Xilinx Zynq FPGA, TI DSP, MCU 기반의 프로그래밍 및 회로 설계 전문가 과정

강사 – Innova Lee(이상훈)

gcccompil3r@gmail.com

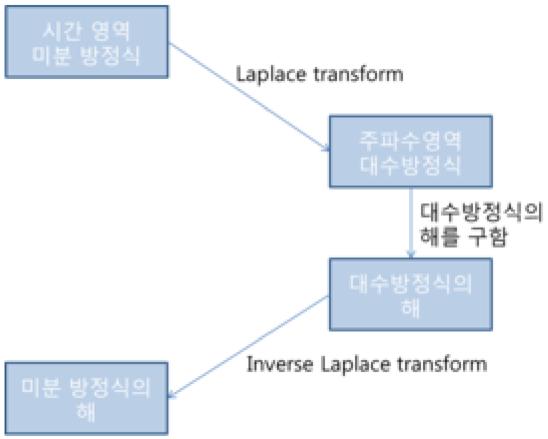
학생 – hoseong Lee(이호성)

hslee00001@naver.com

목차

라플라스 변환과 signal Flow Graph 그리고 Block Diagram의 관계

이들을 본격적으로 사용하는 것은 DSP 에서 활용한다. 디지털필터는 아날로그 필터와는 비교할 수 없을 만큼 정확한 신호를 뽑아낼수 있다. 그래서 통신장비들에 고차 미분 필터가 붙는 것이다. 보통 20차 이상의 FIR, IIR 필터가 붙는다. (미분을 20번 이상했다는 소리) 여기서 이 미분항을 계산하는 방법이 라플라스 변환이다.



* 라플라스를 사용하는 이유

제어기의 안정성 -> 연립미분방정식이 많을 때 사용한다. 범용적으로 쓰인다. 라플라스 변환은 제어시스템의 해석 과정에 있어서 매우 중요하다. 외우기에 앞서 라플라스 변환이 왜 그렇게 중요한지 간단하게 짚어보자.

시간 영역에서의 해를 구할 경우 복잡한 미분방정식을 주파수 영역의 대수방정식으로 변환 후 보다 간편하게 해를 구하고 그것을 다시 시간영역으로 역변환하여 원하는 해를 얻어내는 과정을 거치게된다. 여기서 퓨리에 변환과 같지만, 연립미분방정식을 풀기에 라플라스만한 것이 없다.

.

라플라스 변환을 컴퓨터를 이용해 구현해보고 싶을 때, Z Transform을 쓴다.

DSP하는 사람들이 밥먹듯이 고려해야하는 것이 Z Transform 이다. Z Transform 은 라플라스 변환을 디지털 방식으로 하는 기법이다.

1. 샘플링기반 Z Transform → 오차율이 3가지 중 가장 낮다.
2. 샘플링 기반 희귀분석

3. 희귀분석 결과와 아날로그 해석 → 데이터 자체 결과는 제일 좋음.

그렇다면 라플라스 변환이 왜 필요한가?

[라플라스 변환을 이용해 주어진 초기 조건으로부터 미분 방정식의 해를 쉽게 구할 수 있다]

$$\mathrm{F}(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

(라플라스 변환 정의)

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$ (unit impulse)	1
$u(t)$ (unit impulse)	$\frac{1}{s}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$(\sin bt)\, u(t)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$(\cos bt)u(t)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$(t \sin bt)u(t)$	$\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$

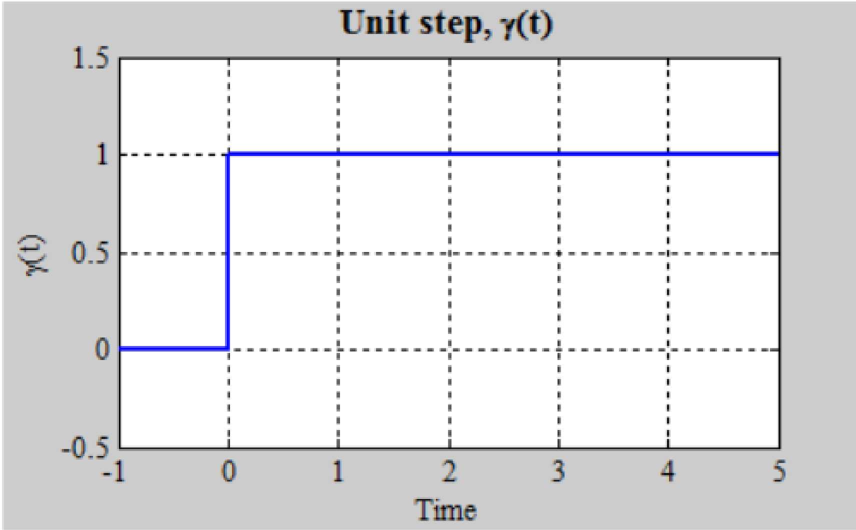
이 변환 과정을 통해 미분방정식을 쉽게 풀이할 수 있다. 따라서 미분방정식을 푸는 도구라는 말이다. 매번 나오는 수식들을 정의대로 계산해서 풀 수 있지만, 자주나오는 주요 함수의 라플라스 변환은 미리 계산해놓고 암기하는 것이 좋다.

$(t\ \cos\ bt)u(t)$	$\dfrac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$
$(e^{-at}\ \sin\ bt)u(t)$	$\dfrac{b}{(s+a)^2 + b^2}$
$(e^{-at}\cos\ bt)u(t)$	$\dfrac{(s+a)}{(s+a)^2 + b^2}$
$Ae^{-at}\ \cos\ (bt + \theta)u(t)$	$\dfrac{(A/2)e^{j\theta}}{s + a - jb} + \dfrac{(A/2)e^{-j\theta}}{s + a + jb} = \dfrac{\text{first-degree numerator}}{(s+a)^2 + b^2}$
$Ae^{-at}\ \sin\ (bt + \theta)u(t)$	$\dfrac{s + a}{(s+a)^2 + b^2}\quad A = \dfrac{1}{b}\sqrt{(\alpha - a)^2 + b^2}$ $\theta = \tan^{-1}\ \dfrac{b}{\alpha - a}$

(※unit step)

unit step 함수인 u(t)는 다음과 같은 형태이다.

