

# TI DSP, MCU 및 Xilinx Zynq FPGA 프로그래밍 전문가 과정

## IRON DRONE

Quad Copter



강사 - Innova Lee(이상훈)  
[gcccompil3r@gmail.com](mailto:gcccompil3r@gmail.com)

학생 - GJ (박현우)  
[uc820@naver.com](mailto:uc820@naver.com)

# 목차

## Mathematical Modelling and Control of a Quadrotor

### 1. 배경지식

- 1) 오일러 각도
- 2) 회전행렬
- 3) 선속도와 각속도
- 4) 토크
- 5) 선형대수학(행렬)
- 6) 벡터행렬 미분
- 7) 벡터의 외적
- 8) 기울기 벡터
- 9) 회전에 대한 뉴턴 방정식 및 회전관성
- 10) 평행축 정리

### 2. Kinematic Model

### 3. Dynamics Model

### 4. Rotor Dynamics

### 5. State Space Model

### 6. Linear Model

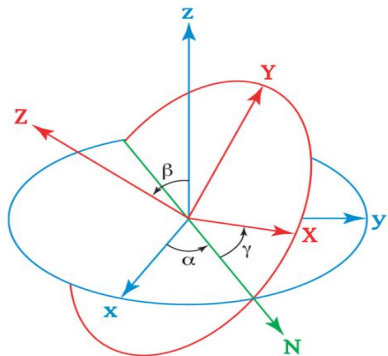
### 7. Quadrotor Parameters

### 8. Matlab Modelling

### 9. Acceleration to Angle

# 1. 배경지식 1)오일러 각도, 2) 회전행렬

Euler Transform Matrix (오일러 변환 행렬)은 관성 좌표계(inertial Frame)를 기체 좌표계(Body Frame)로 변환할 때 사용하는 행렬  
일반적으로 3(z-축) – 2(y-축) – 1(x-축) 과정 (Yaw – Pitch – Roll ) 의 순서로 변환



출처 : Wikimedia Commons

## 3. 변환

### 3.1 오일러 각도 변환 - con't

- Z-축을 회전 축으로 하여  $\varphi$  만큼 회전

오른쪽 그림과 같이 Z-축을 기준으로 오른쪽 좌표 시스템을 설명할 수 있다.

$P_1(1,0,0)$ 에 대하여,  $\varphi$  만큼 회전 시킬 경우, 삼각함수 표현법을 통하여,

$$x = 1 \times \cos \varphi \quad y = 1 \times \sin \varphi \quad z = 0$$

으로 변환된다.

$P_2(0,1,0)$ 에 대하여,  $\varphi$  만큼 회전 시킬 경우, 삼각함수 표현법을 통하여,

$$x = 1 \times \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin \varphi \quad y = 1 \times \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos \varphi \quad z = 0$$

으로 변환된다.

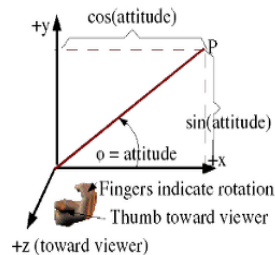
$P_3(0,0,1)$ 의 경우 회전 축임으로,  $x=0, y=0, z=1$ 이 그대로 유지 된다.

점 세 개에 대한 열 기온 행렬로 표현 하면,

오일러 각도 변환 중 Z-축 기준 행렬 값을 얻을 수 있다.

$$Z_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad X_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$$

## 변환 - EULER



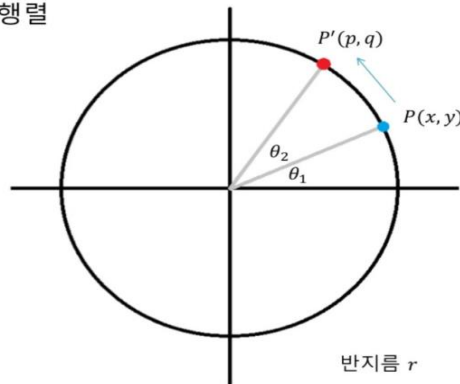
+z (toward viewer)

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

## <회전행렬>

### 회전행렬



반지름 r

$$\begin{cases} p = r \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ q = r \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \theta_2 x - \sin \theta_2 y = p \\ \sin \theta_2 x + \cos \theta_2 y = q \end{cases}$$

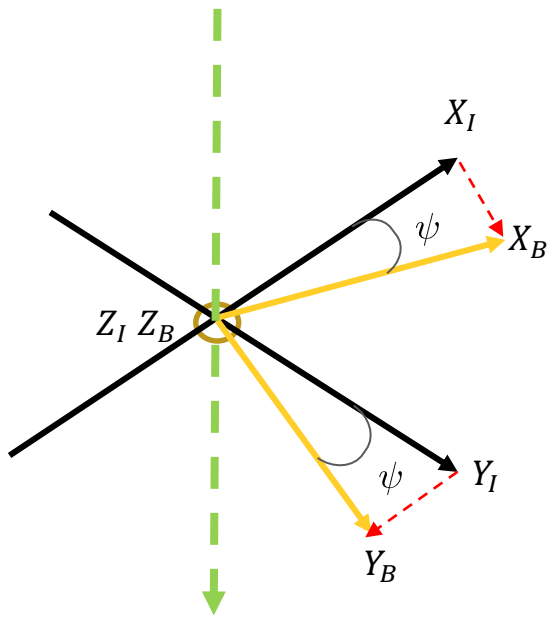
$$\begin{cases} p = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 - r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ q = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 + r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = x \cos \theta_2 - y \sin \theta_2 \\ q = y \cos \theta_2 + x \sin \theta_2 \end{cases}$$

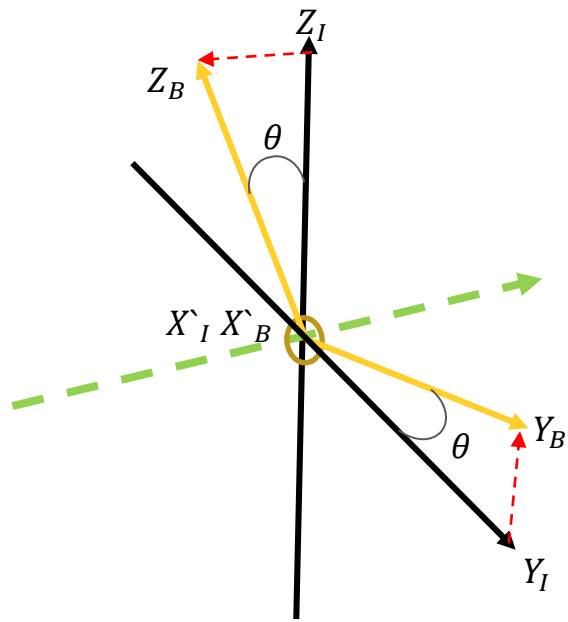
$$\begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

# 1. 배경지식 1)오일러 각도, 2) 회전행렬

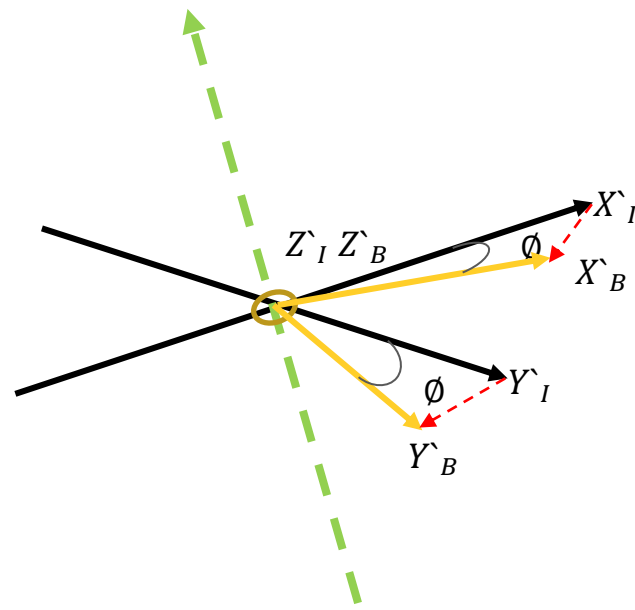
I = 관성 좌표계  
B = 기체 좌표계



<Z축 기준 회전>



<바뀐 X축 기준 회전>



<바뀐 Z축 기준 회전>

# 1. 배경지식 1)오일러 각도, 2) 회전행렬

$${}^bC_e(\Theta) = C_x(\phi)C_y(\theta)C_z(\psi)$$

X
Y
Z

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

XZX	$\begin{bmatrix} c_2 & -c_3s_2 & s_3s_2 \\ c_1s_2 & c_1c_2c_3 - s_1s_3 & -c_2c_1s_3 - c_3s_1 \\ s_2s_1 & c_1s_3 + c_3c_2s_1 & c_1c_3 - c_2s_1s_3 \end{bmatrix}$	XZY	$\begin{bmatrix} c_2c_3 & -s_2 & c_2s_3 \\ s_1s_3 + c_3c_1s_2 & c_1c_2 & c_1s_2s_3 - c_3s_1 \\ c_3s_1s_2 - c_1s_3 & c_2s_1 & s_1s_2s_3 + c_1c_3 \end{bmatrix}$
YYX	$\begin{bmatrix} c_2 & s_3s_2 & c_3s_2 \\ s_2s_1 & c_1c_3 - c_2s_1s_3 & -c_1s_3 - c_3c_2s_1 \\ -c_1s_2 & c_1c_2s_3 + c_3s_1 & c_1c_2c_3 - s_1s_3 \end{bmatrix}$	XYZ	$\begin{bmatrix} c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 \\ c_1s_3 + c_3s_1s_2 & c_1c_3 - s_1s_2s_3 & -c_2s_1 \\ s_1s_3 - c_1c_3s_2 & c_1s_2s_3 + c_3s_1 & c_1c_2 \end{bmatrix}$
YXY	$\begin{bmatrix} c_1c_3 - c_2s_1s_3 & s_2s_1 & c_1s_3 + s_1c_2c_3 \\ s_3s_2 & c_2 & -c_3s_2 \\ -c_2c_1s_3 - c_3s_1 & c_1s_2 & c_1c_2c_3 - s_1s_3 \end{bmatrix}$	YXZ	$\begin{bmatrix} c_1c_3 + s_1s_2s_3 & c_3s_1s_2 - c_1s_3 & c_2s_1 \\ c_2s_3 & c_2c_3 & -s_2 \\ c_1s_2s_3 - c_3s_1 & s_1s_3 + c_1c_3s_2 & c_1c_2 \end{bmatrix}$
YZY	$\begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - s_1s_3 & -c_1s_2 & c_2c_1s_3 + c_3s_1 \\ c_3s_2 & c_2 & s_3s_2 \\ -c_1s_3 - c_3c_2s_1 & s_2s_1 & c_1c_3 - c_2s_1s_3 \end{bmatrix}$	YZX	$\begin{bmatrix} c_1c_2 & s_1s_3 - c_1c_3s_2 & c_1s_2s_3 + c_3s_1 \\ s_2 & c_2c_3 & -c_2s_3 \\ -c_2s_1 & c_1s_3 + c_3s_1s_2 & c_1c_3 - s_1s_2s_3 \end{bmatrix}$
ZYZ	$\begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - s_1s_3 & -c_2s_3c_1 - c_3s_1 & c_1s_2 \\ c_1s_3 + c_3c_2s_1 & c_1c_3 - c_2s_1s_3 & s_2s_1 \\ -c_3s_2 & s_3s_2 & c_2 \end{bmatrix}$	ZYX	$\begin{bmatrix} c_1c_2 & c_1s_2s_3 - s_1c_3 & s_1s_3 + c_1s_2c_3 \\ s_1c_2 & s_1s_2s_3 + c_1c_3 & s_1s_2c_3 - c_1s_3 \\ -s_2 & c_2s_3 & c_2c_3 \end{bmatrix}$
ZXZ	$\begin{bmatrix} c_1c_3 - c_2s_1s_3 & -c_1s_3 - c_3c_2s_1 & s_2s_1 \\ c_2c_1s_3 + c_3s_1 & c_1c_2c_3 - s_1s_3 & -c_1s_2 \\ s_3s_2 & c_3s_2 & c_2 \end{bmatrix}$	ZXY	$\begin{bmatrix} c_1c_3 - s_1s_2s_3 & -s_1c_2 & c_1s_3 + s_1s_2c_3 \\ c_1s_2s_3 + s_1c_3 & c_1c_2 & s_1s_3 - c_1s_2c_3 \\ -c_2s_3 & s_2 & c_2c_3 \end{bmatrix}$

where  $c = \cos$  and  $s = \sin$ . Because  ${}^bC_e$  is orthonormal [Bak, 2002, p. 13] the inverse transformation can be described at the transpose of  ${}^bC_e$ .

