

# TI MCU, DSP 및 Xilinx FPGA 프로그래밍 전문가 과정

Innova Lee(이상훈)  
[gcccompil3r@gmail.com](mailto:gcccompil3r@gmail.com)

# **Power Electronics**

# Introduction Power Electronics

저항에 의한 전력 변환을 고려해보자!

DSP 가 66 mA, 3.3V 를 필요로 하고 FPGA Logic 이 50 mA, 5V 를 필요로 하는 경우를 생각해보자!

$$R_1 = \frac{12 - 5}{50m} = 140\Omega, \quad R_2 = \frac{12 - 3.3}{66m} = 132\Omega$$

회로에서 전압 강하가 이루어지는 저항에서는  
발열로서 전력 손실이 일어난다.

$$P_1 = \frac{(12 - 5)^2}{140} = 350mW, \quad P_2 = \frac{(12 - 3.3)^2}{132} = 573.4mW$$

전원으로부터 입력과 시스템에 전달된 출력으로 효율을 구한다.

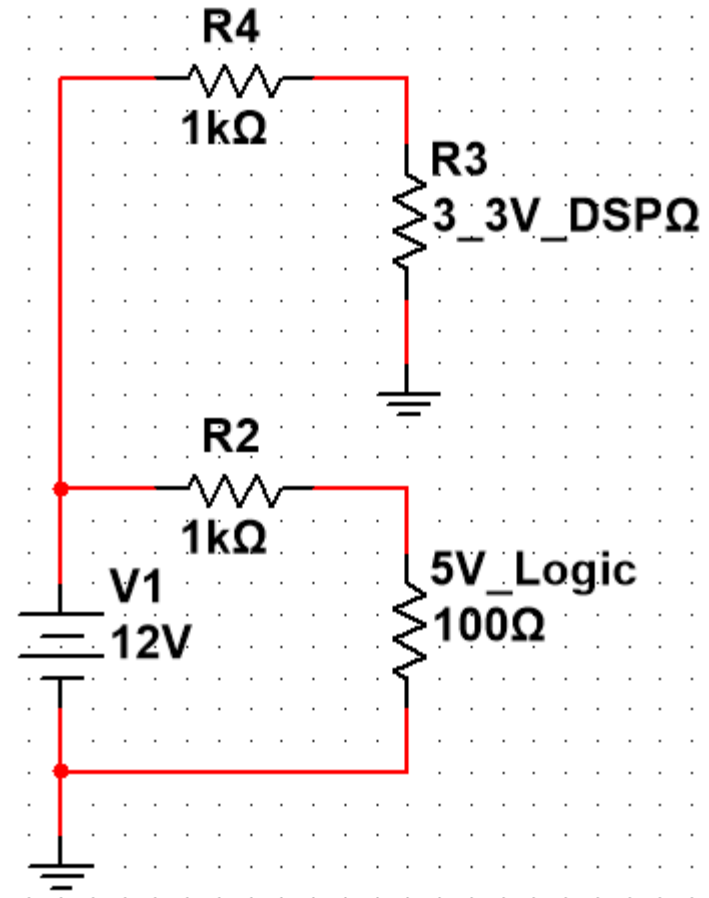
$$P_{out} = \frac{5^2}{100} + \frac{3.3^2}{50} = 250m + 218m = 468mW$$

$$P_{in} = \frac{12^2}{100 + 140} + \frac{12^2}{50 + 132} = 600m + 791m = 1.39W$$

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{0.468}{1.39} \times 100 = 33.6\%$$

열로써 소비되는 손실은 전원으로부터 입력과 변환된 출력의 차다.

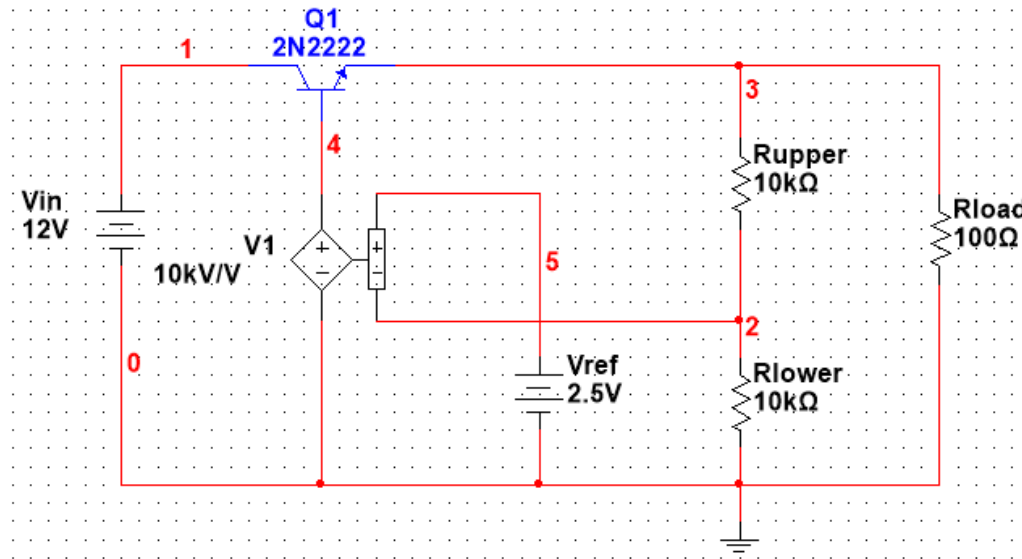
$$\begin{aligned} P_{loss} &= P_{in} - P_{out} = \frac{P_{out}}{\eta} - P_{out} = P_{out} \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right) \\ &= 1.39 - 0.468 = 922mW \end{aligned}$$



# Closed Loop System

부하나 입력 전압에 변동이 발생하는 경우를 생각해보자!

