TI DSP, MCU 및 Xilinx Zynq FPGA 프로그래밍 전문가 과정

- 비관성 좌표계 -

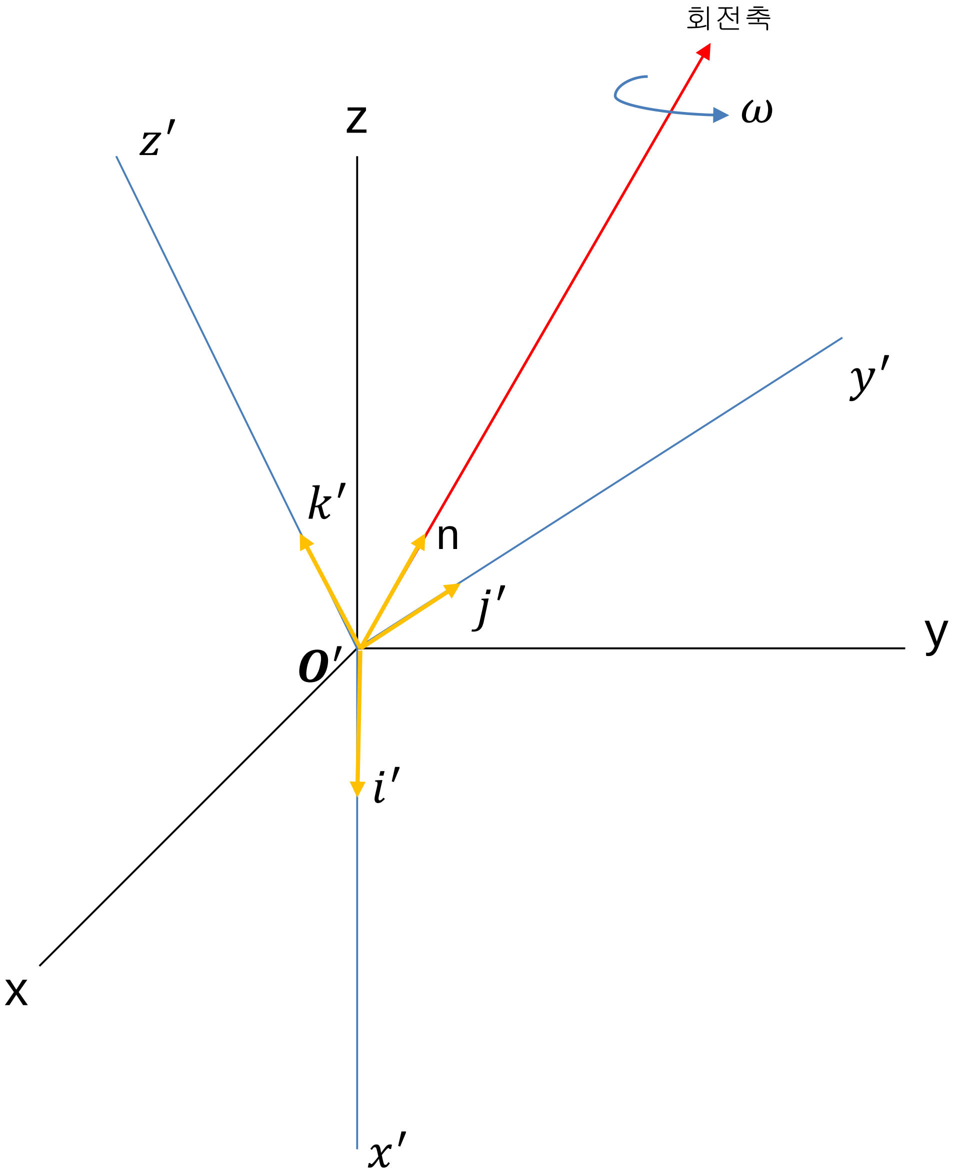
강사 – Innova Lee(이상훈)
gcccompil3r@gmail.com
학생 – GJ (박현우)
uc820@naver.com

