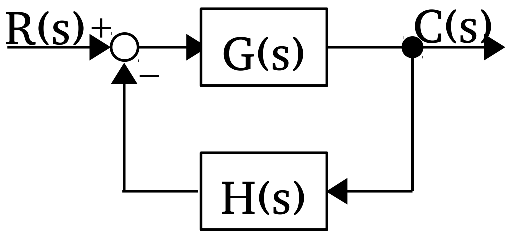
Root Locus (근궤적법)

근궤적법은 특성방정식의 근을 시스템 파라미터 값의 변화에 따라 그린 것이며
일반적으로 이득 K 값의 변화를 파라미터 값으로 놓는다.

따라서 근궤적은 이득 K 가 0 에서 무한대까지 변함에 따라 폐루프극점이 그리는 궤적을 의미한다



위와 같은 시스템에서 폐루프 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

여기서 우변의 분모를 0 으로 두면

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = -1$$

$G(s)H(s)$ 가 s 의 다항식의 비로 주어진다고 가정하면 복소함수이기 때문에
양변의 각도와 크기를 각각 고정하여 두 개의 방정식으로 분리할 수 있다.

< **각도 조건** >

$$\underline{\angle G(s)H(s)} = \pm 180^o(2k + 1) \quad (k = 0,1,2,\dots)$$

< **크기 조건** >

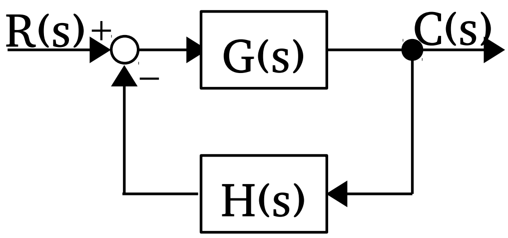
$$|G(s)H(s)| = 1$$

위의 각도 조건과 크기 조건을 모두 만족시키는 s 값이 특성방적식의 근 또는 폐루프 극점이고
각도조건만을 만족시키는 점들을 복소평면상에 그린 것이 근궤적이다.

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

많은 경우에 G(s)H(s)는 이득 파라미터 K 를 포함하고 있고 특성방정식은 위와 같이 표현된다.

Root Locus (근궤적법) 그리기 예제



$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2+2s+3}$$

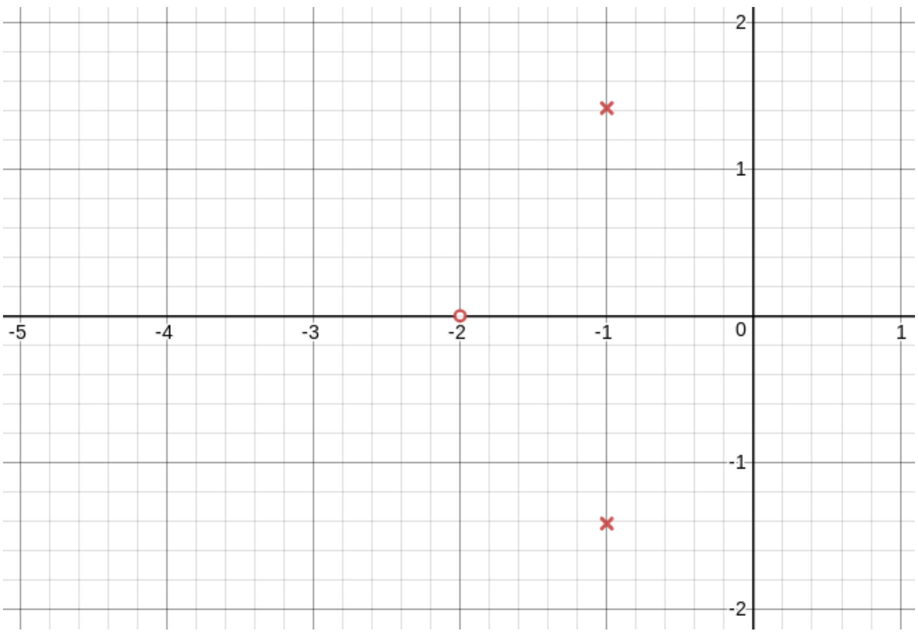
$$H(s) = 1$$

위와 같은 시스템에 대하여 근궤적선도를 그려보자

먼저 근궤적을 그릴 시스템의 G(s)H(s)를 구한다.