분배기의 순환 전류를  $250\mu A$  정도로 고정하도록 한다.



$$I_b = 250\mu A, \quad R_{lower} = \frac{2.5V}{250\mu A} = 10k\Omega, \quad R_{upper} = \frac{V_{out} - V_{ref}}{I_b} = \frac{5 - 2.5V}{250\mu A} = 10k\Omega$$

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{V_{out}I_{out}}{V_{in}I_{in}} \approx \frac{V_{out}}{V_{in}} = M$$

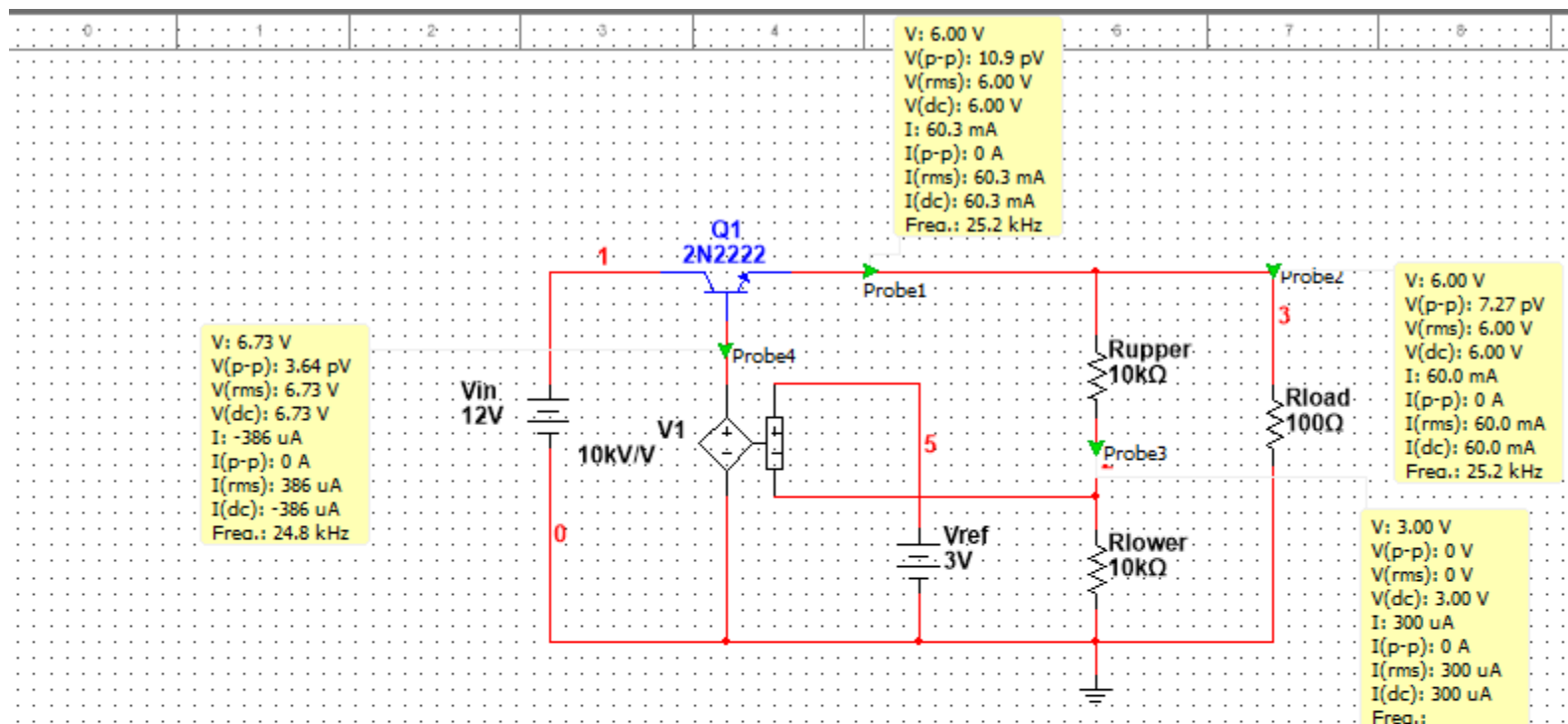
효율을 고려해보면 아래와 같다.

$$V_{in} = 14V, \quad V_{out} = 5V, \quad \Delta V = V_{in} - V_{out} = 9V, \quad \eta = \frac{5}{14} 100 = 35.7\%$$

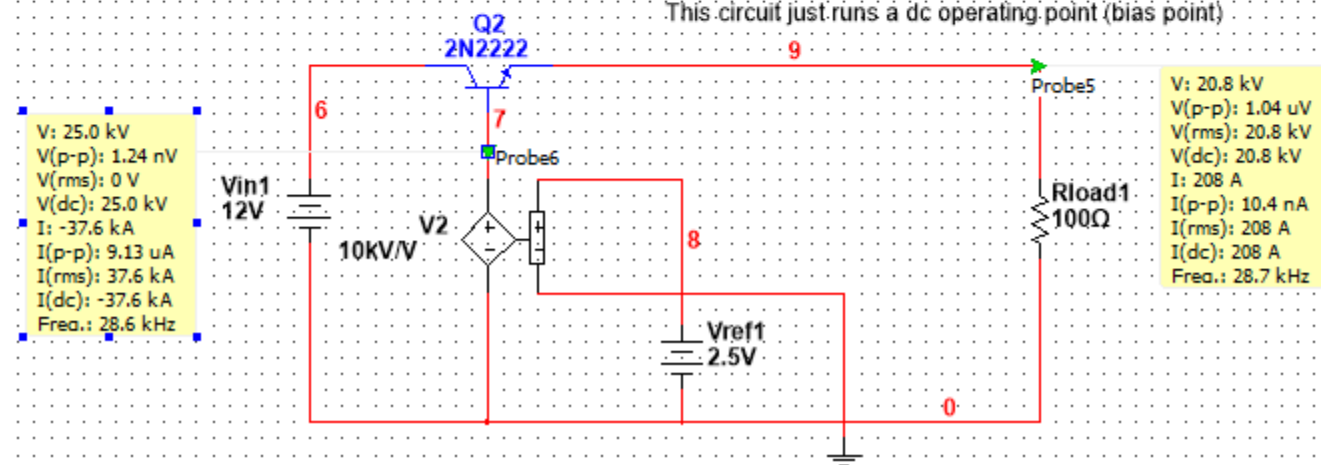
$$V_{in} = 14V, \quad V_{out} = 12V, \quad \Delta V = V_{in} - V_{out} = 2V, \quad \eta = \frac{12}{14} 100 = 85.7\%$$

$$V_{in} = 5V, \quad V_{out} = 3V, \quad \Delta V = V_{in} - V_{out} = 2V, \quad \eta = \frac{3}{5} 100 = 60\%$$

입출력 전압차가 작고  
출력이 전압차보다 크면 효율이 높다.



