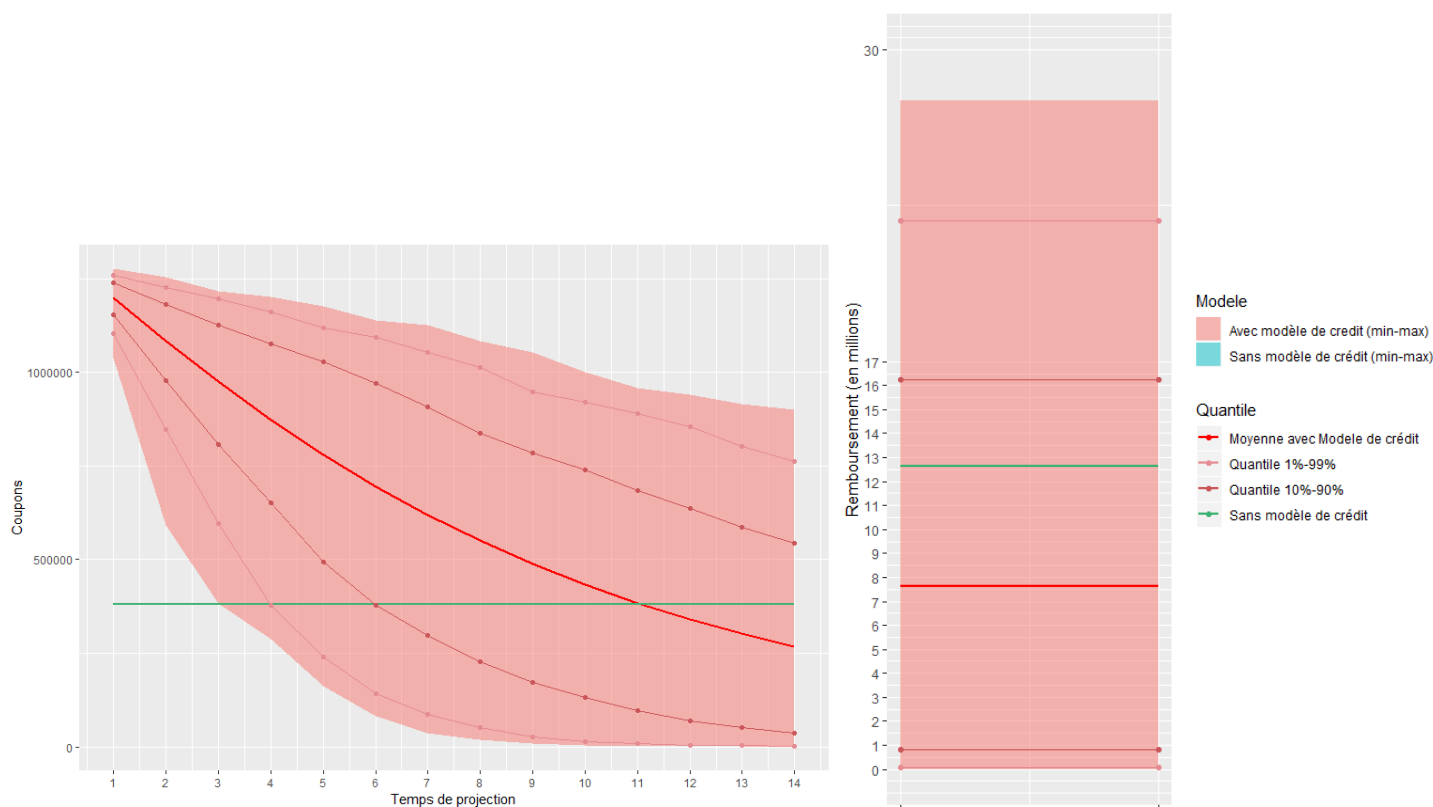


FIGURE 57 – Coupons et remboursement d’une obligation de rating CCC de notre portefeuille avec et sans modèle de crédit

La nappe de flux avec modèle de crédit est ici beaucoup plus étendue avec le rating CCC qu’avec le rating BB. L’intersection des courbes rouge et verte se fait un peu avant la durée de l’obligation du fait de la courbure de la courbe rouge. La pente de cette dernière est d’ailleurs beaucoup plus importante que les pentes relatives aux autres ratings. Le remboursement moyen avec modèle de crédit est très en-dessous du remboursement prévu sans modèle de crédit.

La projection des flux de nos obligations avec notre modèle ALM comprenant le modèle de crédit correspond donc bien à ce qui était attendu au vu des sorties du générateur de scénarios économiques. Elle correspond également aux attentes de la commission européenne concernant la prise en compte de la volatilité des flux futurs induite par le risque de défaut probable des émetteurs.

## 10.2 Impact sur les valeurs de marché

Tout comme les coupons, les valeurs de marché sont aussi impactées par la stochasticté du modèle de crédit. Sans modèle de crédit les valeurs de marché forment déjà une nappe de volatilité suivant les 1000 itérations de par la stochasticté des taux que nous utilisons lors du calcul de la valeur de marché. Cependant cette nappe devait être élargie avec le modèle de crédit car deux volatilités se superposent lors du calcul de la valeur de marché :

- la volatilité des taux
- la volatilité des spreads

Voici en effet ce que l’on obtient en traçant les valeurs de marché actualisées calculées par le modèle durant la projection pour la même obligation qu’utilisée au-dessus pour les coupons et le remboursement, sur les mêmes trois ratings :

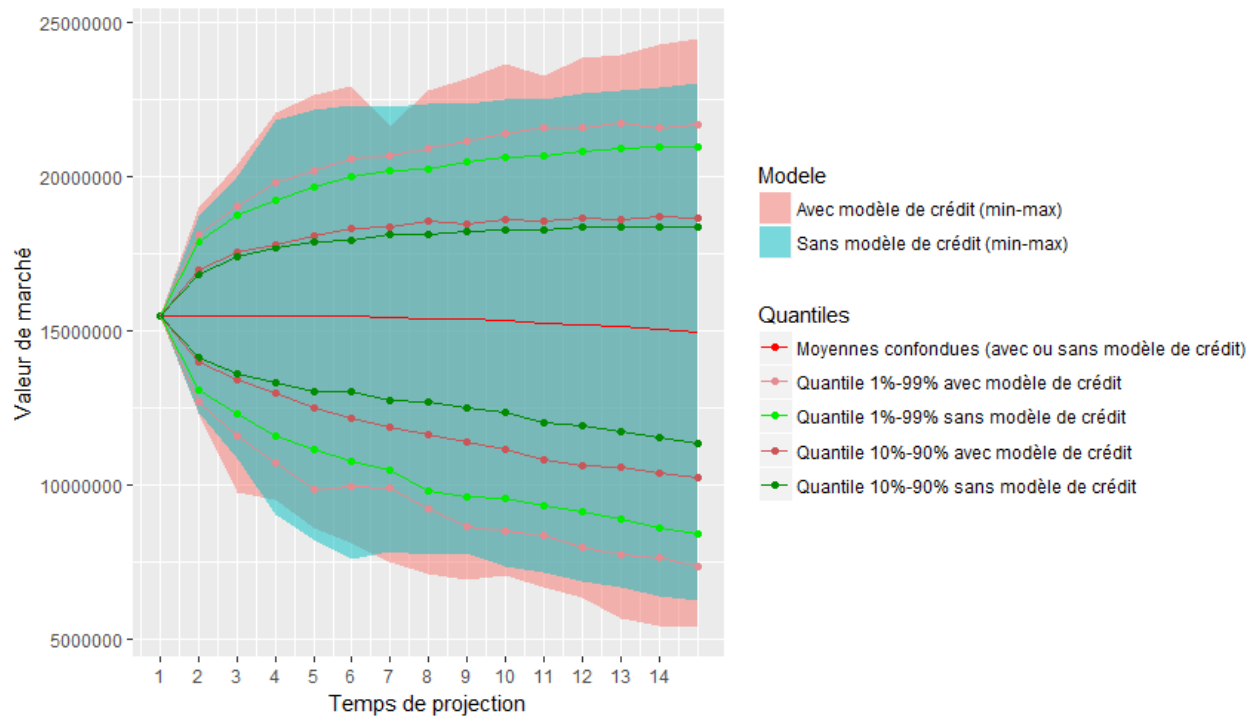


FIGURE 58 – Impact du modèle de crédit sur la nappe de valeur de marché d'une obligation de rating BB

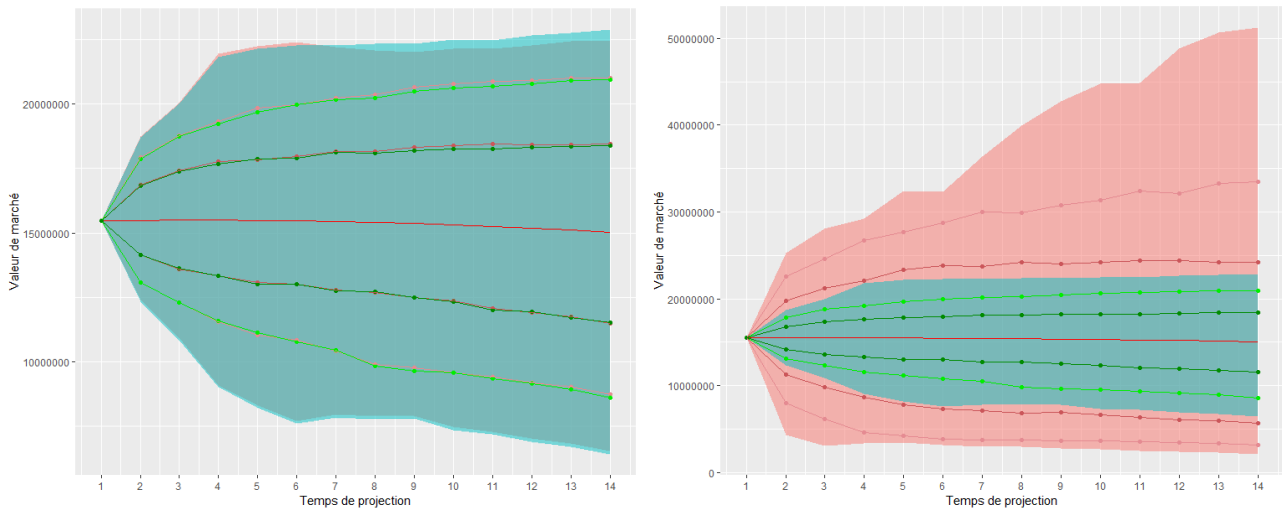


FIGURE 59 – Impact du modèle de crédit sur la nappe de valeur de marché d'une obligation de rating AAA (à gauche) et CCC(à droite)

Le même effet que sur les flux est observé, c'est à dire un accroissement de la nappe correspondant aux valeurs de marché actualisées avec la dégradation du rating. La nappe du rating AAA est même quasiment confondue avec la nappe de valeurs de marché sans modèle de crédit.