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



unit step function

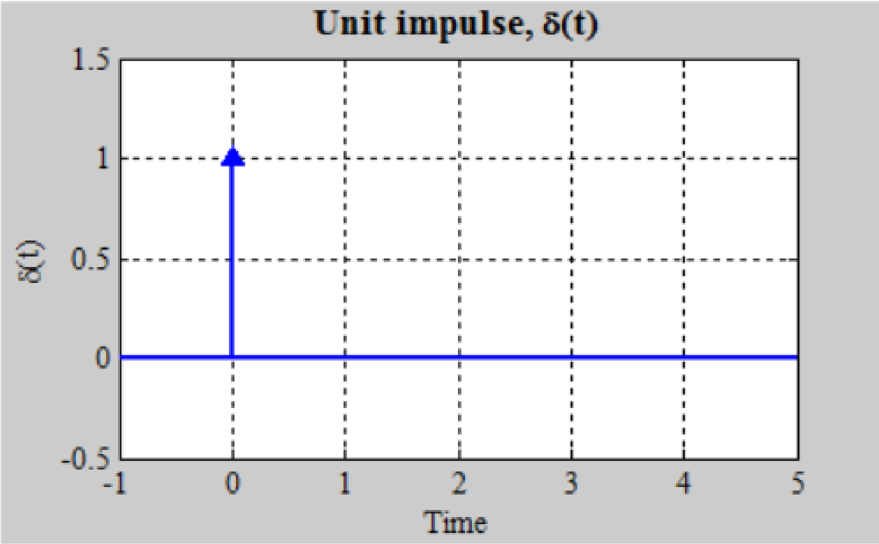
시간이 0일 때, 함수값이 1로 뛰어 오르는 계단모양의 함수이다. 0초 이후에 u(t)는 결국, 상수 1과 같다고 생각해도 무방하다.

(※ unit impulse)

unit impulse 함수는 다음과 같은 형태이다.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \text{undefined}, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$



unit impulse function

0초 일 때, 순간적으로 함수 값이 무한대로 튀어오른 뒤 사라진다. 이상적인 함수로, 0초에서의 영역을 적분한 값은 1이다.

➔ Impulse, step 등 다양한 함수 형태들은, 향후 제어 시스템 모델식을 다룰 때, Input 값으로 넣게 된다.

미분항에 대한 라플라스 변환은 다음과 같다.

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = s\mathrm{F}(s) - f(0)$$

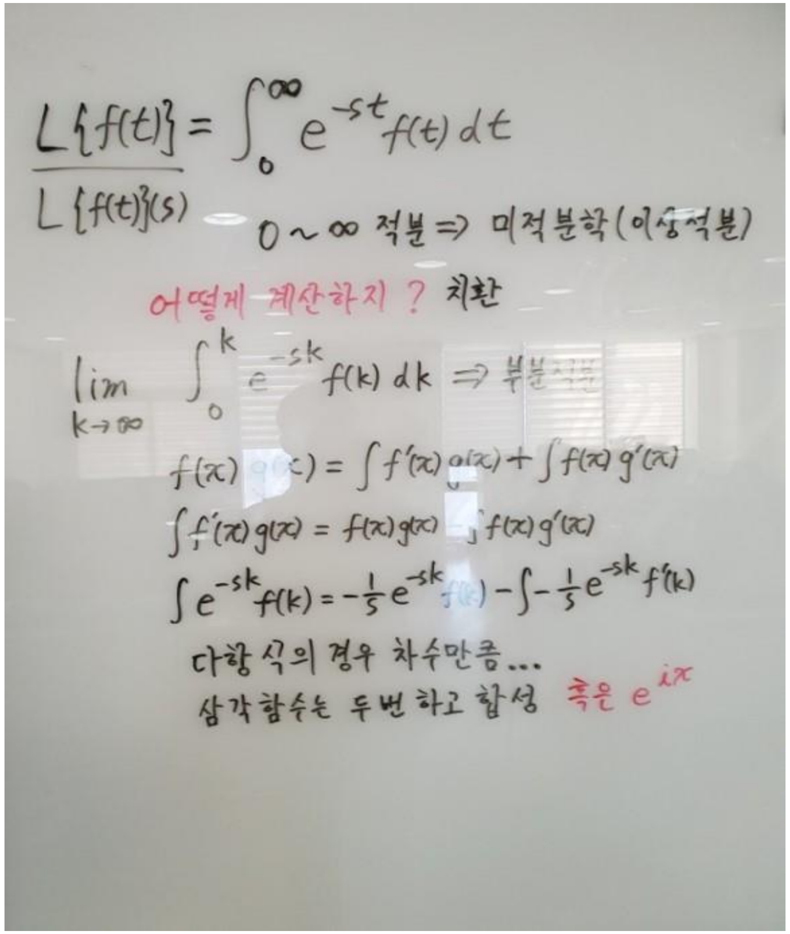
$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) = s^2\mathrm{F}(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathrm{F}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

