MATLAB 課題 3 について

塩塚竜也

九州大学航空宇宙工学コース
外本・坂東研究室

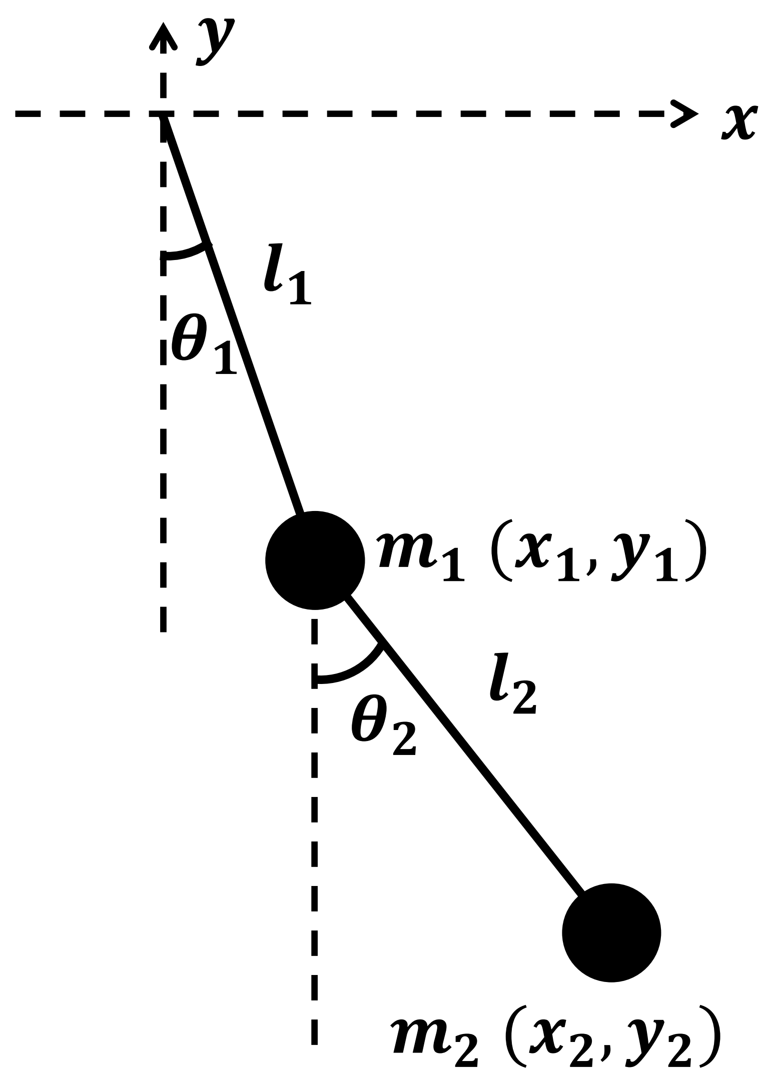
shiotsuka.tatsuya.422@s.kyushu-u.ac.jp

2022 年 5 月 13 日

目次

課題 3 の問題

下図に示すような二重振子の運動の様子を動画で示せ．



仮定

- 糸はたるまない

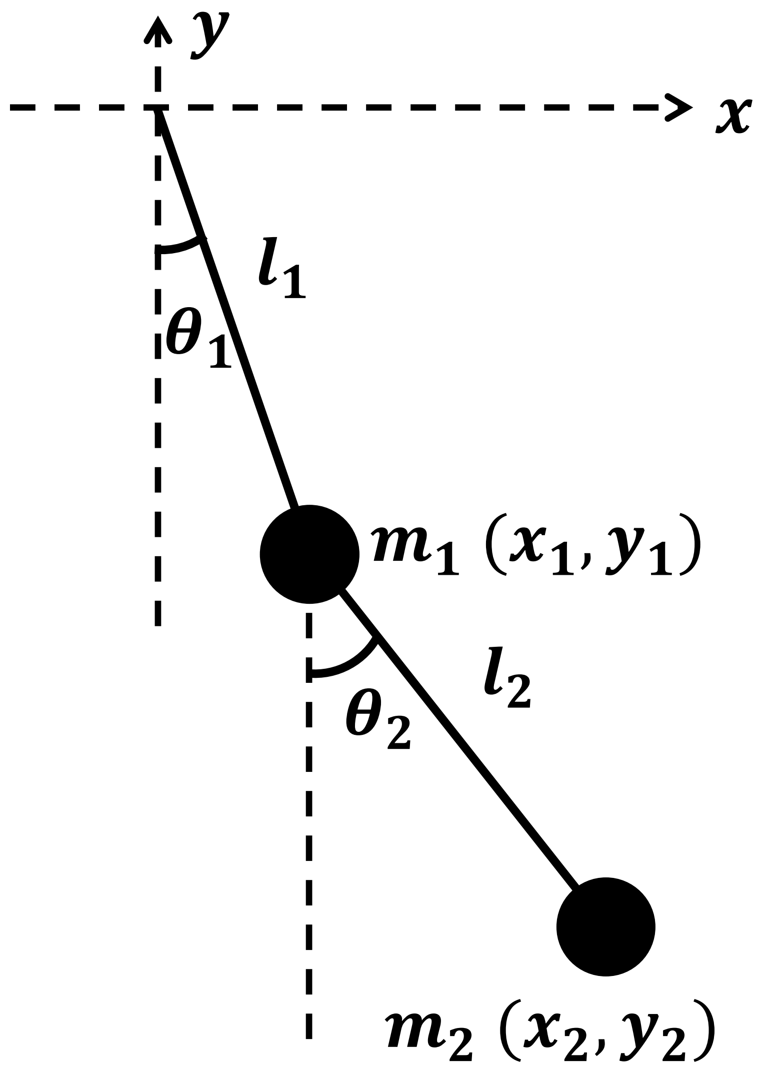
条件

- 振子の重さや糸の長さは任意
- 極微小（例えば 1 兆分の 1 ずつ）ずらした初期条件を 100 個用意すること．
- 100 個の初期条件を与えた時の二重振子の運動の様子を 1 つの動画内で示すこと．

