

TI DSP, MCU 및 Xilinx Zynq FPGA 프로그래밍 전문가 과정

IRON DRONE

Quad Copter



강사 - Innova Lee(이상훈)
gcccompil3r@gmail.com

학생 - GJ (박현우)
uc820@naver.com

목차

Mathematical Modelling and Control of a Quadrotor

1. 배경지식

- 1) 오일러 각도
- 2) 회전행렬
- 3) 선속도와 각속도
- 4) 토크
- 5) 선형대수학(행렬)
- 6) 벡터행렬 미분
- 7) 벡터의 외적
- 8) 기울기 벡터
- 9) 회전에 대한 뉴턴 방정식 및 회전관성
- 10) 평행축 정리

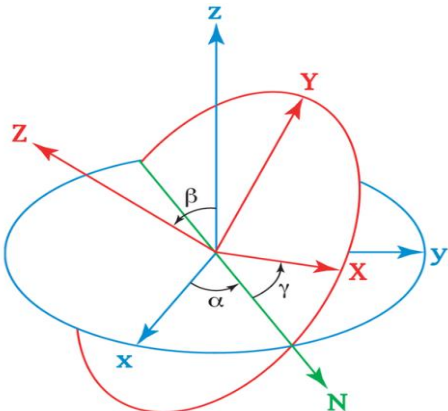
2. Kinematic Modelling

3. Dynamics Modelling

1. 배경지식 1)오일러 각도, 2) 회전행렬

Euler Transform Matrix (오일러 변환 행렬)은 관성 좌표계(inertial Frame)를 기체 좌표계(Body Frame)로 변환할 때 사용하는 행렬

일반적으로 3(z-축) – 2(y-축) – 1(x-축) 과정 (Yaw – Pitch – Roll) 의 순서로 변환

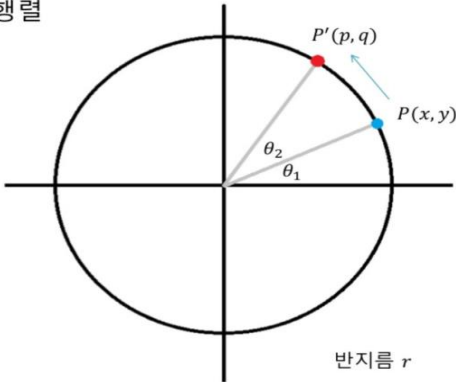


출처 : Wikimedia Commons

- 오일러 각도
- 공간 좌표계(space coordinate)를 (x, y, z)라 하자.
1. (z 회전) z-축을 회전축으로 하여 α 만큼 x-y 좌표축을 회전시키고,
 2. (x 회전) 회전된 좌표축 x-축(이제 N-축)을 회전축으로 하여 β 만큼 z-y 좌표축을 회전시키고,
 3. (z 회전) 다시 z-축을 회전축으로 γ 만큼 x-y 좌표축을 회전시킨다.
- 이와같이 z-x-z 순서로 차례로 회전시키면, 물체 좌표계 (body coordinate) (X, Y, Z)를 얻는다.

<회전행렬>

■ 회전행렬



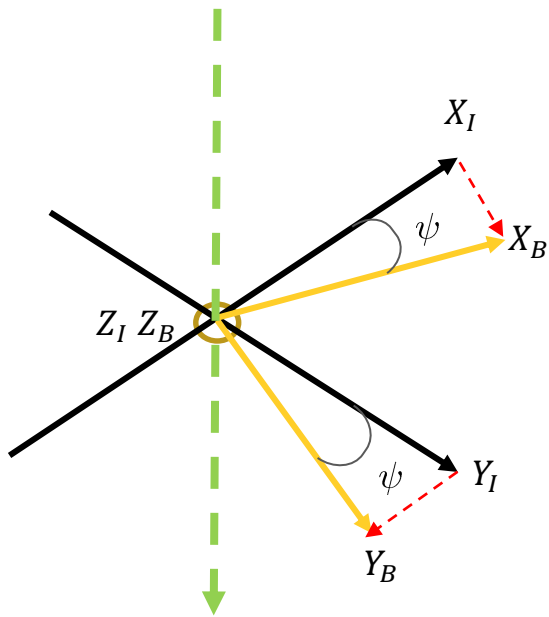
$$\begin{cases} p = r \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ q = r \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta_2 x - \sin\theta_2 y = p \\ \sin\theta_2 x + \cos\theta_2 y = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = r \cos\theta_1 \cos\theta_2 - r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ q = r \sin\theta_1 \cos\theta_2 + r \cos\theta_1 \sin\theta_2 \end{cases}$$

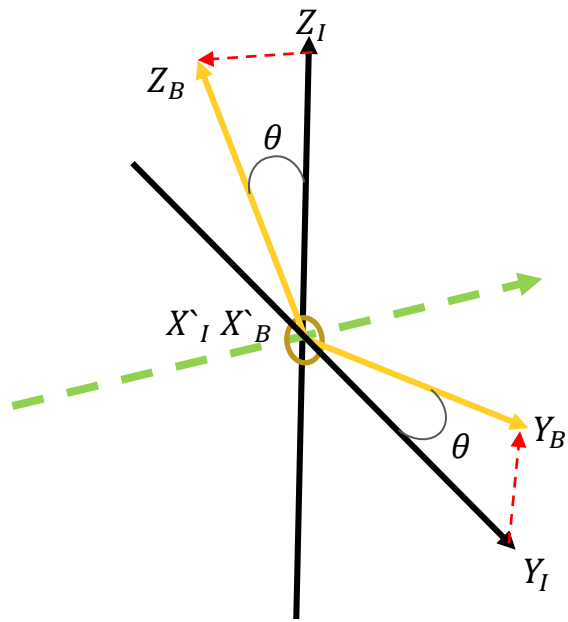
$$\begin{cases} p = x \cos\theta_2 - y \sin\theta_2 \\ q = y \cos\theta_2 + x \sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

