1121_SIMULATION AND STATISTICAL COMPUTING

#HW1

Use Simulation to Show and Explain “Law of Large Numbers”

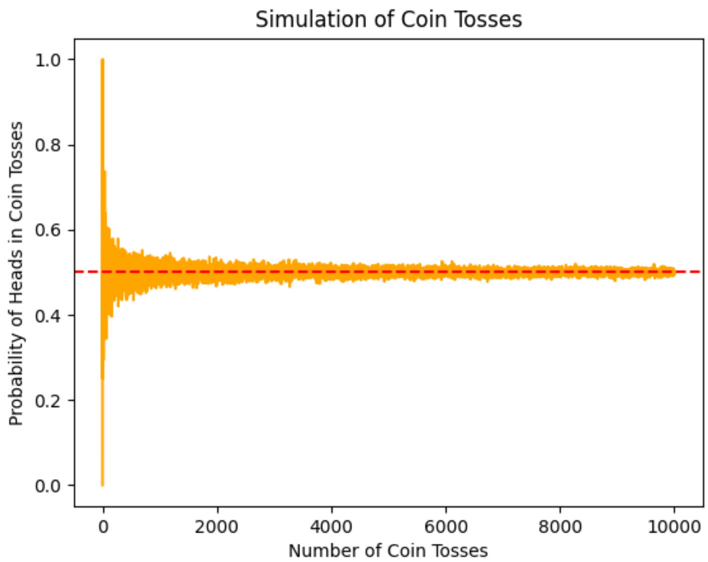
Law of Large Numbers

大數法則是統計學中的特性。某個具有隨機性的事件，每次該事件的結果都是隨機的，但當重複進行這個事件的實驗很多次時，實驗結果的平均值或該事件發生的機率會逐漸趨近於我們預期的期望值或機率值。也就是說但當我們進行足夠多次的實驗時，實驗結果將會趨近於我們對該事件的期望值。

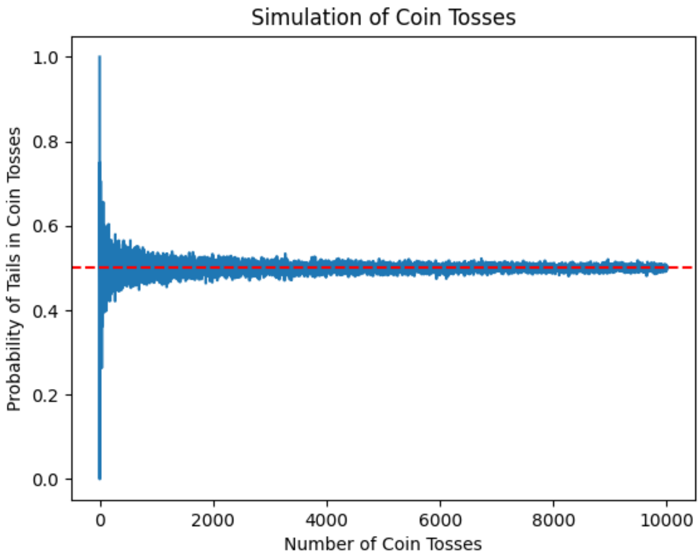
大數法則，強調了樣本數量足夠大的情況下，隨機性事件的不確定性會逐漸被平均化，使我們可以更有信心地預測或估計該事件的性質。以下將用三個例子以及模擬來演示大數法則。