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s^2+2s+3} = \frac{K(s+2)}{(s+1+j\sqrt{2})(s+1-j\sqrt{2})}$$

1. s 평면에 G(s)H(s)의 극점(poles)과 영점(zeros) 표시



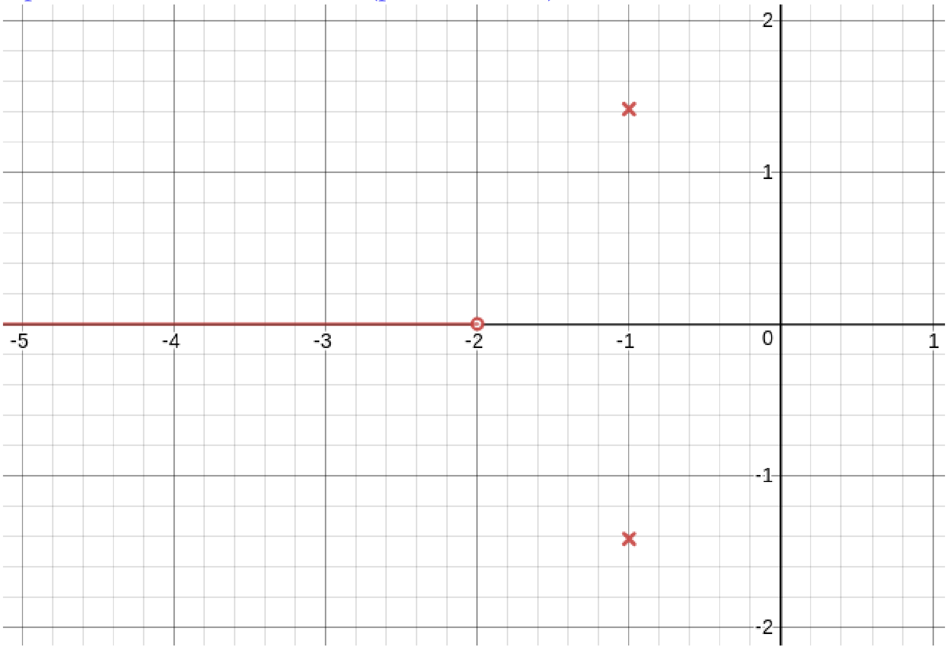
2. 실수축 상의 근궤적 결정

실수축 위에 주요 시험점 마다 각도조건

$$\underline{/G(s)H(s)} = \pm 180^{o}(2k + 1) \quad (k = 0,1,2,\ldots)$$

을 만족하는지 확인하며 근궤적을 표시한다.

Tip → 시험점기준 오른쪽에 (poles + zeros)가 홀수이면 시험점은 근궤적 상의 점이 된다.

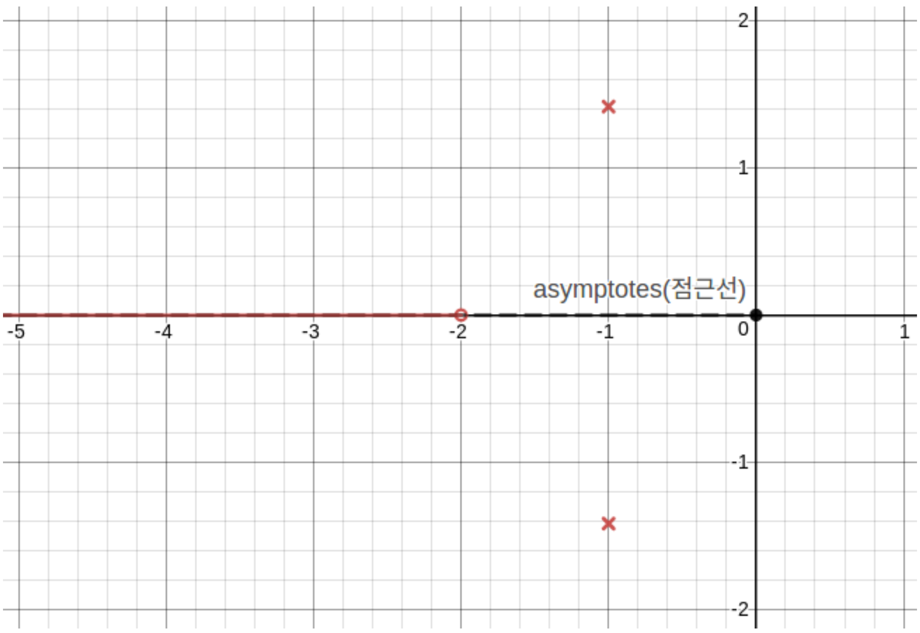


3. 근궤적의 점근선 결정

$$(\text{점근선의 실수축 교점}) = \sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{n}(poles\,of\,G(s)H(s)) - \sum_{i=1}^{m}(zeros\,of\,G(s)H(s))}{n - m}$$

$$(\text{점근선의 기울기}) = \phi_A = \frac{(2q + 1) \times 180^{o}}{n - m} \quad (q = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-m-1)$$

$$\sigma_A = \frac{(-1-j\sqrt{2}\ -1+j\sqrt{2}) - (-2)}{2 - 1} = 0, \qquad \phi_A = \frac{(2q + 1) \times 180^{o}}{2 - 1}\,(q = 0) = 180^{o}$$