$${}^bC_e^{-1}(\Theta) = {}^bC_e^T(\Theta) \tag{2.5}$$

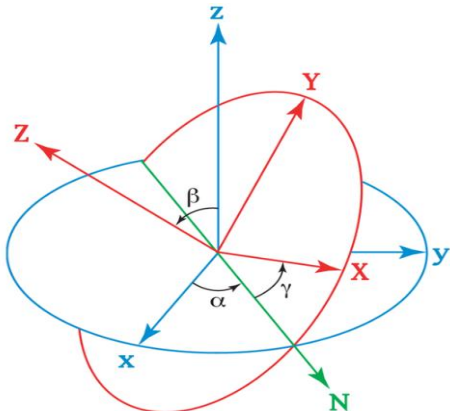
관성좌표계에서 기체좌표계로의 변환 행렬을

transpose하면 body frame에서 inertial frame으로 다시 변환할 수가 있다.

똑같은 각도라도 곱하는 순서마다 회전 방향이 달라진다.

# 1. 배경지식 1)회전행렬

Euler Transform Matrix (오일러 변환 행렬)은 관성 좌표계(inertial Frame)를 기체 좌표계(Body Frame)로 변환할 때 사용하는 행렬  
일반적으로 3(z-축) – 2(y-축) – 1(x-축) 과정 (Yaw – Pitch – Roll ) 의 순서로 변환

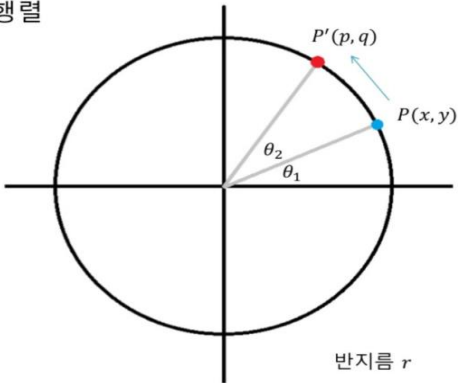


출처 : Wikimedia Commons

- 오일러 각도  
공간 좌표계(space coordinate)를 (x, y, z)라 하자.
1. (z 회전) z-축을 회전축으로 하여 α 만큼 x-y 좌표축을 회전시키고,
  2. (x 회전) 회전된 좌표축 x-축(이제 N-축)을 회전축으로 하여 β 만큼 z-y 좌표축을 회전시키고,
  3. (z 회전) 다시 z-축을 회전축으로 γ 만큼 x-y 좌표축을 회전시킨다.
- 이와같이 z-x-z 순서로 차례로 회전시키면, 물체 좌표계 (body coordinate) (X, Y, Z)를 얻는다.

## <회전행렬>

■ 회전행렬



$$\begin{cases} p = r \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ q = r \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta_2 x - \sin\theta_2 y = p \\ \sin\theta_2 x + \cos\theta_2 y = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = r \cos\theta_1 \cos\theta_2 - r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ q = r \sin\theta_1 \cos\theta_2 + r \cos\theta_1 \sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = x \cos\theta_2 - y \sin\theta_2 \\ q = y \cos\theta_2 + x \sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

# 1. 배경지식 3) 선속도와 각속도

일정하게 가속된 선운동 방정식과 회전운동 방정식의 유사성

접선 운동	회전 운동
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$$d \Rightarrow \theta$$

$$v \Rightarrow \omega$$

$$a \Rightarrow \alpha$$

- 회전 중심으로부터 수직거리  $r$  만큼 떨어진 곳에 있는 사람이

각도  $\theta$ 만큼 움직였을 때 원 둘레를 따라 움직인 원호의 길이가  $s$ 라면

$$\theta = \frac{s}{r} \Rightarrow s = r \cdot \theta$$

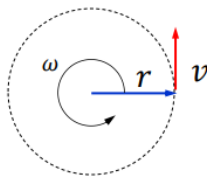
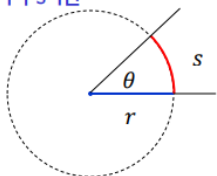
- 사람의 선속도는?

$$v = \frac{s}{t} = \frac{r \cdot \theta}{t} = r \cdot \frac{\theta}{t} = r \cdot \omega$$

$$\Rightarrow \frac{v}{r} = \omega = \frac{\theta}{t}$$

선속도는 반지름  $r$  에 비례하므로

- 중심에서 멀리 있는 사람의 선속도가 크다.

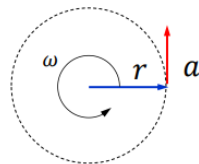


$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dr}{dt} \omega + \frac{d\omega}{dt} r \text{ (r vector)}$$

- 접선 성분

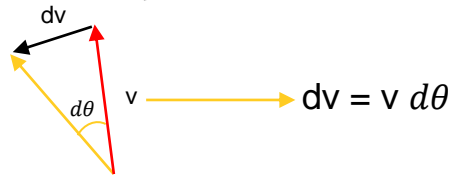
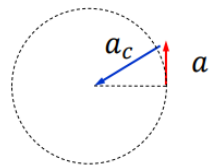
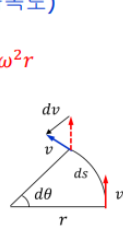
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{rd\omega}{dt} = r\alpha$$

$$\frac{v}{r} = \omega \iff \frac{a}{r} = \alpha$$



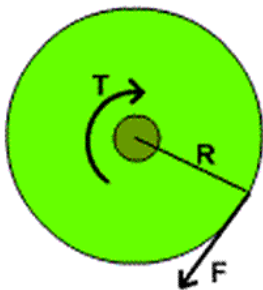
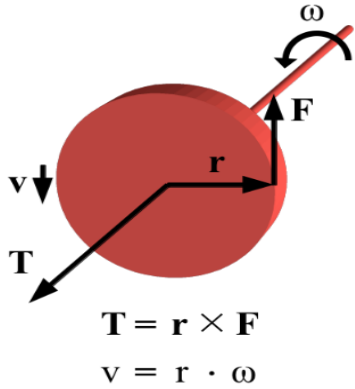
- 지름 성분 (구심 가속도)

$$a_c = \frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$



# 1. 배경지식 4) 토크

직진 운동 (translational motion)	회전 운동 (rotational motion)
힘(force) F	T 토크(torque)
거리(distance) S	θ 각도(angle)
속도(velocity) v	ω 각속도(angular velocity)
가속도(acceleration) a	α 각가속도(angular acceleration)
질량(mass) m	J 관성모멘트(inertial moment)



Torque applied to wheel results in force on edge



Force on wrench creates torque on bolt



# 1. 배경지식 5) 선형대수학(행렬)

## transpose

$$A=(a_{ij}) \in Mat_{m,n}(K)$$

라고 할 때,

$$A^T=(a_{ji}) \in Mat_{n,m}(K)$$

를  $A$ 의 전치행렬이라고 합니다. 말 그대로  $i$ 와  $j$ 의 순서가 뒤바뀐 거죠, 예를 들어서,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

가 되겠죠.

$$A, B \in Mat_{m,n}(K), C \in Mat_{n,r}(K), k \in K$$

일 때,

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(kA)^T = kA^T$$

$$(A^T)^T = A$$

$$(AC)^T = C^T A^T$$

## 대각행렬 곱

$$A \in Mat_{n,n}(K) \text{ 일 때}$$

$$tr(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

$$A, B \in Mat_{n,n}(K), k \in K \text{ 일 때}$$

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$

$$tr(kA) = k \cdot tr(A)$$

$$tr(AB) = tr(BA)$$

$$tr(A^T) = tr(A)$$

$$AB - BA = I_n \text{인 } n\text{-차 정사각행렬 } A, B \text{는 존재하는가?}$$

$$tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA) = 0 \neq n = tr(I)$$

## Diagonal

여기 hyon notation을 소개하는 부분에서

$$J = \begin{pmatrix} I_2 & \text{짜다} 0 \\ \text{짜다} 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

라는 행렬을 한 번 소개했는데,

$$\text{그럼 애는 } diag(I_2, I_2) \text{가 되겠습니다.}$$

이런 block diagonal matrix는 다음과 같은 성질을 가집니다.

$$diag(A_1, \dots, A_k) \cdot diag(B_1, B_2, \dots, B_k) = diag(A_1 B_1, \dots, A_k B_k)$$

$$diag(A_1, \dots, A_k)^{-1} = diag(A_1^{-1}, \dots, A_k^{-1})$$

# 1. 배경지식 6) 벡터 행렬의 미분

## 벡터, 행렬 표현 및 미분 기호

	스칼라	벡터	행렬
스칼라	$\frac{\partial y}{\partial x}$	$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}$	$\frac{\partial Y}{\partial X}$
벡터	$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}}$	$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$	
행렬	$\frac{\partial y}{\partial X}$		

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & \cdots \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{array} \right] \quad \text{--- (1)} \qquad \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{x}} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial y_{11}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_{1n}}{\partial x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{m1}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_{mn}}{\partial x} \end{array} \right] \quad \text{--- (4)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial y_1}{\partial x} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x} \end{array} \right] \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial X} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial y}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_{1n}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{mn}} \end{array} \right] \quad \text{--- (3)} \qquad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{array} \right] \quad \text{--- (5)}$$

### 3. 벡터, 행렬 미분의 계산

상수벡터 **a**와 열벡터 **x**에 대해 **a<sup>T</sup>x**를 x로 미분하면 그 결과값은 **a<sup>T</sup>**가 됩니다. 정말로 그렇게 되는지 앞서 설명한 벡터, 행렬 미분 정의에 따라 실제로 계산을 해 보겠습니다.