1. Simulation of Coin Tosses

投硬幣是一個經典的大數法則範例，我將模擬投擲 1 次到 10000 次硬幣每次投擲都會個別計算出正面或反面所出現的機率，觀察其模擬結果。



圖(一)硬幣在不同投擲次數下正面(人頭)所出現的機率

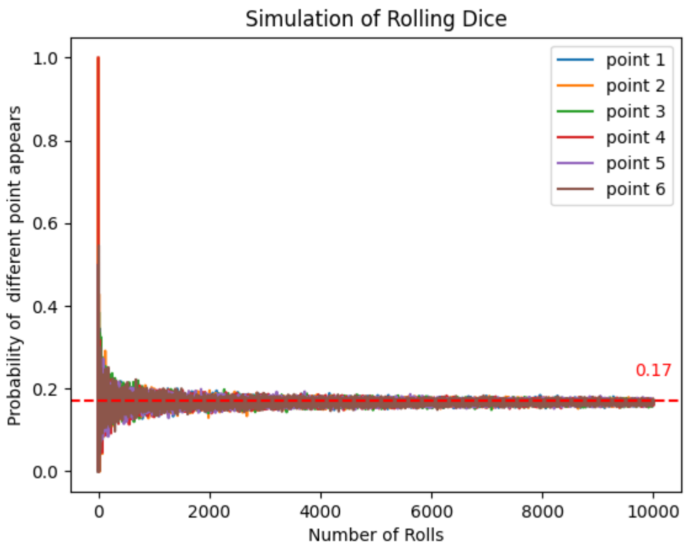


圖(二)硬幣在不同投擲次數下反面所出現的機率

圖中的紅色虛線代表硬幣投擲的預期機率，即正面或反面出現的機率均為 0.5。根據模擬結果顯示，當投擲次數接近 2000 次左右時，觀察到正面和反面出現的機率都會趨近於 0.5，達到了一種收斂的效果。然而，隨著模擬投擲次數的增加，並未顯著加強這種收斂效果，機率仍在 0.5 左右波動。

2.Dice Rolling Simulation

擲骰子問題也是一個經典的例子，可以用來闡釋大數法則。我們預期每一種點數出現的機率都應該是 1/6(約為 0.17)，然而，由於擲骰子具有隨機性，所以每個點數出現的機率不一定會和我們預期的相同。為了觀察這種隨機性，我們可以進行一個實驗，即投擲 1 到 10000 次骰子，然後觀察其結果。

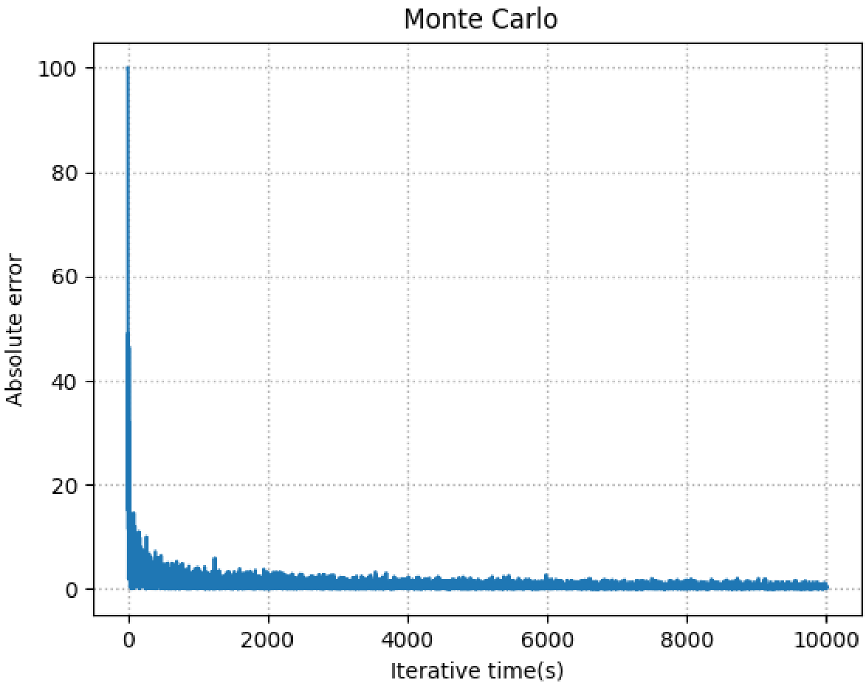


圖(三)不同投擲次數點數出現機率收斂效果

根據模擬結果可以看出，投擲骰子同樣能夠展現出大數法則的效應。當投擲次數超過 2000 次之後，每種點數出現的機率都逐漸趨近於約 0.17，這進一步驗證了大數法則的在隨機事件發生時，若實驗次數足夠多次，點數出現的機率越接近預期值。

Monte Carlo Simulation for Estimating π

透過蒙地卡羅法來估計 pi 值，也是大數法則的體現。這方法透過隨機生成點且落在圓內的機率，來估計圓的面積，進而估計出 π 的值。以下為實驗結果。。



隨著模擬次數的增加，估計出的 pi 值和實際 pi 值之間的 Absolute error 也逐間減少，趨近於 0。