## 11 Les impacts sur l'algorithme de taux servi et sur les chiffres Solvabilité II

Nous allons à présent présenter l'impact de la mise en place du modèle de crédit sur les chiffres Solvabilité 2. Les changements dans les flux futurs des actifs obligataires que nous avons observés plus haut, qui concernent la valeur des flux en eux-mêmes ainsi que leur répartition dans le temps, ainsi que l'introduction du spread dans la formule du taux concurrentiel ont des impacts sur l'ensemble de l'algorithme de taux servi et donc sur les marges futures calculées par le modèle ALM.

Afin de comprendre au mieux les impacts de la mise en place du modèle de crédit, nous allons comparer d'abord l'impact du modèle de crédit seul, c'est à dire sans les changements dans la formule du taux concurrentiel, puis l'impact des changements dans la formule du taux concurrentiel (prise en compte des spreads).

Les ordonnées ont volontairement été retirées de tous les graphiques. L'importance de l'analyse réside dans la différence entre les courbes de ces derniers.

### 11.1 Impact sur l'algorithme de taux servi et sur les marges futures

#### 11.1.1 Impact du modèle de crédit seul

Voici le graphique correspondant au taux de rendement comptable moyen sur les 1000 scénarios jusqu'à la 20ème année de projection pour les simulations avec et sans modèle de crédit :

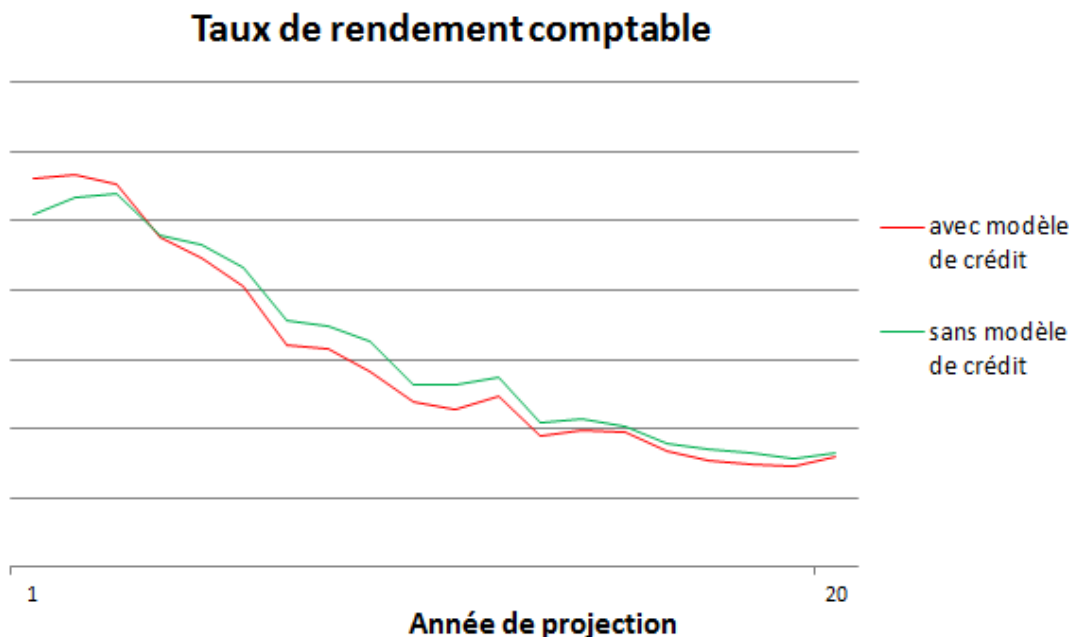


FIGURE 60 – Impact du modèle de crédit sur le taux de rendement comptable

En début de projection, le taux de rendement comptable est en moyenne plus élevé avec modèle de crédit. L'effet inverse est ensuite observé, puis les deux courbes viennent se rapprocher à partir de la 12ème année :

- En début de projection, peu de nouveaux achats d'actifs obligataires ont encore été réalisés : le taux de rendement ne dépend quasiment que du portefeuille initial. La différence positive puis négative entre les courbes de taux de rendement est donc le reflet direct du décalage relatif aux flux futurs du portefeuille initial.
- Au fur et à mesure que la projection avance, des nouveaux actifs obligataires sont achetés, et les flux plus importants des actifs obligataires nouvellement achetés viennent peu à peu couvrir les flux moins importants des actifs obligataires arrivant à maturité. La différence entre les deux courbes de rendement se stabilise donc.

Les graphiques suivants montrent que les impacts de l'ajout du modèle de crédit observés sur le taux de rendement comptable n'ont que peu de conséquence sur le niveau des taux servis.

Les pertes et gains dus à l'ajout du modèle de crédit, observés dans les différences positives ou négatives entre les courbes de rendement comptable, sont lissés par une dotation ou reprise de la réserve PPE plus ou moins importante durant la projection. La PPE est notamment plus dotée en début de projection du fait des flux initiaux plus importants avec modèle de crédit :

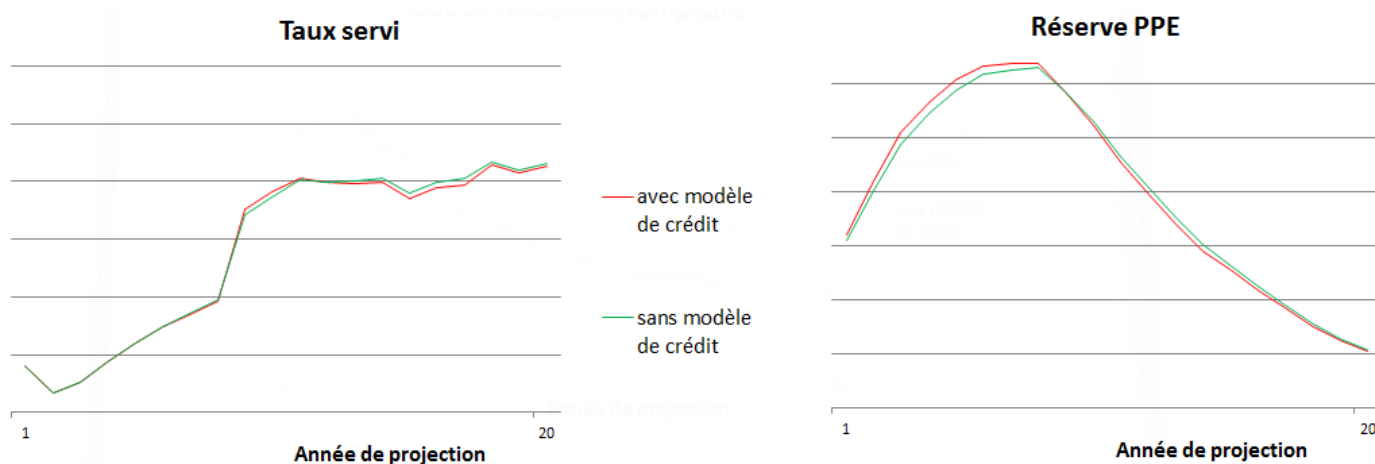


FIGURE 61 – Impact du modèle de crédit sur la réserve PPE et le taux servi

Les taux servis moyens sur les 1000 scénarios étant très proches pour les deux projections, il n'y aura que très peu de conséquences de l'ajout du modèle de crédit sur les comportements moyens des assurés. Voici en effet les courbes de taux de rachats moyens et d'arbitrages moyens Euro vers UC présentés pour les deux simulations sur les 20 premières années de projection :

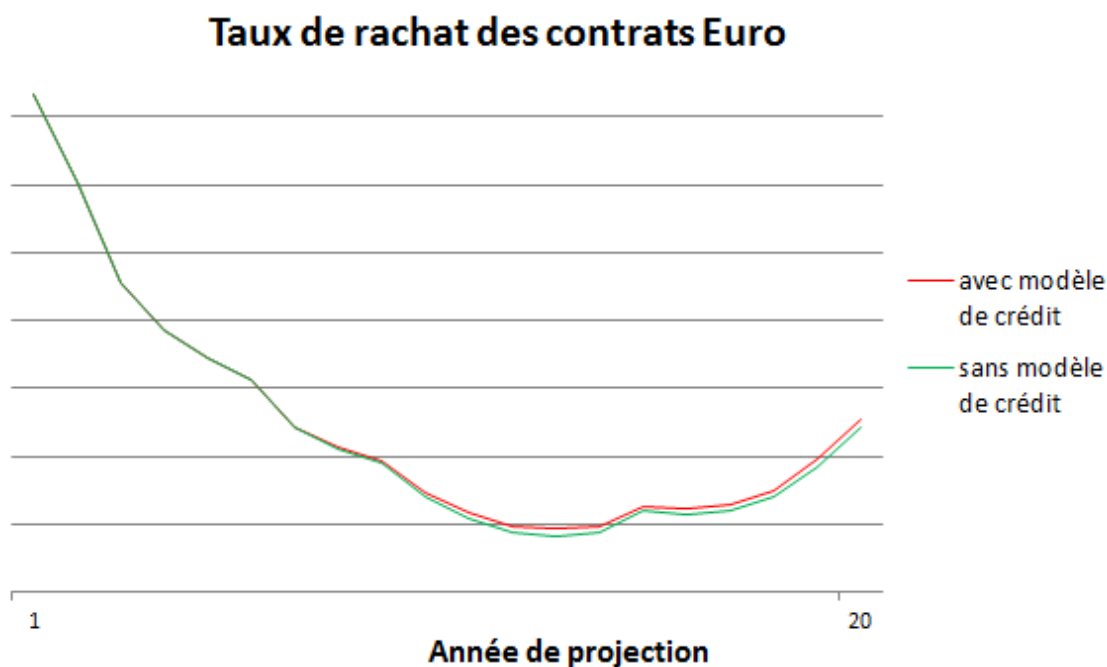


FIGURE 62 – Impact du modèle de crédit sur les taux de rachats des contrats en Euro

