

Xilinx Zynq FPGA, TI DSP, MCU 기반의 프로그래밍 및 회로 설계 전문가 과정

강사 – Innova Lee(이상훈)

gcccompil3r@gmail.com

학생 – hoseong Lee(이호성)

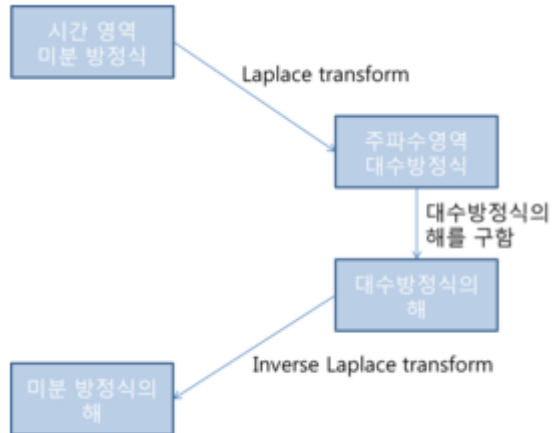
hslee00001@naver.com

목차

- ✓ 라플라스 변환
- ✓ Z Transform 간단히 설명
- ✓ 도함수의 라플라스 변환
- ✓ 부분분수 전개법, 계산(앞서 학습한 행렬식과 가우스 소거법 활용)
- ✓ 헤비사이드 함수
- ✓ 라플라스 역변환
- ✓ 라플라스 변환으로 RC RC 필터 해석

라플라스 변환과 signal Flow Graph 그리고 Block Diagram의 관계

이들을 본격적으로 사용하는 것은 DSP 에서 활용한다. 디지털필터는 아날로그 필터와는 비교할 수 없을 만큼 정확한 신호를 뽑아낼수 있다. 그래서 통신장비들에 고차 미분 필터가 붙는 것이다. 보통 20차 이상의 FIR, IIR 필터가 붙는다. (미분을 20번 이상했다는 소리) 여기서 이 미분항을 계산하는 방법이 라플라스 변환이다.



* 라플라스를 사용하는 이유

제어기의 안정성 -> 연립미분방정식이 많을 때 사용한다. 범용적으로 쓰인다. 라플라스 변환은 제어시스템의 해석 과정에 있어서 매우 중요하다. 외우기에 앞서 라플라스 변환이 왜 그렇게 중요한지 간단하게 짚어보자.

시간 영역에서의 해를 구할 경우 복잡한 미분방정식을 주파수 영역의 대수방정식으로 변환 후 보다 간편하게 해를 구하고 그것을 다시 시간영역으로 역변환하여 원하는 해를 얻어내는 과정을 거치게된다. 여기서 푸리에 변환과 같지만, 연립미분방정식을 풀기에 라플라스만한 것이 없다.

라플라스 변환을 컴퓨터를 이용해 구현해보고 싶을 때, Z Transform을 쓴다.

DSP하는 사람들이 밥먹듯이 고려해야하는 것이 Z Transform 이다. Z Transform 은 라플라스 변환을 디지털 방식으로 하는 기법이다.

1. 샘플링기반 Z Transform → 오차율이 3가지 중 가장 낮다.
2. 샘플링 기반 희귀분석

3. 희귀분석 결과와 아날로그 해석 → 데이터 자체 결과는 제일 좋음.

그렇다면 라플라스 변환이 왜 필요한가?

[라플라스 변환을 이용해 주어진 초기 조건으로부터 미분 방정식의 해를 쉽게 구할 수 있다]

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

(라플라스 변환

정의)

이 변환 과정을 통해 미분방정식을 쉽게 풀이할 수 있다. 따라서 미분방정식을 푸는 도구라는 말이다. 매번 나오는 수식들을 정의대로 계산해서 풀 수 있지만, 자주나오는 주요 함수의 라플라스 변환은 미리 계산해놓고 암기하는 것이 좋다.

