分形图的生成

4 种方法生成 Sierpinsky 三角形

L Shi 邮箱 slnsinlangmc@sina.com
Daisy 邮箱 daisy.xmy@qq.com
Y-Q Z 邮箱 1947536532@qq.com

摘要

用编程实现分形图的生成，是一个非常基础的问题。但是本文站在一个不同的角度，用 4 种不同的方法生成 Sierpinsky 三角形。第一种方法，是直接作图法，也就是定义一个递归作图函数，每一级调用都是做下一级操作，一级一级作图。同时用这种方法做出 Sierpinsky 地毯。第二种方法，是混沌游戏法，给定等边三角形的顶点，在该平面上随机做点，再随机选一个三角形顶点，点出两点连线的中点，再随机选择顶点，点连线中点，足够多次数后生成 Sierpinsky 三角形。我们尝试类比做出 Sierpinsky 地毯，但没有成功。第三种方法，是 L 系统方法，用符号表示作折线的指令，给定初始图形，每次用生成规则将一段线段替换成更复杂的下级结构，循环多次得到 Sierpinsky 三角形。我们还用此方法做出科赫雪花。第四种方法是杨辉三角方法，对于杨辉三角，将奇数点与偶数点涂上不同颜色，就能得到 Sierpinsky 三角形。此外，我们就此介绍了元胞自动机的概念。掌握了分形图的生成方法之后，我们利用分形作图的方法模仿了一张简单的日本浮世绘，作为一个所学知识的综合运用。

关键词 分形 Sierpinsky 三角形 递归 混沌游戏 L 系统 元胞自动机 浮世绘

1. 引言

分形几何属于非线性科学，其来源可以追溯到 17 世纪数学家莱布尼兹所思考过递回的自相似。由于生成规则为递归函数，分形图形往往具有自我相似性质，并且在任意小的尺度上都能有精细的结构，是在研究自然界时常运用的模型。

Sierpinsky 三角形是一种典型的分形模型，为波兰数学家谢宾斯基在 1915 年提出的一种分形形式。此图形始于一个经过递归函数作用的正三角形，将此三角形三个边的中点连线后形成四个三角形，并捨去正中间的三角形。剩下的三角形以同样的方式去除中间的部分，重复此步骤多次，所得到的图形便是 Sierpinsky 三角形。

本文的第一部分试图以四种不同的方式绘制 Sierpinsky 三角形，并利用所学到的迭代算法尝试 Sierpinsky 地毯与科赫雪花等不同的分形图形。

在掌握四种方法的思路以后，我们尝试对分形图的生成方法做一个综合应用。分形学的创始人之一曼德勃罗（Mandelbrot）曾经提到过日本的浮世绘中存在着分形的奥秘。那么我们便选择了一幅内容较为简单的浮世绘，将其中的一些元素抽象为分形图案，用掌握的编程方法进行模仿。虽然最终的成果比起艺术绘画略显笨拙，但我们

了解到很多自然中的事物确实可以用数学语言描述的分形图模仿，让我们体会到分形在多种领域都可以有广泛的应用。

2.4 种方法及其延伸

2.1. 直接作图法

2.1.1. 方法概述

直观的做图方式，如图 2.1.1 所示，蓝色部分为去掉的图形。由递归法，一级一级的去掉存留的三角形的中心部分，最终得到的图形即为 Sierpinsky 三角形。

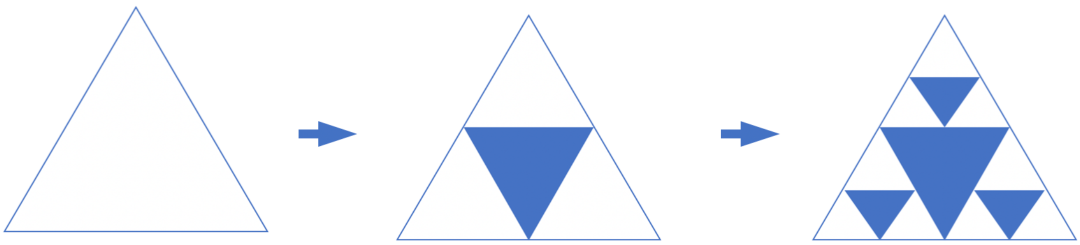

图 2.1.1

2.1.2. 代码实现思路

取边长为 16 单位的正三角形，将图形置于平面直角坐标系中，以原点为参考点分别标示出三个顶点的坐标：$(0,4\sqrt{3}),(8,-4\sqrt{3}),(-8,-4\sqrt{3})$。从参考点处定义递归函数，得到第一级的图形，即图 2.1.2 中橙色边的三角形。在剩余的三个三角形中做出参考点$(0,2\sqrt{3}),(-4,-2\sqrt{3}),(4,-2\sqrt{3})$，以此类推得到下一级的图形，如图 2.1.2。