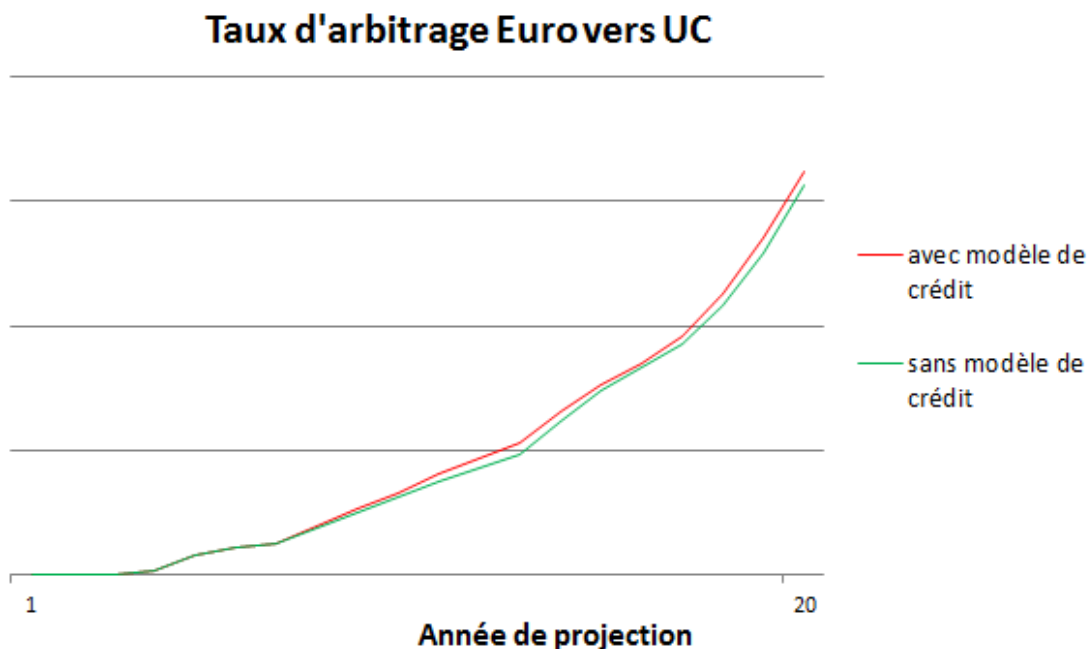


FIGURE 63 – Impact du modèle de crédit sur les taux d'arbitrages Euro vers UC

Les taux de rachats et d'arbitrages avec et sans modèle de crédit sont en moyenne très rapprochés durant la quasi-totalité de la projection.

La proximité des deux courbes de taux de rachats moyens implique que la majorité des pertes que nous observerons sur les marges futures avec l'ajout du modèle de crédit seront dues à la volatilité, sur les 1000 scénarios lancés, des flux futurs relatifs aux actifs obligataires observée précédemment.

#### 11.1.2 Impact de la volatilité du modèle de crédit

Afin de vérifier nos suggestions précédentes concernant les pertes dues à la volatilité des flux futurs induite par le modèle de crédit, nous avons lancé une nouvelle simulation dans laquelle nous avons remplacé, au niveau des probabilités de défaut et des spreads uniquement, les 1000 scénarios stochastiques par 1000 scénarios identiques correspondants au scénario moyen.

Ce changement revient à supposer que les 1000 scénarios stochastiques de probabilités de défaut et spreads se comportent alors comme le scénario moyen : Les taux de rendements moyens, taux servis moyens et taux de rachats moyens observés pendant cette simulation se rapprochent donc des taux observés plus haut, dans la simulation avec le modèle de crédit et sa volatilité.

Le décalage de richesse impliquant des flux plus importants en début de projection est ici certain sur les 1000 scénarios, ce qui peut expliquer des marges futures Euro plus importantes.

Afin de distinguer et de quantifier chacun des effets de la mise en place du modèle de de crédit stochastique, nous avons lancé 3 simulations :

1. Sans modèle de crédit
2. Avec modèle de crédit seul sans sa volatilité (sans modification du taux concurrentiel)
3. Avec modèle de crédit seul (sans modification du taux concurrentiel)

Le tableau ci-dessous présente les écarts sur les chiffres entre les simulations 1 et 2, 2 et 3 puis 1 et 3 :



Différence (en millions) sur les chiffres			
Input lancé au 31/12/2017			
	Ajout du modèle de crédit seul sans sa volatilité	Ajout de la volatilité du modèle de crédit	Total ajout du modèle de crédit et sa volatilité
<b>Marges futures nettes</b>	<b>+3</b>	<b>-25</b>	<b>-22</b>
Marges futures brutes	+9	-37	-28
Marges futures brutes Euro	+8	-38	-30
Marges futures brutes UC	+1	+1	+2
SCR	+4	+6	+10
<b>Ratio de couverture SCR</b>	<b>+0,0%</b>	<b>-1,4%</b>	<b>-1,4%</b>

FIGURE 64 – Impact du modèle de crédit sur les résultats S2

On observe une hausse de 8 millions des marges brutes Euro avec l'ajout du modèle de crédit sans volatilité due au décalage de flux initial, suivi d'une baisse de 38 millions avec l'ajout de la volatilité dans le modèle de crédit due à la plus grande volatilité des scénarios (voir partie 3.5.2).

L'ajout du modèle de crédit seul a finalement pour impact une baisse de 22 millions de la marge future nette et de 1,4% de points de pourcentage du ratio SCR. Nous expliquerons les résultats sur le SCR plus loin.

### 11.1.3 Impact de la prise en compte des spreads dans la formule de calcul du taux concurrentiel

Voici les graphiques correspondants aux taux servi, taux de rendement comptable, taux de rachats et réserve PPE moyens sur les 1000 scénarios pour les 20 premières années de projection pour les simulations avec et sans prise en compte du spread dans la formule du taux concurrentiel :

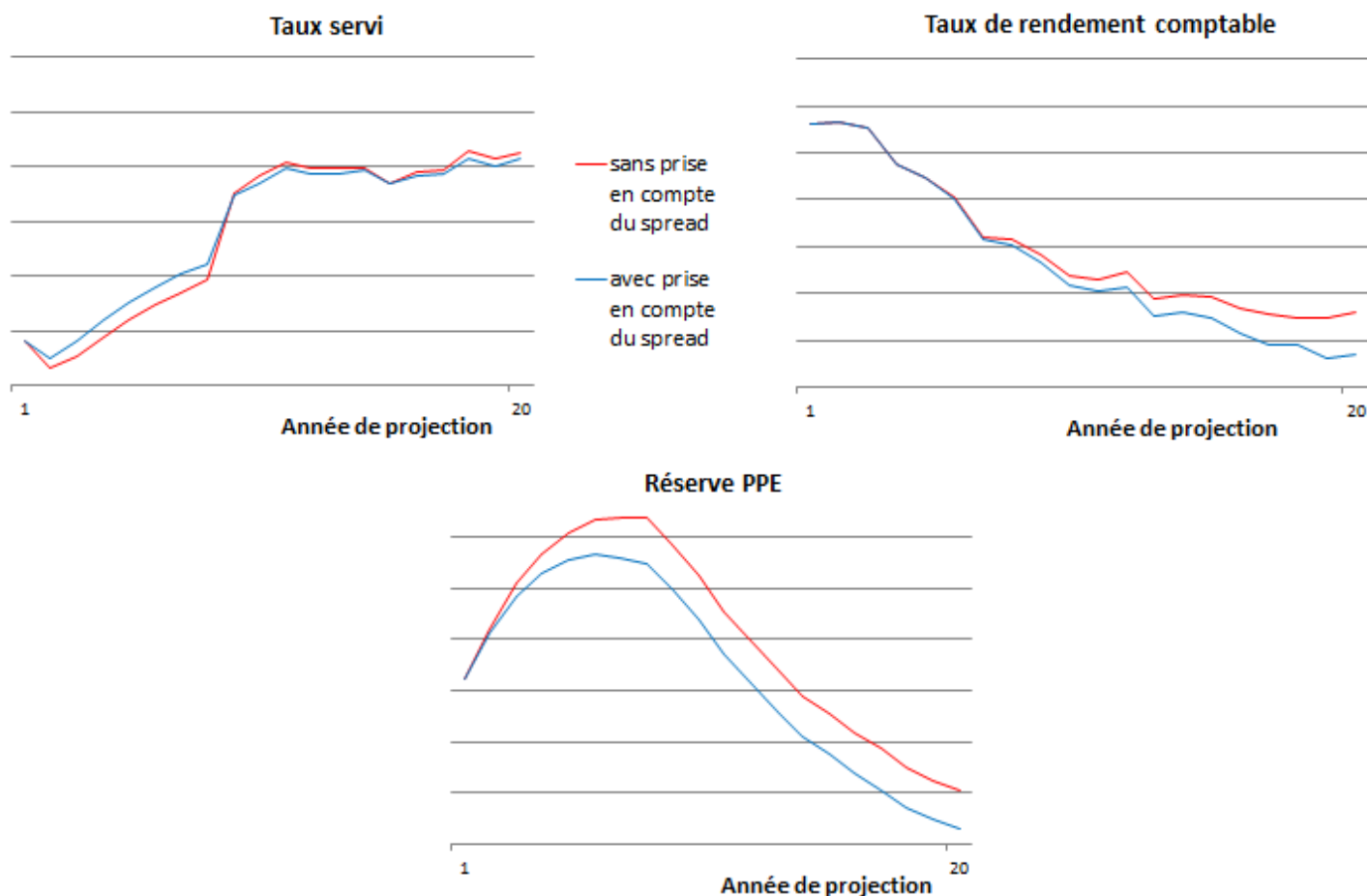


FIGURE 65 – Impact des changements dans la formule du taux concurrentiel sur le taux servi et le taux de rendement

- En début de projection, le taux cible est supérieur avec prise en compte du spread dans la formule de calcul du taux concurrentiel et les taux de rendements sont égaux.  
Dans les 2 projections, le taux de rendement ainsi qu'une reprise de la réserve PPE passée permettent en tous cas une atteinte du taux cible : la réserve PPE est donc dotée, mais moins dotée dans la projection avec prise en compte du spread que sans prise en compte du spread, car les bénéfices réalisés sont moins importants.  
Comme le taux servi correspond au taux cible dans les 2 projections, il est donc supérieur avec prise en compte du spread.
- La réserve PPE ayant été moins dotée pendant les premières années de projection avec prise en compte du spread, sa redistribution obligatoire aux assurés au terme des 8 ans de projection permet donc un apport moins important sur le taux servi qu'il l'était sans prise en compte du spread.  
On arrive donc à des niveaux de taux servi égaux pour les 2 projections alors que les taux cibles sont supérieurs avec prise en compte du spread.
- Les assurés sont alors moins satisfaits dans la projection avec prise en compte du spread, ce qui provoque un nombre plus important de rachats et d'arbitrages des contrats en Euro, demandant la vente prématurée des actifs obligataires initialement détenus en portefeuille.  
Ces ventes prématurées conduisent à un taux de rendement plus faible (De nouveaux achats d'actifs obligataires sont réalisés afin d'atteindre l'allocation cible fixée. Hors en environnement de taux bas, les actifs obligataires nouvellement achetés possèdent un rendement moins élevé que les actifs obligataires détenus depuis plusieurs années).