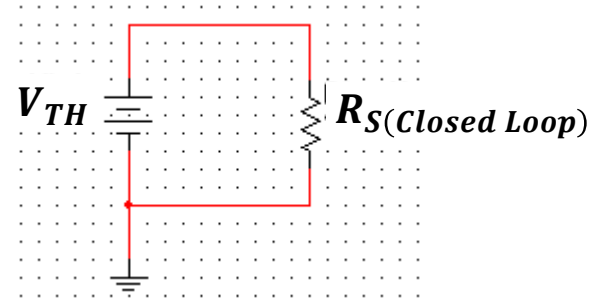
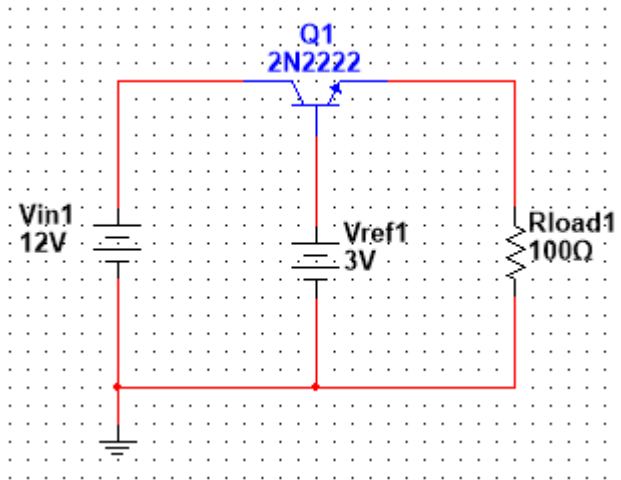
This circuit just runs a dc operating point (bias point)



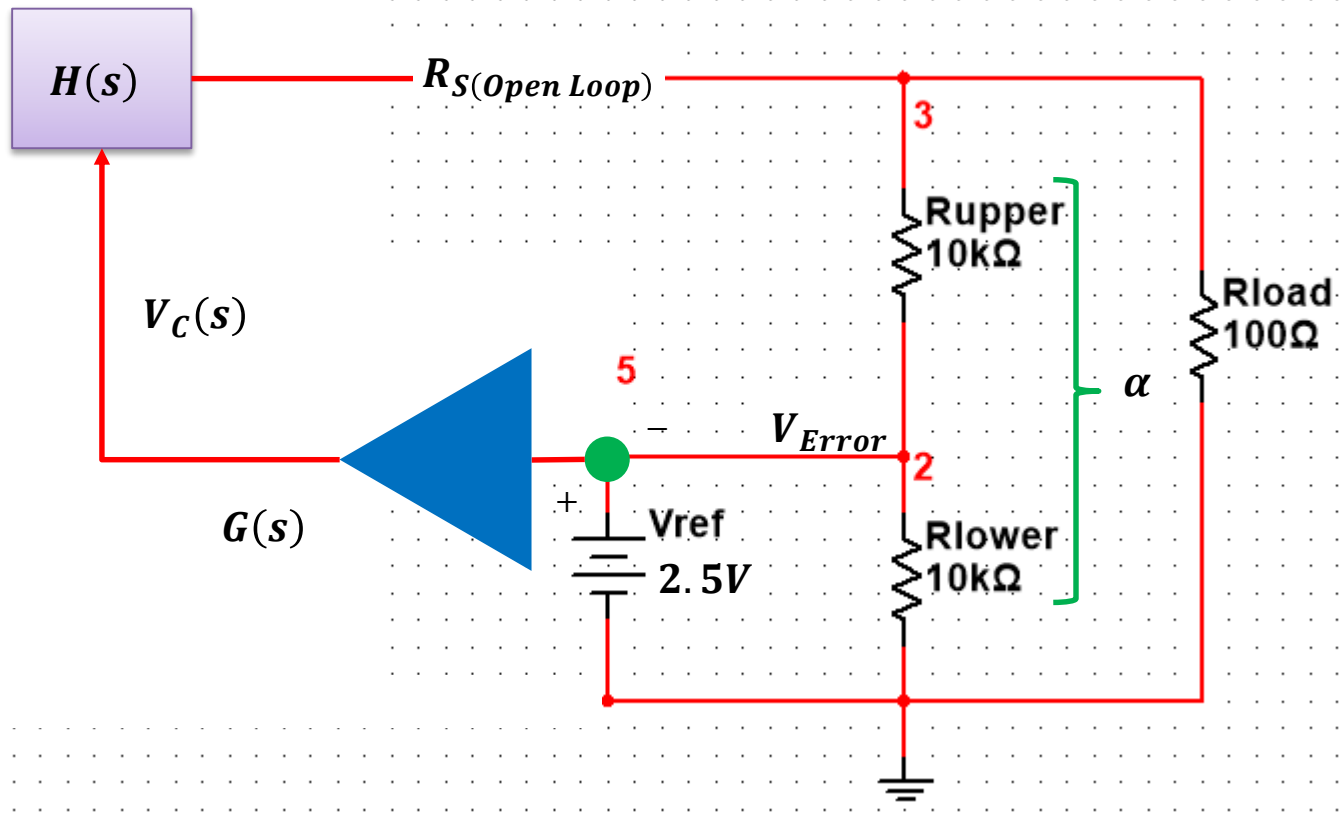
# Derivation of Linear Regulator

앞서 살펴본 회로는 아래와 같은 등가 회로로 수정 할 수 있다.

먼저 단순히 5.77V 의 전압원으로 에러 증폭기를 대체 할 수 있다.