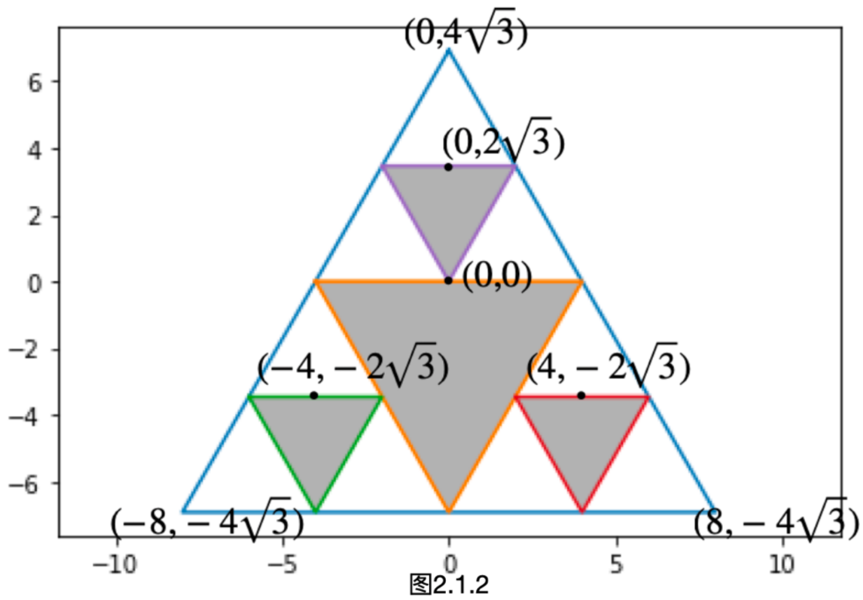

图2.1.2

将小三角形的边长$L-1>0.01$作为迭代结束的标准，最后可得到图 2.1.3

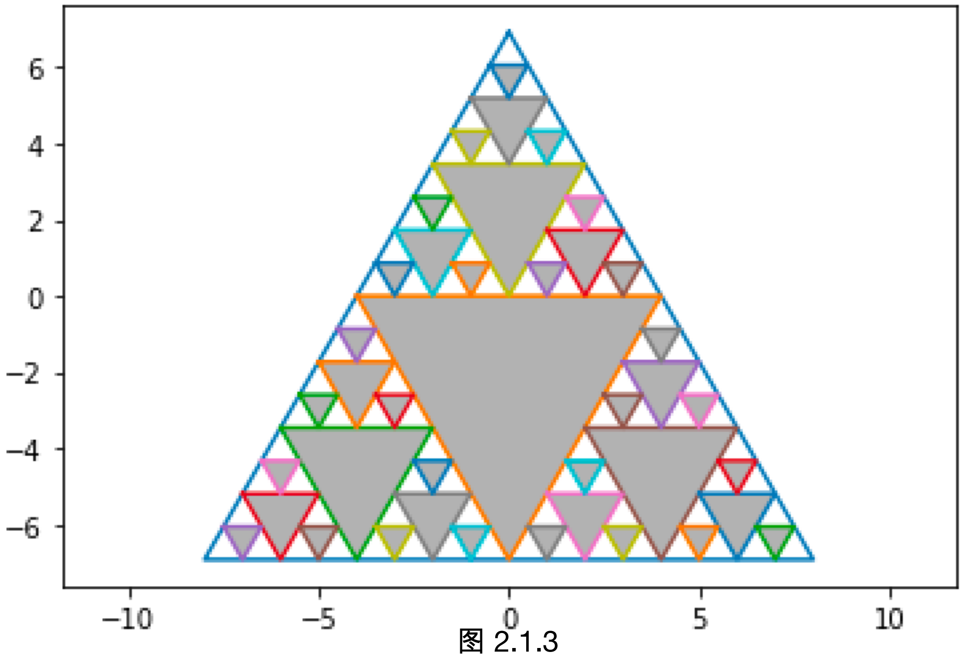

图 2.1.3

2.1.3. 直接做图法延伸：Sierpinsky 地毯

Sierpinski 地毯的生成方式与 Sierpinski 三角形相似，将矩形切割成九个等分，并舍去正中间的部分，剩下的八个矩形以此同样的方式类推，如图 2.1.4。