- La réserve PPE étant déjà moins importante, sa reprise ne permet pas de pallier cette baisse de rendement pour maintenir les taux servis, qui deviennent alors inférieurs aux taux servis de la projection avec modèle de crédit seul, entraînant encore d'avantage de rachats et d'arbitrages des contrats en Euro.

Voici en effet les graphiques correspondants aux taux de rachats Euro et aux taux d'arbitrages des contrats Euro vers UC :

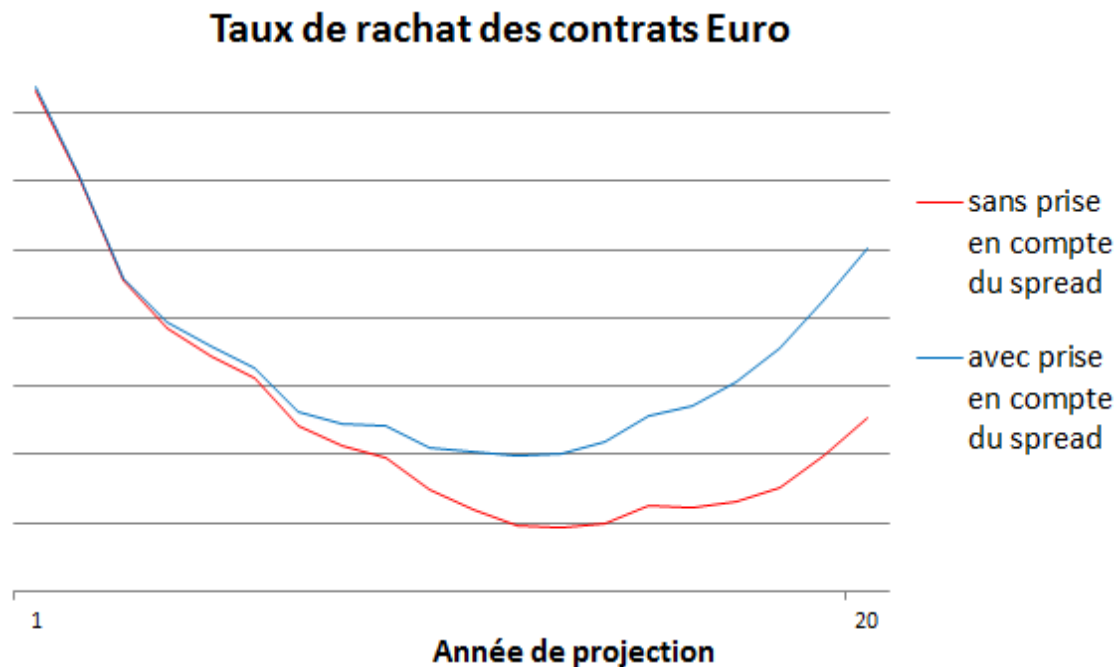


FIGURE 66 – Impact de la prise en compte du spread dans le calcul du taux concurrentiel sur les taux de rachats des contrats en Euro

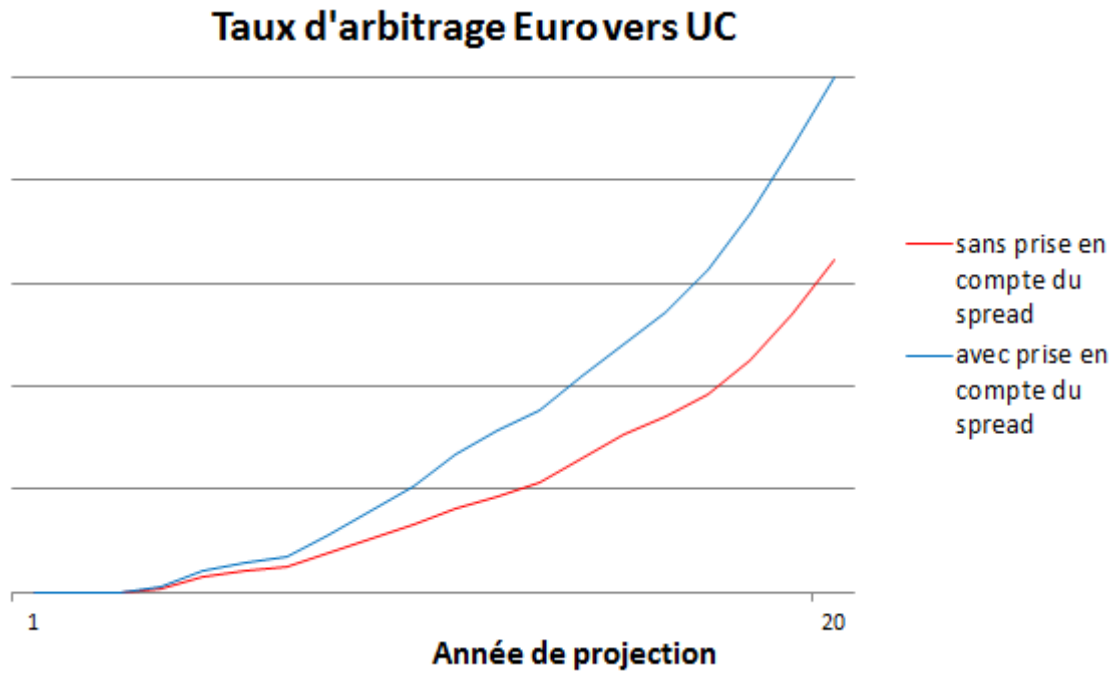


FIGURE 67 – Impact de la prise en compte du spread dans le calcul du taux concurrentiel sur les taux de rachats des contrats en Euro

On peut supposer que la hausse des taux de rachats moyens va entraîner des pertes sur les marges Euro et que la hausse des taux d'arbitrages Euro vers UC entraînera un gain sur les marges UC (les rachats des contrats UC étant stables en parallèle).

Nous avons, pour quantifier l'effet de l'ajout du spread dans le taux concurrentiel, lancé une 4ème simulation :

4. Avec modèle de crédit et ajout du spread dans la formule du taux concurrentiel

Le tableau ci-dessous présente les écarts sur les chiffres entre les simulations 1 et 3 (dernière colonne du tableau précédent résumant les effets de la mise en place du modèle de crédit sans ajout du spread dans le taux concurrentiel), 3 et 4 puis 1 et 4.

C'est donc la dernière colonne de ce tableau qui résume les effets de la mise en place du modèle de crédit dans sa totalité.

Différence (en millions) sur les chiffres			
Input lancé au 31/12/2017			
	Total ajout du modèle de crédit et sa volatilité	Ajout du spread dans le taux concurrentiel	Total modèle de crédit et sa volatilité + spread dans le taux concurrentiel
<b>Marges futures nettes</b>	<b>-22</b>	<b>-108</b>	<b>-130</b>
Marges futures brutes	-28	-160	-188
Marges futures brutes Euro	-30	-186	-216
Marges futures brutes UC	+2	+26	+28
SCR	+10	-4	+6
<b>Ratio de couverture SCR</b>	<b>-1,4%</b>	<b>-3,4%</b>	<b>-4,8%</b>

FIGURE 68 – Impact de la prise en compte du spread dans le calcul du taux concurrentiel sur les résultats S2

On observe, avec la prise en compte du spread dans le calcul du taux concurrentiel, une baisse de 160 millions sur les marges futures brutes totales, résultat d'une baisse de 186 millions sur les marges brutes Euro due à un nombre de rachats de contrats Euro plus importants et d'une hausse de 26 millions des marges brutes UC due à un nombre d'arbitrages des contrats Euro vers UC plus important.

Le ratio SCR diminue lui de 3,4% de points de pourcentage avec la prise en compte du spread dans le calcul du taux concurrentiel.

L'ajout du modèle de crédit a finalement pour impact total une baisse des marges futures nettes de 130 millions ainsi qu'une baisse du ratio SCR de 4,8% de points de pourcentage.

## 11.2 Impact sur le SCR

Le graphique ci-dessous présente les NAV (Actif en 0 - BE) obtenues pour le scénario central (non choqué) ainsi que pour chaque choc relatif à chaque risque des modules du SCR, pour la projection sans modèle de crédit du 31/12/2017 et pour la projection avec modèle de crédit :