解答の流れ

1. 運動エネルギ K
2. ポテンシャルエネルギ U
3. ラグランジュ関数 $L = K - U$
4. ラグランジュの方程式 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1}$

ラグランジュの方程式の導出



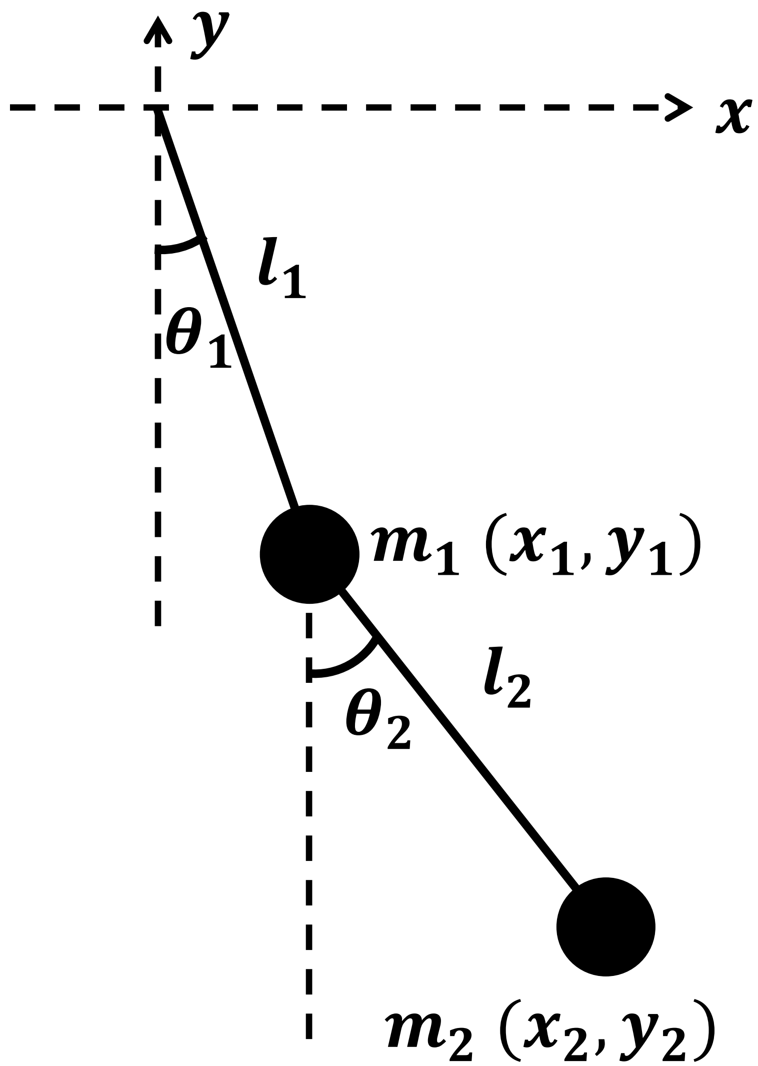
- おもり 1 の位置

$$
\begin{aligned}
x_1 &= l_1 \sin\theta_1 && (1) \\
y_1 &= -l_1 \cos\theta_1 && (2)
\end{aligned}
$$

- おもり 1 の速度 V_1

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 \\
&= (l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1)^2 + (l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1)^2 \\
&= l_1^2\dot{\theta}_1^2 && (3)
\end{aligned}
$$

ラグランジュの方程式の導出



- おもり 1 の運動エネルギ K_1

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 \tag{4}$$

- おもり 1 のポテンシャルエネルギ U_1

$$U_1 = m_1gy_1 = -m_1gl_1\cos\theta_1 \tag{5}$$

ラグランジュの方程式の導出

- おもり 2 の位置

$$
\begin{aligned}
x_2 &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 & (6)\\
y_2 &= -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2 & (7)
\end{aligned}
$$

- おもり 2 の速度 V_2

$$
\begin{aligned}
V_2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \\
&= (l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2)^2 + (l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2)^2 \\
&= l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1\dot{\theta}_1 l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & (8)
\end{aligned}
$$

ラグランジュの方程式の導出

- おもり 2 の運動エネルギ K_2

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2 V_2^2 = \frac{1}{2}m_2 \left\{ l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1\dot{\theta}_1 l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right\} \tag{9}$$

- おもり 2 のポテンシャルエネルギ U_2

$$U_2 = m_2 g y_2 = -m_2 g \left(l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 \right) \tag{10}$$