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = \left[ \begin{array}{cccc} a_1 & \cdots & a_n \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right] = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \quad \text{--- (6)}$$

와 같이 **a<sup>T</sup>x**는 하나의 스칼라 값입니다. 따라서 스칼라 **a<sup>T</sup>x**를 식 (1)을 이용하여 벡터 x로 미분하면

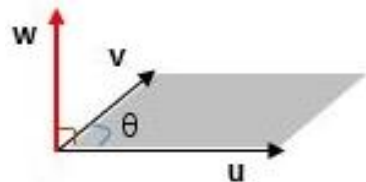
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} &= \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\partial x_1} & \cdots \frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\partial x_n} \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)}{\partial x_1} & \cdots \frac{\partial (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)}{\partial x_n} \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{cccc} a_1 & \cdots & a_n \end{array} \right] \\ &= \mathbf{a}^T \end{aligned} \quad \text{--- (7)}$$

**a, b**: 상수 벡터  
**A**: 상수 행렬  
**y, z**: **x**와 함수관계를 갖는 벡터

식	x로 미분 결과
<b>a·x=a<sup>T</sup>x=x<sup>T</sup>a</b>	<b>a<sup>T</sup></b>
<b>Ax</b>	<b>A</b>
<b>x<sup>T</sup>A</b>	<b>A<sup>T</sup></b>
<b>x<sup>T</sup>Ax</b>	<b>x<sup>T</sup>(A+A<sup>T</sup>)</b>
<b>y<sup>T</sup>Az</b>	<b>y<sup>T</sup>A <math>\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}}</math> +z<sup>T</sup>A<sup>T</sup> <math>\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}</math></b>
<b>y<sup>T</sup>z=y·z</b>	<b>y<sup>T</sup> <math>\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}}</math> +z<sup>T</sup> <math>\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}</math></b>

<b>  x  <sup>2</sup>=x·x=x<sup>T</sup>x</b>	<b>2x<sup>T</sup></b>
<b>  x  </b>	<b><math>\frac{\mathbf{x}^T}{\ \mathbf{x}\ }</math></b>
<b>  x-a  </b>	<b><math>\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T}{\ \mathbf{x}-\mathbf{a}\ }</math></b>
<b>  Ax-b  <sup>2</sup></b>	<b>2(Ax-b)<sup>T</sup>A</b>

# 1. 배경지식 7) 벡터의 외적



$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \end{aligned}$$

예제 1. 3차원

예제 1. Dot product = 스칼라 곱 :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

예제 2. Cross product = 벡터 곱 :  $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$

$|\vec{a}|$ 는 벡터의 크기  
 $= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$  을 성분으로 표현  $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$

예제 3.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

$= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$

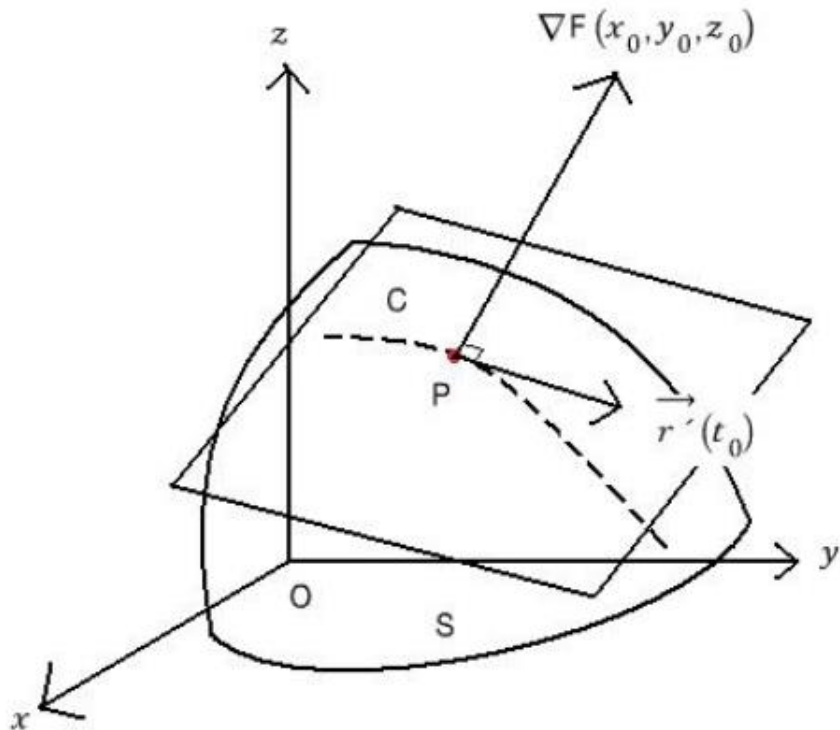
$\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{bmatrix}$  에서  $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$   $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$   $\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$   
 다른 성분은 모두 0 이므로  
 $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$   $\hat{j} \cdot \hat{k} = 0$   $\hat{k} \cdot \hat{i} = 0$

예제 4.

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$

$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$   $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$   $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$  이 성립함.

# 1. 배경지식 8) 기울기 벡터(Gradient Vector)



- 정리 1 -

곡면  $S : F(x, y, z) = k$  ( $k$ 는 상수) 위의 점  $P(x_0, y_0, z_0)$  에 대하여  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$  는 점 P에서 곡면 S에 접하는 접평면의 법선벡터이다.

- 정리 2 -

곡면  $S : F(x, y, z) = k$  ( $k$ 는 상수) 위의 점  $P(a, b, c)$  에 접하는 접평면의 방정식은  $F_x(a, b, c)(x-a) + F_y(a, b, c)(y-b) + F_z(a, b, c)(z-c) = 0$  이다.

그리고 점 P를 지나면서 접평면에 수직인 법선의 방정식은

$$\frac{x-a}{F_x(a, b, c)} = \frac{y-b}{F_y(a, b, c)} = \frac{z-c}{F_z(a, b, c)}$$
 이다.

ex1) 타원체  $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$  위의 점  $P(-2, 1, -3)$  에 접하는 접평면의 방정식과 점 P를 지나고 접평면에 수직인 법선의 방정식을 구하시오.

(풀이)

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \quad \text{이라고 하면} \quad \nabla F = \left\langle \frac{x}{2}, 2y, \frac{2z}{9} \right\rangle$$

따라서 점 P에서의 법선벡터는  $\nabla F(-2, 1, -3) = \left\langle -1, 2, -\frac{2}{3} \right\rangle$  이므로 접평면의 방정식은

$$-(x+2) + 2(y-1) - \frac{2}{3}(z+3) = 0 \quad \text{이고 정리하면} \quad 3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad \text{이다.}$$

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z+3}{2} \quad \text{이다.}$$

그리고 법선의 방정식은

# 1. 배경지식 9) 회전에 대한 뉴턴 방정식 및 회전관성

- 회전에 대한 뉴턴 방정식

$$\overrightarrow{\tau_{net}} = I \overrightarrow{\alpha}$$

↑

알짜토크

↑

회전 관성

→

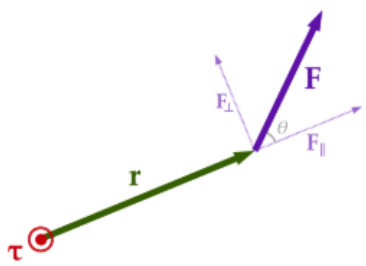
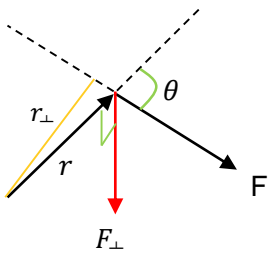
각가속도 :  $\overrightarrow{\alpha} = \frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt}$

각속도 크기 :  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

알짜토크

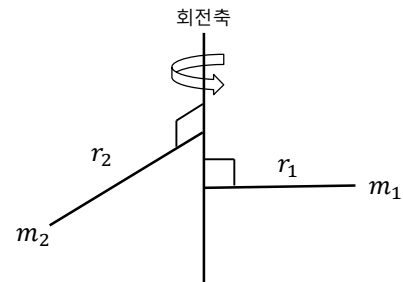
합  $\vec{\tau}$  (시계 +) + 합  $\vec{\tau}$  (반시계 -)

- Moment의 크기 :  $\tau = r F \sin \theta$   
 $= r F_{\perp} = r_{\perp} F$
- Torque의 크기  
 $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

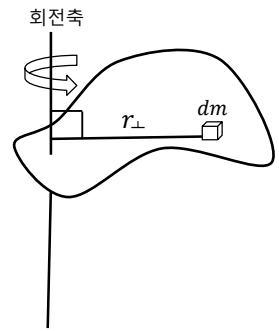


- 회전관성(I)

1) 질점계  $I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$

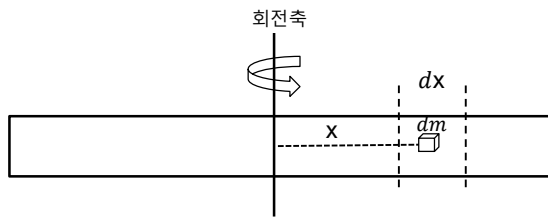


2) 고체(강체 : Rigid Body)계 :  $I = \int r_{\perp}^2 dm$



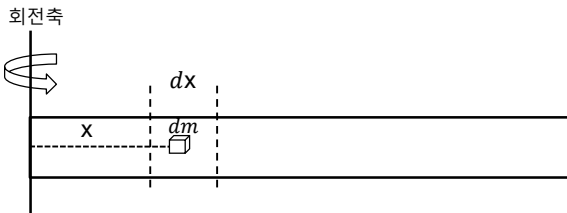
# 1. 배경지식 10) 평행축 정리

예제) 길이  $L$ , 질량  $M$ 인 균일 막대



$$\therefore I = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 \lambda dx, \quad dm = \lambda dx, \quad \lambda \left( \text{선밀도} \left[ \frac{kg}{m} \right] : \text{일정} \right)$$

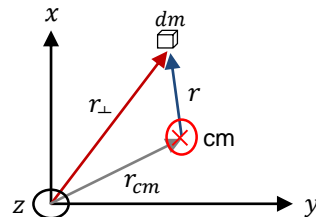
$$I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$$



$$\therefore I = \int_0^L x^2 \lambda dx = \frac{1}{3} ML^2$$

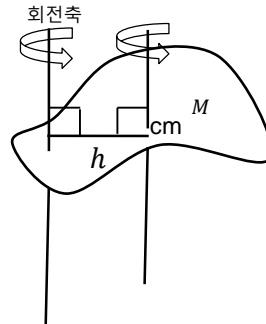
$$\text{평행축 정리} \rightarrow I = \frac{1}{12} ML^2 + M \left( \frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

증명)



$$\begin{aligned} I &= \int r_{\perp}^2 dm = \int (r_{cm}^2 + r^2 + \vec{r}_{cm} \cdot \vec{r}) dm \\ &= \int r_{cm}^2 dm + \int r^2 dm + \int \vec{r}_{cm} \cdot \vec{r} dm = 0 \end{aligned}$$

• 평행축 정리  $\rightarrow I = I_{cm} + Mh^2$



## 2. Kinematic Model

- Rotation Matrix

$$R_i^b{}_{zyx} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\psi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi s\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

$$(R_i^b{}_{zyx})^T = R_b^i{}_{zyx} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\theta c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\theta c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

- Body Frame에서는 추력과 같은 힘을 표현.
- Inertial Frame에서는 중력, 쿼드로터의 위치를 표현.

- 그러므로, 둘 사이의 관계식이 필요하다.
- 또한, 쿼드로터의 각속도를 알기 위해서는 Body Coordinate Frame의 속도를 측정해주는 IMU가 필요하다.

## 2. Kinematic Model

- Rotation Matrix

Inertial Frame에서의 측정된 Euler rates  $\dot{\eta} = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ 와 angular body rates  $\omega = [p \ q \ r]^T$ 를 연관을 짓기 위해 변형이 필요하다.