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$ (unit impulse)	1
$u(t)$ (unit impulse)	$\frac{1}{s}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$te^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at} u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$(\sin bt) u(t)$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
$(\cos bt) u(t)$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
$(t \sin bt) u(t)$	$\frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$

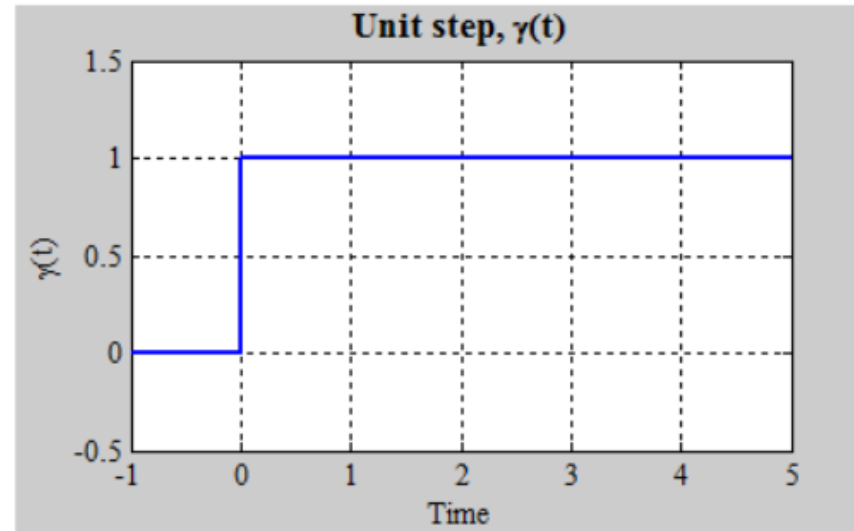
$(t \cos bt)u(t)$	$\frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$
$(e^{-at} \sin bt)u(t)$	$\frac{b}{(s + a)^2 + b^2}$
$(e^{-at} \cos bt)u(t)$	$\frac{(s + a)}{(s + a)^2 + b^2}$
$Ae^{-at} \cos (bt + \theta)u(t)$	$\frac{(A/2)e^{j\theta}}{s + a - jb} + \frac{(A/2)e^{-j\theta}}{s + a + jb} = \frac{\text{first-degree numerator}}{(s + a)^2 + b^2}$
$Ae^{-at} \sin (bt + \theta)u(t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + b^2} \quad A = \frac{1}{b}\sqrt{(\alpha - a)^2 + b^2}$
	$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{\alpha - a}$

+

(※unit step)

unit step 함수인 $u(t)$ 는 다음과 같은 형태이다.

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



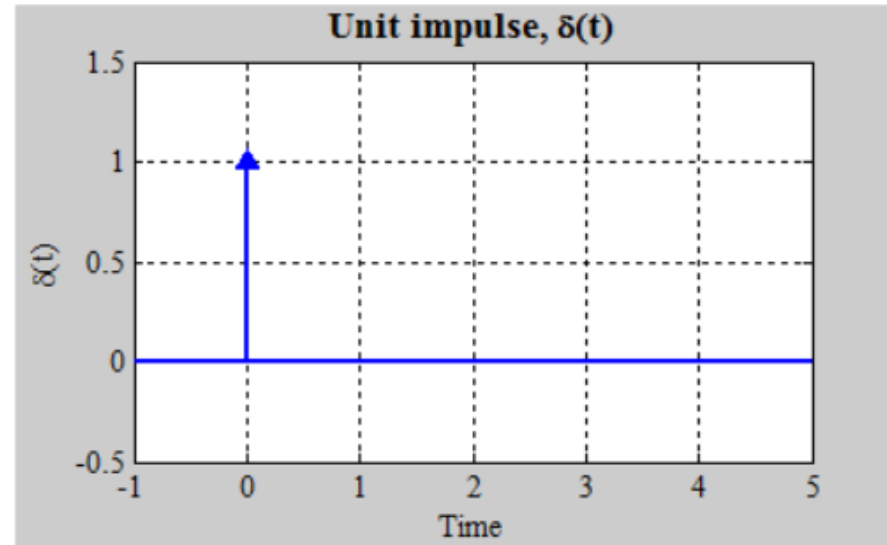
unit step function

시간이 0일 때, 함수값이 1로 뛰어 오르는 계단모양의 함수이다. 0초 이후에 $u(t)$ 는 결국, 상수 1과 같다고 생각해도 무방하다.