ラグランジュの方程式の導出

- ラグランジュ関数 L を求める

$$
\begin{aligned}
L &= (K_1 + K_2) - (U_1 + U_2) \qquad (11)\\
&= \left(\frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 - m_1 g l_1 \cos\theta_1\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}m_2 \left\{ l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1\dot{\theta}_1 l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right\} \\
&\quad + m_1 g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g (l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2) \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \\
&\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2 \qquad (12)
\end{aligned}
$$

ラグランジュの方程式の導出

- ラグランジュの方程式を求める

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= (m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 \\ &\quad + m_2 l_1 l_2 \left\{\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + \dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)\right\} \\ &\quad + (m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1 = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= m_2 l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2 g l_2 \sin\theta_2 \\ &\quad + m_2 l_1 l_2 \Big(\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) - \dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)\Big) = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

ラグランジュの方程式の導出

- 角加速度 $\dot{\omega}$ を求める

ここで，$[\omega_1, \omega_2]^T = \left[\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2\right]^T$，$M = m_1 + m_2$，$\mathrm{C} = \cos(\theta_1 - \theta_2)$，$\mathrm{S} = \sin(\theta_1 - \theta_2)$ として，前式を整理すると，

$$\begin{bmatrix} Ml_1 & m_2 l_2 \mathrm{C} \\ l_1 \mathrm{C} & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Mg\sin\theta_1 - m_2 l_2 \mathrm{S} \dot{\theta}_2^2 \\ -g\sin\theta_2 + l_1 \mathrm{S} \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} l_2(-Mg\sin\theta_1 - m_2 l_2 \mathrm{S}\omega_2^2) - m_2 l_2 \mathrm{C}(-g\sin\theta_2 + l_1 \mathrm{S}\omega_1^2) \\ l_1 \mathrm{C}(-Mg\sin\theta_1 - m_2 l_2 \mathrm{S}\omega_2^2) + Ml_1(-g\sin\theta_2 + l_1 \mathrm{S}\omega_1^2) \end{bmatrix}}{Ml_1 l_2 - m_2 l_1 l_2 \mathrm{C}^2} \tag{16}$$

ラグランジュの方程式の導出

- 角加速度 $\dot{\omega}$ を求める

$$\dot{\omega}_1 = \frac{-m_2 g \mathrm{C} \sin\theta_2 + m_2 l_1 \mathrm{C}\mathrm{S}\omega_1^2 + Mg\sin\theta_1 + m_2 l_2 \mathrm{S}\omega_2^2}{m_2 l_1 \mathrm{C}^2 - M l_1} \tag{17}$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{-Mg\mathrm{C}\sin\theta_1 - m_2 l_2 \mathrm{C}\mathrm{S}\omega_2^2 + Mg\sin\theta_2 - M l_1 \mathrm{S}\omega_1^2}{m_2 l_2 \mathrm{C}^2 - M l_2} \tag{18}$$

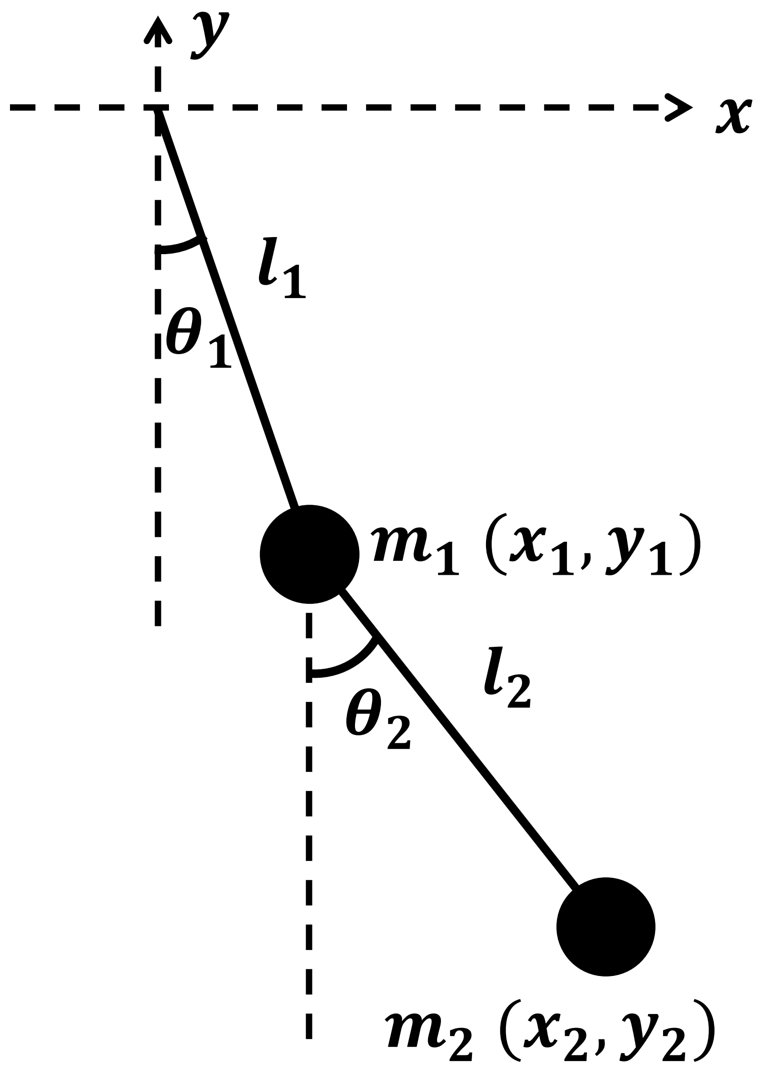
シミュレーションコード

```
for iPendulum = 1:nPendulum
    initCond = [60; 0; 0; 0]; % gif10
    if iPendulum == 1
        initial = initCond;
    end
    initCond(2) = initCond(2)+(iPendulum-1)*10^(-12);
    initCond = deg2rad(initCond);
    [t, x] = ode45(@(t, x) odePendulum(t, x), tspan, initCond);
    for n = 1:length(tspan)
        XY(n, :, iPendulum) = theta2xy(x(n, :));
    end
end
```

```
function dxdt=odePendulum(t, x)
  global L1 L2 M1 M2 g;
  theta1 = x(1);  theta2 = x(2);  dtheta1 = x(3);  dtheta2 = x(4);
  M12 = M1 + M2;
  delta = theta1 - theta2;
  C = cos(delta);
  S = sin(delta);
  LHS = [M12*L1, M2*L2*C;
               L1*C, L2];
  RHS = [-M12*g*sin(theta1)-M2*L2*S*dtheta2^2;
         -g*sin(theta2)+L1*S*dtheta1^2];
  ddtheta = inv(LHS) * RHS;
  dxdt = [dtheta1; dtheta2; ddtheta(1); ddtheta(2)];
```

