Xilinx Zynq FPGA, TI DSP, MCU 기반의 프로그래밍 및 회로 설계 전문가 과정

강사 – Innova Lee(이상훈)

gcccompil3r@gmail.com

학생 – hoseong Lee(이호성)

hslee00001@naver.com

목차

신호처리기초

신호처리.

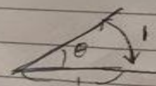
공학 전공과목을 공부하면서 수학이 대해 공부할 수 밖에 없었다. (특히 신호처리 이론 관련)
고등학교와 대학교에서의 수학 시간은 연습문제를 푸는 데만 해도 시간이 부족했다
그 누구도 세세한 내용을 알려주지 않았고, 왜 이런것들이 유도되는지 등에 대해서는 말해주지 않았다
내가 이렇게 느낀 것들에 대해, 내 친구들도 고민이 많았을 것 같다. 공부를 시작하면서. 이는 내 고민에 대한 스스로의 대답이다.

복소수와 오일러 공식.
허수 i, 자연상수 e, 복소수.

1. 각도법. (60분법) → 삼각형을 편하게 다룬다
60분법은 직각을 90등분 한 방법이다. 굳이 이 각도법이 60분법으로 불리는 것은 이 각도법이 60진법을 따라 도, 분, 초로 하위 단위를 부르기 때문이라 생각한다. 즉 1/60 도를 1분으로 부르고, 1/60분을 1초라 부른다.
그런데 왜 직각을 90등분 한 것을 1도라고 정의했을까? 이것은 삼각형을 쉽게 다루기 위함이라 생각한다.
→ 정삼각형의 한각의 크기는 60도, 약수가 많고 다루기 쉬워 수학에서 60분법을 차용한 듯하다.

2. 호도법 (radian) → 원을 편하게 다룬다.
호도법은 원의 기하학적 특성을 잘 활용했다. 호의 길이를 이용하여 각도를 재는 방법을 의미한다.
각도법은 원의 중심에서 원이 작도되는 과정을 보면서 '바늘께가 얼마나 돌아갔나'를 수치화한 것이고
호도법은 원을 작도하는 연필의 입장에서 (반지름 대비) 연필이 굴러간 길이가 얼마인가?를 보는 것이다.

$\rightarrow \theta = \frac{2}{1}\,rad$



$\rightarrow \theta = 1\,rad$ 반지름의 길이와 같은 길이를 갖는 호에 대응하는 중심각의 크기.

원은 (반)지름과 둘레가 일정한 비율을 가지고 있기 때문에 원이 가지는 특성을 잘 활용한 것이 호도법이다.

각도법 대신 호도법을 쓰는 이유는 삼각함수 미분에 있다. 쉽게 말해 삼각함수를 미분했을 때 값을 깔끔하게 하기 위함이다.

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

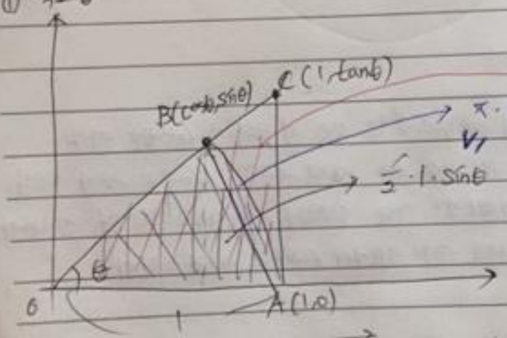
$$= \lim_{h\to0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{\cos x\sin h}{h} = \cos x\cdot\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h} = \cos x$$

①

조임정리

① 각도법



$\Rightarrow \sin\theta \le \frac{\theta}{180}\pi \le \tan\theta$

$\Rightarrow 1 \le \pi\frac{\theta}{\sin\theta\cdot180} \le \frac{1}{\cos\theta}$

$\Rightarrow \frac{180}{\pi} \le \frac{\theta}{\sin\theta} \le \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{180}{\pi}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{180} \ge \frac{\sin\theta}{\theta} \ge \frac{\pi}{180}\cdot\cos\theta$

$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta} \to \frac{\pi}{180}$

$\boxed{\cos x\cdot\frac{\pi}{180}}$

즉, 각도법을 이용했을 때, 미분시 값이 작아지게 된다. $\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}=1$

허수의 존재 의미.