4. 이탈점과 복귀점 구하기

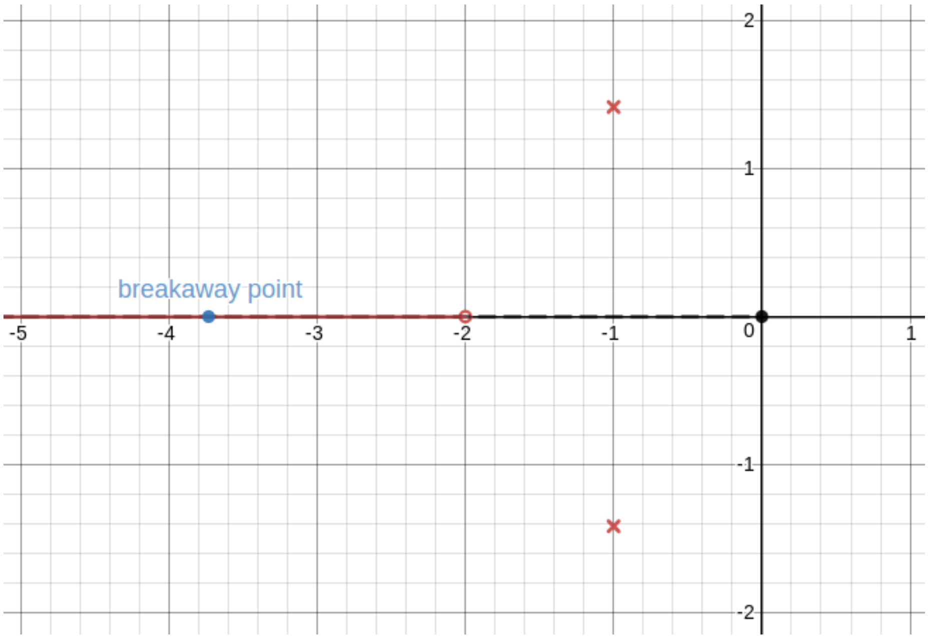
$\frac{dK}{ds} = 0$ 인 점 중에서 근궤적 위에 존재하는 점들이 이탈점과 복귀점이다.

$$K = -\frac{s^2 + 2s + 3}{s + 2}$$ 이므로 s 에 대해 미분하면

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(2s + 2)(s + 2) - (s^2 + 2s + 3)}{(s + 2)^2} = 0$$

$$s^2 + 4s + 1 = (s + 3.732)(s + 0.268) = 0$$

s = -0.268 은 근궤적 상에 있지 않으므로 제외하면 s = -3.732 이 이탈점 또는 복귀점이 된다.



