



Mémoire présenté le :

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA  
et l'admission à l'Institut des Actuaire**

Par : Guillaume Bellier

Titre Crédit Stochastique dans le Modèle ALM d'une assurance-  
vie

Confidentialité : ☒ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membre présents du jury de l'Institut  
des Actuaire*

signature

*Entreprise : Aviva France*

Nom : Bellier Guillaume

Signature :

*Membres présents du jury de l'ISFA*

*Directeur de mémoire en entreprise :*

Nom : Martin Jimenez

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise  
en ligne sur un site de diffusion de  
documents actuariels (après expiration  
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

*Secrétariat*

Signature du candidat

*Bibliothèque :*



## **Rapport d'alternance**

Spécialité

**Sciences Actuarielle et Financière**

Institut de Science Financière et d'Assurances

Présenté par

**Guillaume BELLIER**

Sous la direction académique de

**Monsieur Areski Cousin**

Sous la direction en entreprise de

**Monsieur Martin Jimenez**

Sujet de l'alternance :

**Crédit Stochastique dans le Modèle ALM d'une  
assurance-vie**

2013/2014

## Résumé

---

Mots-clés : Crédit stochastique, modèle de Jarrow, Lando et Turnbull (1997), modèle de Cox, modèle de Lando (1998), modèle de Dubrana (2011),

---

Ce mémoire décrit l'intégration du crédit stochastique dans le modèle ALM d'une compagnie d'assurance-vie. Il se compose de deux grandes parties.

La première partie détaille la manière de générer des scénarios économiques de spread de crédit en univers risque neutre. Les spreads de crédit sont calculés à partir des probabilités de défaut, elles même déduites du rating des obligations. La dynamique de ces ratings est modélisée par une chaîne de Markov ce qui signifie que le rating d'une obligation passe d'un état à un autre avec des probabilités ne dépendant que de son état courant. Ces probabilités sont résumées dans la matrice de transition du processus. Les matrices de transition données par les agences de notation sont des matrices historiques. Le modèle propose donc l'emploi d'un facteur multiplicatif, la prime de risque, pour construire les matrices de transition risque neutre qui permettent de retrouver le prix des obligations risquées. Le modèle a été créé par Jarrow, Lando et Turnbull (1997) [7] puis amélioré par Lando (1998) [9] et (2009) [11], Arvanatis, Gregory et Laurent (1999) [2] et enfin Dubrana (2011) [5] dans lequel la prime de risque est stochastique et modélisée par un processus de Cox, Ingersoll, Ross. La calibration risque neutre s'est montrée instable et a donc été réalisée sous contraintes pour de meilleurs résultats. La première partie de ce mémoire se conclut sur l'analyse des sensibilités des spreads aux paramètres d'entrée.

La seconde partie décrit l'intégration du crédit stochastique dans le modèle ALM. Afin de bien évaluer le coût des optionnalités d'un modèle ALM (participations aux bénéfices, rachats dynamiques) il est important d'intégrer le plus possible de la volatilité du portefeuille d'actif dans le modèle. Le crédit stochastique permet de prendre en compte la volatilité due aux migrations de rating et aux variations de spread des obligations. La prise en compte de ratings dynamiques nécessite certains choix en matière de modélisation du défaut (proportionnel ou total), de calcul de la valeur de marché, des cash flows générés et de valeur comptable. Il soulève aussi la problématique de l'ajustement aux prix du marché (market consistency), du choix des réinvestissements et du calcul d'un scénario déterministe reflétant les scénarios stochastiques mais sans volatilité. La deuxième partie de ce mémoire répond à ces questions et commente les impacts sur les fonds propres de l'assurance considérée et sur les risques qu'elle supporte. Cette partie se conclut sur l'analyse des sensibilités des fonds propres aux paramètres du modèle de crédit stochastique.

## Abstract

---

Keywords : Stochastic Credit, Jarrow, Lando et Turnbull (1997) model ,Cox model, Lando model (1998), Arvanatis, Gregory et Laurent (1999) model, Dubrana (2011) model

---

This thesis describes how stochastic credit has been included in a life insurer Asset Liability Managment (ALM) model. It is split in two main parts.

The first one details the model that produces credit spread scenarios under risk neutral probability. The spreads are computed thanks to default probabilities which are deduced from bond rating. The ratings are supposed to follow a Markov chain which means that the rating changes according to probabilities that depend only on the current rating. Those probabilities are summarized in the transition matrix. The transition matrices given by rating agencies are historical matrices. Then the model computes the risk neutral ones which allow to compute the risky bonds price thanks to a multiplying factor, the risk premium. This model has been first exposed by Jarrow, Lando and Turnbull (1997) [7] and improved by Lando (1998) [9] and (2009) [11], Arvanatis, Gregory et Laurent (1999) [2] and Dubrana (2011) [5] which uses a Cox Ingersoll Ross process for the risk premium. The simple risk neutral calibration has shown signs of unstability so it has been performed with constraints. Finally an analysis of the sensitivities has been made in order to fully understand the model.

The second part describes the integration of stochastic credit in ALM model. It is important to include the most of asset portfolio volatility in the ALM model in order to price correctly the embedded options of the model (profit sharing and dynamic lapses). Stochastic credit allows including the bonds rating migration and bonds spreads volatility. This development has raised some issues such as default modelisation (proportional or total), market value, cash flows and book value computation. It also raises the market consistency, the reinvestment including rating and deterministic scenario consistent with stochastic ones issues. The second part faces all these questions and also analyses the impact on own funds and risk. This part ends with an analysis of the own funds sensitivities at the input parameters.

## Remerciements

Je souhaite tout particulièrement remercier mon tuteur en entreprise, monsieur Martin Jimenez ainsi que mon encadrant à l'ISFA, Areski Cousin pour leur aide, leurs conseils avisés et leurs encouragements qui m'ont aidé à mener ce travail à bien.

Je souhaite aussi remercier les membres de l'équipe dans laquelle ce mémoire a été réalisé Younes Chenguir, Ibrahim Boutaleb et Yann Yange de la Direction de l'Actuariat Financier d'Aviva France, Frédéric Sabbah de l'équipe ALM, Ali Maalmi de l'équipe MCEV et Frédéric Planchet, professeur à l'ISFA, pour leur aide précieuses.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement toute l'équipe de la Direction de l'Actuariat Financier d'Aviva France pour sa bonne humeur et l'excellente ambiance de travail.

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>II</b>	<b>ESG crédit</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>Notation</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Modèle discret : Modèle de Jarrow-Lando-Turnbull</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Modèle en temps continu : Modèle de Cox par Lando et Dubrana</b>	<b>16</b>
3.1	Lien entre spread forward et spread constant sur une période	16
3.2	Modèle en temps continu déterministe . . . . .	17
3.3	Modèle de Lando déterministe : modification des valeurs propres	18
<b>4</b>	<b>Modèle de Cox par Lando et Dubrana</b>	<b>18</b>
<b>5</b>	<b>Entrées du modèle</b>	<b>22</b>
5.1	Matrice de transition . . . . .	22
5.2	Taux de recouvrement . . . . .	22
5.3	Calcul des zéro-coupon . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Calibration des paramètres</b>	<b>25</b>
6.1	Méthode des moindres carrés . . . . .	25
6.2	Calibration historique . . . . .	26
6.3	Développement en 0 : Calibration de $\pi_0$ . . . . .	28
6.4	Hypothèse d'égalité entre le point de départ de la prime de risque et sa moyenne long terme . . . . .	29
6.5	Pénalisation de $\alpha$ et $\sigma$ . . . . .	31
6.6	Fonction objectif finale de la calibration risque neutre . . . . .	31
6.7	Espérance et variance conditionnelle d'un CIR . . . . .	32
<b>7</b>	<b>Simulation de la prime de risque</b>	<b>33</b>
<b>8</b>	<b>Sensibilités des ESG de spread</b>	<b>33</b>
8.1	Vitesse de retour à la moyenne de la prime de risque . . . . .	35
8.2	Moyenne long terme de la prime de risque . . . . .	36
8.3	Paramètre de volatilité de la prime de risque . . . . .	36
8.4	Valeur initiale de la prime de risque . . . . .	37
8.5	Taux de recouvrement . . . . .	38

<b>9 Tests</b>	<b>38</b>
9.1 Probabilités de migration . . . . .	38
9.2 Indices d'obligations risquées . . . . .	39
<b>10 Conclusion</b>	<b>40</b>
 <b>III Modèle ALM</b>	 <b>41</b>
<b>1 Contexte</b>	<b>41</b>
<b>2 Description du passif</b>	<b>41</b>
2.1 Les contrats du portefeuille . . . . .	42
2.2 Taux garanti du portefeuille . . . . .	42
2.3 Participation aux bénéfices . . . . .	42
2.4 Taux de marché . . . . .	43
2.5 Rachats dynamiques . . . . .	44
2.6 Les provisions . . . . .	44
2.7 Arbre de décision de la participation discrétionnaire . . . . .	46
<b>3 Description de l'actif</b>	<b>46</b>
<b>4 Calcul des fonds propres</b>	<b>46</b>
4.1 Calcul du profit . . . . .	46
4.2 Calcul de la VIF . . . . .	49
4.3 Calcul du BEL . . . . .	49
4.4 Calcul des Fonds Propres . . . . .	49
<b>5 Calcul du SCR</b>	<b>50</b>
<b>6 Premier modèle : Défauts Totaux</b>	<b>50</b>
<b>7 Deuxième modèle : Défaut Proportionnel</b>	<b>51</b>
7.1 Impact sur la TVOG . . . . .	52
7.2 Valeur de marché . . . . .	52
7.3 Cash flow et valeur comptable . . . . .	53
7.3.1 Coupon . . . . .	53
7.3.2 Valeur comptable . . . . .	53
7.4 Consistance avec les prix du marché . . . . .	55
7.4.1 Ajustement multiplicatif . . . . .	55
7.4.2 Ajustement à l'aide d'un spread déterministe . . . . .	56
7.4.3 Interpolation des spreads . . . . .	58
7.5 Réinvestissement . . . . .	58
7.5.1 Réinvestissement retenu . . . . .	59
7.5.2 Sensibilités . . . . .	60

7.5.3	Justification du modèle à défaut proportionnel . . . .	63
7.6	Scénario déterministe . . . . .	64
7.7	Tests . . . . .	65
7.7.1	Test de Martingalité . . . . .	65
7.7.2	Test de leakage . . . . .	66
<b>8</b>	<b>Modèle retenu</b>	<b>66</b>
<b>9</b>	<b>Choc de crédit dans ce modèle</b>	<b>67</b>
<b>10</b>	<b>Résultats</b>	<b>68</b>
10.1	Impacts sur les fonds propres . . . . .	68
10.2	Impacts sur les fonds propres stressés . . . . .	69
<b>11</b>	<b>Analyse des sensibilités sur les fonds propres</b>	<b>74</b>
11.1	Vitesse de retour à la moyenne de la prime de risque . . . . .	74
11.2	Moyenne long terme de la prime de risqueMoyenne long terme de la prime de risque . . . . .	76
11.3	Paramètre de volatilité de la prime de risque . . . . .	76
11.4	Valeur initiale de la prime de risque . . . . .	76
11.5	Taux de recouvrement . . . . .	77
<b>12</b>	<b>Conclusion</b>	<b>77</b>
<b>IV</b>	<b>Conclusion</b>	<b>78</b>
<b>V</b>	<b>Annexes</b>	<b>80</b>
<b>1</b>	<b>Modèles basés sur le modèle de Jarrow, Lando et Turnbull</b>	<b>80</b>
1.1	Modèle de Kijima et Komorobayashi discret . . . . .	80
1.2	Modèle de Lando : modification des intensités de défaut . . .	81
1.3	Modèle de Lando : modification des lignes de la génératrice .	82
<b>2</b>	<b>Preuve du calcul de l'exponentiel d'une matrice diagonale</b>	<b>82</b>
<b>3</b>	<b>Prime déterministe : Calibration de mu au voisinage de l'in- fini</b>	<b>83</b>
<b>4</b>	<b>Algorithme d'optimisation</b>	<b>84</b>
4.1	Méthode de Newton . . . . .	84
4.2	Méthode de Gauss-Newton . . . . .	84
4.3	Algorithme BFGS . . . . .	85



## Première partie

# Introduction

Le modèle ALM (Asset Liability Management) permet de calculer la valeur d'une entreprise d'assurance en prenant en compte les évolutions futures probables des passifs et des actifs. L'intérêt de ces projections est de capter des interactions entre le passif et l'actif que des calculs déterministes seuls ne pourraient modéliser. Ce modèle est utilisé à la fois pour calculer des rendements pour des sous groupes de produits d'assurance dans le cadre de simulations "monde réel" et à la fois pour calculer le risque porté par l'assurance au regard de son portefeuille de passif et d'actif dans le cadre de simulations "risque neutre".

Pour bien évaluer le coût des interactions entre l'actif et le passif, le modèle doit capter le plus possible de la volatilité du portefeuille d'actif. Ces interactions apparaissent lorsque les rendements financiers sont mauvais : l'assureur doit amputer son résultat technique pour servir les assurés (minimum de participation aux bénéfices) et si les assurés ne sont pas satisfaits, ils rachètent leurs contrats (rachat dynamique). Plusieurs scénarios sont donc parcourus et la valeur de la compagnie d'assurance est calculée pour chacun d'eux. Selon chaque scénario la valeur des différentes classes d'actif (actions, immobilier, taux d'intérêt et valeur des obligations) varient. Dans ce mémoire, nous avons cherché à modéliser le crédit stochastique dans le modèle ALM d'une société d'assurance-vie et ainsi inclure la volatilité due aux migrations de rating. Ce travail est demandé dans le cadre de Solvabilité II qui s'appliquera au 1<sup>er</sup> janvier 2016.

Nous avons opté pour une modélisation des ratings par une chaîne de Markov. Ce modèle a été proposé par Jarrow, Lando et Turnbull (1997) [7] puis amélioré par Lando (1998) [9] et (2009) [11] et Dubrana (2011) [5]. Ce modèle permet de prendre en compte le risque de spread, le risque de migration et le risque de défaut. Le risque de spread représente le risque de perte de valeur lorsque les spreads changent de niveau à rating constant, le risque de migration est le risque de perte de valeur lorsque l'obligation change de rating à spread constant pour une classe de rating donnée et le risque de défaut est le risque particulier que l'obligation fasse défaut. Le risque de défaut est un risque de migration mais est traité à part car il impacte la valeur de l'obligation mais aussi la structure des coupons promis par l'obligation. Cette dernière propriété étant la plus sensible pour les assureurs dans la mesure où les stratégies obligataires consistent le plus souvent à conserver les obligations achetées jusqu'à maturité et à ne s'exposer ainsi qu'à la valeur de remboursement et aux coupons à recevoir.

Le rapport s'articule en deux grandes parties. Dans un premier temps, on présente le générateur de scénario économique de crédit. On présente le modèle de Jarrow, Lando et Turnbull et les améliorations de Dubrana

puis on détaille la calibration des paramètres ainsi que le choix des inputs du modèle. Dans un second temps, on présente la manière dont les défauts stochastiques ont été inclus dans le modèle ALM. Cette partie décrit le choix de modélisation du défaut, le calcul de la valeur de marché, des coupons et de la valeur comptable des obligations dans ce cadre, les réinvestissement, la manière dont nous assurons la propriété de cohérence avec les prix du marché, la manière dont nous calculons un scénario déterministe permettant de calculer la valeur temps des options du modèle ALM (Time Value of Option and Guarantee en anglais) et les tests auxquels nous avons eu recours afin de valider les modifications apportées au modèle.

## Deuxième partie

# ESG crédit

Afin d'évaluer l'évolution des actifs du portefeuille Aviva, le modèle requiert un certain nombre d'information comme l'évolution de la courbe de taux, l'inflation ou dans notre cas les spread par rating. Ces informations sont groupées dans des ESG (Economic Scenario Generator). Cette partie explique la manière dont est construit l'ESG de crédit. L'emploi de cet ESG est détaillé dans la deuxième partie.

Le générateur de scénario économique de crédit que nous avons développé modélise le processus de notation des obligations par une chaîne de Markov.

On considère un ensemble de notation auquel le rating des obligations peuvent appartenir. Formellement, on considère  $K$  états classés par ordre décroissant de fiabilité (AAA vers CCC) et dont le dernier état est l'état de défaut. On considère dans ce contexte que le processus "notation" des obligations est un processus de Markov. On définit dans un premier temps l'ensemble des notations utilisées afin de clarifier le discours.

# 1 Notation

Les notation sont classées par ordre d'apparition dans le document. Cette liste n'est pas exhaustive et certaines définitions pourront être localement surchargées.

- $\eta_t$  : rating d'une obligation à la date  $t$ .
- $\mathbb{P}$  : probabilité historique
- $\mathbb{Q}$  : probabilité risque neutre
- $B(t, T)$  : prix en  $t$  d'une obligation zéro-coupon sans risque de maturité  $T$
- $D_i(t, T)$  : prix en  $t$  d'une obligation zéro-coupon risquée noté  $i$  en  $t$  de maturité  $T$
- $\delta$  : taux de recouvrement des obligations risquées
- $\tau$  : temps de défaut (aléatoire)
- $r_s$  : taux sans risque instantané en  $s$
- $P^H$  : matrice de transition historique sur 1 an
- $\Lambda^H$  : génératrice historique
- $D$  : matrice des valeurs propres de  $\Lambda^H$
- $\Sigma$  : matrice de passage vers la base des sous espace propres de  $\Lambda^H$
- $\pi_s$  : prime de risque en  $s$
- $\beta = (\alpha, \mu, \sigma, \pi_0)$  : vecteur de paramètres de la prime de risque modélisée par un CIR
- $P^\pi(t, T)$  : matrice de transition risque neutre conditionnelle à  $\pi_s \forall s \in [t, T]$  entre  $t$  et  $T$
- $P^{\pi_t}(t, T)$  : matrice de transition risque neutre inconditionnelle entre  $t$  et  $T$
- $\Lambda(t)$  : génératrice risque neutre en  $t$
- $P^*(t, T)$  : matrice de transition forward entre  $t$  et  $T$
- $s_i(t, T)$  : spread de  $t$  à  $T$  d'une obligation risquée notée  $i$  en  $t$
- $Def(t)$  le déflateur de 0 à  $t$
- $Def_s(t)$  le déflateur de  $s$  à  $t$
- $P_{i \rightarrow j}(t, T) = (P^{\pi_t}(t, T))_{i,j}$  la probabilité risque neutre de migrer de l'état  $i$  à l'état  $j$  entre  $t$  et  $T$  sachant que le rating initial est  $i$ .

On détaille dans un premier temps le modèle en temps discret proposé par Jarrow, Lando et Turnbull afin d'introduire le problème. Puis nous passons au cas continu. Le modèle déterministe pour commencer avec les travaux de Lando (2000) [10] et enfin stochastique avec les modèles de Cox proposés par Lando (1998) [9] et (2009) [11] et Dubrana (2011) [5].

## 2 Modèle discret : Modèle de Jarrow-Lando-Turnbull

Le modèle de Jarrow, Lando et Turnbull proposé en 1997 [7] est un modèle d'évaluation de la structure par terme des spreads sous la probabilité risque neutre basé sur la notation des obligations.

On suppose qu'il existe une unique probabilité risque neutre notée  $\mathbb{Q}$  sous laquelle le processus de notation des obligations risquées et le processus de taux d'intérêt sans risque sont indépendants. On suppose aussi le taux de recouvrement,  $\delta$ , constant. On note  $\tau$  le temps (aléatoire) auquel l'émetteur fait défaut et  $(r_t)_t$  le taux court sans risque.

Le prix d'un zéro-coupon sans risque est donné par

$$B(t, T) = E_t^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{1}{(1 + r(t, T))^{T-t}} \right]$$

avec  $E_t^{\mathbb{Q}}$  l'espérance risque neutre sachant l'information en  $t$  et  $r(t, T)$  le taux entre  $t$  et  $T$ .

Le prix d'un zéro coupon risqué noté  $i$  est donné par

$$D_i(t, T) = B(t, T)(\delta + (1 - \delta)\mathbb{Q}(\tau > T | \eta_t = i)) \quad (1)$$

avec  $\mathbb{Q}(\tau > T | \eta_t = i)$  la probabilité sous la mesure risque neutre que l'entreprise notée  $i$  en  $t$  fasse défaut avant  $T$ .

En effet

$$\begin{aligned} D_i(t, T) &= E_t^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{1}{(1 + r(t, T))^{T-t}} (1_{\tau > T} + \delta 1_{\tau \leq T}) \right] \\ &= B(t, T)(\delta + (1 - \delta)\mathbb{Q}(\tau > T | \eta_t = i)) \end{aligned}$$

On fait l'hypothèse que le recouvrement est fait à maturité et non au moment du défaut. Cette expression du prix du zéro-coupon permet de s'affranchir de la modélisation du taux sans risque pour la suite car on ne s'intéresse qu'à l'excès par rapport au taux sans risque, soit  $\delta + (1 - \delta)\mathbb{Q}(\tau > T | \eta_t = i)$ . De plus le taux risqué forward est donné par

$$f_i(t, T) = -\log \left( \frac{D_i(t, T + 1)}{D_i(t, T)} \right)$$

d'où

$$f_i(t, T) = f(t, T) + 1_{\tau > t} \log \left( \frac{\delta + (1 - \delta)\mathbb{Q}(\tau > T | \eta_t = i)}{\delta + (1 - \delta)\mathbb{Q}(\tau > T + 1 | \eta_t = i)} \right)$$

ce qui donne une expression du spread forward

$$s_i(t, T) = \log \left( \frac{\delta + (1 - \delta)\mathbb{Q}(\tau > T | \eta_t = i)}{\delta + (1 - \delta)\mathbb{Q}(\tau > T + 1 | \eta_t = i)} \right) \quad (2)$$

On suppose dorénavant que le processus historique de notation est homogène (Jarrow, Lando et Turnbull précise que l'hypothèse est plus valable pour les investment grade que pour les speculative grade). On note  $P^H$  la matrice de transition historique à 1 an.

$$P^H = \begin{pmatrix} p_{11}^H & \dots & p_{1K}^H \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi  $p_{ij}^H$  représente la probabilité de passer de l'état  $i$  à l'état  $j$  pendant l'année. L'état de défaut est absorbant. On obtient la matrice de transition sous la probabilité risque neutre en appliquant une prime de risque noté  $\Pi(t)$ . Idéalement la prime de risque devrait être une matrice de la même dimension que la matrice de transition. Afin de réduire la complexité des calculs, on se restreint à une prime de risque vectorielle de taille le nombre d'état du modèle moins un (car la prime pour l'état de défaut est 1). La prime de risque est fonction du temps car rien ne permet d'affirmer l'homogénéité du processus notation sous la probabilité risque neutre.

La matrice de transition sous la probabilité risque neutre à 1 an au temps  $t$ , notée  $P(t) = P_{t,t+1}$  est donc in-homogène. La façon dont la prime de risque modifie la matrice de transition historique pour obtenir la matrice de transition risque neutre a donné lieu à de nombreuses propositions pour améliorer le modèle original. Nous détaillerons Lando (1998) [9] et (2009) [11] et Dubrana (2011) [5]. En annexe nous présentons aussi d'autres modèles que nous avons étudiés en particulier Kijima et Komorobayashi (1999)[8] et Lando (2000)[10]. Jarrow, Lando et Turnbull imposent

$$p_{i,j}(t) = \pi_i(t)p_{i,j}^H \forall i \neq j \quad (3)$$

Cela signifie que la prime de risque ne dépend que de l'état courant et non de l'état d'arrivée. Matriciellement on a

$$P(t) = id + \Pi(t)[P^H - id] \quad (4)$$

Avec  $\Pi(t)$  la matrice diagonale avec les  $(\pi_i(t))_i$  sur la diagonale. Par in-homogénéité, on a

$$P_{0,T} = \prod_{t=0}^{T-1} P(t) \quad (5)$$

Des équations (1) et (4) on déduit pour  $t=0$

$$\pi_i(0) = \frac{B(0, 1) - D_i(0, 1)}{B(0, 1)(1 - \delta)p_{i,K}^H}$$

La procédure itérative pour calibrer la prime de risque est donnée par l'algorithme suivant :

Initialisation

$$\Pi(0) = \frac{B(0,1) - D_i(0,1)}{B(0,1)(1-\delta)p_{i,K}^H}$$

$$P(0) = id + \Pi(0)[P^H - id]$$

Récurrence

On suppose avoir construit  $P(t)$ . On cherche alors  $\Pi(t)$  afin de construire

$$P_{0,t+1} = P(t)(id + \Pi(t)[P^H - id])$$

On a

$$p_{i,K}^H(0,t+1) = \frac{B(0,t+1) - D_i(0,t+1)}{B(0,t+1)(1-\delta)}$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ \pi_i(t)p_{i,K}^H \\ \cdot \end{pmatrix} = P^{-1}(t) \begin{pmatrix} \cdot \\ \frac{B(0,t+1) - D_i(0,t+1)}{(1-\delta)B(0,t+1)} \\ \cdot \end{pmatrix}$$

soit  $\forall i$

$$\pi_i(t) = \sum_{j=1}^K p_{i,j}^{-1}(t) \frac{B(0,t+1) - D_i(0,t+1)}{(1-\delta)B(0,t+1)p_{i,K}^H} \quad (6)$$

Calcul du spread

On calcule ensuite les spreads avec l'équation

$$s_i(0,t) = -\frac{\ln\left(\frac{D_i(0,t)}{B(0,t)}\right)}{t}$$

Cette formule vient de la version continue du modèle.

La formule (6) peut poser un problème numérique car pour les obligations bien notées (AAA) la probabilité de défaut sur 1 an peut être très faible, voire, être estimée nulle. En théorie ce terme devrait être compensé par la différence  $B(0,1) - D_i(0,1)$  mais en pratique, on peut avoir des valeurs aberrantes.

