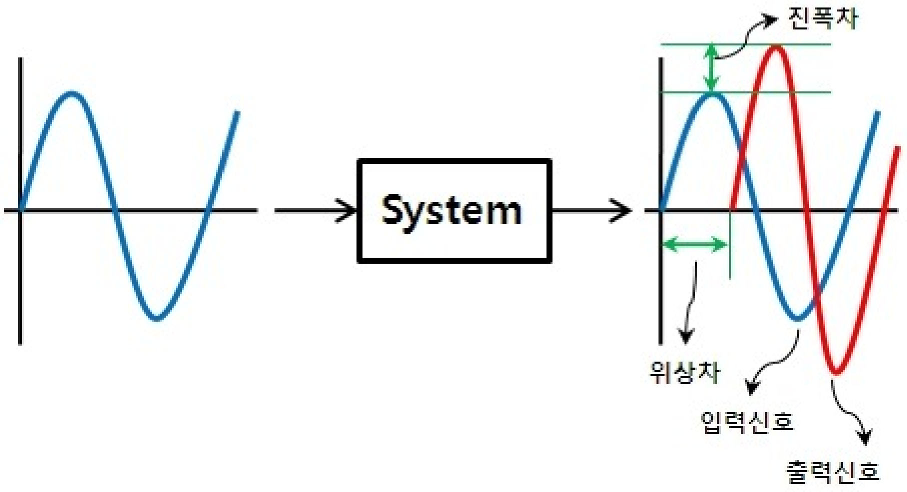
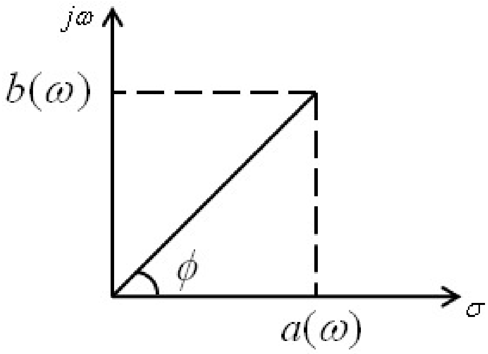
주파수 응답법

주파수 응답은 사인파입력에 대한 시스템의 정상상태응답을 의미한다.
주파수응답에서 얻어진 정보는 근궤적 해석에 의해 얻어진 정보와는 다르며
근궤적법과는 서로 보완적인 관계이다.

주파수응답법의 장점은 시스템의 수학적 모델을 유도하지 않고도 물리 시스템의 측정을 통해 얻어진 데이터를 사용할 수 있으며 원하지 않는 잡음(noise)의 영향이 무시되도록 시스템 설계가 가능하다.

먼저 전달함수 시스템의 정상상태 출력은 전달함수의 s 를 jω 로 바꾼 사인파 전달함수로 부터 직접 얻어질 수 있다.
주파수 응답은 시스템이 안정하다는 가정 하에 분석이 가능하며 만약 시스템이 불안정한 경우 정상상태가 존재하지 않기 때문에 주파수 응답은 무의미하다.





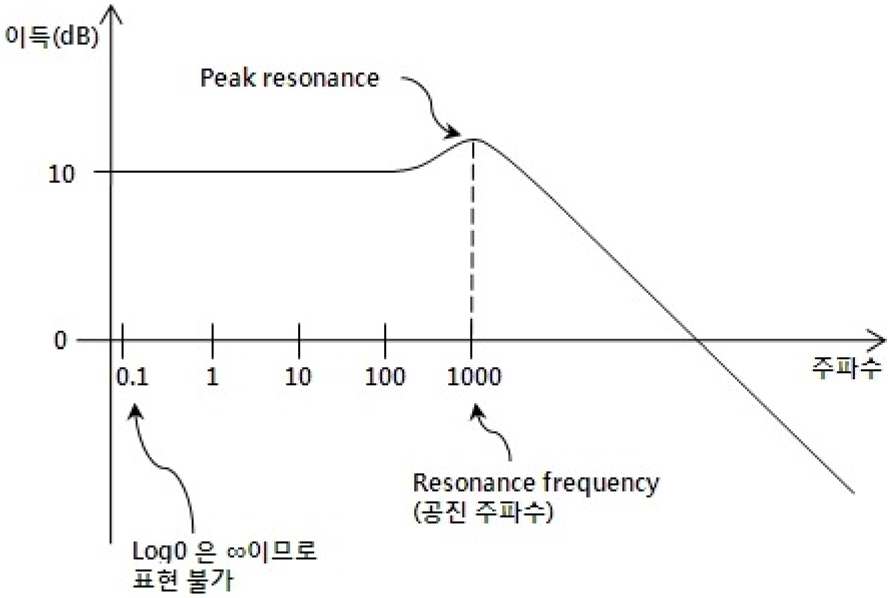
$$|G(j\omega)| = \sqrt{a(\omega)^2 + b(\omega)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}\frac{b(\omega)}{a(\omega)}$$

$$G(j\omega) = a(\omega) + jb(\omega)$$

Bode Plot (보드선도)

bode 선도는 두 개의 그래프로 구성되는데 하나는 사인파 전달함수의 크기를 로그로 나타낸 것이고 다른 하나는 위상각을 나타낸 것이다. 두 그래프 모두 주파수에 대해 그리며 전달 함수 G(jω)의 크기를 로그로 표시하는 기준은 20log|G(jω)|, 단위는 [dB]이다.