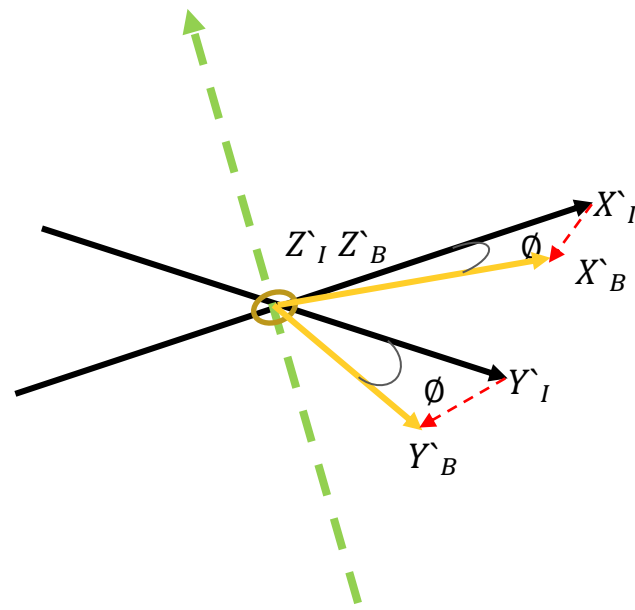
1. 배경지식 1)오일러 각도, 2) 회전행렬



<Z축 기준 회전>



<바뀐 X축 기준 회전>



<바뀐 Z축 기준 회전>

I = 관성 좌표계
B = 기체 좌표계

1. 배경지식 1)오일러 각도, 2) 회전행렬

$${}^bC_e(\Theta) \quad = \quad C_x(\phi)C_y(\theta)C_z(\psi)$$

X
Y
Z

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

XZX	$\begin{bmatrix} c_2 & -c_3s_2 & s_3s_2 \\ c_1s_2 & c_1c_2c_3 - s_1s_3 & -c_2c_1s_3 - c_3s_1 \\ s_2s_1 & c_1s_3 + c_3c_2s_1 & c_1c_3 - c_2s_1s_3 \end{bmatrix}$	XYZ	$\begin{bmatrix} c_2c_3 & -s_2 & c_2s_3 \\ s_1s_3 + c_3c_1s_2 & c_1c_2 & c_1s_2s_3 - c_3s_1 \\ c_3s_1s_2 - c_1s_3 & c_2s_1 & s_1s_2s_3 + c_1c_3 \end{bmatrix}$
YYX	$\begin{bmatrix} c_2 & s_3s_2 & c_3s_2 \\ s_2s_1 & c_1c_3 - c_2s_1s_3 & -c_1s_3 - c_3c_2s_1 \\ -c_1s_2 & c_1c_2s_3 + c_3s_1 & c_1c_2c_3 - s_1s_3 \end{bmatrix}$	XYZ	$\begin{bmatrix} c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 \\ c_1s_3 + c_3s_1s_2 & c_1c_3 - s_1s_2s_3 & -c_2s_1 \\ s_1s_3 - c_1c_3s_2 & c_1s_2s_3 + c_3s_1 & c_1c_2 \end{bmatrix}$
YXY	$\begin{bmatrix} c_1c_3 - c_2s_1s_3 & s_2s_1 & c_1s_3 + s_1c_2c_3 \\ s_3s_2 & c_2 & -c_3s_2 \\ -c_2c_1s_3 - c_3s_1 & c_1s_2 & c_1c_2c_3 - s_1s_3 \end{bmatrix}$	YXZ	$\begin{bmatrix} c_1c_3 + s_1s_2s_3 & c_3s_1s_2 - c_1s_3 & c_2s_1 \\ c_2s_3 & c_2c_3 & -s_2 \\ c_1s_2s_3 - c_3s_1 & s_1s_3 + c_1c_3s_2 & c_1c_2 \end{bmatrix}$
YZY	$\begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - s_1s_3 & -c_1s_2 & c_2c_1s_3 + c_3s_1 \\ c_3s_2 & c_2 & s_3s_2 \\ -c_1s_3 - c_3c_2s_1 & s_2s_1 & c_1c_3 - c_2s_1s_3 \end{bmatrix}$	YZX	$\begin{bmatrix} c_1c_2 & s_1s_3 - c_1c_3s_2 & c_1s_2s_3 + c_3s_1 \\ s_2 & c_2c_3 & -c_2s_3 \\ -c_2s_1 & c_1s_3 + c_3s_1s_2 & c_1c_3 - s_1s_2s_3 \end{bmatrix}$
ZYZ	$\begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - s_1s_3 & -c_2s_3c_1 - c_3s_1 & c_1s_2 \\ c_1s_3 + c_3c_2s_1 & c_1c_3 - c_2s_1s_3 & s_2s_1 \\ -c_3s_2 & s_3s_2 & c_2 \end{bmatrix}$	ZYX	$\begin{bmatrix} c_1c_2 & c_1s_2s_3 - s_1c_3 & s_1s_3 + c_1s_2c_3 \\ s_1c_2 & s_1s_2s_3 + c_1c_3 & s_1s_2c_3 - c_1s_3 \\ -s_2 & c_2s_3 & c_2c_3 \end{bmatrix}$
ZXZ	$\begin{bmatrix} c_1c_3 - c_2s_1s_3 & -c_1s_3 - c_3c_2s_1 & s_2s_1 \\ c_2c_1s_3 + c_3s_1 & c_1c_2c_3 - s_1s_3 & -c_1s_2 \\ s_3s_2 & c_3s_2 & c_2 \end{bmatrix}$	ZXY	$\begin{bmatrix} c_1c_3 - s_1s_2s_3 & -s_1c_2 & c_1s_3 + s_1s_2c_3 \\ c_1s_2s_3 + s_1c_3 & c_1c_2 & s_1s_3 - c_1s_2c_3 \\ -c_2s_3 & s_2 & c_2c_3 \end{bmatrix}$

where $c = \cos$ and $s = \sin$. Because bC_e is orthonormal [Bak, 2002, p. 13] the inverse transformation can be described at the transpose of bC_e .

$${}^bC_e^{-1}(\Theta) \quad = \quad {}^bC_e^T(\Theta) \tag{2.5}$$

관성좌표계에서 기체좌표계로의 변환 행렬을

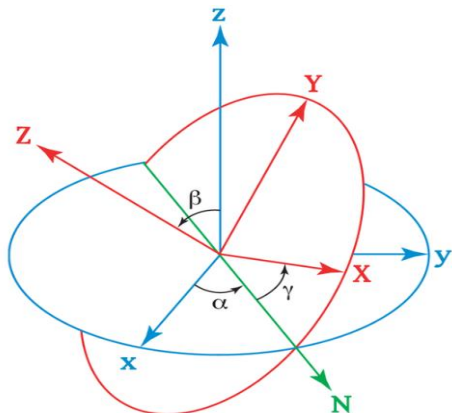
transpose하면 body frame에서 inertial frame으로 다시 변환할 수가 있다.

똑같은 각도라도 곱하는 순서마다 회전 방향이 달라진다.

1. 배경지식 1)회전행렬

Euler Transform Matrix (오일러 변환 행렬)은 관성 좌표계(inertial Frame)를 기체 좌표계(Body Frame)로 변환할 때 사용하는 행렬

일반적으로 3(z-축) – 2(y-축) – 1(x-축) 과정 (Yaw – Pitch – Roll) 의 순서로 변환

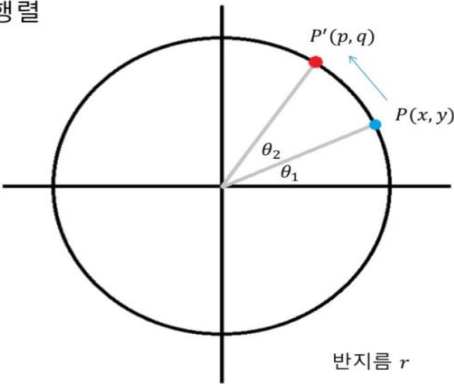


출처 : Wikimedia Commons

- 오일러 각도
- 공간 좌표계(space coordinate)를 (x, y, z)라 하자.
1. (z 회전) z-축을 회전축으로 하여 α 만큼 x-y 좌표축을 회전시키고,
 2. (x 회전) 회전된 좌표축 x-축(이제 N-축)을 회전축으로 하여 β 만큼 z-y 좌표축을 회전시키고,
 3. (z 회전) 다시 z-축을 회전축으로 γ 만큼 x-y 좌표축을 회전시킨다.
- 이와같이 z-x-z 순서로 차례로 회전시키면, 물체 좌표계 (body coordinate) (X, Y, Z)를 얻는다.

<회전행렬>

■ 회전행렬



$$\begin{cases} p = r \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ q = r \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta_2 x - \sin\theta_2 y = p \\ \sin\theta_2 x + \cos\theta_2 y = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = r \cos\theta_1 \cos\theta_2 - r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ q = r \sin\theta_1 \cos\theta_2 + r \cos\theta_1 \sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = x \cos\theta_2 - y \sin\theta_2 \\ q = y \cos\theta_2 + x \sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

1. 배경지식 3) 선속도와 각속도

일정하게 가속된 선운동 방정식과 회전운동 방정식의 유사성

접선 운동	회전 운동
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$d = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

$$d \Rightarrow \theta$$

$$v \Rightarrow \omega$$

$$a \Rightarrow \alpha$$

- 회전 중심으로부터 수직거리 r 만큼 떨어진 곳에 있는 사람이

각도 θ 만큼 움직였을 때 원 둘레를 따라 움직인 원호의 길이가 s 라면

$$\theta = \frac{s}{r} \Rightarrow s = r \cdot \theta$$

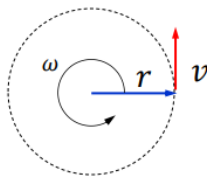
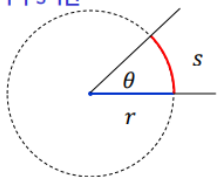
- 사람의 선속도는?

$$v = \frac{s}{t} = \frac{r \cdot \theta}{t} = r \cdot \frac{\theta}{t} = r \cdot \omega$$

$$\Rightarrow \frac{v}{r} = \omega = \frac{\theta}{t}$$

선속도는 반지름 r 에 비례하므로

- 중심에서 멀리 있는 사람의 선속도가 크다.

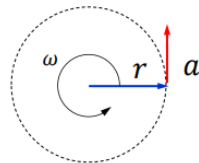


$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dr}{dt} \omega + \frac{d\omega}{dt} r \text{ (r vector)}$$

- 접선 성분

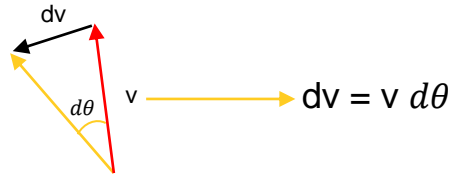
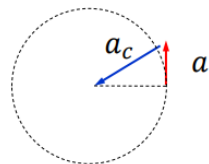
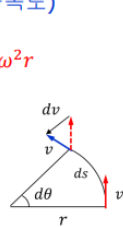
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{rd\omega}{dt} = r\alpha$$

$$\frac{v}{r} = \omega \iff \frac{a}{r} = \alpha$$



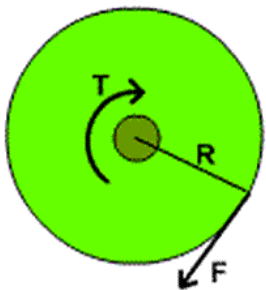
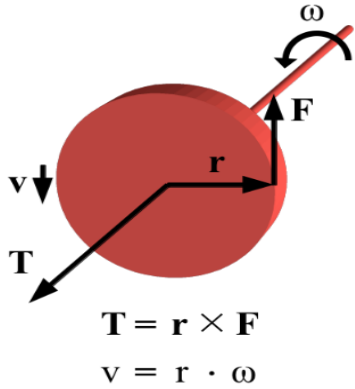
- 지름 성분 (구심 가속도)

$$a_c = \frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$



1. 배경지식 4) 토크

직진 운동 (translational motion)	회전 운동 (rotational motion)
힘(force) F	T 토크(torque)
거리(distance) S	θ 각도(angle)
속도(velocity) v	ω 각속도(angular velocity)
가속도(acceleration) a	α 각가속도(angular acceleration)
질량(mass) m	J 관성모멘트(inertial moment)