Bielecki [3] exprime une condition sur la prime de risque donnée par Kijima et Komorobayashi [8]

$$\pi_i(t) < \frac{1}{1 - p_{ii}^H}$$

Les données avec lesquelles nous avons travaillées, respectent cette condition.

Pour les matrices de transition proposées par Moody's et S&P en ne prenant pas compte des "non rated" et en acceptant notre interpolation sur

les prix de zéro-coupon, la condition est violée pour tous les AAA, pour presque toutes les maturités du AA et pour la moitié des maturités du A. Les maturités longues étant celles qui ne respectent pas la condition.

Dans les deux cas de figure, la méthode n'est pas stable numériquement et produit des matrices de transition incohérentes à partir de la cinquième maturité.

### 3 Modèle en temps continu : Modèle de Cox par Lando et Dubrana

Les modèles en temps continu de cette section fournissent les outils pour produire des spreads stochastiques qui seront détaillés dans la section suivante. La première sous section détaille un point de notation, la suivante fait le pont entre le modèle de Jarrow, Lando et Turnbull discret et celui continu et la dernière utilise la diagonalisation de la génératrice qui sera utilisée dans la section suivante.

#### 3.1 Lien entre spread forward et spread constant sur une période

Jarrow, Lando et Turnbull désigne par spread, le spread forward. En pratique, on désigne par spread, la prime à ajouter au taux actuariel d'un zéro-coupon sans risque pour obtenir le prix d'un zéro-coupon risqué. Ce spread s'exprime en fonction du spread forward car il en est la moyenne temporelle sur la période considérée. On montre dans cette partie cette relation afin de clarifier les notations.

Le spread forward est le spread instantané (de maturité infiniment courte) à la date  $T$  vu à la date  $t$  avec  $t < T$ . On le note  $s_i^f(t, T)$ . En continue son expression est donnée par

$$s_i^f(t, T) = \frac{(1 - \delta) \frac{\partial p_{iK}(t, T)}{\partial T}}{1 - (1 - \delta)p_{iK}(t, T)} \quad (7)$$

Les spreads que nous utilisons pour le pricing (constants sur une période), notés  $s_i^m(t, T)$  sont

$$s_i^m(t, T) = -\frac{\ln\left(\frac{D_i(t, T)}{B(t, T)}\right)}{T - t} = -\frac{\ln(1 - (1 - \delta)p_{iK}(t, T))}{T - t} \quad (8)$$

Ce sont des spreads moyens sur la période. On retrouve cette propriété à partir des spreads forward donnés par le modèle (équation (2) et (7)). On a alors

$$s_i^m(t, T) = \frac{1}{T - t} \int_t^T s_i^f(t, s) ds$$



en effet, avec la notation  $\partial T$  pour  $\frac{\partial}{\partial T}$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T-t} \int_t^T s_i^f(t, s) ds &= \frac{1}{T-t} \int_t^T \frac{(1-\delta) \partial_T p_{iK}(t, s)}{1-(1-\delta)p_{iK}(t, s)} ds \\
&= \frac{1}{T-t} \int_t^T -\partial_T \ln(1 - (1-\delta)p_{iK}(t, s)) ds \\
&= \frac{1}{T-t} [-\ln(1 - (1-\delta)p_{iK}(t, s))]_t^T \\
&= \frac{-\ln(1-(1-\delta)p_{iK}(t, T))}{T-t} \\
&= s_i^m(t, T)
\end{aligned}$$

### 3.2 Modèle en temps continu déterministe

Le modèle continu permet de calculer les spreads pour toute les maturités et permet selon Jarrow, Lando et Turnbull une meilleure estimation du processus notation. Nous n'avons pas développé ce point. Le modèle continu nous permettra d'introduire les améliorations proposées par Lando (1998) [9] et (2009) [11] et Dubrana (2011) [5].

Dans un modèle continu, un processus de Markov homogène est spécifié par un générateur, matrice carrée de la taille du nombre d'états dont les lignes somment à 0 et dont seuls les termes diagonaux sont négatifs. Un générateur  $\Lambda$  d'une matrice  $P$  est tel que  $P = e^\Lambda$ . On cherche donc un générateur  $\Lambda^H$  de la matrice de transition  $P^H$ . Israel, Wei et Rosenthal (1999) [6] se sont intéressés à l'existence et à l'unicité de la génératrice. L'existence est montrée à l'aide des deux théorèmes suivants

**Théorème 1.** *Soit  $P$  une matrice de transition et  $S = \max((a-1)^2 + b^2)$  sur toutes les valeurs propre  $a+ib$  de  $P$  (avec  $a, b \in \mathbb{R}$ ). Si  $S < 1$  alors*

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{(P - id)^i (-1)^{i+1}}{i} \right)_n$$

converge et

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(P - id)^i (-1)^{i+1}}{i}$$

est telle que  $e^Q = P$  et les lignes de  $Q$  somment à 0.

et

**Théorème 2.** *Soit  $P$  une matrice de transition telle que tous les éléments diagonaux soient plus grand que 0,5 et soit  $S = \max((a-1)^2 + b^2)$  sur toutes les valeurs propre  $a+ib$  de  $P$  (avec  $a, b \in \mathbb{R}$ ). Alors*

$$S < 1$$

L'unicité est donnée par Cuthbert (1972) [4] sous les même hypothèses que le théorème 2.

Ces théorèmes ne garantissent pas de trouver une génératrice dont seuls les éléments diagonaux sont négatifs. En pratique nous avons corrigé cela en fixant à 0 les termes non diagonaux négatifs et en corrigeant la ligne pour qu'elle somme à 0. Cette correction est proposée par Israel, Wei et Rosenthal. En pratique les termes négatifs sont rares et de l'ordre de  $10^{-7}$ . Les corrections ne changent donc pas les résultats.

La prime de risque est alors appliquée à la génératrice.

$$\Lambda(t) = \Pi(t)\Lambda^H$$

avec  $\Pi(t) = \text{diag}(\pi_1(t), \dots, \pi_K(t))$  la prime de risque et  $\Lambda(t)$  la génératrice en probabilité risque neutre.

Nous nous sommes ensuite ramenés à la méthodologie discrète en utilisant l'approximation au premier ordre :

$$P(t, t + \Delta t) \approx id + \Pi(t)\Lambda^H \Delta t$$

On retrouve alors l'équation (4) en posant  $P^H - id = \Lambda^H \Delta t$ .

### 3.3 Modèle de Lando déterministe : modification des valeurs propres

Lando propose une alternative consistant à modifier les valeurs propres de la génératrice. Dans ce modèle on fait l'hypothèse que la génératrice est diagonalisable. L'hypothèse n'est pas restrictive car l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans l'espace des matrices complexes. En pratique les valeurs propres et les vecteurs propres trouvés sont réels. L'hypothèse la plus forte est sur la constance des vecteurs propres de la matrice de transition risque neutre. On a alors

$$\Lambda^H = \Sigma D \Sigma^{-1}$$

et

$$\Lambda(t) = \Sigma \Pi(t) D \Sigma^{-1}$$

avec  $\Pi(t)$  la matrice diagonale des primes de risque. La calibration se fait encore par l'équation (24)

Le modèle permet d'obtenir un générateur dont les lignes somment à 0 mais aucune garantie n'est donnée sur la positivité des éléments non diagonaux.

## 4 Modèle de Cox par Lando et Dubrana

On expose ici le modèle retenu et développé dans ce mémoire qui a été proposé par Dubrana (2011) [5]. Il s'inspire des travaux de Lando (1998)[9], (2009)[11] et de Arvanatis, Gregory et Laurent (1998)[2]. Le modèle consiste à modifier les valeurs propres de la génératrice. Cependant la prime de risque

est dans ce cas scalaire. En effet comme on peut voir dans Lando (2009) [11] un facteur de prime de risque par valeur propre ne permet pas de garantir d'obtenir un générateur.

Soit  $\Lambda^H$  le générateur historique. On le suppose diagonalisable. On pose alors  $\Lambda^H = \Sigma D \Sigma^{-1}$ . Et on suppose pour le passage en risque neutre

$$\Lambda(t) = \Sigma \pi(t) D \Sigma^{-1}$$

Le modèle à prime scalaire présente donc l'avantage de permettre d'écrire

$$P^\pi(t, T) = e^{\Sigma \int_t^T \pi(s) ds D \Sigma^{-1}}$$

Cette matrice de transition sachant le processus  $\pi_s$  de  $t$     $T$  est la matrice de transition d'un processus de markov in-homogène. On appelle cette matrice la matrice de transition conditionnelle. On définit la matrice de transition inconditionnelle

$$P^{\pi_t}(t, T) = E^\mathbb{Q}[P^\pi(t, T) | \mathcal{F}_t] \quad (9)$$

Ces matrices ne sont plus les matrices de transition du processus puisqu'elles ne respectent plus la propriété de semi groupe ( $P(t, T) \neq P(t, s)P(s, T)$ ). Cependant la somme des lignes est toujours 1 (par linéarité de l'esprance). Ce sont donc toujours des matrices de transition.

La matrice de transition inconditionnelle apparait dans l'expression du prix de l'obligation de la manière suivante

$$MV(t) = E^\mathbb{Q}\left[\sum_{i=t}^T C F L_i e^{-\int_t^i r_u du} (1 - (1 - \delta) 1_{\eta_t = default}) | \mathcal{F}_t\right]$$

en supposant indépendants les cash flow ( $C F L_t$ ), le taux sans risque ( $r_s$ ) et le processus de rating ( $\eta_t$ ), on peut écrire

$$MV(t) = \sum_{i=t}^T E^\mathbb{Q}[C F L_i | \mathcal{F}_t] E^\mathbb{Q}[e^{-\int_t^i r_u du} | \mathcal{F}_t] (1 - (1 - \delta) E^\mathbb{Q}[1_{\eta_t = default}(i) | \mathcal{F}_t])$$

on reconnait  $e^{-\int_t^i r_u du} = Def_t(i)$  d'où  $E^\mathbb{Q}[e^{-\int_t^i r_u du} | \mathcal{F}_t] = B(t, i)$ . Pour le processus de défaut on note  $\sigma(\pi_u)_{u \in [t, i]}$  la filtration engendrée par la prime de risque et  $Q(t, T)_{x, y}$  la probabilité de migrer de l'état  $x$  à l'état  $y$  selon la matrice de transition  $Q$  entre  $t$  et  $T$ . On a alors

$$\begin{aligned} E^\mathbb{Q}[1_{\eta_t = default}(i) | \mathcal{F}_t] &= E^\mathbb{Q}[E^\mathbb{Q}[1_{\eta_t = default}(i) | \sigma(\pi_u)_{u \in [t, i]}] | \mathcal{F}_t] \\ &= E^\mathbb{Q}[P^\pi(t, i)_{\eta_t, default} | \mathcal{F}_t] \\ &= P^{\pi_t}(t, i)_{\eta_t, default} \end{aligned}$$

d'où

$$MV(t) = \sum_{i=t}^T E^{\mathbb{Q}}[CFL_i | \mathcal{F}_t] B(t, i) (1 - (1 - \delta) P^{\pi_t}(t, i)_{\eta_t, default})$$

Et la matrice de transition inconditionnelle apparaît dans le prix.

La formule fermée permet d'écrire la matrice de transition inconditionnelle comme une fonction déterministe de  $\pi_t$ . On note, par simplicité,  $f$  cette fonctionnelle et  $\beta = (\alpha, \mu, \sigma, \pi_0)$  le vecteur des paramètres du modèle. On a alors

$$P^{\pi_t}(t, T) = f(\pi_t, T - t, \beta) \quad (10)$$

Cela fait apparaître que les matrices de transition inconditionnelles sont stochastiques par la prime de risque. Elles ne dépendent que de la prime de risque à l'instant  $t$  de départ. Nous avons vu que les spreads s'expriment sous la forme

$$e^{-s_{\eta_t}(t, T)(T-t)} = 1 - (1 - \delta) P(\text{faire défaut de } t \text{ à } T)$$

C'est donc une fonction déterministe de la probabilité de défaut. Cette probabilité de défaut est donnée par la matrice de transition. En notant  $g$  la fonctionnelle qui relie le spread à la matrice de transition, on a

$$s_{\eta_t}(t, T) = g(P^{\pi_t}(t, T)) = g(f(\pi_t, T - t, \beta)) \quad (11)$$

On voit donc que les spreads sont bien stochastiques. Ils dépendent de la prime de risque à l'instant considéré. Les spreads sont donc construits avec un aléa. Nous insistons sur ce point afin de faire ressortir le deuxième aléa qui sera employé pour simuler la réalisation des migrations de notation. L'aléa permettant de simuler les spreads est celui qui détermine les probabilités de transition et donc la manière dont le "monde" va évoluer stochastiquement. Le deuxième aléa, celui des transitions, permet de migrer d'un état à l'autre dans un contexte déjà stochastique.

La prime de risque doit être positive pour garantir d'avoir un générateur. On choisit donc de modéliser la prime de risque par un processus CIR comme suit

$$\begin{cases} d\pi_t = \alpha(\mu - \pi_t)dt + \sigma\sqrt{\pi_t}dW_t \\ \pi_0 = \pi_0 \end{cases}$$

Sous cette hypothèse on peut déduire une formule fermée pour la probabilité de défaut en tout temps et pour toutes les maturités. On note  $\mathcal{F}_t$  la filtration générée par le processus  $\pi_t$ . On a

$$E^{\mathbb{Q}}[e^{d_j \int_t^T \pi(s)ds} | \mathcal{F}_t] = e^{A_j(t, T) - \pi(t)B_j(t, T)} \quad (12)$$

avec

$$A_j(t, T) = \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2} \ln \left( \frac{2\nu_j e^{\frac{(\alpha+\nu_j)(T-t)}{2}}}{(\alpha + \nu_j)(e^{\nu_j(T-t)} - 1) + 2\nu_j} \right)$$

$$B_j(t, T) = -\frac{2d_j(e^{\nu_j(T-t)} - 1)}{(\alpha + \nu_j)(e^{\nu_j(T-t)} - 1) + 2\nu_j}$$

$$\nu_j = \sqrt{\alpha^2 - 2d_j\sigma^2}$$

*Démonstration.* On s'intéresse au processus suivant

$$\begin{aligned} d(-\ln(d_j)\Pi)(t) &= -\ln(d_j)\alpha(\mu - \Pi(t))dt - \ln(d_j)\sigma\sqrt{\Pi(t)}dW_t \\ &= \alpha(-\ln(d_j)\mu - (-\ln(d_j)\Pi)(t))dt + \\ &\quad \sigma\sqrt{-\ln(d_j)}\sqrt{(-\ln(d_j)\Pi)(t)}dW_t \end{aligned}$$

On a ( $d_j \leq 1$ )

Par ailleurs, pour un CIR classique, on a

$$E_t^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T \Pi(s)ds}] = e^{A(t,T) - \Pi(t)B(t,T)}$$

(expression que l'on retrouve dans le prix d'un zéro-coupon avec des taux cours modélisés par un CIR) avec

$$A(t, T) = \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2} \ln \left( \frac{2\nu e^{\frac{(\alpha+\nu)(T-t)}{2}}}{(\alpha + \nu)(e^{\nu(T-t)} - 1) + 2\nu} \right)$$

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\nu(T-t)} - 1)}{(\alpha + \nu)(e^{\nu(T-t)} - 1) + 2\nu}$$

$$\nu = \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2}$$

On obtient alors le résultat pour le processus  $(-\ln(d_j)\Pi(t))_t$  en remplaçant les paramètres suivants dans les équations précédentes

$$\begin{aligned} \mu &\leftarrow -\ln(d_j)\mu \\ \sigma &\leftarrow \sigma\sqrt{-\ln(d_j)} \\ \Pi(t) &\leftarrow -\ln(d_j)\Pi(t) \end{aligned}$$

□

En pratique, il n'est pas nécessaire de calculer toute la matrice de transition risque neutre pour obtenir la probabilité de défaut. Pour construire les spreads, seuls la dernière colonne de la matrice est calculée. En remarquant que la matrice de transition et la matrice de transition moins la matrice

identité ont la même dernière colonne sauf à la dernière ligne, la probabilité de défaut par rating se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P^{\pi_t}(t, T) &= \Sigma \text{diag}(E[e^{\int_t^T d_1(s)ds}], \dots) \Sigma^{-1} \\ P^{\pi_t}(t, T) - Id &= \Sigma(\text{diag}(E[e^{\int_t^T d_1(s)ds}], \dots) - Id) \Sigma^{-1} \end{aligned}$$

d'où, avec  $\sigma_{i,j}$  (respectivement  $(\sigma^{-1})_{i,j}$ ) le coefficient de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  de la matrice  $\Sigma$  (respectivement  $\Sigma^{-1}$ )

$$\begin{aligned} p_{i,K}(t, T) &= (P^{\pi_t}(t, T) - Id)_{i,K} \\ &= \sum_{j=1}^K \sigma_{i,j} (\text{diag}(E^{\mathbb{Q}}[e^{\int_t^T \Pi(s)ds}], \dots) - Id)_{j,K} (\sigma^{-1})_{j,K} \\ &= \sum_{j=1}^{K-1} \sigma_{i,j} (\sigma^{-1})_{j,K} (E^{\mathbb{Q}}[e^{\int_t^T \Pi(s)ds}] - 1) \end{aligned}$$

*car la dernière valeur propre est nulle*

La probabilité de défaut s'écrit finalement comme suit :

$$p_{i,K}(t, T) = \sum_{j=1}^{K-1} \sigma_{i,j} (\sigma^{-1})_{j,K} (e^{A_j(t,T) - \pi(t)B_j(t,T)} - 1) \quad (13)$$

## 5 Entrées du modèle

La section précédente a présenté la partie théorique. Cette section détaille les données utilisées pour l'application numérique.

Nous avons utilisé des indices obligataires fournis par Markit : les indices iboxx et une matrice de transition donnée par Standard and Poor's. C'est avec ces données que la partie II a été construite.

### 5.1 Matrice de transition

La matrice utilisée est la matrice de transition 1 an provenant d'une étude de Moody's (figure 1). Elle s'appuie sur des données des Etats-Unis. Les probabilités ont été ajustées pour tenir compte des spreads longs termes.

### 5.2 Taux de recouvrement

Nous nous sommes appuyés sur l'étude de Moody's sur les taux de recouvrement pour choisir celui qui correspond au portefeuille de la compagnie d'assurance étudiée. Moody's propose cinq catégories :

- "Senior Secured Bond"
- "Senior Unsecured Bond"
- "Senior Subordinated Bond"
- "Subordinated Bond"
- "Junior Subordinated Bond"

	<i>AAA</i>	<i>AA</i>	<i>A</i>	<i>BBB</i>	<i>BB</i>	<i>B</i>	<i>CCC</i>	<i>Défaut</i>
<i>AAA</i>	94,04%	5,68%	0,22%	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%	0,00%
<i>AA</i>	2,28%	89,49%	7,14%	0,38%	0,30%	0,24%	0,03%	0,14%
<i>A</i>	1,56%	3,23%	89,41%	4,76%	0,40%	0,40%	0,03%	0,20%
<i>BBB</i>	1,51%	1,52%	5,16%	88,27%	2,04%	0,53%	0,53%	0,44%
<i>BB</i>	0,07%	0,61%	1,25%	6,74%	82,22%	6,81%	0,60%	1,69%
<i>B</i>	0,03%	0,06%	1,25%	1,75%	6,47%	80,85%	5,27%	4,33%
<i>CCC</i>	0,02%	0,04%	1,10%	1,42%	2,63%	8,70%	73,29%	12,79%
<i>Défaut</i>	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	100%

FIGURE 1 – Matrice de transition historique à 1 an

Le crédit stochastique ne porte que sur les obligations taux fixe. Elles constituent 40% du portefeuille de la compagnie d'assurance étudiée. Parmi ces obligations 84% sont des dettes "Senior". De plus seuls 9% des obligations taux fixe sont "Secured". Le taux de recouvrement retenu est donc "Senior Unsecured Bond". La valeur du taux de recouvrement pour ce niveau de subordination est :

$$\delta = 37,8\%$$

### 5.3 Calcul des zéro-coupon

Pour calibrer le modèle, nous avons besoin de prix de zero-coupon. Nous expliquons dans cette partie comment nous calculons ces prix à partir d'indices obligataires.

Nous avons récupéré les taux de l'indice souverain allemand AAA dans markit (notre référence sans risque) et les taux des indices corporate financial USD pour les notations de AAA à BBB et pour les durées à échéance 1-3, 1-5, 1-10, 3-5, 5-7, 5-10, 7-10, 10+, 10-15 et 15+. À partir de ces indices on régresse les taux actuariels sur trois puissances (0, 1 et 2) de la durée de vie restante. On obtient alors un taux fonction de la durée de vie restante. En notant  $y_{k-year}$  le taux actuariel d'une obligation émettant des coupons et dont il reste k années avant échéance, la régression s'écrit :

$$y_{k-year} = p_1 + p_2 * k + p_3 * k^2 + \epsilon$$

avec  $p_1, p_2, p_3$  les coefficients de la régression et  $\epsilon$  suivant une loi normale centrée réduite. Cette fonction nous permet d'extraire le prix du zéro coupon par la méthode du bootstrap : le taux un an est supposé sans coupon et les taux zéro-coupon des maturités suivantes sont déduits du taux couponné de la maturité correspondante et des taux zéro-coupon de maturité strictement inférieure. On détaille ces développements dans la suite de cette partie.

Formellement on a

$$Y = TP$$

avec

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

le vecteur des taux actuariels avec sur la  $j^{eme}$  ligne le taux actuariel de l'indice qui a une durée de vie restante moyenne égale à  $t_j$ .

$$T = \begin{pmatrix} 1 & t_1^1 & t_1^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n^1 & t_n^2 \end{pmatrix}$$

La matrice des durées de vie restante moyenne des indices

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

le vecteur des paramètres. La solution de la régression au sens des moindres carrés est

$$P = (T^T T)^{-1} T^T Y$$

avec l'exposant T pour l'opérateur transposé.

On calcule ensuite les taux actuariels pour chaque durée de vie restante de 1 an à 15 ans. On rappelle que  $y_{k-year}$  designe le taux actuariel d'une obligation émettant des coupons et dont il reste k année avant échéance. On calcule ensuite le prix des zero coupons par bootstrap en supposant que le taux 1 an est déjà sans coupon. On a

$$Price_{1-year}^{ZC} = \frac{1}{1 + y_{1-year}}$$

On considère ensuite qu'une obligation qui cote le pair a un taux actuariel égal au taux de coupon. On a alors

$$1 = \left( \sum_{j=1}^{k-1} Price_{j-year}^{ZC} \right) y_{k-year} + Price_{k-year}^{ZC} (1 + y_{k-year})$$

d'où

$$Price_{k-year}^{ZC} = \frac{1 - \left( \sum_{j=1}^{k-1} Price_{j-year}^{ZC} \right) y_{k-year}}{1 + y_{k-year}}$$

Ce qui permet de calculer le prix des zero coupon maturité par maturité (bootstrapping). A partir des prix risqués et du prix sans risque, on calcule le prix en excès du sans risque. En prenant l'hypothèse d'un taux de recouvrement de 37,8% on construit les spreads sur lesquels le modèle sera calibré.



Les spreads trouvés sont donnés ci dessous (en point de base)(ttm signifie time to maturity).

<i>ttm</i>	<i>AAA</i>	<i>AA</i>	<i>A</i>	<i>BBB</i>
1	5, 95	8, 50	23, 91	48, 76
2	11, 89	16, 90	38, 95	68, 46
3	17, 81	25, 22	53, 50	87, 36
4	23, 73	33, 44	67, 54	105, 44
5	29, 64	41, 58	81, 08	122, 70
6	35, 53	49, 62	94, 12	139, 15
7	41, 41	57, 58	106, 66	154, 79
8	47, 28	65, 44	118, 69	169, 62
9	53, 14	73, 21	130, 23	183, 63
10	58, 99	80, 90	141, 26	196, 83
11	64, 83	88, 49	151, 79	209, 22
12	70, 66	95, 99	161, 82	220, 79
13	76, 47	103, 41	171, 34	231, 55
14	82, 28	110, 73	180, 37	241, 49
15	88, 07	117, 96	188, 89	250, 62

## 6 Calibration des paramètres

L'équation (11) considérée en  $t=0$  permet d'obtenir une expression des spreads théoriques donnés par le modèle. La section 5 fournit la matrice de transition historique et le taux de recouvrement permettant de calculer effectivement ces spreads. Elle fournit aussi des spreads de marché. La section qui suit va expliquer la méthode de calcul des paramètres du modèle qui sont la vitesse de retour à la moyenne ( $\alpha$ ), la moyenne long terme ( $\mu$ ), le paramètre de volatilité ( $\sigma$ ) et le point de départ de la prime de risque ( $\pi_0$ ). Cette méthode vise à minimiser l'écart quadratique entre les spreads théoriques du modèle et ceux du marché. Cette méthode se nomme "Méthode des moindres carrés".

### 6.1 Méthode des moindres carrés

Notre calibration est basée sur la méthode des moindres carrés. Cela permet d'assurer la consistance avec les prix du marché et ainsi de calibrer le modèle sous la probabilité risque neutre. La fonction objectif est donnée par :

$$\sum_{t=1}^{Maturité} \sum_{i=1}^{Max\ nombre\ d'état} (s_i^{modèle}(0, t) - s_i^{marché}(0, t))^2 \quad (14)$$

avec  $s_i^{modèle}(0, t)$  le spread théorique et  $s_i^{marché}(0, t)$  le spread de marché.