〈Bode plot: 보드 선도〉

만약 Bode Plot 에서 gain 값이 20[dB]인 경우

$20[dB] = 20\log_{10}|G(j\omega)|$ → $|G(j\omega)|$ = (출력) / (입력) = 10^1 → 출력이 입력의 10 배 크기

gain 값이 0[dB]인 경우

$0[dB] = 20\log_{10}|G(j\omega)|$ → $|G(j\omega)|$ = (출력) / (입력) = 10^0 → 출력과 입력의 크기가 같다

gain 값이 -20[dB]인 경우

$-20[dB] = 20\log_{10}|G(j\omega)|$ → $|G(j\omega)|$ = (출력) / (입력) = 10^{-1} → 출력이 입력의 1/10 크기

Bode Plot 의 장점은 시스템이 복잡하더라도 시스템을 여러 개의 기본 요소로 분해해서 주파수 응답을 쉽게 구할 수 있으며 각 기본 요소에 대한 주파수 전달 함수의 크기의 합으로 나타낼 수 있다.

기본 요소들의 주파수 응답

1) 비례요소

$$G(s) = G(j\omega) = K + j0$$

응답은 입력을 K 배 한 값이 된다.
즉 이득 그래프는 20logK[dB]의 값을 갖는 직선, 위상차는 0°인 직선이 된다.

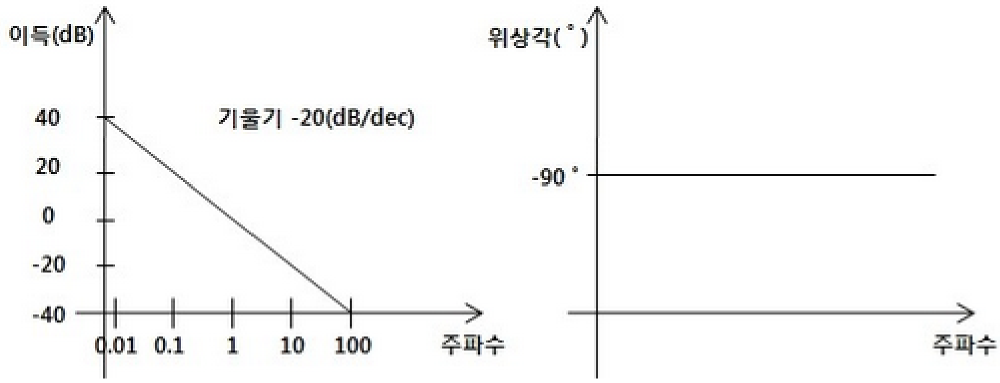
$$gain = 20\log|G(j\omega)| = 20\log(K)\mathrm{dB}$$

$$phase = \underline{/G(j\omega)} = \underline{/K} = 0^o$$

2) 적분요소

$$G(s) = \frac{K}{s} = \frac{K}{j\omega}$$

< K = 1 인 경우 그래프 >



$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = \frac{jK}{j^2\omega} = -j\frac{K}{\omega}$$

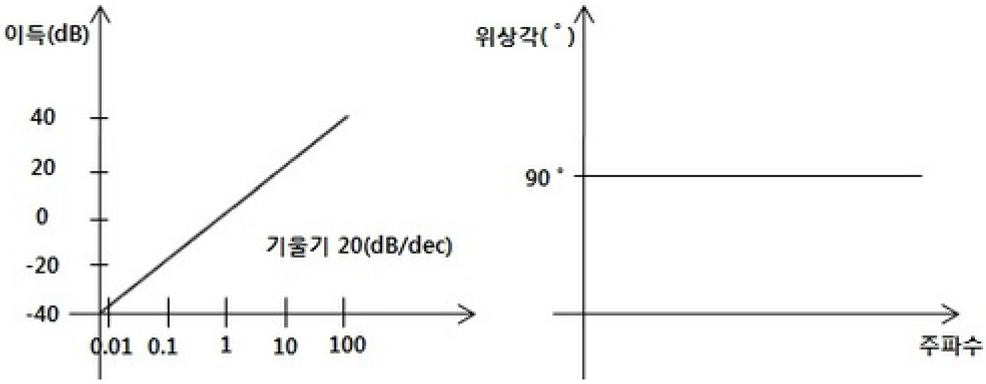
$$gain = 20\log|G(j\omega)| = 20\log(-\frac{K}{\omega})dB$$

$$phase = \underline{/G(j\omega)} = \underline{/K} - \underline{/j\omega} = 0^o - 90^o = -90^o$$

