

Xilinx Zynq FPGA, TI DSP, MCU 기반의 프로그래밍 및 회로 설계 전문가 과정

강사 – Innova Lee(이상훈)

gcccompil3r@gmail.com

학생 – hoseong Lee(이호성)

hslee00001@naver.com

목차

- ✓ 라플라스 변환
- ✓ 회로에서의 헤비사이드 함수와 라플라스 변환
- ✓ 함수의 직교성
- ✓ 푸리에 변환

지금부터 선생님 블로그 전부....ㅠ 너무 정리가 잘되어 있다.. 주말이용해서 공책으로 풀어보겠습니다.

*라플라스 변환을 활용한 회로 해석

The image shows a whiteboard with handwritten mathematical derivations for an RL circuit. On the left, a circuit diagram is drawn with a voltage source $V_{in} = 10$, a resistor R_1 , an inductor L , and a capacitor C in series. The current is labeled i .

The derivations are as follows:

1. KVL equation: $10 = R_1 i + L \frac{di}{dt}$
 $2. 10 = R_2 i + \frac{1}{C} \int i dt$

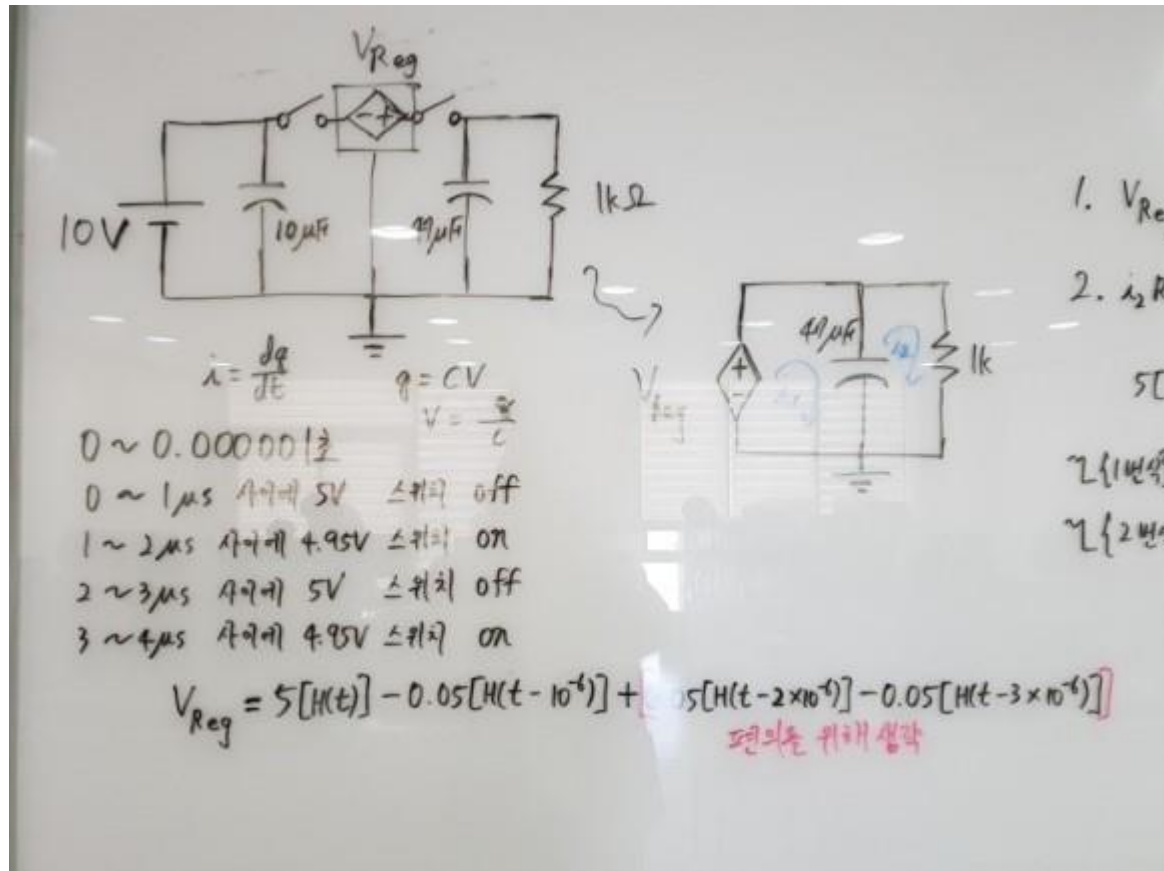
2. Laplace transform of the KVL equation:
 $\frac{10}{s} = I(s) R_1 + L(sI(s) - i(0^-))$
 $\frac{10}{s} = I(s) R_1 + L(sI(s) - 0)$
 $\frac{10}{s} = I(s) (R_1 + sL)$
 $I(s) = \frac{10}{s(R_1 + sL)}$

3. Partial fraction decomposition:
 $I(s) = \frac{10}{s(R_1 + sL)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{R_1}{L}}$
 $10 = A(R_1 + sL) + B s$
 $10 = A R_1 + A s L + B s$
 $10 = A R_1 + s(A L + B)$
 $10 = A R_1$
 $A = \frac{10}{R_1}$
 $0 = A L + B$
 $B = -\frac{A L}{1} = -\frac{10 L}{R_1}$

4. Inverse Laplace transform:
 $i(t) = \frac{10}{R_1} (1 - e^{-\frac{R_1}{L} t})$

5. Voltage across the capacitor:
 $V_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$
 $V_C(t) = \frac{1}{C} \int \frac{10}{R_1} (1 - e^{-\frac{R_1}{L} t}) dt$
 $V_C(t) = \frac{10}{R_1 C} \left(t - \frac{L}{R_1} (1 - e^{-\frac{R_1}{L} t}) \right)$

*7805 레귤레이터를 헤비사이드 함수로 표현하여 라플라스 변환으로 해석해봤다.