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = R(\dot{\phi}) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R(\phi)R(\dot{\theta}) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R(\phi)R(\theta)R(\dot{\psi}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \sin \theta \dot{\psi} \\ \cos \phi \dot{\theta} + \sin \phi \cos \theta \dot{\psi} \\ -\sin \phi \dot{\theta} + \cos \phi \cos \theta \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}$ 의 값은 작으므로,  $R(\dot{\phi}) = R(\dot{\theta}) = R(\dot{\psi}) = I$

$$\omega = R_r \dot{\eta} \text{ where } \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

*hover position*에서 각도는  $\cos \phi \equiv 1, \cos \theta \equiv 1$   
 $\sin \phi = \sin \theta = 0 \ (\phi = \theta = 90^\circ)$



## 2. Kinematic Model

관성 좌표계 가속도  $\rightarrow \dot{v} = R\dot{v}_B + \dot{R}v_B$

관성 좌표계 각가속도  $\rightarrow \dot{\omega} = T\dot{\omega}_B + \dot{T}\omega_B$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\dot{T} = \left( \frac{\partial T}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial T}{\partial \psi} \dot{\psi} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\theta}c\theta \\ 0 & -\dot{\phi}s\phi & \dot{\phi}c\phi c\theta - \theta s\phi s\theta \\ 0 & -\dot{\phi}c\phi & -\dot{\phi}s\phi s\theta - \dot{\theta}c\phi s\theta \end{bmatrix}$$

- $\psi$  is measured in the Inertial Frame
- $\theta$  is measured in Intermediate Frame #1
- $\phi$  is measured in Intermediate Frame #2
- ... which is

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3 \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{H}_2^B \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{H}_1^B \mathbf{H}_1^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_I^B \dot{\Theta}$$

Can the inversion  
become singular?  
What does this mean?

Inverse transformation  $[(\cdot)^{-1} \neq (\cdot)^T]$

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi \sec\theta & \cos\phi \sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{L}_B^I \omega_B$$



### 3. Dynamics Model

- Rotational Equations of Motion

뉴턴-오일러 방정식을 가지고 Body Frame에서 rotational equations of motion을 도출하면,

$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega + M_G = M_B$$

Body Frame에서 각가속도의 변화율 / 로터의 회전 moments =  $\omega \times [0 \ 0 \ J_r\Omega_r]^T$

∴ 쿼드 움직임의 회전식은 =  $J\dot{\omega} + \omega \times J\omega + \omega \times [0 \ 0 \ J_r\Omega_r]^T = M_B$  으로 다시 쓸 수 있다.

Inertial Frame이 아닌, Body Frame에서의 회전식을 도출한 이유는 Inertia matrix는 시간에 독립적이기 때문이다.

$J$  : 쿼드로터의 diagonal inertia 행렬  
 $\omega$  : 각도의 Body rates  
 $M_G$  : 로터 inertia의 Gyroscopic moments  
 $M_B$  : Body Frame에서 쿼드로터에 미치는 Moments

$J_r$  : rotors' inertia  
 $\Omega_r$  : rotors' relative speed  $\Omega_r = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4$

### 3. Dynamics Model

- Inertia Matrix

Inertia Matrix는 diagonal matrix이다. 쿼드로터의 대칭성 때문에 나머지 성분은 0으로 볼 수 있다.

$I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  그리고  $I_{zz}$ 는 Body Frame에서 축에 관한 area moments of inertia로 표현된다.

- Moments Action on the Quadrotor( $M_B$ )

공기역학의 Momnets  
= 상수 (프로펠러에 의해 고정값)

Thrust

$$F_i = \frac{1}{2} \rho A C_T r^2 \Omega_i^2$$
$$= K_f \Omega_i^2$$

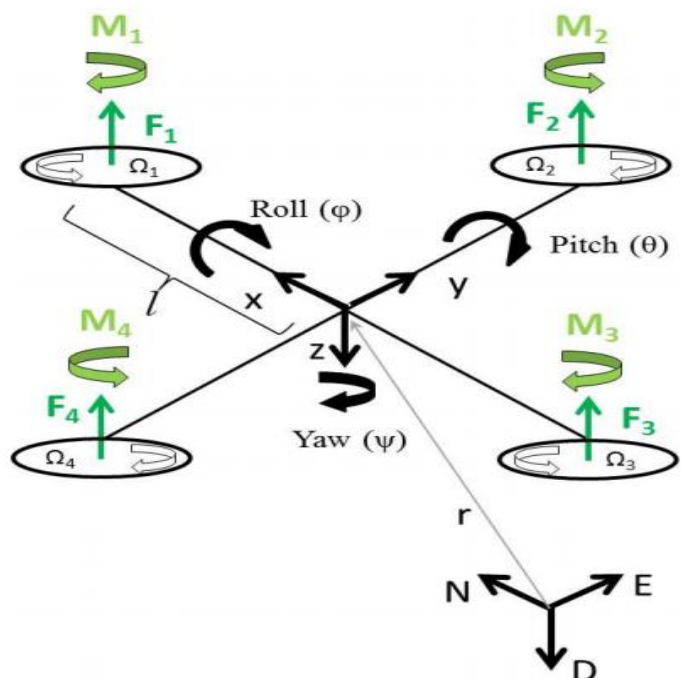
관성 모멘트

$$M_i = \frac{1}{2} \rho A C_D r^2 \Omega_i^2$$
$$= K_M \Omega_i^2$$

$\rho$	air density
$A$	blade area
$C_T, C_D$	aerodynamic coefficients
$r_b$	radius of blade
$\Omega_i$	angular velocity of rotor $i$

### 3. Dynamics Model

- Moments Action on the Quadrotor( $M_B$ )



① x축에 관한 모멘트는  $F_2$ 와  $F_4$ 에 의해 만들어짐.

$$\begin{aligned} M_x &= -F_2 l + F_4 l \\ &= -(K_f \Omega_2^2) l + (K_f \Omega_4^2) l \\ &= l K_f (-\Omega_2^2 + \Omega_4^2) \end{aligned}$$

② y축에 관한 모멘트는  $F_1$ 와  $F_3$ 에 의해 만들어짐.

$$\begin{aligned} M_y &= F_1 l - F_3 l \\ &= (K_f \Omega_1^2) l - (K_f \Omega_3^2) l \\ &= l K_f (\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \end{aligned}$$

③ z축에 관한 모멘트는 로터들의 추력  $F$ 에 의해 만들어지지 않는다.

$$M_z = M_1 - M_2 + M_3 - M_4$$

$$\begin{aligned} &= (K_M \Omega_1^2) - (K_M \Omega_2^2) + (K_M \Omega_3^2) - (K_M \Omega_4^2) \\ &= K_M (\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \end{aligned} \quad M_B = \begin{bmatrix} l K_f (-\Omega_2^2 + \Omega_4^2) \\ l K_f (\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\ K_M (\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \end{bmatrix}$$

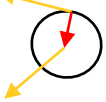
➤ Moments의 크기 :  $\tau = \gamma F \sin \theta$ ,  $\theta = 90^\circ$

### 3. Dynamics Model

where  $t(\theta) = \tan(\theta)$ . So, the kinematic model of the quadrotor is:

$$\begin{cases} \dot{x} = w[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)] - v[c(\phi)s(\psi) - c(\psi)s(\phi)s(\theta)] + u[c(\psi)c(\theta)] \\ \dot{y} = v[c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\psi)s(\theta)] - w[c(\psi)s(\phi) - c(\phi)s(\psi)s(\theta)] + u[c(\theta)s(\psi)] \\ \dot{z} = w[c(\phi)c(\theta)] - u[s(\theta)] + v[c(\theta)s(\phi)] \\ \dot{\phi} = p + r[c(\phi)t(\theta)] + q[s(\phi)t(\theta)] \\ \dot{\theta} = q[c(\phi)] - r[s(\phi)] \\ \dot{\psi} = r\frac{c(\phi)}{c(\theta)} + q\frac{s(\phi)}{c(\theta)} \end{cases} \quad (2.8)$$

Newton's law states the following matrix relation for the total force acting on the quadrotor:

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{F} = \text{ma} \text{ (a = 구심가속도 + 각속도)}} m(\omega_B \wedge v_B + \dot{v}_B) = f_B, \quad (2.9)$$


where  $m$  is the mass of the quadrotor,  $\wedge$  is the cross product and  $f_B = [f_x \ f_y \ f_z]^T \in \mathbb{R}^3$  is the total force.

Euler's equation gives the total torque applied to the quadrotor:

$$\mathbf{I} \cdot \dot{\omega}_B + \omega_B \wedge (\mathbf{I} \cdot \omega_B) = \mathbf{m}_B,$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} \times \mathbf{a} + \mathbf{Wb} \wedge (\mathbf{I} * \mathbf{Wb}) \quad (\mathbf{I} * \mathbf{Wb} \text{ 는 각운동량})$$

where  $\mathbf{m}_B = [m_x \ m_y \ m_z]^T \in \mathbb{R}^3$  is the total torque and  $\mathbf{I}$  is the diagonal inertia matrix:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

쿼드로터의 운동학적인 모델은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \dot{x} = w[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)] - v[c(\phi)s(\psi) - c(\psi)s(\phi)s(\theta)] + u[c(\psi)c(\theta)] \\ \dot{y} = v[c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\psi)s(\theta)] - w[c(\psi)s(\phi) - c(\phi)s(\psi)s(\theta)] + u[c(\theta)s(\psi)] \\ \dot{z} = w[c(\phi)c(\theta)] - u[s(\theta)] + v[c(\theta)s(\phi)] \\ \dot{\phi} = p + r[c(\phi)t(\theta)] + q[s(\phi)t(\theta)] \\ \dot{\theta} = q[c(\phi)] - r[s(\phi)] \\ \dot{\psi} = r\frac{c(\phi)}{c(\theta)} + q\frac{s(\phi)}{c(\theta)} \end{cases} \quad (2.8)$$

뉴턴의 법칙은 밑에 2.9에 있는 관계식은 쿼드로터에 작용하는 총 힘에 관한 식이다.

$m$ 은 쿼드로터의 질량,  $A$ 는 외적이고  $f_B = [f_x, f_y, f_z]^T$ 는 힘의 총합이다.

오일러의 식은 쿼드로터에 적용되는 총 토크를 준다.

$m$ 은 쿼드로터의 질량,  $A$ 는 외적이고  $f_B = [f_x, f_y, f_z]^T$ 는 힘의 총합이다.  
오일러의 식은 쿼드로터에 적용되는 총 토크를 준다.

$m_B = [m_x, m_y, m_z]^T$ 은 총 토크의 합이고  $I$ 는 사선의

관성 좌표이다.

### 3. Dynamics Model

So, the dynamic model of the quadrotor in the body frame is:

$$\begin{cases} f_x = m(\dot{u} + qw - rv) \\ f_y = m(\dot{v} - pw + ru) \\ f_z = m(\dot{w} + pv - qu) \\ m_x = \dot{p}I_x - qrI_y + prI_z \\ m_y = \dot{q}I_y + prI_x - prI_z \\ m_z = \dot{r}I_z - pqI_x + pqI_y \end{cases}$$

The equations stand as long as we assume that the origin and the axes of the body frame coincide with the barycenter of the quadrotor and the principal axes.

동체좌표계에서 쿼드로터의 동적인 모델은 아래와 같다

$$\begin{cases} f_x = m(\dot{u} + qw - rv) \\ f_y = m(\dot{v} - pw + ru) \\ f_z = m(\dot{w} + pv - qu) \\ m_x = \dot{p}I_x - qrI_y + prI_z \\ m_y = \dot{q}I_y + prI_x - prI_z \\ m_z = \dot{r}I_z - pqI_x + pqI_y \end{cases}$$

이 방정식은 동체좌표계와 쿼드로터의 중심 및 주축이 일치하는 것을 가정한다.