1. 음수가 가지는 수 체계의 혁신 (그 옛날 사람들은 음수를 이해할 수 없었는가?)
2. 곱셈과 음수와 거듭
3. '실수'라는 구분

음수

$\boxed{0-1=?}$, 없음보다 작은 존재의 의미.

⇒ 수는 크기와 방향을 동시에 가진다.

(반대방향)

→ 1700년대까지 이해하지 못함

허수

$\boxed{x^2=-1?}$, 두번 제곱해서 '없음'보다 작은 수가 되는 수의 의미.

⇒ 수는 회전할 수 있다. 수는 2차원이어야 한다

(회전)

→ 21세기까지도 잘 이해하지 못함

2. 곱셈 음수 제곱

음수 있기전의 곱셈 | 음수 이후의 곱셈

↳ 양을 X배 | ↳ 위치의 이동 or 방향.

즉 음수의 존재: 수 = $\boxed{스칼라}$ → $\boxed{벡터}$

$1\times3 = 1 \to 3$

$1\times3 = 1\times(+1)\times3$

$1\times(-3) = 1\times(-1)\times3$

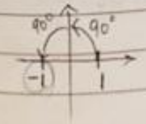
제곱: 곱셈을 같은 숫자를 이용해서 두번 연속 변환

↳ 위치의 변환

$1\times x\times x = 9$

$x^2=9$, $x=3, -3$

$x^2=-1$ →



$x = i$ 90° 회전 변환을 의미함

$1\times i\times i$ ⇒ 180° 회전 변환

즉, 수는 2차원이어야 한다. i라는 수체계는 $\boxed{1차원\ V}$ → $\boxed{2차원\ 벡터}$

내일 할 공부도 오늘 해라!

허근의 위치

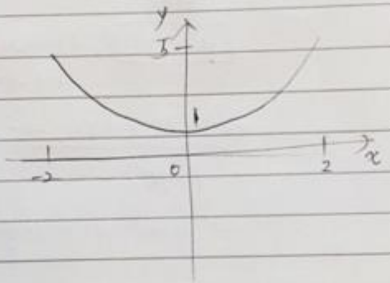
1. 허근의 존재 2. 복소평면 3. 4차원 정보의 표현

1. 허근의 존재

$D = b^2 - 4ac < 0$

⇒ $ax^2 + bx + c = 0$ (이 방정식은 허수의 근을 가진다 ~ 다 복소수의 근을 가진다)

ex) $y = x^2 + 1$



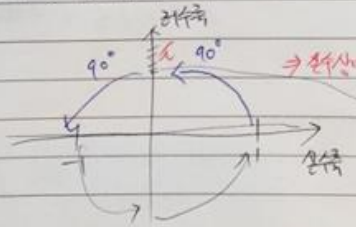
⇒ 근이 어디에 있나요?

어딘가에 존재하지만 눈으로 볼 수 없

↳ 우리가 ~~그래프~~ 그리는 대부분의 것은 모두 실수축에서 그리기 때문입니다.

2. 복소평면

허수 = 실수를 벗어난 다른 차원의 수체계

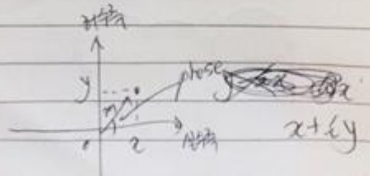


⇒ 실수선에는 없는 90° 회전하는 수를 허수라 한다.

⇒ 무수히 많은 허수가 존재

실수축과 직교하는 허수축을 만들어 복소평면

복소수 차원에서 근을 확인해보자.



$x + iy$ ⇒ 크기와 방향이 생긴다.

복소수 → 그래프 표현

정의역 치역

x, y magnitude, phase

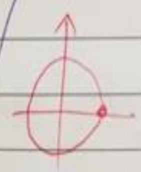
⇒ 4개의 정보

4차원 정보를 그래프에 표현해야함.