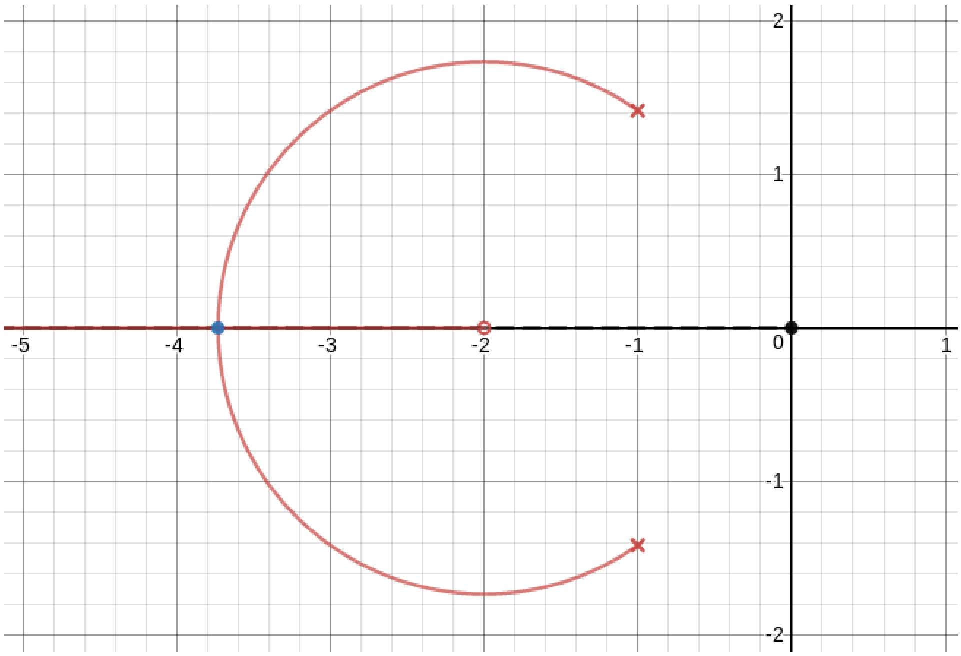
5. 복소극점에서 근궤적 출발각도 결정

복소극점과 복귀점(breakaway point) 사이 궤적은 각도조건

$\underline{/G(s)H(s)} = \pm 180^o(2k + 1) \quad (k = 0,1,2,\dots)$

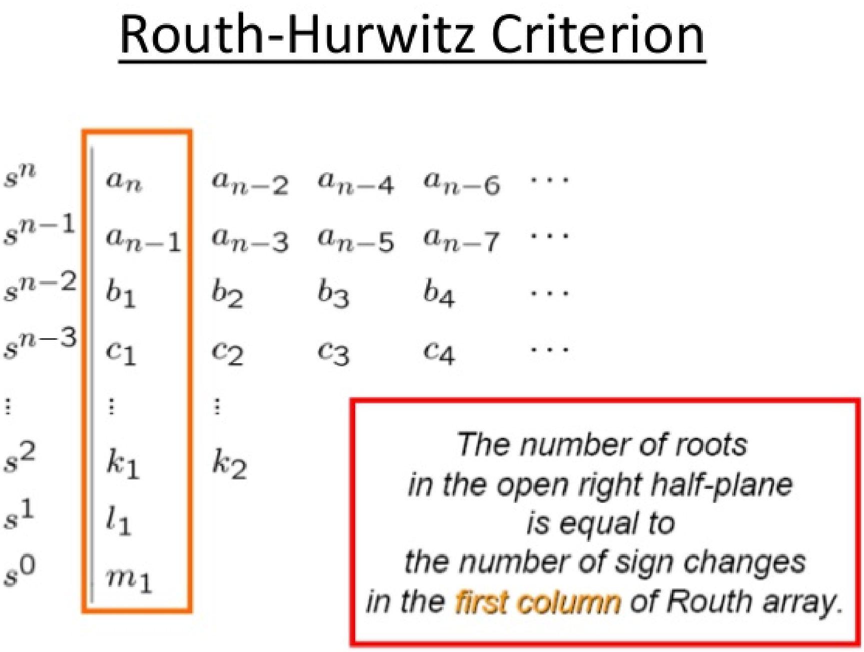
에 s = σ + jω 를 대입하여 구할 수 있다.
하지만 근궤적 방정식은 간단한 시스템만 손으로 그릴 수 있고 극점과 영점이 많은 복잡한 시스템에 대해서는 컴퓨터 없이 근궤적 식을 유도하여 그리는 것이 거의 불가능하다.

하지만 복소극점에서 출발각도는 쉽게 구할 수 있는데 출발각을 알고싶은 복소극점에 시험점을 찍고 두 점 사이 각도를 출발각도로 놓고 각도조건
$\underline{/G(s)H(s)} = \pm 180^o(2k + 1) \quad (k = 0,1,2,\dots)$ 이 만족하는 출발각도를 찾으면 된다.