- $odePendulum$ で微分方程式を定義．
- $\begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2\end{bmatrix}^T$ の微分値を返す．

シミュレーション条件



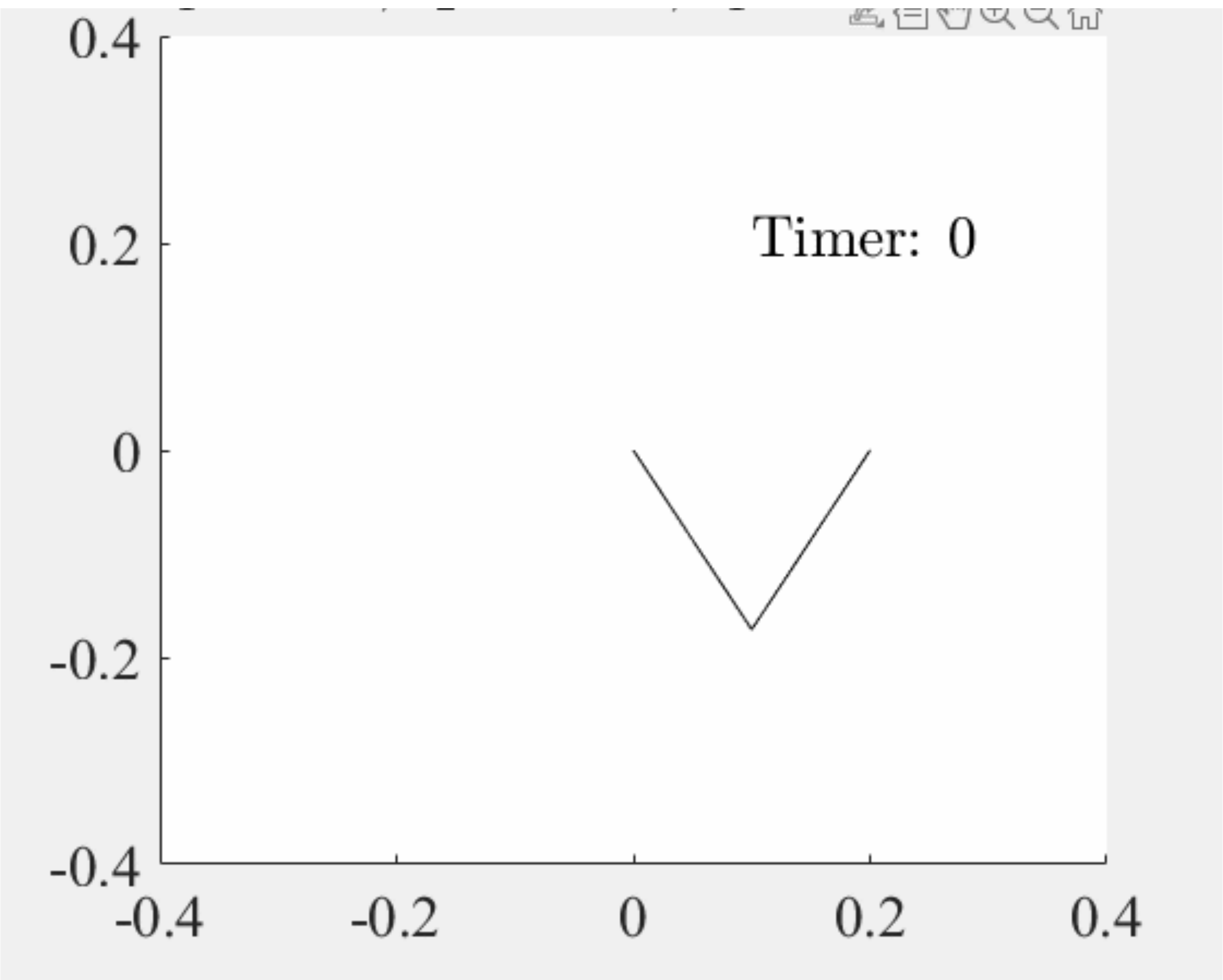
以下の条件のもと，シミュレーションを行う．
今回のシミュレーションでは，θ_1 を $1/10^{-12}$ deg ずつずらした初期条件を 100 個用意した．