사람의 시각정보는 3차원 ... 그래서

$2\pi \rightarrow 0°$로 된다

3차원으로 표현하고



$[-\pi, \pi]$ 범위에서는 모두 표현가능하다

↳ 빨간색

색깔로 표시하자. 보라색

자연상수 e

1) $e = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \approx 2.718281828459\cdots$ 에 수렴하게 된다.

$\pi \to 3.14$ 와 같은 개념.

2) e의 의미 : 성장, 자연의 연속된 성장 (growth)

⇒ ② 100%의 성장률을 가지고 ① 1회 연속 성장할 때, 가능한 최대 성장량.

↳ e

① 연속 성장

100% ① → ① ①

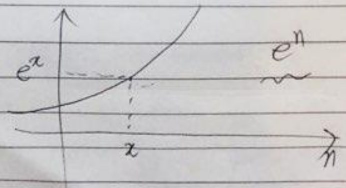
0개월 12개월

n번으로 쪼개서 성장시키면 수렴값이 생김

1회 2회

$\underbrace{\quad}_{e}\underbrace{\quad}_{e} \Rightarrow e^{2}$

x회 성장?



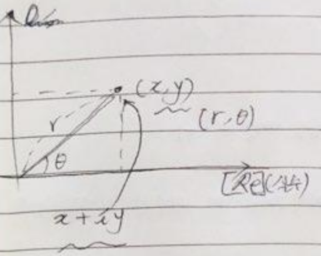
e^{n}

⇒ ② 성장률

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{100\%}{n}\right)^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{50\%}{n}\right)^{n} = \left(\left(1+\frac{0.5}{n}\right)^{\frac{n}{0.5}}\right)^{0.5}\right\}$$

$= e^{\frac{1}{2}}$

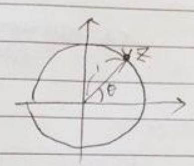


극좌표계를 직교좌표계로

$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$

$\Rightarrow x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta$

여기서, $r=1$ // $\cos\theta + i\sin\theta = z$



$\rightarrow \frac{dz}{d\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta$

$(-i)\frac{dz}{d\theta} = (-i)(-1)\sin\theta + (-i)(i)\cos\theta$

$= i\sin\theta + \cos\theta$

$\therefore (-i)\frac{dz}{d\theta} = z \quad \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{1}{-i}d\theta$

$\Rightarrow \frac{dz}{z} = i\,d\theta$

$\Rightarrow \int\frac{dz}{z} = \int i\,d\theta$

$= \ln|z| = i\theta + C$

$\Rightarrow z = e^{i\theta + C}, \quad e^{i\theta}\cdot\underbrace{e^{C}}_{상수} = A_0e^{i\theta}$

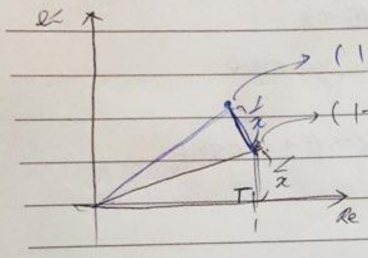
$\Rightarrow A_0e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\therefore \theta = 0, A_0 = 1$

$\therefore e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ⇒ 오일러 공식.

오일러공식 (2) - 기하학적 증명

- 허수 i - 자연상수 e



$(1 + i\frac{1}{x})(1 + i\frac{1}{x})$

$(1 + i\frac{1}{x})$

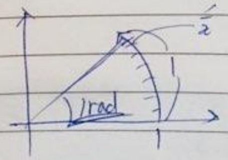
↑ 반복을 시켜줄것이기에

⇒ 무한히 n 해준다면

if) $x = 1000$, $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{i}{x})^n$ x도 무한히 큰값으로 한다면

$$= \lim_{n\to\infty}\left((1 + \frac{i}{n})^{\frac{n}{i}}\right)^i = e^i$$

$\boxed{2.71828\cdots}$ 값은 반지름1에 성장하는 것



$\frac{i}{x} \times x = i$ → 1밖에 성장하지 못한다.

r 라디안 → e^{ri} (회수), r 라디안을 성장시켜주고 싶다면 r만큼

(e: 성장, r: 성장량, i: 방향)

$$e^{ri} = \cos r + i\sin r$$

Phasor // 물리학 관련 AC 신호처리 (1)

Phasor → 복소수이다. 복소수는 크기와 각도에 대한 정보를 가지고 있다.