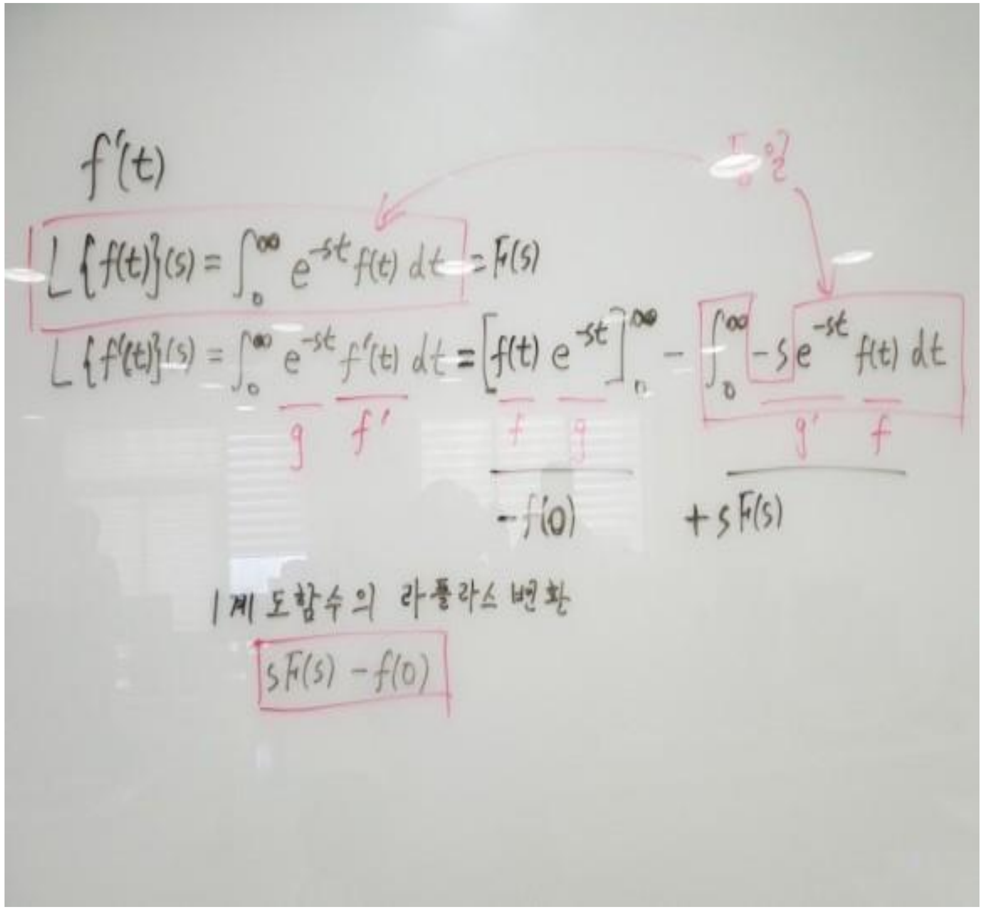
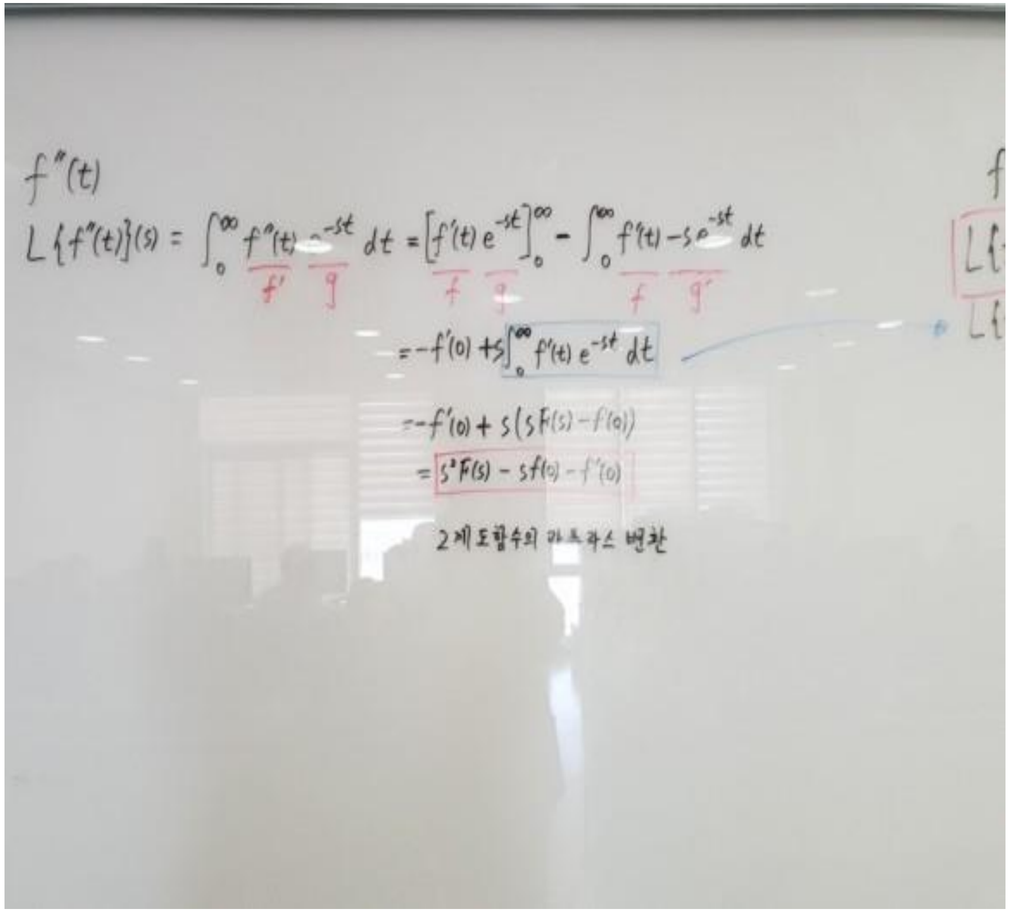
미분항 라플라스 변환

밑에서부터는 선생님 블로그... 정리가 너무 잘돼있어서 그만.. 주말에 공부해서 사진 바꿔서 올리겠습니다.