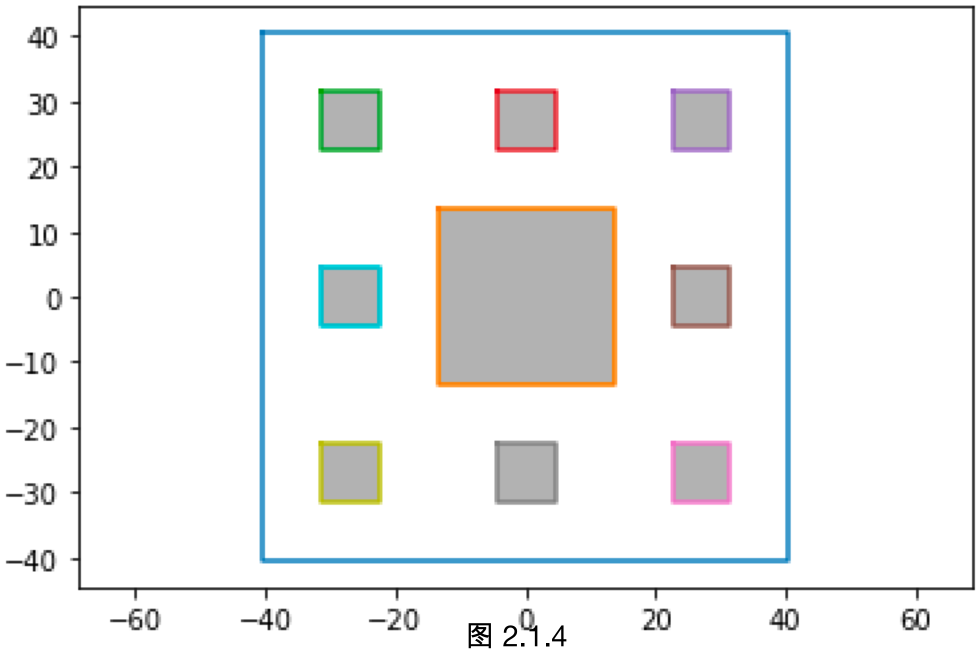

图 2.1.4

将小矩形的边长$L-1>0.01$作为迭代结束的标准，最后可得到图 2.1.5。

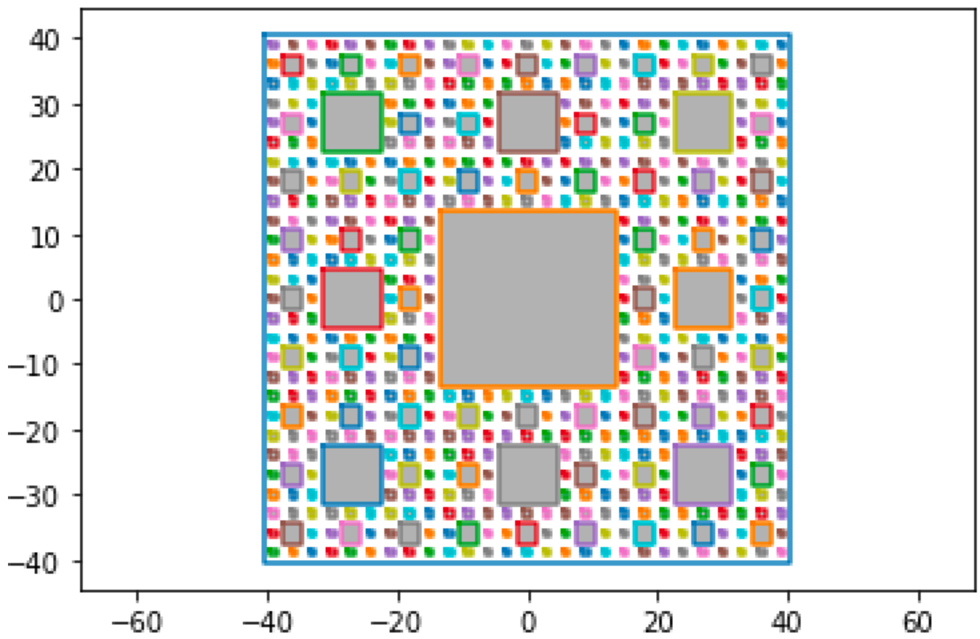

图 2.1.5

2.2. 混沌游戏法

2.2.1. 方法概述

分形除了可以用迭代法实现，还可以用随机法实现，混乱游戏就是这样的一种方法。利用统计规律，在大量实验点情况下，重复混乱游戏的过程最终可以形成谢宾斯基三角形图案。具体过程为：如图 2.2.1 所示，首先在平面上定出等边三角形的三个顶点分别为：A、B、C 点，再在平面内随机选取一点 K，然后运用随机过程从 A、B、C 中任意选取一点连接它和 K 然后取中点为 K_0；随后以 K_0 为下一个实验点，从 A、B、C 中随机选取一点连接它和 K_0 并取中点为 K_1，K_1 则为下一个实验点……以此类推。尽管在图中所示的阶段还看不出来规律，但当步数足够大时，我们可以发现平面上形成了谢宾斯基三角形图案。

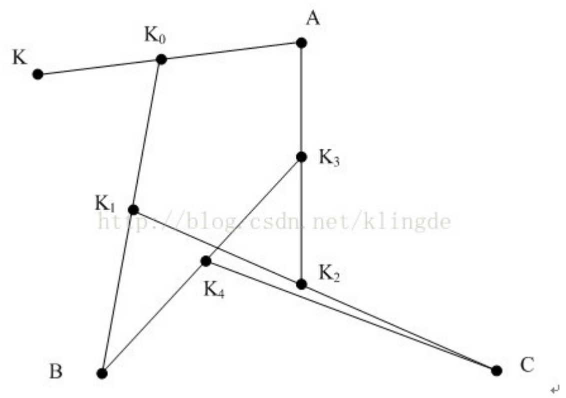

图 2.2.1

2.2.2. 代码实现思路

首先人为地给定等边三角形的三个顶点坐标，在平面内随机生成一个起始点，然后通过循环重复和随机顶点连线取中点，中点代替旧点的迭代过程。在此过程中，每一次循环内把当前点的横纵坐标分别保存在两个列表内，当步数足够大时（我们实验时在一千步左右就可以看出是谢宾斯基三角形图案，随着步数增大，图形轮廓越来越清晰尖锐），绘制出图案。图 2.2.2 所示为步数 N=20000 时的图形，可以看出，虽然在平面内有一些任意存在的点没有组成谢宾斯基三角形图案，但大多数都集中在图案上。

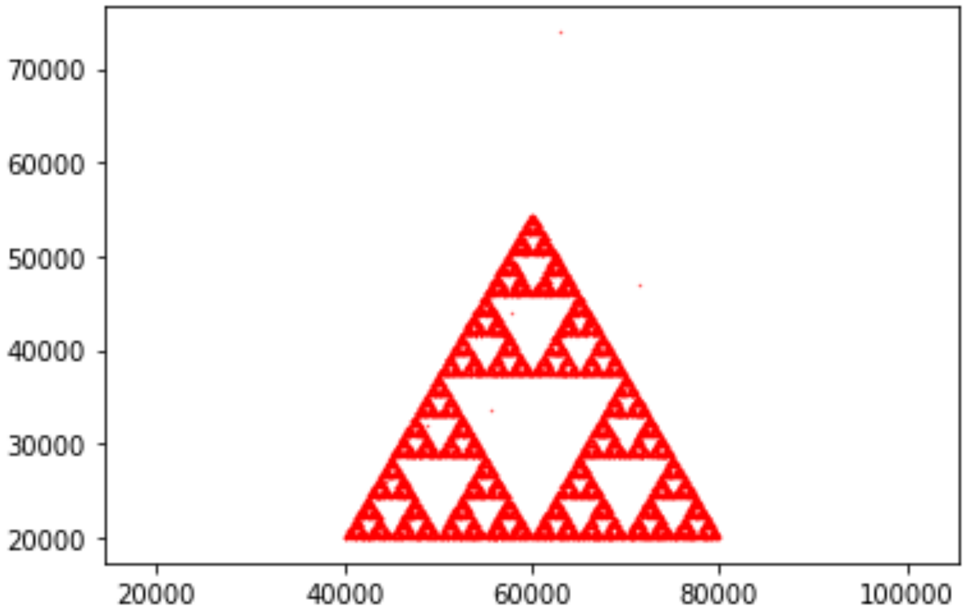

图 2.2.2

2.2.3. 推广

我们试图把混沌游戏法推广到作出谢尔宾斯基地毯图案。类比于作谢尔宾斯基三角形的方法，我们首先确定了正方形的四个顶点，然后在平面内随机选择一点作为起始点。由于谢尔宾斯基地毯图案不同于谢尔宾斯基三角形的取中点连线，而是把一个正方形平均分成 9 块小正方形，即边长三等分，所以我们尝试了从正方形的 4 个顶点中任取 1 个，然后作三等分点，以此产生下一个实验点，重复这个过程；结果出来的图案和谢宾斯基地毯大相径庭，无论所选的点是距起始点三分之一线段长处还是三分之二处；我们又试了让这个点以一定的概率随机选择是三分之一处还是三分之二处，试了 1/4、2/4、3/4 的概率，结果概率为 1/4 时最为接近，但和谢宾斯基地毯图案仍有很大差距，整体较为混乱，如图 2.2.3 所示。我们经过种种尝试，都没能成功用混沌游戏法实现谢宾斯基地毯。

