Switch-Mode Power Supplies

2.Small Signal Modeling

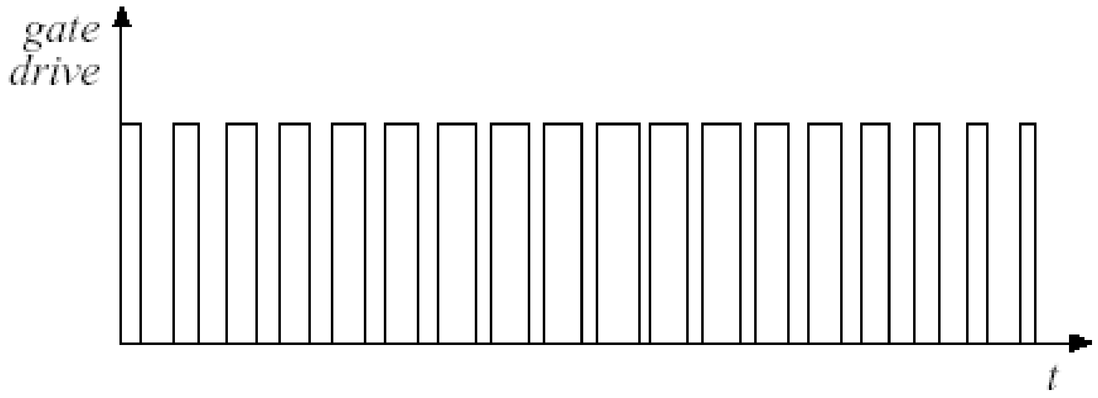
State Space Analysis

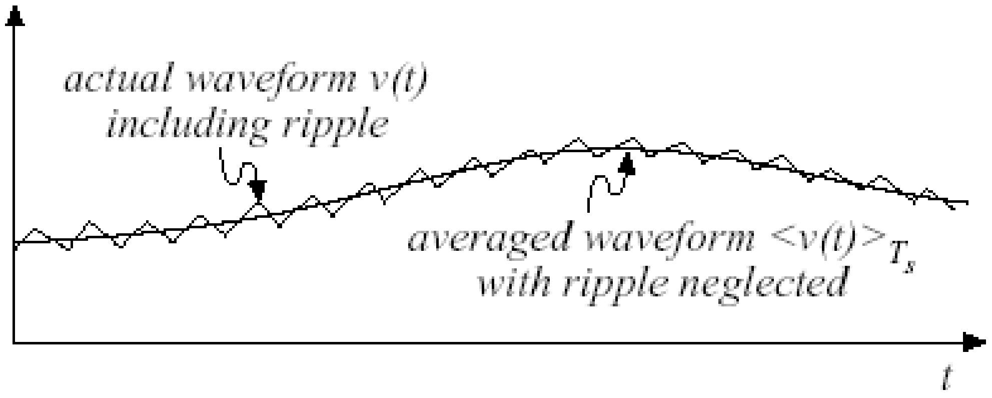
- 모델링 : 물리적인 현상의 특성을 수학적으로 표현하는 것.
  주로 중요한 부분만을 표현하고, 작고 복잡한 부분은 근사화하여 무시한다.
  예) F = ma
- 목적 : 설계한 시스템의 안정도를 파악

평균화 모델

- 시 비율 변조
  $d(t) = D_0 + \ D_{mod} sin\omega_{mod} t$
  $(when\ \omega_{mod} \ll \omega_{sw}\ )$
- 스위치의 맥동을 무시하여 시뮬레이션에 걸리는 시간을 줄임
- *평균자*

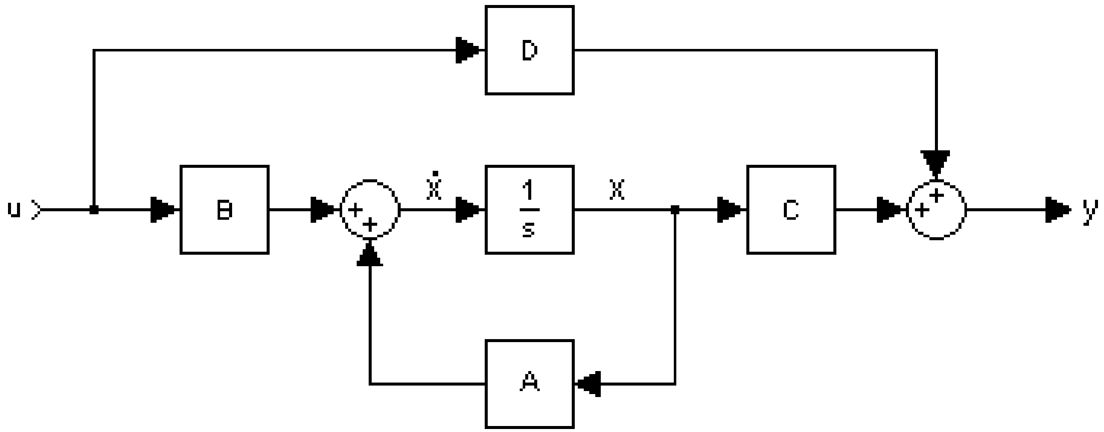
$$< v(t) >_{T_s} = \frac{1}{T_s}\int_{t}^{t+T_s} v(\tau)d\tau$$





State Space Equation

- u(t) : 제어벡터
- x(t) : 상태벡터
- $\dot{x}(t)$: 상태벡터 x(t)의 시간 미분치
- y(t) : 출력벡터
- A : 상태 행렬
- B : 입력 행렬
- C : 출력 행렬
- D : 피드 포워드 행렬



LTI System 에서의 상태 공간 Block Diagram

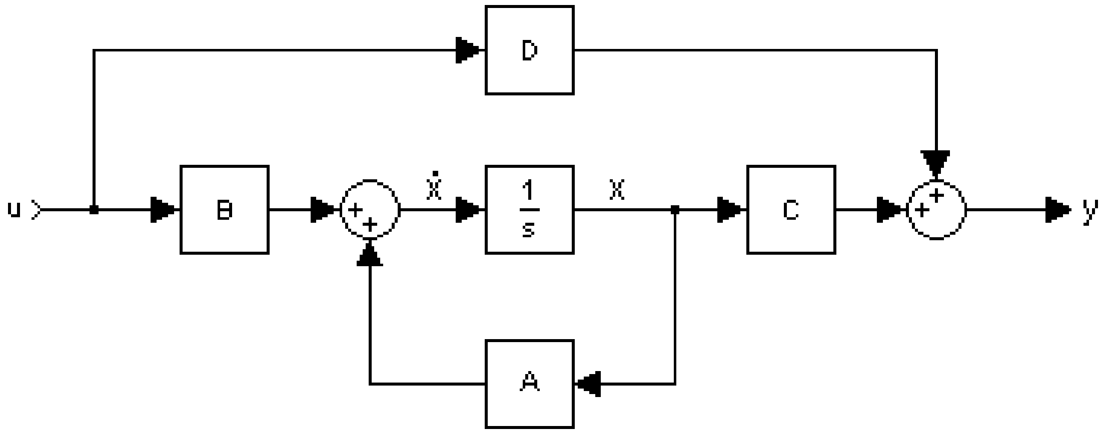
State Space Equation

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{B}u$$
$$y(t) = \boldsymbol{C}x(t) + \boldsymbol{D}u(t)$$