項目	記号	値
糸の長さ（上）	l_1	0.2 m
糸の長さ（下）	l_2	0.2 m
おもり質量（上)	m_1	0.1 kg
おもり質量（下)	m_2	0.1 kg
重力加速度	g	9.8 m/s^2

シミュレーション 1

初期条件 1

$$\begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}30 & 150\end{bmatrix}^T \mathrm{deg},\ \begin{bmatrix}\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T \mathrm{deg/s}$$

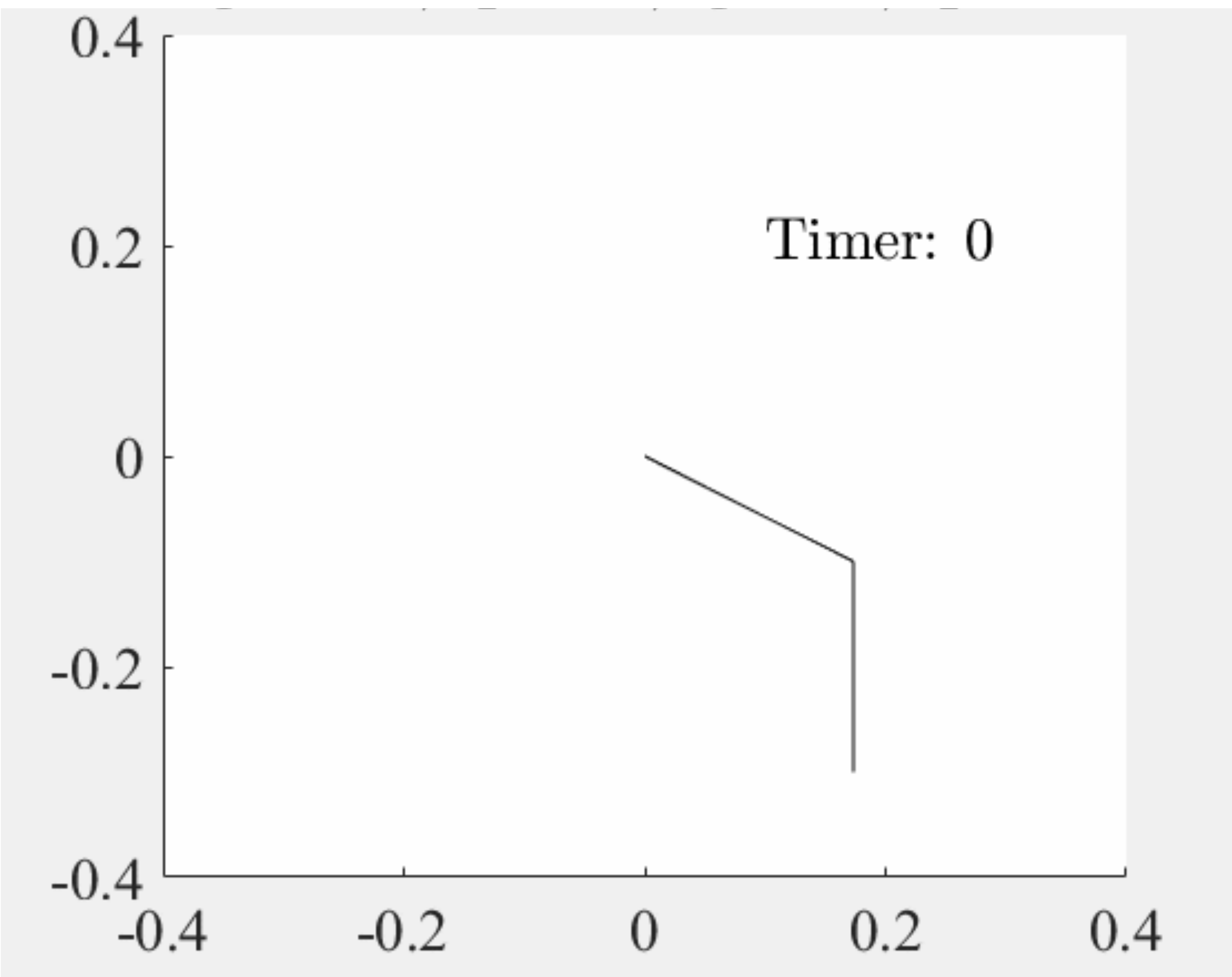


- $t = 16$ s: 振子の運動がずれ始める．
- $t = 25$ s: 振子の運動が完全に乱れる．

シミュレーション 2

初期条件 2

$$\begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}60 & 0\end{bmatrix}^T \mathrm{deg},\ \begin{bmatrix}\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T \mathrm{deg/s}$$