En pratique la calibration par moindres carrés des paramètres n'est pas stable. Cela signifie que la calibration par moindres carrés seule produit des valeurs trop grandes ou négatives et donc non acceptables pour les paramètres. De plus un changement dans les données en entrée du modèle (les spreads de marché par exemple) produit des paramètres différents. Des contraintes sur les paramètres ont donc été ajoutées afin de stabiliser la calibration. Dans un premier temps une calibration historique a été menée pour avoir des valeurs initiales pour la calibration risque neutre et pour avoir une cible pour la volatilité des spreads. Dans un second temps les paramètres ont été calibrés sous la probabilité risque neutre avec contraintes.

## 6.2 Calibration historique

La calibration historique est basée sur la méthode des moments. N'ayant pas de formule fermée pour les moments des spreads, la méthode de Monte Carlo a été utilisée. Cette méthode consiste à simuler les spreads du modèle  $N$  fois et à calculer leurs moments empiriques. Un algorithme d'optimisation est ensuite employé pour trouver les paramètres du modèle qui permettent de minimiser l'écart quadratique entre les moments des spreads historiques et les moments empiriques des spreads du modèle.

Les moments empiriques sont calculés sur 5000 simulations. Le programme d'optimisation comprend une contrainte sur la positivité des paramètres. Les paramètres initiaux du programme ont été choisis d'après l'expérience des premières calibrations. Mais la calibration historique est stable. Ce choix n'est donc pas significatif. Ces paramètres sont :

$$\alpha = 0,5$$

$$\mu = 1$$

$$\sigma = 0,5$$

$$\pi_0 = 1$$

Le spread choisi pour réaliser la calibration est le spread AA 3-5 ans corporate. Ce segment a été sélectionné en raison de son adéquation avec le portefeuille de la compagnie d'assurance décrite dans la partie suivante et par prudence. En effet cette série est plus volatile que les indices de plus longue maturité et permet de calibrer un modèle en incluant plus de volatilité. Les données utilisées sont produites par Merrill Lynch et ont été extraites de Bloomberg. Il s'agit d'un indice obligataire<sup>1</sup>. Cet indice est proposé avec plusieurs indicateurs dont des spreads. Le spread sélectionné est le spread de l'indice par rapport aux dettes souveraines. Ce spread est en ligne avec

---

1. Les indices obligataire de Merrill Lynch sont accessibles depuis Bloomberg avec le code "ER00 Index". Le code de l'indice correspondant au spread AA 3-5 ans corporate est "ER22"



FIGURE 2 – Historique des spreads AA 3-5 ans corporate produit par Merrill Lynch (Bloomberg)

le spread utilisé pour la calibration risque neutre. L'historique sur lequel s'appuie la calibration s'étale sur 5 ans. Il commence en février 2010 et s'arrête en février 2015. Les données sont journalières. Cet historique est représenté sur la figure (2).

Les moments historiques sont calculés sur la chronique des spreads et non pas sur la chronique des différences de spread. Cela présente l'avantage de pouvoir calibrer le niveau moyen des spreads et par conséquent d'avoir de l'information pour la calibration de la moyenne long terme de la prime de risque. Les moments obtenus sont :

$$\begin{aligned} \text{moyenne} &= 102,4 \\ \text{écart - type} &= 43,85 \\ \text{skewness} &= 1,037 \\ \text{kurtosis} &= 0,9118 \end{aligned}$$

Les paramètres historiques trouvés sont :

$$\alpha = 0,1684$$

$$\mu = 4,755$$

$$\sigma = 0,6055$$

$$\pi_0 = 4,839$$

### 6.3 Développement en 0 : Calibration de $\pi_0$

Les programmes d'optimisation nécessite d'initialiser les paramètres du modèle. Les paramètres obtenus avec la calibration historique ont été utilisés comme valeurs initiales des paramètres pour la calibration risque neutre. Cependant l'étude des spreads du modèle permet de calibrer directement la valeur initiale de la prime de risque  $\pi_0$ .

Le développement en 0 de la probabilité de défaut est donnée par :

$$\begin{aligned} A_j(0, T) &= \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2} \ln\left(\frac{2\nu_j e^{0.5(\alpha+\nu_j)T}}{(\nu_j+\alpha)(e^{\nu_j T}-1)+2\nu_j}\right) \\ &= \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2} \ln\left(\frac{2\nu_j e^{0.5(\alpha+\nu_j)T}}{(\nu_j+\alpha)\nu_j T + 2\nu_j + o(T)}\right) \\ &= \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2} \left(\frac{(\alpha+\nu_j)T}{2} - \ln\left(1 + \frac{(\alpha+\nu_j)T}{2} + o(T)\right)\right) \\ &= \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2} \left(\frac{(\alpha+\nu_j)T}{2} - \frac{(\alpha+\nu_j)T}{2} + o(T)\right) \\ &= o(T) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B_j(0, T) &= \frac{-2d_j(e^{\nu_j T}-1)}{(\nu_j+\alpha)(e^{\nu_j T}-1)+2\nu_j} \\ &= \frac{-2d_j(\nu_j T + o(T))}{(\nu_j+\alpha)(\nu_j T + o(T))+2\nu_j} \\ &= \frac{-2d_j(\nu_j T + o(T))}{2\nu_j} \left(1 + \frac{\nu_j+\alpha}{2\nu_j}(\nu_j T + o(T))\right)^{-1} \\ &= \frac{-2d_j(\nu_j T + o(T))}{2\nu_j} \left(1 - \frac{\nu_j+\alpha}{2\nu_j}(\nu_j T + o(T)) + o(T)\right) \\ &= \frac{-2d_j(\nu_j T + o(T))}{2\nu_j} + \frac{2d_j(\nu_j+\alpha)}{2\nu_j^2}(\nu_j T + o(T))^2 + o(t^2) \\ &= -d_j T + o(T) \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} p_{iK}(0, T) &= \sum_{j=1}^{K-1} \sigma_{ij}(\sigma^{-1})_{jK} (e^{d_j \pi_0 T + o(T)} - 1) \\ &= \sum_{j=1}^{K-1} \sigma_{ij}(\sigma^{-1})_{jK} (d_j \pi_0 T + o(T)) \\ &= (\pi_0 T + o(T)) (\sum_{j=1}^{K-1} \sigma_{ij}(\sigma^{-1})_{jK} d_j) \\ &= \lambda_{iK}^H \pi_0 T + o(T) \end{aligned}$$

La calibration se fait donc en utilisant :

$$p_{iK}(0, T) = \lambda_{iK}^H \pi_0 T + o(T) \quad (15)$$

avec  $\lambda_{iK}^H$  l'intensité de défaut historique d'une obligation notée i en 0. Cette intensité apparait dans la génératrice de la matrice de transition historique

et représente la probabilité de migrer de l'état  $i$  à l'état  $K$  (défaut) par unité de temps.  $\lambda_{iK}^H dt$  est la probabilité de migrer dans le temps  $dt$ . Cette formule s'interprète aisément car au voisinage de 0 la prime de risque est proche de sa valeur initiale. En écrivant

$$\frac{p_{iK}(0, T)}{T} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \lambda_{iK}^{RN} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \lambda_{iK}^H \pi_0$$

il apparaît que l'intensité de défaut risque neutre notée  $\lambda_{iK}^{RN}$  est l'intensité de défaut historique fois la prime de risque. On retrouve donc sur les intensités l'idée de base du modèle de Jarrow, Lando et Turnbull.

Cette formule permet donc de calibrer  $\pi_0$  directement à partir des spreads du marché et de la matrice de transition historique. Plus la vitesse de retour à la moyenne est faible plus cette formule a de sens pour  $T \neq 0$ .

La formule (15) est vraie pour tout  $T > 0$  mais pour s'approcher au plus de  $T = 0$  et négliger  $o(T)$ , les prix des zéro-coupon 1 an ont été utilisés.

Avec les données utilisées, l'intensité de défaut pour le rating AAA et AA conduit à des valeurs peu crédibles pour le point de départ de la prime de risque. Cela peut s'expliquer par la faiblesse de la probabilité de défaut de ces ratings car le calcul numérique calcule mal les intensités de défaut dans ce cas (problème d'arrondi). Les ratings A et BBB permettent en revanche de calculer une valeur de  $\pi_0$ . Les valeurs trouvées sont respectivement  $\pi_0 = 2,027$  et  $\pi_0 = 2,039$ . On constate que ces valeurs sont assez proches l'une de l'autre ce qui valide l'approximation. La valeur gardée est celle produite par le rating BBB car plus en ligne avec la valeur historique.

La calibration risque neutre utilise donc comme valeur initiale du point de départ de la prime de risque

$$\pi_0 = 2,039$$

De plus l'optimisation se fait en pénalisant l'écart à cette valeur initiale. Le choix du facteur utilisé pour pondérer l'écart a été fait tel que l'écart soit de l'ordre de grandeur des autres termes de la minimisation. Cependant changer ce facteur a un impact sur la calibration et aucune méthode ne permet de justifier une valeur plutôt qu'une autre. Le terme ajouté à la fonction objectif du programme d'optimisation risque neutre est donc :

$$10000 * (\pi_0 - 2,039)^2$$

Le facteur 10000 s'explique par le fait que la calibration se fait sur les spreads en points de base.

#### 6.4 Hypothèse d'égalité entre le point de départ de la prime de risque et sa moyenne long terme

La calibration des paramètres sur les données de 2013 menait à une prime de risque dans un état de transition sur les maturités utilisées pour

la calibration. Le temps d'atteinte à 90% de la maturité était de plus de 100 ans. Par conséquent la prime de risque était utilisée sur une plage de temps pendant laquelle le comportement attendu du processus CIR n'était pas vérifié. En effet le comportement attendu est celui de l'état stationnaire dans lequel la prime de risque est en moyenne égale à sa moyenne long terme. La prime de risque modélisée comme un CIR permet de l'interpréter comme un facteur multiplicatif sur le vieillissement de la matrice de transition. Sous la probabilité historique la matrice de transition vieillit à la vitesse constante de 1. Cette vitesse apparaît à l'intérieur de l'intégrale lorsque la matrice de transition est écrite à l'aide de la génératrice :

$$P^H(0, T) = e^{\Lambda^H \int_{t=0}^T 1 dt}$$

Pour la matrice de transition risque neutre, on a

$$P^{\pi_0}(0, T) = E^{\mathbb{Q}}[e^{\Lambda^H \int_{t=0}^T \pi_t dt} | \pi_0]$$

Ainsi la prime de risque s'interprète comme la vitesse de vieillissement de la matrice risque neutre. Cela signifie que le modèle perçoit les interprétations du marché comme une évolution dans le temps de la matrice de transition différente de la vitesse d'évolution historique.

Lorsque la prime de risque est dans un état stationnaire la vitesse de vieillissement est constante en moyenne ce qui veut dire que la matrice de transition historique et la matrice de transition risque neutre sont liées entre elles par un facteur multiplicatif sur leur vitesse de vieillissement. Lorsque la prime de risque est dans un état transitoire le vieillissement de la matrice de transition risque neutre est une fonction non linéaire du temps.

Cela peut être une anticipation du marché : la matrice de transition risque neutre vieillit plus vite au début puis son vieillissement ralentit par exemple. Cependant le modèle est ici contraint à faire le pont entre les données de calibration et le cadre de son utilisation. En effet les données de marchés sont issues du prix d'obligations. Or la liquidité des obligations long terme est faible. Il est donc difficile d'obtenir de l'information au delà de 20 ans. Mais le modèle est utilisé pour produire des ESG de crédit sur des horizons à 50 ans. Cet horizon temporel est dû au passif des compagnies d'assurance dont la duration est de cet ordre de grandeur. Le modèle ne peut donc calibrer une prime de risque dans un état transitoire sur les maturités pour lesquelles il y a des données car au delà ; le comportement des spreads ne seraient pas le reflet d'une anticipation du marché mais simplement une conséquence d'un modèle utilisé hors de son domaine de validité.

Afin de remédier à ce problème l'écart quadratique entre  $\mu$  et  $\pi_0$  est pénalisé dans la calibration. Cela permet de garantir que la prime de risque est dans l'état stationnaire rapidement. Ainsi le résultat du programme d'optimisation peut être moins bon mais les paramètres obtenus garantissent d'avoir un comportement des spreads représentant seulement l'information

du marché. Le terme ajouté à la fonction objectif du programme d'optimisation risque neutre est donc :

$$10000 * (\pi_0 - \mu)^2$$

Le facteur 10000 s'explique par le fait que la calibration se fait sur les spreads en points de base.

## 6.5 Pénalisation de alpha et sigma

La calibration sur les prix en  $t=0$  permet de calibrer efficacement la valeur initiale et la moyenne long terme de la prime de risque. La calibration risque neutre a utilisé comme valeur initiale les valeurs résultantes de la calibration historique sauf pour  $\pi_0$ . Le choix de la valeur initiale pour la moyenne long terme n'a pas beaucoup d'impact sur la valeur finale. A l'inverse les paramètres de volatilité peuvent varier en fonction des conditions initiales, des données utilisées ou des facteurs de pénalisation. L'optimisation se fait donc en pénalisant l'écart des paramètres  $\sigma$  et  $\alpha$  à leur valeur initiale. Le terme ajouté à la fonction objectif du programme d'optimisation risque neutre est donc :

$$1000000 * (\sigma - 0,6055)^2 + 1000000 * (\alpha - 0,1684)^2$$

Le facteur 1000000 s'explique par le fait que la calibration se fait sur les spreads en points de base et que ces paramètres sont plus petits que la moyenne long terme et la valeur initiale de la prime de risque.

## 6.6 Fonction objectif finale de la calibration risque neutre

La fonction objectif finale du programme d'optimisation s'écrit alors

$$\begin{aligned} f(\alpha, \mu, \sigma, \pi_0) = & \sum_{t=1}^{Maturité} \sum_{i=1}^{Max\ nb\ d'\ états} (s_i^{modèle}(0, t) - s_i^{marché}(0, t))^2 \\ & + 1000000 * (\sigma - 0,6055)^2 \\ & + 1000000 * (\alpha - 0,1684)^2 \\ & + 10000 * (\pi_0 - \mu)^2 \\ & + 10000 * (\pi_0 - 2,039)^2 \end{aligned}$$

et le programme d'optimisation correspondant est donné par :

$$\min_{(\alpha, \mu, \sigma, \pi_0)} f(\alpha, \mu, \sigma, \pi_0)$$

Les paramètres obtenus sont :

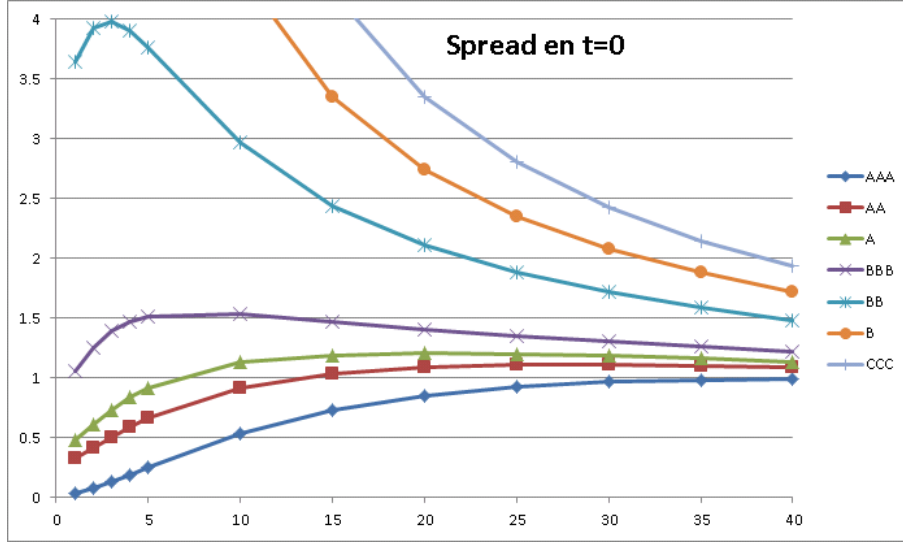


FIGURE 3 – Courbe des spreads (en %) en t=0

$$\alpha = 0,2041$$

$$\mu = 4,327$$

$$\sigma = 0,5999$$

$$\pi_0 = 3,042$$

Les spreads calibrés avec ces paramètres sont présentés figure (3).

La calibration risque neutre simple pouvait calibrer une prime de risque dans un état transitoire sur les 15 maturités pour lesquelles les données de marché existe. On calcule donc le temps d'atteinte à 90% de l'espérance conditionnelle du processus à sa la moyenne long terme pour vérifier la pertinence de la calibration. L'espérance conditionnelle est donnée par l'équation (16). On cherche donc t tel que cette espérance soit (1-x%) de la moyenne long terme (avec x=10%) :

$$\begin{aligned} (1-x)\mu &= \mu + e^{-\alpha t}(\pi_0 - \mu) \\ \Rightarrow t &= -\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{-x\mu}{\pi_0 - \mu}\right) \end{aligned}$$

On trouve un temps d'atteinte de 5,3 ans avec les paramètres calibrés. La calibration est donc bien pertinente.

## 6.7 Espérance et variance conditionnelle d'un CIR

Cette section détaille les deux premiers moments d'un processus CIR. Ils seront utilisés dans les parties d'analyse des sensibilités.



L'espérance du processus à la date  $t$  sachant son point de départ est donnée par :

$$E[\pi_t|\pi_0] = \mu + e^{-\alpha t}(\pi_0 - \mu) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mu \quad (16)$$

La variance du processus à la date  $t$  sachant son point de départ est donnée par :

$$Var(\pi_t|\pi_0) = \frac{\sigma^2}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\left(\frac{\mu}{2} + e^{-\alpha t}(\pi_0 - \frac{\mu}{2})\right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\mu\sigma^2}{2\alpha} \quad (17)$$

## 7 Simulation de la prime de risque

La prime de risque servant à passer de la probabilité real world à la probabilité risque neutre est un processus de Cox-Ingersoll-Ross. Cette section détaille le choix algorithmique suivi pour simuler ce processus et produire ainsi les ESG de spread de crédit.

La simulation d'un processus CIR peut poser problème car des valeurs négatives peuvent être générées. Cela pose problème car le processus est positif ou nul en théorie et d'un point de vue pratique si le processus prend une valeur négative à un instant donné la simulation s'arrête car la racine carrée apparaissant dans l'équation différentielle régissant le processus ne peut être calculée.

En effet le processus s'écrit

$$\begin{cases} d\pi_t = \alpha(\mu - \pi_t)dt + \sigma\sqrt{\pi_t}dW_t \\ \pi_0 = \pi_0 \end{cases}$$

une discrétisation simple conduirait à écrire

$$\begin{cases} \pi_{t+\Delta t} - \pi_t = \alpha(\mu - \pi_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\pi_t}\sqrt{\Delta t}Z \\ \pi_0 = \pi_0 \end{cases}$$

avec  $Z$  une variable normale centrée réduite. Le terme  $\sqrt{\pi_t}$  pose alors problème si le processus prend une valeur négative.

Plusieurs alternatives ont été proposées pour remédier à ce problème. La méthode retenue pour simuler la prime de risque s'appuie sur les travaux de Andersen (2007) [1] et en particulier sur l'algorithme "Quadratic exponential".

## 8 Sensibilités des ESG de spread

Les sensibilités permettent de mieux comprendre la manière dont le modèle dépend des paramètres. De plus la calibration du modèle peut varier d'une année à l'autre. Il est donc intéressant d'anticiper la manière dont

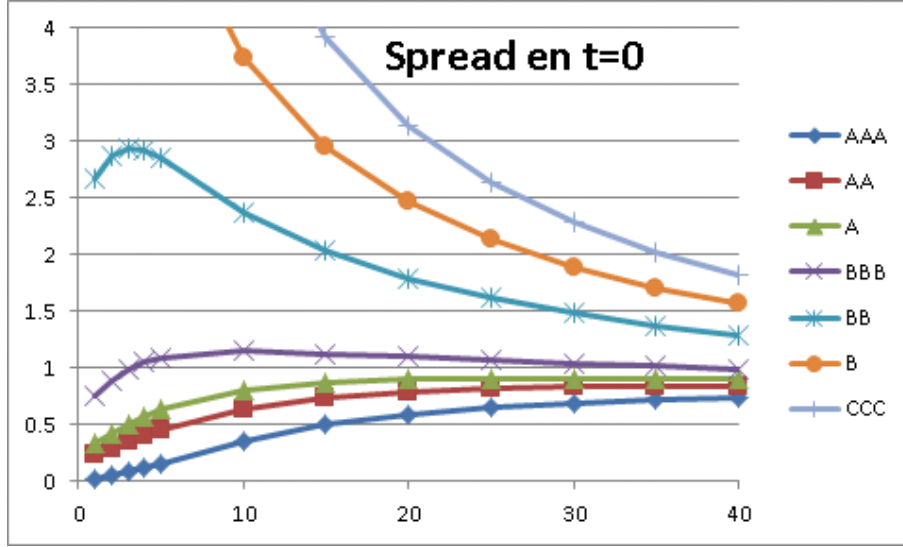


FIGURE 4 – Courbe des spreads (en %) en t=0

le modèle va réagir en cas de variation des paramètres. Le premier niveau d'analyse consiste à étudier les spreads produits par le modèle. L'analyse porte sur les spreads en t=0. L'axe des ordonnées des graphiques de sensibilité est en pourcentage.

Les spreads centraux sont présentés figure (4). Ces spreads utilisent les paramètres donnés par Barri&Hibbert fournisseur de scénario économique reconnu. Ce sont ces paramètres qui ont été utilisé par Aviva France car Barri&Hibbert produit aussi ses autres scénarios économiques (taux, action, immobilier). La suite de ce mémoire est basé sur ces spreads. La proximité des spreads obtenu par notre calibration valide la méthodologie de calibration.

Les spreads correspondant aux ratings CCC et B ont été tronqués pour éviter de tasser le graphique pour les spreads mieux notés. Cela se justifie par la composition du portefeuille de l'entité décrite dans la partie suivante qui ne contient pas d'obligations CCC et seulement une très faible proportion d'obligation B. Ces courbes ont cependant été maintenues dans le graphique car le rating des obligations du portefeuille peut migrer vers ces ratings au cours de la projection. Le maximum atteint par le spread CCC de maturité 1 est de 17%.

On note que les spreads semblent converger vers un spread limite. Le modèle ne permet pourtant pas cela. Dans la mesure où le taux de recouvrement est non nul, les spreads tendent vers 0. En effet

$$s_i(0, T) = -\frac{\ln(1 - (1 - \delta)p_{i,defaut}(0, T))}{T} \quad (18)$$

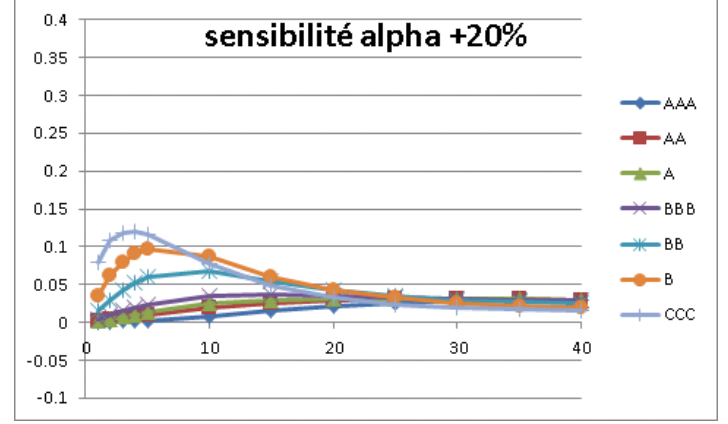
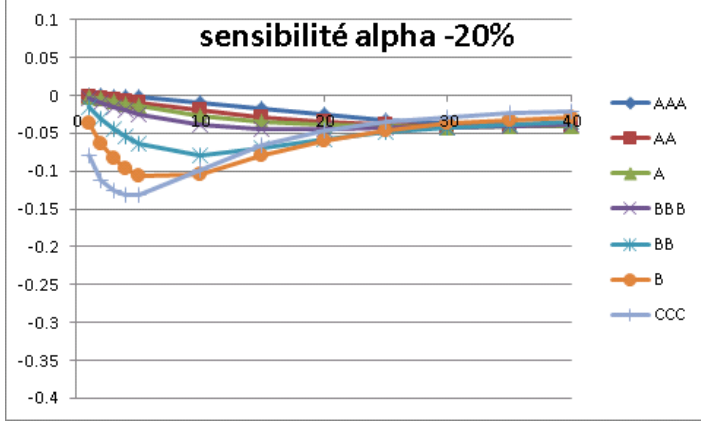


FIGURE 5 – Sensibilité par rapport au paramètre alpha (écart en %)

or  $p_{i,defaut}(0, T)$  tend vers 1 car le défaut est un état absorbant. On a donc

$$s_i(0, T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

Les sensibilités présentées dans les figure (5) à (9) sont les différences entre les courbes de spread obtenues avec les paramètres stressés et celles obtenues avec les paramètres centraux.

### 8.1 Vitesse de retour à la moyenne de la prime de risque

La figure (5) montre les sensibilités au paramètre de vitesse de retour à la moyenne  $\alpha$  de la prime de risque.

L'amplitude de la sensibilité au paramètre  $\alpha$  est plus petite que celle des autres paramètres. Une augmentation de la vitesse de retour à la moyenne entraine une augmentation des spreads. Cette augmentation s'explique par la position relative du point initial de la prime de risque et de sa moyenne long terme. Dans le jeu de données utilisé,  $\pi_0$  est inférieur à  $\mu$ . Par conséquent une augmentation de vitesse de retour à la moyenne pousse la prime de risque à augmenter plus vite pour converger vers sa moyenne long terme. La matrice de transition risque neutre vieillit donc plus vite et les spreads sont plus élevés. L'effet dû à la différence entre  $\pi_0$  et  $\mu$  apparait surtout sur les premières maturités. L'impact sur les maturités plus longues (au delà de 20 ans) peut être mis en regard de la sensibilité sur le paramètre de volatilité dans laquelle les spreads augmentent lorsque la volatilité diminue.