Laplas Transform (X(0) = 0)

$$sX(s) = \boldsymbol{A}X(s) + \boldsymbol{B}U(s)$$
$$Y(s) = \boldsymbol{C}X(s) + \boldsymbol{D}U(s)$$

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})X(s) = \boldsymbol{B}U(s)$$
$$X(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(s)$$
$$Y(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(s) + \boldsymbol{D}U(s)$$
$$Y(s) = [\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}]U(s)$$
$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$



LTI System 에서의 상태 공간 Block Diagram

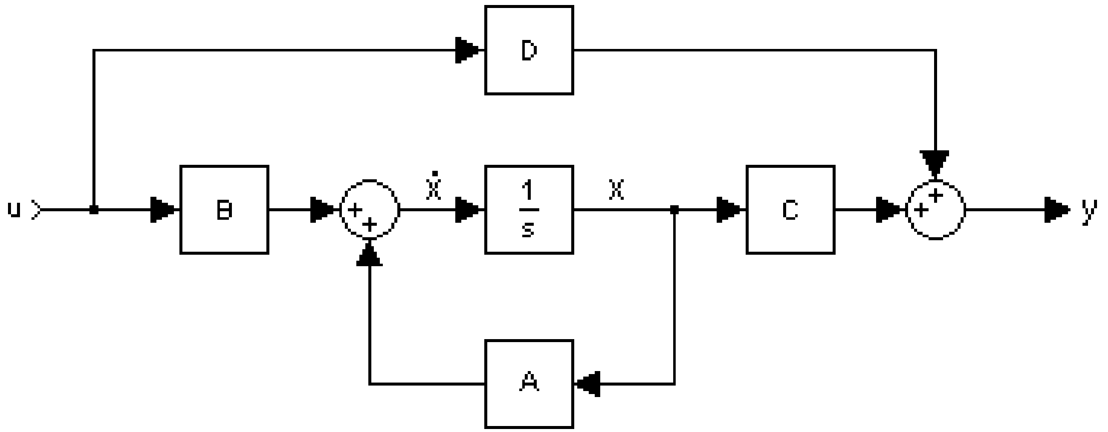
State Space Equation

$T(s)$: 전달함수
$T(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$

$\det\left((sI - A)^{-1}\right) = 0$ 특성 방정식

$\det\left((sI - A)^{-1}\right)$ = 0 의 근

=> 전달함수의 pole값



LTI System 에서의 상태 공간 Block Diagram

poles and zeros

- 아래와 같은 전달함수를 가정

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$= \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{(s - z_1)\cdots(s - z_m)}{(s - p_1)\cdots(s - p_n)}$$

- zeros : $z_1, z_2, \dots, z_m$
  poles : $p_1, p_2, \dots, p_n$
- 위의 전달함수를 주파수 형태로 작성해보자

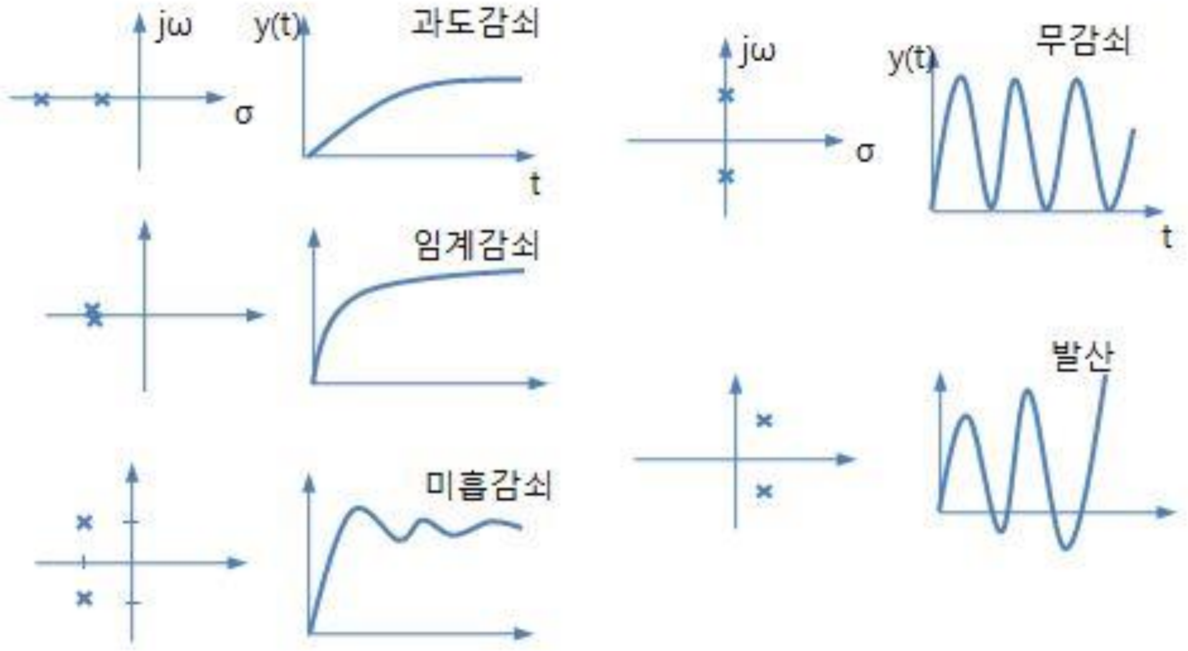
- $H(jw) = \frac{(\omega - z_1)\dots(\omega - z_m)}{(\omega - p_1)\dots(\omega - p_n)}$

주파수가 $\omega = z_1, z_2,\ \dots\ ,\ z_m$ 일 때, 시스템 응답 $H(j\omega) = 0$ 이 된다.
즉, zeros는 차단 주파수를 의미함.

poles and zeros

- $H(jw) = \frac{(\omega - z_1)\ldots(\omega - z_m)}{(\omega - p_1)\ldots(\omega - p_n)}$

반면, $\omega = p_1, p_2, \ \ldots\ , \ p_n$ 이라고 하면, $H(j\omega) = \ \infty$ 으로 발산하게 된다.