3) **미분요소**

$$G(s) = Ks = jK\omega$$

< K = 1 인 경우 그래프 >



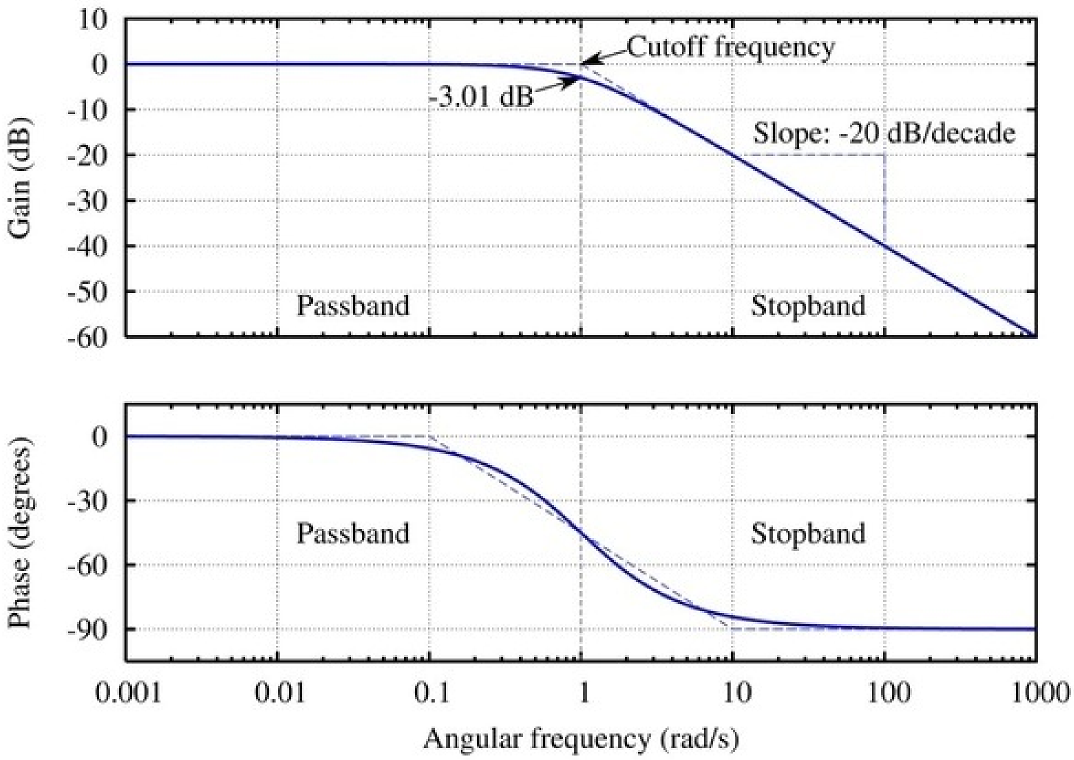
$$G(s) = Ks = jK\omega$$

$$gain = 20\log|G(j\omega)| = 20\log(K\omega)dB$$

$$phase = \underline{/G(j\omega)} = \underline{/jK\omega} = 90^o$$

4) **1 차 지연요소**

$$G(s) = \frac{1}{1 + Ts} = \frac{1}{1 + j\omega T}$$



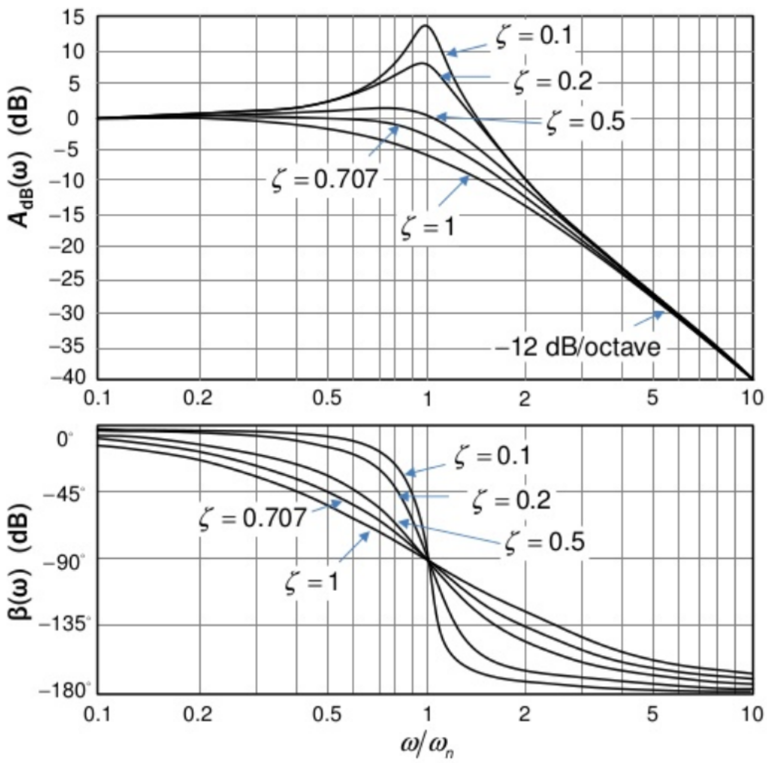
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{1 + j\omega T}\cdot\frac{1 - j\omega T}{1 - j\omega T} = \frac{1 - j\omega T}{1 + (\omega T)^2} = \frac{1}{1 + (\omega T)^2} - j\frac{\omega T}{1 + (\omega T)^2}$$