Cependant une augmentation de la vitesse de retour à la moyenne entraine une baisse de la variance de la prime de risque (voir equation (17)).

Les spreads sont donc moins volatiles lorsque la vitesse de retour à la moyenne augmente.

Les analyses sont symétrique pour une baisse de la vitesse de retour à la moyenne.

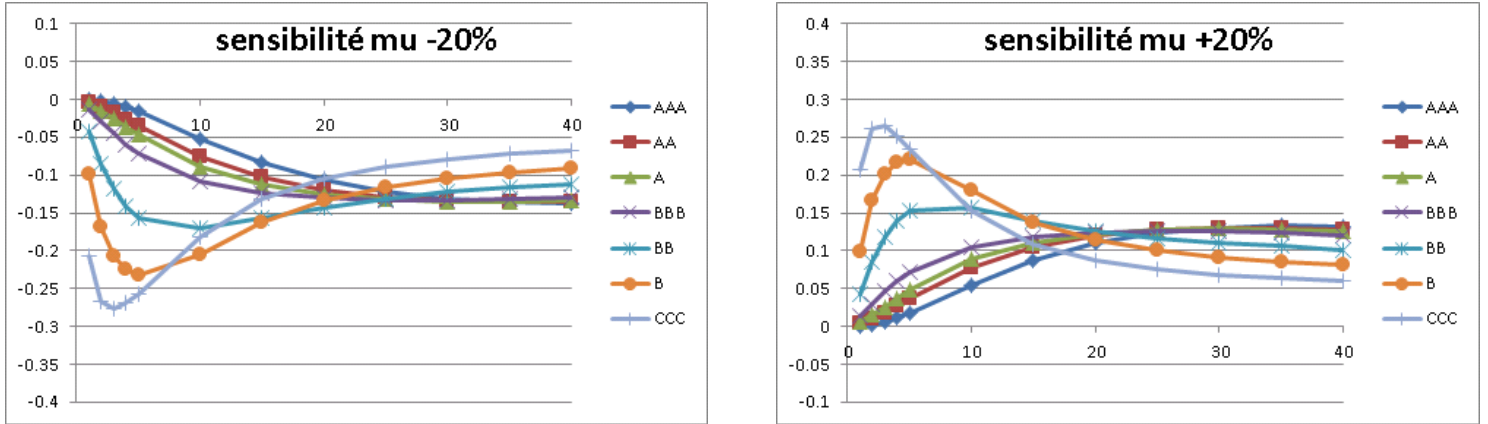


FIGURE 6 – Sensibilité par rapport au paramètre  $\mu$  (écart en %)

## 8.2 Moyenne long terme de la prime de risque

La figure (6) montre les sensibilités au paramètre de moyenne long terme  $\mu$  de la prime de risque.

Naturellement, lorsque la moyenne long terme augmente, la matrice de transition risque neutre vieillit plus vite et donc les spreads augmentent. Cette accélération du vieillissement de la matrice de transition conduit à une inversion de la sensibilité des spreads selon leur rating. Pour les maturités courtes l'impact est plus important pour les ratings élevés (CCC). A partir de 20 ans cette tendance s'inverse et ce sont les spreads de bonne notation (AAA) qui sont le plus impactés.

Cela s'explique par le fait que les spreads de rating élevé ont convergé plus vite vers un état où la probabilité de défaut ne croît pas assez vite pour compenser le terme  $1/T$  (voir equation ((18))). Ils sont donc au delà du point où la dérivée de la courbe de spread s'annule. L'augmentation de la moyenne long terme entraîne donc une augmentation des spreads court terme mais sur le long terme est moins importante.

A l'inverse, les spreads de bonne notation n'atteignent pas l'état où les probabilités de défaut croissent moins vite que  $1/T$ . Ils sont donc avant le point où la dérivée de la courbe de spread s'annule. L'augmentation de la moyenne long terme augmente donc les spreads sur toutes les maturités.

## 8.3 Paramètre de volatilité de la prime de risque

La figure (7) montre les sensibilités au paramètre de volatilité  $\sigma$  de la prime de risque.

Lorsque le paramètre de volatilité de la prime de risque augmente, les spreads diminuent. Cette tendance est cohérente avec la diminution des spreads que la diminution de la vitesse de retour à la moyenne entraîne.

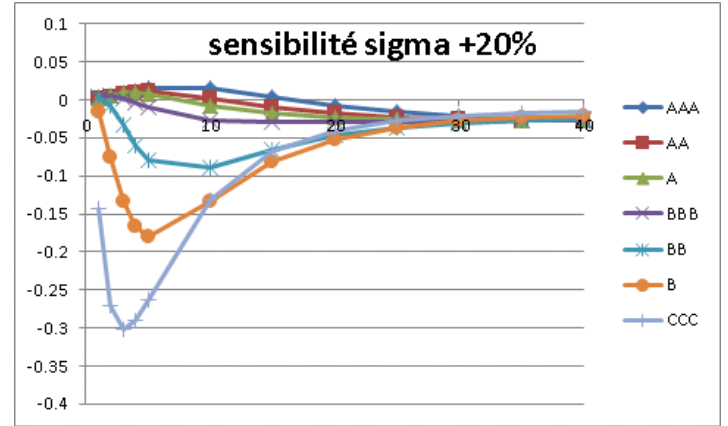
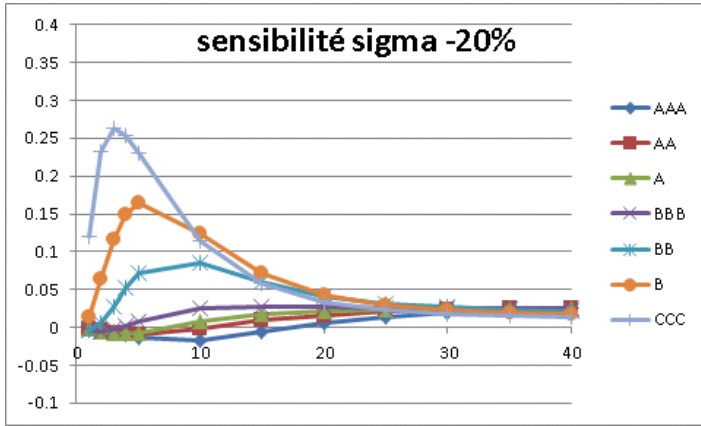


FIGURE 7 – Sensibilité par rapport au paramètre sigma (écart en %)

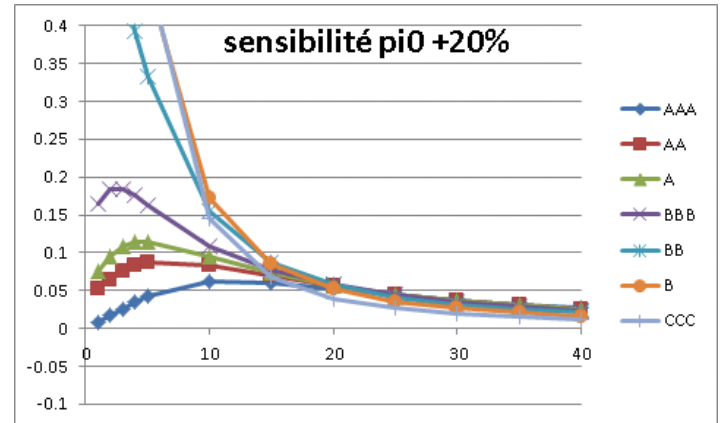
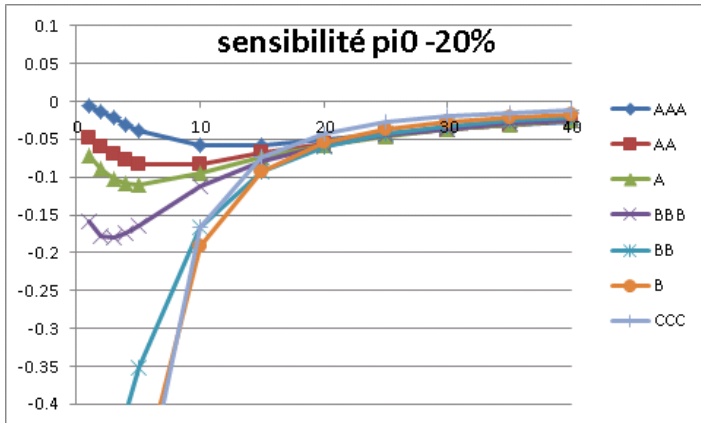


FIGURE 8 – Sensibilité par rapport au paramètre  $\pi_0$  (écart en %)

Les spreads de bonne notation et de maturité courte (moins de 15 ans) augmentent avec l'augmentation du paramètre de volatilité. Cela s'explique par le fait que les bonnes notations ont plus de latitude à se dégrader. Inversement les spreads de rating élevés sont diminués par l'augmentation de la volatilité car ils ont plus de chance de voir leur note s'améliorer.

#### 8.4 Valeur initiale de la prime de risque

La figure (8) montre les sensibilités à la valeur initiale  $\pi_0$  de la prime de risque.

Les sensibilités des ratings élevés et de maturités courtes ont été tronqués afin de conserver la lisibilité du graphique pour les autres ratings plus en ligne avec le portefeuille de l'entité décrite dans la partie suivante. Le maximum atteint par les sensibilités est de 2,4% pour le rating CCC de maturité 1 an.

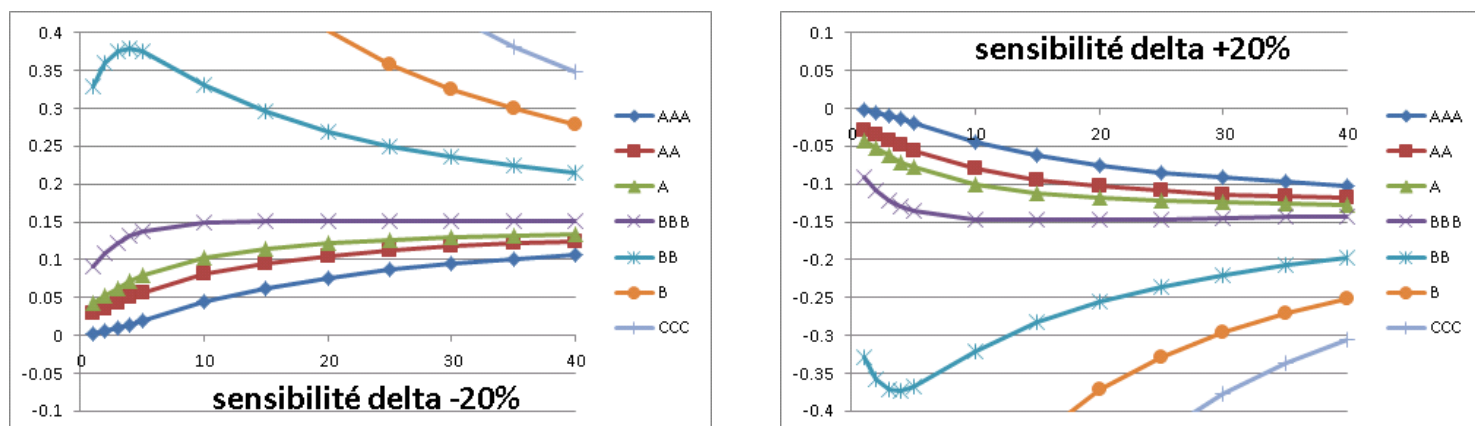


FIGURE 9 – Sensibilité par rapport au paramètre taux de recouvrement (écart en %)

Une augmentation de la valeur initiale la prime de risque entraîne une augmentation des spreads. Les sensibilités à ce paramètres sont symétriques par rapport à 0.

Naturellement l'impact est essentiellement porté par les maturités courtes (moins de 20 ans).

## 8.5 Taux de recouvrement

La figure (9) montre les sensibilités au taux de recouvrement  $\delta$  de la prime de risque.

Ce paramètre induit les sensibilités les plus importantes en valeur absolue. Une augmentation du taux de recouvrement signifie que le défaut d'une obligation a moins d'impact ce qui entraîne une baisse des spreads.

Les sensibilités des rating élevé et de maturité courte ont été tronqués afin de conserver la lisibilité du graphique pour les autres ratings plus en ligne avec le portefeuille d'Aviva France. Le maximum atteint par les sensibilités est de 2,3% pour le rating CCC de maturité 1 an.

## 9 Tests

Cette section détaille les tests qui ont été réalisés pour s'assurer que le modèle avait été correctement implémenté.

### 9.1 Probabilités de migration

Ce test consiste à vérifier que les probabilités de migration constatées sont en lignes avec les probabilités en  $t=0$ . Ce test permet de détecter d'éventuelles erreurs d'implémentation dans le modèle

Ce test s'écrit :

$$P_{j \rightarrow i}(t, T) = \frac{1}{\text{nombre simulation}} \sum_{k=1}^{\text{nombre simulation}} 1_k^{j \rightarrow i}(t, T)$$

## 9.2 Indices d'obligations risquées

Le crédit stochastique permet d'apporter une nouvelle source de volatilité au modèle ALM qui lui faisait défaut dans le modèle précédent. Afin d'évaluer l'amplitude de cette volatilité, un indice d'obligations risquées a été construit.

Ce portefeuille est composé de zéro-coupon en excès du sans risque de maturité 5 ans et de rating AA. A chaque pas de temps, les zéro-coupons migrent vers les autres ratings et leur maturité diminue d'un an. Le portefeuille est donc rebalancé pour conserver ses caractéristiques. Le prix du portefeuille peut alors être calculé comme :

$$I_t = I_{t-1} * \frac{\sum_{i=AAA}^{\text{défaut}} P_{AA \rightarrow i}(t-1, t) D_i(t, t+4)}{D_{AA}(t, t+5)}$$

avec

- $I_t$  la valeur du portefeuille à la date  $t$
- $P_{AA \rightarrow i}(t-1, t)$  la probabilité de migrer de l'état AA à l'état  $i$  entre  $t-1$  et  $t$
- $D_i(t, t+4)$  le prix en excès du sans risque d'un zéro-coupon noté  $i$  en  $t$  et de maturité 4 ans

Cet indice étant calculé sous la probabilité risque neutre à partir de prix en excès du sans risque, le rendement attendu est nul. En pratique la moyenne du rendement sur 500 simulations est bien nulle.

La volatilité est calculée comme la variance du rendement. On trouve un écart-type du rendement en excès du sans risque de 1,43% sur 500 simulations. La volatilité du modèle est donc plus grande que celle historique. Cela permet d'assurer que le modèle est prudent. Un développement du modèle consisterait à utiliser cette volatilité pour calibrer le modèle.

En pratique ce portefeuille peut se composer d'obligation de maturité 5 ans et de rating AA car sous l'hypothèse d'indépendance du processus de rating et du taux sans risque, le rendement de l'indice des obligations risquées est le produit des rendements de l'indices du sans risque et de celui de l'excès du sans risque.

Avec  $K_t$  l'indice des obligations risqués,  $J_t$  l'indice du sans risque et  $I_t$  l'indice de l'excès du sans risque, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
K_t &= K_{t-1} * \frac{\sum_{i=AAA}^{défaute} P_{AA \rightarrow i}(t-1, t) D_i(t, t+4) B(t, t+4)}{D_{AA}(t, t+5) B(t, t+5)} \\
&= K_{t-1} * \frac{\sum_{i=AAA}^{défaute} P_{AA \rightarrow i}(t-1, t) D_i(t, t+4)}{D_{AA}(t, t+5)} * \frac{B(t, t+4)}{B(t, t+5)} \\
&= K_{t-1} * \frac{I_t}{I_{t-1}} * \frac{J_t}{J_{t-1}}
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{K_t}{K_{t-1}} = \frac{I_t}{I_{t-1}} \frac{J_t}{J_{t-1}}$$

En particulier, cela permet de voir que la volatilité du crédit stochastique vient s'ajouter à celle du taux sans risque dans les indices obligataires.

## 10 Conclusion

Cette section a permis d'expliquer le modèle de crédit crée par Jarrow, Lando et Turnbull ainsi que ses améliorations proposées par Lando et Dufrana. Après avoir exposé le formalisme théorique, nous avons pu exhiber une méthode de calibration satisfaisante. En effet, la calibration simple par moindres carrés présentait des résultats instables (valeurs très grandes ou négatives des paramètres). Nous avons donc utilisé une première calibration historique ainsi que des conditions qualitatives afin de réaliser une calibration risque neutre sous contraintes stables. Enfin une analyse de la sensibilité des spreads aux paramètres a été menée pour comprendre le comportement du modèle. Le taux de recouvrement est apparu comme étant le paramètre le plus sensible. Cette analyse est complétée dans la partie suivante.



## Troisième partie

# Modèle ALM

### 1 Contexte

Un modèle ALM consiste à projeter les passifs et les actifs de l'assureur afin d'établir les flux futurs qu'il va recevoir et donner. Il est nécessaire de passer par un modèle ALM qui inclut à la fois le passif et l'actif car il y a des interactions entre les deux. La distribution de la participation aux bénéfices et les rachats dynamiques sont deux exemples de cette interaction.

C'est au niveau de ces interactions que l'inclusion de crédit stochastique permet de mieux modéliser la réalité. En effet un modèle de crédit déterministe existait déjà. Les flux comme les coupons ou le nominal étaient amputés d'une proportion de défaut déterministe. Le modèle stochastique permet sur certains scénarios de ne pas avoir de défaut et donc plus de rendement financier donc plus de participation aux bénéfices distribués et moins de rachats dynamiques et sur d'autres, d'avoir des pertes et donc plus de rachats dynamiques. Un modèle déterministe ne permet pas de prendre en compte l'effet cumulé de ces événements liés. L'outil de modélisation ALM utilisé est ALS Prophet.

Cette partie présente la modélisation du crédit stochastique dans le modèle ALM d'une compagnie d'assurance fictive.

Les premières sections décrivent le passif et l'actif cette société ainsi que les notions utilisées pour l'analyse des impacts du crédit stochastique et en particulier le calcul des fonds propres.

Dans un second temps deux variations du modèle sont exposées (défaut total et défaut proportionnel). Le modèle retenu (défaut proportionnel) est détaillé par la suite. Les points soulevés sont le calcul de la valeur de marché, des cash-flows et de la valeur comptable des obligations, l'adéquation aux prix du marché, le réinvestissement et les tests utilisés.

Dans un troisième temps, les impacts du crédit stochastique sur les risques portés par la compagnie sont analysés.

Et dans un quatrième temps, la sensibilité des fonds propres aux paramètres du modèle (les paramètres de la prime de risque) sont étudiés.

### 2 Description du passif

Cette section détaille les caractéristiques du portefeuille choisi pour mener l'étude d'impact du crédit stochastique.

## 2.1 Les contrats du portefeuille

La compagnie fictive considérée propose des contrats d'épargne individuelle et collective et des rentes.

Les optionnalités du portefeuille désignent les engagements de l'assureur face à un environnement aléatoire. Les taux garantis, la participation aux bénéfices et les rachats dynamiques constituent ces optionnalités et ont un coût qui justifie l'emploi de scénarios stochastiques pour les évaluer.

## 2.2 Taux garanti du portefeuille

La première optionnalité du portefeuille vient du taux garanti aux assurés sur les fonds euros. Lorsque les épargnants placent leur argent, l'assureur s'engage contractuellement à verser un rendement minimum. Les contrats du portefeuille de passif de la compagnie d'assurance étudiée proposent un taux technique de 0%. Notre modèle ne permettant pas de modéliser les taux négatifs, cette garantie n'a pas de coût.

Le portefeuille présente en contrepartie du taux technique de 0% un taux minimum garanti. Ce taux engage l'assureur sur une durée d'un an. C'est ce taux qui est utilisé pour revaloriser le capital des sorties, qu'elles soient dues au décès ou au rachat total. En pratique, pour les épargnants demeurant dans le portefeuille ce taux est corrigé et remplacé par le taux définitif à la fin de l'année. Ce taux inclut alors la participation aux bénéfices à laquelle les assurés ont droit.

Le taux minimum garanti est choisi par la compagnie d'assurance chaque année pour l'année à venir. Cela lui permet de s'ajuster aux conditions économique. Dans le modèle ce taux est projeté comme une fonction du taux de marché.

## 2.3 Participation aux bénéfices

La deuxième optionnalité du portefeuille est la participation aux bénéfices à laquelle les assurés ont droit. Le minimum de PB est calculé selon l'équation (19). Dans le cas où le résultat financier est trop faible, l'assureur doit distribuer une partie de son résultat technique et donc une partie des chargements qu'il a perçus.

De plus le taux versé aux assurés va intervenir sur leur comportement et notamment sur les rachats. Ainsi si le taux de participation aux bénéfices est trop faible, les assurés préféreront prendre un contrat ailleurs. Ce risque est traité dans le paragraphe des rachats dynamiques. Le taux de participation aux bénéfices est toutefois minoré par la participation aux bénéfices réglementaire. Ce taux se calcule de la manière suivante

$$PB_{min}(t) = \begin{cases} 85\% & \text{résultat financier}(t) + 90\% \text{résultat technique}(t) \\ & \text{si } \text{résultat technique}(t) > 0 \\ 85\% & \text{résultat financier}(t) + 100\% \text{résultat technique}(t) \\ & \text{si } \text{résultat technique}(t) < 0 \end{cases} \quad (19)$$

Le résultat technique se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{résultat technique}(t) = & \text{Primes}(t) \\ & + PB \text{ distribuée sur sorties}(t) \\ & + PB \text{ distribuée sur stock}(t) \\ & - \Delta PM(t-1, t) \\ & - Prestations payées(t) \\ & - Taxes organiques(t) \\ & - \Delta PRE(t-1, t) \\ & - Frais et commissions(t) \end{aligned}$$

Le résultat financier se calcule de la manière suivante :

$$\text{résultat financier}(t) = \text{Produits financiers comptables}(t) + \Delta RC(t)$$

## 2.4 Taux de marché

Afin de modéliser le comportement des assurés, le modèle ALM simule le taux servi par l'ensemble des assureurs. Ce taux est appelé taux de marché et est défini comme le taux de revalorisation net médian sur le marché français. Il est construit à partir de données de marché de l'actif. C'est une fonction d'une combinaison linéaire de facteur de marché incluant les taux, les actions et le spread de crédit.

$$\text{Taux de marché} = f(\text{facteur}_{action} * \text{action}_t + \text{facteur}_{taux} * \text{taux}_t + \text{facteur}_{spread} * \text{spread}_t)$$

Le facteur de la composante spread de crédit est calibré sur une moyenne du spread d'obligations notées AA et de maturités 10 ans. Pour les simulations, la variable spread est construite à partir de l'ESG de crédit. Les spreads de l'ESG ne correspondent pas au spread historique utilisé pour le calcul du taux de marché en  $t=0$ . La variable utilisée pour la composante spread est donc une combinaison convexe des deux spreads de maturité 10 ans de l'ESG encadrant le spread historique. Avec  $\eta^1$  et  $\eta^2$  les deux ratings tels que les spreads de maturité 10 ans correspondant encadrent le spread historique, le modèle trouve  $y \in [0, 1]$  tel que :

$$spread_{historique} = y * s_{0,10}^{\eta^1} + (1 - y) * s_{0,10}^{\eta^2}$$

ainsi la composante spread du taux de marché se calcule pour chaque date de la projection comme

$$spread_t = y * s_{t,t+10}^{\eta^1} + (1 - y) * s_{t,t+10}^{\eta^2}$$

## 2.5 Rachats dynamiques

Les assurés peuvent être amenés à racheter leurs contrats pour plusieurs raisons. Le modèle en distingue deux types.

D'une part les rachats structurels sont modélisés de façon déterministe. Cela signifie que le modèle considère un taux de rachat moyen appliqué chaque année sur tous les assurés. Ce type de rachat peut s'interpréter comme les rachats dus aux besoins de chaque assuré. Les raisons de ces rachats sont nombreuses et en moyenne le taux varie peu d'une année sur l'autre.

D'autre part les rachats conjoncturels sont modélisés de façon dynamique. Cela signifie que le taux varie d'une année sur l'autre dans les projections et selon chaque simulation. Ces rachats reflètent la satisfaction des assurés par rapport au taux auquel leur épargne est revalorisée. Cette satisfaction est modélisée comme la proximité du taux servi à un taux cible. Le taux cible est le taux de marché multiplié par un coefficient qui représente le positionnement de l'assureur par rapport au marché. Le taux cible est encadré par deux taux, appelés taux plancher et taux plafond. Ces trois taux permettent de délimiter le comportement des assurés vis à vis des rachats. Le taux de rachat dynamique est une fonction linéaire par morceaux et continue du taux crédité. Si le taux crédité est en dessous du taux plancher, les assurés sont très enclins à racheter leurs contrats. Si le taux crédité est entre le taux plancher et le taux cible, le taux de rachat dynamique est positif mais reste proche de 0. Si le taux crédité est égal au taux cible alors les rachats dynamiques sont nuls par définition du taux cible. Par prudence de modélisation, le taux de rachat reste nul si le taux crédité est entre le taux cible et le taux plafond. Enfin si le taux crédité est supérieur au taux plafond alors les rachats dynamiques sont négatifs. Ils ne peuvent cependant pas excéder les rachats structurels, par conséquent les rachats qui sont la somme des rachats structurels et des rachats conjoncturels ne peuvent jamais être négatifs. La figure (10) représente le taux de rachat dynamique du modèle en fonction du taux crédité.

## 2.6 Les provisions

On détaille dans cette section les provisions d'une société d'assurance vie sur lesquelles le crédit stochastique a un impact.