Torque applied to wheel results in force on edge



Force on wrench creates torque on bolt

1. 배경지식 5) 선형대수학(행렬)

transpose

$$A=(a_{ij})\in Mat_{m,n}(K)$$

라고 할 때,

$$A^T=(a_{ji})\in Mat_{n,m}(K)$$

를 A 의 전치행렬이라고 합니다. 말 그대로 i 와 j 의 순서가 뒤바뀐 거죠, 예를 들어서,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

가 되겠죠.

$$A,B\in Mat_{m,n}(K), C\in Mat_{n,r}(K), k\in K$$

일 때,

$$(A+B)^T=A^T+B^T$$

$$(kA)^T=kA^T$$

$$(A^T)^T=A$$

$$(AC)^T=C^TA^T$$

대각행렬 곱

$$A\in Mat_{n,n}(K)$$

일 때

$$tr(A)\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

$$A,B\in Mat_{n,n}(K), k\in K$$

일 때

$$tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$$

$$tr(kA)=k\cdot tr(A)$$

$$tr(AB)=tr(BA)$$

$$tr(A^T)=tr(A)$$

$$AB-BA=I_n$$

인 n 차 정사각행렬 A, B 는 존재하는가?

$$tr(AB-BA)=tr(AB)-tr(BA)=0\neq n=tr(I)$$

Diagonal

여기 hyon notation을 소개하는 부분에서

$$J=\begin{pmatrix} I_2 & \text{짜다}0 \\ \text{짜다}0 & I_2 \end{pmatrix}$$

라는 행렬을 한 번 소개했는데,

$$diag(I_2, I_2)$$

그럼 애는 가 되겠습니다.

이런 block diagonal matrix는 다음과 같은 성질을 가집니다.

$$diag(A_1, \dots, A_k) \cdot diag(B_1, B_2, \dots, B_k) = diag(A_1 B_1, \dots, A_k B_k)$$

$$diag(A_1, \dots, A_k)^{-1} = diag(A_1^{-1}, \dots, A_k^{-1})$$

1. 배경지식 6) 벡터 행렬의 미분

벡터, 행렬 표현 및 미분 기호

	스칼라	벡터	행렬
스칼라	$\frac{\partial y}{\partial x}$	$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}$	$\frac{\partial Y}{\partial X}$
벡터	$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}}$	$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$	
행렬	$\frac{\partial y}{\partial X}$		

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1} \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial y}{\partial x_n} \right] \quad \text{--- (1)} \quad \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{x}} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial y_{11}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial y_{1n}}{\partial x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{m1}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial y_{mn}}{\partial x} \end{array} \right] \quad \text{--- (4)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial y_1}{\partial x} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x} \end{array} \right] \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial X} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial y}{\partial x_{11}} & \dots & \frac{\partial y}{\partial x_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_{1n}} & \dots & \frac{\partial y}{\partial x_{mn}} \end{array} \right] \quad \text{--- (3)} \quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{array} \right] \quad \text{--- (5)}$$

3. 벡터, 행렬 미분의 계산

상수벡터 \mathbf{a} 와 열벡터 \mathbf{x} 에 대해 $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ 를 x 로 미분하면 그 결과값은 \mathbf{a}^T 가 됩니다. 정말로 그렇게 되는지 앞서 설명한 벡터, 행렬 미분 정의에 따라 실제로 계산을 해 보겠습니다.

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \quad \text{--- (6)}$$

와 같이 $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ 는 하나의 스칼라 값입니다. 따라서 스칼라 $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ 를 식 (1)을 이용하여 벡터 \mathbf{x} 로 미분하면

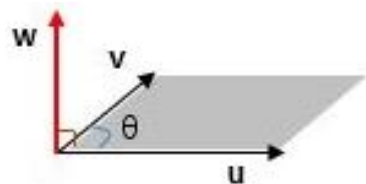
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} &= \left[\frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\partial x_n} \right] \\ &= \left[\frac{\partial (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)}{\partial x_n} \right] \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{a}^T \quad \text{--- (7)} \end{aligned}$$

\mathbf{a}, \mathbf{b} : 상수 벡터
 A : 상수 행렬
 \mathbf{y}, \mathbf{z} : \mathbf{x} 와 함수관계를 갖는 벡터

식	\mathbf{x} 로 미분 결과
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{a}$	\mathbf{a}^T
$A \mathbf{x}$	A
$\mathbf{x}^T A$	A^T
$\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$	$\mathbf{x}^T (A + A^T)$
$\mathbf{y}^T A \mathbf{z}$	$\mathbf{y}^T A \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{z}^T A^T \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$
$\mathbf{y}^T \mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$	$\mathbf{y}^T \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{z}^T \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$

$\ \mathbf{x}\ ^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$	$2\mathbf{x}^T$
$\ \mathbf{x}\ $	$\frac{\mathbf{x}^T}{\ \mathbf{x}\ }$
$\ \mathbf{x} - \mathbf{a}\ $	$\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T}{\ \mathbf{x} - \mathbf{a}\ }$
$\ A\mathbf{x} - \mathbf{b}\ ^2$	$2(A\mathbf{x} - \mathbf{b})^T A$

1. 배경지식 7) 벡터의 외적

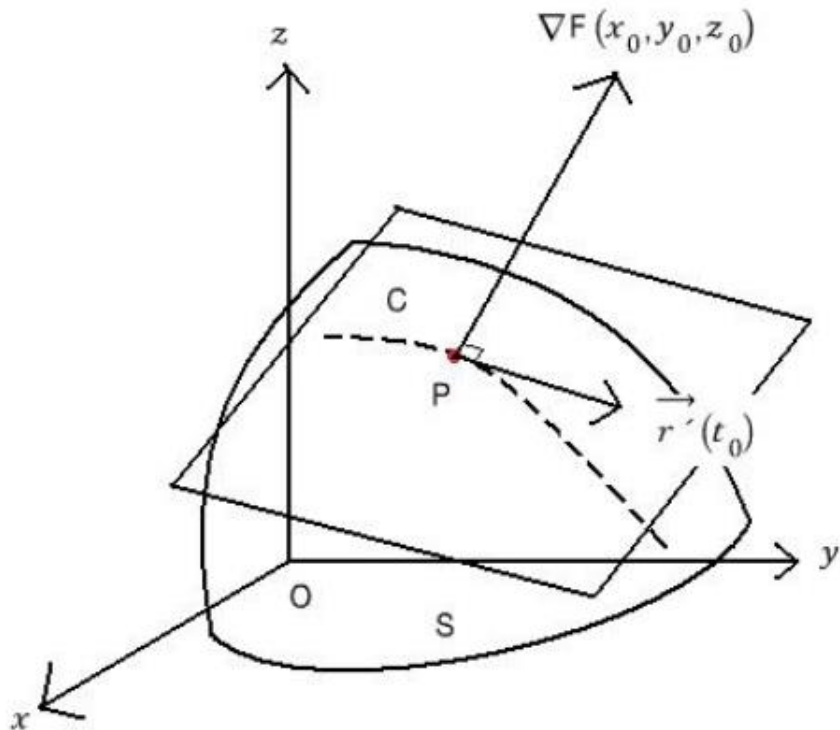


$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)\end{aligned}$$

1. 배경지식 8) 기울기 벡터(Gradient Vector)



- 정리 1 -

곡면 $S : F(x, y, z) = k$ (k 는 상수) 위의 점 $P(x_0, y_0, z_0)$ 에 대하여 $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ 는 점 P 에서 곡면 S 에 접하는 접평면의 법선벡터이다.

- 정리 2 -

곡면 $S : F(x, y, z) = k$ (k 는 상수) 위의 점 $P(a, b, c)$ 에 접하는 접평면의 방정식은 $F_x(a, b, c)(x-a) + F_y(a, b, c)(y-b) + F_z(a, b, c)(z-c) = 0$ 이다.

그리고 점 P 를 지나면서 접평면에 수직인 법선의 방정식은

$$\frac{x-a}{F_x(a, b, c)} = \frac{y-b}{F_y(a, b, c)} = \frac{z-c}{F_z(a, b, c)}$$
 이다.

ex1) 타원체 $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ 위의 점 $P(-2, 1, -3)$ 에 접하는 접평면의 방정식과 점 P 를 지나고 접평면에 수직인 법선의 방정식을 구하시오.