이와 같은 특성을 고려하여 다시 피드백 회로를 그려보면 아래와 같다.



$$V_{out} = (V_{ref} - \alpha V_{out})HG - R_{S(Open Loop)} \frac{V_{out}}{R_{load}}, \quad V_{ref} = \alpha V_{out}, \quad V_{Error} = \frac{V_{ref}}{\alpha} - V_{out}$$

$$V_{out} = \frac{V_{ref}HG}{1 + \alpha HG + \frac{R_{S(Open Loop)}}{R_{load}}}$$

$$V_{Error} = \frac{V_{ref}}{\alpha} - \frac{V_{ref}HG}{1 + \alpha HG + \frac{R_{S(Open Loop)}}{R_{load}}} = V_{ref} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\frac{1}{HG} + \alpha + \left( \frac{R_{S(Open Loop)}}{R_{load}} \frac{1}{HG} \right)} \right)$$

$$if) R_{S(Open Loop)} \ll R_{load}$$

$$if) R_{S(Open Loop)} \ll R_{load}$$

$$V_{Error} = V_{ref} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha + \frac{1}{HG}} \right)$$

이 값이 0 일 조건은 아래와 같다.

$$\alpha = \alpha + \frac{1}{HG}$$

이제 앞서 계산했던  $V_{out}$  을 살펴보자!

$$V_{out} = \frac{V_{ref}HG}{1 + \alpha HG + \frac{R_{S(Open Loop)}}{R_{load}}}$$

옆의 변환 회로에서 출력을 0.5 로 만들 수 있는 케이스를 생각해보자!

$$V_{out} = V_{TH} \Rightarrow V_{out} = \frac{1}{2} V_{TH}$$

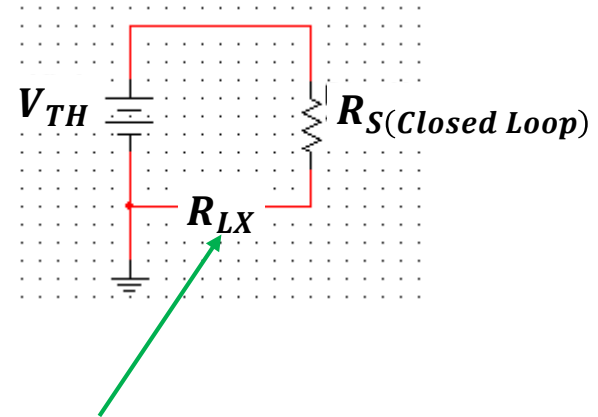
$$\frac{V_{ref}HG}{1 + \alpha HG + \frac{R_{S(Open Loop)}}{R_{LX}}} = \frac{V_{ref}HG}{2(1 + \alpha HG)}$$

$\alpha HG$  를 정적 루프 이득  $T$  라 하면  
Closed Loop 출력 임피던스는 아래와 같다.

$$R_{LX} = R_{S(Closed Loop)} = \frac{R_{S(OL)}}{1 + \alpha HG} = \frac{R_{S(OL)}}{1 + T}$$

$$1 + \alpha HG + \frac{R_{S(Open Loop)}}{R_{LX}} = 2(1 + \alpha HG)$$

$$\frac{R_{S(Open Loop)}}{R_{LX}} = 1 + \alpha HG$$



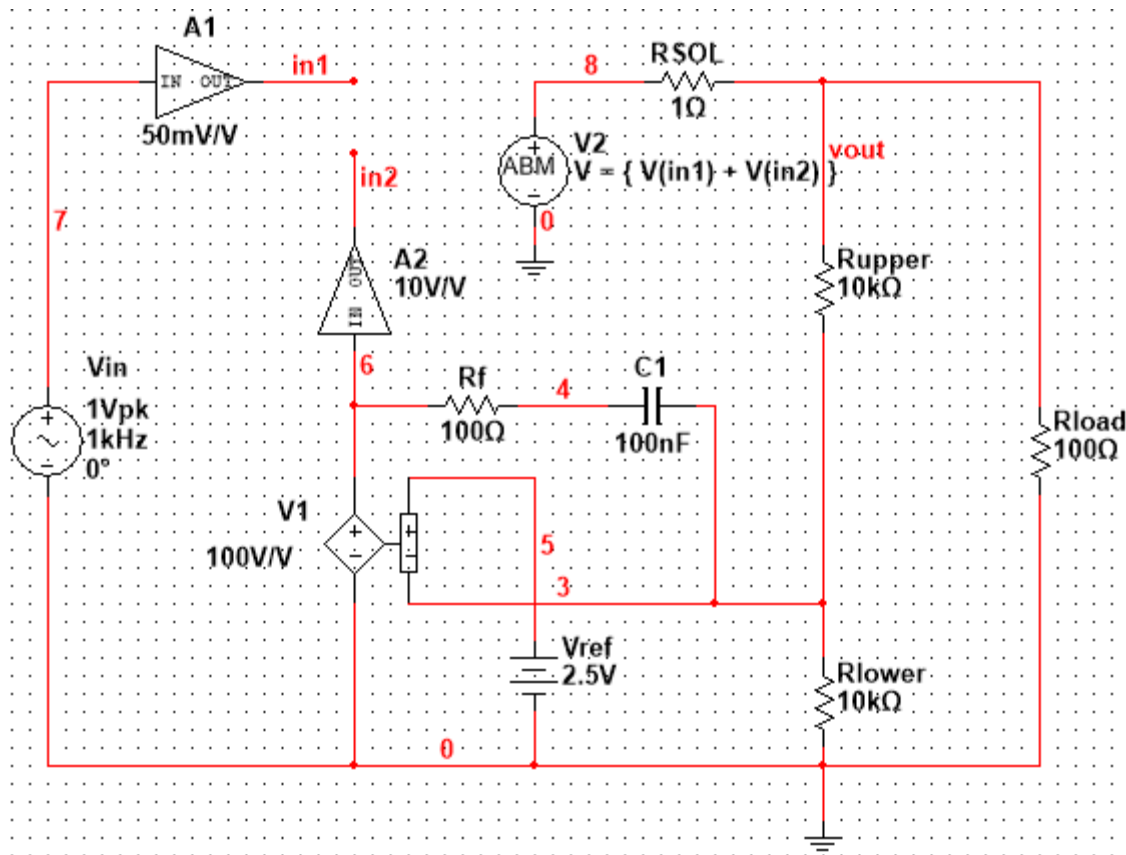
두 저항의 값이 같으면 반 땅!



## 이제 입력 전압 변동에 대한 것을 고려해보도록 하자!

일반적으로 Bipolar TR 이 Collector Emitter 변동과 거의 상관없이 양호한 전류 발생기로서 동작하기 때문이다. 그러나 TR 은 출력 전압이 입력 전압에 근접할 경우 전류원이 아닌 스위치로서 동작하게 된다. 이렇게 되면 아래와 같이 입력을 고려한 회로를 다시 살펴봐야 한다.

이를 고려하여 방정식을 다시 세워야 한다.



방정식을 다시 세워보도록 한다.