6. 근궤적과 허수축의 교점 구하기

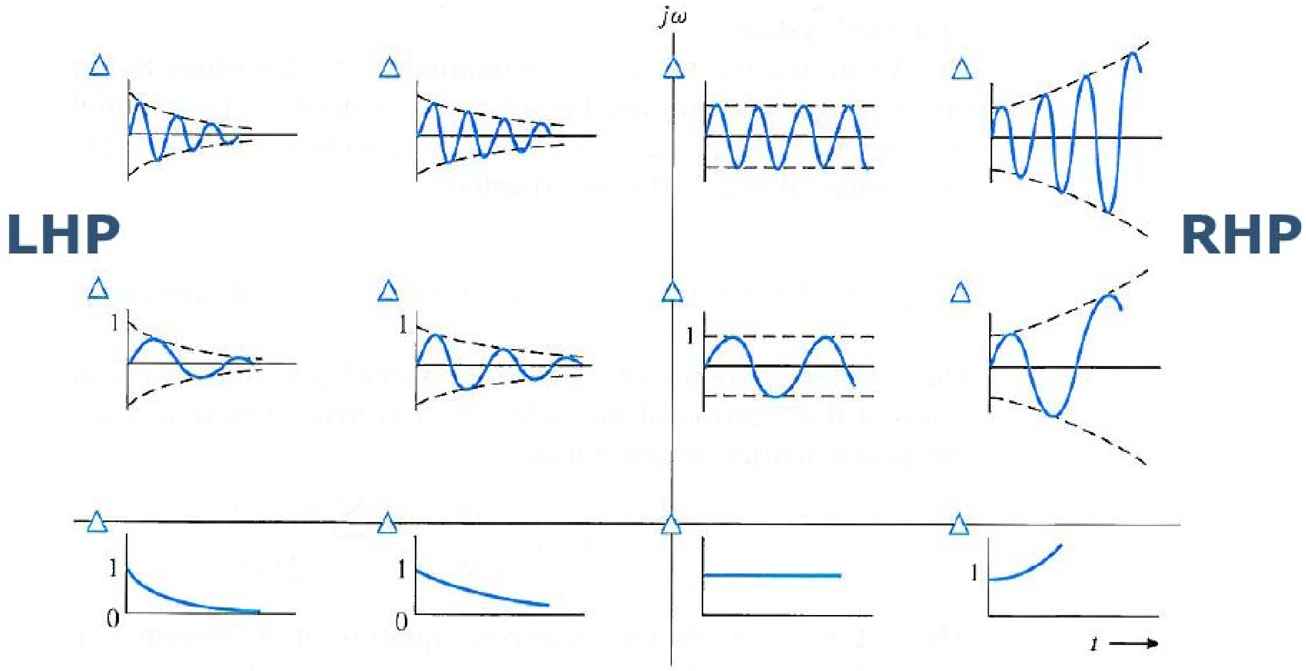
Routh 의 안정도 판별법을 이용하여 근궤적과 허수축의 교점을 구할 수 있다.



위의 Routh 의 안정도 판별법 계산 후 s^1 행의 첫번째 열인 l_1 이 0 일때 근을 구하여 계산하면 근궤적과 허수축의 교점을 구할 수 있다.

현재 예제는 근궤적과 허수축과의 교점이 없기 때문에 교점이 구해지지 않는다.

Root Locus (근궤적법) 그래프 이용하여 설계하기



보상기 설계시 사양이 시간영역의 양(감쇠비, 비감쇠 고유진동수, 최대 오버슈트, 상승시간, 정착시간 등) 으로 주어질 때 Root Locus(근궤적법)를 이용하면 매우 효과적이다.

근궤적법은 영점과 극점을 갖는 보조시스템을 추가하여 그래프에서 근궤적이 원하는 극점을 통과하도록 보상해준다.

주요 폐루프극점, 지배 극점(Dominant pole): 허수축에 가장 가까운 극점 (영향력이 가장 크다)
실수부의 비율이 5 가 넘고 근처에 영점이 없다면 허수축에 가장 가까운 극점이 과도응답의 거동을 좌우한다.

Dominant pole 이 허수축에서 멀수록 응답 속도가 빠르고
Dominant pole 의 Damping Ratio 가 클수록 오버슈트가 작아지고 응답 속도가 느려진다.

Lead Compensator(앞섬 보상기)

→ 앞섬 보상기는 시스템의 과도응답 특성을 개선하고자 하는 경우 사용된다.

먼저 원하는 주요 폐루프극점(Dominant pole)에서 각도 조건
$\underline{\angle G(s)H(s)} = \pm 180^o(2k+1) \quad (k = 0,1,2,\ldots)$ 을 만족하는지 확인하고
부족각(angle deficiency) Φ 을 구한다.
이 부족각은 새로 보상될 근궤적이 원하는 주요 폐루프극점을 지나게 하기 위해
보상기에서 보충해줘야 하는 필요 각도를 의미한다.

그리고 앞섬 보상기의 전달함수는 다음과 같다고 놓는다

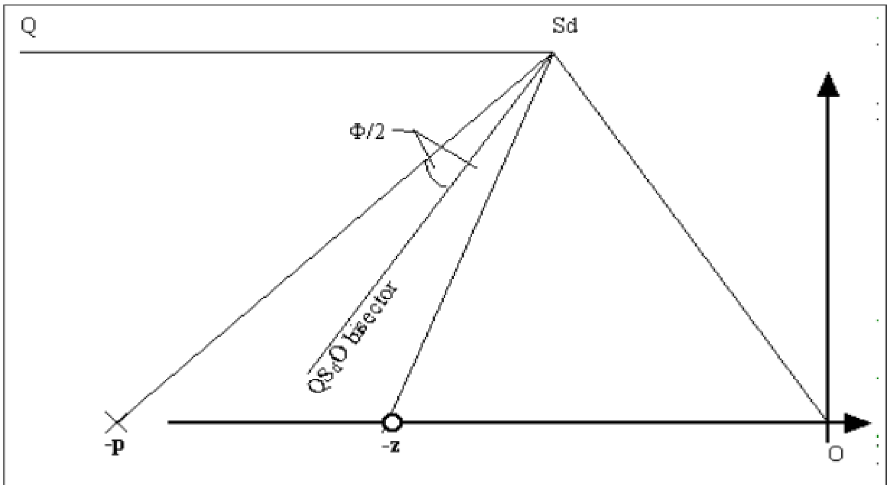
$$G_C(s) = K_C \alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_C \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

여기서 α 와 T 는 부족각으로 부터 결정되고 K_C 는 개루프이득의 요구조건으로부터 결정된다.
시스템에 다른 요구조건이 부과되어있지 않으면 α 값을 가능한 크게 하는 것이 좋다.