(풀이)

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \quad \text{이라고 하면} \quad \nabla F = \left\langle \frac{x}{2}, 2y, \frac{2z}{9} \right\rangle$$

따라서 점 P 에서의 법선벡터는 $\nabla F(-2, 1, -3) = \left\langle -1, 2, -\frac{2}{3} \right\rangle$ 이므로 접평면의 방정식은

$$-(x+2) + 2(y-1) - \frac{2}{3}(z+3) = 0 \quad \text{이고 정리하면} \quad 3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad \text{이다.}$$

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z+3}{2} \quad \text{이다.}$$

그리고 법선의 방정식은

1. 배경지식 9) 회전에 대한 뉴턴 방정식 및 회전관성

- 회전에 대한 뉴턴 방정식

$$\overrightarrow{\tau_{net}} = I \overrightarrow{\alpha}$$

↑

알짜토크

↑

회전 관성

→

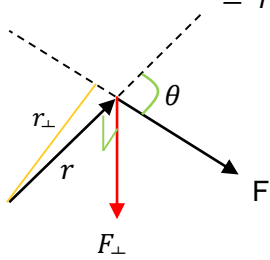
각가속도 : $\overrightarrow{\alpha} = \frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt}$

각속도 크기 : $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

알짜토크

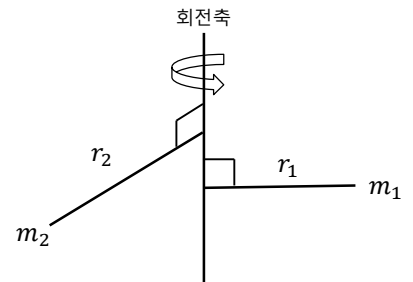
합 $\vec{\tau}$ (시계 +) + 합 $\vec{\tau}$ (반시계 -)

- 토크의 크기 : $\tau = r F \sin \theta$
 $= r F_{\perp} = r_{\perp} F$

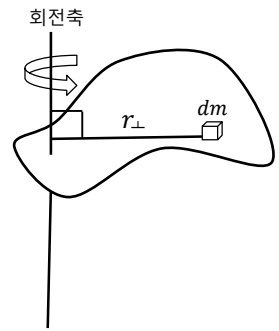


- 회전관성(I)

1) 질점계 $I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$

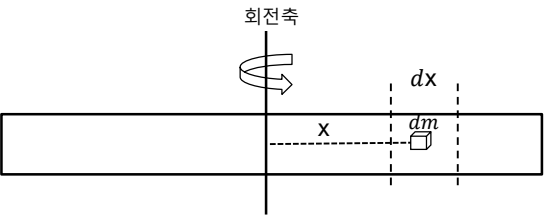


2) 고체(강체 : Rigid Body)계 : $I = \int r_{\perp}^2 dm$



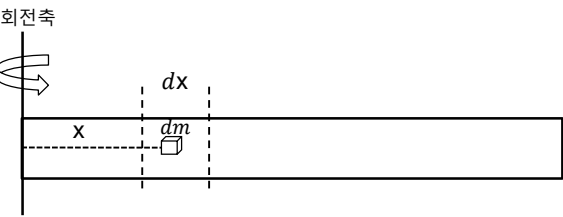
1. 배경지식 10) 평행축 정리

예제) 길이 L, 질량 M인 균일 막대



$$\therefore I = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 \lambda \, dx, \quad dm = \lambda \, dx, \quad \lambda \left(\text{선밀도} \left[\frac{kg}{m} \right] : \text{일정} \right)$$

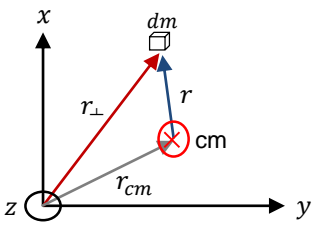
$$I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$$



$$\therefore I = \int_0^L x^2 \lambda \, dx = \frac{1}{3} ML^2$$

평행축 정리 $\rightarrow I = \frac{1}{12} ML^2 + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$

증명)

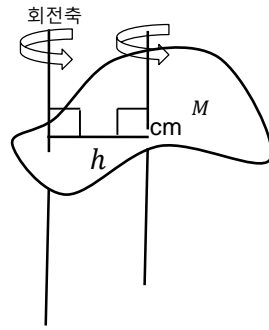


$$I = \int r_{\perp}^2 \, dm = \int (r_{cm}^2 + r^2 + \vec{r}_{cm} \cdot \vec{r}) \, dm$$

$$= \int r_{cm}^2 \, dm + \int r^2 \, dm + \int \vec{r}_{cm} \cdot \vec{r} \, dm = 0$$

(Note: The last term is crossed out with a red line and a red box around it, indicating it is zero.)

• 평행축 정리 $\rightarrow I = I_{cm} + Mh^2$



2.3.1 Euler Angles

변환 - EULER

3. 변환

3.1 오일러 각도 변환 - con't

- Z-축을 회전 축으로 하여 ϕ 만큼 회전

오른쪽 그림과 같이 Z-축을 기준으로 오른손 좌표 시스템을 설명할 수 있다.

$P_1(1,0,0)$ 에 대하여, ϕ 만큼 회전 시킬 경우, 삼각함수 표현법을 통하여,

$$x = 1 \times \cos \phi \quad y = 1 \times \sin \phi \quad z = 0$$

으로 변환된다.

$P_2(0,1,0)$ 에 대하여, ϕ 만큼 회전 시킬 경우, 삼각함수 표현법을 통하여,

$$x = 1 \times \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \phi \quad y = 1 \times \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \phi \quad z = 0$$

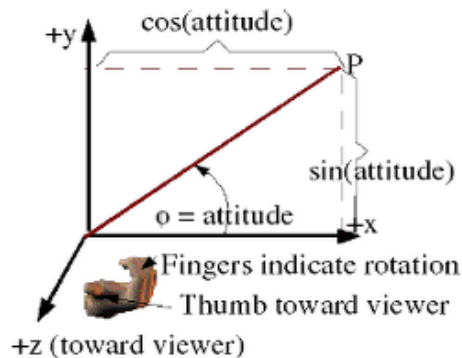
으로 변환된다.

$P_3(0,0,1)$ 의 경우 회전 축임으로, $x=0, y=0, z=1$ 이 그대로 유지 된다.

점 세 개에 대한 열 기준 행렬로 표현 하면,

오일러 각도 변환 중 Z-축 기준 행렬 값을 얻을 수 있다.

$$Z_\phi = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad X_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \end{aligned}$$

2.3.2 Quadrotor mathematical model

We provide here a mathematical model of the quadrotor, exploiting Newton and Euler equations for the 3D motion of a rigid body. The goal of this section is to obtain a deeper understanding of the dynamics of the quadrotor and to provide a model that is sufficiently reliable for simulating and controlling its behavior. Let us call $[x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T$ the vector containing the linear and angular position of the quadrotor in the earth frame and $[u \ v \ w \ p \ q \ r]^T$ the vector containing the linear and angular velocities in the body frame. From 3D body dynamics, it follows that the two reference frames are linked by the following relations:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_B, \quad \text{동차속도} \rightarrow \text{관성속도} \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\omega}_B, \quad \text{동차각속도} \rightarrow \text{관성각속도} \quad (2.6)$$

where $\mathbf{v} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\omega} = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_B = [u \ v \ w]^T \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\omega}_B = [p \ q \ r]^T \in \mathbb{R}^3$, and \mathbf{T} is a matrix for angular transformations [27]

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & s(\phi)t(\theta) & c(\phi)t(\theta) \\ 0 & c(\phi) & -s(\phi) \\ 0 & \frac{s(\phi)}{c(\theta)} & \frac{c(\phi)}{c(\theta)} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

우리는 여기에서 강체의 3D 움직임을 위한 뉴턴과 오일러 공식을 탐구하고 쿼드로터의 수학적 움직임을 제공한다.

이 섹션의 목표는 쿼드로터의 동역학의 아주 깊은 이해를 얻기 위함이고

충분히 믿을만한 쿼드로터의 시뮬레이팅과 제어를 위한 모델을 제공한다.

$[x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T$ 를 관성 좌표계에서의 쿼드로터의 선형 그리고 각도의 위치를 포함하는 벡터라고 부르자. 또한, 동체 좌표계에서의 선형 그리고 각속도를 포함하는 벡터를 $[u \ v \ w \ p \ q \ r]^T$ 이라 부르자.

3D body 동역학으로부터, 두 개의 referece frames에 연관된 수식이 있다.

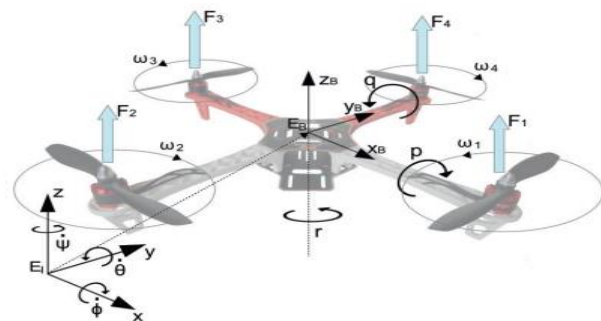


Fig. 1. Inertial and body-fixed frame of quadrotor.

w와 v 사이의 관계

2.3.2 Quadrotor mathematical model

관성 좌표계(inertia frame)에서 표현되는 로봇의 위치($\mathbf{p} = [x \ y \ z]^T$)와 오일러

각($\boldsymbol{\eta} = [\phi \ \theta \ \psi]^T$)는 기체 좌표계(body fixed frame)에서 표시되는 기체의

선속도($\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$)와 각속도($\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$)와 다음의 관계식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{R}\mathbf{v}, \\ \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\eta}}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{T}} = \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \psi} \dot{\psi} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\theta}c\theta \\ 0 & -\dot{\phi}s\phi & \dot{\phi}c\phi c\theta - \theta s\phi s\theta \\ 0 & -\dot{\phi}c\phi & -\dot{\phi}s\phi c\theta - \dot{\theta}c\phi s\theta \end{bmatrix}$$

관성 좌표계 가속도 $\rightarrow \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{v}}_B + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{v}_B$

관성 좌표계 각가속도 $\rightarrow \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{T}\dot{\boldsymbol{\omega}}_B + \dot{\mathbf{T}}\boldsymbol{\omega}_B$

2.3.2 Euler Rates

The relationship between Euler angle time derivatives ($\dot{\Theta}$) and the angular velocity (${}^b\omega$) can in a similar way be described with a rotational matrix [Bak, 2002, p.25].