后来发现我们的推广想法颇为天真，查阅资料，曾有人试图这样做，并没有人成功地用混沌游戏发做出 Sierpinsky 地毯。我们提出了一个疑问：混沌游戏法地局限性如何？如何知道一个分形图是否可以用混沌游戏法产生？还是我们没有找到正确地方法？

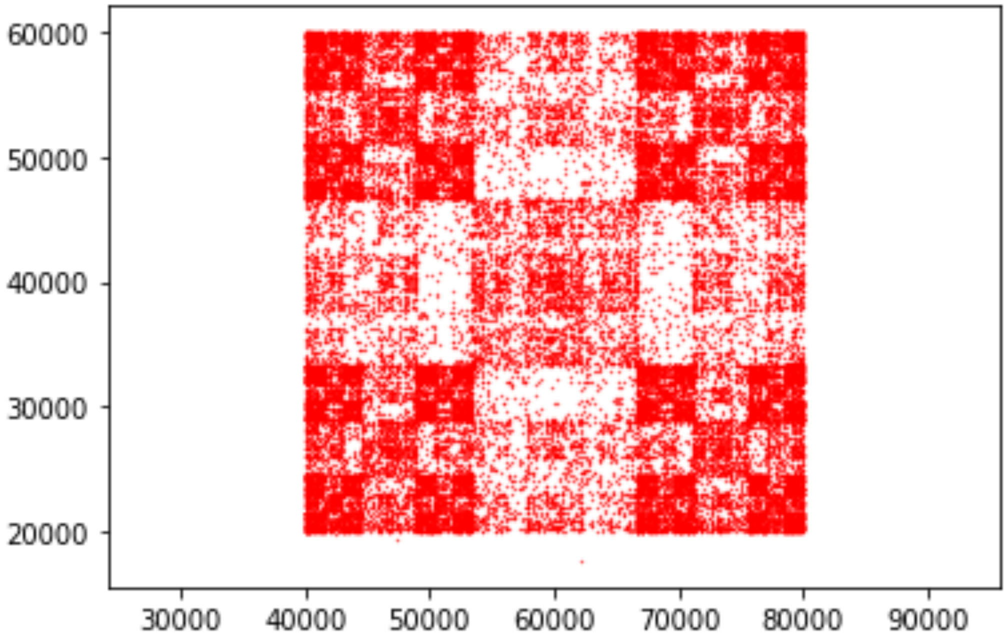

图 2.2.3

2.3. L-系统法

2.3.1. 方法概述

L-系统是由荷兰生物学家 Lindenmayer 根据生长发展中细胞交互作用提出的数学模型，在模拟植物生长方面的研究被广泛使用。L-系统是一系列不同形式的正规语法规则，在数学领域也能用于生成自相似的分形，例如迭代函数系统。以下是 L-系统的文法模型：

字母表：使用到的字母

初始字符串

生成规则：字符串的变换形式

由以上三个条件，便可一级一级地进行迭代，例如：

字母： A B

初始字符 (n=0)： A

生成规则： (A → AB), (B → A)