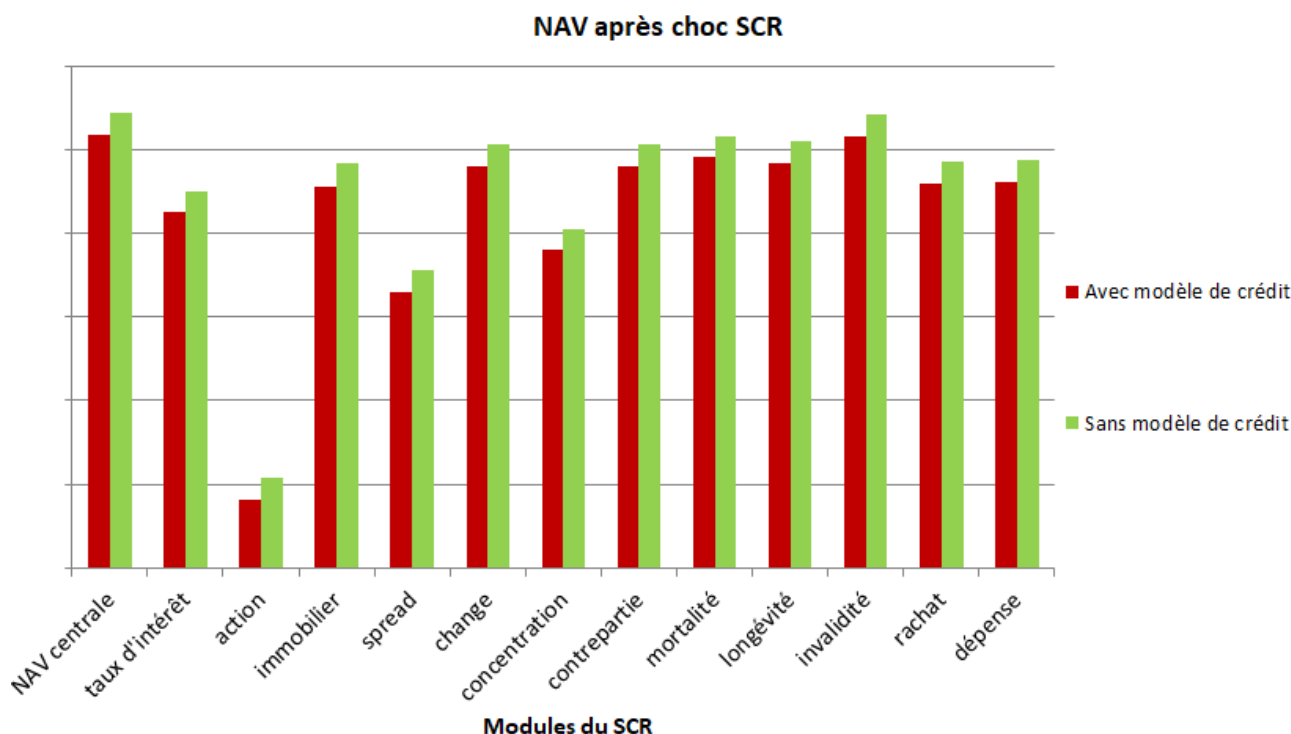


FIGURE 69 – Impact de la prise en compte du modèle de crédit sur le SCR

On remarque que la perte de marge engendrée par l'ajout du modèle de crédit sur le scénario central se retrouve sur les scénarios choqués relatifs aux risques des modules du SCR au titre du même montant environ.

L'ajout du modèle de crédit n'engendre donc pas plus de pertes sur un scénario choqué qu'il n'en engendre sur le scénario central.

Cela explique que le montant de SCR est resté environ stable avec l'ajout du modèle de crédit.

## 12 Sensibilité des marges futures et du ratio SCR au niveau des taux de recouvrement

Les taux de recouvrement sont des paramètres importants du modèle de crédit car ils déterminent le montant récupéré en cas de défaut.

Afin de voir l'impact, sur les marges futures et le ratio de SCR, du niveau des taux de recouvrement sur les marges futures, nous avons lancé plusieurs projections de nos inputs en choquant successivement les taux de recouvrement de 75%, 50%, 25% et 0%.

Le taux de recouvrement moyen du portefeuille initial est de 0,34%.

Voici les résultats que nous avons obtenus en regardant l'évolution des marges totales puis des marges Euro et UC séparément en fonction du niveau moyen des taux de recouvrement du portefeuille :

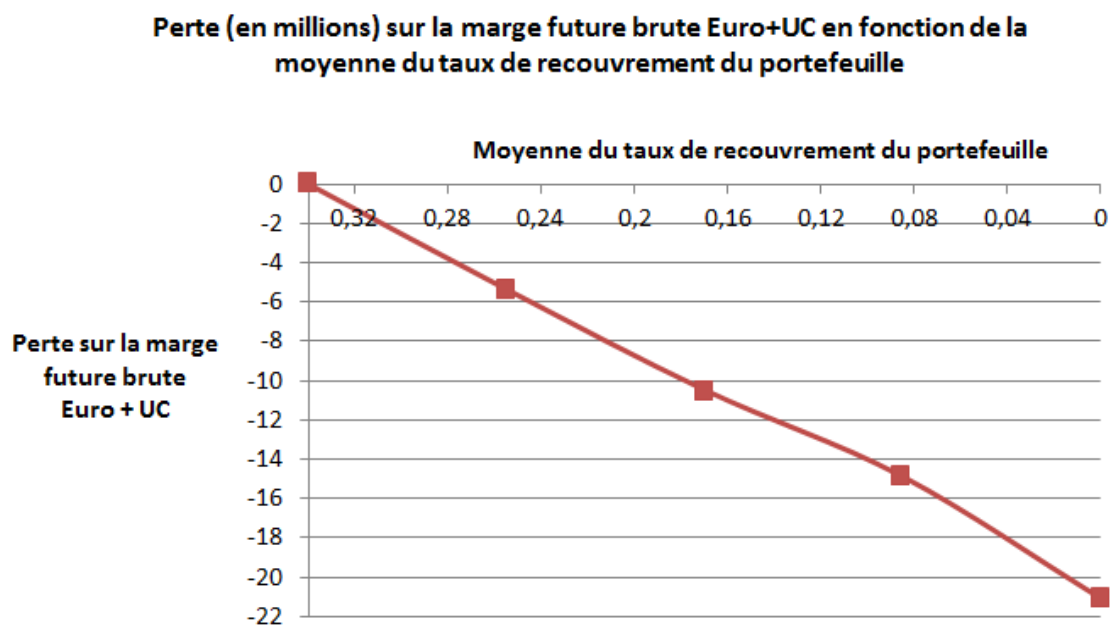


FIGURE 70 – Marge future brute Euro+UC en fonction de la moyenne du taux de recouvrement du portefeuille

La marge future totale (Euro+UC) décroît linéairement avec la baisse du taux de recouvrement. On perdrait en effet près de 21 millions de marge future si l'on ne récupérait aucune partie de nos remboursements.

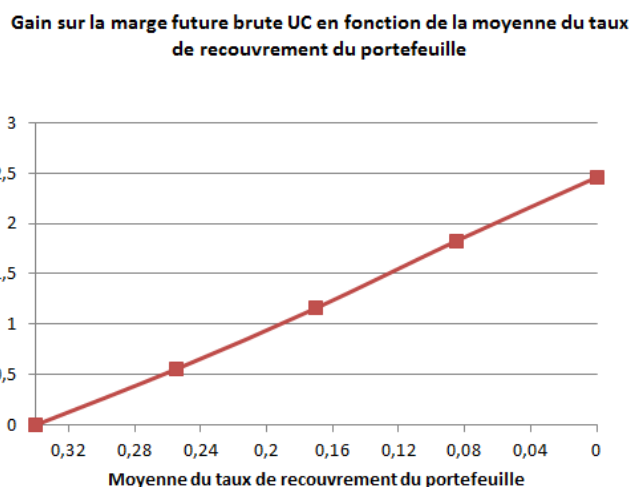
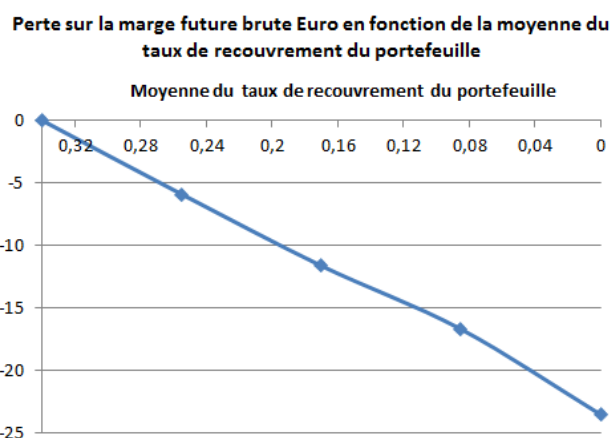


FIGURE 71 – Marge future brute Euro (à gauche) et UC (à droite) en fonction de la moyenne du taux de recouvrement du portefeuille

Au vu des marges Euro et UC séparément, on voit que c'est une baisse de la marge Euro qui engendre la baisse de la marge totale. On perdrait en effet 24 millions de marges Euro si l'on ne récupérait aucune partie de nos remboursements, tandis que l'on gagne 3 millions sur les marges UC.

La perte de 21 millions sur la marge totale avec un taux de recouvrement nul engendrerait une perte de 0,6% sur le ratio SCR.

La baisse du taux de recouvrement n'a donc que peu d'impact sur les résultats Solvabilité II.

## 13 Sensibilité des marges futures et du ratio SCR au niveau et à la volatilité du défaut

Afin de voir l'impact du niveau et de la volatilité du défaut (et donc des spreads) relatif à notre portefeuille, nous avons lancé plusieurs projections ne se basant chacune que sur un rating à la fois.

La projection se basant sur le rating A simule par exemple le fait que tous les actifs obligataires initiaux du portefeuille sont de rating A et que les achats d'actifs obligataires réalisés durant la projection se font eux aussi uniquement sur le rating A.

Nous avons fait le choix d'utiliser les nappes de spreads sorties par le générateur de scénarios économiques plutôt que de réaliser des chocs à la main sur les spreads, ce qui aurait dégradé la qualité des tests martingales et donc la pertinence des résultats.

On ne distingue donc pas niveau et volatilité du défaut, car les deux sont croissants avec la dégradation de rating.

Les projections ont été lancées en utilisant les nappes des ratings AAA, AA, A, BBB et BB, en distinguant de nouveau les effets du modèle de crédit seul et modèle de crédit de ceux du modèle avec prise en compte du spread dans le taux concurrentiel.