체인룰을 적용 (x축은 그대로, y축은 x축 회전 후 y에영향, z축은 x, y회전 후 z축에영향)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = {}^b\omega &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_x(\phi) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + C_y(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ &= {}^bH_e(\Theta)\dot{\Theta} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Where C_x and C_y are presented in Equation 2.1 and 2.2. bH_e is the transformation matrix from earth frame to body frame. By inverting bH_e the transformation matrix from body rates to the derivative of the Euler angles are found.

$${}^eH_b(\Theta) = {}^bH_e^{-1}(\Theta) \quad (2.8)$$

Where $t = \tan$, and Θ are Euler angles. It can be shown that [Stevens and Lewis, 2003, p. 28]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \cdot \dot{\Theta} &= {}^eH_b(\Theta) {}^b\omega \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t\theta s\phi & t\theta c\phi \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\theta & c\phi/c\theta \end{bmatrix} {}^b\omega \end{aligned} \quad (2.9)$$

In Equation 2.9 it is seen that when θ reaches $\frac{\pi}{2}$ the matrix will be singular. Also given the trigonometric functions this parametrization is not linear.

오일러 각도를 시간에 대해 미분한 값과

기체 좌표계에서의 각속도를 구하는 방법에

대해 나타내고 있으며 반대로 관성좌표계 값으로

바꾸는 방법도 알려주고 있다.

- $\dot{\psi}$ is measured in the Inertial Frame
- $\dot{\theta}$ is measured in Intermediate Frame #1
- $\dot{\phi}$ is measured in Intermediate Frame #2
- ... which is

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3 \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{H}_2^{\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{H}_1^{\phi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{\theta}^{\phi} \dot{\Theta}$$

Can the inversion become singular?
What does this mean?

Inverse transformation $[(\cdot)^{-1} \neq (\cdot)^T]$

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi\sec\theta & \cos\phi\sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{\theta}^{\phi} {}^b\omega$$

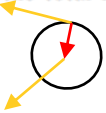


2.3.2 Euler Rates

where $t(\theta) = \tan(\theta)$. So, the kinematic model of the quadrotor is:

$$\begin{cases} \dot{x} = w[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)] - v[c(\phi)s(\psi) - c(\psi)s(\phi)s(\theta)] + u[c(\psi)c(\theta)] \\ \dot{y} = v[c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\psi)s(\theta)] - w[c(\psi)s(\phi) - c(\phi)s(\psi)s(\theta)] + u[c(\theta)s(\psi)] \\ \dot{z} = w[c(\phi)c(\theta)] - u[s(\theta)] + v[c(\theta)s(\phi)] \\ \dot{\phi} = p + r[c(\phi)t(\theta)] + q[s(\phi)t(\theta)] \\ \dot{\theta} = q[c(\phi)] - r[s(\phi)] \\ \dot{\psi} = r\frac{c(\phi)}{c(\theta)} + q\frac{s(\phi)}{c(\theta)} \end{cases} \quad (2.8)$$

Newton's law states the following matrix relation for the total force acting on the quadrotor:

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{F} = m\mathbf{a} \text{ (a = 구심가속도 + 각속도)}} m(\boldsymbol{\omega}_B \wedge \mathbf{v}_B + \dot{\mathbf{v}}_B) = \mathbf{f}_B, \quad (2.9)$$


where m is the mass of the quadrotor, \wedge is the cross product and $\mathbf{f}_B = [f_x \ f_y \ f_z]^T \in \mathbb{R}^3$ is the total force.

Euler's equation gives the total torque applied to the quadrotor:

$$\mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_B + \boldsymbol{\omega}_B \wedge (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}_B) = \mathbf{m}_B,$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} \times \mathbf{a} + \mathbf{W} \mathbf{b} \wedge (\mathbf{I} * \mathbf{W} \mathbf{b}) \quad (\mathbf{I} * \mathbf{W} \mathbf{b} \text{ 는 각운동량})$$

where $\mathbf{m}_B = [m_x \ m_y \ m_z]^T \in \mathbb{R}^3$ is the total torque and \mathbf{I} is the diagonal inertia matrix:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

쿼드로터의 운동학적인 모델은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \dot{x} = w[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)] - v[c(\phi)s(\psi) - c(\psi)s(\phi)s(\theta)] + u[c(\psi)c(\theta)] \\ \dot{y} = v[c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\psi)s(\theta)] - w[c(\psi)s(\phi) - c(\phi)s(\psi)s(\theta)] + u[c(\theta)s(\psi)] \\ \dot{z} = w[c(\phi)c(\theta)] - u[s(\theta)] + v[c(\theta)s(\phi)] \\ \dot{\phi} = p + r[c(\phi)t(\theta)] + q[s(\phi)t(\theta)] \\ \dot{\theta} = q[c(\phi)] - r[s(\phi)] \\ \dot{\psi} = r\frac{c(\phi)}{c(\theta)} + q\frac{s(\phi)}{c(\theta)} \end{cases} \quad (2.8)$$

뉴턴의 법칙은 밑에 2.9에 있는 관계식은 쿼드로터에 작용하는 총 힘에 관한 식이다.

m 은 쿼드로터의 질량, A 는 외적이고 $f_B = [f_x, f_y, f_z]^T$ 는 힘의 총합이다.

오일러의 식은 쿼드로터에 적용되는 총 토크를 준다.

m 은 쿼드로터의 질량, A 는 외적이고 $f_B = [f_x, f_y, f_z]^T$ 는 힘의 총합이다.
오일러의 식은 쿼드로터에 적용되는 총 토크를 준다.

$m_B = [m_x, m_y, m_z]^T$ 은 총 토크의 합이고 I 는 사선의

관성 좌표이다.

2.3.2 Euler Rates

So, the dynamic model of the quadrotor in the body frame is:

$$\begin{cases} f_x = m(\dot{u} + qw - rv) \\ f_y = m(\dot{v} - pw + ru) \\ f_z = m(\dot{w} + pv - qu) \\ m_x = \dot{p}I_x - qrI_y + prI_z \\ m_y = \dot{q}I_y + prI_x - prI_z \\ m_z = \dot{r}I_z - pqI_x + pqI_y \end{cases}$$

The equations stand as long as we assume that the origin and the axes of the body frame coincide with the barycenter of the quadrotor and the principal axes.

동체좌표계에서 쿼드로터의 동적인 모델은 아래와 같다

$$\begin{cases} f_x = m(\dot{u} + qw - rv) \\ f_y = m(\dot{v} - pw + ru) \\ f_z = m(\dot{w} + pv - qu) \\ m_x = \dot{p}I_x - qrI_y + prI_z \\ m_y = \dot{q}I_y + prI_x - prI_z \\ m_z = \dot{r}I_z - pqI_x + pqI_y \end{cases}$$

이 방정식은 동체좌표계와 쿼드로터의 중심 및 주축이 일치하는 것을 가정한다.