迭代过程：

n = 1 : AB

n = 2 : ABA

n = 3 : ABAAB

n = 4 : ABAABABA

2.3.2. 代码实现思路

Sierpinski 三角形的迭代文法如下：

字母表：f, F

符号：$+, -$ （“+”为当前方向左转，“-”为当前方向右转）

初始字符：f

生成规则：$(f \rightarrow F - f - F),(F \rightarrow f + F + f)$

角度：$\frac{3}{\pi}$

生成规则如图 2.3.1 所示

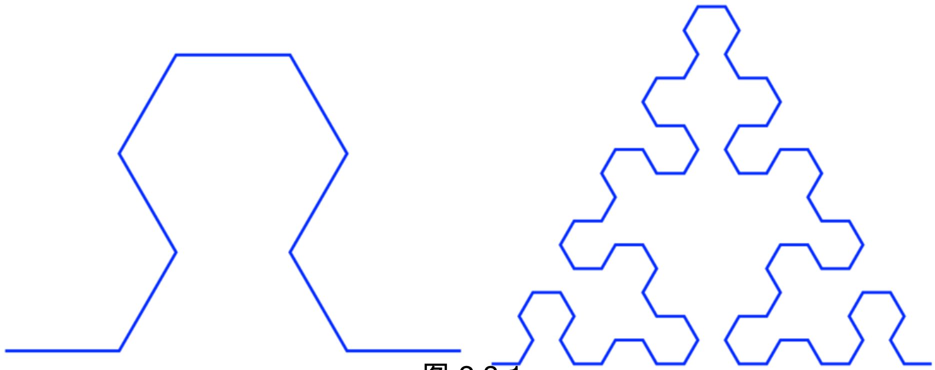

图 2.3.1

迭代八次后的结果如图 2.3.2 所示

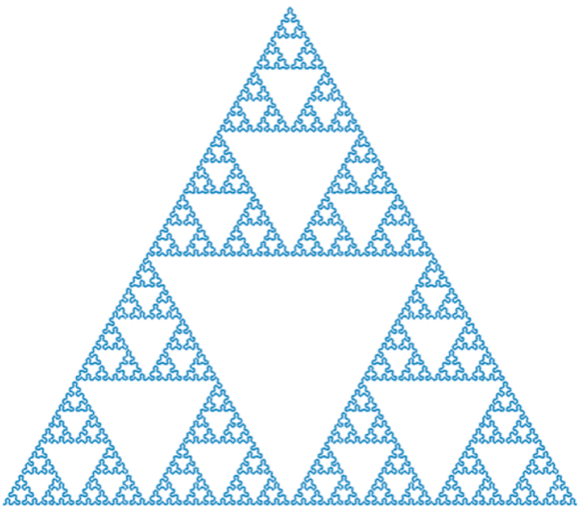

图 2.3.2

2.3.3. L-系统法：科赫雪花

科赫曲线是瑞典数学家科赫于 1904 年提出的分型模型，是分形中最广泛的研究对象之一，其生成规则示意图如图 2.3.3 所示：

字母表：F

符号：$-, +$（“$-$”为当前方向左转，“$+$”为当前方向右转）

初始字符：$F + +F + +F$

生成规则：$(F \rightarrow F - F + +F - F)$

角度: $\frac{3}{\pi}$

重复以上动作，得到的图形即为科赫曲线。

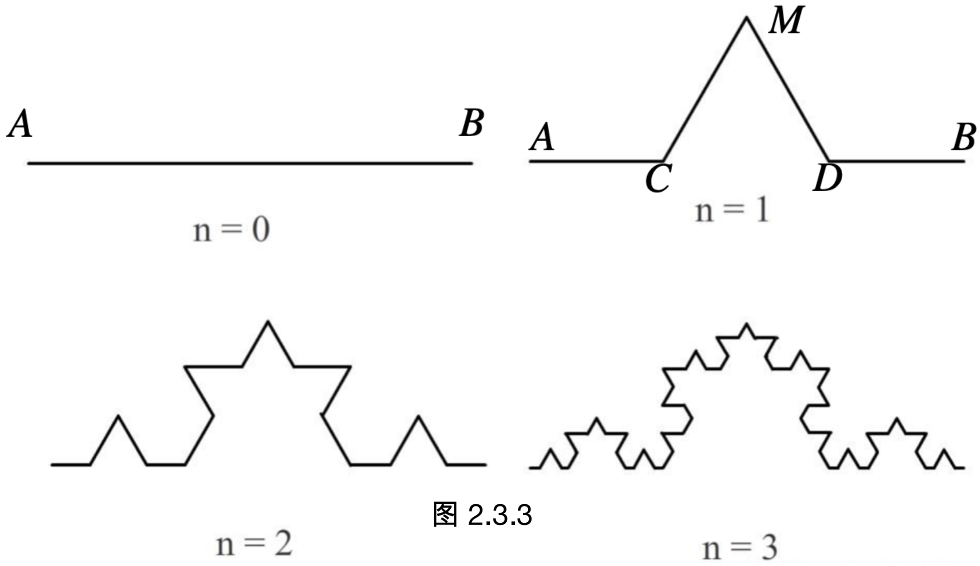

图 2.3.3

科赫雪花是由初始图形为正三角形的科赫曲线组成，迭代八次后运行结果如图 2.3.4：

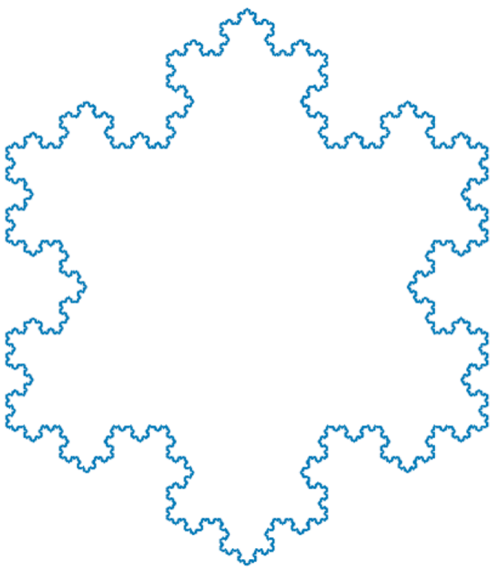

图 2.3.4

2.4. 杨辉三角法

2.4.1. 方法概述

杨辉三角，是二项式系数在三角形中的一种几何排列，中国南宋数学家杨辉 1261 年所著的《详解九章算法》一书中出现。（百度百科-杨辉三角）。事实上，如果我们

把杨辉三角中的奇数和偶数涂上两种不同的颜色，生成足够多行，所得到的图案就是 Sierpinsky 三角形。详见图 2.4.1.a。

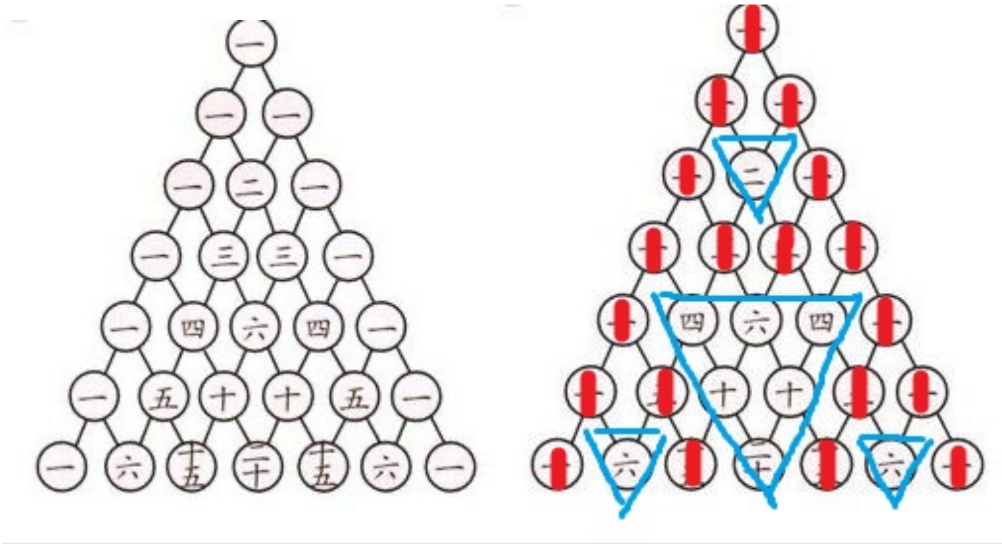

图 2.4.1.a

2.4.2. 代码实现思路

首先，我们描述一个平面区域——用一个(2n+1)*(n+1)的零数组代表平面上的格点。随后的操作是，在这个二维数组描述的平面上生成杨辉三角，如果判断出某个坐标对应的格点在杨辉三角中为奇数，则将这个坐标计入一个存储列表中。最后用 matplotlib 将这些记录的奇数格点画出来。