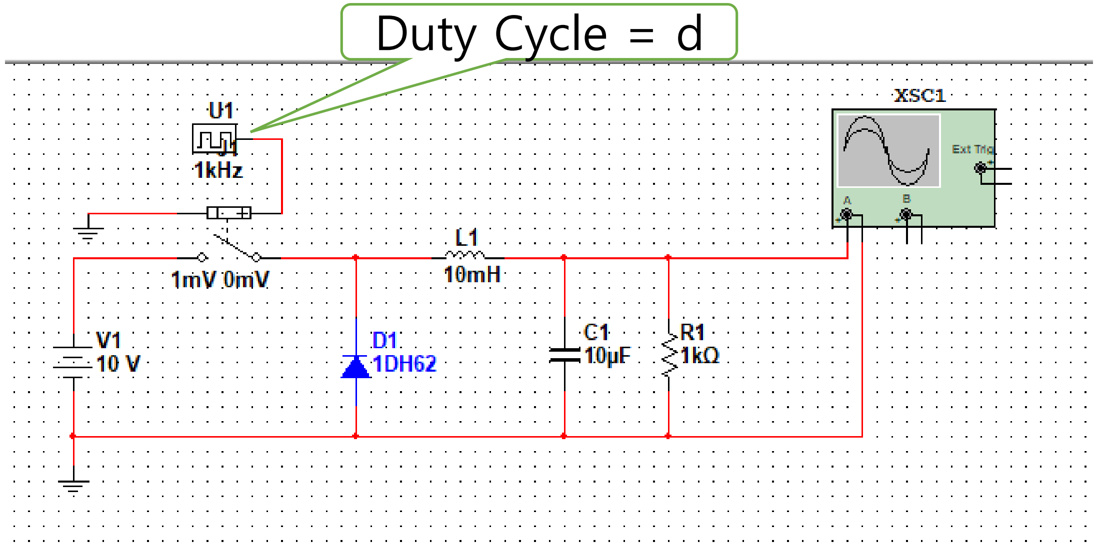
Routh-Hurwitz 판별식

특성 방정식 :

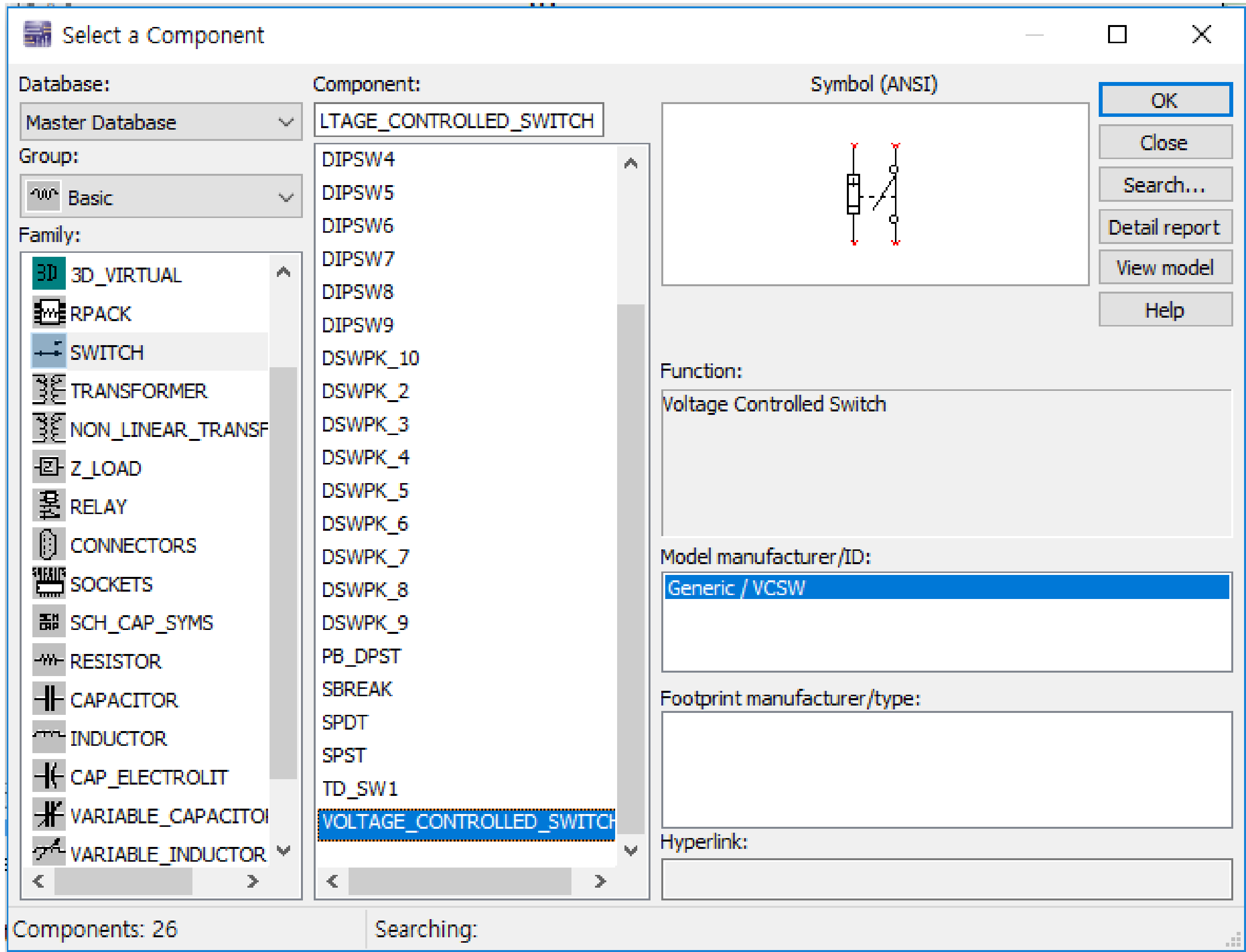
$$As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E = 0$$

s^4	A	C	E
s^3	B	D	0+
s^2	$\frac{BC - AD}{B}$	$\frac{DE - C0}{D} = \mathrm{E}$	0+
s^1	$\frac{\frac{BC-AD}{B}D - BE}{\frac{BC-AD}{B}} = \frac{BCD - AD^2 - EB^2}{BC - AD}$	0+	0+
s^0	E	0+	0+