(※ unit impulse)

unit impulse 함수는 다음과 같은 형태이다.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \text{undefined}, & t = 0 \end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$



unit impulse function

0초 일 때, 순간적으로 함수 값이 무한대로 튀어오른 뒤 사라진다. 이상적인 함수로, 0초에서의 영역을 적분한 값은 1이다.

➔ Impulse, step 등 다양한 함수 형태들은, 향후 제어 시스템 모델식을 다룰 때, Input 값으로 넣게 된다.

미분항에 대한 라플라스 변환은 다음과 같다.

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

미분항 라플라스 변환

밑에서부터는 선생님 블로그... 정리가 너무 잘돼있어서 그만.. 주말에 공부해서 사진 바꿔서 올리겠습니다.

3. 라플라스 변환을 계산하는 방법
(변환 테이블에 없어도 계산할 수 있어야함)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ $0 \sim \infty$ 적분 \Rightarrow 미적분학 (이항적분)

어떻게 계산하지? 치환

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k e^{-sk} f(k) dk \Rightarrow \text{부분적분}$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) + \int f(x)g'(x)$$

$$\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)$$

$$\int e^{-sk} f(k) = -\frac{1}{s} e^{-sk} f(k) - \int -\frac{1}{s} e^{-sk} f'(k)$$

다항식의 경우 차수만큼...

삼각함수는 두 번 하고 합성 혹은 e^{ix}

$f'(t)$

$$\boxed{L\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)}$$

$$L\{f'(t)\}(s) = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-st}}_g \underbrace{f'(t)}_{f'} dt = \left[\underbrace{f(t)}_f \underbrace{e^{-st}}_g \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \underbrace{-s e^{-st}}_{g'} \underbrace{f(t)}_f dt$$

$-f(0) \qquad + sF(s)$

1계 도함수의 라플라스 변환

$$\boxed{sF(s) - f(0)}$$

$f''(t)$

$$L\{f''(t)\}(s) = \int_0^{\infty} \underbrace{f''(t)}_{f'} \underbrace{e^{-st}}_g dt = \left[\underbrace{f'(t)}_f \underbrace{e^{-st}}_g \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \underbrace{f'(t)}_f \underbrace{-s e^{-st}}_{g'} dt$$

$$= -f'(0) + s \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt$$

$$= -f'(0) + s(sF(s) - f(0))$$

$$= \boxed{s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)}$$

2계 도함수의 라플라스 변환

6. 문제

$$y' + 4y + 1 = 0$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

$$sY(s) - y(0) + 4Y(s) + \frac{1}{s} = 0$$

$$Y(s)(s+4) = y(0) - \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+4)} \left(y(0) - \frac{1}{s} \right)$$

7. 부분 분수 전개법 설명

부분 분수 전개

$$1. \frac{A}{(x-a_0)} + \frac{B}{(x-a_1)} + \frac{C}{(x-a_2)} = \frac{D}{ax^2+bx+c}$$

$$2. \frac{A}{(x-a_0)} + \frac{B}{(x-a_1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+a_2x+a_3)} = \frac{E}{ax^3+bx^2+cx+d}$$

$$3. \frac{A}{(x-a_0)} + \frac{B}{(x-a_1)} + \frac{C}{(x-a_1)} = \frac{D}{ax^2+bx+c}$$

8. 부분 분수 전개 계산(앞서 학습한 행렬식과 가우스 소거법 활용)

$$\frac{x^2+2x-3}{(x^2+x+5)(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+5}$$

$$\begin{aligned} x^2+2x-3 &= (x-2)(x^2+x+5)A + (x^2+x+5)B + (x-2)^2(Cx+D) \\ &= (x^3-x^2+3x-10)A + \cdot + \underline{(x^2-4x+4)(Cx+D)} \end{aligned}$$

$$Cx(x^2-4x+4) + D(x^2-4x+4)$$

$$(A+C)x^3 + (-A+B-4C+D)x^2 + (3A+B+4C-4D)x + (-10A+5B+4D)$$

$$A+C=0$$

$$-A+B-4C+D=1$$

$$3A+B+4C-4D=2$$

$$-10A+5B+4D=-3$$

$$\frac{x^2+2x-3}{(x^2+x+5)(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+5}$$