$$gain = 20\log|G(j\omega)| = 20\log\sqrt{\left(\frac{1}{1+(\omega T)^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega T}{1+(\omega T)^2}\right)^2} = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}\right)dB$$
$$= -20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2}\,dB$$

$$phase = \underline{/G(j\omega)} = \underline{/K} - \underline{/1 + j\omega T} = 0 - \tan^{-1}(\omega T)$$

5) 2 차 지연요소

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 2j\zeta\omega_n\omega}$$



$$gain = 20\log|G(j\omega)| = 20\log\left|\frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 2j\zeta\omega_n\omega}\right| = -20\log\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$phase = \underline{/G(j\omega)} = -\tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]$$

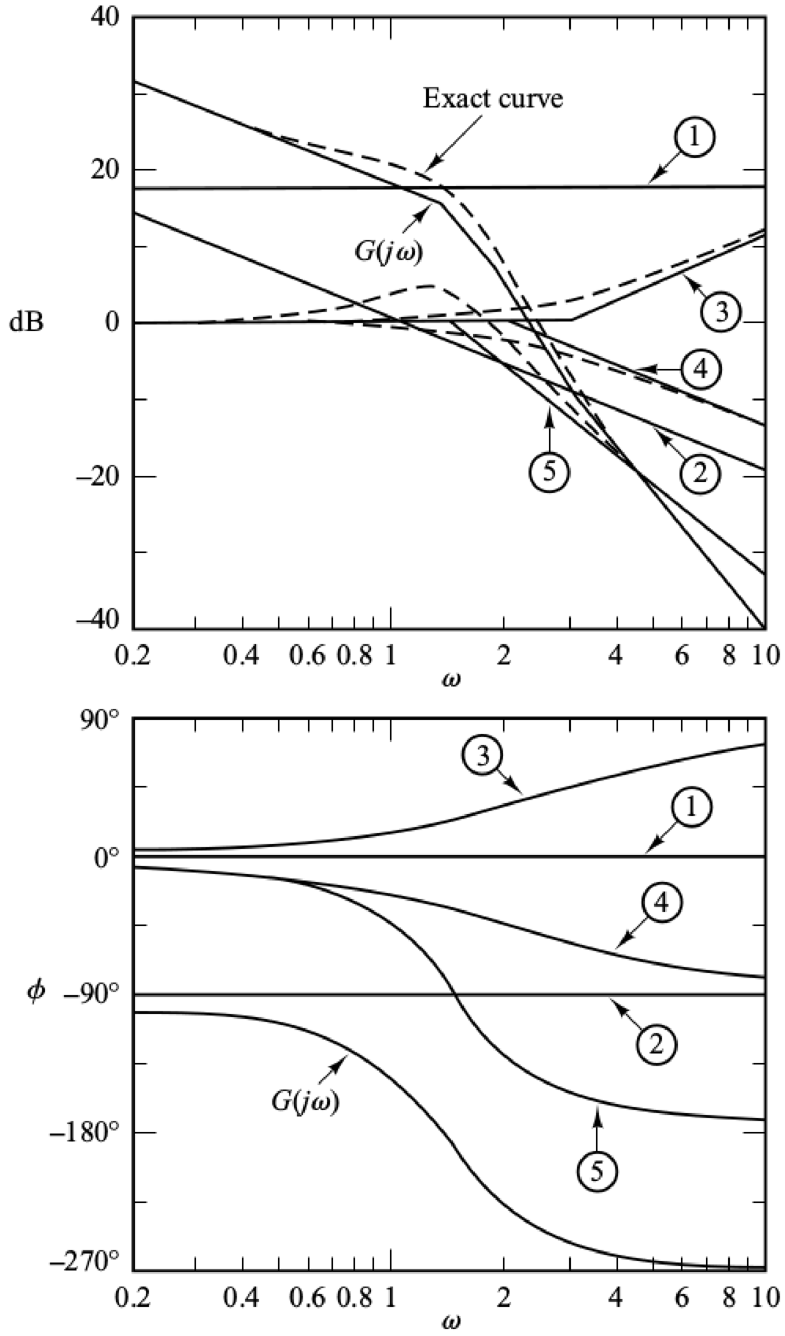
참고 링크 http://beckho.tistory.com/69

보드 선도는 위의 요소별로 나누어 그린 후 각 요소의 그래프들을 합하면
아래와 같은 전체 전달함수에 대한 그래프가 된다.
(손으로 그리는 경우 각 요소들을 간단한 근사치로 그려서 합한다)