아래와 같이 적을 수 있다.

$$V_{out} = (V_{ref} - \alpha V_{out})HG + KV_{in} - R_{S(OL)} \frac{V_{out}}{R_{load}}$$
$$V_{out} \left( 1 + \alpha HG + \frac{R_{S(OL)}}{R_{load}} \right) = V_{ref}HG + kV_{in}$$
$$V_{out} = \frac{V_{ref}HG}{\left( 1 + \alpha HG + \frac{R_{S(OL)}}{R_{load}} \right)} + \frac{kV_{in}}{\left( 1 + \alpha HG + \frac{R_{S(OL)}}{R_{load}} \right)}$$

여기서 만약  $R_{S(OL)} \ll R_{load}$  이라면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$V_{out} = \frac{V_{ref}HG}{\left( \frac{1}{HG} + \alpha \right)} + \frac{kV_{in}}{(1 + \alpha HG)}$$

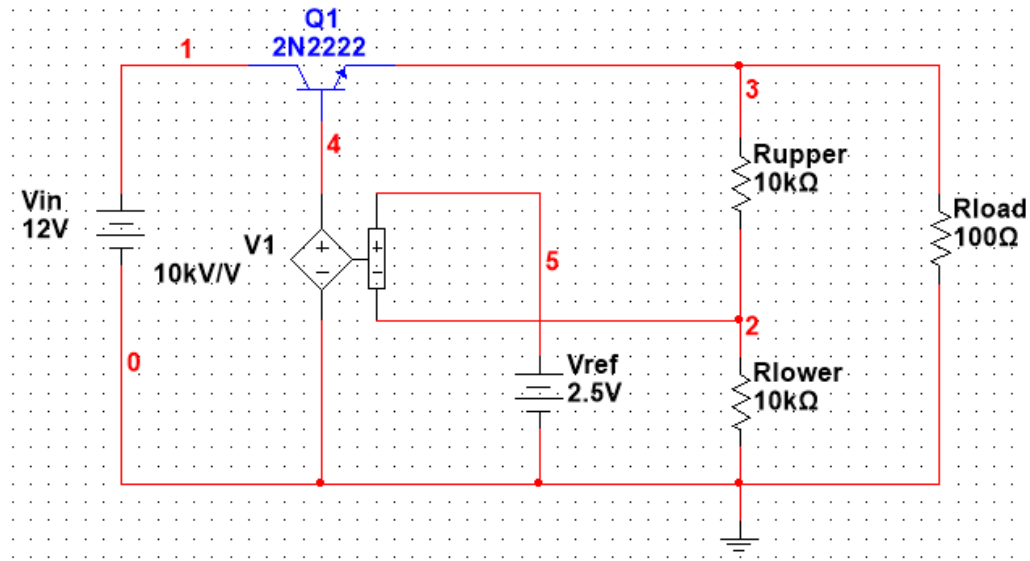
입력 전압 기여에 따른 새로운 항은 아래와 같다.

$$\frac{k}{(1 + \alpha HG)}$$

# Simple Regulator

아래와 같은 선형 레귤레이터를 보다 개선하고 확장할 필요가 있다.

이제 좀 더 진행해보도록 하자!



앞서 살펴봤던 회로를 베이스로 레귤레이터 회로의 개발을 고려할 수 있다.

일반적으로 레귤레이터는 안정한 특성을 보여주는데 결국 적분 보상기 덕분이다.

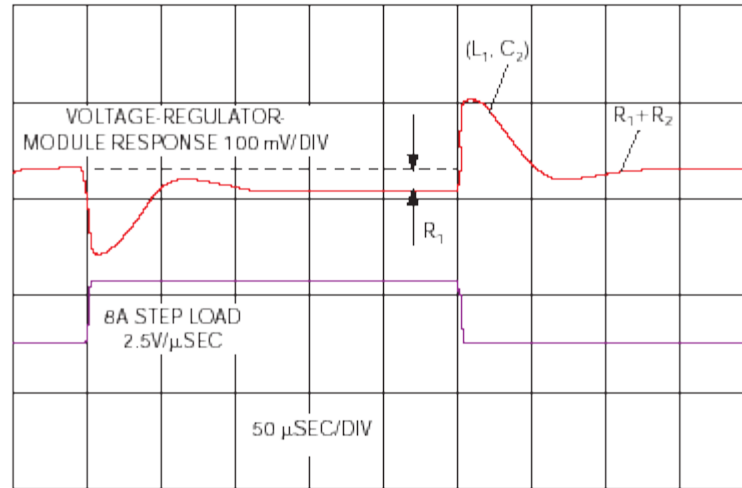


Figure 1 Four parameters control the low-frequency step response.

레귤레이터의 응답을 보면 초기에 무부하에서 전류가 흐르지 않으므로  
적절할 출력을 유지하기 위한 전류 바이어스가 약하게 걸린다.  
결국 콘덴서를 충전하기 위한 시간이 오래 걸려 응답 시간이 길어진다.  
반면 이미 적절한 전류 바이어스를 가지고 있는 상태에서 값을 조종해야 하는 케이스를 생각해보자!  
(가령 150 mA 의 전류 바이어스가 있는 상태에서 250 mA 로 뛰는 것은 없는 상태 보다 쉽다는 것이다)

# Conclusion of Linear Regulator

선형 레귤레이터에 대한 결론을 지어보자!