3. 라플라스 변환을 계산하는 방법
(변환 테이블에 없어도 계산할 수 있어야함)



5. 도함수(미분)의 라플라스 변환법


$f'(t)$
$L\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$
$L\{f'(t)\}(s) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{g} \underbrace{f'(t)}_{f'} dt = [\underbrace{f(t)}_{f} \underbrace{e^{-st}}_{g}]_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{-s e^{-st}}_{g'} \underbrace{f(t)}_{f} dt$
$-f(0)$
$+sF(s)$
1계 도함수의 라플라스 변환
$sF(s) - f(0)$

$f''(t)$
$L\{f''(t)\}(s) = \int_0^\infty \underbrace{f''(t)}_{f'} \underbrace{e^{-st}}_{g} dt = [\underbrace{f'(t)}_{f} \underbrace{e^{-st}}_{g}]_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{f'(t)}_{f} \underbrace{-s e^{-st}}_{g'} dt$
$= -f'(0) + s\int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt$
$= -f'(0) + s(sF(s) - f(0))$
$= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
2계 도함수의 라플라스 변환

6. 문제

$$y' + 4y + 1 = 0$$

$$L\{y'\} = sY(s) - y(0)$$

$$L\{y\} = Y(s)$$

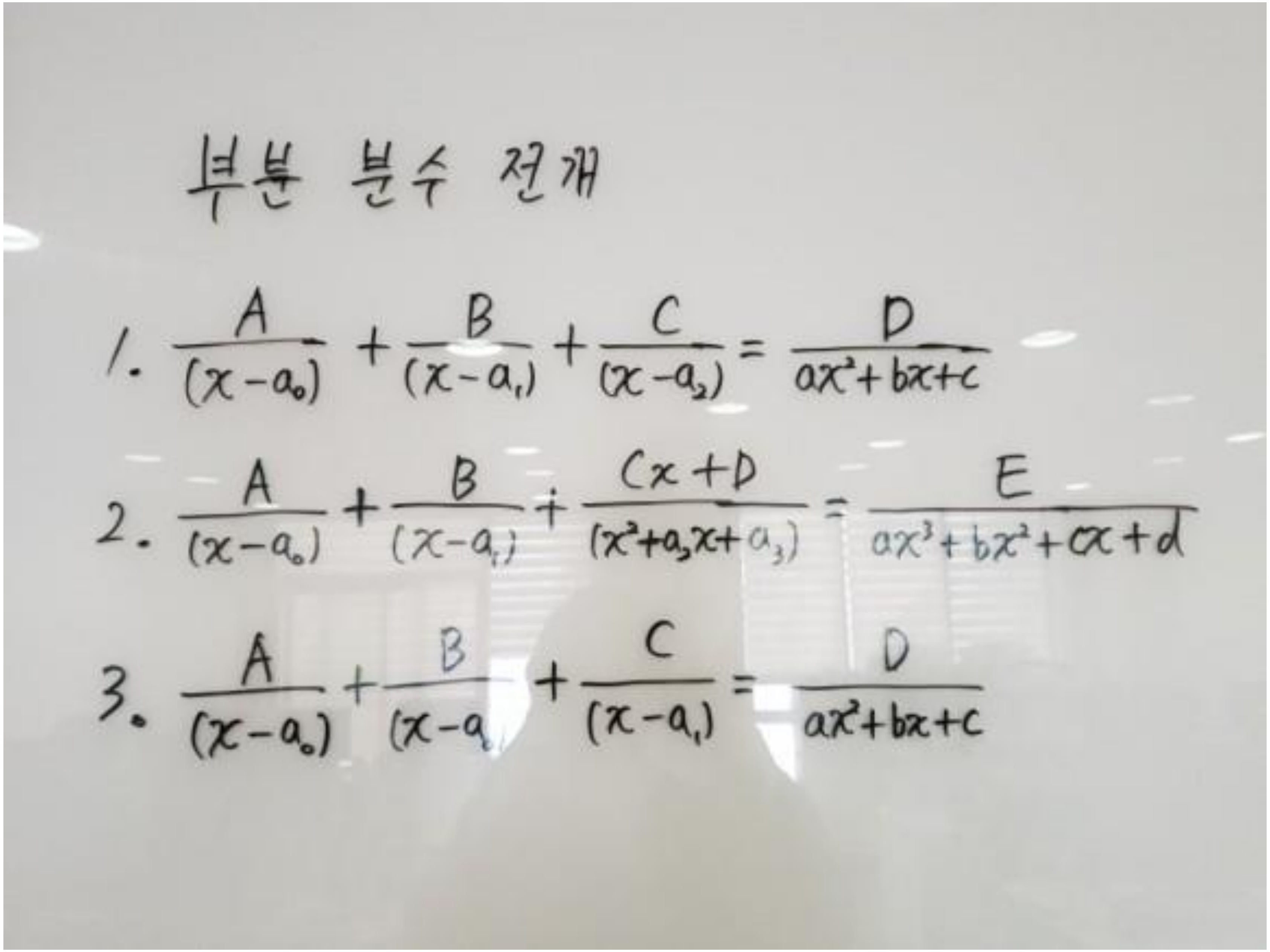
$$L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