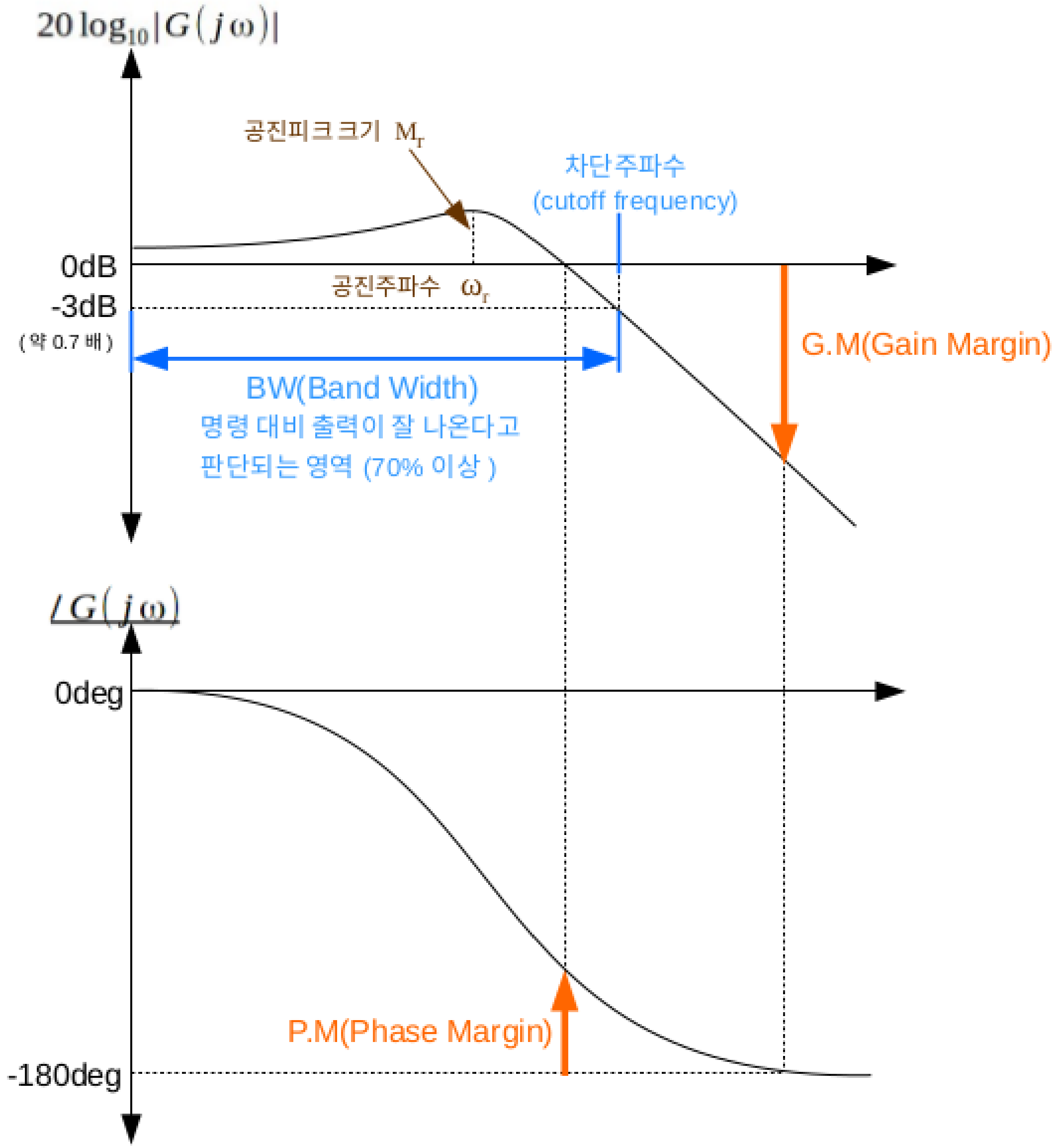
$$G(j\omega) = \frac{7.5\left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)}{(j\omega)\left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)\left[\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1\right]}$$

This function is composed of the following factors:

$$7.5, \qquad (j\omega)^{-1}, \qquad 1 + j\frac{\omega}{3}, \qquad \left(1 + j\frac{\omega}{2}\right)^{-1}, \qquad \left[1 + j\frac{\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right]^{-1}$$