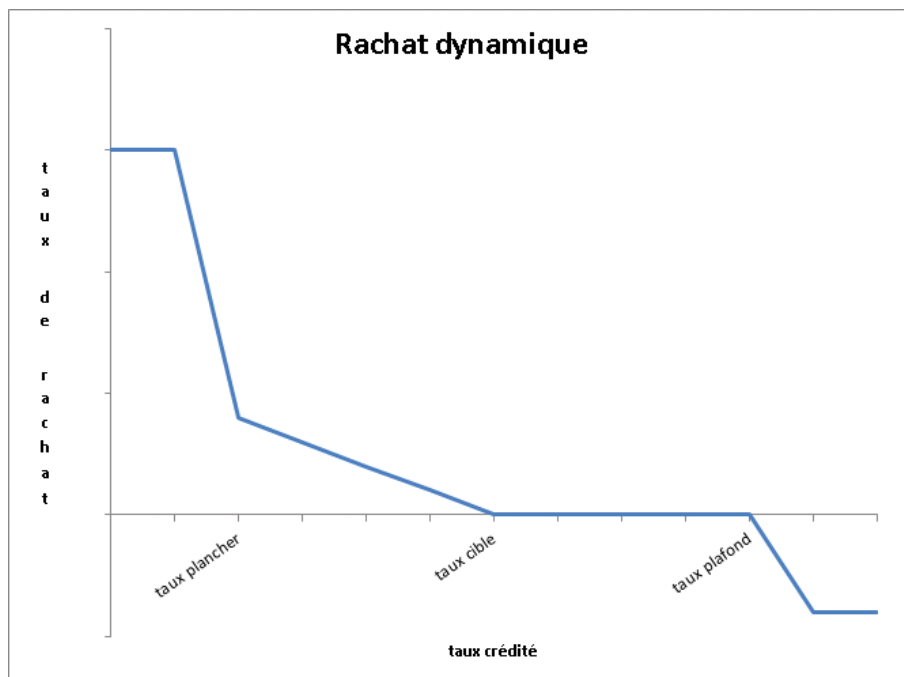


FIGURE 10 – Taux de rachat dynamique en fonction du taux crédité

- **Provision pour Dépréciation Durable (PDD) :**  
La PDD permet d'enregistrer au plus tôt une moins value perçue par l'assureur comme ayant de grande chance de se réaliser.
- **Provision pour Risque d'Exigibilité (PRE) :**  
La PRE permet de mettre de côté de l'argent disponible afin de couvrir la réalisation possible des moins values latentes dues à la baisse de la valeur de marché des actifs hors obligations. Elle se calcule comme la somme des moins values latentes de l'ensemble du portefeuille d'actif hors obligations. La dotation de cette provision peut être étalée sur 3 à 8 ans (en fonction de la durée du passif de l'assureur). La PRE est dotée nette de PDD.
- **Provisions pour Participation aux Bénéfices (PPB) :**  
La PPB permet de conserver une partie de la participation aux bénéfices afin de la redistribuer les années où l'assureur ne peut verser le montant qu'il souhaite ou qu'il doit verser. La PPB doit être distribuée sous 8 ans
- **Provision pour Aléa Financier (PAF) :**  
La PAF permet de mettre de côté de l'argent dans le cas où le rendement de son portefeuille d'actif ne lui permet pas de servir les taux garantis que l'assureur s'est engagé à verser.
- **Réserve de Capitalisation (RC) :**

La RC vise à lisser les plus ou moins values réalisées sur les obligations (R332-19).

## 2.7 Arbre de décision de la participation discrétionnaire

L'arbre de décision pour la distribution de la participation discrétionnaire est donnée figure (11). Il permet de comprendre l'imbrication de la règle de participation aux bénéfices et des rachats dynamiques.

## 3 Description de l'actif

Le portefeuille d'actif a la composition du portefeuille moyen des assureurs français. Cette répartition est donnée dans le rapport annuel de la Fédération Française des Sociétés d'Assurances 2013. La proportion de chaque actif est donnée dans le tableau (12). Le reste étant investi dans le cash.

## 4 Calcul des fonds propres

Les impacts du crédit stochastique sont calculés sur les fonds propres. Cette section détaille le calcul de ces derniers.

### 4.1 Calcul du profit

Les profits bruts sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned} Profit\ bruts &= Primes \\ &\quad - Sorties \\ &\quad - Frais \\ &\quad - Commissions \\ &\quad + Production\ Financière\ Comptable \\ &\quad - \Delta PM \\ &\quad - \Delta RC \\ &\quad - \Delta PRE \\ &\quad - \Delta PPE \\ &\quad - taxes \\ &\quad - CSG\&CRDS \end{aligned}$$

avec :

- **Primes** : les primes reçues sur la période
- **Sorties** : coûts dû à la sortie de contrat par les assurés sur la période (décès, maturité, rachat, conversion en rente, rachat partiel)
- **Frais** : frais payés sur la période
- **Commissions** : commissions payées par l'assureur sur la période

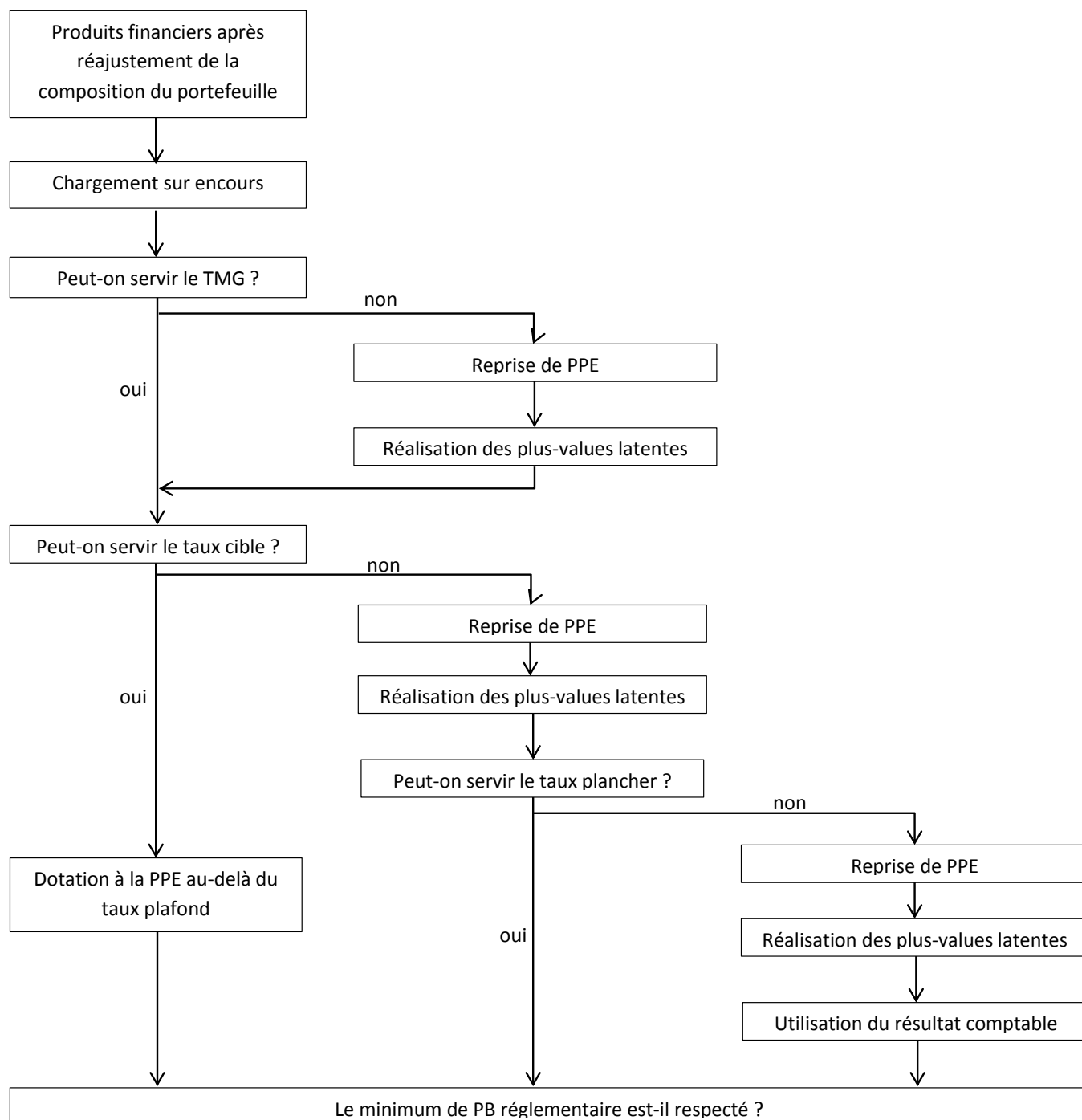


FIGURE 11 – Arbre de décision pour l’attribution de la participation aux bénéfices

Obligations	71,9%
Actions	21,7%
Immobilier	3,6%

FIGURE 12 – Proportion de chaque actif dans le portefeuille

- **Production financières comptable** : la production financière des actifs sur la période (détails dans le paragraphe suivant).
- **Variation des PM** : Variation des provisions mathématiques sur la période
- **Variation de RC** : Variation de la réserve de capitalisation sur la période
- **Variation de PRE** : Variation des provisions pour risque d'exigibilité sur la période
- **Variation de PPE** : Variation des provisions pour participation aux excédents sur la période
- **Taxes** : Taxes payées sur la période (taxe professionnelle et taxe organique)
- **CSG & CRDS** : Contributions sociales payées sur la période

La production financière comptable se calcule selon chaque type d'actif de la manière suivante :

- **Obligations** :

$$\begin{aligned} Production\ Financière\ Comptable(t) &= Cash\ Flow(t) \\ &\quad + \Delta Valeur\ Net\ Comptable(t) \\ &\quad + Coupon\ Couru(t) \end{aligned}$$

- **Actions, OPCVM, Immobilier, Futur, Hedge Fund, Participations stratégiques** :

$$\begin{aligned} Production\ Financière\ Comptable(t) &= \\ &\left\{ \begin{array}{l} Dividende(t) + Plus\ ou\ Moins\ Values\ réalisées(t) \\ Performance(t) + Plus\ ou\ Moins\ Values\ réalisées(t) \end{array} \right. \end{aligned}$$

- **Avances sur polices** :

$$\begin{aligned} Production\ Financière\ Comptable(t) &= \\ Assiette(t) Avance(t) * taux\ d'avance(t) \end{aligned}$$

avec :

- La performance correspond au rendement total incluant les dividendes.



•

$$\begin{aligned} & \text{Plus ou Moins Values réalisées}(t) \\ & = \\ & (Valeur de Marché(t) - Valeur Net Comptable(t)) * proportion de l'actif vendu(t) \end{aligned}$$

Les profits nets sont calculés comme :

$$Profit\ nets(t) = Profit\ bruts(t) * (1 - taux\ d'IS)$$

## 4.2 Calcul de la VIF

La Value of In Force (VIF) est calculé différemment sur les unités de compte et sur les contrats euro. Pour les unités de compte, la VIF est donnée par :

$$\begin{aligned} VIF\ UC\ nette(t) = & E[Profit\ nets\ futurs\ actualisés(t)] \\ & - provision\ pour\ garantie\ plancher(t) * (1 - taux\ d'IS) \end{aligned}$$

Pour les produits euro, la VIF est donnée par :

$$\begin{aligned} VIF\ euro\ nette(t) = & E[ Profit\ nets\ futurs\ actualisés(t) \\ & + Production\ financière\ RC\ nette\ futurs(t) \\ & + Production\ financière\ PRE\ nette\ futurs(t) \\ & + RC\ résiduelle\ nette(t)] \end{aligned}$$

## 4.3 Calcul du BEL

Le Best Estimate Liabilities est calculé à partir de la valeur des actifs et de la VIF. Sa valeur est donnée par :

$$BEL\ net(t) = Actif(t) - VIF\ nette(t)$$

en pratique *Actif* désigne l'actif des contrats euros qui est calculé comme la somme des valeurs de marché des actifs mis en face des contrats euro ou l'actif des contrat UC qui est calculé comme la provision mathématique des contrats en unité de compte.

## 4.4 Calcul des Fonds Propres

Les fonds propres sont finalement calculés selon la formule suivante :

$$\begin{aligned} Fonds\ Propres(t) = & VIF\ UC(t) \\ & + VIF\ euro(t) \\ & + Actif\ appartenant\ aux\ actionnaires(t) \end{aligned}$$

## 5 Calcul du SCR

La formule standard a été utilisée pour mesurer l'impact du crédit stochastique sur les risques portés par la compagnie d'assurance considérée. La segmentation des risques le niveau des stress appliqués et les corrélations utilisées pour agréger les risques sont ceux du document 32015R0035 du site Eur-Lex<sup>2</sup>. L'impact du crédit stochastique sur le SCR est de +2,03%.

## 6 Premier modèle : Défauts Totaux

La première solution testée, consiste à simuler l'évolution du rating d'une obligation dans le modèle Prophet.

La méthodologie est assez intuitive. Au lieu d'utiliser un ESG contenant directement les trajectoires de rating, on utilise un ESG contenant les matrices de transition stochastiques à 1 an à chaque date de projection. Le modèle de crédit développé plus haut permet de produire ces matrices de transition stochastiques. Les transitions de rating sont ensuite tirées aléatoirement dans Prophet.

Soit  $(p_{i,1}, \dots, p_{i,K})$  les probabilités de transition à 1 an à la date  $t$  pour une obligation notée  $i$  en  $t$ . On tire une loi uniforme  $U$ . L'état d'arrivée  $j$  en  $t+1$  est tel que

$$\sum_{k=1}^{j-1} p_{i,k} < U < \sum_{k=1}^j p_{i,k}$$

avec la convention  $\sum_{k=1}^0 = 0$

Nous reprenons les notations de la fin de la partie 4. La matrice de transition inconditionnelle est donnée par

$$P(t, T) = f(\pi_t, T - t, \beta)$$

La procédure qui permet de calculer le nouveau rating à partir du rating courant et de la matrice de transition à 1 an est une procédure déterministe. En notant  $h$  cette fonctionnelle, on a

$$\eta_{t+1} = h(\eta_t, P(t, t+1), U) = h(\eta_t, f(\pi_t, T - t, \beta), U) \quad (20)$$

On voit ici bien apparaître la double source d'aléa qui régit les migrations de la notation.  $\pi_t$  guide l'évolution des probabilités de transition,  $U$  permet de migrer effectivement d'un état à l'autre.

Nous n'avons pas introduit de corrélation entre les obligations pour tirer les migrations. Les réalisations de loi uniforme sont indépendantes.

---

2. <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/FR/TXT/?uri=CELEX:32015R0035>

Dans le modèle la trajectoire de rating est tirée par obligation et non par émetteur. Cela implique que deux obligations d'un même émetteur peuvent avoir un rating différent.

Le tirage aléatoire dans Prophet soulève quatre problèmes. Premièrement la qualité de l'aléa généré, deuxièmement la répétabilité des résultats, troisièmement le temps de calcul et quatrièmement la taille du réinvestissement. Le dernier point est détaillé dans la section dédiée.

Le générateur de nombre aléatoire de Prophet est un générateur de type Parker&Miller. Ce générateur s'écrit

$$I_k = (aI_{k-1} + c) \bmod m$$

avec  $a = 16807 = 7^5$ ;  $c = 0$ ;  $m = 2147483647 = 2^{31} - 1$

Ce générateur date de 1988 et est parfois nommé MINSTD. Il a été critiqué par Marsaglia et Sullivan.

Le fait de tirer un aléa dans les simulations pose le problème de la répétabilité des résultats sur différents runs. Deux lancements de Prophet avec les mêmes données d'entrée doivent donner le même résultat. La graine d'un générateur aléatoire est le premier terme utilisé pour calculer un nombre aléatoire (avec les notations précédentes, la graine est  $I_0$ ). La propriété de répétabilité est assurée par Prophet car la graine du générateur est fixée de manière déterministe. Plus précisément la graine est déterminée comme une fonction déterministe de la simulation. En effet Prophet parallélise le code selon les simulations afin de répartir l'exécution sur différents processeurs. La graine par simulation est donnée par

$$Seed_i = ((Seed_{init} - 1 + Step * (i - 1)) \bmod 211587619) + 1$$

avec  $i$  le numéro de la simulation,  $Seed_{init}$  la graine initiale et  $Step$  un deuxième paramètre.

Enfin le tirage des migrations de rating requiert un certain nombre d'opérations. Il faut en effet tirer l'aléa et parcourir la matrice de transition pour chaque obligation, pour chaque simulation et pour chaque pas de temps.

## 7 Deuxième modèle : Défaut Proportionnel

La simulation d'un chemin de rating par obligation permet de refléter au mieux la réalité. Cependant le modèle ALM nécessite des réinvestissements. Or ces réinvestissements sont menés sur des actifs types. Ils représentent une classe d'actif aux caractéristiques communes. Pour les obligations, par exemple, la maturité et le rating sont les deux informations utilisées pour acheter dans le modèle. Le nominal est fixé tel que l'obligation achetée

réponde à la demande. Les montants investis sur une obligation peuvent donc être très importants. Par conséquent le défaut de cette obligation peut être très pénalisant.

Afin de remédier au poids trop important de ces obligations fictives le défaut a été traité de manière proportionnelle. Cela signifie que l'obligation n'est pas dans un seul rating mais dans tous à la fois dans des proportions définies grâce aux matrices de transition. Chaque obligation a donc un vecteur de proportion qui lui est associé noté  $\Theta_t$  et qui contient la proportion de l'obligation dans chaque rating à la date courante. Ce vecteur est mis à jour grâce à la matrice de transition risque neutre 1 an.

$$\Theta_t = \Theta_{t-1} P_{t-1,t}^{\pi_t}$$

## 7.1 Impact sur la TVOG

L'utilisation du défaut proportionnel est une simplification. La simulation d'un chemin de rating nécessite deux aléas. Celui qui dirige la prime de risque et permet de construire les matrices de transition et celui qui permet de tirer aléatoirement le rating en fonction du rating au pas de temps précédent et de la matrice de transition. La méthode du défaut proportionnel permet de s'affranchir du deuxième aléa. Elle réduit donc l'impact de la valeur temps des options et garanties (Time Value of Options and Guarantees en anglais que nous écrirons TVOG).

Cependant nous avons choisi cette méthode car elle s'approche davantage de la réalité que la méthode mettant en jeu des obligations dont le nominal peut dépasser les cent millions d'euros.

Le modèle à défaut proportionnel étant une simplification de la réalité et le modèle à défaut total trop sensible à la taille des réinvestissements, nous avons cherché à mesurer leur impacts respectifs sur la TVOG afin de choisir le modèle le plus proche de la réalité. La justification du modèle choisi est faite dans la section réinvestissement.

## 7.2 Valeur de marché

L'obligation n'est pas dans un seul rating dans le modèle proportionnel. On a associé un vecteur contenant à chaque coordonnée le prix de l'obligation si elle était dans ce rating. Pour calculer un prix on utilise le spread correspondant au rating pour actualiser les cash flows futurs. Le prix de l'obligation en défaut est la somme des cash flows futurs actualisés au taux sans risque calculés sur la base du nominal abattu du taux de perte. Le prix de l'obligation est alors la moyenne pondérée des prix dans chaque rating par la proportion de l'obligation dans chaque rating.

$$\begin{cases} MV_i &= E^{\mathbb{Q}}[\sum_{t=1}^{maturite} CFL_t * Def(t) * Def_i(t)] \\ MV_{defaut} &= E^{\mathbb{Q}}[\sum_{t=1}^{maturite} CFL_t^{defaut} * Def(t)] \\ MV &= \sum_{i=1}^{defaut} MV_i * \Theta_t(i) \end{cases}$$

## 7.3 Cash flow et valeur comptable

### 7.3.1 Coupon

Dans le modèle de Jarrow-Lando et Turnbull, le nominal est rendu à maturité même si le défaut est survenu. Cela se traduit sur les coupons par le maintien de leur distribution après le défaut. Dans ce cas les coupons sont calculés sur la base d'un nominal abattu du taux de perte.

Dans le modèle à défaut proportionnel, le coupon est la moyenne pondérée par la proportion de l'obligation dans chacun des deux états du coupon de la partie de l'obligation n'ayant pas fait défaut et de celle ayant fait défaut. La valeur du coupon en  $t$  s'écrit alors

$$C_t = coupon * (1 - proportion_t^{defaut}) + \delta * coupon * proportion_t^{defaut}$$

### 7.3.2 Valeur comptable

Les procédures suivies en cas de défaut sont variables selon chaque cas. Les procédures judiciaires de liquidation sont longues et dépendent de nombreux paramètres. Par conséquent un défaut peut être un simple retard de paiement des coupons, la réduction ou le non paiement d'une partie ou de la totalité des coupons, un rééchelonnement de la dette ou un défaut total ou partiel qui entraîne un non remboursement de la totalité ou d'une partie du nominal. A l'incertitude sur les modalités de remboursement s'ajoute le délai de décision qui peut être significatif entre le moment où le défaut est déclaré et où les modalités de remboursement commencent à s'appliquer. Laps de temps durant lequel des coupons peuvent ou non être versés.

Cela conduit à devoir choisir une modalité pour l'enregistrement comptable du défaut. Trois méthodes nous ont paru envisageables. La première consiste à enregistrer comptablement le défaut à la date à laquelle est survenu le défaut. La valeur comptable enregistrée est le nominal abattu du taux de perte sans aucune actualisation. La moins value est donc entièrement supportée à la date du défaut. Cela semble cependant contradictoire avec la modélisation du défaut par Jarrow Lando et Turnbull dans lequel le défaut est constaté à maturité. En particulier les coupons continuent d'être versés dans le modèle de Jarrow, Lando et Turnbull. Cette méthode d'amortissement est représenté sur la figure (13) sous "amortissement 1". La seconde consiste à recalculer une valeur comptable en considérant que le nominal a

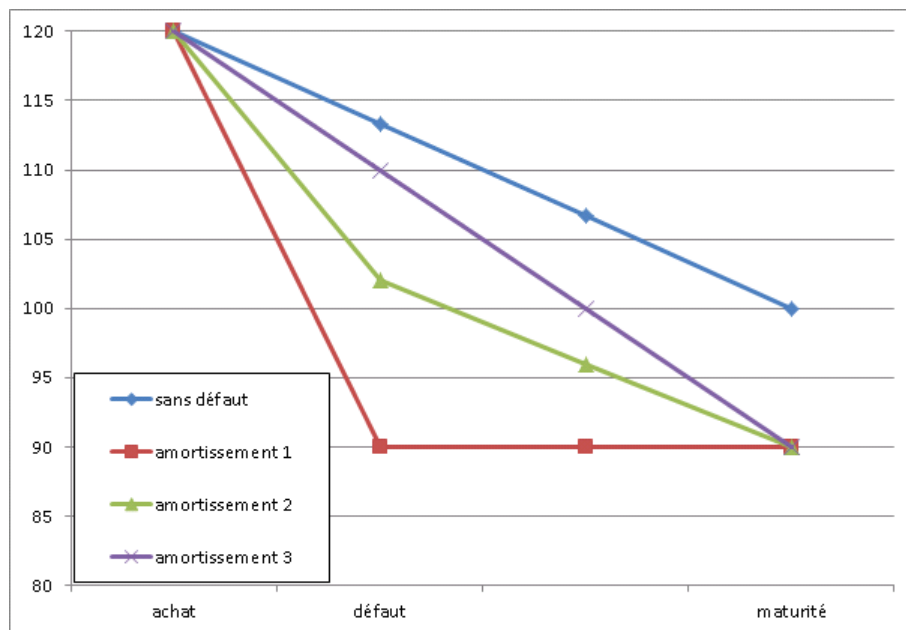


FIGURE 13 – Amortissement en cas de défaut

été abattu du taux de perte. Cette méthode change la structure de l'amortissement. Dans le cadre d'un amortissement linéaire, cette méthode diminue la pente de l'amortissement ce qui conduit à enregistrer la moins valeur de plus en plus fort au cours de la projection à partir du défaut. Or la comptabilité doit suivre le principe de sincérité et d'image fidèle. L'enregistrement de la moins valeur n'a donc pas de raison d'être reportée en fin de vie de l'obligation. Cette méthode d'amortissement est représentée sur la figure (13) sous "amortissement 3". Nous avons donc choisi une troisième méthode. Il s'agit de réduire la valeur comptable du taux de perte à la date du défaut. L'amortissement conserve alors la même tendance que sans le défaut ce qui est cohérent avec le fait que l'échéancier de l'obligation est inchangé dans le modèle JLT. De plus cette méthode permet de répartir la moins valeur sur toute la durée de vie restante de l'obligation ce qui est en accord avec le maintien de la distribution des coupons. Cette méthode d'amortissement est représentée sur la figure (13) sous "amortissement 2".

Dans le cadre d'un amortissement linéaire, la figure (13) représente les trois méthodes sur quatre période de temps.

La méthode retenue s'écrit :

$$\begin{cases} VNC(t) &= (1 - ((1 - \delta)\Theta_t(défaut))) * VNC^{init}(t) \\ nominal &= (1 - ((1 - \delta)\Theta_t(défaut))) * nominal^{init} \end{cases}$$

avec

$$VNC = \text{Valeur Nette Comptable}$$

$$VNC^{init}(t) = VNC(0) - (nominal - VNC(0)) * \frac{t}{maturité(0)}$$

$maturité(0)$  et  $nominal^{init}$  la maturité et le nominal à la date d'achat

## 7.4 Consistance avec les prix du marché

Le modèle ALM utilisé par le capital économique est un modèle risque neutre. Les prix calculés par le modèle doivent donc être égaux à ceux constatés sur le marché. La valeur d'une obligation est donnée par l'espérance de la somme des cash flows futurs actualisés. La difficulté réside dans le choix de l'actualisation.

Dans le modèle de crédit développé dans la partie précédente, les spreads simulés correspondent à une classe de rating. Ils sont le spread que le marché demande en plus du taux sans risque pour le risque dû au rating. Cependant une obligation particulière n'a pas exactement le même spread que celui de sa classe de rating. Le spread de l'obligation lié au rating permet d'expliquer une partie du spread mais une partie reste inexpliquée.