2.4 힘과 모멘트

2.4 Forces and moments

The external forces in the body frame, \mathbf{f}_B are given by:

$$\mathbf{f}_B = mg\mathbf{R}^T \cdot \hat{\mathbf{e}}_z - f_t\hat{\mathbf{e}}_3 + \mathbf{f}_w, \quad (2.12)$$

where $\hat{\mathbf{e}}_z$ is the unit vector in the inertial z axis, $\hat{\mathbf{e}}_3$ is the unit vector in the body z axis, g is the gravitational acceleration, f_t is the total thrust generated by rotors and $\mathbf{f}_w = [f_{wx} \ f_{wy} \ f_{wz}]^T \in \mathbb{R}^3$ are the forces produced by wind on the quadrotors. The external moments in the body frame, \mathbf{m}_B are given by

$$\mathbf{m}_B = \boldsymbol{\tau}_B - \mathbf{g}_a + \boldsymbol{\tau}_w, \quad (2.13)$$

where \mathbf{g}_a represents the gyroscopic moments caused by the combined rotation of the four rotors and the vehicle body, $\boldsymbol{\tau}_B = [\tau_x \ \tau_y \ \tau_z]^T \in \mathbb{R}^3$ are the control torques generated by differences in the rotor speeds and $\boldsymbol{\tau}_w = [\tau_{wx} \ \tau_{wy} \ \tau_{wz}]^T \in \mathbb{R}^3$ are the torques produced by wind on the quadrotors. \mathbf{g}_a is given by

$$\mathbf{g}_a = \sum_{i=1}^4 J_p(\boldsymbol{\omega}_B \wedge \hat{\mathbf{e}}_3)(-1)^{i+1}\Omega_i, \quad (2.14)$$

where J_p is the inertia of each rotor and Ω_i is the angular speed of the i^{th} rotor. According to [18], the J_p term is found to be small and, for this reason, the gyroscopic moments are removed in the controller formulation. In addition, there are numerous aerodynamic and aeroelastic phenomenon that affect the flight of the quadrotor, such as the ground effects: when flying close to the ground (or during the landing stage), the air flow generated by the propellers disturbs the dynamics of the quadrotors. So, the complete dynamic model of the quadrotor in the body frame is obtained substituting the force expression in (2.11):

$$\begin{cases} -mg[s(\theta)] + f_{wx} = m(\dot{u} + qw - rv) \\ mg[c(\theta)s(\phi)] + f_{wy} = m(\dot{v} - pw + ru) \\ mg[c(\theta)c(\phi)] + f_{wz} - f_t = m(\dot{w} + pv - qu) \\ \tau_x + \tau_{wx} = \dot{p}I_x - qrI_y + qrI_z \\ \tau_y + \tau_{wy} = \dot{q}I_y + prI_x - prI_z \\ \tau_z + \tau_{wz} = \dot{r}I_z - pqI_x + pqI_y \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -g \sin \theta \\ g \cos \theta \sin \phi \\ g \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (7)$$

식 (7)에서 관성모멘트 행렬 요소 (I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}) 는 다음과 같이 계산 되어진다.

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{2MR^2}{5} + 2l^2m_r \quad (8)$$

$$I_{zz} = \frac{2MR^2}{5} + 4l^2m_r$$

M 은 멀티로터 무게, R 은 멀티로터 중심 반지름, l 은 로터와 기체 중심 사이의 거리, m_r 은 로터 하나의 무게이다. 식 (6)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} qr \\ \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} pr \\ \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} pq \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} \tau_\phi \\ \frac{1}{I_{yy}} \tau_\theta \\ \frac{1}{I_{zz}} \tau_\psi \end{bmatrix} \quad (9)$$

2.5 Actuator dynamics

Here we consider the inputs that can be applied to the system in order to control the behavior of the quadrotor. The rotors are four and the degrees of freedom we control are as many: commonly, the control inputs that are considered are one for the vertical thrust and one for each of the angular motions. Let us consider the values of the input forces and torques proportional to the squared speeds of the rotors [19]; their values are the following:

$$\begin{cases} f_t = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ \tau_x = bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ \tau_y = bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ \tau_z = d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2) \end{cases} \quad (2.16)$$

where l is the distance between any rotor and the center of the drone, b is the thrust factor and d is the drag factor. Substituting (2.16) in (2.15), we have: So, the dynamic model of the quadrotor in the body frame is:

$$\begin{cases} -mg[s(\theta)] + f_{wx} = m(\dot{u} + qw - rv) \\ mg[c(\theta)s(\phi)] + f_{wy} = m(\dot{v} - pw + ru) \\ mg[c(\theta)c(\phi)] + f_{wz} - b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) = m(\dot{w} + pv - qu) \\ bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) + \tau_{wx} = \dot{p}I_x - qrI_y + qrI_z \\ bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) + \tau_{wy} = \dot{q}I_y + prI_x - prI_z \\ d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2) + \tau_{wz} = \dot{r}I_z - pqI_x + pqI_y \end{cases} \quad (2.17)$$

2.6 State-space model

$$\mathbf{x} = [\phi \ \theta \ \psi \ p \ q \ r \ u \ v \ w \ x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^{12}$$

$$\begin{cases} \dot{\phi} = p + r[c(\phi)t(\theta)] + q[s(\phi)t(\theta)] \\ \dot{\theta} = q[c(\phi)] - r[s(\phi)] \\ \dot{\psi} = r\frac{c(\phi)}{c(\theta)} + q\frac{s(\phi)}{c(\theta)} \\ \dot{p} = \frac{I_y - I_z}{I_x}rq + \frac{\tau_x + \tau_{wx}}{I_x} \\ \dot{q} = \frac{I_x - I_z}{I_y}pr + \frac{\tau_y + \tau_{wy}}{I_y} \\ \dot{r} = \frac{I_x - I_y}{I_z}pq + \frac{\tau_z + \tau_{wz}}{I_z} \\ \dot{u} = rv - qw - g[s(\theta)] + \frac{f_{wx}}{m} \\ \dot{v} = pw - ru + g[s(\phi)c(\theta)] + \frac{f_{wy}}{m} \\ \dot{w} = qu - pv + g[c(\theta)c(\phi)] + \frac{f_{wz} - f_t}{m} \\ \dot{x} = w[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)] - v[c(\phi)s(\psi) - c(\psi)s(\phi)s(\theta)] + u[c(\psi)c(\theta)] \\ \dot{y} = v[c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\psi)s(\theta)] - w[c(\psi)s(\phi) - c(\phi)s(\psi)s(\theta)] + u[c(\theta)s(\psi)] \\ \dot{z} = w[c(\phi)c(\theta)] - u[s(\theta)] + v[c(\theta)s(\phi)] \end{cases} \quad (2.19)$$

2.6 State–space model

$$\mathbf{x} = [\phi \quad \theta \quad \psi \quad p \quad q \quad r \quad u \quad v \quad w \quad x \quad y \quad z]^T \in \mathbb{R}^{12}$$

Below we obtain two alternative forms of the dynamical model useful for studying the control. From Newton's law we can write:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{f}_B = mg\hat{\mathbf{e}}_z - f_l \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3, \quad (2.20)$$

therefore:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{f_l}{m}[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)] \\ \ddot{y} = -\frac{f_l}{m}[c(\phi)s(\psi)s(\theta) - c(\psi)s(\phi)] \\ \ddot{z} = g - \frac{f_l}{m}[c(\phi)c(\theta)] \end{cases} \quad (2.21)$$

Now a simplification is made by setting $[\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T = [p \quad q \quad r]^T$. This assumption holds true for small angles of movement [11]. So, the dynamic model of the quadrotor in the inertial frame is:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{f_l}{m}[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)] \\ \ddot{y} = -\frac{f_l}{m}[c(\phi)s(\psi)s(\theta) - c(\psi)s(\phi)] \\ \ddot{z} = g - \frac{f_l}{m}[c(\phi)c(\theta)] \\ \ddot{\phi} = \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{\tau_x}{I_x} \\ \ddot{\theta} = \frac{I_x - I_z}{I_y} \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{\tau_y}{I_y} \\ \ddot{\psi} = \frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{\tau_z}{I_z} \end{cases} \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} qr \\ \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} pr \\ \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} pq \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} \tau_\phi \\ \frac{1}{I_{yy}} \tau_\theta \\ \frac{1}{I_{zz}} \tau_\psi \end{bmatrix}$$

2.6 State–space model

$$\mathbf{x} = [\phi \ \theta \ \psi \ p \ q \ r \ u \ v \ w \ x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^{12}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^4 \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) u_i, \quad (2.24)$$

where

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ q \frac{s(\phi)}{c(\theta)} + r \frac{c(\phi)}{c(\theta)} \\ q[c(\phi)] - r[s(\phi)] \\ p + q[s(\phi)t(\theta)] + r[c(\phi)t(\theta)] \\ 0 \\ 0 \\ g \\ \frac{(I_x - I_z)}{I_x} qr \\ \frac{(I_x - I_z)}{I_y} pr \\ \frac{(I_x - I_y)}{I_z} rv \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ g_1^7 \ g_1^8 \ g_1^9 \ 0 \ 0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^{12},$$