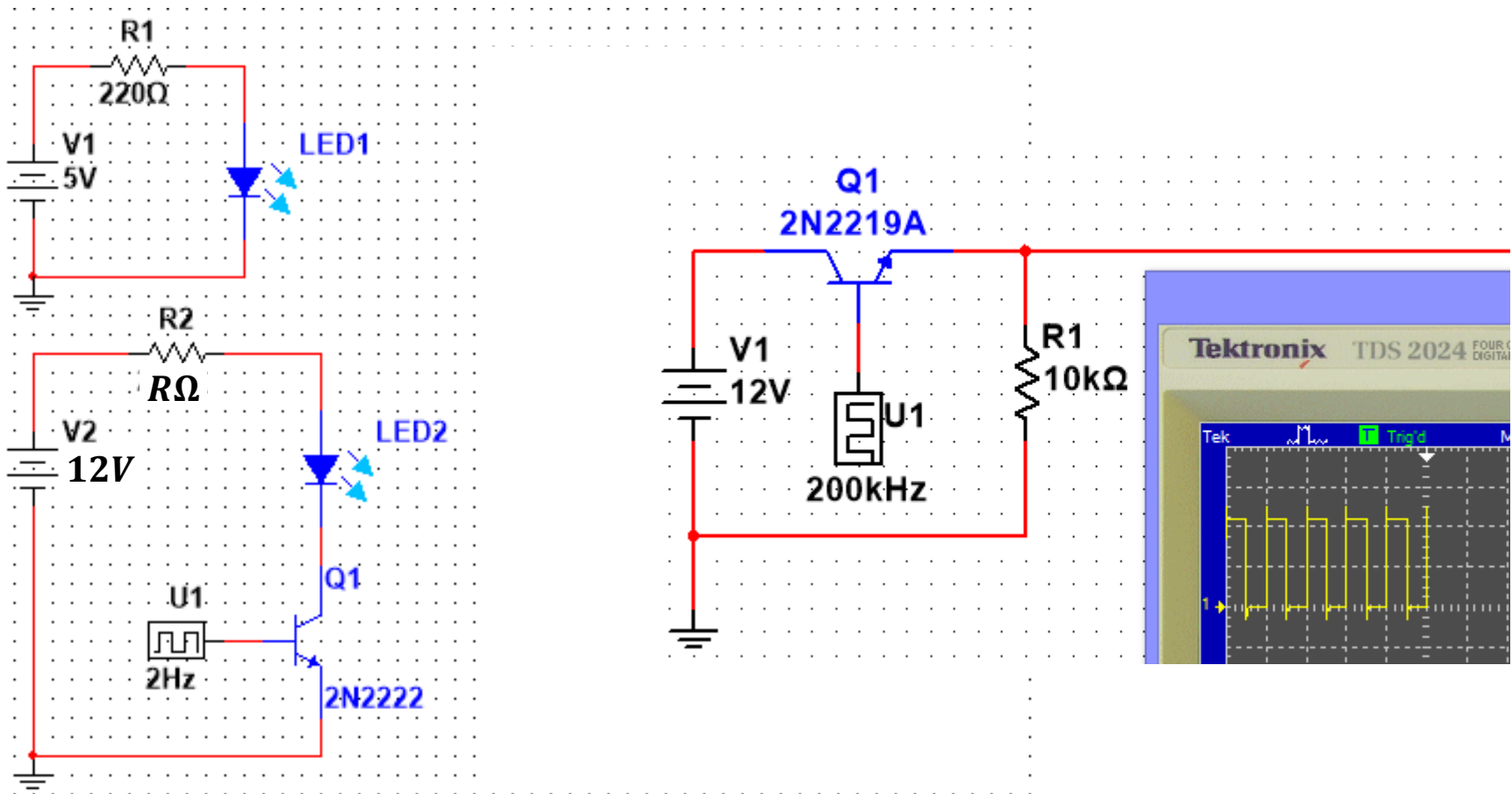
선형 레귤레이터는 출력과 입력 사이에 차이가 수백 mV 로 축소되지 않는다면  
고효율 컨버터로서 동작하지 않는다.

그러나 입력시 발생하는 노이즈를 필터링 하므로  
ADC 같은 전력에 민감한 회로의 전원으로서 안정한 전원 장치가 되어줄 수 있다.

# Switch Based Power Conversion

스위치 기반의 전력 변환을 고려해보도록 하자!

아래와 같은 회로를 한 번 고려해보자!



## 회로에서 전달 되는 전력을 계산해보자!

구형파에 해당하므로 실효 값 전압을 측정해야 하며 여기서 D 는 Duty Cycle 이다.

$$V_{out,rms} = V_{in}\sqrt{D} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 8.485, \quad D = \frac{t_{ON}}{T_{SW}}, \quad D' = \frac{t_{OFF}}{T_{SW}}$$

스위치가 꺼지는 시간과 켜지는 시간의 합이 결국 주기이므로 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$D' = \frac{T_{SW} - t_{ON}}{T_{SW}} = 1 - D$$

이제 효율을 한 번 살펴봐보도록 하자!

$$P_{out} = \frac{V_{out,rms}^2}{R_{load}} = 14.399, \quad P_{in} = \frac{12^2}{5} = 14.4 \quad \text{약간의 저항이 전압을 살짝 감소시킴}$$

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = 99.993\%$$

엄청난 효율을 보여준다.

# Why we need Filter ?

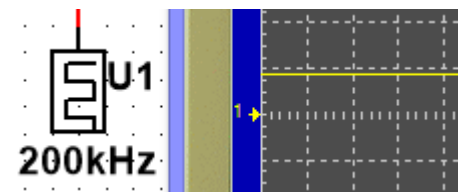
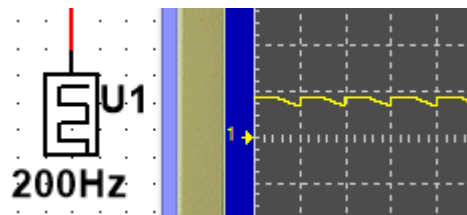
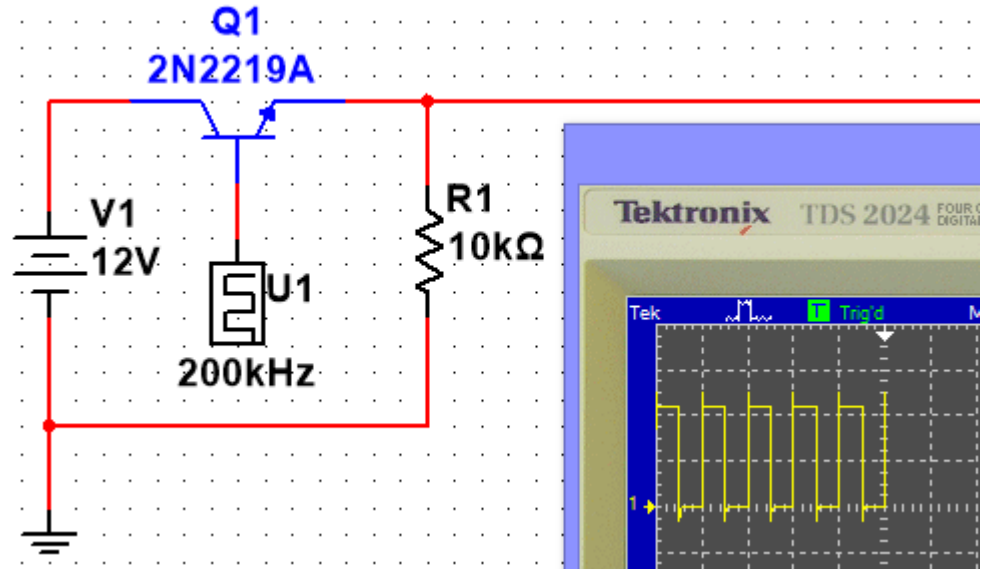
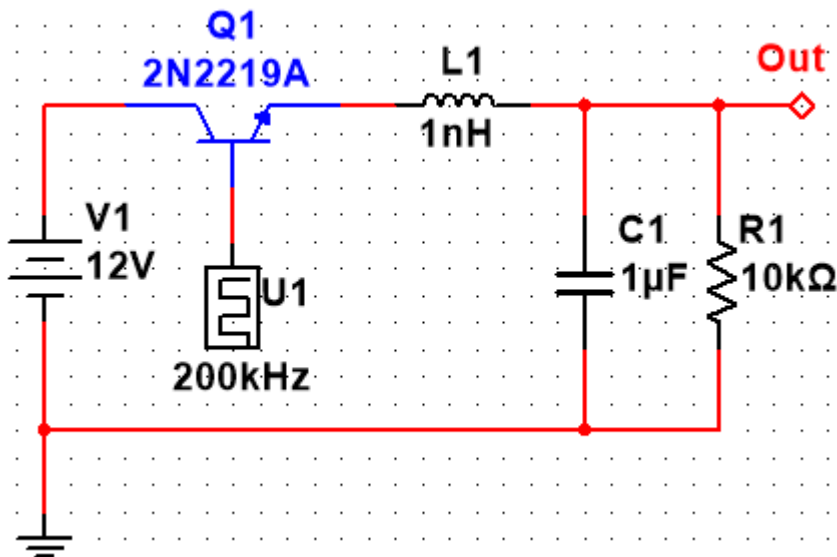
Switch 방식에 의한 Converter 는 효율이 매우 높으나 어려운 점이 있다.