接着，我们将杨辉三角的顶点——坐标为[n][n]的元素设为 1，并计入列表。为方便起见，我们用"1"代表奇数点，用"0"代表偶数点，而非杨辉三角中实际的数字。

对于下一行，先将左右两端的元素[n+1][n-1]，[n-1][n-1]——坐标为设为"1"，并记入列表。接着，因此用用本行的所有相邻元素的和判断下一行对应的除端点以外元素的奇偶性，如果为奇数，则下一行对应元素设为"1"并计入列表，否则保持"0"。对于足够多的行，每一行都这样操作。见步骤图解图 2.4.2.a。

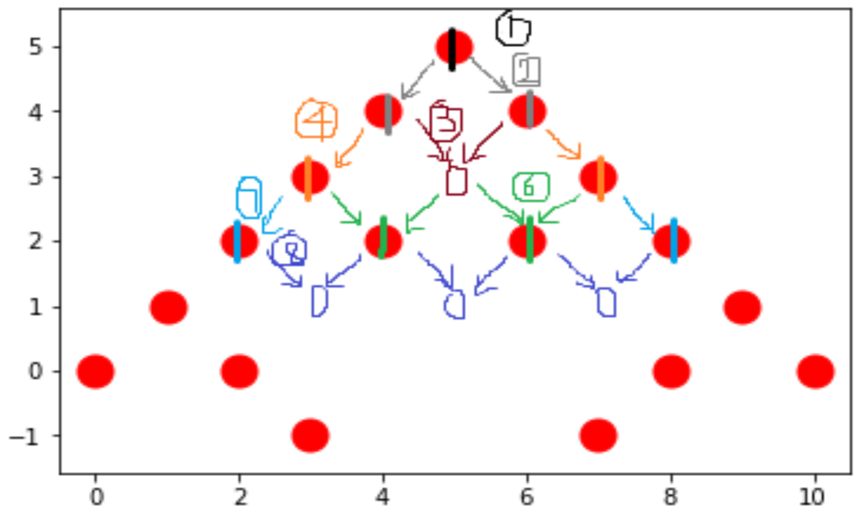

图 2.4.2.a

我们画了 n=125 行的杨辉三角，为图 2.4.2.b。

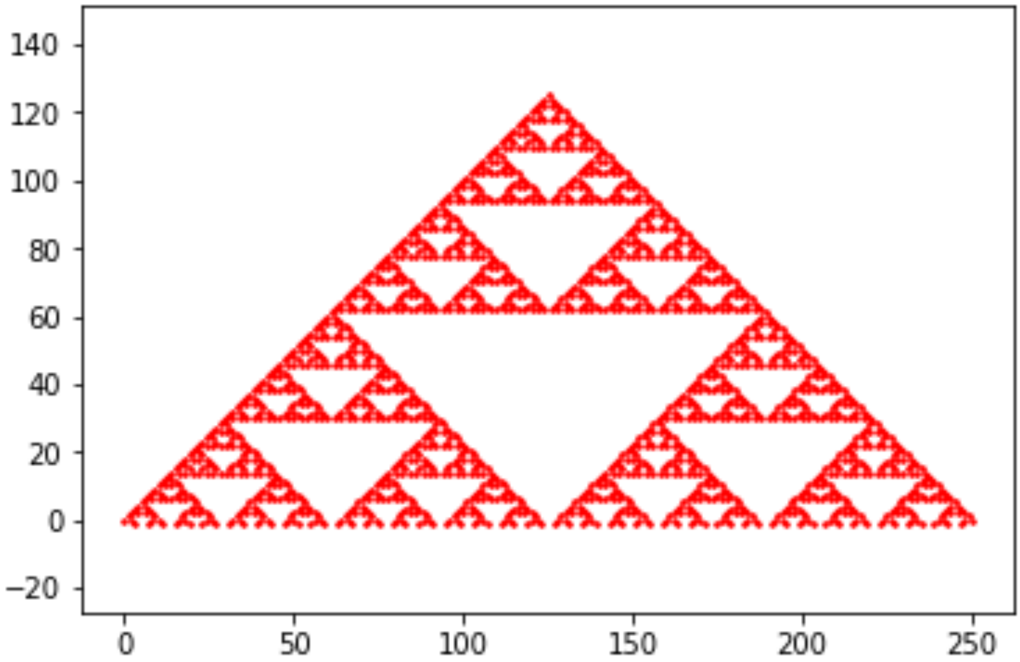

图 2.4.2.b。

2.4.3. 杨辉三角法与元胞自动机。

在这里，很自然地简单介绍一下元胞自动机的概念。元胞自动机(cellular automata, CA)是一种时间、空间、状态都离散，空间相互作用和时间因果关系为局部的网格动力学模型，具有模拟复杂时空系统时空演化过程的能力（百度百科-元胞自动机）。我的理解是，给定一个初始状态和一定的演化规则，对于一系列离散的时刻，按规则依次生成每个时刻的状态，从而得到一系列离散的状态。正如同上面的杨辉三角法，给定顶点的"1"，这就是初始状态；按左右端点赋"1"，其余数由上方两个相邻数和的奇偶性决定，这就是一种生成规则。每个时刻生成下一行，足够多行之后得到类似 Sierpinsky 三角形的形状。

元胞自动机可以用来很多一般现象，也以为动力学系统理论中系统整体行为与复杂现象的研究提供了一个有效的模型工具。在社会学、生态学、计算机科学、物理学和化学中都有广泛的应用。

3. 分形图综合应用

我们尝试将分形图与简单的几何图像组合绘制浮世绘，因为观察到其中的图像和分形结构很类似；模拟的对象是日本画家葛饰北斋的作品《山下白雨》，原图为(图 3.1)。

我们通过 matplotlib 这个在数据可视化中常常用到的工具，因为我们熟悉如何通过 matplotlib 将数学语言描述的事物转化为图形，正符合我们做分形图的目标。采用分层