앞섬 보상기의 영점과 극점 위치를 결정하는 방법에는 여러 가지가 있다.
그 중 2 가지 방법으로 보상기를 설계해보자

(1) 가장 큰 α 값을 구하는 방법

→ 일반적으로 α 값이 커질수록 시스템 성능이 좋아진다.



Bisector graphical construction to determine pole and zero for lead compensator (Φ is the angle contribution required)

1. 먼저 주요 폐루프극점(Dominant pole)의 요구되는 위치 S_d 점에서 음의 방향의 수평선을 긋는다.
2. 점 S_d 와 원점 O 를 연결하는 직선을 그린다.
3. 직선 S_dQ 와 직선 S_dO 사이의 각을 이등분한다.
4. 각도조건 $\underline{\angle G(s)H(s)} = \pm 180^o(2k+1) \quad (k = 0,1,2,\ldots)$ 을 이용하여 부족각 Φ 를 구한다.
5. 이등분선과 ±Φ/2 의 각을 이루는 두 개의 직선을 긋는다.
6. 두 직선과 음의 실수축의 교점이 앞섬보상기에서 필요한 극점 p 와 영점 z 의 위치를 나타낸다.

7. 다음과 같이 보상기 전달함수에 극점 p 와 영점 z 를 대입한다.

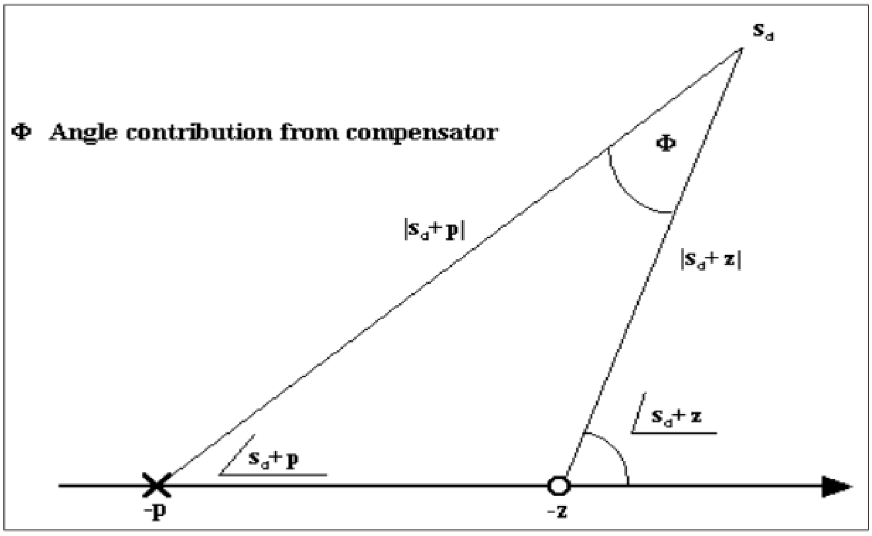
$$G_C(s) = K_C \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = K_C \frac{s + z}{s + p}$$

8. 다음 크기조건 식에 주요 폐루프극점(Dominant pole)
$s_d = \sigma + j\omega_d$ 를 대입하여 K_C 값을 구한다.

$$\left| K_C \frac{s + z}{s + p} G(s) \right| = 1$$

(2) 보상기의 영점으로 플랜트의 극점을 상쇄시키는 방법

→ 상쇄시키고 싶은 플랜트의 극점 위치에 보상기의 영점을 두어 극점의 영향력을 상쇄시킬 수 있다.



1. 상쇄 시킬 플랜트의 극점 위치에 보상기의 영점 z 를 놓는다.
2. 원하는 주요 폐루프 극점(Dominant pole) S_d를 정한다.
3. 각도조건으로 부족각 Φ 를 구한다.
4. 부족각 Φ 를 만족하는 보상기의 극점 p 를 정한다.
5. 다음 크기조건 식에 주요 폐루프극점(Dominant pole)
   $s_d = \sigma + j\omega_d$ 를 대입하여 K_C 값을 구한다.

$$\left| K_C \frac{s + z}{s + p} G(s) \right| = 1$$

Leg Compensator(뒤짐 보상기)

→ 시스템의 과도응답 특성은 만족스러우나 정상상태 특성이 만족스럽지 않을 경우 사용한다.