$$sY(s) - y(0) + 4Y(s) + \frac{1}{s} = 0$$

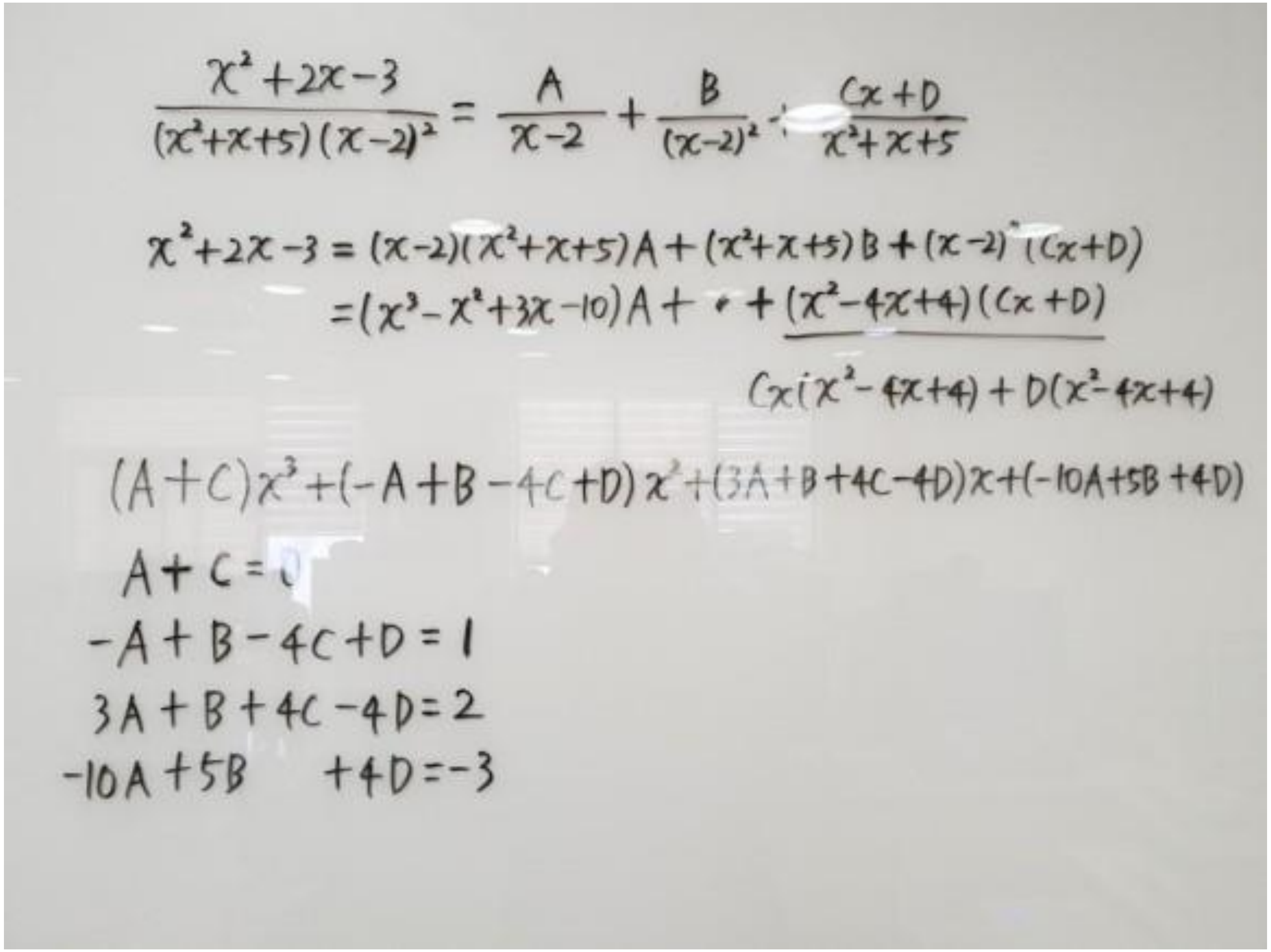
$$Y(s)(s+4) = y(0) - \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+4)}\left(y(0) - \frac{1}{s}\right)$$

7. 부분 분수 전개법 설명


부분 분수 전개
1. $\frac{A}{(x-a_0)}+\frac{B}{(x-a_1)}+\frac{C}{(x-a_2)}=\frac{D}{ax^2+bx+c}$
2. $\frac{A}{(x-a_0)}+\frac{B}{(x-a_1)}+\frac{Cx+D}{(x^2+a_2x+a_3)}=\frac{E}{ax^3+bx^2+cx+d}$
3. $\frac{A}{(x-a_0)}+\frac{B}{(x-a_1)}+\frac{C}{(x-a_1)}=\frac{D}{ax^2+bx+c}$

8. 부분 분수 전개 계산(앞서 학습한 행렬식과 가우스 소거법 활용)



$$\frac{x^2+2x-3}{(x^2+x+5)(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+5}$$

$$x^2+2x-3 = (x-2)(x^2+x+5)A + (x^2+x+5)B + (x-2)^2(Cx+D)$$

$$= (x^3-x^2+3x-10)A + \bullet + \underline{(x^2-4x+4)(Cx+D)}$$

$$Cx(x^2-4x+4) + D(x^2-4x+4)$$

$$(A+C)x^3 + (-A+B-4C+D)x^2 + (3A+B+4C-4D)x + (-10A+5B+4D)$$

$$A+C=0$$

$$-A+B-4C+D=1$$

$$3A+B+4C-4D=2$$

$$-10A+5B\quad+4D=-3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & -4 & 2 \\ -10 & 5 & 0 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 25 & -1 & -8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 25 & -1 & -8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{121}{4} & -\frac{59}{4} \end{array}\right)$$

$\frac{121}{4} D = -\frac{59}{4}$ $\quad D = -\frac{59}{121}$

$C + 5\,\frac{59}{121} = \frac{1}{4}\cdot\frac{121}{121} \Rightarrow C = \frac{121-285}{4\cdot 121} = -\frac{164}{484} = -\frac{41}{121}$