→ 미분과 관련이 있다. AC라는 것은 시간에 따라 값이 변하는 신호

↳ AC 회로 해석, Capacitor, Inductor

전압 미분 전류

$i = C\frac{dv}{dt}$ $i \propto \frac{dv}{dt}$ L, C는 상수라는 것으로 별개이다

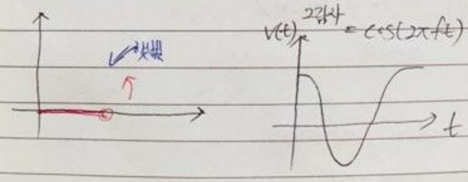
$v = L\frac{di}{dt}$

페이저를 사용하면 "미분"을 "사칙연산"으로 표현가능하다.

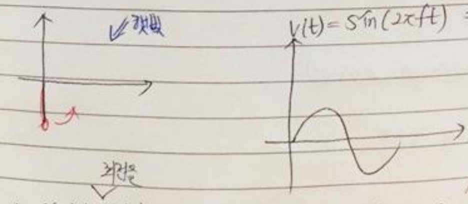
* 「모든 신호는 정현파의 합으로 나타낼수 있다」 핵심.

⇒ 정현파 (sinusoidal wave)

- 막대기의 회전에 대한 함수
- 원점을 중심으로 막대가 회전한다



$v(t) = \cos(2\pi ft)$



$v(t) = \sin(2\pi ft) = \cos(2\pi ft - \frac{\pi}{2})$

→ ϕ에서 시작한 막대기의 정현파는? $\underbrace{A}_{\text{길이}}\cos(2\pi \underbrace{f}_{\text{주파수}} t + \underbrace{\phi}_{\text{시작위치(위상)}})$

이 세가지로 막대기의 회전운동을 표현함.

$\Rightarrow A\cos(2\pi ft)\cos\phi - A\sin(2\pi ft)\sin\phi$

$= A\cos\phi \cdot \cos(2\pi ft) - A\sin\phi\sin(2\pi ft)$

각각의 정현파에 대해 분석

⇒ ϕ에서 시작한 회전을 표현해주려면 A, ϕ만 알면된다

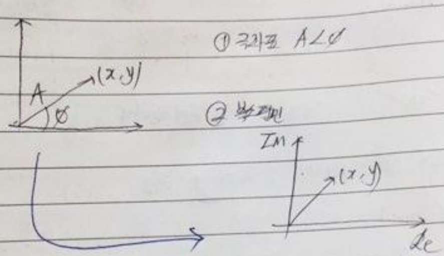
내일 할 공부도 오늘 해라!

why? 주파수에 대해 알더라도 시간에 대해 분석할 것이기 때문이다.

$A\cos(2\pi ft+\phi) = A\cos\phi\cos(2\pi ft) - A\sin\phi\sin(2\pi ft)$

$= X\cos(2\pi ft) - Y\sin(2\pi ft)$

$(x,y) \rightarrow$



① 극좌표 $A\angle\phi$

② 복소평면

$$x+jy = A\cos\phi + jA\sin\phi$$
$$= Ae^{j\phi}$$

<u>정현파의 표현</u> 1) sinusoidal waveform (시간에 대한)

$v(t) = A\cos(2\pi ft+\phi)$

2) Vector

$(x,y) = (A\cos\phi, A\sin\phi)$

3) 극좌표에서 길이와 각도로

$A\angle\phi$

4) 복소평면

$x+jy$ → 복소수 하나만으로 회전운동을 표현할 수 있다.
(정현파를 표현)

phasor - II

1. 정현파 표현

시간 함수 (↔ 벡터) ↔ 복소평면 (복소수)
↔ 극좌표

2. 복소수 → 크기와 각도에 대한 정보가 찬 숫자여?