### 3. Dynamics Model

- Translational Equations of Motion

쿼드의 TEM(Translational Equations of Motion)은 뉴턴의 제 2법칙에 근간을 둔다. 밑의 식은 Earth inertial Frame에서 도출된다.

$$m\ddot{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} + RF_B$$

$r = [x \ y \ z]^T$	Quadrotor's distance from the inertial frame
$m$	Quadrotor's mass
$g$	gravitational acceleration $g = 9.81m/s^2$
$F_B$	nongravitational forces acting on the quadrotor in the body frame

- Nongravitational Forces Acting on the Quadrotor

쿼드로터가 평행 상태( 롤링, 피칭 x)일 때, 비 중력적인 힘은 프로펠러의 회전에 의해 생긴 힘(Thrust)이 생긴다.

$$F_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -K_f(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{bmatrix}$$

- ✓ 1, 2번째 행은 x, y 축 방향으로의 힘은 존재하지 않는다.
- ✓ 또한, 3번째 행에서만 힘을 받고 이 힘은 4개의 프로펠러가 만든 힘의 합이다.
- ✓ z-축이 기준이 아래를 향하기 때문에 현재 추력은 위로 작용하므로 추력의 부호는 ( - )를 가진다.

### 3. Dynamics Model

- Aerodynamic Effects

지금까지의 공식들은 quad body에 미치는 공기역학 효과는 무시했다. 하지만, 정확하게 현실에 적용하기 위해서는 공기역학을 포함시켜야 한다. 즉, 두 종류의 공기역학인 drag forces와 drag moments를 고려해야 한다.

- Drag forces

Quad Body가 움직이면서 공기와 마찰이 생기기 때문에, quad body의 움직임에 반하는 힘이 생긴다. Quad의 속도가 증가하면 Drag forces는 바로 증가한다.

Drag forces  $F_a$ 는 대략  $F_a = K_t \dot{r}$ 로 근사화 된다. ( $K_t$ : 공기역학의 변형 계수 행렬,  $\dot{r}$ : 위치벡터  $r$ 의 미분)

Quad Body에 추가적인 힘의 영향으로 TEM은 다시 재정의 된다.

$$m\ddot{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} + RF_B - F_a$$



### 3. Dynamics Model

- Drag Moments

Drag forces와 마찬가지로 공기 마찰 때문에 Drag moments  $M_a$ 도 quad body에 영향을 준다.

$$M_a = K_r \dot{\eta} \quad (K_r : \text{공기역학의 회전계수 행렬}, \dot{\eta} : \text{Euler rates})$$

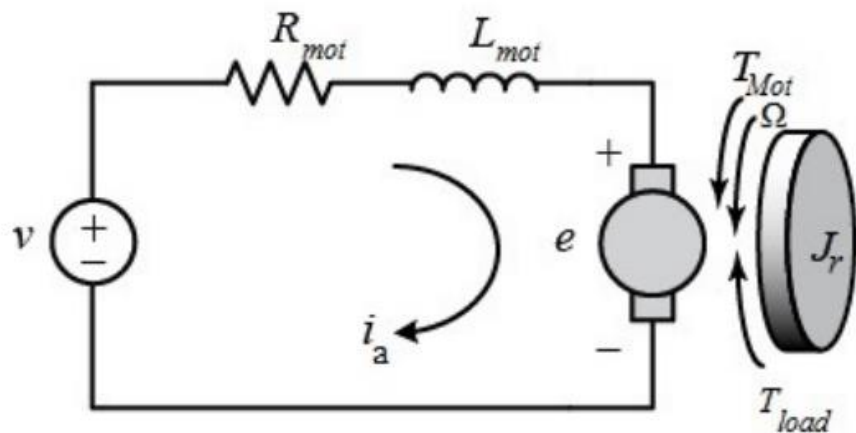
따라서, 재정의 된 Rotational equations of Motion은 아래와 같다.

$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega + \omega \times [0 \ 0 \ J_r\Omega_r]^T = M_B - M_a$$

$J$	Quadrotor's diagonal inertia Matrix
$\omega$	Angular body rates
$M_G$	Gyroscopic moments due to rotors' inertia
$M_B$	Moments acting on the quadrotor in the body frame

## 4. Rotor Dynamics

- Quadrotor에서는 주로 BLDC 모터를 사용한다. BLDC모터가 높은 Torque와 작은 마찰을 가지기 때문이다.
- 모터와 프로펠러는 기어가 없는 강체의 쌍으로 가정된다.
- 평형 상태에서의 BLDC 모터의 동역학은 전형적으로 DC모터와 동일하다.



DC Motor Schematic Diagram

- 키르히호프의 전압법칙을 사용하면 아래와 같은 식을 구할 수 있다.

$$v = R_{mot}i_a + L_{mot}\frac{di_a}{dt} + K_{mot}\Omega$$

위 식을 다시 정리하면 (L값이 매우 작다고 가정),  $v = R_{mot}i_a + \boxed{K_{mot}\Omega_i}$  또는  $i_a = \frac{v - K_{mot}\Omega_i}{R_{mot}}$

모터 토크 상수

## 4. Rotor Dynamics

- 기계적인 도출로 옮겨서 다시 식을 정리하면,

$$J_r \dot{\Omega}_i = T_{mot} - T_{load}$$

모터가 만드는 토크      프로펠러에 의해 생긴 토크

$$J_r \dot{\Omega}_i = K_{mot} \frac{v - K_{mot} \Omega_i}{R_{mot}} - K_M \Omega_i^2$$

- 오른쪽의 식처럼 전압에 관한 식으로 바꿀 수 있다.

$$v = \frac{R_{mot}}{K_{mot}} J_r \dot{\Omega}_i + K_{mot} \Omega_i + K_M R_{mot} \Omega_i^2$$

- Matlab's system Identifiacion ToolBox를 사용하여 지금까지 도출한 전압의 식을 오른쪽의 식처럼 1차 lag 전달함수로 근사화시킬 수 있다.

$$G(s) = \frac{\text{Actual rotor speed}}{\text{Commanded rotor speed}} = \frac{0.936}{0.178s + 1}$$

- BLDC 모터의 경우 PWM으로 작동하니 voltage가 RPM에 비례한다.
- 둘 사이의 관계는 모터와 프로펠러를 가지고 black box identification process를 사용하면 알아 낼 수 있다.

## 5. State Space Model

➤ Quadrotor의 수학적 모델을 상태공간 모델로 바꾸면 Control 문제를 보다 쉽게 다룰 수 있다.

### • State Vector X

➤ Quadrotor의 경우 위치, 각속도와 선속도를 state vector로 정의한다.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \end{bmatrix}^T$$

$$X = \begin{bmatrix} \phi & \dot{\phi} & \theta & \dot{\theta} & \psi & \dot{\psi} & z & \dot{z} & x & \dot{x} & y & \dot{y} \end{bmatrix}^T$$

### • Control Input Vector - U

➤  $U_1$  : altitude ( $z \dot{z}$ ) ,  $U_2$  : roll ( $\phi \dot{\phi}$ ) ,  $U_3$  : pitch ( $\theta \dot{\theta}$ ) ,  $U_4$  : yaw ( $\varphi \dot{\varphi}$ )

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} U_1 &= K_f(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ U_2 &= K_f(-\Omega_2^2 + \Omega_4^2) \\ U_3 &= K_f(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\ U_4 &= K_M(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_f & K_f & K_f & K_f \\ 0 & -K_f & 0 & K_f \\ K_f & 0 & -K_f & 0 \\ K_M & -K_M & K_M & -K_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix}$$

## 5. State Space Model

- Control Input Vector - U

➤ 컨트롤 입력으로부터 rotor의 각속도가 필요하다면, inverse 관계를 이용하면 된다.

$$\begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4K_f} & 0 & \frac{1}{2K_f} & \frac{1}{4K_M} \\ \frac{1}{4K_f} & -\frac{1}{2K_f} & 0 & -\frac{1}{4K_M} \\ \frac{1}{4K_f} & 0 & -\frac{1}{2K_f} & \frac{1}{4K_M} \\ \frac{1}{4K_f} & \frac{1}{2K_f} & 0 & -\frac{1}{4K_M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\omega}}$$

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{1}{4K_f}U_1 + \frac{1}{2K_f}U_3 + \frac{1}{4K_M}U_4}$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{1}{4K_f}U_1 - \frac{1}{2K_f}U_2 - \frac{1}{4K_M}U_4}$$

$$\Omega_3 = \sqrt{\frac{1}{4K_f}U_1 - \frac{1}{2K_f}U_3 + \frac{1}{4K_M}U_4}$$

$$\Omega_4 = \sqrt{\frac{1}{4K_f}U_1 + \frac{1}{2K_f}U_2 - \frac{1}{4K_M}U_4}$$

## 5. State Space Model

### • Rotational Equations of Motion

➤ 모멘트에 관해 재정의의를 하자.

$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega + \omega \times [0 \ 0 \ J_r\Omega_r]^T = M_B - M_a$$

$$M_B = \begin{bmatrix} l \ U_2 \\ l \ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_r\Omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \ U_2 \\ l \ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{xx}\ddot{\phi} \\ I_{yy}\ddot{\theta} \\ I_{zz}\ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}I_{zz}\dot{\psi} - \dot{\psi}I_{yy}\dot{\theta} \\ \dot{\psi}I_{xx}\dot{\phi} - \dot{\phi}I_{zz}\dot{\psi} \\ \dot{\phi}I_{yy}\dot{\theta} - \dot{\theta}I_{xx}\dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}J_r\Omega_r \\ -\dot{\phi}J_r\Omega_r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \ U_2 \\ l \ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

$J_r$  rotors' inertia

$\Omega_r$  rotors' relative speed  $\Omega_r = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4$

## 5. State Space Model

### • Rotational Equations of Motion

➤ 이전 장에서 구한 식을 각가속도에 관해서 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} &= \frac{l}{I_{xx}}U_2 - \frac{J_r}{I_{xx}}\dot{\theta}\Omega_r + \frac{I_{yy}}{I_{xx}}\dot{\psi}\dot{\theta} - \frac{I_{zz}}{I_{xx}}\dot{\theta}\dot{\psi} \\ \ddot{\theta} &= \frac{l}{I_{yy}}U_3 - \frac{J_r}{I_{yy}}\dot{\phi}\Omega_r + \frac{I_{zz}}{I_{yy}}\dot{\phi}\dot{\psi} - \frac{I_{xx}}{I_{yy}}\dot{\psi}\dot{\phi} \\ \ddot{\psi} &= \frac{1}{I_{zz}}U_4 + \frac{I_{xx}}{I_{zz}}\dot{\theta}\dot{\phi} - \frac{I_{yy}}{I_{zz}}\dot{\phi}\dot{\theta}\end{aligned}$$

➤ 식은 간단히 하기 위해 아래와 같이 정리한다.

$$a_1 = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}$$

$$a_2 = \frac{J_r}{I_{xx}}$$

$$a_3 = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}$$

$$a_4 = \frac{J_r}{I_{yy}}$$

$$a_5 = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}$$

$$b_1 = \frac{l}{I_{xx}}$$

$$b_2 = \frac{l}{I_{yy}}$$

$$b_3 = \frac{l}{I_{zz}}$$

➤ 변수를 각각 상응하는 것으로 바꾸고 정리하면  
각가속도에 대한 최종 수식은 아래와 같다.

