

有关球槽模型的一些一般结论

目录页

§1 一般方程确定的轨道

§1.1 一般轨道与初始条件

§1.2 一般轨道与受力分析

§1.3 一般轨道与运动方程

§2 参考文献

图文工具：

GeoGebra, AxMath

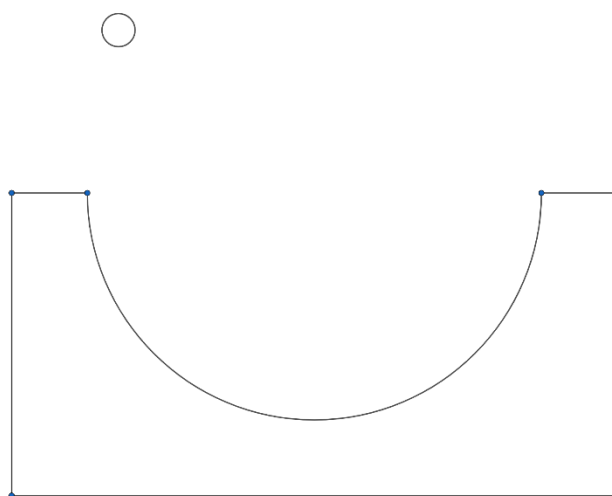
本文档开放一切使用权限，由作者声明免责

+注意本篇报告并没有得出一般结论点的一般结论

§1 一般方程确定的轨道

§1.1 一般轨道与初始条件

现在考虑如右图的场景，一可视为质点的小球于下方**一般轨道**的至左侧顶点的竖直切线的正上方以一定高度处静止或以一定的无水平方向的初速度释放，使其能够恰好无能量损失的进入**一般轨道**，暂时先不考虑任何形式的摩擦，不考虑空气阻力



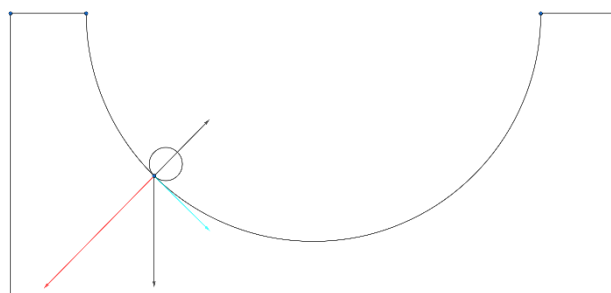
接下来让我们来分析一下这个模型，若小球总是恰好切入轨道，那么可以讲条件化为**初始速度与初始位置**，我们把像这样的条件称之为**初始条件**，一般的我们还要考虑小球是否会**跳出轨道**，以及**边界问题**，但是，我们先做出以下声明

1. 小球总是不会离开轨道，且不违背**数学原理**
2. 轨道总是能被确定的方程或函数确定

现在，我们将会使用**数学物理方程**来处理这个模型

§1.2 一般轨道与受力分析

首先我们来确定小球的受力情况，在**初始条件**下，我们还需额外的条件，例如轨道半径，设定为 r_0 ，轨道质量 $m_{\text{轨}}$ ，小球质量 $m_{\text{球}}$



图表 1

如上图所示小球在某一时刻的受力分析如图，小球受到重力与斜面的弹力（图表 1 黑色布份），合力相同于速度方向，斜面受到弹力（图文 1 红色部分）为

$$F = m_{\text{球}} g \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} + m\delta \frac{\int_{x_0}^x \sqrt{\delta} dx}{\left[1 + \left(\int_{x_0}^x \sqrt{\delta} dx\right)^2\right]^{\frac{2}{3}}} \quad (k = f') \quad (1.2-2)$$

$$\delta = \left(v_{\text{球}} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - v_{\text{轨}}\right)^2 + v_{\text{球}} \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

一般的，合力方向指向运动方程曲线的内法线

§1.3 一般轨道与运动方程

现在考虑运动状态以求得 F ，在极小的一段时间 dt 内，轨道受到的极小冲量为

$dI = F \cdot dt$ ，其中 dt 可表示为

$$dt = \frac{ds}{v_{\text{球}}} = \frac{1}{v_{\text{球}}} \left/ \left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - \frac{v_{\text{轨}}}{v_{\text{球}}} \right) \right. dx. \quad (1.2-2)$$

现在来处理 v 的表达，注意到此过程动能动量守恒，所以可以得到如上图所示小球在某

$$\begin{cases} m_{\text{球}} g r_0 + \frac{1}{2} m_{\text{球}} v_0^2 = m_{\text{球}} g f(x) + \frac{1}{2} m_{\text{球}} v_{\text{球}}^2 + \frac{1}{2} m_{\text{轨}} v_{\text{轨}}^2 \\ m_{\text{轨}} v_{\text{轨}} = m_{\text{球}} v_{\text{球}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - \frac{v_{\text{轨}}}{v_{\text{球}}} \right) \end{cases}, \quad (1.2-3)$$

其中 $f(x)$ 为轨道高度函数， $k = f'(x)$ ，解得：

$$\begin{cases} v_{\text{球}} = \sqrt{\frac{[2g(r_0 - f(x)) + v_0^2](1 + f'^2(x))}{1 + f'^2(x) + \beta - \beta^2}} \\ v_{\text{轨}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} \cdot v_{\text{球}} \end{cases}, \quad \text{其中 } \beta = \frac{m_{\text{球}}}{m_{\text{球}} + m_{\text{轨}}}, \quad (1.2-4)$$

易得轨道的运动方程为

$$g(x) = \int_{x_0}^x v_{\text{轨}} dx, \quad (1.2-5)$$

那么，小球的位置方程为

$$u_x(x) = \int_{x_0}^x v_{\text{球}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} - \frac{v_{\text{轨}}}{v_{\text{球}}} \right) dx, \quad u_y(x) = - \int_{x_0}^x v_{\text{球}} \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} dx, \quad (1.2-6)$$

以及小球的速度分量

$$v_x = v_{\text{球}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}} - \frac{v_{\text{轨}}}{v_{\text{球}}} \right), \quad v_y = v_{\text{球}} \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}}, \quad (1.2-7)$$

现在我们来求运动方程，注意到微分方程

$$\frac{du_i(x)}{dt} = v(x), \quad (i = x, y) \quad (1.2-8)$$

解出得应是 $t + C = h_i(x)$ ，如果可以的话求出其反函数 $x = h_i^{-1}(t + C)$ ，再代入 (1.2-6) 得

$$U_i(t) = u_i[h_i(t + C)] \quad (1.2-9)$$

这就是小球的运动方程

通过运动方程和位速方程，我们可以快速求出很多东西，比如小球或轨道的最大速度，亦或是振荡周期(如果有)，亦或是轨道类型

此外，对于一般的 $f(x)$ 我们无法确定是否存在 $x = h_i^{-1}(t + C)$ 这样的反函数，由于直接函数的高度复杂性，大概率是不存在的，所以球槽模型的一般结论的存在性还饱受争议（不然就不会只考察圆形轨道或基础几何图形轨道了）。

§2 参考文献

[1] @杨小易 QQ 动态 2025.08.24 22.25 篇 有关球槽模型的一些研究

[2] 并没有涉及到参考文献，所以无法列出