$B - 3C + D = 1$

$B = 1 - \frac{123}{121} + \frac{59}{121} = \frac{55}{121} = \frac{5}{11}$

$A = -C = \frac{41}{121}$

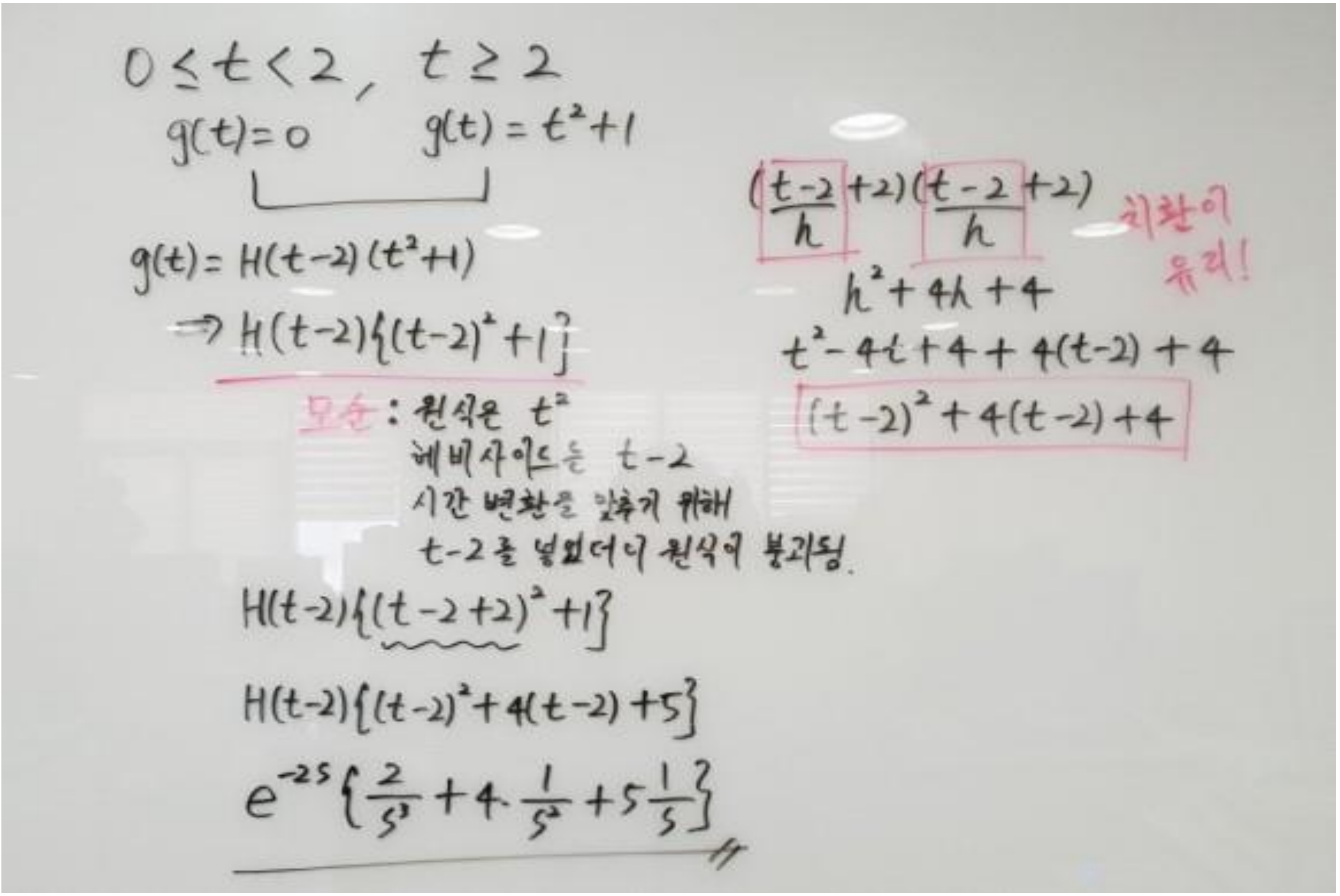
$$\boxed{\therefore \frac{x^2+2x}{(x^2+x+5)(x-2)^2} = \frac{41}{121}\frac{1}{(x-2)} + \frac{5}{11}\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{41}{121}\frac{x}{x^2+x+5} - \frac{59}{121}\frac{1}{x^2+x+5}}$$