Bode Plot(보드선도)에서 특성치



G.M: 위상이 -180° 가 되는 주파수기준 0dB 에서부터 음수방향 크기
→ 시스템이 불안정해지기까지 Gain 이 얼마만큼 증가할 수 있는가를 나타냄
→ G.M 이 양수 값이어야 안정된 시스템(그래프에서 아래방향이 양수)

P.M: 0dB 인 주파수 기준 -180° 위상에서 양수 방향 크기
→ 시스템이 불안정해지기까지 Phase 가 얼마만큼 위상지연의 여유가 있는지를 나타냄
→ P.M 이 양수값이어야 안정된 시스템

일반적으로 G.M 과 P.M 이 증가하면 진동이 줄어들고 응답속도가 느려진다.

BW: 입력 대비 출력의 크기가 70%이상 보장되는 입력 주파수 범위
→ 일반적으로 BW(Bandwidth)가 커지면 빠른 응답을 보이지만 노이즈의 영향을 크게 받는다.

M_r (resonant peak magnitude): 공진피크 크기는 시스템의 감쇠비와 관계가 있으며 값이 클수록 오버슈트가 커진다.($\zeta > 0.707$ 이면 M_r 의 값은 1 이다.)

ω_r(resonant frequency): 공진주파수의 값이 커질수록 시간응답이 빨라진다.

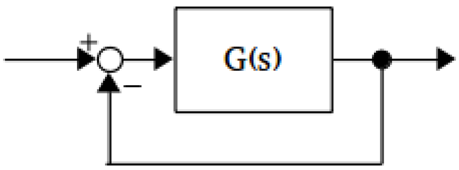
Cutoff rate: 차단율은 차단주파수 부근에서의 로그크기곡선의 기울기로 잡음과 신호를 구별하는 시스템 능력을 나타낸다. 기울기가 가파르면 큰 공진피크 크기를 가지며 이는 시스템의 안정도 여유가 상대적으로 작다는 것을 의미한다.

일반적으로 만족스러운 성능을 얻기 위한 특성치의 범위
P.M → 30^o 에서 60^o 사이에 있어야 한다.
G.M → 6 dB 보다 커야한다.
M_r → $1.0 < M_r < 1.4$ (0 dB $< M_r < 3$ dB)
(M_r 보다 G.M 과 P.M 이 훨씬 빈번히 사용된다.)

Phase 가 -180^o 라는 의미는 입력과 출력의 위상차이가 -180^o 차이가 발생한다는 의미로 입력과 출력이 서로 반대방향으로 작용하므로 시스템이 불안정 할 수 있다. 따라서 -180^o 로 부터 멀어질 수 있게 P.M(Phase Margin)을 여유를 가지고 제어기를 설계해야한다.
위상이 -180^o 인 주파수에서는 magnitude 가 작아야, 즉 출력 값이 작을수록 안정되므로 음의 방향인 G.M(Gain Margin)이 클 수록 안정적이고 G.M 이 클수록 BW(Band width)가 작아지기 때문에 노이즈에 강해지지만 시스템의 응답속도가 느려진다.

G.M 과 P.M 은 폐루프 시스템의 유효 감쇠비에 대한 대략적인 값만을 주지만 제어시스템을 설계할 때나 시스템의 이득상수를 조정할 때에 편리한 수단으로 이용된다.

Closed loop system 의 성능과 Open loop 전달함수 G(s) 사이의 관계

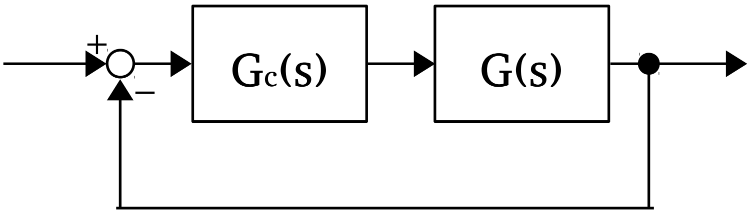


G(s)의 G.M, P.M 모두 양수이면 $\dfrac{G(s)}{1+G(s)}$ 은 안정하다

$\dfrac{G(s)}{1+G(s)}$ 의 Damping 계수 $\zeta \approx \dfrac{P.M \text{ of } G(s)}{100}$

$\dfrac{G(s)}{1+G(s)}$ 의 Close loop BW $\approx$ G(s)의 Open loop BW

Bode Plot(보드선도) 그래프 이용하여 설계하기



Lead Compensator(앞섬 보상기)