3. phasor 와 미분 / capacitor 와 inductor 의 리액턴스 공식 유도

1) $v(t) = \cos(2\pi ft)$

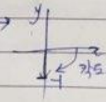
→ $v = 1 + j\cdot 0$ (복소수)

→ 극 $= 1\angle 0°$

2) $v(t) = \sin(2\pi ft)$

→ $v = 0 - j\cdot 1$

극 $= 1\angle -90°$



$A\cos(2\pi ft+\phi) = A\cos\phi\cos 2\pi ft - A\sin\phi\sin 2\pi ft$

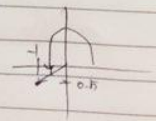
→ $X\cos(2\pi ft) - Y\sin(2\pi ft)$

3) $v(t) = -\cos(2\pi ft) + 0.5\sin(2\pi ft)$

→ $v = -1 - j0.5$

극 $= \sqrt{(-1)^2+(-0.5)^2}\angle\tan^{-1}\left(\frac{-0.5}{-1}\right)$

$= 1.12\angle 206.56°$



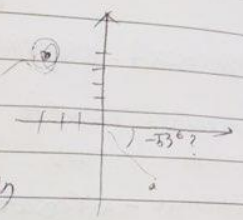
2. 복소수, 크기와 각도 벡터와 같은 개념

① $(4+3i) \times i = 4i - 3$

각도 각도 각도

$\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ $\tan^{-1}\frac{1}{0}$ $\tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right)$

$\Rightarrow 36.87^\circ$ $\Rightarrow 90^\circ$ $\Rightarrow -53^\circ + 180 = 126.87$



⇒ 즉 복소수끼리의 곱은 각각에 대한 각도를 더했을 때의 결과값의 각도이다.

② $(4+3i) \times 2i = 8i - 6$

36.87 90 126.87

⇒ 크기만 바뀜.

③ $(4+3i)(4+3i) = \cancel{\quad}\ 16 + 12i + 12i - 9 = 7 + 24i$

$36.87^\circ + 36.87^\circ = 73.74^\circ$ $= \tan^{-1}\left(\frac{24}{7}\right)$

미분 AC Capacitor, Inductor

$v(t) = A\cos(2\pi f t + \phi)$; $\frac{dv(t)}{dt} = ??$

$= A\cos\phi \cos 2\pi f t - A\sin\phi \sin 2\pi f t$

$= X\cos 2\pi f t - Y\sin 2\pi f t \Rightarrow X + jY = \tilde{V}$

페이저

$= X\cos\omega t - Y\sin\omega t$

$\frac{dv}{dt} = -\omega X\sin\omega t - \omega Y\cos\omega t$

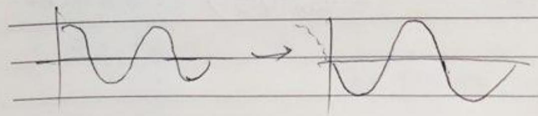
$= -\omega Y\cos\omega t - \omega X\sin\omega t \underset{\text{페이저}}{\Rightarrow} -\omega Y + j\omega X$

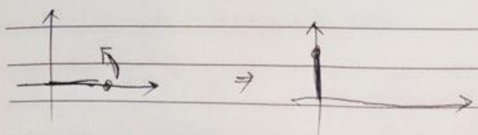
$\dot{V} = -\omega Y + j\omega X = j\omega(X + jY) = j\omega \tilde{V}$

- $v(t)$ 미분 ⇒ $j\omega V(t)$

Sinusoidal-e 미분을 해줘도 모양은 유지, 위상과 진폭이 변하게 된다.

$\cos(2\pi f t + \phi) \xrightarrow{\text{미분}} -2\pi f \sin(2\pi f t + \phi)$





× jω → +90° 이동

→ 진폭의 변화

- 커패시터

페이저표현

$$i = C\frac{dV}{dt} \iff \dot{I} = C\dot{V}$$

$$= Cj\omega V = j\omega C \cdot V$$

$$\therefore V = \frac{1}{j\omega C} I$$

$$X_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi f C}$$

- 인덕터

$$V = L\frac{dI}{dt} \iff \dot{V} = L \cdot \dot{I} = Lj\omega I$$

$$\therefore X_L = j\omega L = j2\pi f L$$

★ 오일러공식

이계동차 선형 Cauchy-Euler 공식 미분방정식

라플라스 연립미분방정식 → 연립방정식

라플라스
푸리에변환) 시간축 → 주파수 둘의 차이는?