### 13.1 Impact de la dégradation de rating sur l'algorithme de taux servi

#### 13.1.1 Modèle de crédit seul

Voici ce que l'on obtient en traçant les taux de rendements comptables moyens des projections utilisant chaque nappe de chaque rating séparément lorsque le modèle de crédit seul est activé :

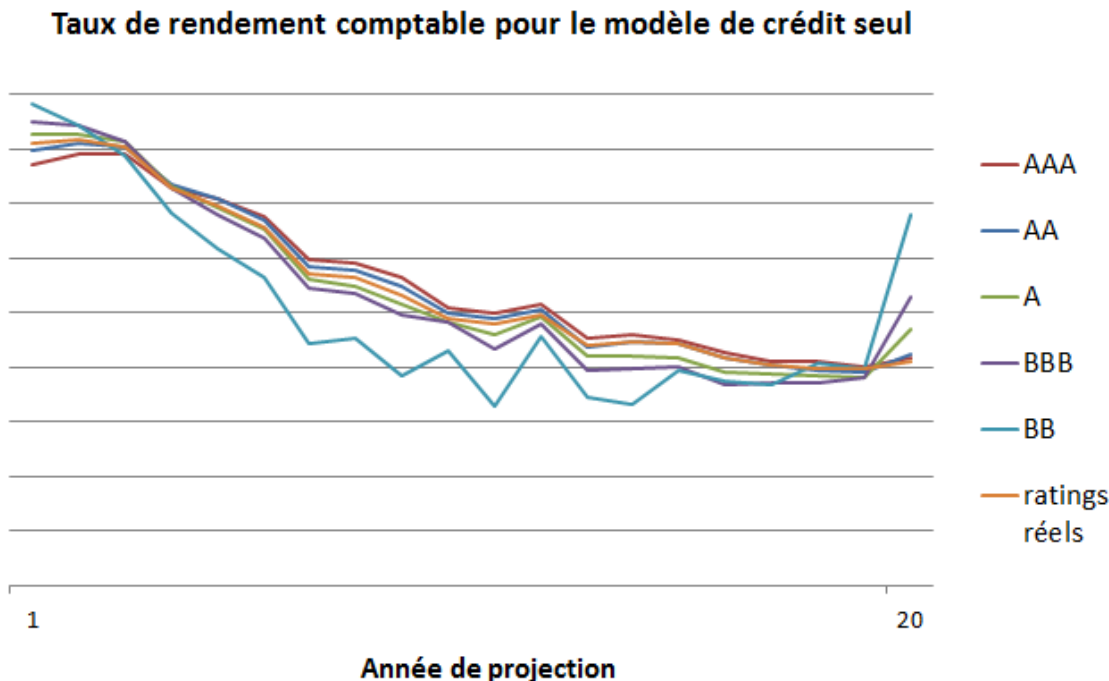


FIGURE 72 – Impact d'une dégradation de rating sur le taux de rendement comptable

En début de projection, la pente de taux de rendement, reflet du décalage de flux du portefeuille initial, est comme prévu décroissante avec la dégradation de rating. Le défaut sur le portefeuille initial a notamment beaucoup d'impact lorsque le rating est BB.

On remarque également un pic de rendement plus important avec la dégradation de rating au niveau de la 20ème année : Cela correspond à l'arrivée à maturité des achats de nouveaux actifs obligataires effectués au moment d'une hausse des taux de rachats de contrats Euro afin de conserver l'allocation d'actifs cible.

En effet, un pic, même petit, de taux de rachats de contrats qui survient tôt dans la projection concerne



### 13. SENSIBILITÉ DES MARGES FUTURES ET DU RATIO SCR AU NIVEAU ET À LA VOLATILITÉ DU DÉFAUT

un montant important de PM. Le montant d'achat de nouveaux actifs obligataires engendré par ces rachats de contrats sera donc également important, et leur remboursement conduira alors à un taux de rendement plus élevé, d'autant plus qu'il arrivera à un moment de la projection postérieur, où la PM aura donc encore diminué.

On suppose qu'une hausse de taux de rachats arrive donc autour de la 11ème année de projection, étant donné que la moyenne des maturités prévue pour les rachats est de 9 ans.

Regardons les graphiques des taux de rachats, taux servis et réserve PPE moyens correspondants à ces projections :

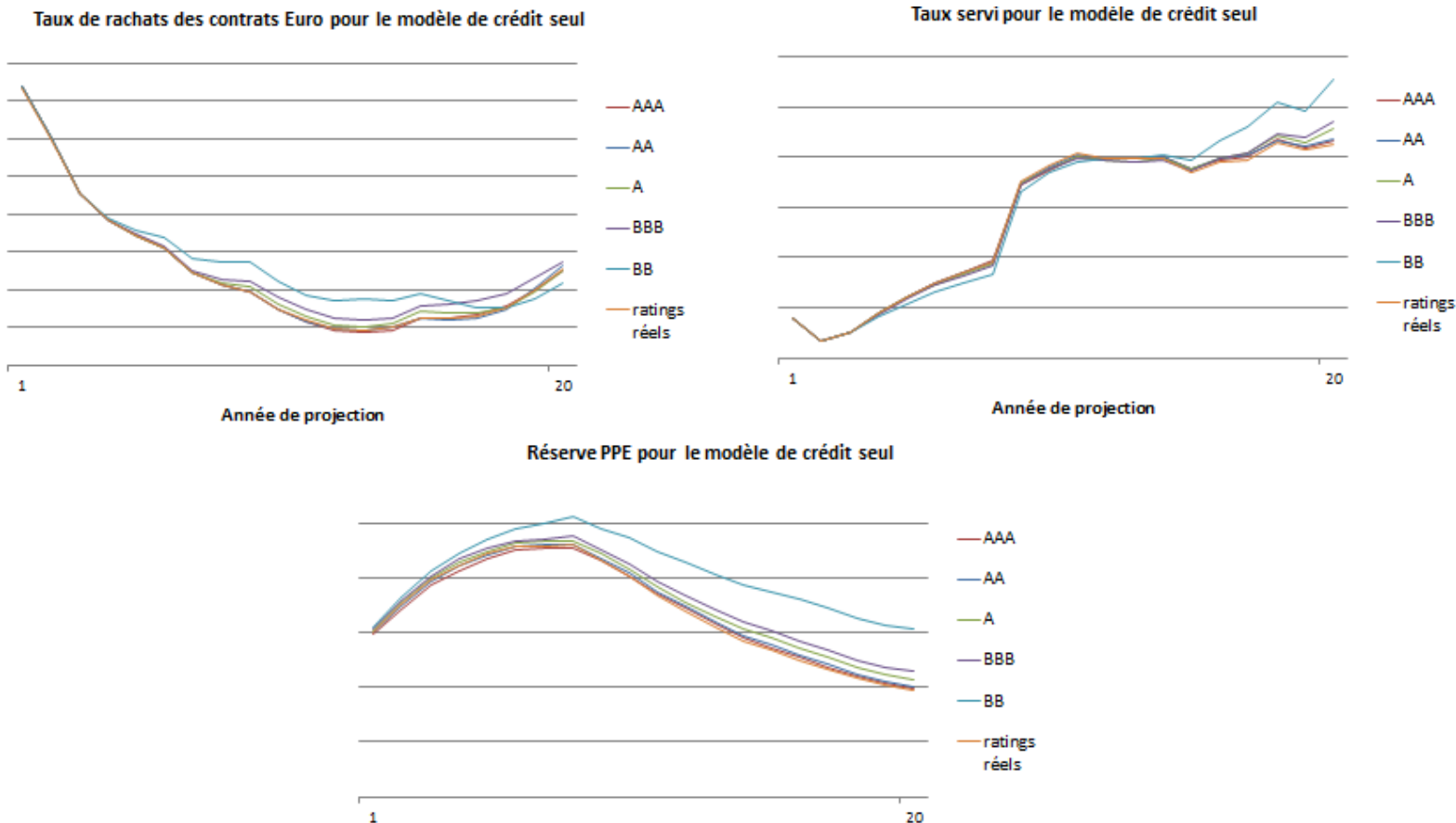


FIGURE 73 – Impact d'une dégradation de rating sur le taux de rachat, le taux servi et la réserve PPE

On observe bien un pic de taux de rachats croissant avec la dégradation de rating à la 9ème année de projection.

Cela s'explique par le fait que le taux servi n'arrive pas à être maintenu en début de projection à cause du défaut des actifs obligataires de mauvais rating détenus en portefeuille, et ce malgré la reprise de la réserve PPE des années passées.

Cependant, la réserve PPE accumulée sur les toutes premières années de projection grâce au décalage de flux initial est reversée aux assurés à partir de la 8ème année et va permettre une croissance du taux servi d'avantage importante que le rating est dégradé : C'est pourquoi les courbes de taux de rachats se comportent de manière inverse sur la 2ème partie de la projection (taux de rachats au plus bas pour le rating BBB et au plus haut pour le rating AAA) qu'en début de projection.

On remarque aussi que les courbes correspondant aux ratings réels du portefeuille initial se rapprochent toutes des courbes du rating AA, qui est le rating moyen de notre portefeuille.

### 13.1.2 Modèle de crédit avec prise en compte du spread dans le taux concurrentiel

Voici ce qu'on obtient en traçant les taux de rendements comptables moyens des projections utilisant chaque nappe de rating lorsque le modèle de crédit et la prise en compte du spread dans le calcul du taux concurrentiel sont activés :

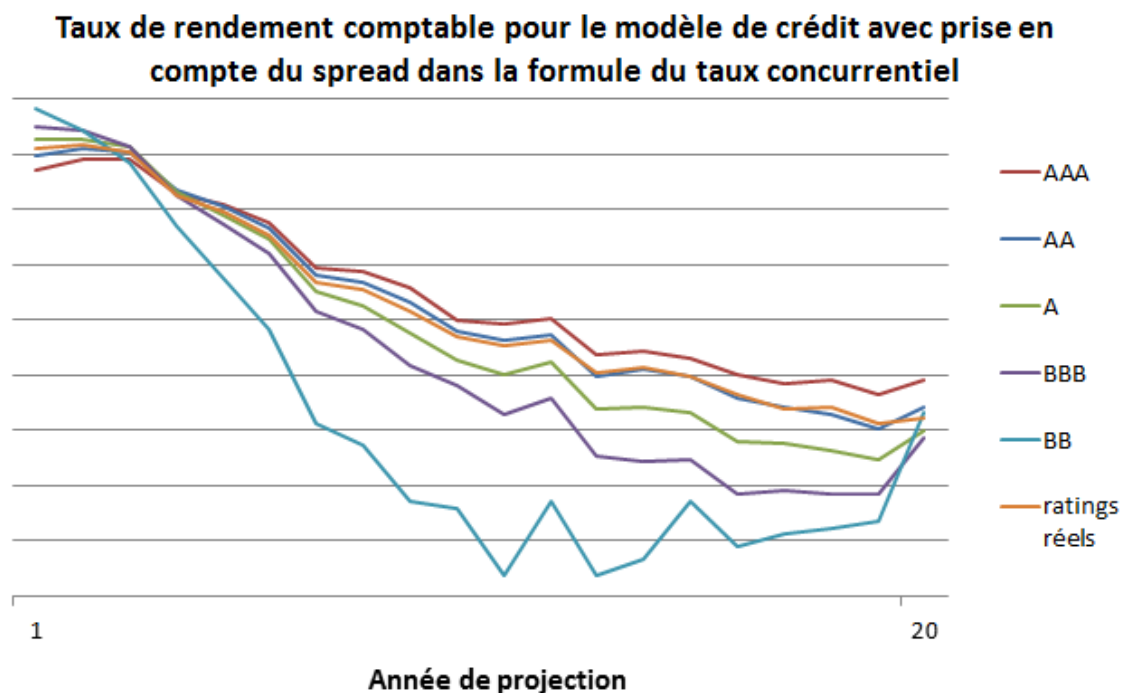


FIGURE 74 – Impact d'une dégradation de rating sur le taux de rendement comptable

Comme observé plus haut sur les courbes de taux de rendement des projections avec modèle de crédit seul et avec modèle de crédit et spread dans le taux concurrentiel, les courbes de taux de rendement de chaque rating avec spread dans le taux concurrentiel correspondent aux courbes de taux de rendement obtenues avec le modèle de crédit seul mais abaissées.