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{I_x} \ 0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^{12},$$

$$\mathbf{g}_3(\mathbf{x}) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{I_y} \ 0]^T \in \mathbb{R}^{12},$$

$$\mathbf{g}_4(\mathbf{x}) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{I_z}]^T \in \mathbb{R}^{12},$$

with

$$g_1^7 = -\frac{1}{m}[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)],$$

$$g_1^8 = -\frac{1}{m}[c(\psi)s(\phi) - c(\phi)s(\psi)s(\theta)],$$

$$g_1^9 = -\frac{1}{m}[c(\phi)c(\theta)].$$

2.7 Linear model

Set \mathbf{u} the control vector: $\mathbf{u} = [f_t \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z]^T \in \mathbb{R}^4$. The linearization's procedure is developed around an equilibrium point $\bar{\mathbf{x}}$, which for fixed input $\bar{\mathbf{u}}$ is the solution of the algebraic system: or rather that value of state's vector, which on fixed constant input is the solution of algebraic system:

$$\hat{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}. \quad (2.26)$$

Since the function $\hat{\mathbf{f}}$ is nonlinear, problems related to the existence and uniqueness of the solution of system (2.26) arise. In particular, for the system in hand, the solution is difficult to find in closed form because of trigonometric functions related each other in a non-elementary way. For this reason, the linearization is performed on a simplified model called *to small oscillations*. This simplification is made by approximating the sine function with its argument and the cosine function with unity. The approximation is valid if the argument is small. The resulting system is described by the following equations:

$$\begin{cases} \dot{\phi} \approx p + r\theta + q\phi\theta \\ \dot{\theta} \approx q - r\phi \\ \dot{\psi} \approx r + q\phi \\ \dot{p} \approx \frac{I_y - I_x}{I_z} r q + \frac{\tau_x + \tau_{wx}}{I_z} \\ \dot{q} \approx \frac{I_x - I_y}{I_z} p r + \frac{\tau_y + \tau_{wy}}{I_z} \\ \dot{r} \approx \frac{I_x - I_y}{I_z} p q + \frac{\tau_x + \tau_{wx}}{I_z} \\ \dot{u} \approx r v - q w - g\theta + \frac{f_{wx}}{m} \\ \dot{v} \approx p w - r u + g\phi + \frac{f_{wy}}{m} \\ \dot{w} \approx q u - p v + g + \frac{f_{wz} - f_t}{m} \\ \dot{x} \approx w(\phi\psi + \theta) - v(\psi - \phi\theta) + u \\ \dot{y} \approx v(1 + \phi\psi\theta) - w(\phi - \psi\theta) + u\psi \\ \dot{z} \approx w - u\theta + v\phi \end{cases} \quad (2.27)$$

which can be written in the compact form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (2.28)$$

2.7 Linear model

As said above, in order to perform the linearization, an equilibrium point is needed. Such an equilibrium point can be:

$$\bar{\mathbf{x}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{x} \ \bar{y} \ \bar{z}]^T \in \mathbb{R}^{12}. \quad (2.29)$$

From the equations, we can find that the equilibrium point (2.29) is obtained by the constant input value:

$$\bar{\mathbf{u}} = [mg \ 0 \ 0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^4. \quad (2.30)$$

2.7 Linear model

Note that this particular value represents the force necessary to delete the quadrotor's weight and it consents its hovering. After determined the equilibrium point $\bar{\mathbf{x}}$ and the corresponding nominal input $\bar{\mathbf{u}}$, we have that the matrices associated to the linear system are given by relations:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

If we consider the disturbance by wind, set:

$$\mathbf{d} = [f_{wx} \quad f_{wy} \quad f_{wz} \quad \tau_{wx} \quad \tau_{wy} \quad \tau_{wz}]^T \in \mathbb{R}^6 \quad (2.33)$$

$$\mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

2.7 Linear model

the linear model is:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{d} \tag{2.35}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi} = p \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{\psi} = r \\ \dot{p} = \frac{\tau_x + \tau_{wx}}{I_x} \\ \dot{q} = \frac{\tau_y + \tau_{wy}}{I_y} \\ \dot{r} = \frac{\tau_z + \tau_{wz}}{I_z} \\ \dot{u} = -g\theta + \frac{f_{wx}}{m} \\ \dot{v} = g\phi + \frac{f_{wy}}{m} \\ \dot{w} = \frac{f_{wz} - f_z}{m} \\ \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = w \end{array} \right. \tag{2.36}$$

2.6 State-space model

$$\mathbf{x} = [\phi \ \theta \ \psi \ p \ q \ r \ u \ v \ w \ x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^{12}$$

여기서 $\mathbf{m}^b = (\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi)^T$ 멀티로터 동체좌표에
서의 토크를 나타낸다. 이제까지 도출된 운동학
수식과 운동역학 수식을 이용하고, 회전운동이 크
지 않다는 가정을 적용하여 최종적인 6 자유도의
운동방정식은 다음과 같이 표현된다.^(5,12)

$$\begin{cases} \ddot{p}_n = -(c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi) \frac{1}{m} F \\ \ddot{p}_e = -(c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi) \frac{1}{m} F \\ \ddot{p}_d = g - (c\phi c\theta) \frac{1}{m} F \\ \ddot{\phi} = \dot{\theta} \dot{\psi} \left(\frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \right) + \frac{J_r}{I_{xx}} \dot{\theta} \Omega_r + \frac{1}{I_{xx}} \tau_\phi \\ \ddot{\theta} = \dot{\phi} \dot{\psi} \left(\frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{yy}} \right) - \frac{J_r}{I_{yy}} \dot{\phi} \Omega_r + \frac{1}{I_{yy}} \tau_\theta \\ \ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \right) + \frac{1}{I_{zz}} \tau_\psi \end{cases} \quad (10)$$

여기서 J_r 은 로터의 관성모멘트, Ω_r 는 프로펠러 회
전속도이며, $(J_r \dot{\theta} \Omega_r, J_r \dot{\phi} \Omega_r)$ 항목은 프로펠러 회
전으로 인한 자이로효과(Gyroscopic Effect)를 나타낸
다. 멀티로터의 기본적인 수학적 모델링은 식 (10)으
로 표현될 수 있지만, 멀티로터의 형상에 따라서 각
모터에서 나오는 힘과 모멘트의 관계식의 차이가 존
재한다. 따라서 다음 장에서 이러한 각각의 트라이
로터(Tri-Rotor), 쿼드로터(Quad-Rotor), 헥사로터
(Hexa-Rotor), 옥토로터(Octo-Rotor)로 나누어 비행운
동을 위한 힘과 모멘트의 수식을 유도하기로 한다.

2.6 State-space model

$$\mathbf{x} = [\phi \ \theta \ \psi \ p \ q \ r \ u \ v \ w \ x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^{12}$$

$$\begin{bmatrix} F \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = A_Q \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}$$

그리고

$$A_Q = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ 0 & -lk_1 & 0 & lk_1 \\ lk_1 & 0 & -lk_1 & 0 \\ -k_2 & k_2 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

쿼드로터의 한 로터에서부터 나오는 추력과 모멘트는 $F_i = k_1 \omega_i^2, \tau_i = k_2 \omega_i^2 (i=1, 2, 3, 4)$ 로써 구해진다. k_1, k_2 는 실험으로 얻어지는 상수 값이다.

실제적으로 쿼드로터의 모션제어를 위해서 모터의 개별적인 회전속도를 구해야 하며, 이를 위해 정방행렬 A_Q 의 역행렬을 직접적으로 구해서 얻을 수 있다. 최종적으로 각 모터의 회전 속도를 위한 제어 입력 값은 식 (12)와 같다.

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} = A_Q^{-1} \begin{bmatrix} F \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} \quad (12)$$

$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ 는 전체 추력을 나타내며, τ_ϕ 는 롤토크(Roll Torque), τ_θ 는 피치토크(Pitch Torque), τ_ψ 는 요토크(Yaw Torque)이다.

2.3.3 Quaternions

An alternative way of parametrizing the rotation matrix is by using quaternions. The quaternion has its basis in the Euler axis/angle representation. The Euler axis/angle parametrization is a unit vector (e) orthogonal to the plane of rotation and an angle (θ). The direction of the vector gives the direction of the rotation and the angle the amplitude of the rotation.

Quaternions are similar but the rotation axis and angle have been combined to a single 4 dimensional vector of unit length. Three of the dimensions describe the direction of the rotation and the last is used to scale the vector

회전 행렬의 대체 방안으로는 쿼터니온이 있다. 쿼터니온은 오일러 축/각도를 기본으로 가지고 있다.

오일러 축/각도 파라미터화는 수직에서의 각도와 평면의 회전에서의 수직 단위 벡터(e)이다.

벡터의 방향은 회전 방향과 각도 그리고 회전의 크기를 준다.

쿼터니온이 비슷해 보이지만 회전 축과 각도는 단위 길이의 단일 4 차원 벡터의 결합이다.

3개의 차원은 회전방향을 묘사하고 나머지는 벡터의 크기로 사용된다.

2.3.3 Quaternions

The conversions between the Euler axis/angle and the quaternion might help with the understanding. This is shown in Equation 2.11 and 2.12.

$$\mathbf{q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{e} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{q}_{1..3}}{\|\mathbf{q}_{1..3}\|} \quad \theta = 2 \arccos(q_0) \quad (2.12)$$

This definition of the quaternions ensures a unique quaternion for every value of θ in the range of $\pm\pi$ [Stevens and Lewis, 2003, p. 18].

Quaternions can be multiplied together using the quaternion product operation defined as in Equation 2.13 and 2.14 [Stevens and Lewis, 2003] where $*$ denotes the quaternion multiplication.

$$\mathbf{p} * \mathbf{q} \triangleq \mathbf{\Lambda}_p \mathbf{q} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{\Lambda}_p = \begin{bmatrix} p_0 \mathbf{I} - [\mathbf{p}_{1..3} \times] & \mathbf{p}_{1..3} \\ -\mathbf{p}_{1..3}^\top & p_0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Quaternions are not like Euler angles caught in a gimbal lock and the parametrization of the rotational matrix contains no trigonometric functions.

오일러 축/각도 그리고 쿼터니온 사이의 변환이 이해를 도와줄 것이다. 아래의 식 2.11 그리고 2.12

이 쿼터니온의 정의는 $\pm\pi$ 범위에서 모든 θ 값에서 유일한 쿼터니온을 보증한다.