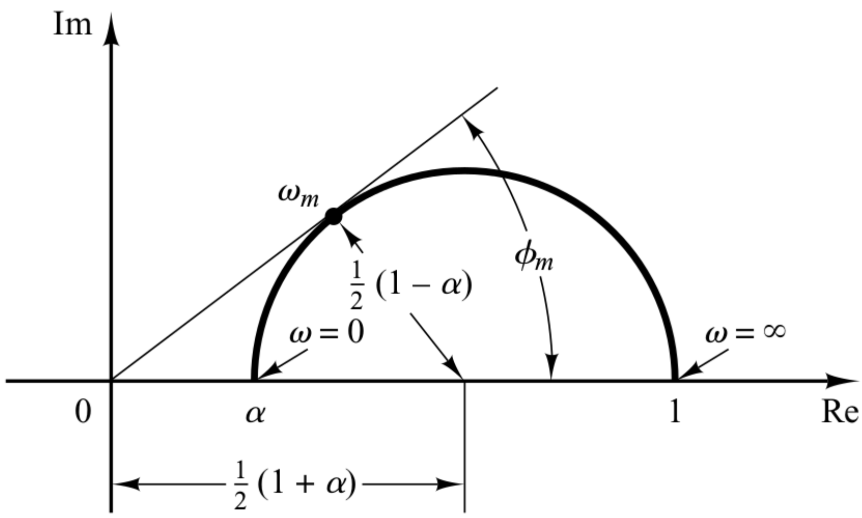
→ 앞섬 보상기는 시스템의 과도응답 특성을 개선하고자 하는 경우 사용된다.

먼저 앞섬 보상기의 전달함수를 다음과 같이 놓는다.

$$G_C(s) = K_C\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_C\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \qquad (0<\alpha<1)$$

(α 의 최소값은 보통 물리적 구조에 의해 0.05 정도이다.)

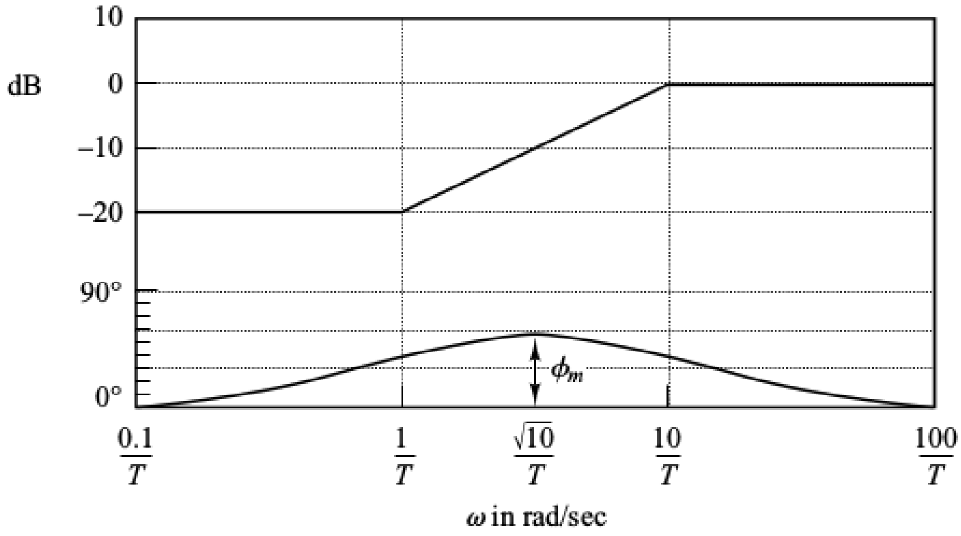
다음 식 $K_c\alpha\frac{j\omega T+1}{j\omega\alpha T+1}$ $(0<\alpha<1)$ 에서 $K_c = 1$ 일때 극좌표선도를 그려보면



여기서 최대 위상앞섬각 ϕ_m 은 다음 식을 만족한다.

$$\sin\phi_m = \frac{\frac{1-\alpha}{2}}{\frac{1+\alpha}{2}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

$K_C = 1$, $\alpha = 0.1$ 일 때 앞섬보상기의 Bode 선도는 다음과 같다.



최대위상 앞섬각 ϕ_m 에서의 주파수 ω_m 는 두 절점 주파수의 기하학적 평균을 이용하여 구할 수 있다.

$$\log \omega_m = \frac{1}{2}\left(\log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T}\right)$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\ T}$$

– 앞섬보상기 설계 방법

1. $K_c \alpha = K, \quad G_c(s) = K \dfrac{Ts + 1}{\alpha T s + 1}$

 주어진 정적 오차 상수에 대한 요구사항을 만족하도록 이득 K 를 결정한다.

2. 이득은 조절되었으나 보상되지 않은 시스템 G'(s)의 Bode 선도를 그리고 P.M(Phase Margin)을 구한다.

3. 시스템에 더해져야 할 위상앞섬각 ϕ 을 구하고 5° ~ 12° 정도를 더한다.
(앞섬보상기가 추가되면서 이득교차주파수가 오른쪽으로 이동하여 위상여유가 작아지기 때문)

4.   식 $\sin \phi_m = \dfrac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$ 을 이용하여 감쇠인자 α 를 결정한다.