definition of  $a_1 \rightarrow a_5$  and  $b_1 \rightarrow b_3$

$$x_1 \rightarrow x_6 \quad \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}$$

$$\ddot{\phi} = b_1 U_2 - a_2 x_4 \Omega_r + a_1 x_4 x_6$$

$$\ddot{\theta} = b_2 U_3 + a_4 x_2 \Omega_r + a_3 x_2 x_6$$

$$\ddot{\psi} = b_3 U_4 + a_5 x_2 x_4$$

## 5. State Space Model

- Translational Equation of Motion

➤ 추력에 관해 재정의를 하자.

$$F_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -U_1 \end{bmatrix} \quad m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\phi s\theta & s\phi s\psi + c\phi c\psi s\theta \\ c\theta s\psi & c\theta c\psi + s\phi s\psi s\theta & c\phi s\psi s\theta - c\psi s\theta \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -U_1 \end{bmatrix}$$

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (s\phi s\psi + c\phi c\psi s\theta)(-U_1) \\ (c\phi s\psi s\theta - c\psi s\phi)(-U_1) \\ (c\phi c\theta)(-U_1) \end{bmatrix}$$

$$\ddot{x} = \frac{-U_1}{m} (\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \sin \theta)$$

$$\ddot{y} = \frac{-U_1}{m} (\cos \phi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \phi)$$

$$\ddot{z} = g - \frac{U_1}{m} (\cos \phi \cos \theta)$$



## 5. State Space Model

- Translational Equation of Motion

➤ 이전 장의 추력에 관해 재정의된 식을 가속도에 관해서 다시 정리해보자.

$$\begin{array}{lcl} \ddot{x} = \frac{-U_1}{m}(\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \sin \theta) & & \ddot{x} = \frac{-U_1}{m}(\sin x_1 \sin x_5 + \cos x_1 \cos x_5 \sin x_3) \\ \ddot{y} = \frac{-U_1}{m}(\cos \phi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \phi) & \xrightarrow{\text{State 변수 } X} & \ddot{y} = \frac{-U_1}{m}(\cos x_1 \sin x_5 \sin x_3 - \cos x_5 \sin x_1) \\ \ddot{z} = g - \frac{U_1}{m}(\cos \phi \cos \theta) & & \ddot{z} = g - \frac{U_1}{m}(\cos x_1 \cos x_3) \end{array}$$

## 5. State Space Model

- State space Representation

➤ 지금까지 정리한 모든 식을 상태 공간 표현으로 된 Quadrotor의 완전한 수학적 모델은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{\phi} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{\phi} = x_4 x_6 a_1 - x_4 \Omega_r a_2 + b_1 U_2 \\ \dot{x}_3 &= \dot{\theta} = x_4 \\ \dot{x}_4 &= \ddot{\theta} = x_2 x_6 a_3 + x_2 \Omega_r a_4 + b_2 U_3 \\ \dot{x}_5 &= \dot{\psi} = x_6 \\ \dot{x}_6 &= \ddot{\psi} = x_2 x_4 a_5 + b_3 U_4 \\ \dot{x}_7 &= \dot{z} = x_8 \\ \dot{x}_8 &= \ddot{z} = g - \frac{U_1}{m} (\cos x_1 \cos x_3) \\ \dot{x}_9 &= \dot{x} = x_{10} \\ \dot{x}_{10} &= \ddot{x} = \frac{-U_1}{m} (\sin x_1 \sin x_5 + \cos x_1 \sin x_3 \cos x_5) \\ \dot{x}_{11} &= \dot{y} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} &= \ddot{y} = \frac{U_1}{m} (\sin x_1 \cos x_5 - \cos x_1 \sin x_3 \sin x_5) \end{aligned}$$
$$f(X, U) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 x_6 a_1 - x_4 \Omega_r a_2 + b_1 U_2 \\ x_4 \\ x_2 x_6 a_3 + x_2 \Omega_r a_4 + b_2 U_3 \\ x_6 \\ x_2 x_4 a_5 + b_3 U_4 \\ x_8 \\ g - \frac{U_1}{m} (\cos x_1 \cos x_3) \\ x_{10} \\ \frac{-U_1}{m} (\sin x_1 \sin x_5 + \cos x_1 \sin x_3 \cos x_5) \\ x_{12} \\ \frac{U_1}{m} (\sin x_1 \cos x_5 - \cos x_1 \sin x_3 \sin x_5) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}$$

## 6. Linear Model

➤ 지금까지 해온 일련의 식들을 나타내보자.

$$\mathbf{x} = [\phi \ \theta \ \psi \ p \ q \ r \ u \ v \ w \ x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^{12}$$

$$\dot{\phi} = p + r[c(\phi)t(\theta)] + q[s(\phi)t(\theta)]$$

$$\dot{\theta} = q[c(\phi)] - r[s(\phi)]$$

$$\dot{\psi} = r \frac{c(\phi)}{c(\theta)} + q \frac{s(\phi)}{c(\theta)}$$

$$\dot{p} = \frac{I_y - I_z}{I_x} r q + \frac{\tau_x + \tau_{wx}}{I_x}$$

$$\dot{q} = \frac{I_x - I_y}{I_y} p r + \frac{\tau_y + \tau_{wy}}{I_y}$$

$$\dot{r} = \frac{I_x - I_y}{I_z} p q + \frac{\tau_z + \tau_{wz}}{I_z}$$

$$\dot{u} = r v - q w - g[s(\theta)] + \frac{f_{wx}}{m}$$

$$\dot{v} = p w - r u + g[s(\phi)c(\theta)] + \frac{f_{wy}}{m}$$

$$\dot{w} = q u - p v + g[c(\theta)c(\phi)] + \frac{f_{wz} - f_t}{m}$$

$$\dot{x} = w[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)] - v[c(\phi)s(\psi) - c(\psi)s(\phi)s(\theta)] + u[c(\psi)c(\theta)]$$

$$\dot{y} = v[c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\psi)s(\theta)] - w[c(\psi)s(\phi) - c(\phi)s(\psi)s(\theta)] + u[c(\theta)s(\psi)]$$

$$\dot{z} = w[c(\phi)c(\theta)] - u[s(\theta)] + v[c(\theta)s(\phi)]$$

$$\ddot{x} = -\frac{f_t}{m}[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)]$$

$$\ddot{y} = -\frac{f_t}{m}[c(\phi)s(\psi)s(\theta) - c(\psi)s(\phi)]$$

$$\ddot{z} = g - \frac{f_t}{m}[c(\phi)c(\theta)]$$

$$\ddot{x} = -\frac{f_t}{m}[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)]$$

$$\ddot{y} = -\frac{f_t}{m}[c(\phi)s(\psi)s(\theta) - c(\psi)s(\phi)]$$

$$\ddot{z} = g - \frac{f_t}{m}[c(\phi)c(\theta)]$$

$$\ddot{\phi} = \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{\tau_x}{I_x}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{I_x - I_y}{I_y} \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{\tau_y}{I_y}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{\tau_z}{I_z}$$

## 6. Linear Model

- 삼각 함수가 서로 관련이 없으므로 폐쇄 형으로 찾기가 어렵다. 이러한 이유로 선형화는 small oscillation 으로 불리는 단순화 된 모델로 바뀌어야 한다. 이 단순화는 sine 함수를 인수( $\theta$ )로, cosine 함수를 1로 근사해서 만든다. 근사값은 인수( $\theta$ )가 작은 경우 유효합니다. 결과 시스템에 해당하는 방정식은 아래와 같다.

$$\begin{array}{lcl}
 \dot{\phi} \approx p + r\theta + q\phi\theta & & \dot{\phi} = p \\
 \dot{\theta} \approx q - r\phi & & \dot{\theta} = q \\
 \dot{\psi} \approx r + q\phi & & \dot{\psi} = r \\
 \dot{p} \approx \frac{I_y - I_z}{I_x} r q + \frac{\tau_x + \tau_{wx}}{I_x} & & \dot{p} = \frac{\tau_x + \tau_{wx}}{I_x} \\
 \dot{q} \approx \frac{I_z - I_x}{I_y} p r + \frac{\tau_y + \tau_{wy}}{I_y} & & \dot{q} = \frac{\tau_y + \tau_{wy}}{I_y} \\
 \dot{r} \approx \frac{I_x - I_y}{I_z} p q + \frac{\tau_z + \tau_{wz}}{I_z} & & \dot{r} = \frac{\tau_z + \tau_{wz}}{I_z} \\
 \dot{u} \approx rv - qw - g\theta + \frac{f_{wx}}{m} & & \dot{u} = -g\theta + \frac{f_{wx}}{m} \\
 \dot{v} \approx pw - ru + g\phi + \frac{f_{wy}}{m} & & \dot{v} = g\phi + \frac{f_{wy}}{m} \\
 \dot{w} \approx qu - pv + g + \frac{f_{wz} - f_t}{m} & & \dot{w} = \frac{f_{wz} - f_t}{m} \\
 \dot{x} \approx w(\phi\psi + \theta) - v(\psi - \phi\theta) + u & & \dot{x} = u \\
 \dot{y} \approx v(1 + \phi\psi\theta) - w(\phi - \psi\theta) + u\psi & & \dot{y} = v \\
 \dot{z} \approx w - u\theta + v\phi & & \dot{z} = w
 \end{array}
 \longrightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \longrightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{d}$$

## 6. Linear Model

- 삼각 함수가 서로 관련이 없으므로 폐쇄 형으로 찾기가 어렵다. 이러한 이유로 선형화는 small oscillation으로 불리는 단순화 된 모델로 바뀌어야 한다. 이 단순화는 sine 함수를 인수( $\theta$ )로, cosine 함수를 1로 근사해서 만든다. 근사값은 인수( $\theta$ )가 작은 경우 유효합니다. 결과 시스템에 해당하는 방정식은 아래와 같다.

# 6. Linear Model

➤ 선형화 방법은 평형점을 찾아서 행렬 미분을 한 후 더해야 한다.

$\bar{\mathbf{x}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{x} \ \bar{y} \ \bar{z}]^T \in \mathbb{R}^{12}$      $\bar{\mathbf{u}} = [mg \ 0 \ 0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^4$ .     $\mathbf{d} = [f_{wx} \ f_{wy} \ f_{wz} \ \tau_{wx} \ \tau_{wy} \ \tau_{wz}]^T \in \mathbb{R}^6$

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{d}$

$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} =$

0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} =$

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	$\frac{1}{I_x}$	0	0
0	0	$\frac{1}{I_y}$	0
0	0	0	$\frac{1}{I_z}$
0	0	0	0
0	0	0	0
$\frac{1}{m}$	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} =$

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	$\frac{1}{I_x}$	0	0
0	0	0	0	$\frac{1}{I_y}$	0
0	0	0	0	0	$\frac{1}{I_z}$
$\frac{1}{m}$	0	0	0	0	0
0	$\frac{1}{m}$	0	0	0	0
0	0	$\frac{1}{m}$	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

## 7. Quadrotor Parameters

➤ quadrotors inertia

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{2MR^2}{5} + 2l^2m_r$$

$$I_{zz} = \frac{2MR^2}{5} + 4l^2m_r$$

M 은 멀티로터 무게 : 약 2kg (배터리 제외, 포함 2.677kg)

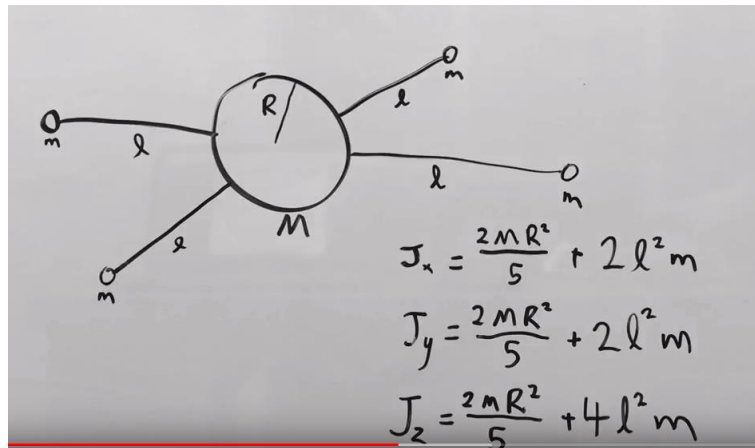
R 은 멀티로터 중심 반지름 : 18.945cm/2 (약 0.095m)