Regardons les graphiques des taux de rachats, taux servis et réserve PPE moyens correspondants à ces projections :

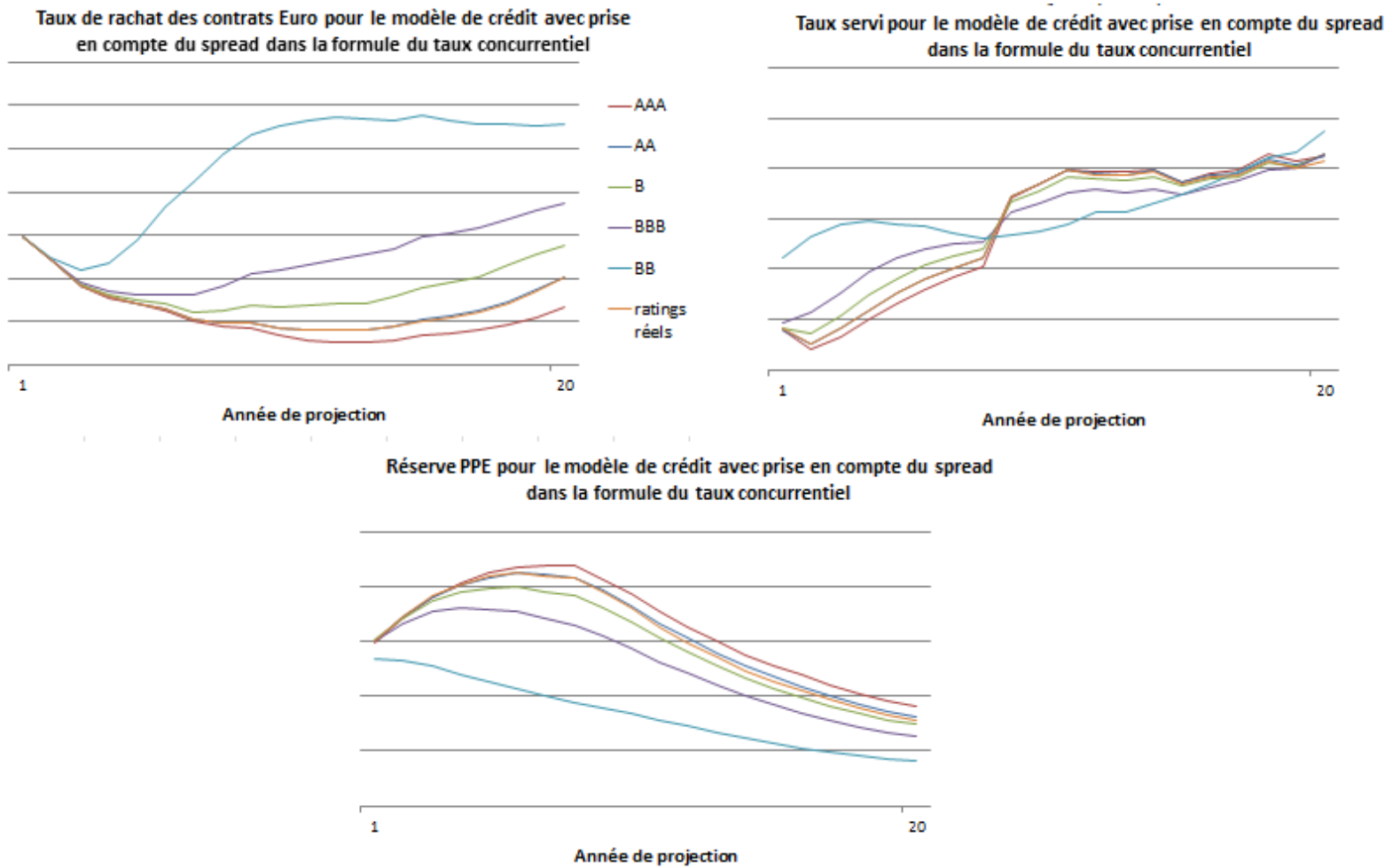


FIGURE 75 – Impact d'une dégradation de rating sur le taux de rachat, le taux servi et la réserve PPE

La raison de l'abaissement des courbes avec prise en compte du spread dans le calcul du taux concurrentiel est la même qu'expliquée précédemment :

Les taux servis n'arrivent pas à suivre les taux concurrentiels toujours plus hauts avec la dégradation de rating, ce qui déclenche des rachats. Les rachats d'actifs obligataires en environnement de taux bas conduisent eux à un taux de rendement comptable plus bas qui ne peut être rattrapé par une réserve PPE trop faiblement dotée durant les premières années de projection pour atteindre le taux cible, ce qui empire encore la situation.

On remarque aussi que les courbes oranges se basant sur les ratings réels se rapprochent toutes des courbes du rating AA, qui est le rating moyen de notre portefeuille.

## 13.2 Impact de la dégradation de rating sur les marges futures et sur le ratio SCR

Nous présentons à présent l'impact de la dégradation de rating sur les marges futures Euro et UC ainsi que sur le ratio SCR en fonction du spread moyen du portefeuille.

Le niveau de spread moyen affiché sur chaque graphique correspond au spread moyen de la nappe de spread projetée par l'ESG pour les ratings AAA, AA, A, BBB, BB et B avec lesquels nous avons lancé successivement nos inputs. Notons que ce niveau de spread moyen représente aussi un niveau de volatilité de plus en plus important avec la dégradation de rating car la distinction entre niveau et volatilité des spreads n'est pas faite. Le graphique suivant représente la volatilité des spreads projetés par le générateur de scénarios économiques en fonction du niveau moyen des spreads projetés :

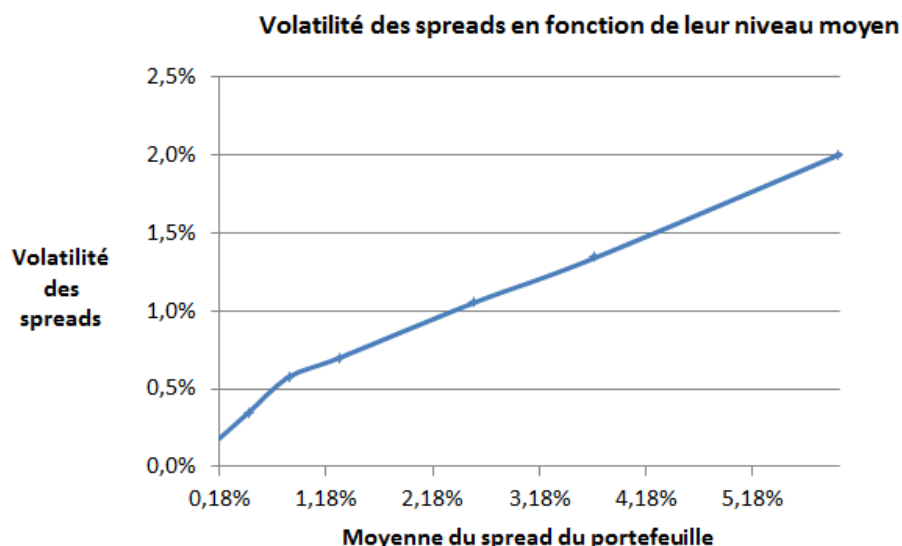


FIGURE 76 – Volatilité des spreads en fonction du niveau de spread moyen

La volatilité est une fonction quasi-linéaire du niveau de spread.

On prendra donc comme repère dans cette partie le niveau moyen du spread du portefeuille, tout en sachant qu'une augmentation de ce dernier implique également une augmentation de la volatilité des spreads projetés.

Le graphique suivant présente les résultats obtenus sur la marge brute totale :

Nous placerons sur chaque graphique par des triangles les résultats obtenus avec les ratings réels.

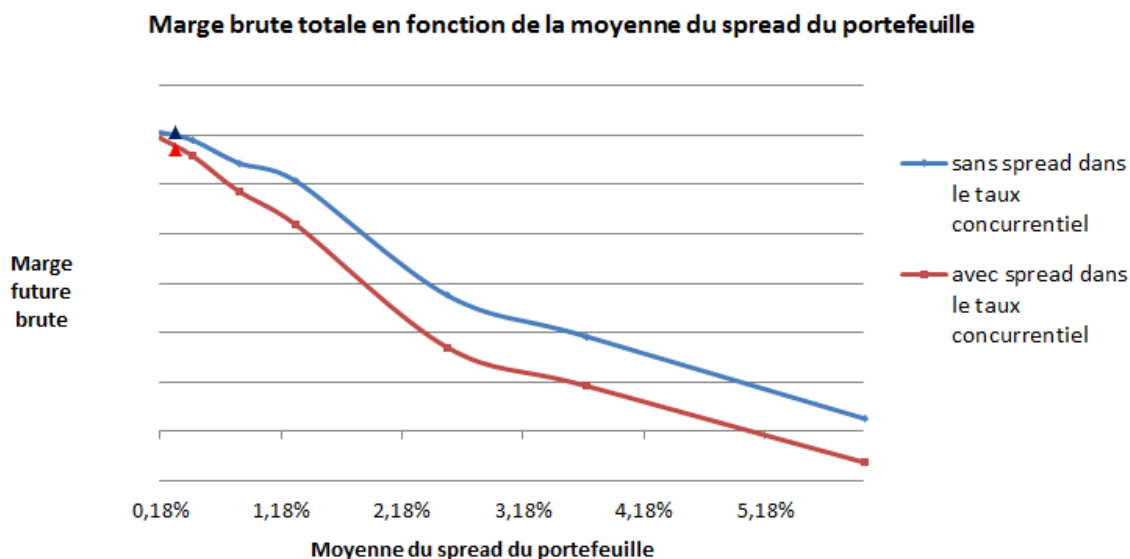


FIGURE 77 – Impact de la dégradation de rating sur les marges futures brutes totales

La marge brute totale décroît avec l'augmentation du spread moyen du portefeuille mais les résultats sont toujours plus dégradés avec la prise en compte du spread dans le taux concurrentiel.