$$\rightarrow a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$$

$$x^2y'' + \frac{a_1}{a_2}x \cdot y' + \frac{a_0}{a_2}y = 0 \text{ (표준형)}$$

$y = x^m$(가정), $y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}$

$$x^2(m(m-1)x^{m-2}) + axmx^{m-1} + bx^m = 0$$

$$(m^2 - m)x^m + amx^m + bx^m = 0$$

$$x^m(\underbrace{m^2 + (a-1)m + b}_{0}) = 0 \Rightarrow m = -\frac{(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4 \cdot b}}{2}$$

코시 오일러 특성 방정식

Case1. 서로 다른 두 실근

$m = m_1, m_2$

$y = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2}$

Case2. 중근

$y_1 = C_1x^m$, $y_2 = y_1 u \rightarrow y'' + ax^{-1}y' + bx^{-2}y = 0$

$$u' = \frac{1}{e^{\int p(x)dx}} = \frac{1}{x^{2m} \cdot e^{a\ln x}}$$

$$\int u' = \int x^{-2m} \underbrace{e^{-a\ln x}}_{x^{-a}} dx$$

$$= \int x^{-2m} \cdot x^{-a} = \int x^{-2m-a} dx$$

Matlab

빨간선: 계측 파란선: 예측

```matlab
function out_Y = DE(in_X)


%% 미분방정식
out_Y = 3*exp(-(in_X^2));


```

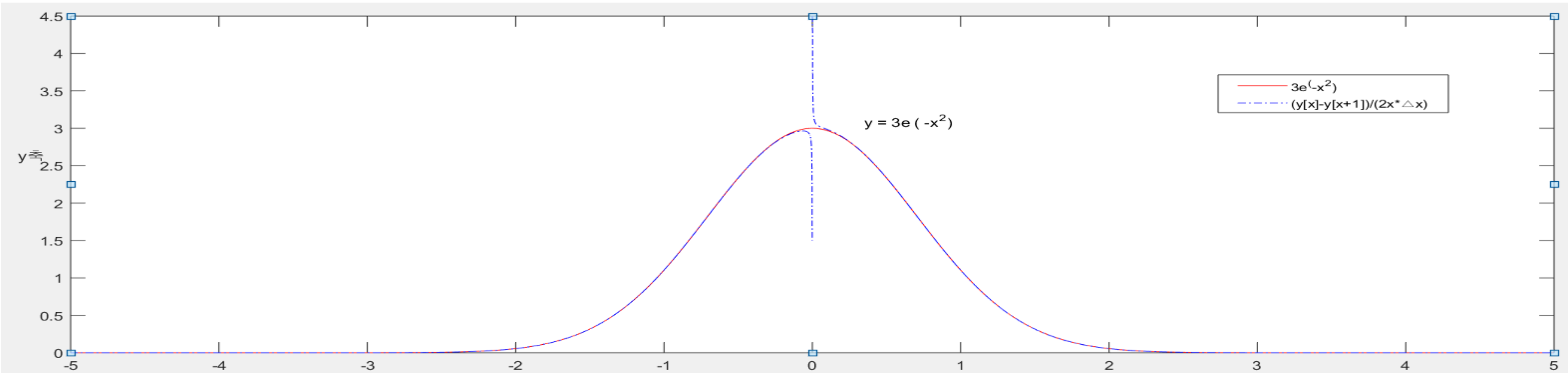
```matlab
clc;
clear;
close all;

delta_x = 0.001;
start = -5;
end1 = 5;
x=[start:delta_x:end1];

for i=1:10001
    y(i)=DE(x(i));
end

for j=1:10000
Y(j)=( (y(j)-y(j+1))/(delta_x*2*x(j) ));
end
Y(10001)=Y(10000);

plot(x,y,'r')
hold on
plot(x,Y,'-.b')
```



수식트리(Expression Tree) - 수식을 표현하는 방식(중위 표기법, 후위표기법)