Buck Converter – SSA



- MultiSIM 스위칭 소자 위치

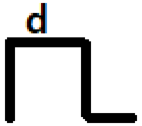


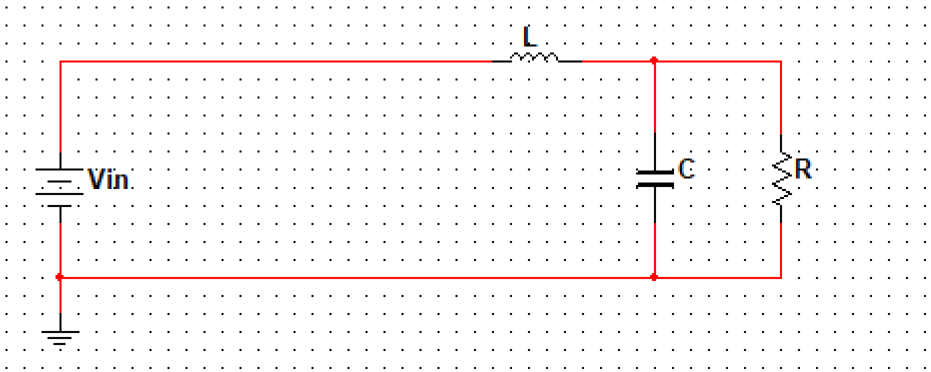
Buck Converter – SSA

- SSA(State Space Averaging)
- 벅 컨버터는 스위치 상태에 따라 크게 2가지 상태가 있다.
- 각각의 상태에 대해 노드방정식을 세워 상태공간을 정의한다.
- 두 가지 상태공간을 취합하여 평균화 모델을 구한다.

Buck Converter – SSA

- Switch On





$$V_L = L\frac{dI_L}{dt}$$

$$I_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

$$V_{in} = V_L + V_C \quad \text{(KVL)}$$

$$= L\frac{dI_L}{dt} + V_C$$

$$I_L = I_C + I_R \quad \text{(KCL)}$$

$$= C\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{R}$$

상태 공간 방정식에서

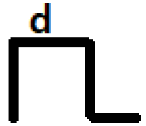
$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{B}u$$

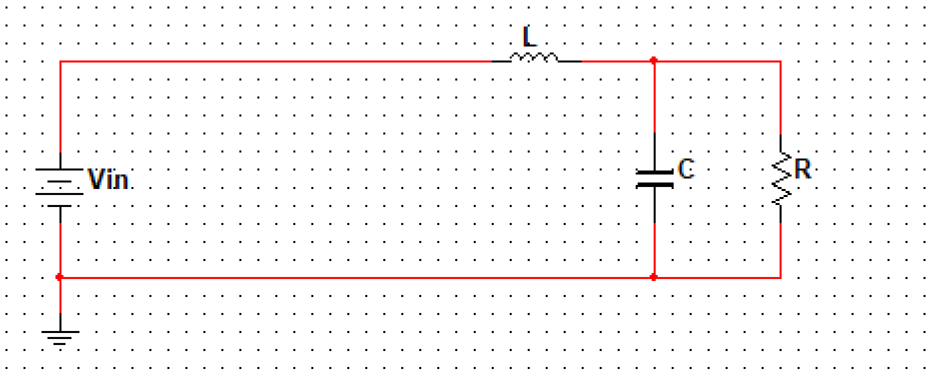
$$y(t) = \boldsymbol{C}x(t) + \boldsymbol{D}u(t)$$

이므로, 위 방정식의 포맷에 맞춰 상태벡터를 정의한다.

Buck Converter – SSA

- Switch On





$$V_L = L\frac{dI_L}{dt}$$

$$I_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{B}u$$
$$y(t) = \boldsymbol{C}x(t) + \boldsymbol{D}u(t)$$

$$V_{in} = L\frac{dI_L}{dt} + V_C$$

$$I_L = C\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{R}$$

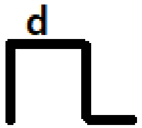
상태방정식은 상태벡터의 미분항을 포함하고 있으므로, 아래와 같이 정의한다.

$$x_1(t) = I_L$$
$$x_2(t) = V_C$$
$$u_1(t) = V_{in}$$
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

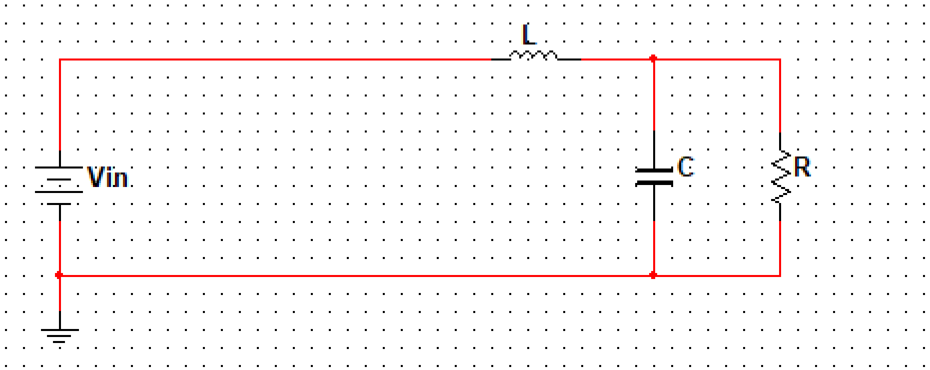
상태벡터를 기반으로 노드 방정식을 다시 작성하면,

Buck Converter – SSA

- Switch On



$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{B}u(t)$$
$$y(t) = \boldsymbol{C}x(t) + \boldsymbol{D}u(t)$$



$$u_1(t) = L\dot{x}_1(t) + x_2(t)$$

$$x_1(t) = C\dot{x}_2(t) + \frac{x_2(t)}{R}$$

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u_1(t)$$

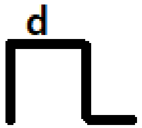
$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C}x_1(t) - \frac{1}{RC}x_2(t)$$

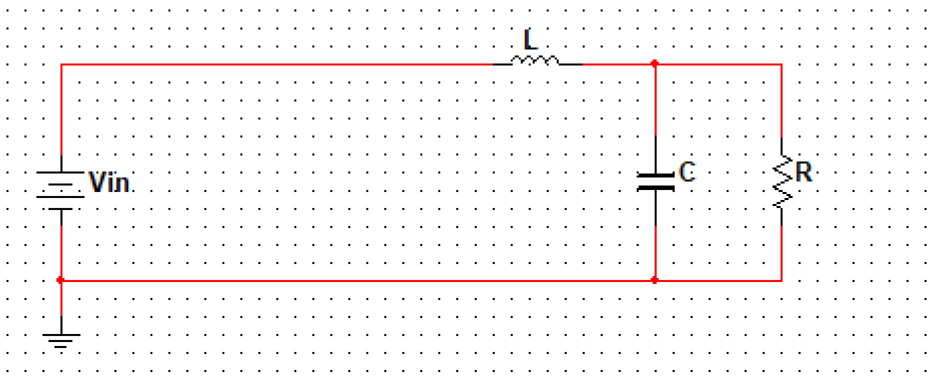
$$V_L = L\frac{dI_L}{dt}$$

$$I_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

Buck Converter – SSA

- Switch On





$$V_L = L\frac{dI_L}{dt}$$

$$I_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C}x_1(t) - \frac{1}{RC}x_2(t)$$