스위치를 포함하는 회로에서 라플라스 변환이 쓰인다. 전압, 전류 제어 들어가면 라플라스가 빠지지 않는다.

이와 같은 라플라스 변환을 기반으로 IC 내부의 동작도 해석할 수 있다.

* 함수의 직교성 (푸리에 급수에 응용)

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx = 0$$

두 함수가 서로 직교한다!

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \sin(2x) dx$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

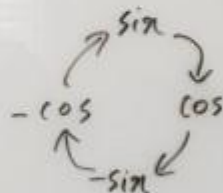
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} dx$$

$$= -\frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{ix} - e^{-ix})(e^{2ix} - e^{-2ix}) dx$$

$$= -\frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{3ix} - e^{-ix} - e^{ix} + e^{-3ix} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(x) - \cos(3x)) dx$$

$$= \frac{1}{2} [\sin(\pi) - \sin(-\pi)] - \frac{1}{2} [\sin(3\pi) - \sin(-3\pi)]$$



*오일러 공식은 복잡한 적분이나 미분을 단순하게 만들어줌

Handwritten notes on a chalkboard illustrating the relationship between sine functions and complex exponentials using Euler's formula.

Top row: $e^{ix} + e^{-ix}$ and $e^{3ix} + e^{-3ix}$

Second row: $\sin(x)$ and $\sin(2x)$

Third row: 두 계수의 합 (Sum of coefficients)

Fourth row: 두 계수의 차 (Difference of coefficients)

Bottom row: $e^{i(m+n)x} + e^{-i(m+n)x}$, $e^{i(m-n)x} + e^{-i(m-n)x}$

Below the bottom row: $\sin(nx), \sin(mx)$

Bottom line: $n \neq m$ 주기적 분은 언제나 0

→ $\sin(nx)$ 와 $\sin(mx)$ 의 직교 판정
어떤 특정한 경우에만 이녀석들이 직교 판정이 안된다.

7. 푸리에 급수 표현

푸리에 급수

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \right) \quad - \text{정리}$$

주기적분의 특성!

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T f(x) dx &= \int_{-T}^T \frac{a_0}{2} dx + \int_{-T}^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \right\} dx \\ &= \int_{-T}^T \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-T}^T a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) dx + \int_{-T}^T b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) dx \right\} \end{aligned}$$

$$\int_{-T}^T f(x) dx = \int_{-T}^T \frac{a_0}{2} dx$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) dx$$

8. 주기 적분을 활용하여 계수값 산출

푸리에 급수

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right) \right) \quad \text{정의}$$

주기적분의 특성!

$$\int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-T}^T \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-T}^T a_n \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx + \int_{-T}^T b_n \sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx \right\}$$

$$\int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-T}^T a_n \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx \right\}}{a_n T}$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx$$

$$\cos^2(x)$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{4} (e^{2ix} + e^{-2ix} + 2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2}$$

주기적분 0

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \sin^2 x = -\frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} - 2) \\ = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} - 1\right)$$

$$\int_{-T}^T f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-T}^T \sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{-T}^T a_k \cos\left(\frac{k\pi}{T}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx \right. \\ \left. + \int_{-T}^T b_k \sin\left(\frac{k\pi}{T}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx \right\} \\ b_n T$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) dx$$

푸리에 급수

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right) \right) \quad \text{--- 정의}$$

주기적분의 특성

$$\int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-T}^T \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{-T}^T a_k \cos\left(\frac{k\pi}{T}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx \right. \\ \left. + \int_{-T}^T b_k \sin\left(\frac{k\pi}{T}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx \right\}$$

$$\int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{-T}^T a_k \cos\left(\frac{k\pi}{T}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx \right\}}{a_n T}$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx$$

9. 사각파 표현하기

$$\left. \begin{array}{l} 0 \quad (-\pi \leq x < 0) \\ 1 \quad (0 \leq x < \pi) \end{array} \right\} f(x)$$

$$\sin x = \frac{y}{r}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} 1 dx \right) \frac{1}{\pi} = 1$$

$$\int_{-T}^T f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx \right) = \left[\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx \right) = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{T}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{T}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\pi} [\cos(n\pi)]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{\pi} [\cos(n\pi) - 1]$$

$$= \frac{1}{\pi} (1 - \cos(n\pi))$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} [1 - \cos(n\pi)] \sin(n\pi x) \right\}$$