중위표기법 ,2+3*10=32

순서

1. * 연산자 진행

2. + 연산자 진행

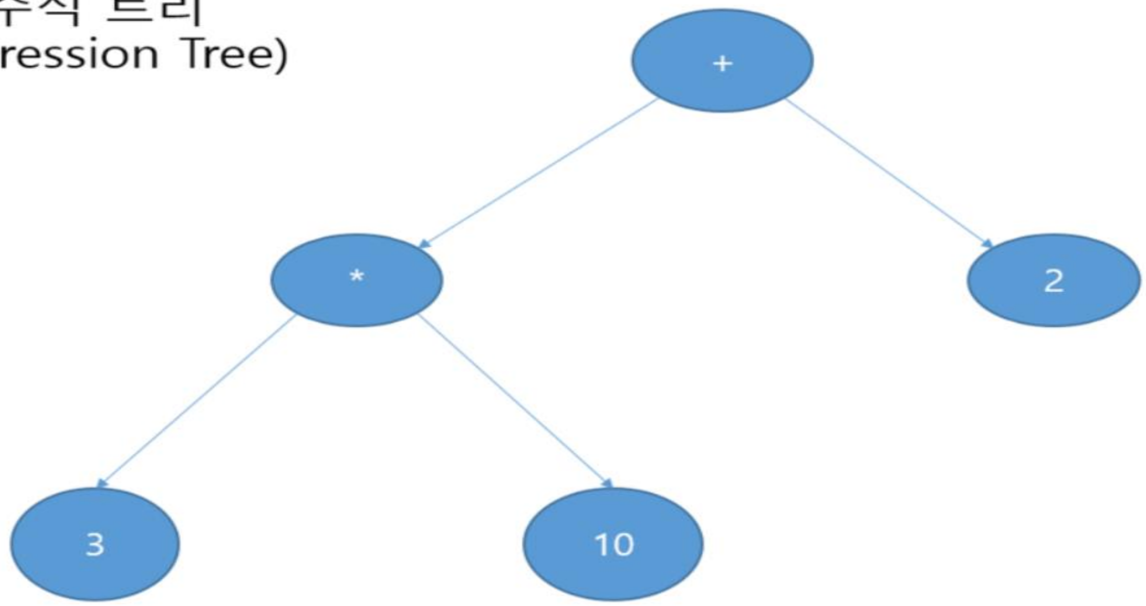
3. 결과값 산출

➔ **컴파일러**는 그저 위와 같은 **식(중위표기법)이 작성된 소스코드를 실행할 수 있는 상태로 만들어주는 프로그램**이기 때문에 연산자의 우선 순위를 알지 못한다.

정리

1. 중위 표기법에는 연산자 우선순위 정보가 없다 -> 나만 이해, 컴퓨터는 모름.
2. 전위, 후위 표기법은 연산자 우선순위 정보가 있다. -> 컴퓨터가 이해할 수 있다.
3. 수식트리는 후위표기법, 중위표기법처럼 수식을 표현하는 한 가지의 방법

수식 트리
(Expression Tree)



중위표기법의 결과

2+3*10 = 32

후위표기법의 결과

2310*+ = 32

수식트리의 결과

2310*+ = 32

연산과정

0. 연산은 트리의 맨 하단에서부터 시작
1. '*' 연산자를 가진 부모 노드에 연결된 자식노드들(3 과 10)을 피연산자로 하여 연산을 진행
2. 결과 값을 '*' 연산자인 부모 노드에 저장
3. '+' 연산자를 가진 부모 노드에 연결된 자신노드들(30 과 2)을 피연산자로 하여 연산을 진행
4. 결과 값을 '+' 연산자인 부모 노드에 저장

Ex) stack-역폴란드(후위) 표기

```c
#include <stdio.h>

char stack[50], polish[50];
int pri[256];
int sp1, sp2;

int main(void){
    int i;
    char *p = "a+b-c*d/e";

    for(i=0; i<256; i++){
        pri[i] = 3;
    }
    pri['+']=pri['-']=1;
    pri['*']=pri['/']=2;

    stack[0]=0;
    pri[0]=-1;

    sp1 = sp2 = 0;

    while(*p!='\0'){
        while(pri[*p] <= pri[stack[sp1]]){
            polish[++sp2] = stack[sp1--];
        }
        stack[++sp1] = *p++;
    }

    for(i=sp1; i>0; i--){
        polish[++sp2] = stack[i];
    }

    for(i=1; i<sp2; i++){
        putchar(polish[i]);
    }
    printf("\n");

    return 0;
}
```