5. 보상되지 않은 시스템 G'(s)의 크기가 $-20\log \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}\ T}$ 이 되는 주파수 $\omega_m = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}\ T}$ 을

결정하고 이 주파수 ω_m 를 새로운 이득교차주파수로 선택한다. (ϕ_m 은 ω_m 에서 발생한다.)

6. 앞섬보상기의 절점주파수를 다음과 같이 결정한다.

앞섬보상기의 영점: $\omega = \dfrac{1}{T}$

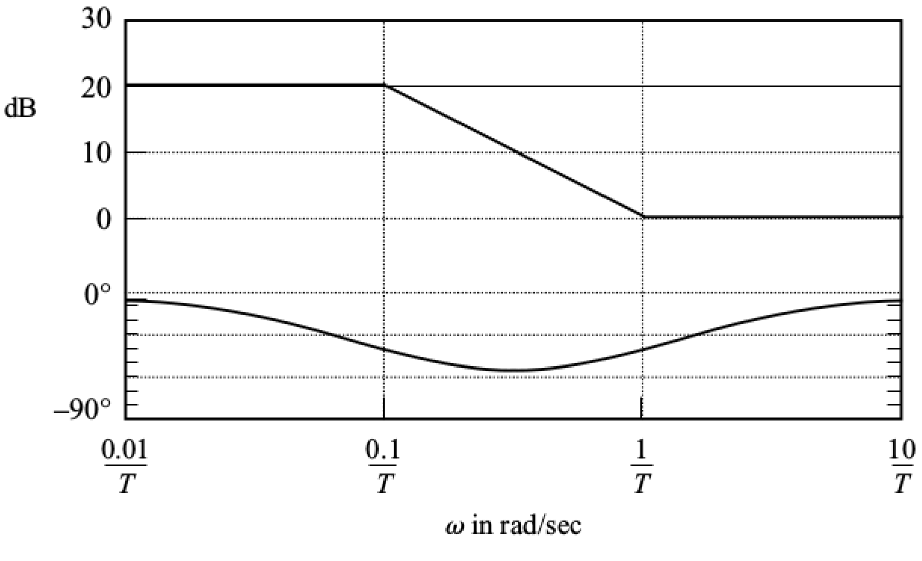
앞섬보상기의 극점: $\omega = \dfrac{1}{\alpha T}$

7. 결정된 α 값을 이용하여 상수 K_c를 계산한다.

$$K_c = \frac{K}{\alpha}$$

8. 결과가 만족스러운지 확인하고 만족스러운 결과를 얻을 때까지
보상기의 극점과 영점의 위치를 수정해 가면서 위의 과정을 반복한다.

Leg Compensator(뒤짐 보상기)



1. 먼저 뒤짐 보상기의 전달함수를 다음과 같이 놓는다.

$$G_c(s) = K_c\beta\frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K_c\frac{s+\dfrac{1}{T}}{s+\dfrac{1}{\beta T}} \qquad (\beta > 1)$$

2. $K_c\beta = K, \quad G_c(s) = K\frac{Ts+1}{\beta Ts+1}$

주어진 정적 오차 상수에 대한 요구사항을 만족하도록 이득 K 를 결정한다.

3. 이득은 조절되었으나 보상되지 않은 시스템 G'(s)의 Bode 선도를 그리고 개루프 전달함수의 위상각이 -180° 와 필요한 P.M(Phase Margin)을 더한 것과 같아지는 주파수를 찾는다.
필요한 P.M 은 주어진 P.M 에 5° ~ 12° 정도를 더한다.(뒤짐보상기의 위상뒤짐을 보완)
그리고 이 주파수를 새로운 이득교차주파수 ω_m 으로 선정한다.

4. 위상뒤짐의 나쁜 영향을 방지하기 위해 뒤짐보상기의 극점과 영점을 새로운 이득교차주파수 ω_m 보다 훨씬 작게 한다. (1/10 아래로 선정하여 G.M 에 영향력 제거)

5. ω_m 에서 크기곡선을 0 dB 로 끌어내리는 데 필요한 감소량을 결정하고

(감소량) = $-20\log\beta$ 에서 β 값을 정한다.

그러면 다른 절점주파수(뒤짐보상기의 극점에 해당) 는

$\omega = \frac{K}{\beta T}$ 에 의해 결정된다.

6. 상수 K_c 를 다음과 같이 계산한다.

$$K_c = \frac{K}{\beta}$$

Leg-Lead Compensator(뒤짐-앞섬 보상기)

→ 시스템의 과도응답 특성과 정상상태 특성 모두 만족스럽지 않을 경우 사용한다.

먼저 앞섬 보상기의 전달함수를 구한 다음 뒤짐 보상기의 전달함수를 구해서 둘을 곱하면 된다.