En utilisant seulement le taux sans risque et le spread lié au rating, le modèle ne permet pas de retrouver les prix du marché. Nous proposons dans cette partie deux méthodes pour corriger cet écart. Celle retenue est la deuxième.

### 7.4.1 Ajustement multiplicatif

La première solution à l'écart de valeur entre la sortie du modèle et la valeur de marché est d'appliquer un coefficient multiplicatif à la sortie du modèle. Le modèle devant donner les prix du marché, on calcule le rapport

$$\frac{MV_0}{V_0}$$

Avec  $MV_0$  la valeur de marché en 0 et  $V_0$  la valeur calculée par le modèle en 0. Ce coefficient est appliqué aux coupons et au nominal de l'obligation.

Cette méthode permet de faire correspondre les prix du modèle avec ceux du marché en  $t=0$ . Cependant la modification des cash flow futurs entraîne des incohérences. Cela modifie le taux de rendement interne de l'obligation, modifie les coupons courus ainsi que le calcul de l'amortissement comptable. On modifie donc potentiellement le calcul des plus ou moins value réalisées au cours des simulations.

Nous avons donc étudié une deuxième solution.

#### 7.4.2 Ajustement à l'aide d'un spread déterministe

La valeur de l'obligation notée  $i$  en 0, calculée par le modèle peut s'écrire avec des notations simplifiées :

$$V_0^i = \sum_{t=0}^T C F L_t e^{-r_t * t} e^{-s_t^i * t}$$

Cette valeur n'est pas celle du marché. On modélise l'écart par un spread déterministe qui s'interprète comme le spread de l'obligation en excès du spread du rating de l'obligation. On a donc

$$M V_0 = V_0^i = \sum_{t=0}^T C F L_t e^{-r_t * t} e^{-s_t^i * t} e^{-s^{det} t}$$

Le spread déterministe  $s^{det}$  est calculé en  $t=0$  à l'aide d'un algorithme d'optimisation. Ce calcul est fait en amont du modèle ALM Prophet.

Cet ajustement est un bon indicateur de la qualité des spreads par rating que nous avons calibrés. En effet plus l'ajustement déterministe est petit plus les spreads par rating sont proches de ceux de l'obligation. Idéalement, si les ratings sont représentatifs du niveau de risque des obligations, l'ajustement devrait être nul en moyenne (et équitablement réparti autour de 0). Cela veut dire que le spread déterministe peut être négatif. Cela signifie alors que l'obligation est moins risquée que son rating.

Dans le précédent modèle employé par Aviva, seul un spread déterministe était calibré. Pour des obligations très sûres, le spread pouvait être négatif mais en général il était positif.

L'effet indésirable entraîné par des spread stochastiques trop élevés est d'introduire trop de volatilité dans le modèle. En effet, nous avons vu dans la partie 4 que les spreads sont une fonction déterministe des probabilités de défaut. Si les spreads sont trop importants, les probabilités de défaut sont aussi trop importantes et le modèle tire la réalisation d'un défaut trop souvent. Les migrations sont en effet tirées à partir des probabilités de transition des ratings (et pas des probabilités de transition spécifiques à chaque obligation). Le modèle corrige cet excès de défaut par des spreads déterministes négatifs. Les coupons et le nominal des obligations sont donc artificiellement grossis pour combler les trop nombreux défauts.

Cela ne correspond pas à la réalité. Il est donc préférable d'avoir des spreads stochastiques plutôt bas et d'ajuster la valeur de marché avec le spread déterministe. Le spread stochastique donne la cadence des défauts alors que le spread déterministe est un ajustement au marché.

La distribution de l'ajustement au prix du marché est détaillé par rating dans le tableau (15).

L'ajustement déterministe est négatif. Cela signifie que les spreads par rating calibrés sont trop élevés. Cette situation s'éloigne de la réalité car



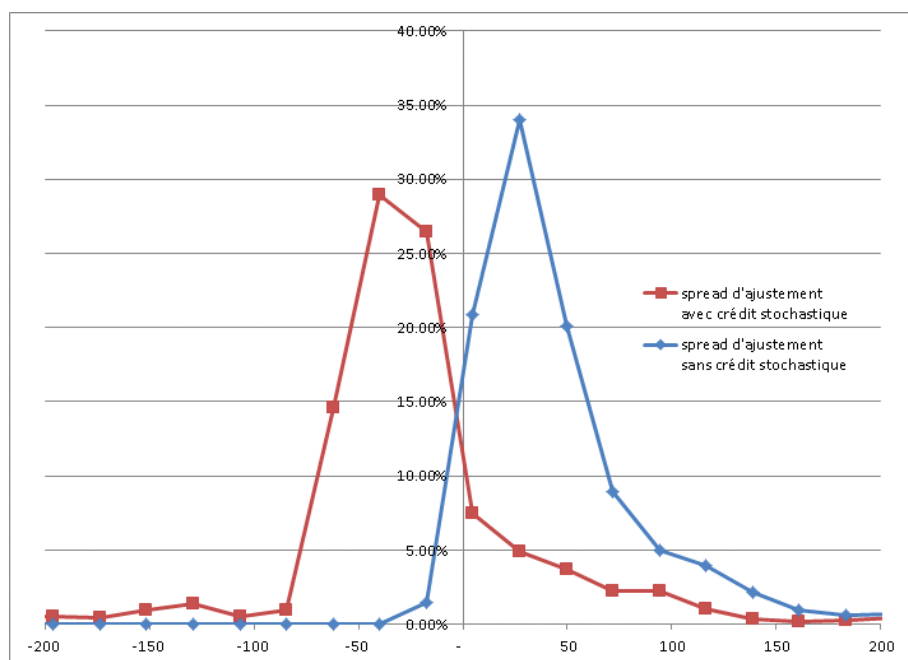


FIGURE 14 – Histogramme des ajustements déterministes de market consistency

<i>rating</i>	<i>avant CS</i>	<i>apres CS</i>
<i>tous</i>	38	−34
<i>AAA</i>	−4	−22
<i>AA</i>	8	−35
<i>A</i>	38	−6
<i>BBB</i>	48	−33
<i>BB</i>	91	−149

FIGURE 15 – Moyenne de l’ajustement déterministe de market consistency

<i>rating</i>	<i>avant CS</i>	<i>apres CS</i>
<i>tous</i>	51	73
<i>AAA</i>	25	35
<i>AA</i>	35	44
<i>A</i>	46	61
<i>BBB</i>	48	72
<i>BB</i>	55	91

FIGURE 16 – Ecart-type de l’ajustement déterministe de market consistency

cela signifie que les défauts surviennent plus souvent et que les coupons sont grossis artificiellement (ajustement négatif) pour compenser les pertes induites par les défauts. Un développement du modèle consisterait à calibrer  $\pi_0$  pour minimiser la valeur absolue de l'ajustement déterministe.

Le fait d'avoir un ajustement négatif est cependant une vision prudente car cela signifie que l'on se place dans le cas générant le plus de volatilité.

### 7.4.3 Interpolation des spreads

L'outil utilisé pour supporter le modèle ALM est ALS Prophet. Pour limiter la taille des tables données en entrée du modèle, on utilise des ESG de pas annuel. Ces ESG sont ensuite interpolés dans Prophet pour obtenir un pas mensuel. L'interpolation adoptée pour les spread est la même que pour le taux sans risque. C'est une interpolation exponentielle sur les prix de zéro-coupon en excès du sans risque.

L'interpolation se fait  $\forall t \in [t_i, t_{i+1}] \quad \forall i \in [1, N-1]$  selon

$$e^{-s_t t} = x e^{-s_{t_i} t_i} + (1-x) e^{-s_{t_{i+1}} t_{i+1}}$$

$$x = \frac{e^{-s_f(t-t_i)} - e^{-s_f(t_{i+1}-t_i)}}{1 - e^{-s_f(t_{i+1}-t_i)}}$$

avec  $s_f$  l'ultimate forward spread, qui en pratique a été choisi comme étant le spread forward entre les deux dernières maturités disponibles. Soit en convention continue  $e^{-s_f(t_N-t_{N-1})} = \frac{e^{s_{t_N} t_N}}{e^{s_{t_{N-1}} t_{N-1}}}$  d'où

$$s_f = \frac{s_{t_N} t_N - s_{t_{N-1}} t_{N-1}}{t_N - t_{N-1}}$$

L'extrapolation se fait  $\forall t > T_N$  par  $e^{-s_t t} = e^{-s_{t_N} t_N} e^{-s_f(t-t_N)}$  d'où

$$s_t = \frac{s_f t + (s_{t_N} - s_f) t_N}{t}$$

L'étape d'interpolation est une des étapes qui demande le plus d'opérations numériques par rapport aux autres modifications que le crédit stochastique a nécessitées.

## 7.5 Réinvestissement

Au cours de la projection (sur 50 ans) les obligations détenues en portefeuille arrivent à maturité. Il faut donc racheter de nouveaux actifs pour continuer à servir les assurés. Le réinvestissement pour les obligations se fait sur des obligations types. Les critères discriminants pour les différents types sont la maturité, la catégorie d'obligation (taux fixe, taux variables, inflation) et avec l'intégration du crédit stochastique, le rating. Le réinvestissement se fait sur 17 maturités pour les obligations à taux fixes qui sont les seules

concernées par le crédit stochastique. La proportion de réinvestissement dans chaque maturité est calculée en fonction de la proportion de chaque maturité en  $t=0$  dans le portefeuille de la compagnie d'assurance modélisée. La même stratégie a été suivie pour le choix des ratings. Cela permet de garantir que la composition du portefeuille reste constante au cours de la projection.

Seul le taux de coupon est donné : la valeur de marché est donc calculée comme la valeur actualisée des taux de coupon. Le taux d'actualisation est la courbe de taux sans risque plus la courbe de spread du rating de l'obligation à la date d'achat dans la projection. Cette valeur de marché est ensuite multipliée pour obtenir la valeur de marché cible pour ce type d'obligation (type d'obligation, maturité et rating). Le facteur multiplicatif est donc le nominal de l'obligation achetée. Le taux de coupon de chaque type d'obligation a lui aussi été calculé à partir du portefeuille en  $t=0$ . Il est la moyenne des taux de coupon des obligations du portefeuille en  $t=0$  appartenant à cette catégorie.

Le choix de réinvestir dans une seule obligation pour une catégorie pose problème lorsque le défaut des obligations est simulé. En effet certaines catégories de réinvestissement peuvent porter plus d'une centaines de millions d'euros. Par conséquent lorsque cette obligation fait défaut l'impact est significatif. Ceci est une des raisons pour lesquelles le modèle à défaut proportionnel a été retenu.

Nous allons donc exhiber les impacts dans le modèle à défaut proportionnel du réinvestissement choisi puis nous allons étudier trois alternatives dans lesquelles les réinvestissements se font sur du peu risqué (que sur du AAA) dans le scénario 1 puis dans des obligations notées BBB dans le scénario 2 et enfin dans du risqué (CCC) dans le scénario 3. Pour finir nous justifierons l'emploi du modèle à défaut proportionnel en étudiant le nominal des obligations composant le réinvestissement.

### 7.5.1 Réinvestissement retenu

La cible de réinvestissement calibrée sur le portefeuille en  $t=0$  est donnée en figure (17).

Les taux de coupon servi par les obligations ont aussi été calculés sur le portefeuille en  $t=0$ . Ces taux sont donnés sur la figure (18). Il est intéressant de constater que les taux courts (inférieurs à 7 ans) servent des coupons plus élevés que les maturités plus longues. Cela va à l'encontre de ce qui peut être constaté sur le marché mais s'explique par la date d'achat de ces obligations. Les obligations court terme du portefeuille de l'entité modèle sont des anciennes obligations long terme gardées en portefeuille. Cela constitue une limite du choix consistant à reproduire le portefeuille en  $t=0$  pour les réinvestissements.

Les coupons servis par les obligations moyen terme et long terme sont plus en ligne avec ce que le marché propose car les taux de coupon aug-

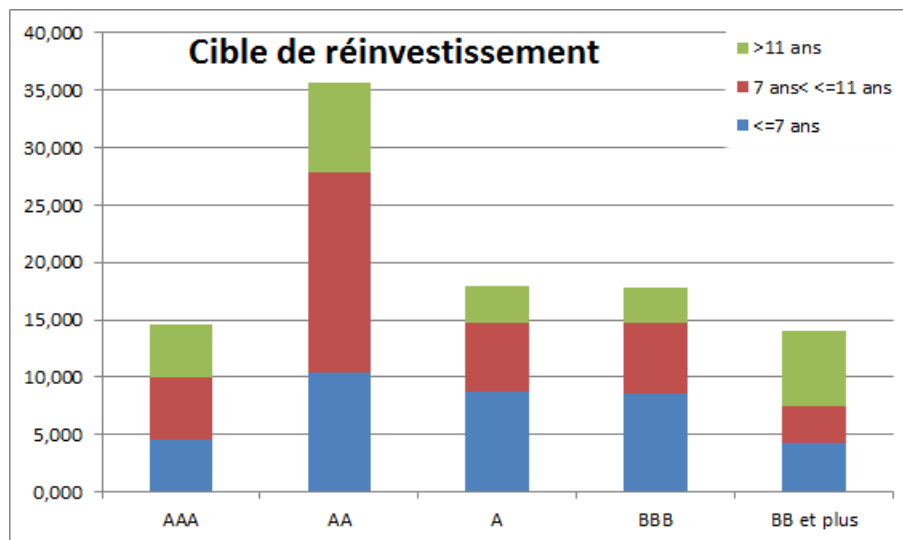


FIGURE 17 – Cible de réinvestissement (en % du réinvestissement total)

mentent avec la maturité.

Les coupons ont aussi plutôt tendance à augmenter avec le rating. Les points qui ne respectent pas la tendance peuvent s'expliquer par l'hétérogénéité du portefeuille. Il contient à la fois des obligations d'entreprise et des obligations souveraines. Par exemple, un tiers du portefeuille AA de maturité comprises entre 7 et 11 ans est composé d'obligation d'état français dont les taux de coupon sont plus faibles que les obligations corporate.

### 7.5.2 Sensibilités

Afin de mieux évaluer le comportement du modèle aux réinvestissements, trois scénarios ont été testés. Ces trois scénarios se distinguent par le rating des obligations dans lequel le réinvestissement est fait. Les taux de coupons ont été fixés par scénarios en fonction du rating seulement et ne dépendent donc plus de la maturité. Les taux adoptés sont présentés dans le tableau (19). Les proportions de réinvestissement tiennent encore compte de la maturité.

On remarque qu'en général ces coupons donnent une valeur de l'obligation différente de 1. Les obligations rachetées ne coûtent donc pas le pair. Cela signifie que l'obligation verse des coupons différents (plus important) que le taux sans risque. Mais en contre partie il y a un amortissement car la valeur de marché à la date d'achat n'est pas le nominal. Comme la variation de valeur comptable entre dans la production financière, les obligations rachetées ont bien un rendement égal à celui du taux sans risque. Le modèle est donc bien risque neutre.

Les impacts sont calculés sur les fonds propres. Ils sont donnés dans le tableau (20).

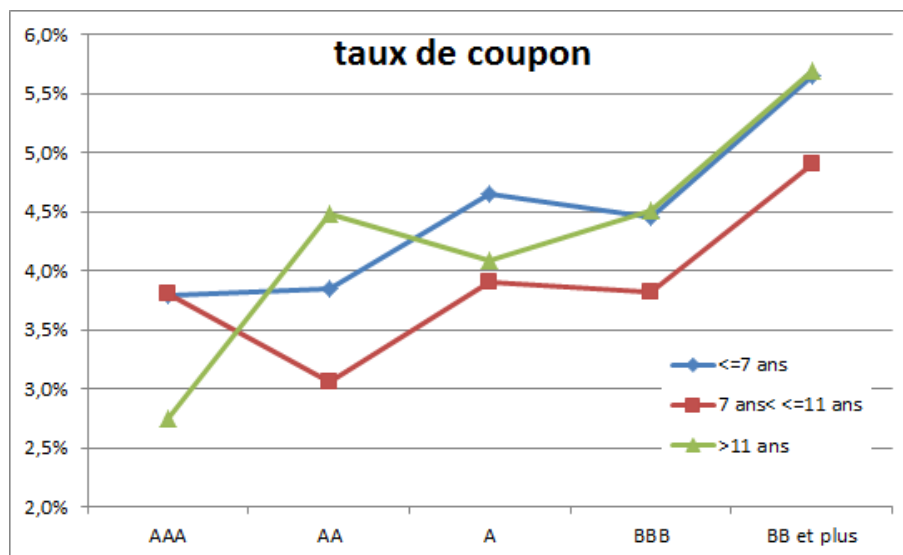


FIGURE 18 – Taux de coupon des obligations taux fixe par maturité et rating

scénario	rating	taux de coupon
1	AAA	3,77%
2	BBB	4,03%
3	CCC	5,70%

FIGURE 19 – Taux de coupon par rating des réinvestissements

scénario	en % du central
1	0,64%
2	-0,37%
3	-9,04%

FIGURE 20 – Impacts sur les fonds propres des différents scénarios de réinvestissement

scénario	scénario déterministe	coût des optionnalités
1	0,13%	-2,60%
2	0,06%	2,32%
3	-0,79%	43,20%

FIGURE 21 – Impacts sur les fonds propres déterministes et la TVOG des différents scénarios de réinvestissement

Pour le réinvestissement il n'y a pas de risque neutralisation. Le coefficient déterministe n'est donc pas utilisé. La valeur de marché est celle du modèle : la somme des cash flows futurs actualisés au taux risqué à la date d'achat de l'obligation.

Le modèle étant risque neutre chaque scénario propose le même rendement des actifs. Le scénario 1 dans lequel le réinvestissement est fait sur le AAA propose des coupons faibles mais le risque de défaut est aussi faible. A l'inverse le scénario 3 propose des taux de coupon élevés mais le risque de défaut est aussi important. Le scénario 3 est donc plus volatile que le scénario 1.

Les impacts s'expliquent donc par deux sources. D'une part la volatilité des actifs varie ce qui augmente le coût des optionnalités du passif et d'autre part la chronologie des coupons est modifiée.

Afin de distinguer les deux effets, les impacts sur un scénario déterministe sont calculés et par différence avec les impacts totaux, il est possible de calculer le coût des optionnalités. Les impacts sur le scénario déterministe permettent d'analyser l'impact du changement dans la chronologie des coupons alors que la variation de coût des optionnalités reflète les variations de la volatilité des actifs.

Cette analyse par différence pose un problème lorsque plusieurs résultats doivent être comparés. La référence (le calcul stochastique) n'étant pas la même, il est difficile d'interpréter la variation de coût des optionnalités. Les conclusions tirées doivent donc être considérées avec prudence.

Le tableau (21) synthétise les impacts sur le scénario déterministe et sur le coût des optionnalités (variation de la TVOG).

Pour le scénario 1 le gain sur le scénario déterministe signifie que les fonds propres ont augmentés en réinvestissant sur du AAA. Au contraire en réinvestissant dans du plus risqué les fonds propres diminuent. Cela signifie que le portefeuille est sensible au raccourcissement de la durée de l'actif. Cette durée est approchée par la formule :

$$Duration\ Actif = \frac{\sum_{t=0}^T t * Cash\ Flows\ Obligations * B(0, t)}{\sum_{t=0}^T Cash\ Flows\ Obligations * B(0, t)}$$

En pratique la durée des obligations varie par rapport au scénario

scénario	duration
1	1,31%
2	0,39%
3	-9,02%

FIGURE 22 – Variation de la duration de l’actif selon les scénarios de réinvestissement

central selon les chiffres du tableau (22).

Le raccourcissement de la duration s’explique par les défauts plus nombreux au cours de la projection et aussi par des coupons plus importants en début de projection. Intuitivement un portefeuille d’assurance a besoin de servir ses assurés sur du long terme et recevoir des cash flows importants sur du court terme n’est pas adapté. Cependant l’impact de la modification de la chronique des cash flows est marginal par rapport à celui du coût des optionnalités.

Le coût des optionnalités augmente significativement. Cela signifie que les fonds propres diminuent car il faut en retirer ces coûts. Sur certaines simulations la probabilité de défaut va devenir très importante et l’assureur ne va plus être en mesure de servir ses assurés et va avoir un résultat négatif. Cela survient même si le défaut est un défaut proportionnel car les matrices de transition, elles, sont stochastiques. La probabilité de défaut peut donc varier d’une simulation à une autre.

### 7.5.3 Justification du modèle à défaut proportionnel

Dans le modèle, les réinvestissements par type d’obligation conduisent à des montants pouvant atteindre la centaine de millions d’euros. Dans le cadre du modèle à défaut total, cela peut conduire à des défauts très pénalisants. Ces défauts entraînent de grosses moins values et donc un résultat négatif qui pénalisent fortement la moyenne des simulations. Or de tels investissements sont loin de la réalité. Le rapport des nominaux des réinvestissements sur le nominal moyen du portefeuille au cours de la projection sont présentés dans la figure (23). Les nominaux du réinvestissement sont régulièrement 10 fois plus grands que ceux du portefeuille et peuvent atteindre 20 fois le nominal moyen du portefeuille.

Le modèle à défaut proportionnel a donc été employé. Cela revient à réinvestir sur un nombre illimité d’obligation. Cela constitue aussi un écart à la réalité mais les impacts calculés sont plus proches de ce qu’un vrai réinvestissement pourrait produire.

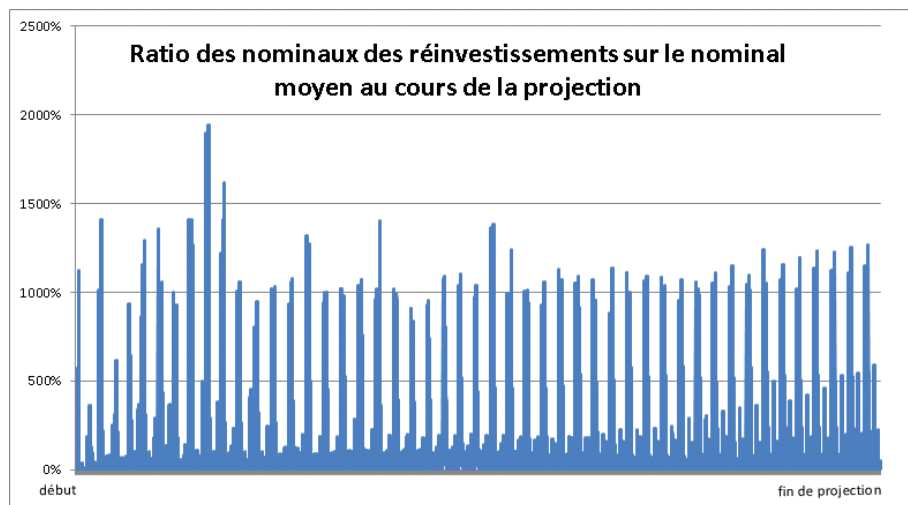


FIGURE 23 – Rapport nominal des réinvestissements sur nominal moyen du portefeuille au cours de la projection

## 7.6 Scénario déterministe

Pour plusieurs raisons, il est nécessaire de réaliser un scénario déterministe. C'est un scénario qui ne comporte qu'une seule simulation. Ce scénario permet d'évaluer la valeur des optionalités du modèle. En calculant la valeur des fonds propres dans le cas stochastique et dans le cas déterministe, on obtient la Time Value of Options and Guarantees (TVOG) qui mesure la valeur des optionalités du modèle. Le scénario déterministe permet aussi de contrôler les sorties du modèle. On peut ainsi produire un compte de résultat par année de projection et comprendre l'évolution des différentes réserves ou de la participation aux bénéfices.

Il a donc fallu produire un scénario déterministe pour les notations des obligations. La manière la plus naturelle étant donné notre modélisation du rating par une chaîne de Markov est de calculer un vecteur de proportion de l'obligation dans chacun des 8 ratings possibles. A chaque année de projection, le vecteur est remis à jour à l'aide d'une matrice de transition à 1 an. Cependant le scénario devant être déterministe, les matrices de transition utilisées sont les matrices de transition forward déterminées à partir des matrices de transition en 0 de différentes maturités.

Le modèle produit des matrices de transition inconditionnelles en 0 pour différentes maturités. On en déduit les matrices de transition forward à 1 an. On a donc  $P(0, t) \forall t$  et on calcule  $P^*(t, t + 1)$  par

$$P^*(t, t + 1) = P^{-1}(0, t)P(0, t + 1) \quad (21)$$

On écrit  $P^*(t, t + 1)$  avec une étoile car ce n'est pas la matrice de transition inconditionnelle à 1 an en  $t$ . Les matrice de transition inconditionnelle



ne sont pas les matrices de transition d'une chaîne de Markov mais leur espérance. Rien ne garantit donc qu'elle respecte l'équation de Chapman-Kolmogorov.

## 7.7 Tests

### 7.7.1 Test de Martingalité

Le modèle ALM recalcule la valeur de marché des obligations à chaque pas de temps. Afin de vérifier que ces calculs étaient correctement effectués, nous avons développé un test de martingalité.

Le premier contrôle que nous avons mis en place est celui de la valeur de marché en 0. Notre modèle étant consistant avec le marché, le prix calculé en 0 par le modèle ALM doit être égal à celui du marché. En pratique l'écart est négligeable.