- $t = 20$ s: 振子の運動がずれ始める．
- 菱形のような形を成して運動している．

課題の振り返り

工夫した点

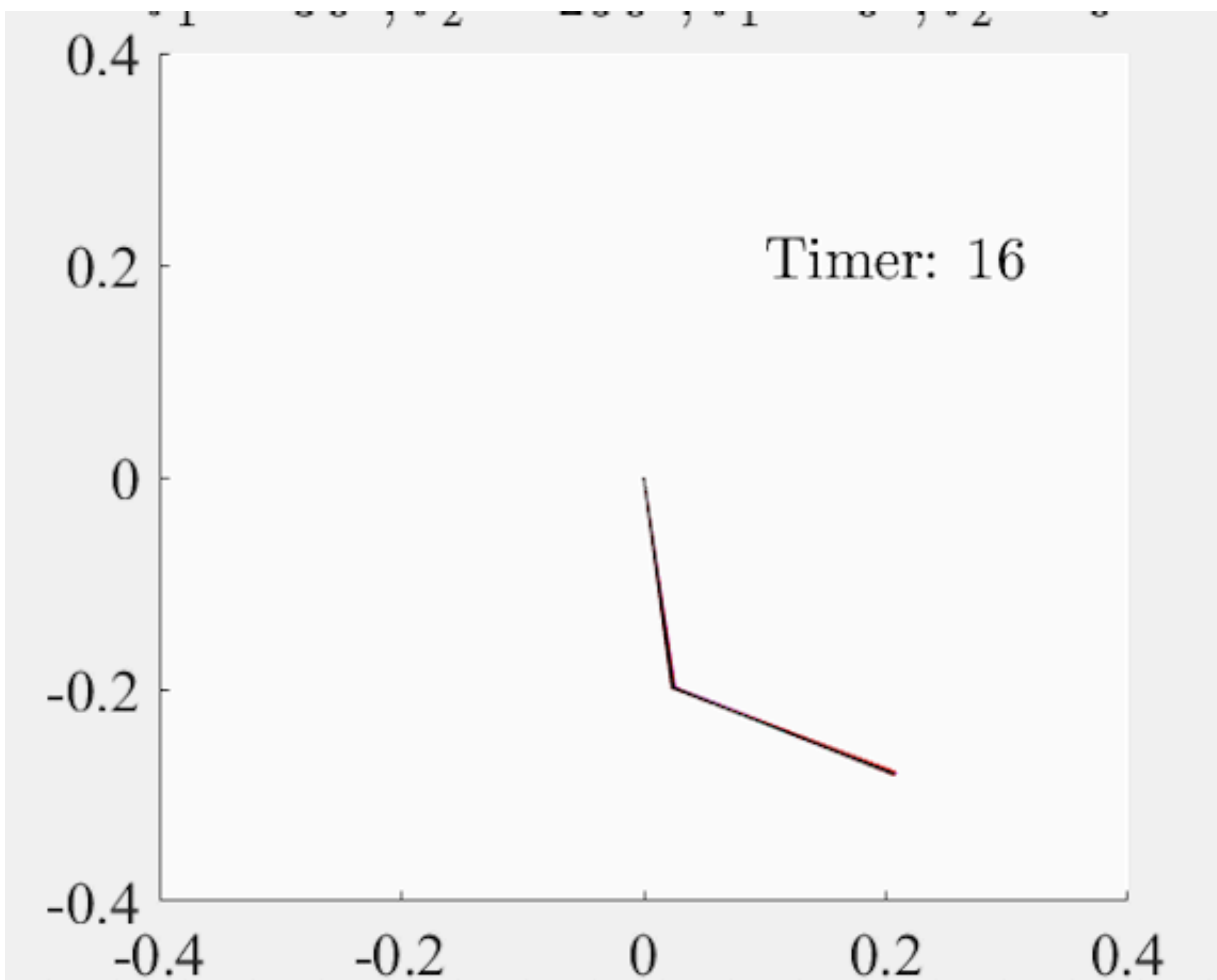
- 100 個の振子の動きがわかりやすいよう，振子の色を変化．
- 図中に Timer を配置．
- スライド作成に関して，グルーピングを意識．