作图的思想，将一张浮世绘拆解成 5 个不同的图层，这点于版画制作的流程也一脉相承，通过设置作图指令的 zorder 规定图层中内容的顺序。

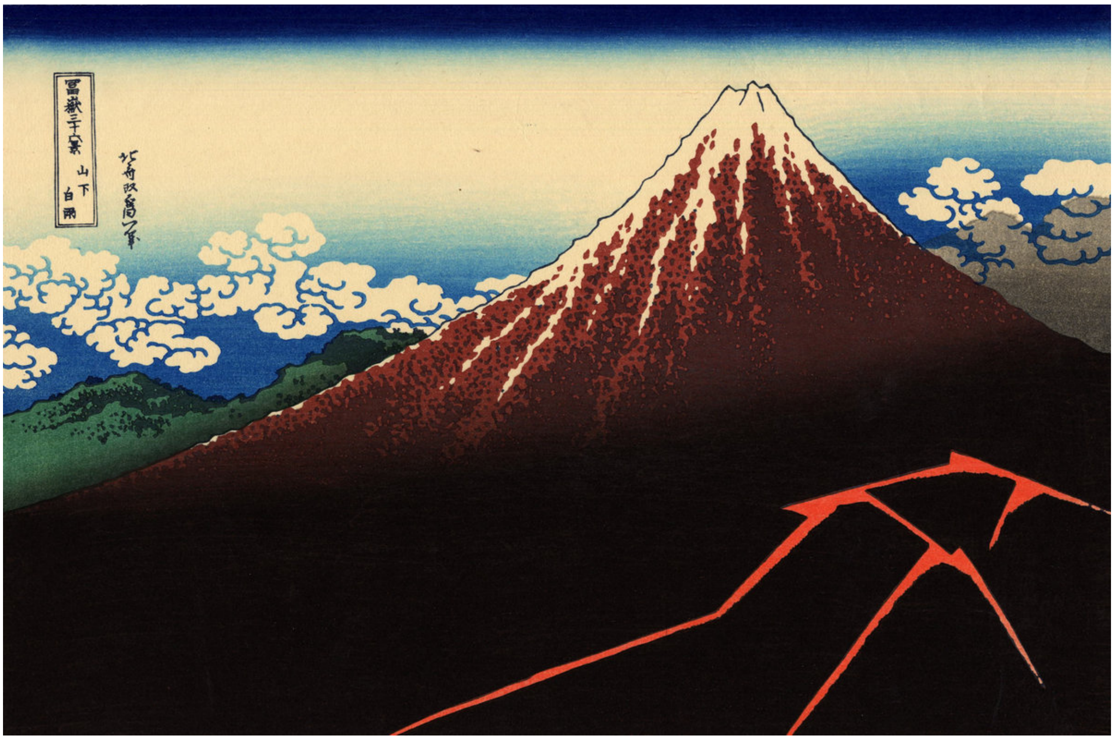

图 3.1

最底层是天空(图 3.2)，我们以单色的渐变层（通过设置 alpha 值）模拟天空。

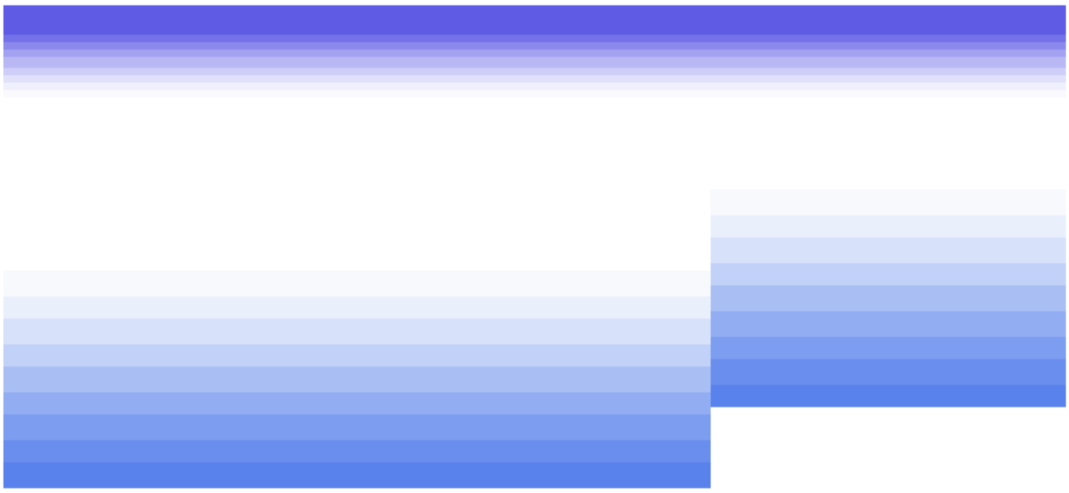

图 3.2

第二个图层是天空中的云朵。这些云朵实际上是通过 L 系统方法生成的分形龙图案，用将分形龙方法做出的点依次用蓝色连线，再将这些点用白色描点，适当调整参数，会出现云朵的形象。