9. 헤비사이드 함수 설명

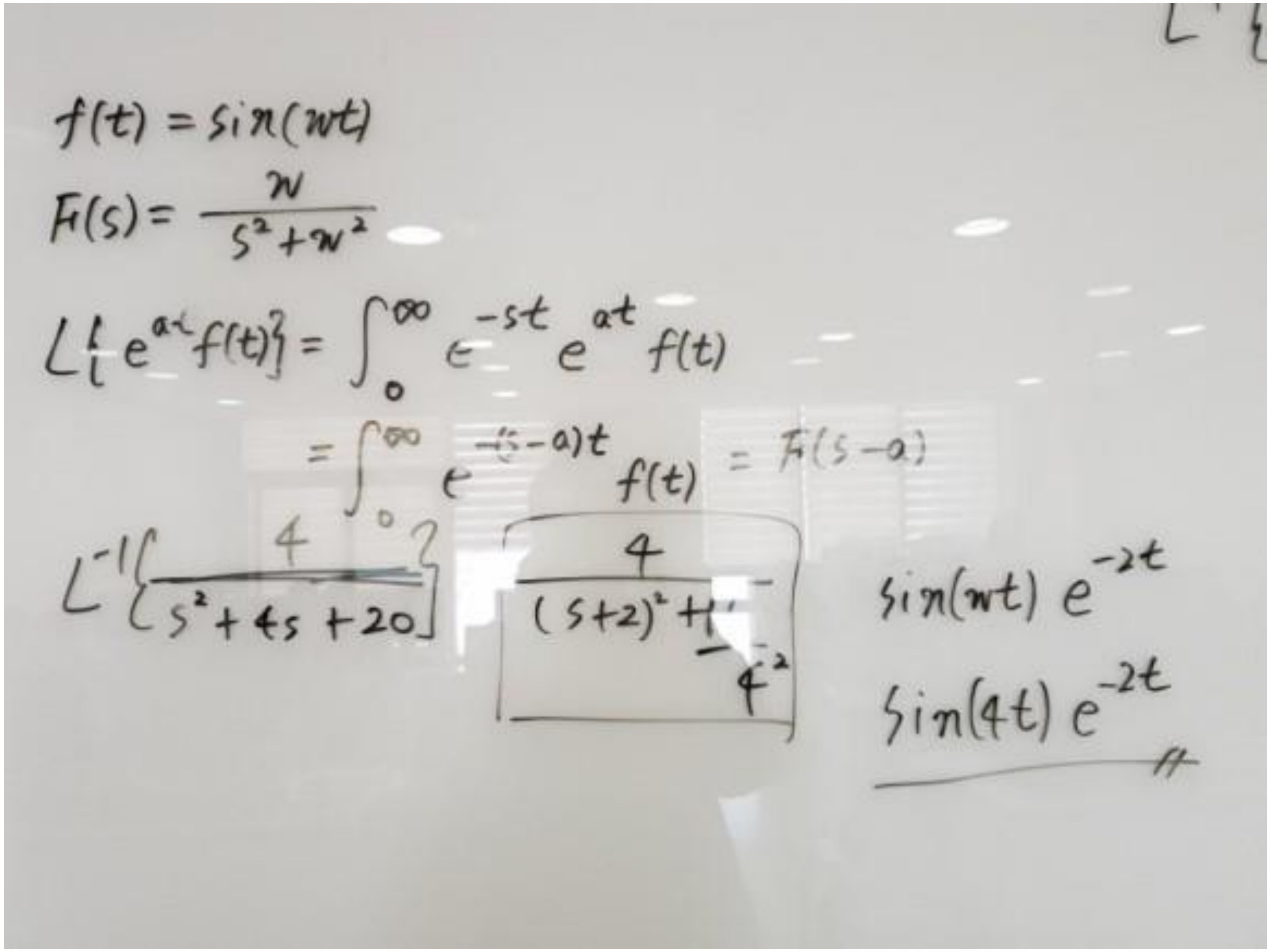
RC 회로에서 스위치 눌렀을 경우와 스위치에서 손을 뗐을 경우 두 가지 케이스로 분리해서 해석하는데, 헤비사이드 함수와 라플라스 변환을 알고 있다면 애당초 그렇게 해석할 필요가 없다.

시간차를 가지고 있는 두 개의 함수를 합성할 수 있게 해주는 것이 헤비사이드 함수에 해당한다.

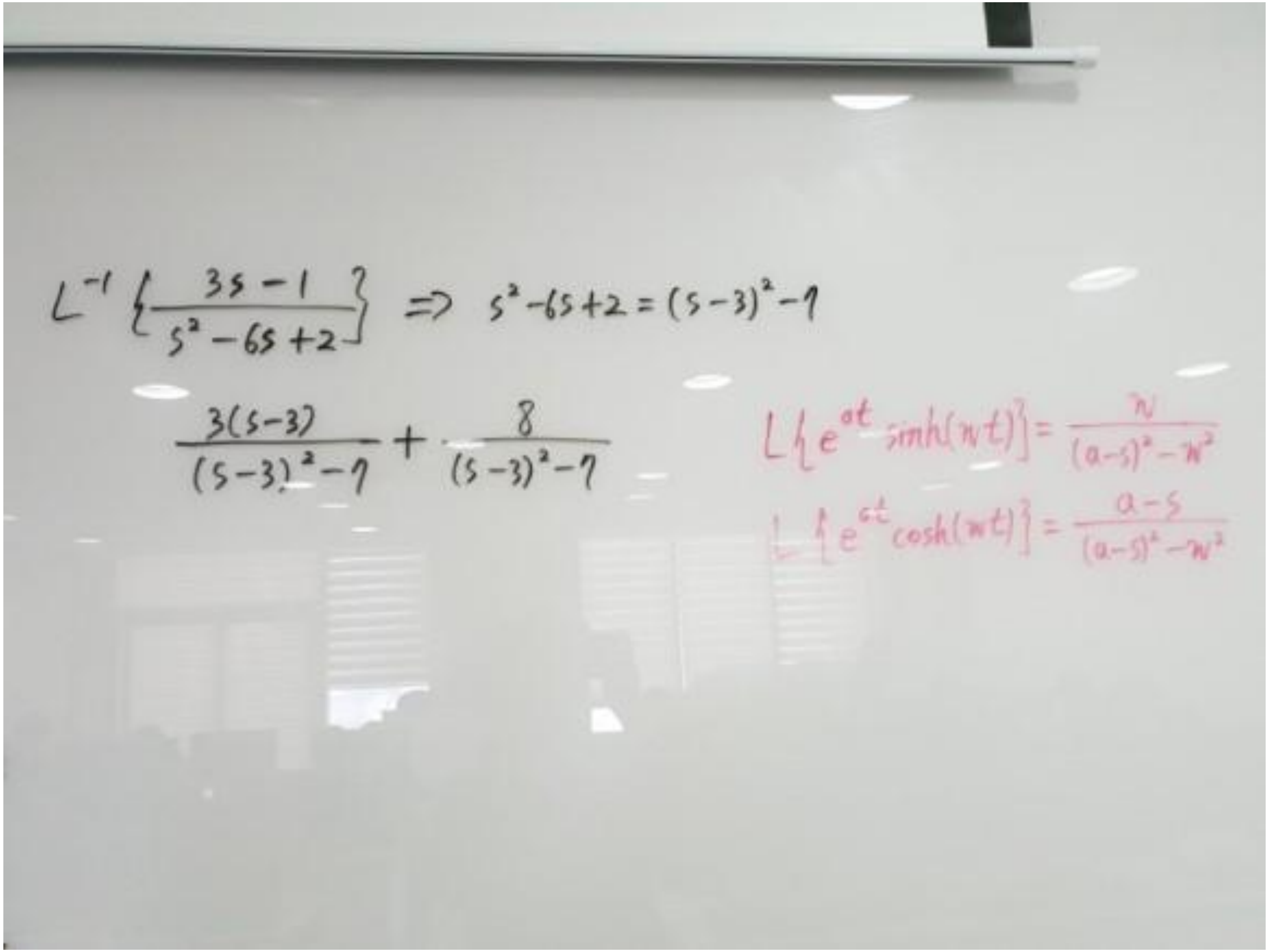
추가적으로 헤비사이드는 지구상 가장 아름다운 방정식이라 불리는 맥스웰 방정식을 지금의 4 가지로 정리한 사람이기도하다.