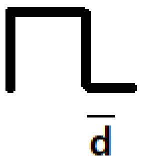
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{L} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}$$

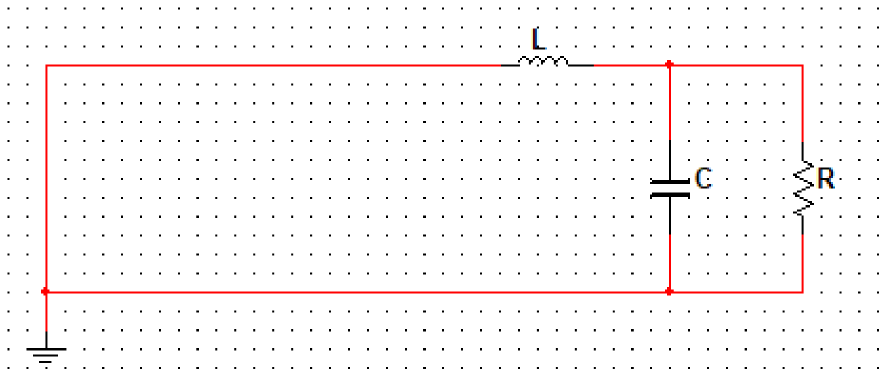
따라서

$$A_1 = \begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC}\end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{L} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Buck Converter – SSA

- Switch Off





$$V_L = L\frac{dI_L}{dt}$$

$$I_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

Switch On상태와 마찬가지로

$$0 = L\frac{dI_L}{dt} + V_C \qquad \text{(KVL)}$$

$$I_L = C\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{R} \qquad \text{(KCL)}$$

상태 공간 방정식에서

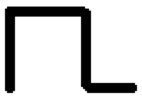
$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{B}u(t)$$

$$y(t) = \boldsymbol{C}x(t) + \boldsymbol{D}u(t)$$

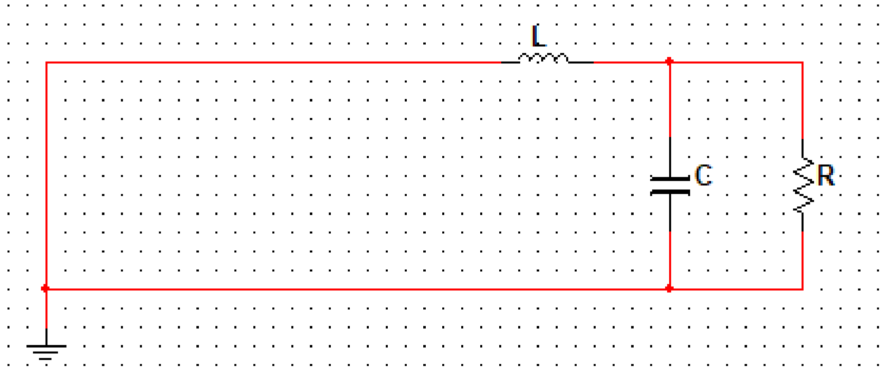
이므로, 위 방정식의 포맷에 맞춰 상태벡터를 정의한다.

Buck Converter – SSA

- Switch Off



$\overline{\mathbf{d}}$



$$V_L = L\frac{dI_L}{dt}$$

$$I_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{B}u$$
$$y(t) = \boldsymbol{C}x(t) + \boldsymbol{D}u(t)$$

$$0 = L\frac{dI_L}{dt} + V_C$$

$$I_L = C\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{R}$$

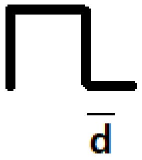
상태방정식은 상태벡터의 미분항을 포함하고 있으므로, 아래와 같이 정의한다.

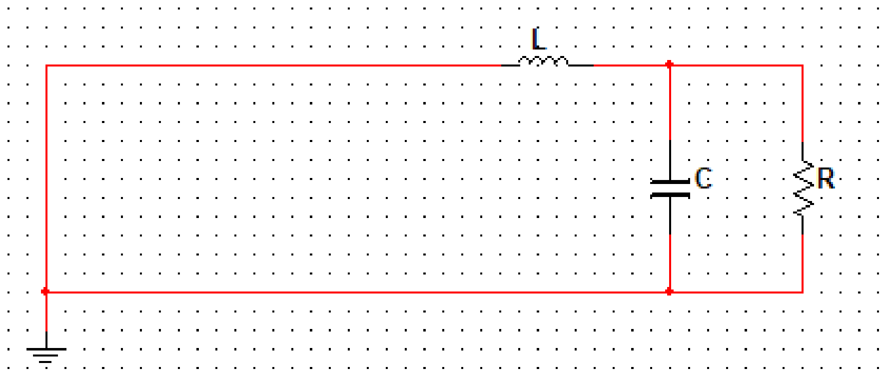
$$x_1(t) = I_L$$
$$x_2(t) = V_C$$
$$u_1(t) = 0$$
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

상태벡터를 기반으로 노드 방정식을 다시 작성하면,

Buck Converter – SSA

- Switch Off





$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{B}u(t)$$
$$y(t) = \boldsymbol{C}x(t) + \boldsymbol{D}u(t)$$

$$0 = L\dot{x}_1(t) + x_2(t)$$

$$x_1(t) = C\dot{x}_2(t) + \frac{x_2(t)}{R}$$

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{L}x_2(t)$$

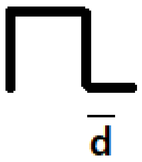
$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C}x_1(t) - \frac{1}{RC}x_2(t)$$