L은 로터와 기체 중심 사이의 거리 : 31.165cm (약 0.31m)

m 은 로터 하나의 무게 : 148g + 104g (약 0.25kg - esc를 모터 밑에 달아둠 )

$$I_{xx} = I_{yy} = 0.77005 \text{ kg/m}^2$$

$$I_{zz} = 0.8181 \text{ kg/m}^2$$



## 7. Quadrotor Parameters

### ➤ Drag Force / Thrust

$$M_i = \overset{\text{관성 모멘트}}{\boxed{\frac{1}{2} \rho A C_D r^2}} \Omega_i^2 = K_M \Omega_i^2$$

$$\text{Drag Force} = \frac{1}{2} \rho V^2 A C_d$$

Where,

- $\rho = 1.225$  (Density of air,  $\text{kg/m}^3$ )
- $A = \pi r^2$  (Area Swept by the propeller,  $\text{m}^2$ )
- $r = 0.0635$  (Radius of the propeller blade, m)
- $C_d = 1.3$  (Coefficient of drag)
- $V$  (Velocity of the air swept by the propeller blade,  $\text{m/s}^2$ ) for the velocity of the air, I consider V is equal to the Angular velocity of the motor

$$r_d = 0.09525 \left( \text{propeller diam } 15\text{in} \rightarrow 0.0254 * \frac{15}{2}, \text{m} \right)$$

$$r_p = 0.06604 \left( \text{pitch } 5.2\text{in} \rightarrow 0.0254 * \left( \frac{5.2}{2} \right), \text{m} \right)$$

$$\text{MTM} = 0.62\text{m}$$

$$F = \boxed{1.225} \frac{\pi \boxed{(0.0254 \cdot d)^2}}{4} \left( \text{RPM}_{prop} \cdot \boxed{0.0254 \cdot \text{pitch}} \cdot \frac{1\text{min}}{60\text{sec}} \right)^2 \left( \frac{d}{3.29546 \cdot \text{pitch}} \right)^{1.5}$$

$$k_m = \frac{1}{2} * 1.225 * \pi * (0.09525)^2 * 1.3 * (0.06604)^2 = 9.834895862920147 \times 10^{-6} (N \cdot s^2)$$

$$k_f = \frac{1}{2} * 1.225 * 1.3 * \left( \frac{1}{2} (0.62)^2 + 3 * \pi * (0.09525)^2 \right) * (0.06604)^2 = 3.159610160717351 \times 10^{-4} (N \cdot s^2)$$

$$\overset{\text{공기역학의 Momnets}}{\text{= 상수 (프로펠러에 의해 고정값)}} \overset{\text{Thrust}}{F_i} = \boxed{\frac{1}{2} \rho A C_T r^2} \Omega_i^2 = K_f \Omega_i^2$$

$$T = \frac{1}{2} \rho C_D A V^2$$

$\rho = 1.225 * 10^3 \text{ g/m}^3$  (density of air)

$C_D = 1.3$  (Drag Coefficient)

$V$  – Angular Velocity of the model, determined from the motor dynamics

$A$  – Top Area of the Quadcopter, the formula is given below

$$A = \frac{1}{2} (\text{MTM})^2 + 3 * \pi * r_{prop}^2$$

MTM – Motor to Motor Distance

$R_{prop}$  – Radius of Propeller

Using the 250 FPV Racing Quad, MTM = 0.255 m

When we use 5 inch propeller,  $r = 0.0635$  m

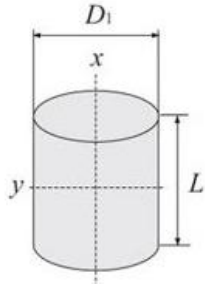


## 7. Quadrotor Parameters

➤ Motor inertia.

$$J_x = \frac{1}{8} m D_1^2 = \frac{\pi}{32} \rho L D_1^4$$

$$J_y = \frac{1}{4} m \left( \frac{D_1^2}{4} + \frac{L^2}{3} \right)$$



$J_x$  : Inertia on  $x$  axis

$J_y$  : Inertia on  $y$  axis

$m$  : Mass

$D_1$  : Outer diameter

$\rho$  : Density

$L$  : Length

$$J_s = 38.8 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\begin{aligned} J_L &= m \times \left( \frac{p}{2\pi} \right)^2 \\ &= 9 \text{ kg} \times \left( \frac{0.02032 \text{ m}}{2\pi} \right)^2 \\ &= 9.42 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_T &= J_s + J_L \\ &= 38.8 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 9.42 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ &= 9.81 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

$$D_1 = 0.046 \text{ m}$$

$$m = 0.148 \text{ kg}$$

$$L = 0.032 \text{ m}$$

$$\rho = m / \left( \pi \left( \frac{D_1}{2} \right)^2 * L \right)$$

$$J_x = 3.9146 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_y = 3.46976 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_x + J_y = J_r = 4.3136224 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

# 8. Matlab Modelling

➤ Thrust Model

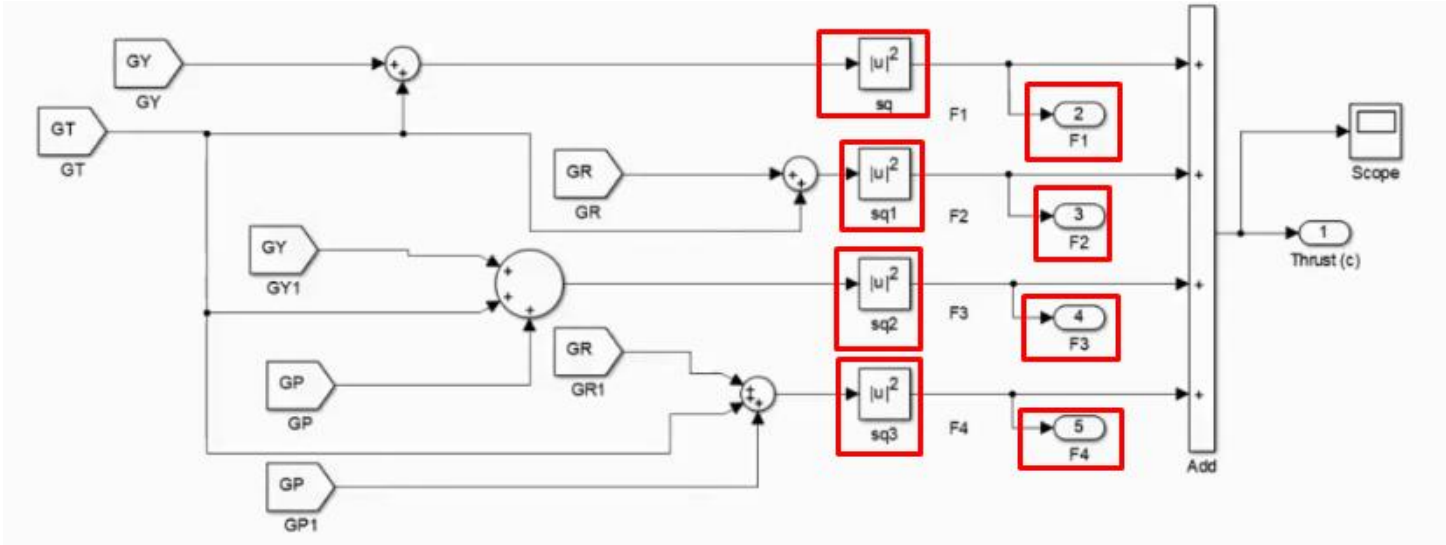
$F_1$   $F_2$   $F_3$   $F_4$

$U_1 = K_f(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)$

$U_2 = K_f(-\Omega_2^2 + \Omega_4^2)$

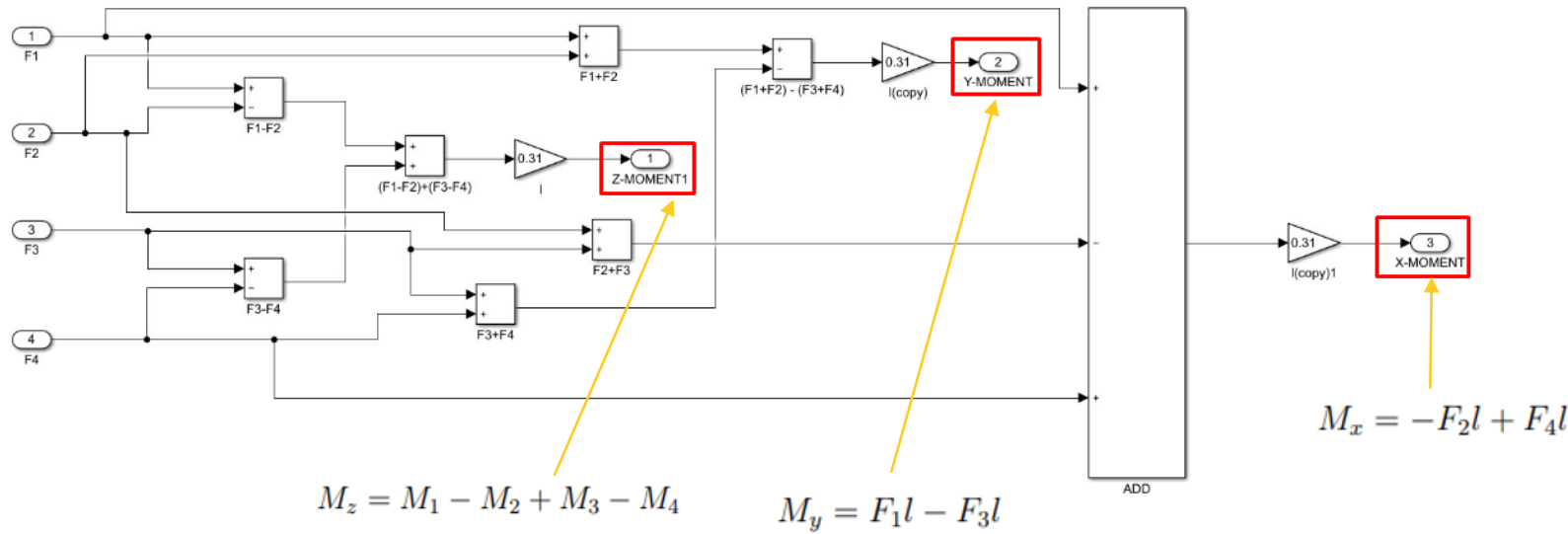
$U_3 = K_f(\Omega_1^2 - \Omega_3^2)$

$U_4 = K_M(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2)$



# 8. Matlab Modelling

➤ Moment Model



## 9. Acceleration to Angle

➤ 각도 변환 공식

$$angel(Y)=\tan^{-1}\left(\frac{-AcX}{\sqrt{Ac^2Y + Ac^2Z}}\right) \times \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)$$

$$angel(X)=\tan^{-1}\left(\frac{-AcY}{\sqrt{Ac^2X + Ac^2Z}}\right) \times \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)$$

### 2.3.3 Quaternions

An alternative way of parametrizing the rotation matrix is by using quaternions. The quaternion has its basis in the Euler axis/angle representation. The Euler axis/angle parametrization is a unit vector ( $e$ ) orthogonal to the plane of rotation and an angle ( $\theta$ ). The direction of the vector gives the direction of the rotation and the angle the amplitude of the rotation.