$$x^2+2x-3 = (x-2)(x^2+x+5)A + (x^2+x+5)B + (x-2)^2(Cx+D)$$

$$= (x^3-x^2+3x-10)A + \quad + \underline{(x^2-4x+4)(Cx+D)}$$

$$Cx(x^2-4x+4) + D(x^2-4x+4)$$

$$(A+C)x^3 + (-A+B-4C+D)x^2 + (3A+B+4C-4D)x + (-10A+5B+4D)$$

$$A+C=0$$

$$-A+B-4C+D=1$$

$$3A+B+4C-4D=2$$

$$-10A+5B+4D=-3$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & -4 & 2 \\ -10 & 5 & 0 & 4 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 4 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 25 & -1 & -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 25 & -1 & -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{121}{4} & -\frac{59}{4} \end{array}$$

$$\frac{121}{4}D = -\frac{59}{4} \Rightarrow D = -\frac{59}{121}$$

$$C + 5 \cdot \frac{59}{121} = \frac{1}{4} \cdot \frac{121}{121} \Rightarrow C = \frac{121 - 295}{484} = -\frac{164}{484} = -\frac{41}{121}$$

$$B - 3C + D = 1$$

$$B = 1 - \frac{123}{121} + \frac{59}{121} = \frac{55}{121} = \frac{5}{11}$$

$$A = -C = \frac{41}{121}$$

$$\therefore \frac{x^2 + 2x}{(x^2 + x + 5)(x - 2)^2} = \frac{41}{121} \frac{1}{(x - 2)} + \frac{5}{11} \frac{1}{(x - 2)^2} - \frac{41}{121} \frac{x}{x^2 + x + 5} - \frac{59}{121} \frac{1}{x^2 + x + 5}$$

9. 헤비사이드 함수 설명

RC 회로에서 스위치 눌렀을 경우와 스위치에서 손을 뗀 경우 두 가지 케이스로 분리해서 해석하는데, 헤비사이드 함수와 라플라스 변환을 알고 있다면 애당초 그렇게 해석할 필요가 없다.

시간차를 가지고 있는 두 개의 함수를 합성할 수 있게 해주는 것이 헤비사이드 함수에 해당한다.

추가적으로 헤비사이드는 지구상 가장 아름다운 방정식이라 불리는 맥스웰 방정식을 지금의 4 가지로 정리한 사람이기도하다.

$$\begin{aligned}
 &0 \leq t < 2, \quad t \geq 2 \\
 &g(t) = 0 \quad g(t) = t^2 + 1 \\
 &\quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 &g(t) = H(t-2)(t^2 + 1) \\
 &\Rightarrow H(t-2)\{(t-2)^2 + 1\} \\
 &\quad \quad \quad \text{모순: 원식은 } t^2 \\
 &\quad \quad \quad \text{헤비사이드는 } t-2 \\
 &\quad \quad \quad \text{시간 변환을 맞추기 위해} \\
 &\quad \quad \quad t-2 \text{를 넣었더니 원식이 붕괴됨.} \\
 &H(t-2)\{(t-2+2)^2 + 1\} \\
 &H(t-2)\{(t-2)^2 + 4(t-2) + 5\} \\
 &e^{-2s} \left\{ \frac{2}{s^3} + 4 \cdot \frac{1}{s^2} + 5 \frac{1}{s} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{t-2}{h} + 2 \right) \left(\frac{t-2}{h} + 2 \right) \\
 &\quad \quad \quad h^2 + 4h + 4 \\
 &\quad \quad \quad t^2 - 4t + 4 + 4(t-2) + 4 \\
 &\quad \quad \quad \boxed{(t-2)^2 + 4(t-2) + 4}
 \end{aligned}$$

리판이 유리!