10. 라플라스 역 변환 방법

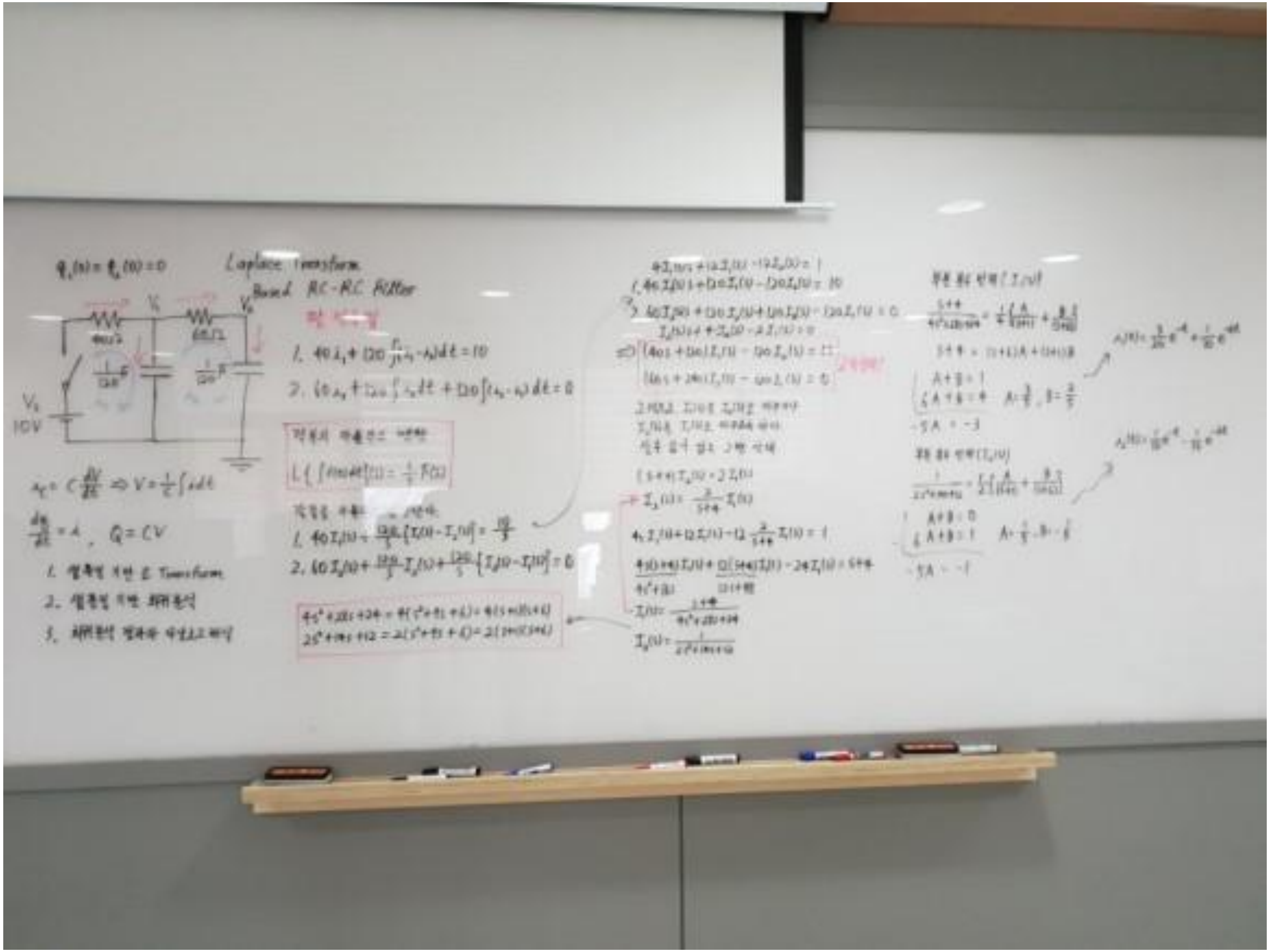


11. 문제



$L^{-1}\left\{\frac{3s-1}{s^2-6s+2}\right\} \Rightarrow s^2-6s+2=(s-3)^2-7$
$\frac{3(s-3)}{(s-3)^2-7}+\frac{8}{(s-3)^2-7}$
$L\{e^{at}\sinh(wt)\}=\frac{w}{(a-s)^2-w^2}$
$L\{e^{at}\cosh(wt)\}=\frac{a-s}{(a-s)^2-w^2}$

12. 라플라스 변환으로 RC RC 필터 해석하는 방법



해야할 것

노트정리, 공식정리, 대회 참가신청서, 계산기코드, 트리코드 짜보기..