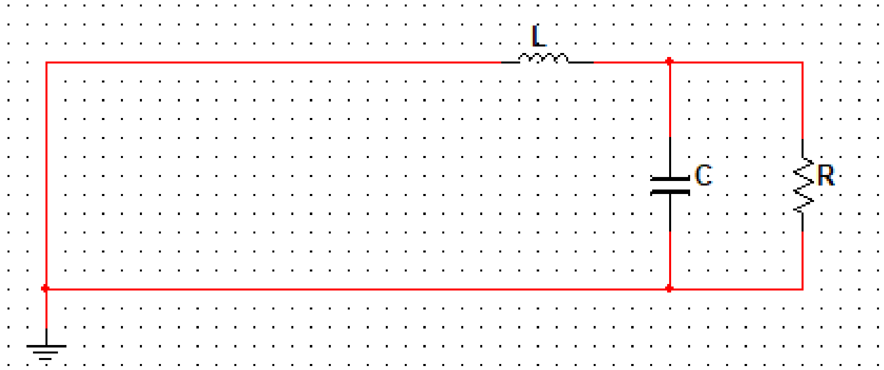
$$V_L = L\frac{dI_L}{dt}$$

$$I_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

Buck Converter – SSA

- Switch Off





$$V_L = L\frac{dI_L}{dt}$$

$$I_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{L}x_2(t)$$

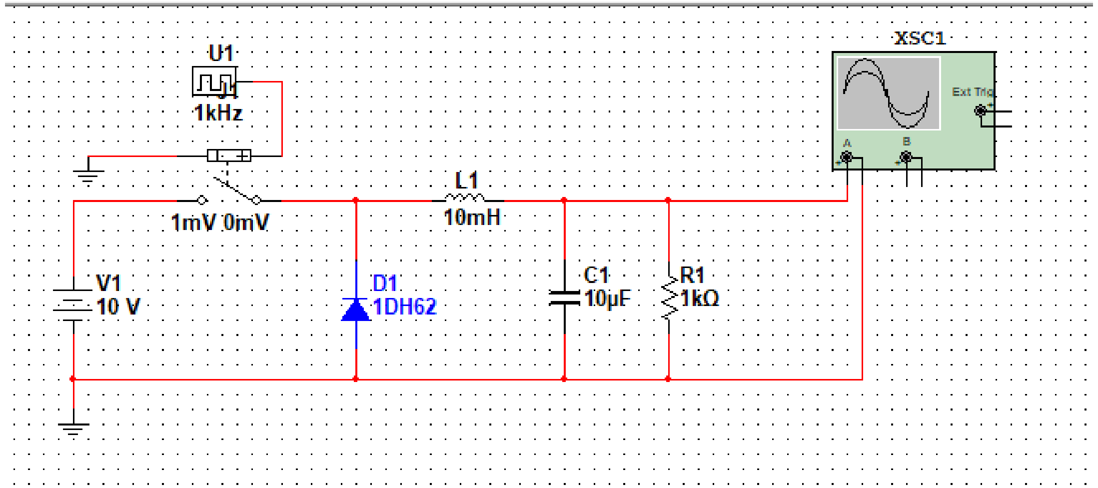
$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C}x_1(t) - \frac{1}{RC}x_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

따라서

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Buck Converter – SSA



$T_{on} = d$
$T_{off} = 1 - d$

이고, 스위치가 On 되어 있는 동안의 상태행렬과 입력행렬이

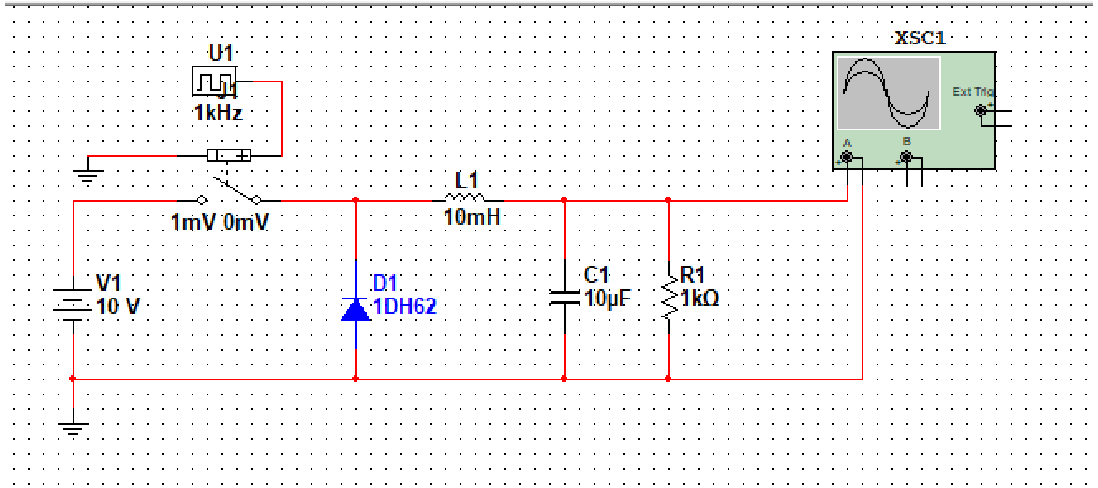
$$\boldsymbol{A_1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

스위치가 Off되어 있는 동안은

$$\boldsymbol{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로

Buck Converter – SSA



$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_1}d + \boldsymbol{A_2}(1-d)$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B_1}d + \boldsymbol{B_2}(1-d)$$

이고, 수식을 정리하면

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{d}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

가 된다.

$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{B}u(t)$ 이고,

$x_1(t) = I_L$

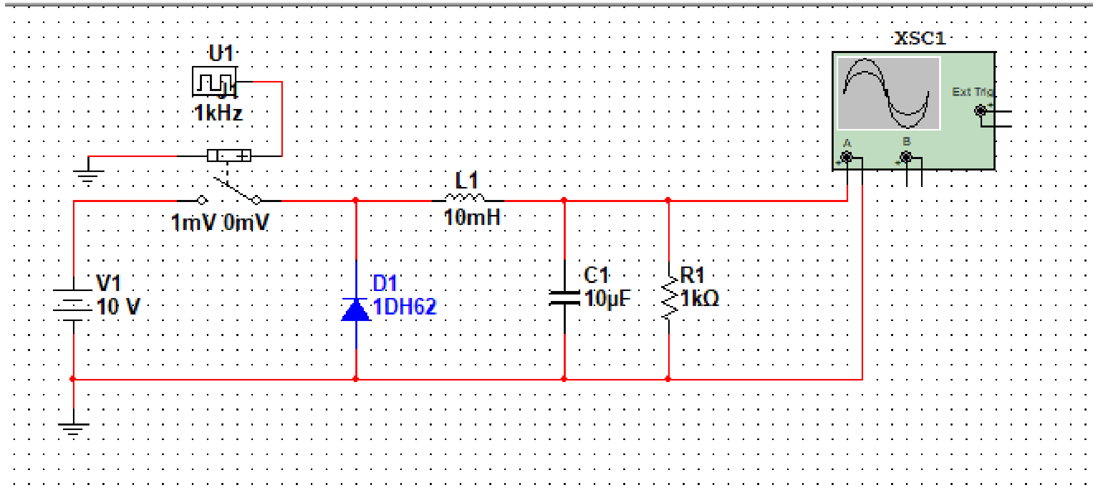
$x_2(t) = V_C$

$u_1(t) = V_{in}$

$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

이므로,

Buck Converter – SSA



$$\begin{bmatrix} \dot{I}_L \\ \dot{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