10. 라플라스 역 변환 방법

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2 + 4s + 20}\right\} = \frac{4}{(s+2)^2 + 16} = \frac{4}{(s+2)^2 + 4^2}$$

$$\sin(\omega t) e^{-2t}$$

$$\sin(4t) e^{-2t}$$

11. 문제

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s-1}{s^2-6s+2} \right\} \Rightarrow s^2-6s+2 = (s-3)^2-7$$

$$\frac{3(s-3)}{(s-3)^2-7} + \frac{8}{(s-3)^2-7}$$

$$\mathcal{L} \{ e^{at} \sinh(wt) \} = \frac{w}{(a-s)^2 - w^2}$$

$$\mathcal{L} \{ e^{at} \cosh(wt) \} = \frac{a-s}{(a-s)^2 - w^2}$$

12. 라플라스 변환으로 RC RC 필터 해석하는 방법

$q_c(t) = q_c(0) = 0$ Laplace Transform
 Basic RC-RC Filter

$V_c = C \frac{dV}{dt} \Rightarrow V = \frac{1}{C} \int i dt$
 $\frac{dV}{dt} = i, \quad Q = CV$

1. 선택적 차분 Laplace Transform
2. 선택적 차분 회로 분석
3. 회로 분석 결과를 바탕으로 해석

1. $40I_1 + (20 \frac{1}{s} I_1 - i) dt = 10$
 2. $(60I_2 + 20 \int i_2 dt + 20 \int (i_2 - i) dt = 0$

적분의 미분으로 변환
 $L\left\{\int f(t) dt\right\}(s) = \frac{1}{s} F(s)$
 적분을 미분으로 변환
 $L\left\{40I_1 + \frac{20}{s} (I_1 - I_2)\right\} = \frac{10}{s}$
 $L\left\{60I_2 + \frac{20}{s} I_2 + \frac{20}{s} (I_2 - I_1)\right\} = 0$

$4s^2 + 20s + 20 = 0 \Rightarrow (s^2 + 5s + 10) = 0 \Rightarrow (s+2.5 \pm j2.596)$
 $2s^2 + 10s + 10 = 0 \Rightarrow (s^2 + 5s + 5) = 0 \Rightarrow (s+2.5 \pm j1.936)$

$4I_1(s) + 12I_1(s) - 12I_2(s) = 10$
 $(40I_1(s) + 20I_1(s) - 20I_2(s)) = 10$
 $I_1(s) + 5I_1(s) - 5I_2(s) = 1$
 $(6s + 24)I_1(s) - 10I_2(s) = 10$
 $(6s + 24)I_1(s) - 10I_2(s) = 10$
 $2I_1(s) + 4I_2(s) = 2 + \frac{10}{6s}$
 $I_1(s) + 2I_2(s) = 1 + \frac{5}{3s}$
 $I_2(s) = \frac{1}{2} + \frac{5}{6s} - \frac{1}{2}I_1(s)$

부분 분해 (I, V)
 $\frac{5+s}{4s^2+20s+20} = \frac{A}{s+2.5-j2.596} + \frac{B}{s+2.5+j2.596}$
 $5+s = (s+2.5-j2.596)A + (s+2.5+j2.596)B$
 $A+B=1$
 $(A+B)s + (2.5-j2.596)A + (2.5+j2.596)B = 5+s$
 $-5A = -3$
 $A = \frac{3}{5}$
 $B = \frac{2}{5}$
 $I_1(t) = \frac{3}{5}e^{-(2.5-j2.596)t} + \frac{2}{5}e^{-(2.5+j2.596)t}$

부분 분해 (I, V)
 $\frac{1}{2s^2+10s+10} = \frac{A}{s+2.5-j1.936} + \frac{B}{s+2.5+j1.936}$
 $1 = (s+2.5-j1.936)A + (s+2.5+j1.936)B$
 $A+B=0$
 $(A+B)s + (2.5-j1.936)A + (2.5+j1.936)B = 1$
 $-5A = -1$
 $A = \frac{1}{5}$
 $B = -\frac{1}{5}$
 $I_2(t) = \frac{1}{5}e^{-(2.5-j1.936)t} - \frac{1}{5}e^{-(2.5+j1.936)t}$

해야할 것

노트정리, 공식정리, 대회 참가신청서, 계산기코드, 트리코드 짜보기..