원하는 것은 DC 성분이나 깨끗한 DC 성분이 나오지 않는다는 것이다.  
실제 DC 성분에 AC 성분(고조파)가 포함되어 있다.  
그래서 출력 전압은 아래와 같이 적을 수 있다.

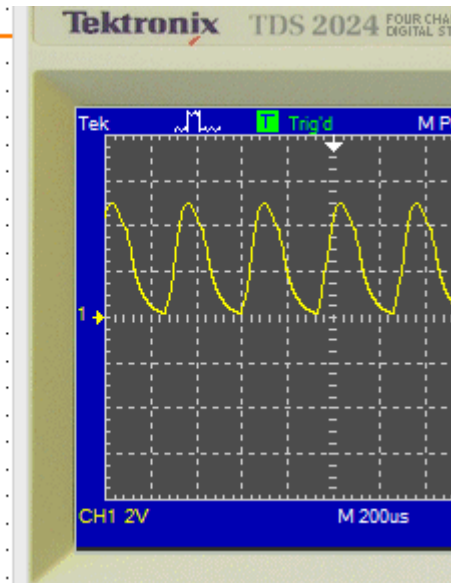
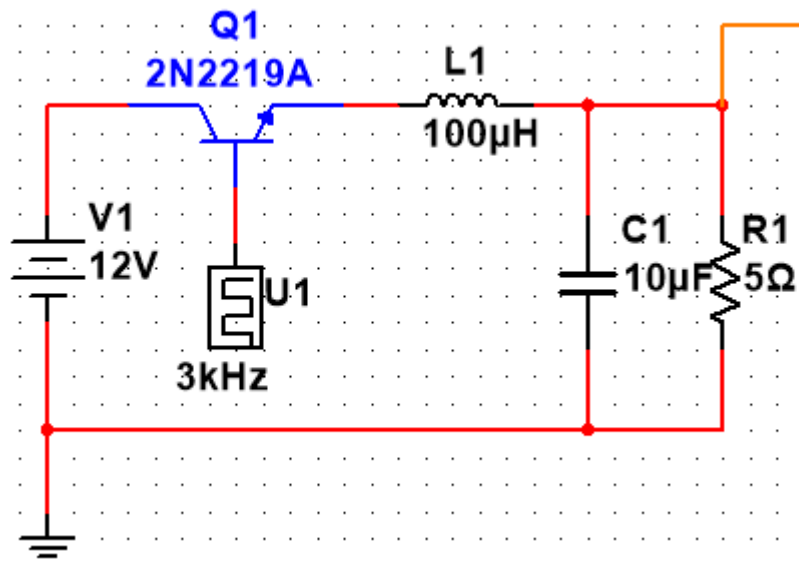
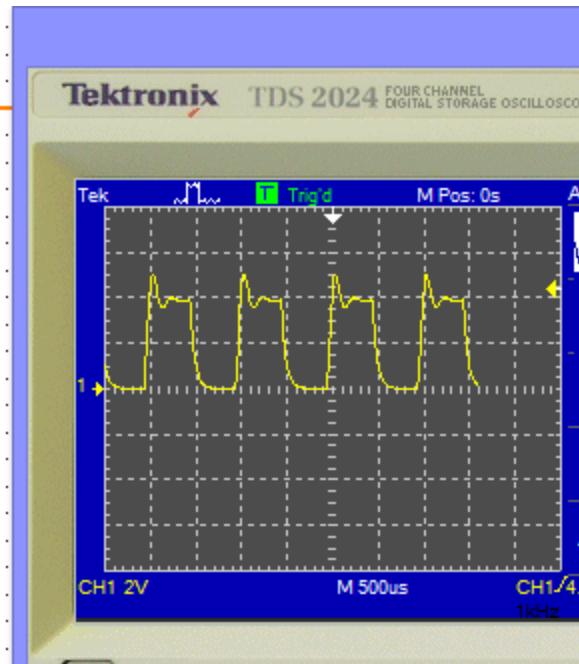
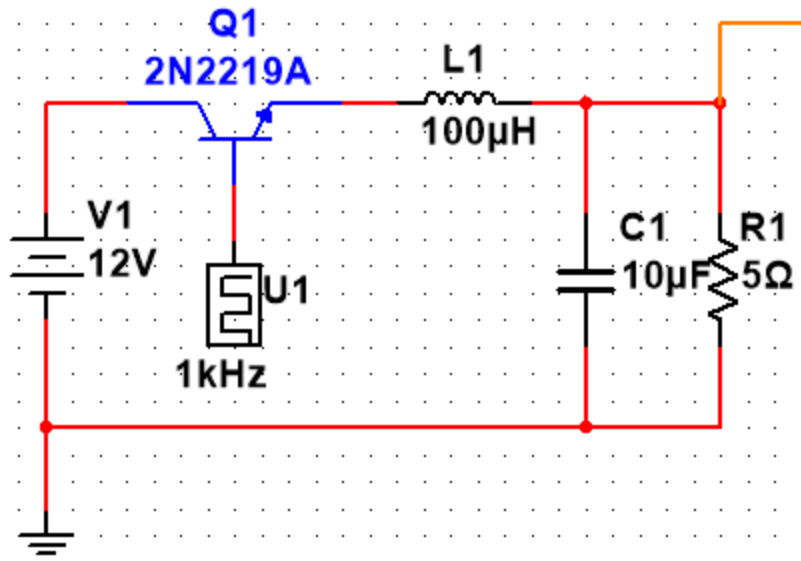
$$V_{out,rms} = \sqrt{V_{out,dc}^2 + V_{out,ac}^2}$$