On remarque que nos résultats avec les ratings réels se situent entre les résultats des ratings AA et AA.

Cela s'explique par le fait que le rating moyen du portefeuille initial est AA mais que les rachats se font sur des ratings AAA et AA.

Regardons à présent les résultats sur les marges plus en détails :

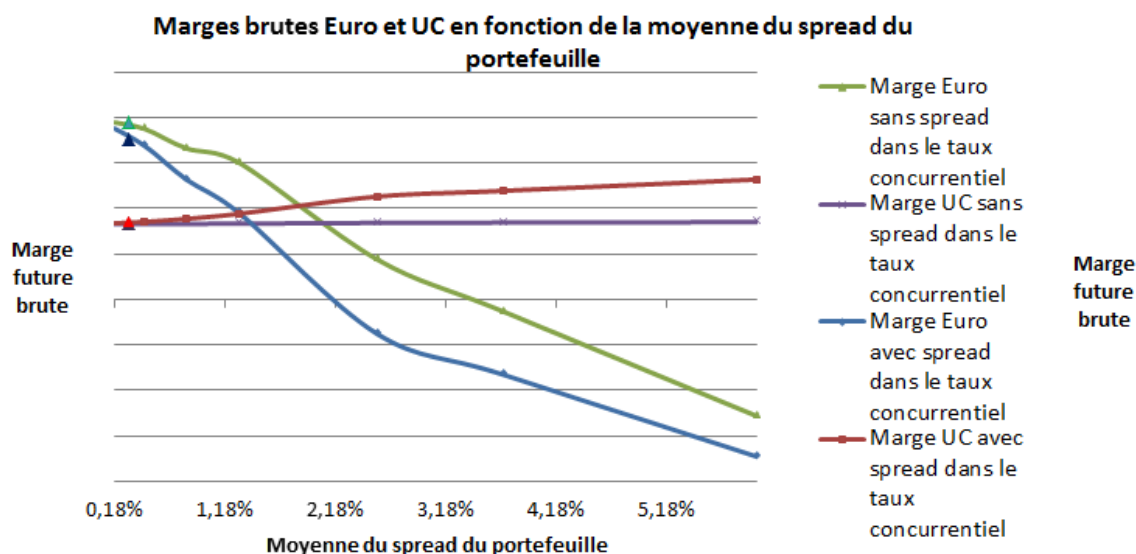


FIGURE 78 – Impact de la dégradation de rating sur les marges futures brutes Euro et UC

Les marges futures Euro décroissent de la même façon que les marges futures totales tandis que les marges UC remontent avec la dégradation de rating.

La baisse des marges Euro avec la dégradation de ratings s'explique par des taux de rachats des contrats Euro plus importants avec la dégradation de rating notamment en début de projection.

L'augmentation des marges UC avec la dégradation de rating s'explique elle par les arbitrages des contrats Euro vers l'UC plus importants avec la dégradation de rating.

Voici les résultats obtenus sur le ratio SCR :

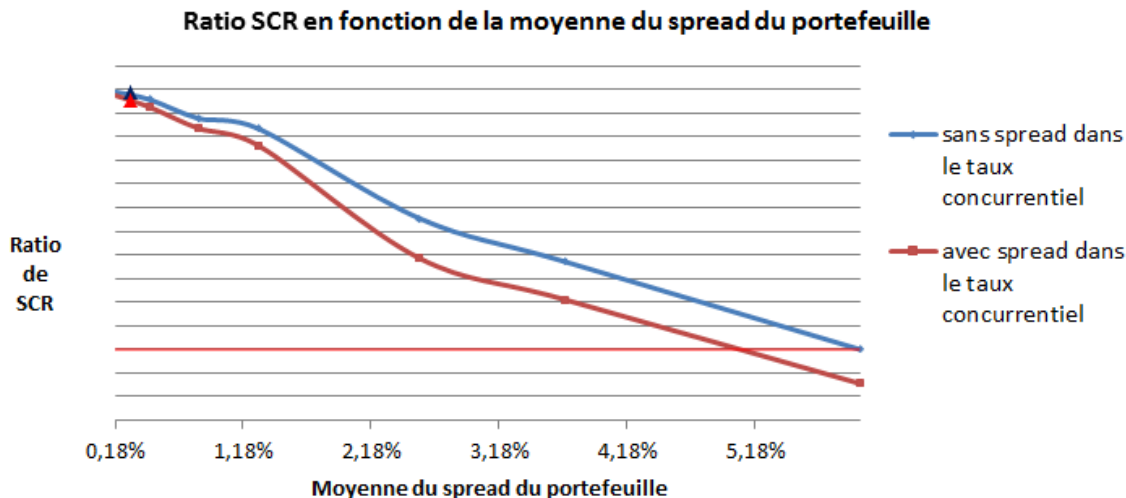


FIGURE 79 – Impact de la dégradation de rating sur le ratio SCR

Le montant de SCR restant inchangé par l'ajout du modèle de crédit, le ratio SCR décroît lui aussi comme les marges futures totales Euro + UC.

Les points correspondants à notre projection avec les ratings réels se situent toujours entre les points correspondants aux ratings AAA et AA.

Notons aussi que toutes les marges futures et ratio SCR obtenus ici restent cependant inférieurs aux marges et ratio SCR obtenus sans modèle de crédit.

Le ratio de SCR limite semble être atteint, avec le modèle de crédit et la prise en compte du spread dans le calcul du taux concurrentiel, pour un niveau de spread moyen du portefeuille de 5,18%, ce qui correspon-

draît à un niveau de spread d'environ 0,5% supérieur au niveau maximal atteint pendant la crise de la dette souveraine et 1% supérieur au niveau maximal atteint pendant la crise des subprimes.

Au vu du graphique représentant la volatilité des spreads en fonction de leur niveau moyen, la volatilité de spread qui correspondrait à la limite acceptable de ratio de SCR est donc proche de 2%.

## Conclusion

Ce mémoire a permis le choix, la validation, la mise en place et la maîtrise d'un modèle de crédit stochastique au sein du modèle ALM de l'entreprise.

Le modèle retenu pour ce mémoire est un modèle prenant en compte le risque de défaut et de spread uniquement. Le risque de migration, qui figure parmi les trois risques inhérents au risque de crédit n'est pas modélisé, mais cela est compensé par un très bon calibrage du modèle. Le calibrage du modèle choisi permet en effet l'atteinte de cibles des spreads réelles sur tous les ratings pour de nombreuses maturités et ce sur une grande profondeur d'historique. Cela donne au modèle la possibilité de capter tous les comportements précis des spreads observés par le passé, incluant donc une part de migration.

La décision finale prise face aux contraintes de taille des inputs du modèle ALM a été de réaliser une interpolation de spline cubique sur les probabilités de défaut de maturités choisies. Cela n'altère pas les résultats des tests martingales et laisse inchangés les résultats Solvabilité II à la date du 31/12/2017 auxquels les tests ont été effectués. Bien que le nombre de maturités gardées semble suffisant pour assurer une validité des tests stable pour les prochaines dates d'arrêt, il sera tout de même important de vérifier la martingalité de la combinaison retenue interpolée à chaque nouvelle date afin de s'assurer que l'hypothèse faite ne dégrade pas les tests.

Enfin, les résultats obtenus sur les marges futures et sur le ratio SCR ont montré que l'implémentation du modèle de crédit seul n'a que peu d'impact sur les chiffres. C'est en revanche l'ajout du spread dans la formule de calcul du taux concurrentiel qui engendre une baisse évidente des marges futures et du ratio SCR calculés par le modèle.

Les sensibilités réalisées sur les paramètres ont finalement mis en évidence la faible influence d'une baisse des taux de recouvrement sur les résultats. Une hausse du niveau des spreads ou de leur volatilité a cependant des répercussions importantes sur les chiffres. Cela implique qu'une dégradation de portefeuille ou de la situation économique aurait pour conséquence une baisse notable du ratio SCR, pouvant aller jusqu'à une situation critique pour un niveau de spread moyen proche de 5,2% associé à une volatilité proche de 2%.

Ce mémoire aura permis de constituer une base solide de connaissances sur le fonctionnement des modèles de crédit stochastiques en général et sur le fonctionnement et la calibration des modèles disponibles au sein du générateur de scénarios économiques utilisé en ALM par la compagnie.

Il aura également apporté des exemples d'impacts pouvant être observés avec l'implémentation d'un modèle de crédit stochastique de défaut.

Il serait à présent intéressant d'observer les impacts sur l'ensemble de l'algorithme de projection de flux de l'implémentation d'un modèle de crédit stochastique à migration comme le modèle G2, étudié en 2ème partie de ce mémoire. Un modèle de ce type pourrait en effet permettre une allocation d'actifs ciblée sur les ratings en vendant par exemple les obligations les plus dégradées au fil de la projection.

Enfin, il pourrait aussi être intéressant de tester des modèles pour lesquels le calibrage est réalisé en interne afin de pouvoir réaliser des sensibilités en jouant sur les cibles de calibrage utilisées.

## Références

- [1] *G2 Credit Model Calibration*, Moody's Analytics, 2014
- [2] *G2 credit model Calibration update*, Moody's Analytics, 2016
- [3] *G3 Credit Model Calibration of Long Term Distributions*, Moody's Analytics, 2016
- [4] *G3 Credit Model Market Consistent Calibration*, Moody's Analytics, 2016
- [5] *G3 Credit Model Specification* , Moody's Analytics, 2016
- [6] *Economy Model Calibrations MC Standard S EUR EndDec2017* , Moody's Analytics, 2017
- [7] *Modélisation du risque de crédit dans les modèles actuariels : Etat de l'art et application à un Générateur de Scénarios Economiques* , Mémoire d'Hedi LAKHDAR, présenté devant l'Université Paris Dauphine pour l'obtention du diplôme du Master Actuariat et l'admission à l'Institut des Actuaire, novembre 2012
- [8] O.Senhadj El Rhazi, *Modèle de défaut à intensité : Corrélation entre l'intensité du défaut et les taux courts* , [Rapport de recherche] Pierre and Marie Curie University, 2004
- [9] Jean-Philippe Médecin (CNP Assurances), Laurent Devineau (Milliman) , *Atelier 2 - Modélisation du risque de crédit pour la valorisation du bilan économique* , Congrès des Actuaire, 2015
- [10] Hayette Gatfaoui , *Risque de Défaut et Risque de Liquidité : Une Etude de Deux Composantes du Spread de Crédit*, 2001
- [11] Documentation interne, SOGECAP, 2016-2017