Quaternions are similar but the rotation axis and angle have been combined to a single 4 dimensional vector of unit length. Three of the dimensions describe the direction of the rotation and the last is used to scale the vector

회전 행렬의 대체 방안으로는 쿼터니온이 있다. 쿼터니온은 오일러 축/각도를 기본으로 가지고 있다.

오일러 축/각도 파라미터화는 수직에서의 각도와 평면의 회전에서의 수직 단위 벡터( $e$ )이다.

벡터의 방향은 회전 방향과 각도 그리고 회전의 크기를 준다.

쿼터니온이 비슷해 보이지만 회전 축과 각도는 단위 길이의 단일 4 차원 벡터의 결합이다.

3개의 차원은 회전방향을 묘사하고 나머지는 벡터의 크기로 사용된다.

## 2.3.3 Quaternions

The conversions between the Euler axis/angle and the quaternion might help with the understanding. This is shown in Equation 2.11 and 2.12.

$$\mathbf{q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{e} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{q}_{1..3}}{\|\mathbf{q}_{1..3}\|} \quad \theta = 2 \arccos(q_0) \quad (2.12)$$

This definition of the quaternions ensures a unique quaternion for every value of  $\theta$  in the range of  $\pm\pi$  [Stevens and Lewis, 2003, p. 18].

Quaternions can be multiplied together using the quaternion product operation defined as in Equation 2.13 and 2.14 [Stevens and Lewis, 2003] where  $*$  denotes the quaternion multiplication.

$$\mathbf{p} * \mathbf{q} \triangleq \mathbf{\Lambda}_p \mathbf{q} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{\Lambda}_p = \begin{bmatrix} p_0 \mathbf{I} - [\mathbf{p}_{1..3} \times] & \mathbf{p}_{1..3} \\ -\mathbf{p}_{1..3}^\top & p_0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Quaternions are not like Euler angles caught in a gimbal lock and the parametrization of the rotational matrix contains no trigonometric functions.

오일러 축/각도 그리고 쿼터니온 사이의 변환이 이해를 도와줄 것이다. 아래의 식 2.11 그리고 2.12

이 쿼터니온의 정의는  $\pm\pi$  범위에서 모든  $\theta$  값에서 유일한 쿼터니온을 보증한다.

쿼터니온은 쿼터니온 product 연산을 사용해서 곱해진다. 2.13과 2.14에서  $*$ 로 명시된 곱셈을 정의하고 있다.

쿼터니온은 오일러 각에서 생기는 짐볼 락이 없고 회전 행렬의 변환에서 삼각함수를 포함하고 있지 않다.

## 3 Modelling of a Quadrotor

### 3.1 How do a Quadrotor Fly?

A quadrotor is equipped with four motors with each a rotor attached. When the rotor spins lift is generated. When the quadrotor is aligned with the horizontal plane and the sum of the lift generated ( $F_{lift}$ ) is equal to the gravitational force the quadrotor is hovering. If  $F_{lift}$  is increased the quadrotor will start to climb, if  $F_{lift}$  is decreased the quadrotor will start to decent.

Movement in the horizontal plane is done by tilting the quadrotor in the desired direction. When the quadrotor is tilted the direction of  $F_{lift}$  is no longer aligned with the earth frame z-axis but can be dissolved in a z-axis component and a horizontal component as seen in Figure 3.1. The horizontal component result in an acceleration in the horizontal plane.

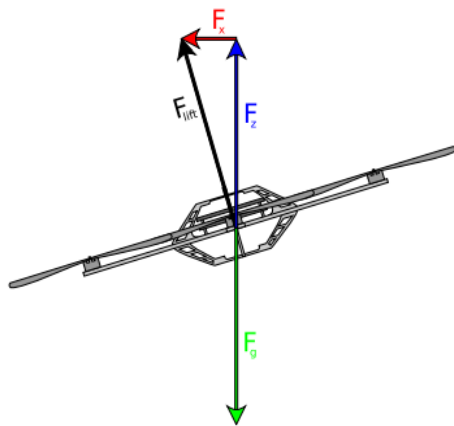


Figure 3.1:  $F_{lift}$  dissolved in a z-axis component and a horizontal component

쿼드로터는 각 회전자가 부착된 4개의 모터로 구성되어 있다.

로터가 회전할 때 양력이 만들어진다.

쿼드로터가 수평면과 나란해져 있고 만들어진 양력의 합은 쿼드로터가 정지 중일 때의 중력의 힘과 같다.

수평면에서 움직임은 원하는 방향으로 쿼드로터가 기울어져 있다. 쿼드로터가 양력의 방향으로 기울어져 있을 때 더 이상 관성좌표계 z-축과 평행하진 않지만 Z-축 요소 그리고 그림에서 보이는 평행적인 요소의 합으로 볼 수 있다. 수평적인 요소는 수평면에서의 가속도가 된다.

## 3 Modelling of a Quadrotor

### 3.1 How do a Quadrotor Fly?

The rotors spin in opposite direction in pairs as illustrated in Figure 3.2. This is to prevent the quadrotor from spinning around the z-axis as an effect of the counter torque generated by the spinning rotors. When the rotors spin in opposite direction the counter torque is equalized when all rotors rotate with equal speed. It should be noted that, in the following figures, the arrows indicate the direction of the rotation and the size is proportional to the speed of the rotor.

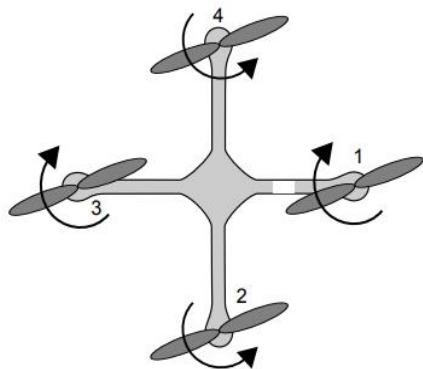


Figure 3.2: Quadrotor in hover

Tilting of the quadrotor is done by altering the speed of the rotors. In the following are the effect of the inputs roll pitch and yaw defined.

그림 3.2에서처럼 pair로 묶여

반대 방향으로 로터들이 회전한다.

로터들이 돌면서 만들어 내는 상대적인 토크의 효과 때문에 Z축으로의 회전으로부터 쿼드로터의 회전을 막을 수 있다.

모든 로터들이 같은 속도로 회전하면서

로터들이 반대 방향으로 돌 때

상대적인 토크는 같아진다.

아래 화살표는 회전방향을 가리키고 길이는 로터의 스피드에 비례한다.

기울어져 있는 쿼드로터는 로터의 스피드가 바뀌어 있다.



## 3 Modelling of a Quadrotor

### 3.1 How do a Quadrotor Fly?

**Roll** is defined as a rotation around the x-axis in the body frame. This is done by increasing the speed of one of the rotors placed along the y-axis and decreasing the speed of the opposite, while maintaining speed on the remaining rotors. Figure 3.3 illustrates the direction of positive roll, which means that rotor 4 increases speed while rotor 2 decreases speed. Note that the white mark indicates the front of the quadrotor.

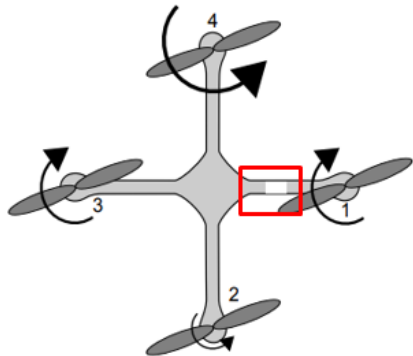


Figure 3.3: Quadrotor performing positive roll

Roll은 동체좌표계에서 x-축 회전으로 정의된다.

Y축에 놓여진 로터의 스피드가 증가하고 반대 로터는 스피드가 감소하면 된다. 반면에, 남아있는 로터들은 스피드를 유지한다.

그림 3.3은 positive roll을 나타낸다. 즉, 로터 4번은 속도 증가 반면 로터 2번은 속도 감소이다.

명심해라. 흰 표시는 쿼드 로터의 앞면을 나타낸다.

## 3 Modelling of a Quadrotor

### 3.1 How do a Quadrotor Fly?

**Pitch** is defined as the rotation around the y-axis in the body frame. The rotation is done by increasing the speed on one of the rotors placed along the x-axis and decreasing the thrust on the opposite rotor, while maintaining speed on the remaining rotors. The positive pitch is illustrated in Figure 3.4, where rotor 1 increases speed while rotor 3 decreases speed.

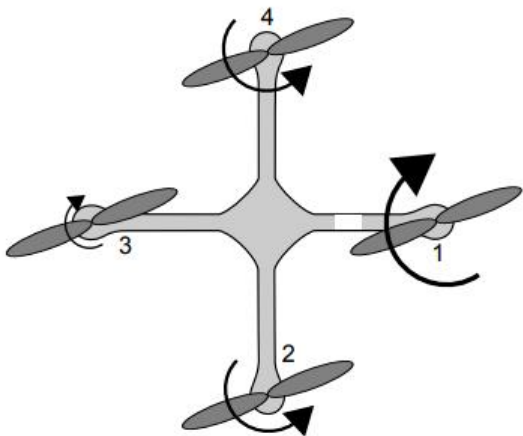


Figure 3.4: Quadrotor performing positive pitch

Pitch는 동체좌표계에서 y-축의 회전으로 정의된다.

이 회전은 x-축에 놓인 로터의 스피드 증가에 의해

나타나고 반대 로터에서의 추력은 감소하면서 발생한다.

반면에, 남아있는 로터들의 속도는 유지한다.

그림 3.4는 positive pitch이며 로터 1번의 속도는 증가하고

반면에 로터 3번은 감소한다.

## 3 Modelling of a Quadrotor

### 3.1 How do a Quadrotor Fly?

**Yaw** is defined as the rotation around the z-axis in the body frame. Yaw is done by altering speed of the rotors along the x-axis compared to the speed on the rotors along the y-axis. The resulting counter torque generated by the rotors will no longer be zero and will result in a rotation around the z-axis. If the rotors on the y-axis are rotating faster than the rotors on the x-axis the body will rotate clockwise (positive yaw) as illustrated in Figure 3.5.

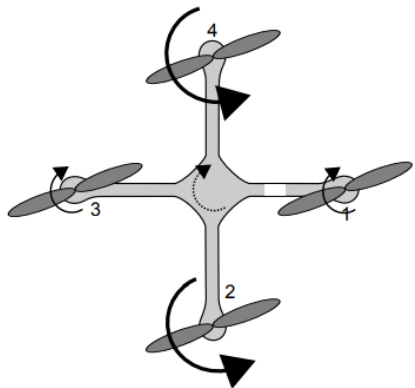


Figure 3.5: Diagram of a quadrotor performing a positive yaw motion

Yaw는 동체좌표계에서 z-축 회전으로 정의된다.

Yaw는 x-축 로터의 속도와 상대적인 y-축 로터의 속도를 바꾸면서 발생한다.

로터에 의해 만들어진 상대적인 토크는 더 이상 0이 아니고 이것으로 z-축의 회전이라는 결과가 생긴다.

만약 y-축에 있는 로터들이 x축보다 더 빠르게 회전한다면 몸체는 시계방향(positive yaw)으로 회전 할 것이다.

토크는 회전하는 힘! -> 즉 회전 방향으로