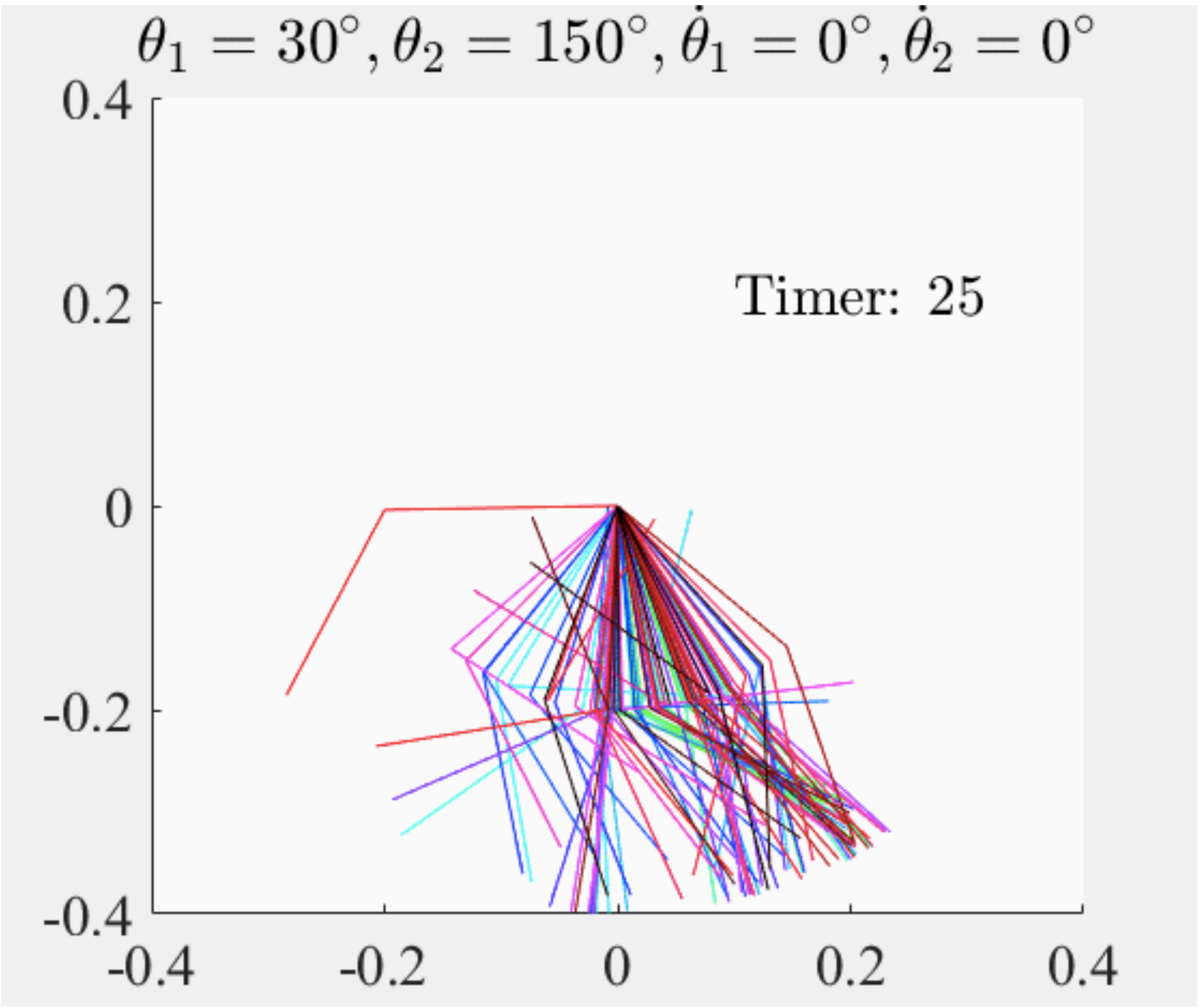
苦労した点

- ODE 関数の使い方．
- 図を保存する際，目盛が含まれない現象の解決．
- 数式をスライドに起こす作業．

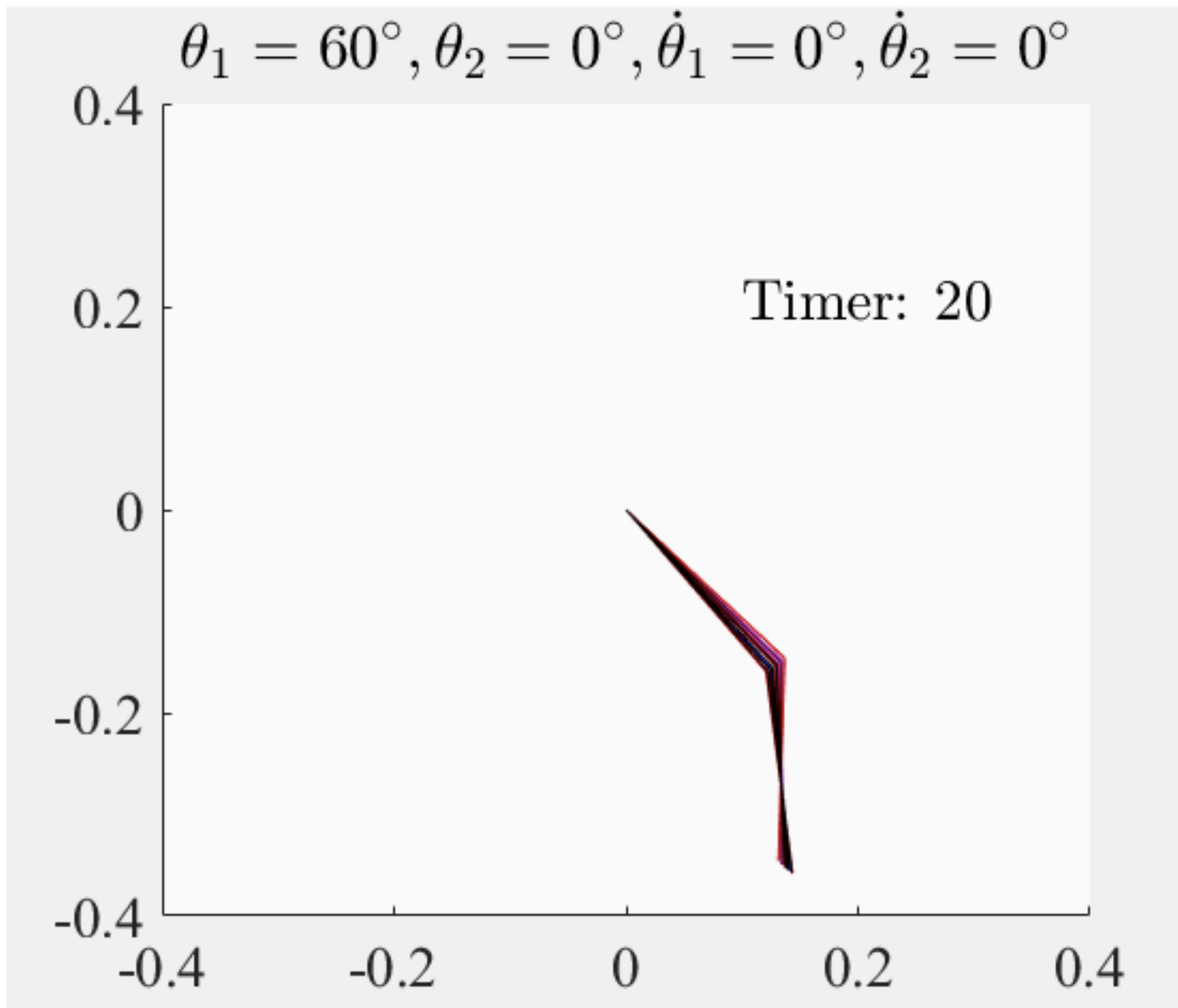
結論

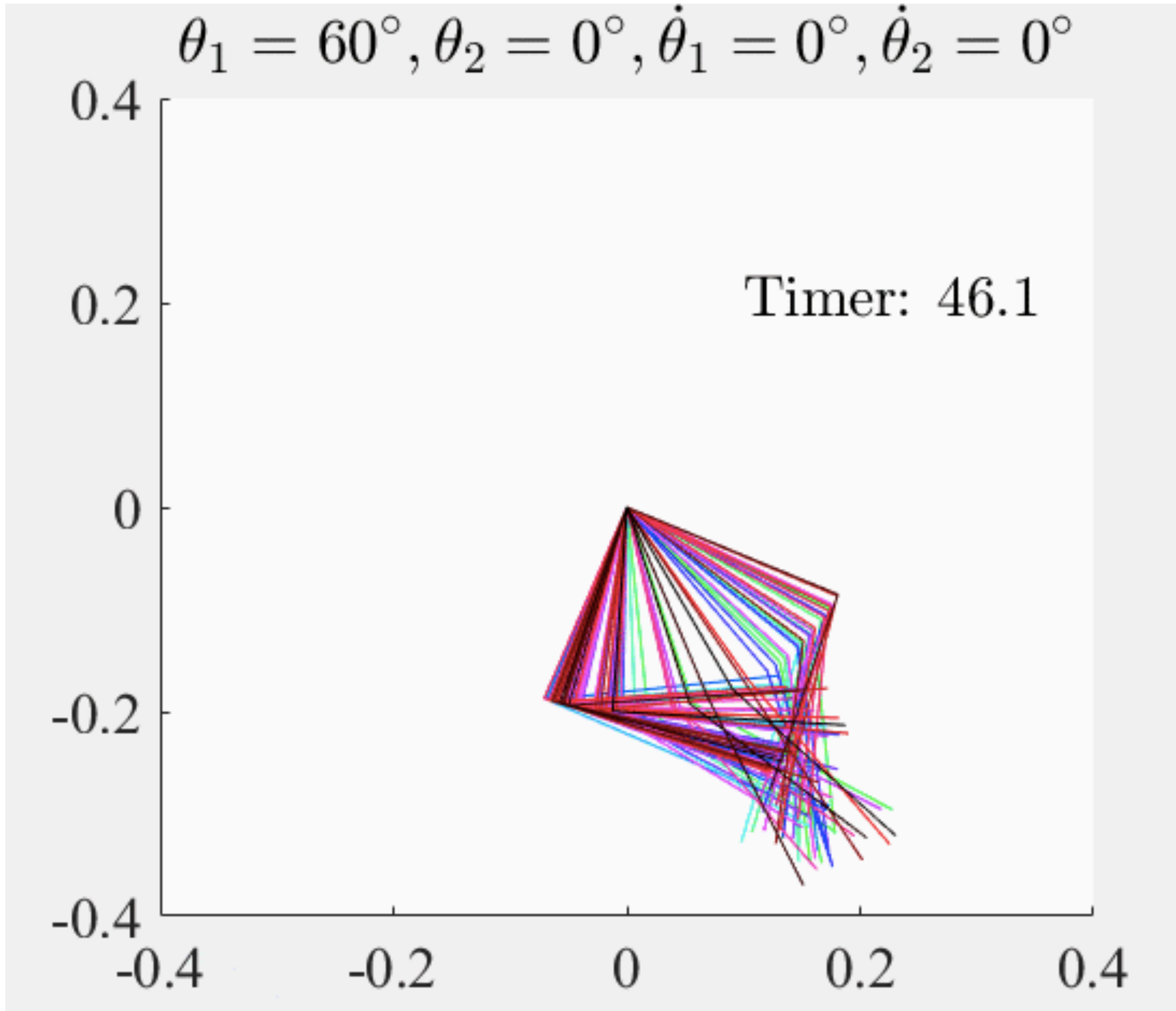
- 二重振子の運動をラグランジュの方程式を用いて導出した．
- 2 つの初期条件でシミュレーションを行った結果，初期値鋭敏性が観察された．
- MATLAB でのシミュレーション方法を修得した．


Timer: 16
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4



$\theta_1 = 30^\circ, \theta_2 = 150^\circ, \dot{\theta}_1 = 0^\circ, \dot{\theta}_2 = 0^\circ$
Timer: 25
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4


$\theta_1 = 60^\circ, \theta_2 = 0^\circ, \dot{\theta}_1 = 0^\circ, \dot{\theta}_2 = 0^\circ$
Timer: 20
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4


$\theta_1 = 60^\circ, \theta_2 = 0^\circ, \dot{\theta}_1 = 0^\circ, \dot{\theta}_2 = 0^\circ$
Timer: 46.1
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4