이고 노드 방정식으로 변환하면,

$$\frac{dI_L}{dt} = -\frac{1}{L}V_C + \frac{d}{L}V_{in}$$

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C}I_L - \frac{1}{RC}V_C$$

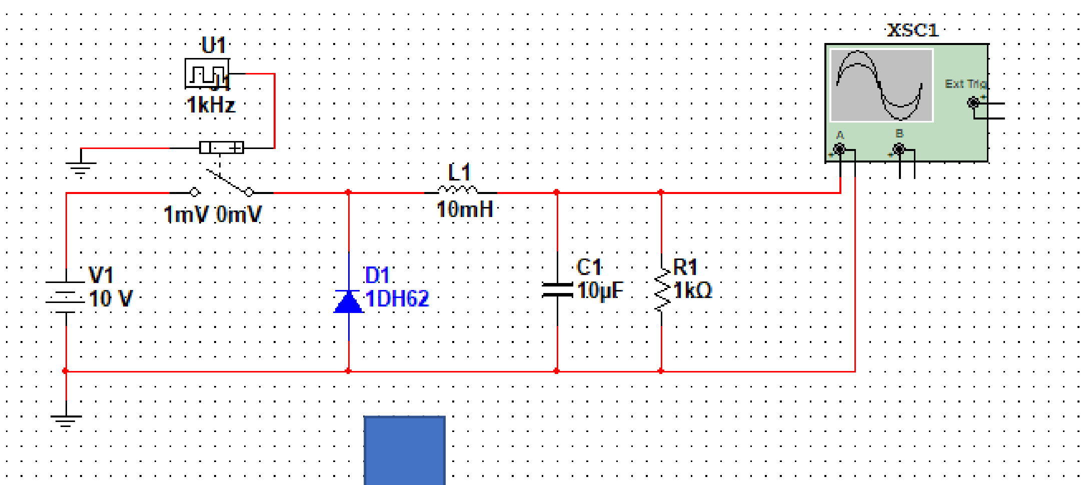
두 개의 연립 방정식이 나온다.