목차

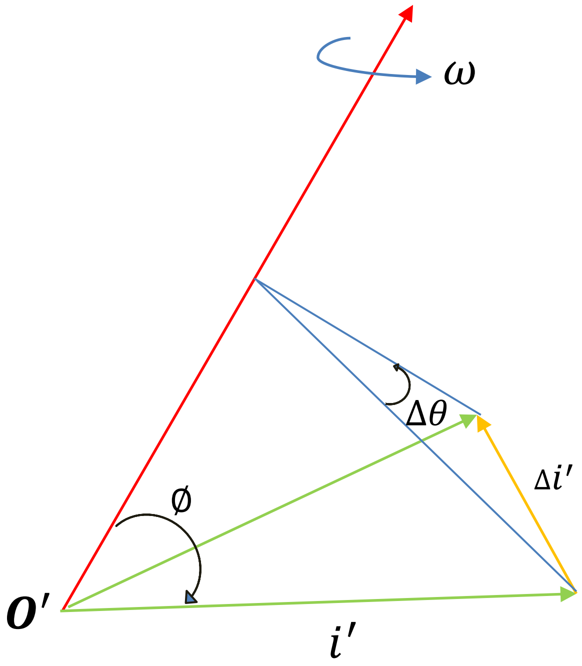
비관성좌표계 - 회전좌표계 (코리올리 정리)

1. 회전좌표
2. Discussion
3. conclusion

1. 회전좌표계



<그림1>



<그림2>

1. 회전좌표계 (코리올리 정리) – 1

Discussion

1. 문제상황

어떤 계가 그림과 같이 원점을 중심으로 각속도 $\vec{\omega}$로 회전하고 있다고 가정하자.

2. 각 계의 변위 표현

두 계의 원점이 같으므로 $\vec{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z = \widehat{i'}x' + \widehat{j'}y' + \widehat{k'}z' = \overrightarrow{r'}$로 간단하게 표현된다.

3. 각 계의 속도 표현

미분을 해보면, $\hat{\imath}\frac{dx}{dt} + \hat{\jmath}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt} = \frac{d\widehat{i'}}{dt}x' + \widehat{i'}\frac{d\widehat{x'}}{dt} + \frac{d\widehat{j'}}{dt}y' + \widehat{j'}\frac{d\widehat{y'}}{dt} + \frac{d\hat{k}}{dt}z' + \widehat{k'}\frac{d\widehat{z'}}{dt}$ 속도의 경우 조금 더 복잡해진다.
회전으로 인해 기저벡터인 $\widehat{i'}$, $\widehat{j'}$,$\widehat{k'}$가 상수가 아니게 된다.

4. 식의 정리

좌변은 고정좌표계에서 바라본 입자의 속도라고 한다면,
회전좌표계에서 바라본 입자의 속도는 $\widehat{i'}\frac{d\widehat{x'}}{dt} + \widehat{j'}\frac{d\widehat{y'}}{dt} + \widehat{k'}\frac{d\widehat{z'}}{dt}$이므로 다음의 관계를 갖는다.

$$\vec{v} = \overrightarrow{v'} + \frac{d\widehat{i'}}{dt} + x'\frac{d\widehat{j'}}{dt}y' + \frac{d\hat{k}}{dt}z'$$

1. 회전좌표계 (코리올리 정리) – 2

Discussion

5. 해석

마지막 세 항은 회전으로 인해 발생하는 항이므로, 각속도가 일정할 때,
호의 길이는 $ds = rd\theta$를 생각해보면, $\Delta\hat{i'} \approx \sin\emptyset\,\Delta\theta$임을 알 수 있다.