Le deuxième test mis en place est un test de martingalité sur la valeur des obligations. Ce test repose sur l'idée que la valeur de l'obligation actualisée moins les coupons détachés est une martingale. Formellement, en prenant les notations suivantes :

- $MV_t$  pour la valeur de l'obligation en  $t$
- $CFL_t$  pour le cash flow de l'obligation en  $t$  (soit le coupon plus le nominal à maturité et le coupon seulement pour les autres dates)
- $Def(t)$  le déflateur de  $t$  à 0
- $Def_s(t)$  le déflateur de  $t$  à  $s$
- $P(t)$  la probabilité de survie déterministe (déduit de l'ajustement aux prix du marché) de 0 à  $t$
- $1_{survie}$  l'indicatrice permettant de modéliser l'événement de défaut.  $1_{survie}(t)$  vaut 1 si l'émetteur n'a pas fait défaut en  $t$ . On suppose ici le taux de recouvrement nul.
- $F_t$  la filtration générée par le processus de taux sans risque et le processus de notation

on a

$$\begin{aligned}
MV_0 &= E^{\mathbb{Q}}[\sum_{t=0}^T CFL_t P(t) 1_{survie}(t) Def(t)] \\
&= E^{\mathbb{Q}}[\sum_{t=0}^{s-1} CFL_t P(t) 1_{survie}(t) Def(t) \\
&\quad + \sum_{t=s}^T CFL_t P(t) 1_{survie}(t) Def(t)] \\
&= E^{\mathbb{Q}}[\sum_{t=0}^{s-1} CFL_t P(t) 1_{survie}(t) Def(t) \\
&\quad + E^{\mathbb{Q}}[\sum_{t=s}^T CFL_t P(t) 1_{survie}(t) Def_s(t) \frac{Def(t)}{Def_s(t)} | \mathcal{F}_t]] \\
&= E^{\mathbb{Q}}[\sum_{t=0}^{s-1} CFL_t P(t) 1_{survie}(t) Def(t) \\
&\quad + E^{\mathbb{Q}}[\sum_{t=s}^T CFL_t P(t) 1_{survie}(t) Def_s(t) | \mathcal{F}_t]] Def(s)]
\end{aligned}$$

d'où

$$MV_0 = E^{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=0}^{s-1} CFL_t P(t) 1_{survie}(t) Def(t) + MV_s Def(s)\right] \quad (22)$$

On a utilisé

$$\frac{Def(t)}{Def_s(t)} = Def(s) \text{ et } MV_t = E^{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=s}^T CFL_t Def_s(t) P(t) 1_{survie}(t) | \mathcal{F}_t\right]$$

Le modèle ALM retourne les valeurs de  $CFL_t P(t) 1_{survie}(t)$ ,  $Def(t)$  et  $MV_t$  à toutes dates  $t$  (le pas de calcul de la valeur des obligations est annuel). On peut donc construire un estimateur de  $MV_0$  pour chaque date de projection. Ainsi pour l'estimateur de  $MV_0$  reposant sur le découpage des flux futurs à la date  $s$ , on note  $MV_0^s$  l'estimateur correspondant. On note  $N$  le nombre de simulations.

$$\tilde{MV}_0^s = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N MV_s^n Def^n(s) + \sum_{t=0}^{s-1} CFL_t^n P^n(t) 1_{survie}^n(t) Def^n(t) \quad (23)$$

Le théorème central limit nous permet de construire un intervalle de confiance autour de la valeur calculée par le modèle (qui pourrait être différente de celle du marché si le modèle contenait des erreurs).

En notant  $S_{N-1}$  l'estimateur de l'écart type de l'échantillon  $(MV_s^n Def^n(s) + \sum_{t=0}^{s-1} CFL_t^n P^n(t) 1_{survie}^n(t) Def^n(t))_n$  et  $t_{N-1}^\alpha$  le quantile au point  $\alpha/2$  d'une loi de Student à  $N-1$  degrés de liberté. On construit l'intervalle de confiance suivant :

$$[\tilde{MV}_0^s - S_{N-1} t_{N-1}^\alpha, \tilde{MV}_0^s + S_{N-1} t_{N-1}^\alpha]$$

Le test est validé si cet intervalle contient la valeur de l'obligation constatée sur le marché en  $t=0$  :  $MV_0$ . En pratique le test est validé et l'écart relatif entre  $\tilde{MV}_0^s$  et  $MV_0$  est de l'ordre de 0,5%. Ce test permet seulement de vérifier la cohérence du modèle obligation par obligation.

### 7.7.2 Test de leakage

Afin de vérifier que le modèle est cohérent, on vérifie qu'il n'y a pas de fuite de valeur au cours de projections. Ce test s'appelle test de leakage en anglais. Il consiste à comparer la valeur des passifs à la valeur des actifs à la dernière année de projection. Le leakage apparait au bilan simplifié sur la figure (24).

## 8 Modèle retenu

Comme conclusion à cette partie, on présente le modèle retenu. Deux exigences ont guidé nos choix. Il fallait un processus de notation par obli-

Actif	Leakage
	BEL
	VIF

FIGURE 24 – Structure du bilan avec leakage

gation et il fallait pouvoir produire un scénario déterministe. Le modèle à défaut proportionnel présentait de plus l'avantage de ne pas être sensible à la segmentation du réinvestissement et de garantir la reproductibilité des résultats quel que soit l'ordre d'input des tables d'actif. Nous avons donc associé à chaque obligation un vecteur contenant la proportion de l'obligation dans chaque état de rating. Dans le cas où l'on veut faire un scénario déterministe le vecteur contient effectivement la proportion dans chaque rating. Cela permet de passer de l'un à l'autre facilement sans complexifier le code du modèle. Enfin dans le cadre de sensibilité le modèle à défaut total peut facilement s'adapter à ce formalisme. Le vecteur de proportion ne contient alors que des 0 sauf à la coordonnée du rating courant qui contient un 1.

## 9 Choc de crédit dans ce modèle

Afin de calculer le SCR, il est nécessaire d'évaluer l'impact d'un choc de crédit. La façon la plus correcte d'évaluer le choc de crédit dans le modèle développé serait de recalibrer les paramètres de la prime de risque sur des prix choqués et de resimuler des trajectoires de spread. Cependant le processus de recalibration et de resimulation des spreads est long. Il n'est donc pas

envisageable de l'utiliser pour la production. En particulier pour les phases de clôture où de nombreux niveaux de stress sont requis.

La méthodologie adoptée est donc de conserver les ESG de spread centraux et de ne recalibrer que le spread déterministe. On ne prend donc pas en compte l'excès de volatilité induit par le choc sur les spreads. Le stress est uniquement porté par une translation des spreads.

## 10 Résultats

### 10.1 Impacts sur les fonds propres

L'impact du crédit stochastique sur les fonds propres de la compagnie d'assurance choisie pour les calculs est de  $-1,54\%$ . Le crédit stochastique impacte les fonds propres de deux manières.

Premièrement, la chronique des cash flows du modèle est modifiée. La modélisation du défaut dans le modèle ALM avant le crédit stochastique faisait intervenir uniquement des probabilités de défaut déterministe et ne prenait pas en compte les migrations de rating. La probabilité de défaut utilisée était une probabilité moyenne de défaut. La calibration des deux modèles a donc donné une structure de survenance des défauts différentes. Cependant ces différences restent mesurées ce qui permet d'appuyer la robustesse des deux méthodes.

La figure (25) permet de voir la structure par terme des probabilités de défaut dans le nouveau modèle (courbe AAA à BBB) et dans l'ancien modèle (courbe "coeff\_pc.y"). L'ancienne courbe de défaut se trouve légèrement au dessus de celle du AA. Le portefeuille est essentiellement composé de AAA et de AA (plus de la moitié du portefeuille). En particulier, ceci est vrai pour les premières années, jusqu'à 10 ans. Or dans le modèle ALM le portefeuille est en run-off. Les défauts survenant au début de la projection sont donc plus pénalisants. De plus les défauts qui surviennent tard dans la projection voient leur impact diminué par l'effet actualisation. Cela signifie que plus une perte arrive tard moins elle coûte cher. Ces deux effets rendent une structure par terme des défauts faibles en début de projection profitable pour l'assureur. Il faut ajouter à cette structure par terme des spreads par rating l'ajustement déterministe par obligation qui est en moyenne négatif. La structure par terme des spreads par obligations est donc plus significativement faible pour les maturités courtes.

Deuxièmement le crédit stochastique apporte de la volatilité dans le modèle. Ce développement renchérit par conséquent le coût des optionnalités contenues dans le modèle.

Ces deux effets peuvent être distingués dans l'impact sur les fonds propres. On calcule dans le modèle un scénario déterministe. Ce scénario permet par différence avec le calcul sur  $N$  simulations, de calculer la TVOG : la valeur temps des options et garanties du modèle. Les impacts sur le scénario

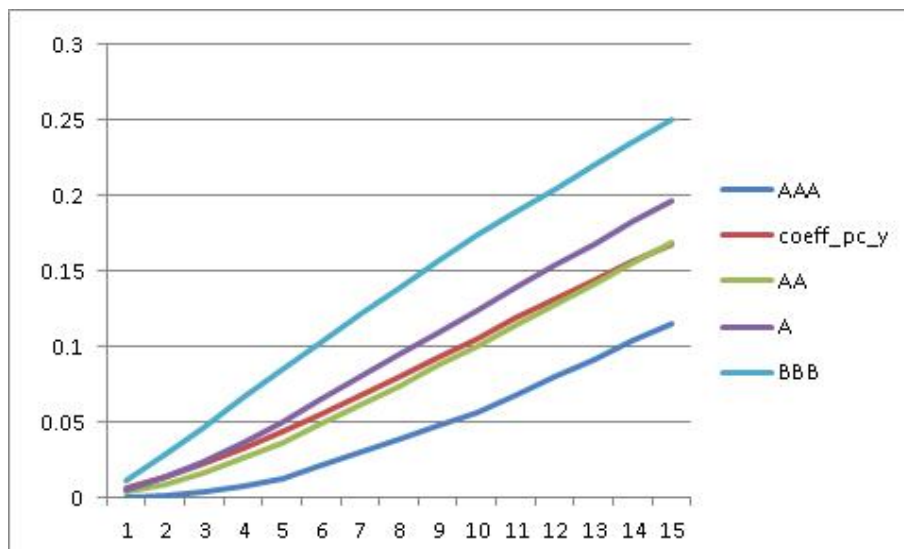


FIGURE 25 – Structure par terme des probabilités de défaut

déterministe sont donc à expliquer par le changement de la structure par terme des défauts et les variations de la TVOG par le gain de volatilité apporté par le crédit stochastique.

En pratique on constate que l'impact sur le scénario déterministe est bien positif. La valeur des fonds propres augmente avec le crédit stochastique de 0.11%. Cette augmentation reste mesurée, ce qui est cohérent avec l'analyse des structures par terme des défauts.

La TVOG représente 13% de la valeur du scénario déterministe. Étant calculée comme une différence ses variations sont la résultante de deux variations. L'amplitude de ses variations peut donc être augmentée par un effet volume. Cette analyse s'applique à tous les capitaux requis par risque qui se calculent comme différence avec les fonds propres centraux. L'impact sur la TVOG est plus significatif puisqu'il est de 11,16% (voir figure (26)). Cet impact est à mettre en regard de l'analyse de la volatilité de l'indice AA 5 ans menée dans les sections précédentes. Ce chiffre inclut aussi l'effet volume.

## 10.2 Impacts sur les fonds propres stressés

La formule standard a été utilisée afin de mesurer l'impact du crédit stochastique sur les risques portés par la compagnie d'assurance étudiée.

Le SCR d'un risque désigne la différence de fonds propres entre le cas central et le cas stressé. Ainsi un SCR positif signifie que les fonds propres ont diminué lorsque le stress a été appliqué. Cela peut s'écrire :

$$SCR = \text{Fonds Propres Centraux} - \text{Fonds Propres Stressés}$$

La figure (26) représente la différence des SCR exprimés en pourcentage des fonds propres centraux après l'inclusion du crédit stochastique moins ceux obtenus avant inclusion du crédit stochastique. Le graphique représente donc

$$\frac{SCR_{risque_i}^{crédit\ stochastique}}{FondsPropres^{crédit\ stochastique}} - \frac{SCR_{risque_i}^{central}}{FondsPropres^{centraux}}$$

Le choix de représenter l'impact du crédit stochastique sur les risque de la compagnie d'assurance modélisée a été guidé par la nécessité d'annuler l'effet "volume". Le SCR est en effet une différence de fonds propres. Mais la base de calcul des différence n'est pas la même. Les fonds propres varient quand le crédit stochastique est inclus dans le modèle. Comme le crédit stochastique diminue les fonds propres, les SCR auront tendances à être plus petits car calculés sur une base réduite. La volatilité apporté dans le modèle par le crédit stochastique est déjà prise en compte dans le calcul des fonds propres centraux. Les variation d'un SCR ne s'expliquent donc que par l'effet croisé entre le risque et le gain de volatilité ou par la structure par terme des spreads du crédit stochastique. Seuls les risques dont la variation a été la plus forte avec l'inclusion du crédit stochastique et dont le niveau de base était significatif ont été représentés.

Les risques de marché augmentent tous avec l'intégration du crédit stochastique. La variation de chaque SCR s'explique comme suit :

- **SCR Interest Rate Up** : Le risque de hausse des taux contient deux dangers. Premièrement les profits futurs sont plus fortement actualisés. La VIF est donc réduite. Deuxièmement la valeur de marché des obligations diminue. La volatilité du crédit stochastique s'ajoute à ces effets, ce qui explique la variation du SCR.
- **SCR Interest Rate Down** : La volatilité apportée par le crédit stochastique s'additionne au rapprochement des garanties dû à la baisse des taux et entraine donc une hausse du SCR. En faisant l'analogie avec les options, baisser les taux revient à rapprocher l'actif du strike de l'option et inclure le crédit stochastique revient à augmenter la volatilité. Par conséquent le prix de l'option monte.
- **SCR Equity** : La baisse des plus values latentes sur les actions rapproche la compagnie modélisée des garanties qu'elle doit servir. L'explication est la même que pour le risque de baisse des taux.
- **SCR Property** : La baisse des plus values latentes sur l'immobilier rapproche la compagnie modélisée des garanties qu'elle doit servir. L'explication est la même que pour le risque de baisse des taux.
- **SCR Spread** : La variation du SCR de spread est petite car le risque de spread s'explique principalement par le risque de spread appliqué sur les dettes perpétuelles. Or le crédit stochastique ne s'applique qu'aux obligations taux fixe et les dettes perpétuelles ne sont pas

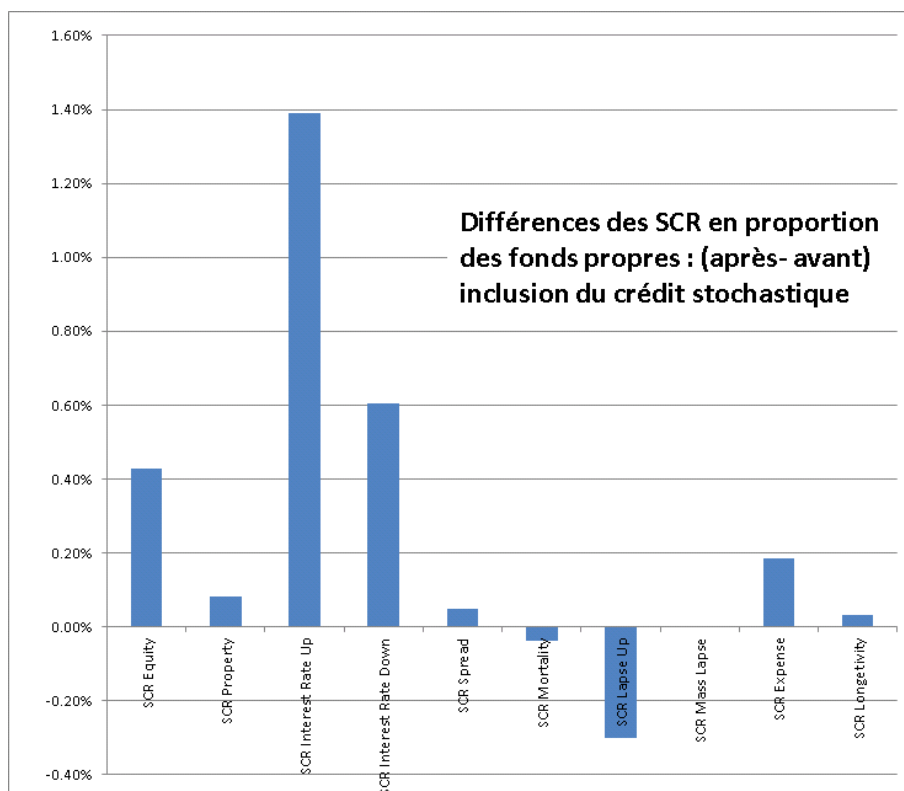


FIGURE 26 – différence des SCR exprimés en pourcentage des fonds propres centraux : (après-avant) l'inclusion du crédit stochastique

modélisées dans cette catégorie d'actif. Les SCR sont donc comparables avant et après le crédit stochastique.

Les risques vie ont chacun des comportements différents. La variation de chaque SCR s'explique comme suit :

- **SCR Expense** : Le risque de hausse des frais suit la même logique que les risque de marché. Une hausse diminue la rentabilité de la compagnie et approche donc des garanties. La volatilité du crédit stochastique augmente donc le coût des optionnalités du modèle.
- **SCR Mortality** : Le stress lié au risque de mortalité modifie la duration du portefeuille de passif et donc celui de l'actif à travers les achats ventes réalisés pour servir les assurés. La duration du passif est calculée comme suit

$$Duration\ Passif = \frac{\sum_{t=0}^T t * \Delta PM(t) * B(0, t)}{\sum_{t=0}^T \Delta PM(t) * B(0, t)}$$

La structure par terme des spreads du crédit stochastique n'étant pas la même que celle des spreads qui étaient avant dans le modèle, un changement de duration permet de gagner ou perdre de la valeur. Les spreads du crédit stochastiques sont plus faibles au début de la projection mais croissent plus vite que ceux du précédent modèle. Un raccourcissement de la duration est donc profitable alors qu'un allongement est pénalisant.

Dans le cas du risque de mortalité, la duration des passifs diminue de -3,00% par rapport à celle du scénario central. Le crédit stochastique diminue donc le SCR de mortalité.

- **SCR Lapse Up** : Dans le cas du risque de hausse de rachat, la duration des passifs diminue de -21,01% par rapport à celle du scénario central. Le crédit stochastique diminue donc le SCR de hausse de rachat et la diminution est plus forte que celle du risque de mortalité car la duration est plus réduite.
- **SCR Mass Lapse** : La duration des passifs dans ce scénario diminue de -28,3% par rapport à celle du scénario central. Cependant la duration des passifs après la première année est 5,32% plus grande que celle centrale. La variation du SCR n'est donc pas significative avec l'inclusion du crédit stochastique. Cela peut s'expliquer par le changement de structure du portefeuille obligataire. En effet avec les rachats massifs le modèle est obligé de vendre beaucoup d'obligations la première année. Le portefeuille obligataire n'a donc plus la même structure. Le modèle rachète ensuite des obligations afin de maintenir la proportion de chaque type d'actif dans le portefeuille au niveau de la cible
- **SCR Longevity** : Dans le cas du risque de longévité, les sorties pour



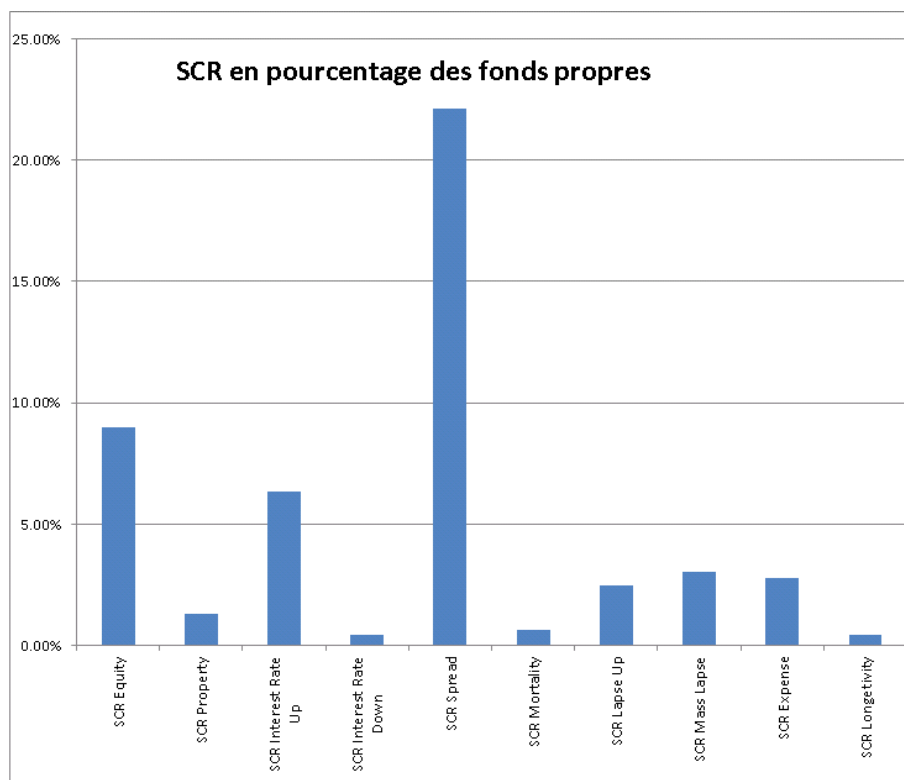


FIGURE 27 – Impact des risques de la formule standard en pourcentage des fonds propres centraux

mortalité diminuent surtout en fin de projection. La duration des passifs n'est donc pas significativement impactée par ce stress. Cependant l'augmentation du SCR est en ligne avec l'analyse sur les SCR mortalité et hausse de rachat.

La figure (27) montre les niveaux des risques en pourcentage des fonds propres centraux. L'importance du risque de spread s'explique par l'importance du risque de spread des dettes perpétuelles dans le portefeuille de l'assurance étudiée

Le SCR "Interest Rate Down" est petit car la compagnie d'assurance modélisée ne propose que des contrats dont le taux garanti est bas. De plus ce taux est projeté dans le modèle de façon très corrélée aux taux d'intérêt. La baisse des taux entraîne donc aussi la baisse du taux garanti. La baisse des taux n'augmente donc pas significativement le coût des optionnalités liées au taux garanti. En revanche, la baisse des taux permet d'actualiser les profits futurs moins fort et donc de gagner de la valeur (augmenter la VIF).

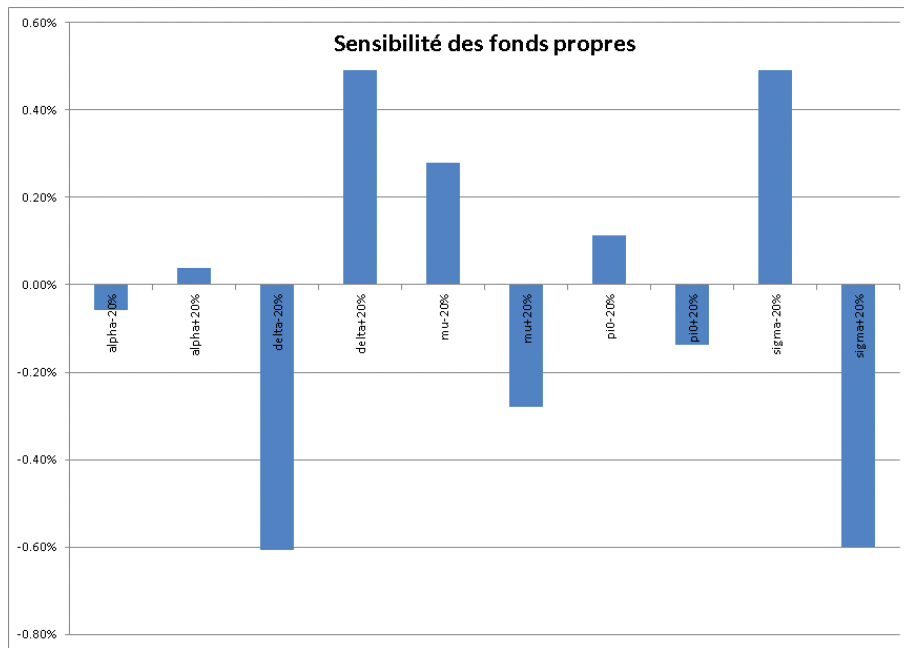


FIGURE 28 – Sensibilités des fonds propres aux variations des paramètres de la prime de risque

## 11 Analyse des sensibilités sur les fonds propres

Afin de mieux comprendre le comportement du modèle, on réalise des calculs de sensibilités. L'analyse du comportement des spreads lorsque les paramètres du modèle sont modifiés a été présentée dans la première partie. Dans cette section, on observe l'impact des sensibilités sur les fonds propres

Les ESG de sensibilité sont obtenus à partir de la même graine que l'ESG "central". Les sensibilités sur les paramètres sont donc représentées en écart relatif des fonds propres par rapport à ceux calculés avec l'ESG "central". Dans toutes les sensibilités suivantes, l'adéquation aux prix du marché est recalculée. Cela permet d'éviter de présenter d'importantes plus ou moins values latentes des le début de la projection qui peuvent fausser la suite de l'analyse.