쿼터니온은 쿼터니온 product 연산을 사용해서 곱해진다. 2.13과 2.14에서 $*$ 로 명시된 곱셈을 정의하고 있다.

쿼터니온은 오일러 각에서 생기는 짐볼 락이 없고 회전 행렬의 변환에서 삼각함수를 포함하고 있지 않다.

3 Modelling of a Quadrotor

3.1 How do a Quadrotor Fly?

A quadrotor is equipped with four motors with each a rotor attached. When the rotor spins lift is generated. When the quadrotor is aligned with the horizontal plane and the sum of the lift generated (F_{lift}) is equal to the gravitational force the quadrotor is hovering. If F_{lift} is increased the quadrotor will start to climb, if F_{lift} is decreased the quadrotor will start to decent.

Movement in the horizontal plane is done by tilting the quadrotor in the desired direction. When the quadrotor is tilted the direction of F_{lift} is no longer aligned with the earth frame z-axis but can be dissolved in a z-axis component and a horizontal component as seen in Figure 3.1. The horizontal component result in an acceleration in the horizontal plane.

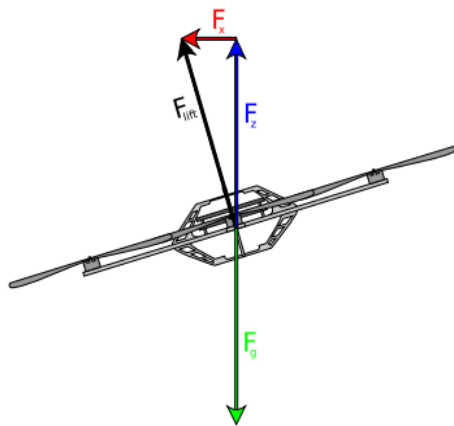


Figure 3.1: F_{lift} dissolved in a z-axis component and a horizontal component

쿼드로터는 각 회전자가 부착된 4개의 모터로 구성되어 있다.

로터가 회전할 때 양력이 만들어진다.

쿼드로터가 수평면과 나란해져 있고 만들어진 양력의 합은 쿼드로터가 정지 중일 때의 중력의 힘과 같다.

수평면에서 움직임은 원하는 방향으로 쿼드로터가 기울어져 있다. 쿼드로터가 양력의 방향으로 기울어져 있을 때 더 이상 관성좌표계 z-축과 평행하진 않지만 Z-축 요소 그리고 그림에서 보이는 평행적인 요소의 합으로 볼 수 있다. 수평적인 요소는 수평면에서의 가속도가 된다.

3 Modelling of a Quadrotor

3.1 How do a Quadrotor Fly?

The rotors spin in opposite direction in pairs as illustrated in Figure 3.2. This is to prevent the quadrotor from spinning around the z-axis as an effect of the counter torque generated by the spinning rotors. When the rotors spin in opposite direction the counter torque is equalized when all rotors rotate with equal speed. It should be noted that, in the following figures, the arrows indicate the direction of the rotation and the size is proportional to the speed of the rotor.

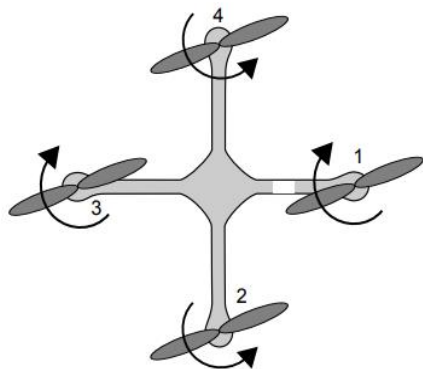


Figure 3.2: Quadrotor in hover

Tilting of the quadrotor is done by altering the speed of the rotors. In the following are the effect of the inputs roll pitch and yaw defined.

그림 3.2에서처럼 pair로 묶여

반대 방향으로 로터들이 회전한다.

로터들이 돌면서 만들어 내는 상대적인 토크의 효과 때문에 Z축으로의 회전으로부터 쿼드로터의 회전을 막을 수 있다.

모든 로터들이 같은 속도로 회전하면서

로터들이 반대 방향으로 돌 때

상대적인 토크는 같아진다.

아래 화살표는 회전방향을 가리키고 길이는 로터의 스피드에 비례한다.

기울어져 있는 쿼드로터는 로터의 스피드가 바뀌어 있다.

3 Modelling of a Quadrotor

3.1 How do a Quadrotor Fly?

Roll is defined as a rotation around the x-axis in the body frame. This is done by increasing the speed of one of the rotors placed along the y-axis and decreasing the speed of the opposite, while maintaining speed on the remaining rotors. Figure 3.3 illustrates the direction of positive roll, which means that rotor 4 increases speed while rotor 2 decreases speed. Note that the white mark indicates the front of the quadrotor.

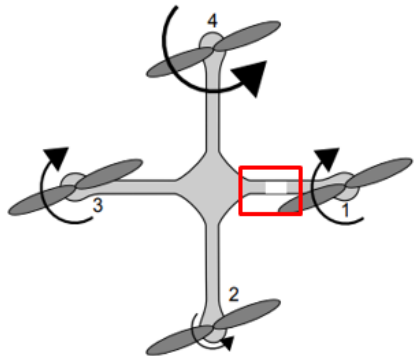


Figure 3.3: Quadrotor performing positive roll

Roll은 동체좌표계에서 x-축 회전으로 정의된다.

Y축에 놓여진 로터의 스피드가 증가하고 반대 로터는 스피드가 감소하면 된다. 반면에, 남아있는 로터들은 스피드를 유지한다.

그림 3.3은 positive roll을 나타낸다. 즉, 로터 4번은 속도 증가 반면 로터 2번은 속도 감소이다.

명심해라. 흰 표시는 쿼드 로터의 앞면을 나타낸다.

3 Modelling of a Quadrotor

3.1 How do a Quadrotor Fly?

Pitch is defined as the rotation around the y-axis in the body frame. The rotation is done by increasing the speed on one of the rotors placed along the x-axis and decreasing the thrust on the opposite rotor, while maintaining speed on the remaining rotors. The positive pitch is illustrated in Figure 3.4, where rotor 1 increases speed while rotor 3 decreases speed.

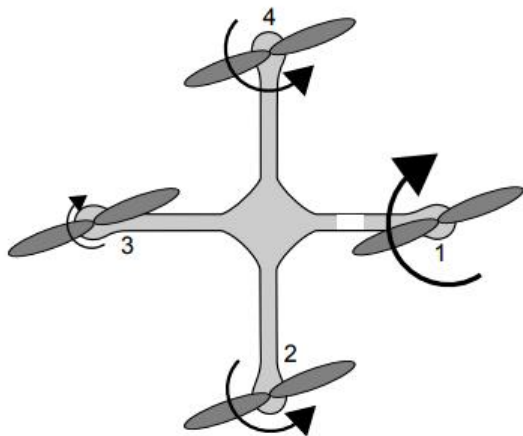


Figure 3.4: Quadrotor performing positive pitch

Pitch는 동체좌표계에서 y-축의 회전으로 정의된다.

이 회전은 x-축에 놓인 로터의 스피드 증가에 의해

나타나고 반대 로터에서의 추력은 감소하면서 발생한다.

반면에, 남아있는 로터들의 속도는 유지한다.

그림 3.4는 positive pitch이며 로터 1번의 속도는 증가하고

반면에 로터 3번은 감소한다.

3 Modelling of a Quadrotor

3.1 How do a Quadrotor Fly?

Yaw is defined as the rotation around the z-axis in the body frame. Yaw is done by altering speed of the rotors along the x-axis compared to the speed on the rotors along the y-axis. The resulting counter torque generated by the rotors will no longer be zero and will result in a rotation around the z-axis. If the rotors on the y-axis are rotating faster than the rotors on the x-axis the body will rotate clockwise (positive yaw) as illustrated in Figure 3.5.

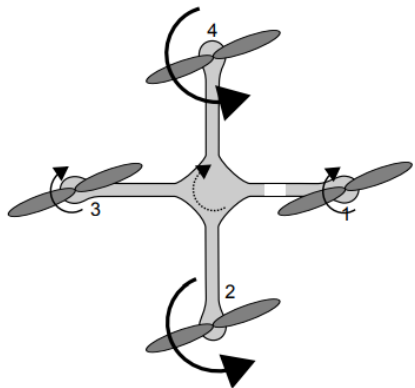


Figure 3.5: Diagram of a quadrotor performing a positive yaw motion

Yaw는 동체좌표계에서 z-축 회전으로 정의된다.

Yaw는 x-축 로터의 속도와 상대적인 y-축 로터의 속도를 바꾸면서 발생한다.

로터에 의해 만들어진 상대적인 토크는 더 이상 0이 아니고 이것으로 z-축의 회전이라는 결과가 생긴다.

만약 y-축에 있는 로터들이 x축보다 더 빠르게 회전한다면 몸체는 시계방향(positive yaw)으로 회전 할 것이다.

토크는 회전하는 힘! -> 즉 회전 방향으로