뒤짐 보상기는 과도응답 특성을 크게 변화시키지 않으면서 개루프 이득을 가능한 많이 증가 시키는 것이 목적이다.
근궤적을 크게 변화시키지 않기 위해 뒤짐 회로망의 각도 기여를 5°와 같은 작은 값으로 제한하여야 하는데 이를 위해서 뒤짐보상기의 극점과 영점을 s 평면의 원점 부근에서 서로 가까이 배치해야한다.

– 뒤짐보상기 설계 방법

1. 먼저 보상되지 않은 시스템의 근궤적선도를 그린다.

만약 주요 폐루프극점(Dominant pole)에서 각도 조건 $\underline{\angle G(s)H(s)} = \pm 180^{o}(2k + 1) \quad (k = 0,1,2,\ldots)$ 을 만족하지 않으면 앞섬 보상기를 먼저 구해야한다.

2. 뒤짐보상기의 전달함수는 다음과 같다고 놓는다.

$$G_C(s) = \hat{K}_C \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \hat{K}_C \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \qquad (\beta > 1)$$

3. 문제에서 주어진 정적오차상수를 평가하고 사양을 충족시키는 데 필요한 정적오차상수의 증가량을 결정한다

시스템의 정상상태오차는 다음과 같이 구할 수 있다.

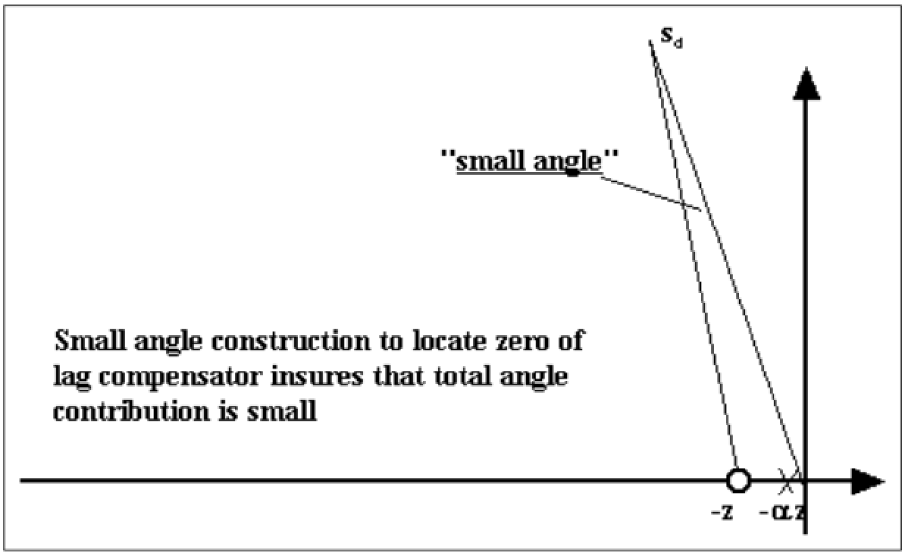
$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{t \to 0} sE(s)$$

그리고 시스템의 차수와 입력 신호에 따라서 정적오차상수는 다음과 같이 나타난다.

Table 1: Steady state errors

System	Step input	Ramp input	Parabolic input
Type-0	$\frac{1}{1+kp}$	∞	∞
Type-1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
Type-2	0	0	$\frac{1}{K_a}$

4. 근궤적의 변화를 최소화 하면서 정적오차상수를 필요한만큼 증가시킬수 있는 뒤짐보상기의 극점과 영점을 결정한다



근궤적의 변화를 최소화시키기 위해서는 주요 폐루프극점 기준으로 보상기의 극점 방향 직선과 영점 방향 직선 사이의 각도가 매우 작아야하고(보통 5°이내) 극점과 영점이 0 에 가까이 근접해야한다.

그리고 정상상태오차는 보상기의 영점과 극점 사이의 비 만큼 줄어든다.
(보상기의 영점보다 극점이 클수록 정상상태오차가 줄어든다)

5. 보상된 시스템에 대한 새로운 근궤적선도를 그리고 주요 폐루프극점이 요구되는 위치에 있도록 크기조건으로부터 보상기의 이득 K_C 을 조절한다.
(보상기의 영점과 극점이 0 에 가까이 위치해있기 때문에 K_C 는 약 1 이 될 것이다.)