### 11.1 Vitesse de retour à la moyenne de la prime de risque

Lorsque  $\alpha$  augmente, les spreads augmentent. Naturellement les fonds propres diminuent. Le lien entre l'augmentation des spread et l'augmentation du paramètre  $\alpha$  est expliqué à la section 8. La hausse des spreads en début de projection est d'autant plus pénalisant pour les fonds propres que la perte ne peut être diminuée par l'effet d'actualisation. L'amplitude de la sensibilité sur les fonds propres est la plus faible des sensibilités sur les cinq

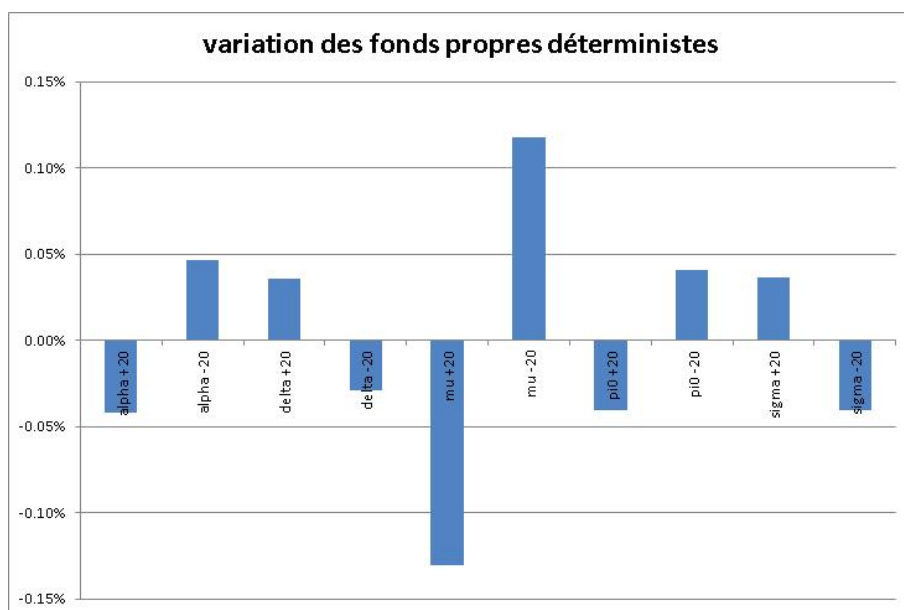


FIGURE 29 – Sensibilités des fonds propres déterministes aux variations des paramètres de la prime de risque

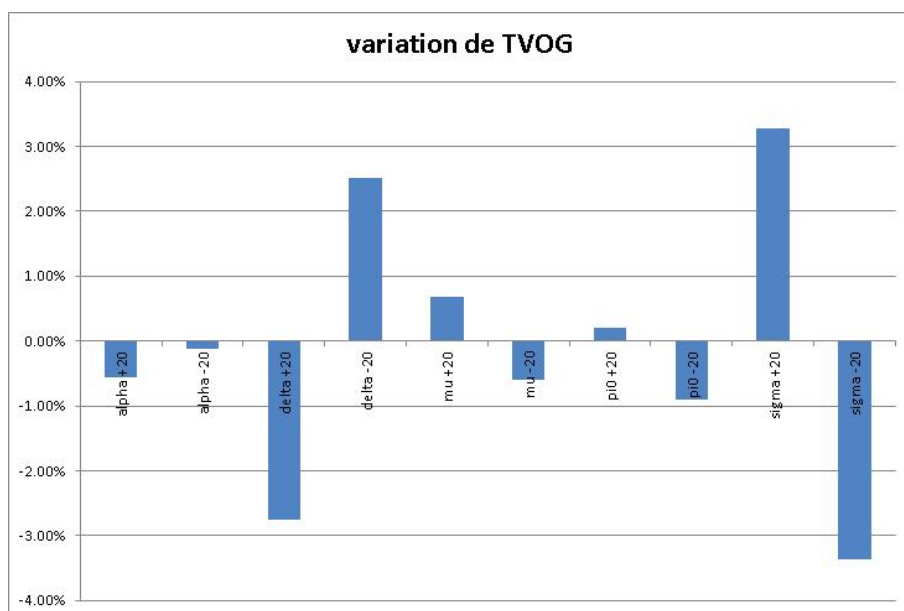


FIGURE 30 – Sensibilités de la TVOG aux variations des paramètres de la prime de risque

paramètres. Cela s'explique par la valeur initiale du paramètre  $\alpha$  ainsi que par les effets contradictoires du déterministe et de la TVOG. En effet la figure (29) montre un impact négatif pour une augmentation du paramètre  $\alpha$ . Ce qui est cohérent avec la hausse de la courbe de spread. Mais la figure (30) montre un impact négatif sur la TVOG. Cela signifie que le coût des optionnalités diminue et que par conséquent les fonds propres augmentent. Cela est cohérent avec l'augmentation du paramètre  $\alpha$ . En effet la variance du processus prime de risque sachant son point de départ est inversement proportionnelle à  $\alpha$ . Cette diminution se comprend aisément car l'augmentation de la vitesse de retour à la moyenne empêche le processus de prendre des valeurs trop éloignées de sa moyenne. Par conséquent les spreads sont moins volatiles et les optionalités du modèle coûtent moins.

La sensibilité sur le paramètre  $\alpha$  est symétrique. La sensibilité sur la TVOG pour une diminution du paramètre  $\alpha$  n'est pas expliquée.

## 11.2 Moyenne long terme de la prime de risque

Lorsque  $\mu$  augmente les spreads augmentent. Par conséquent les fonds propres diminuent. L'augmentation de la valeur moyenne long terme impacte négativement les fonds propres déterministes comme la TVOG. En effet la variance de la prime de risque est proportionnelle à la moyenne long terme.

## 11.3 Paramètre de volatilité de la prime de risque

Lorsque  $\sigma$  augmente les spreads diminuent. Mais l'analyse n'est pas aussi simple pour que pour les deux premiers paramètres car malgré la baisse des spreads, les fonds propres diminuent. En décomposant l'impact sur le déterministe et la TVOG l'explication vient d'elle même : l'impact de la TVOG l'emporte sur celui du déterministe. Ainsi les fonds propres déterministes augmentent car la structure par terme des spreads diminue. Mais la TVOG augmente beaucoup en raison de la forte augmentation de la variance de la prime de risque. En effet cette dernière est proportionnelle au carré du paramètre de volatilité  $\sigma$ .

## 11.4 Valeur initiale de la prime de risque

Lorsque  $\pi_0$  augmente les spreads augmentent. Par conséquent les fonds propres diminuent. L'impact est dirigé par celui des fonds propres déterministes. L'impact sur la TVOG est marginal mais va dans le sens attendu puisque la variance de la prime de risque diminue lorsque  $\pi_0$  se rapproche de  $\mu$ . Le résultat aurait été différent si  $\pi_0$  avait été supérieur à  $\mu$ .

### 11.5 Taux de recouvrement

Lorsque  $\delta$  augmente les spreads diminuent. Par conséquent les fonds propres augmentent. L'impact est double puisque les fonds propres déterministes et la TVOG vont dans le même sens. Sur les fonds propres déterministes, le gain est dû au moindre impact des défauts. En effet comme le taux de recouvrement est élevé et que dans le modèle de Jarrow, Lando et Turnbull, les obligations continuent à verser des coupons, les défaut sont relativement transparents. La même justification permet de d'expliquer le gain sur la TVOG.

## 12 Conclusion

Pour intégrer le crédit stochastique dans le modèle ALM, le choix a été fait d'utiliser des défaut proportionnels. Cela signifie que chaque obligation est dans tous les ratings à la fois selon les proportions données par les matrices de transition de la simulation. Les spread du générateur de scénario économique sont des spreads par rating. L'ajustement aux prix du marché s'est donc fait à l'aide d'un spread déterministe calculé par obligation. Nous avons aussi fait le choix d'impacter la valeur comptable de la partie en défaut des obligations ainsi que le nominal en les diminuant du taux de perte ce qui conserve l'amortissement. Le réinvestissement enfin a été calibré sur la composition et les coupons servis en  $t=0$ .

## Quatrième partie

# Conclusion

Le crédit stochastique était un point important du modèle à développer dans le modèle interne d'Aviva France. Il était en effet nécessaire pour valider le modèle par les autorités de contrôle. Cette validation est nécessaire pour pouvoir utiliser le modèle interne pour Solvabilité II.

Le modèle choisi est basé sur celui proposé par Jarrow, Lando et Turnbull. La variable modélisée est la notation d'une obligation. On considère qu'elle suit une chaîne de Markov. Lando a généralisé le modèle afin de permettre un modèle continu dont les spreads générés sont stochastiques. C'est ce modèle que nous avons choisi. Suivant les propositions de Dubrana, nous avons opté pour une prime de risque suivant un processus CIR. Cela nous a permis d'obtenir des formules fermées pour les spreads (et donc pour les matrices de transition stochastiques). La calibration par moindres carrés classique ayant montré de l'instabilité nous nous sommes appuyés sur une calibration historique et des hypothèses qualitatives pour contraindre la calibration risque neutre et obtenir des résultats plus stables.

Ces ESG de crédit ont été employés dans le modèle ALM afin de faire apparaître la dynamique de la notation des obligations. Le modèle à défaut proportionnel permet de modéliser l'évolution des ratings en s'affranchissant de la segmentation du réinvestissement et en garantissant la reproductibilité des résultats. Le temps de calcul a été augmenté mais de façon acceptable. Afin de réaliser un calcul déterministe qui permet d'évaluer l'impact de la valeur des optionnalités et des garanties, nous avons utilisé les matrices de transition forward calculées à partir des matrices de transition en  $t=0$ . La consistance avec le marché est assurée par un spread déterministe spécifique à chaque obligation et calculé en amont du modèle Prophet. La valeur comptable a été impactée de manière à conserver l'amortissement car le modèle de Jarrow, Lando et Turnbull ne modifie pas l'échéancier de coupon des obligations ayant fait défaut.

La calibration du modèle constitue un axe de développement. D'une part des informations peuvent être extraites du marché, en particulier des dérivés de crédit, quand à la volatilité des spreads. Cela permettrait de calibrer les paramètres  $\alpha$  et  $\sigma$ . D'autre part, une calibration pourrait être faite pour minimiser la somme des spreads déterministes d'ajustement au prix du marché sur l'ensemble du portefeuille obligataire de la compagnie.

Le modèle proposé a permis de prendre en compte les optionnalités du modèle ALM liées au rendement des obligations et de calculer plus précisément la valeur des fonds propres. Il a aussi permis d'introduire le rating des obligations dans le modèle qui peuvent constituer dorénavant un nouveau paramètre de pilotage pour les réinvestissements.

## Références

- [1] Leif BG Andersen. Efficient simulation of the heston stochastic volatility model. *Available at SSRN 946405*, 2007.
- [2] Angelo Arvanitis, Jonathan Gregory, and Jean-Paul Laurent. Building models for credit spreads. *The Journal of Derivatives*, 6(3) :27–43, 1999.
- [3] Tomasz R Bielecki and Marek Rutkowski. *Credit risk : modeling, valuation and hedging*. Springer, 2002.
- [4] James R Cuthbert. On uniqueness of the logarithm for markov semi-groups. *Journal of the London Mathematical Society*, pages 623–630, 1972.
- [5] Ludovic Dubrana. A stochastic model for credit spreads under a risk-neutral framework through the use of an extended version of the jarow, lando and turnbull model. *Lando and Turnbull Model (June 1, 2011)*, 2011.
- [6] Robert B Israel, Jeffrey S Rosenthal, and Jason Z Wei. Finding generators for markov chains via empirical transition matrices, with applications to credit ratings. *Mathematical Finance*, 11(2) :245–265, 2001.
- [7] Robert A Jarrow, David Lando, and Stuart M Turnbull. A markov model for the term structure of credit risk spreads. *Review of Financial studies*, 10(2) :481–523, 1997.
- [8] Masaaki Kijima and Katsuya Komoribayashi. A markov chain model for valuing credit risk derivatives. *The Journal of Derivatives*, 6(1) :97–108, 1998.
- [9] David Lando. On cox processes and credit risky securities. *Review of Derivatives research*, 2(2-3) :99–120, 1998.
- [10] David Lando. Some elements of rating-based credit risk modeling. *Advanced Fixed-Income Valuation Tools*, pages 193–215, 2000.
- [11] David Lando. *Credit risk modeling : theory and applications*. Princeton University Press, 2009.

## Cinquième partie

# Annexes

## 1 Modèles basés sur le modèle de Jarrow, Lando et Turnbull

Dans cette partie, on s'intéresse à quatre alternatives proposées par Kijima et Komorobayashi et par Lando. Ces alternatives concernent la façon d'appliquer la prime de risque à la matrice historique pour obtenir la matrice risque neutre.

### 1.1 Modèle de Kijima et Komorobayashi discret

Kijima et Komorobayashi (1998) [8] ont proposé une méthodologie plus stable que nous détaillons dans cette section. Kijima et Komoribayashi proposent de modifier l'équation (3) en

$$p_{i,j}(t) = \pi_i(t)p_{i,j} \forall j \neq K$$

On détaille dans ce qui suit, la procédure itérative pour la calibration de la prime de risque dans ce cadre en s'inspirant de Bielecki (2002) [3].

Soit  $P$  la matrice de transition historique à un an. On se place dans le cas d'un processus markovien homogène.

$$P^H = \begin{pmatrix} A^H & R^H \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose alors pour la matrice de transition en probabilité risque neutre

$$P(t) = \begin{pmatrix} A(t) & R(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$A(t) = \Pi(t)A^H \text{ et } R(t) = 11 - \Pi(t)A^H 11$$

et  $11$  le vecteur avec que des 1. On a

$$A(0, T) = \prod_{t=0}^{T-1} A(t)$$

et

$$1 - p_{i,K}(0, t+1) = \frac{D_i(0, t+1) - \delta B(0, t+1)}{(1 - \delta)B(0, t+1)}$$

donc

$$A(0, t) \begin{pmatrix} \cdot \\ \pi_i(t)(1 - p_{i,K}^H) \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \frac{D_i(0, t+1) - \delta B(0, t+1)}{(1 - \delta)B(0, t+1)} \\ \cdot \end{pmatrix}$$



En particulier en 0

$$\pi_i(0) = \frac{D_i(0, 1) - \delta B(0, 1)}{(1 - \delta)B(0, 1)(1 - p_{i,K}^H)}$$

On considère alors la procédure récursive suivante.

#### Initialisation

$$\pi_i(0) = \frac{D_i(0, 1) - \delta B(0, 1)}{(1 - \delta)B(0, 1)(1 - p_{i,K}^H)}$$

$$A(1) = \pi_i(0)A^H \text{ et } R(1) = 11 - \pi_i(0)A^H 11$$

#### Récurrence

$$\begin{pmatrix} \pi_i(t)(1 - p_{i,K}^H) \\ \vdots \end{pmatrix} = A^{-1}(0, t) \begin{pmatrix} \frac{D_i(0, t+1) - \delta B(0, t+1)}{(1 - \delta)B(0, t+1)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

soit  $\forall i$

$$\pi_i(t) = \sum_{j=1}^{K-1} A_{i,j}^{-1}(0, t) \frac{D_i(0, t+1) - \delta B(0, t+1)}{(1 - \delta)B(0, t+1)(1 - p_{i,K}^H)}$$

et enfin

$$A(t) = \Pi(t)A^H \text{ et } R(t) = 11 - \Pi(t)A^H 11$$

#### Calcul du spread

On calcule ensuite les spreads forwards avec l'équation (2). La méthode permet de retrouver les spreads du marché. De plus les  $p_{iK}$  qui apparaissent au dénominateur sont remplacés par  $(1 - p_{iK}^H)$  qui ne pose plus de problème de stabilité numérique.

## **1.2 Modèle de Lando : modification des intensités de défaut**

Lando (2000) [10] propose de modifier l'intensité de défaut et de déduire les termes diagonaux pour maintenir les propriétés de la génératrice. Les autres termes de la génératrice ne sont pas modifiés. Ce qui donne

$$\lambda_{iK}(t) = \pi_i(t)\lambda_{iK}^H \forall i \in [1, K - 1]$$

et

$$\lambda_{ii}(t) = \lambda_{ii}^H - (\pi_i(t) - 1)\lambda_{iK}^H \forall i \in [1, K - 1]$$

On calcule  $\Pi(t)$ , le vecteur des  $(\pi_i(t))_i$ , tel que les probabilités déduites du modèle correspondent aux probabilités de défauts implicites du marché. Soit

$$(e^{\Lambda(1)})_{i,K} = \frac{B(0, 1) - D_i(0, 1)}{B(0, 1)(1 - \delta)}$$

et

$$(e^{\sum_{i=1}^t \Lambda^{(i)}})_{i,K} = \frac{B(0,t) - D_i(0,t)}{B(0,t)(1-\delta)} \quad (24)$$

La génératrice vient du modèle continu, mais la calibration proposée est discrète ce qui donne la somme des génératrices en chaque date à la place de l'intégrale. Cette somme correspond au produit des matrices de transition 1 an.

### 1.3 Modèle de Lando : modification des lignes de la génératrice

Lando propose une deuxième méthode pour modifier le générateur qui consiste à multiplier les lignes par la prime de risque. C'est la méthode de Jarrow, Lando et Turnbull, mais Lando passe du continu au discret avec une autre méthode. Formellement

$$\lambda_{i,j}(t) = \pi_i(t) \lambda_{i,j}^H$$

et la calibration se fait par l'équation (24)

## 2 Preuve du calcul de l'exponentiel d'une matrice diagonale

D'après Israel, Rosenthal et Wei (2001) [6], on a que le logarithme de P existe et est unique.

On pose

$$S = \max((a-1)^2 + b^2; a + ib \text{ valeur propre de } P; a, b \in \mathbb{R})$$

et pour  $S < 1$  pour P car c'est une matrice de transition. Donc  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(P-id)^i (-1)^{i+1}}{i}$  converge et le logarithme de P existe. Dans le cas d'une matrice diagonalisable on peut développer comme suit

$$\begin{aligned} \ln(P) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(P-id)^i (-1)^{i+1}}{i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\Sigma D \Sigma^{-1} - id)^i (-1)^{i+1}}{i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\Sigma D - id \Sigma^{-1})^i (-1)^{i+1}}{i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\Sigma D - id \Sigma^{-1}) \dots (\Sigma D - id \Sigma^{-1}) (-1)^{i+1}}{i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\Sigma (D-id) \dots (D-id) \Sigma^{-1}) (-1)^{i+1}}{i} \\ &= \Sigma \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(D-id)^i (-1)^{i+1}}{i} \Sigma^{-1} \\ &= \Sigma \ln(D) \Sigma^{-1} \end{aligned}$$

De plus comme les éléments diagonaux de P sont supérieurs à 0.5, P a au plus un logarithme. On a donc unicité du générateur. On a donc

$$P = e^{\ln(P)} = e^{\Sigma \ln(D) \Sigma^{-1}} = e^{\Lambda}$$

et donc

$$\Lambda = \Sigma \ln(D) \Sigma^{-1}$$

Finalement

$$P = \Sigma e^{\ln(D)} \Sigma^{-1}$$

car

$$\begin{aligned} \Sigma e^{\ln(D)} \Sigma^{-1} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\Sigma \ln(D) \Sigma^{-1})^i}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\Sigma \ln(D) \Sigma^{-1}) \dots (\Sigma \ln(D) \Sigma^{-1})}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\Sigma \ln(D) \dots \ln(D) \Sigma^{-1})}{i!} \\ &= \Sigma \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ln(D)^i}{i!} \Sigma^{-1} \\ &= \Sigma e^{\ln(D)} \Sigma^{-1} \end{aligned}$$

### 3 Prime déterministe : Calibration de mu au voisinage de l'infini

On pourrait obtenir une deuxième équation en utilisant le modèle déterministe en observant le comportement des probabilités de défaut lorsque la maturité tend vers l'infini. L'idée sous-jacente est que lorsque la maturité tend vers l'infini, dans le modèle déterministe, la prime de risque tend vers sa valeur moyenne  $\mu$  et donc la probabilité de défaut est dirigée par  $\mu T$  avec T la maturité. En pratique nous n'avons des prix que pour les 15 premières maturités. Notre modèle ne permet pas d'extrapoler des prix au-delà de cette date et 15 ans n'est pas une maturité assez élevée compte tenu de la valeur de  $\alpha$  pour négliger les termes qui devraient disparaître avec T tend vers l'infini.

On se place dans le cas

$$d\pi_t = \alpha(\mu - \pi_t)dt$$

On trouve la solution

$$\pi_t = (\pi_0 - \mu)e^{-\alpha t} + \mu$$

On a alors

$$\int_0^t \pi_s ds = \mu t + \frac{\pi_0 - \mu}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$$

Pour t suffisamment grand, on a

$$p_{iK}(0, t) = \sum_{j=1}^{K-1} \sigma_{ij} \sigma_{jK}^* (e^{d_j(\mu t + \frac{\pi_0 - \mu}{\alpha})} - 1)$$

ce qui donne

$$\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{K-1} \sigma_{ji}^* p_{iK}(0, t)}{\sigma_{jK}^*} + 1\right) = d_j\left(\mu t + \frac{\pi_0 - \mu}{\alpha}\right)$$

d'où

$$\frac{1}{d_j} \frac{\partial \ln(\frac{\sum_{i=1}^{K-1} \sigma_{ji}^* p_{iK}(0,t)}{\sigma_{jK}^*} + 1)}{\partial t} = \mu$$

Ceci permet de calibrer  $\mu$  dans le cas où l'on peut avoir des prix de zéro-coupons risqués sur au moins 40 ans.

## 4 Algorithme d'optimisation

### 4.1 Méthode de Newton

La calibration a été réalisée sur R et Excel. Lors des essais, nous avons constaté une grande instabilité. On constate en particulier que  $\alpha$  et  $\mu$  varient beaucoup entre deux méthodes de calibration. Pour autant on remarque empiriquement que le produit des deux reste assez stable. Les minima trouvés avec chaque méthode sont des minima locaux puisque lorsqu'ils servent de points de départ aux autres algorithmes, on retrouve les mêmes valeurs. Nous avons implémenté notre propre algorithme de minimisation afin de pouvoir contrôler les paramètres. On détaille dans la suite les algorithmes que nous avons utilisés à travers notre implémentation et à travers les fonctions de R.

On revient rapidement sur l'idée de la méthode de Newton pour comprendre les deux algorithmes suivants. L'algorithme de Newton est une méthode itérative pour trouver le zéro d'une fonction. On utilise cet algorithme pour trouver le zéro du gradient de la fonction à minimiser, ce qui est équivalent sous les bonnes conditions.

L'algorithme de Newton pour trouver le zéro d'une fonction  $g$  est donné par

$$x_{k+1} = x_k - (g'(x_k))^{-1} g(x_k)$$

En posant  $g=f'$ , on obtient l'algorithme d'optimisation suivant

$$x_{k+1} = x_k - (f''(x_k))^{-1} f'(x_k)$$

### 4.2 Méthode de Gauss-Newton

La méthode de Gauss-Newton tire parti du problème particulier qu'est la minimisation des moindres carrés. On veut résoudre le problème suivant

$$\min f(x)$$

On note  $\nabla f(x)$  le gradient de la fonction au point  $x$ . On approche la hessienne par

$$H = \nabla f(x)^T \nabla f(x)$$

On choisit le point de départ et l'algorithme se construit ensuite selon les étapes suivantes

$$\begin{cases} H_k &= \nabla f(x_k)^T \nabla f(x_k) \\ d_k &= -H_k^{-1} \nabla f(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + \rho_k d_k \end{cases}$$

avec  $\rho_k$  le pas optimal sur la direction de descente. En pratique on recherche ce pas optimal en suivant les conditions de Wolf. Il est coûteux de calculer à chaque itération le pas optimal, on cherche donc un pas  $t$  "admissible", i.e.  $f(x_k + t * d_k) < f(x_k)$ . Cette recherche s'effectue par dichotomie en réduisant l'intervalle de recherche initial. À chaque itération, on garde la moitié de l'intervalle qui respecte les conditions de Wolf.

On considère qu'on a choisi la direction de descente  $d_k$ . L'algorithme est au point  $x_k$ . On pose

$$\phi(t) = f(x_k + t * d_k)$$

Les conditions de Wolf s'écrivent alors

- Si  $\phi(t) > \phi(0) + m_1 \phi'(0)t$  alors  $t$  est trop grand
- Si  $\phi(t) \leq \phi(0) + m_1 \phi'(0)t$  et  $\phi'(t) < m_2 \phi'(0)$  alors  $t$  est trop petit
- Si  $\phi(t) \leq \phi(0) + m_1 \phi'(0)t$  et  $\phi'(t) \geq m_2 \phi'(0)$  alors  $t$  est trop petit

L'algorithme nécessite de choisir deux paramètres :  $m_1$  et  $m_2$ .  $m_1$  et  $m_2$  permettent de choisir le pas optimal. Nous avons suivi les recommandations de Mottelet dans son cours d'optimisation non-linéaire de l'université de Compiègne en fixant  $m_1 = 0,1$  et  $m_2 = 0,7$

### 4.3 Algorithme BFGS

On détaille dans cette partie, l'algorithme de Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno car nous avons utilisé l'algorithme qui en dérive, l'algorithme L-BFGS-B de R pour calibrer le modèle.

L'algorithme BFGS est basé sur la méthode de Newton. Comme pour la méthode de Gauss-Newton on approxime la hessienne. Si on se place à l'itérée  $k$ , en notant  $B_k$  l'approximation de la hessienne, on a

$$\begin{aligned} y_k &= \Delta f(x_{k+1}) - \Delta f(x_k) \\ s_k &= x_{k+1} - x_k \\ B_{k+1} &= B_k + \frac{y_k^T y_k}{s_k^T y_k} - \frac{B_k s_k^T s_k B_k}{s_k^T B_k s_k} \\ B_{k+1}^{-1} &= B_k^{-1} + \frac{(s_k^T y_k + s_k^T B_k^{-1} y_k)(s_k^T s_k)}{(s_k^T y_k)^2} - \frac{B_k^{-1} y_k^T s_k + s_k^T y_k B_k^{-1}}{s_k^T y_k} \end{aligned}$$

Cette méthode peut être améliorée du point de vue de l'espace mémoire occupé. C'est la méthode employée par R. En pratique notre problème n'a

que 4 variables et ne nécessite pas ce gain d'espace mémoire, mais l'algorithme permet aussi de prendre en compte les bornes sur les variables. Cela nous a permis de garantir la positivité des paramètres.