∴ $\frac{d\hat{i'}}{dt} = (\sin\emptyset)\omega$로 정리할 수 있다. 방향 또한 $\vec{\omega}$와 $\hat{i'}$이 수직이기 때문에 $\frac{d\hat{i'}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{i'}$라고 쓸 수 있다.
남은 축에 대해서도 동일하게 적용이 가능하기 때문에, $\underline{\vec{v} = \vec{v'} + \vec{\omega}\times\vec{r'}}$ 로 정리된다.
다시 정리하면, $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{fix} = \left(\frac{d\vec{r'}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{r'} = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\right]\vec{r'}$ 로 표현할 수 있다.
일정한 속도로 회전하는 좌표계에서의 임의의 벡터를 시간에 대해 미분하면 항상 위와 같은 관계가 얻어진다.
회전에 있어서 연산자와 같이 이용된다.

즉, $\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{fix} = \left(\frac{d\vec{v'}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{v'}$도 성립한다. 이를 전개 해보면

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{fix} = \left[\frac{d\left[\left(\frac{d\vec{r'}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{r'}\right]}{dt}\right]_{rot} + \vec{\omega}\times\left[\left(\frac{d\vec{r'}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{r'}\right]$$
$$= \left(\frac{d^2\vec{r'}}{dt^2}\right) + \frac{d\left(\vec{\omega}\times\vec{r'}\right)}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{v'} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{v'}\right)$$
$$= \left(\frac{d^2\vec{r'}}{dt^2}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r'} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r'}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{v'} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{v'}\right)$$

이를 각 좌표계에서의 위치, 속도, 가속도로 정리해 표현하면

$\underline{\vec{a} = \vec{a'} + \dot{\omega}\times\vec{r'} + 2\vec{\omega}\times\vec{v'} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{v'}\right)}$ 로 표기할 수 있다.

1. 회전좌표계 (코리올리 정리) – 3

Conclusion

1. 가로 가속도 (transverse acceleration $\dot{\omega} \times \vec{r'}$)
$\vec{r'}$에 수직하며 회전좌표계의 회전방향이나 회전속도가 변할 때 접선방향으로 나타나므로, 등속운동에선 생기지 않는다.

2. 코리올리 가속도 (Coriolis acceleration $2\vec{\omega} \times \vec{v'}$)
입자가 움직일 때 속도가 회전축에 평행하지 않는 이상, 항상 존재하는 항으로, 입자가 움직일 때에만 존재하며 움직이는 방향에 수직이다.
즉, 운동하는 입자를 운동방향과 수직으로 휘게 하며, 포물체의 궤적계산에도 크게 관여한다.
또, 고기압, 저기압에서 바람의 휘어짐을 만드는 주요인이다.

3. 구심 가속도 (centripetal acceleration $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{v'})$)
입자가 원궤도를 돌기 때문에 생기는 가속도로, 항상 회전축 방향으로 가해지는, 원운동을 만드는 가속도이다.

4. 특성
1) 만약 좌표계가 회전과 동시에 병진운동 한다면, $\vec{v} = \vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'} + \vec{V_o}$,
$\vec{a} = \vec{a'} + \dot{\omega} \times \vec{r'} + 2\vec{\omega} \times \vec{v'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{v'}) + \vec{A_o}$ 의 형태로 고쳐 쓰기만 하면 된다.
2) 비관성계에서 느끼는 힘은 $\vec{a'}$에 질량을 덧붙여 정리하면 된다.

$F_{rot}{}' = F_{fix} + F_{cor}{}' + F_{trans}{}' + F_{centrif}{}'$로 표현된다. 실제 힘에 관성력이 더해지는 형태로 음의 부호를 가진다.
1. F_{fix} 실제로 작용하는 힘 $= m\vec{a}$
2. F_{trans} 가로가속도에 의한 관성력 $-\dot{\omega} \times \vec{r'}$
3. F_{cor} 코리올리 가속도에 의한 관성력 $-2m\vec{\omega} \times \vec{v'}$
4. F_{centri} 원심력 $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{v'})$