보상기 전달함수 크기가 1 이 되도록 보상기 식에 주요 폐루프극점(Dominant pole) $s_d = \sigma + j\omega_d$ 를 대입하여 K_C 값을 구한다.

$$\left| K_C \frac{s+z}{s+p} \right| = 1$$

Leg-Lead Compensator(뒤짐-앞섬 보상기)

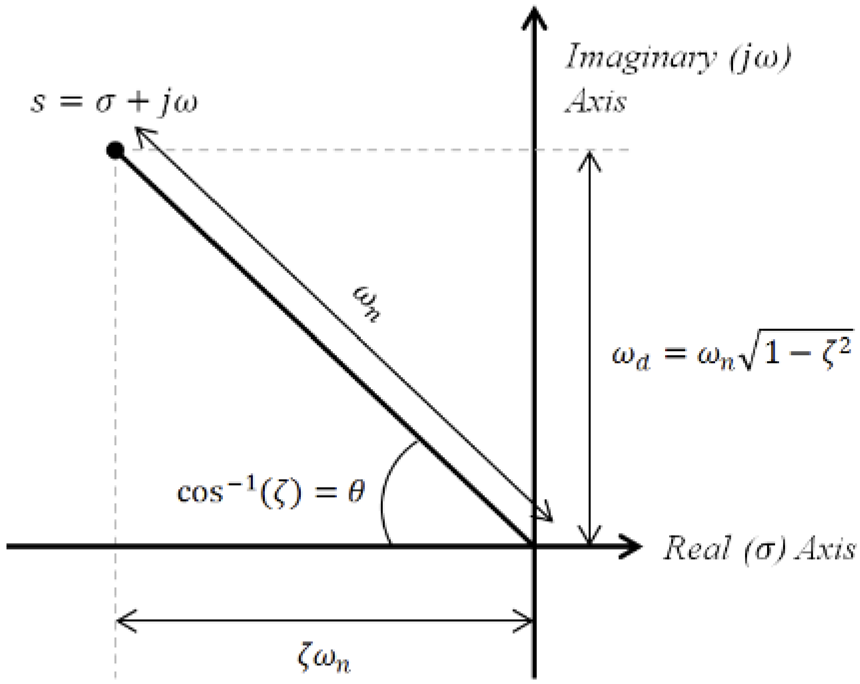
→ 시스템의 과도응답 특성과 정상상태 특성 모두 만족스럽지 않을 경우 사용한다.

먼저 앞섬 보상기의 전달함수를 구한 다음 뒤짐 보상기의 전달함수를 구해서 둘을 곱하면 된다.

PID 제어기 설계

1. 얼마나 과도응답을 개선해야 하는지 결정하기 위해 비보상 시스템의 성능을 평가한다.

2. 과도 응답 설계 조건을 만족하도록 PD 제어기를 설계하고 영점 위치와 루프 이득을 계산한다.
→ peak time 을 줄이기 위해 주요 폐루프극점의 위치를 정해준다.
만약 peak time 을 2/3 만큼 줄인다고 가정하면



주요 폐루프극점의 허수부

$$\omega_d = \frac{\pi}{(2/3)T_p}$$

주요 폐루프극점의 실수부

$$\sigma = \frac{\omega_d}{\tan(\cos^{-1}\zeta)}$$

계산된 주요 폐루프극점 좌표 $s = \sigma + j\omega_d$ 를 표시하고 각도 조건
$\underline{/G(s)H(s)} = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (k = 0,1,2,\ldots)$ 을 이용해서
이 극점을 갖기 위한 보상된 영점 Z_c 를 구한다.

영점의 필요 각도가 ϕ_c 라고 하면

$\frac{\omega_d}{z_c + \sigma} = \tan\phi_c$ 를 이용해서 보상된 영점 Z_c 를 구하여 PD 제어기를 구한다.

$$G_{PD}(s) = (s + z_c)$$

3. 정상상태 오차에 대한 설계 조건을 만족하도록 오차를 줄여줄 PI 제어기를 설계한다.
PI 제어기의 영점을 원점 가까이에 배치시킬수록 정상상태 오차가 줄어들지만 응답이 느려진다.
따라서 PI 제어기를 다음과 같이 선정하고 원하는 응답에 따라 영점의 위치를 조절한다.

$$G_{PI}(s) = \frac{(s + 0.5)}{s}$$

4. 각각의 PID 값에 대한 이득 K 를 결정한다.
→ PD 제어기와 PI 제어기를 곱하면 된다

$$G_{PID}(s) = G_{PD}(s)\,G_{PI}(s) = \frac{(s + z_c)(s + 0.5)}{s}$$

5. 모든 설계 조건이 만족되는지 시뮬레이션을 통하여 확인하고 만족하지 않는 경우 다시 설계한다.

https://m.blog.naver.com/PostView.nhn?blogId=dbgus84&logNo=60093357067&proxyReferer=https%3A%2F%2Fwww.google.com%2F
참고 링크