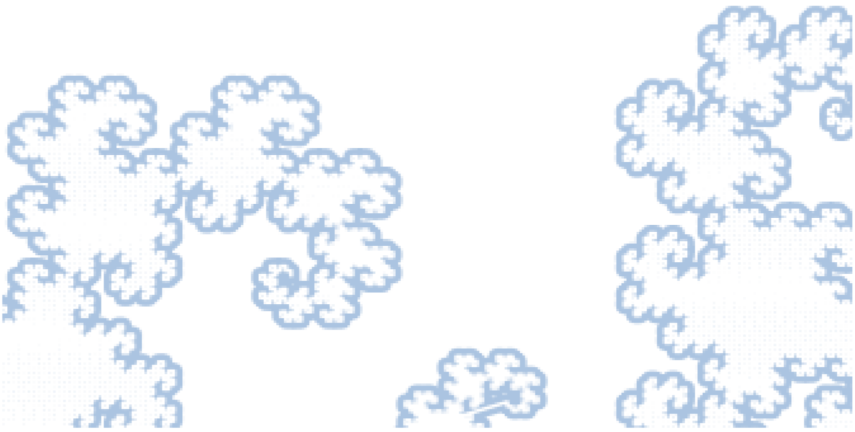

图 3.3

第三个图层是远处墨绿色的山脉。这些山脉也是用 L 系统自定义生成规则从而模仿出的形象。

图 3.4

第四层图形为近处的火山，取若干个点并连线后得到火山的形状，着色并加上渐层极为近处的火山而后以同样的原理在山脚处绘制岩浆。

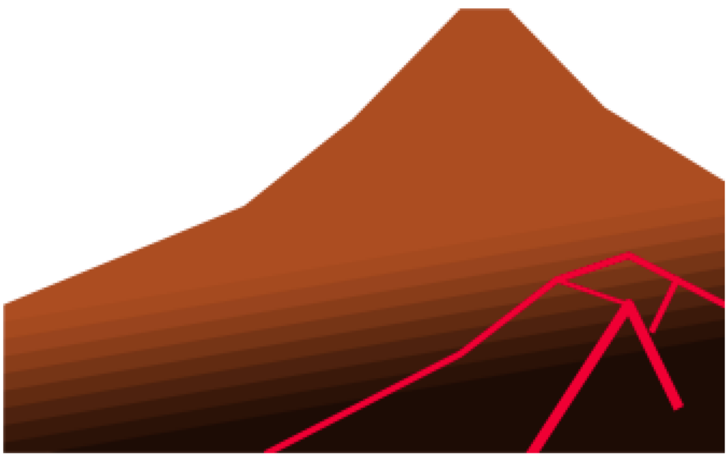

图 3.5

最后绘制山上的积雪，定好参考点之后，从参考点处延伸三条线，并使用我们论文中的第一种方法——直接作图法，定义递归函数模拟山上的积雪，这里我们用的不是先行迭代，线条的角度随迭代次数增加而减小，如图 3.6 所示。

图 3.6

将五个图层合并之后，最终的图形如下图 3.7。

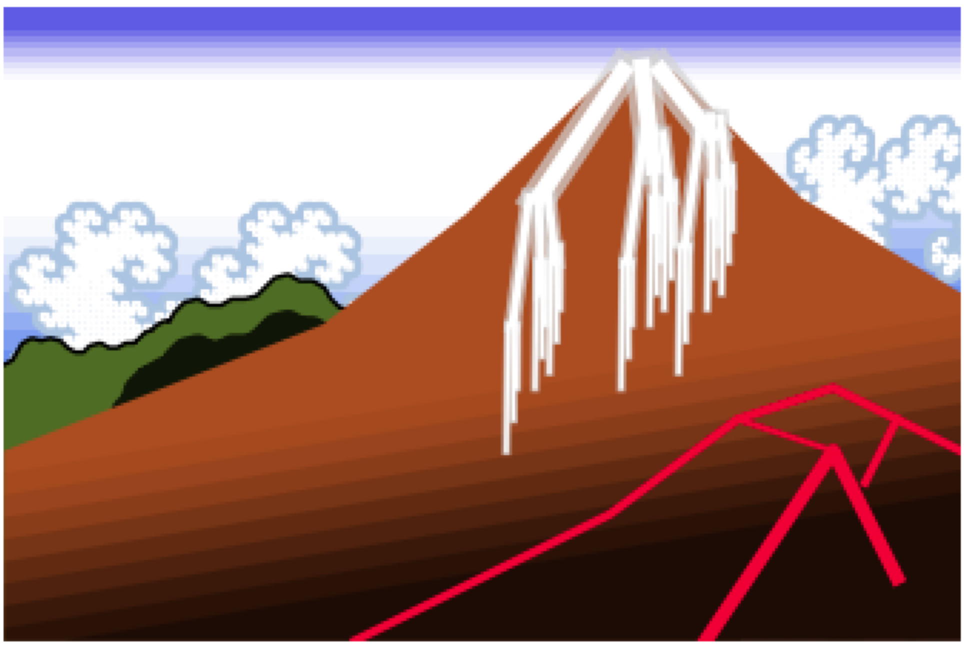

图 3.7

4. 总结

经过理论学习和实践，我们学会了用迭代方法和随机方法生成分形的方法，以谢尔宾斯基图形为例。其中迭代作图法和 L 系统法都属于迭代，混乱游戏法属于用随机方法生成分形。实质上这两种方法是同源的，只不过在图形迭代时图案是规律地、每次同时产生三个小三角形；混乱游戏是把点随机、无序地添加，当数量多到足以体现统计规律时才显示出谢宾斯基三角形图案；L 系统通过初始形状和给定规则一步一步形成图形的生长；杨辉三角法继承元胞自动机的思想，以周围格点的状态决定某点的状态。

通过利用分形的方法参与绘画创作，我们感受到了分形的美学意义；并且我们可以发现分形与自然界的存在有很大关联，比如云朵的形状、山的轮廓、树叶的生长等等。事实上，通过用分形图模仿浮世绘，我们深刻了解到分形图描摹自然界景物方面的强大之处。看似复杂、随机的自然界图景，其实可以通过简单的初始状态和一套可以用数学描述的规则实现生成。分形理论形成以来，在各个领域都有广泛应用，例如在医学影像学和诊断方面都有应用，可以作为一种时尚设计出新奇的服饰图案，也可以用来研究生态学中的大规模生态系统的规律……分形这种比较新颖思想可以给多种学科前沿研究带来新思路、新突破。因此，分形是既美又重要的。

5. 参考文献

[1] 谢宾斯基三角形的几种生成方法,https://www.cnblogs.com/lfri/p/10128073.html

[2] L-系统语法规则构建三维分形树
https://blog.csdn.net/qq_31615919/article/details/78976063

[3] Python 绘制分形图（曼德勃罗集、分形树叶、科赫曲线、分形龙、谢尔宾斯基三角等）附代码 https://zhuanlan.zhihu.com/p/25792397

[4] 张天蓉,蝴蝶效应之谜——走进分型与混沌,北京:清华大学出版社,2013