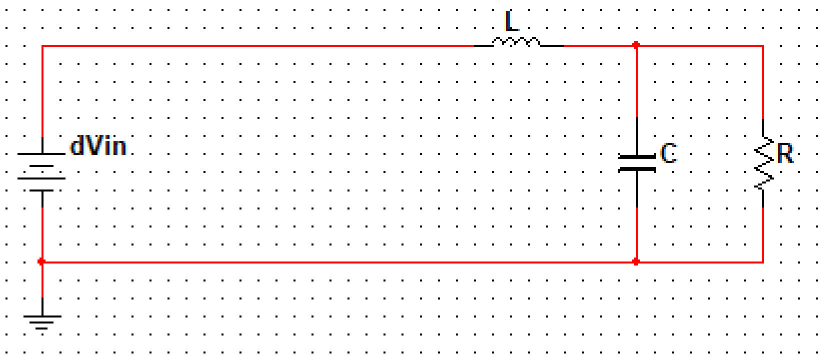
$$V_L = L\frac{dI_L}{dt}$$

$$I_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

이므로 각 식의 양변에 각각 L, C를 곱하면

Buck Converter – SSA





$$\mathrm{L}\frac{dI_L}{dt} = -V_C + dV_{in}$$

$$C\frac{dV_C}{dt} = I_L - \frac{1}{R}V_C$$

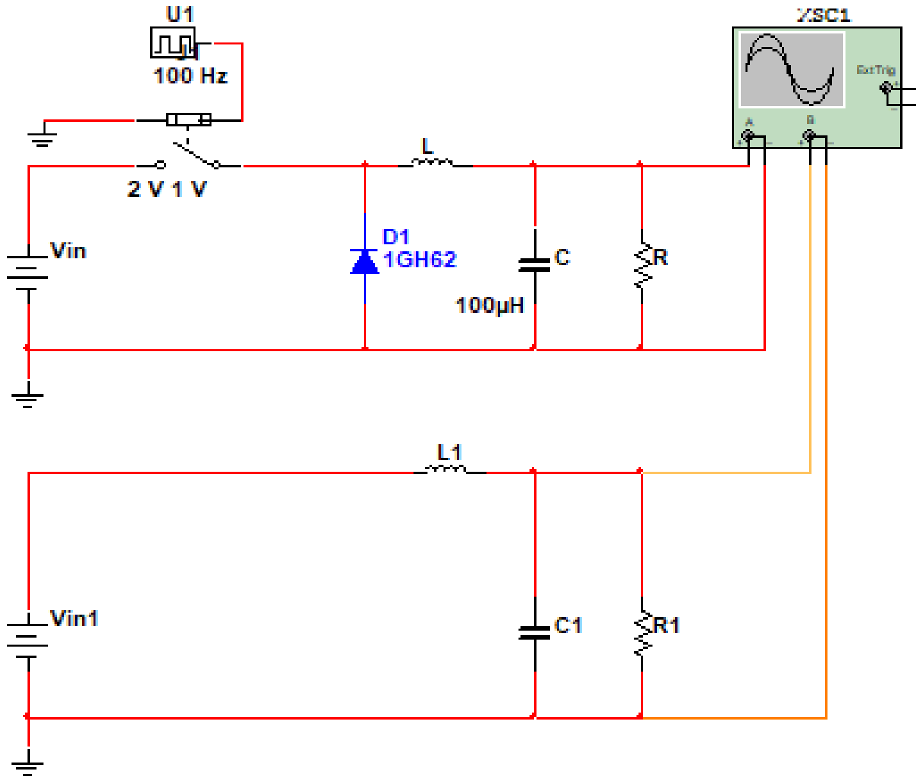
이 된다. 좀 더 정리하면,

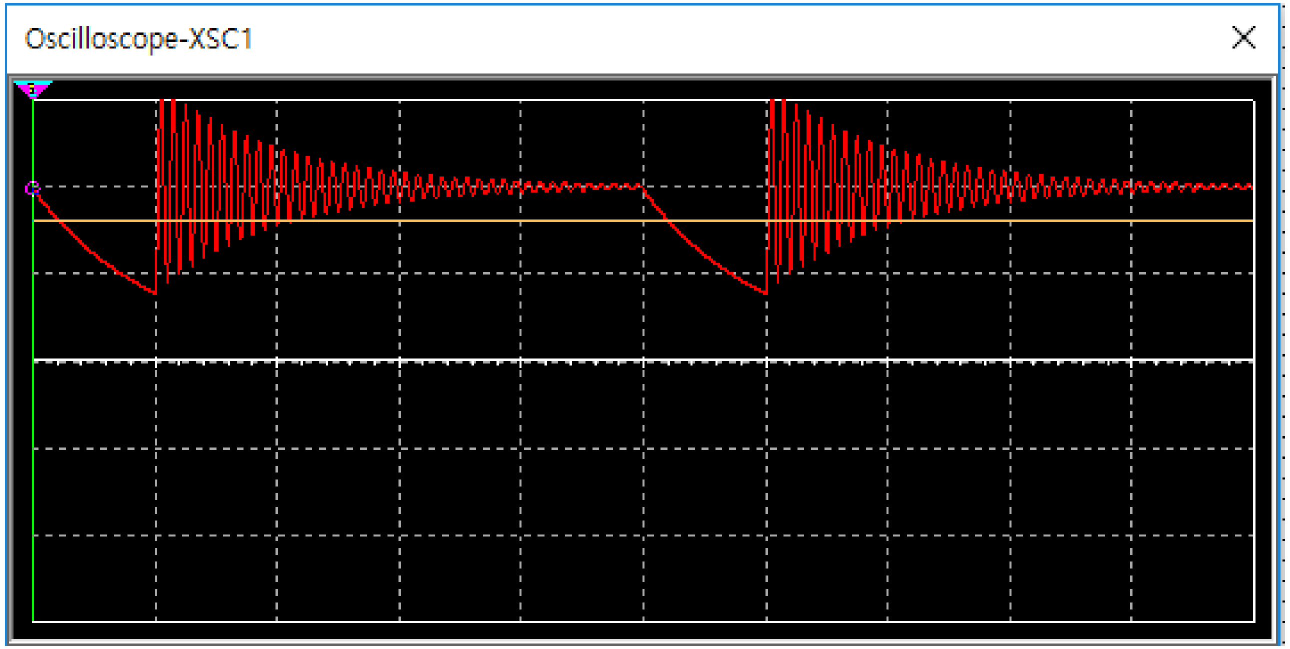
$$V_{in}d = V_L + V_C$$

$$I_L = I_C + I_R$$

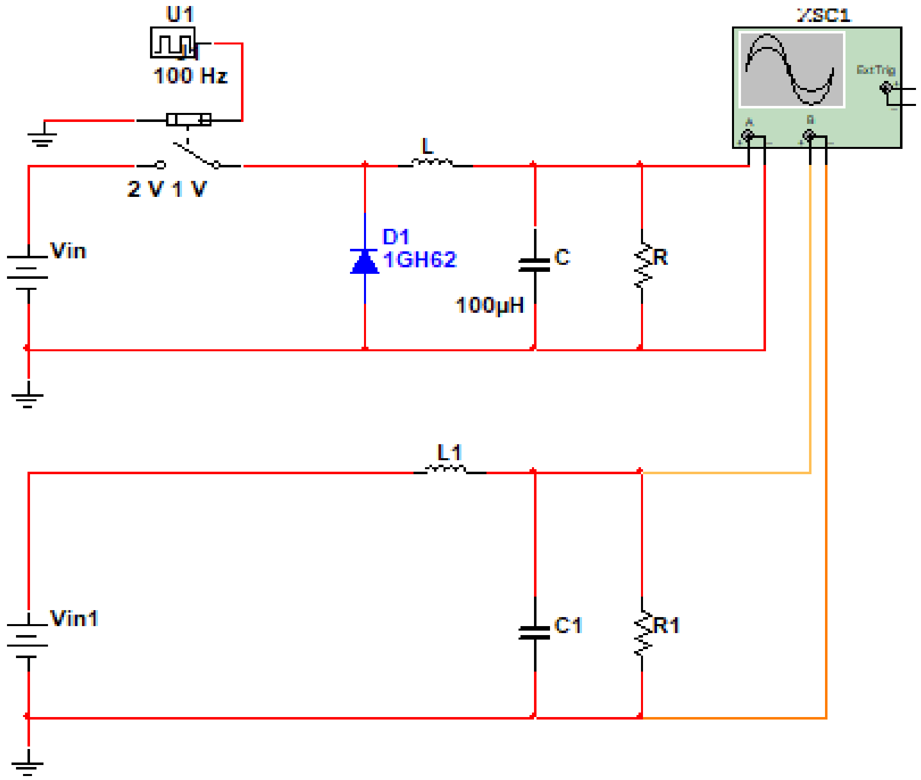
즉, 입력전압 $V_{in}d$ 가 인덕터와 커패시터에 분배되고, 인덕터에 흐르는 전류는 커패시터와 저항에 나누어 흐르므로 다음과 같은 회로가 됨을 알 수 있다.

Buck Converter – SSA





Buck Converter – SSA

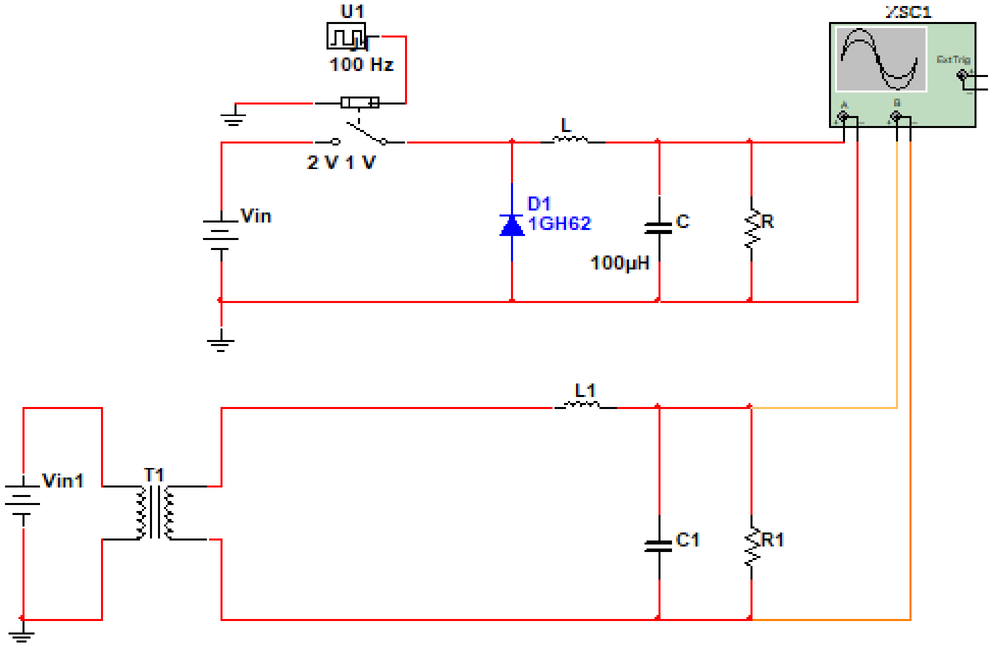


- 출력은 평균화가 잘 되었지만, 입력은 같지 않음을 알 수 있다.

$$V_{in} \,! = V_{in} d$$

- 등가의 시스템이라면 입력과 출력이 같아야 되므로, 입력 또한 똑같이 맞출 필요가 있음

Buck Converter – SSA



- 직류 변압기 :
  코일 인덕턴스 비율을 통해 입력 전압을 등가로 맞춰준다.
- 실제로 설계하기 위해서는, 자화 인덕턴스가 무한대가 되어야 하는데 불가능하므로 시뮬레이션 시에만 사용한다.