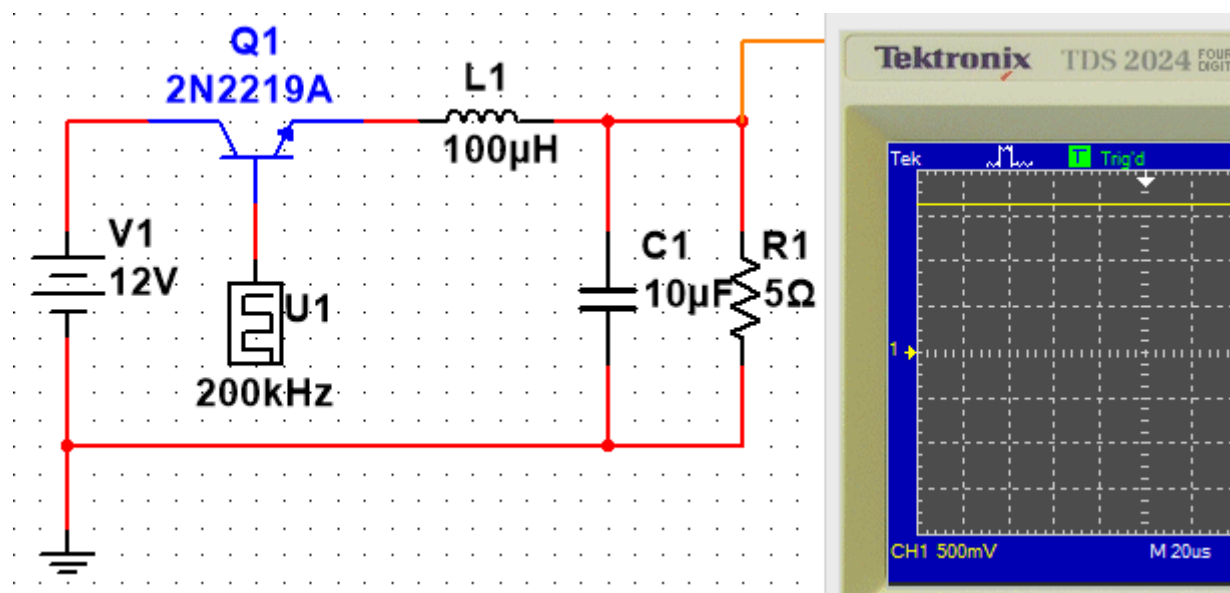
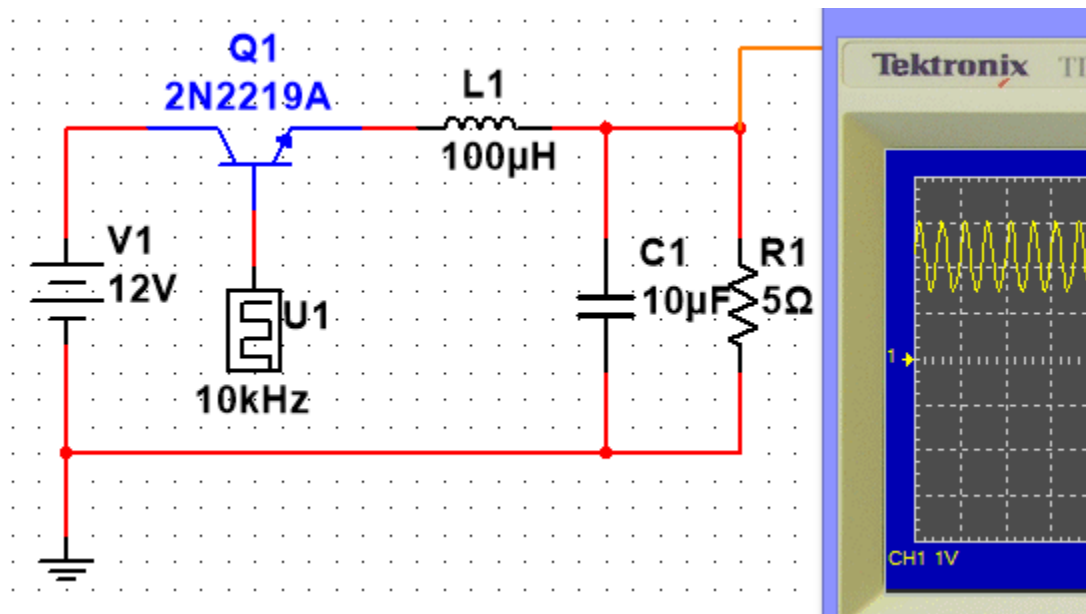
여기서 DC 성분은 푸리에 급수의 초항이고  
나머지 AC 성분이 고조파 성분에 해당한다.

이제 원하지 않는 고조파 AC 를 제거해야 한다.  
RC 필터도 고려할 수 있으나  
발열 손실을 최소화하기 위해 LC 필터가 적절하다.  
그래서 아래와 같이 인덕터와 콘덴서를 추가한다.









200 kHz 이므로 5 us 가 스위치 온 오프 간격이다.

인덕터에서 피크 전류 변동은 초기 전류가 0 인 경우에 아래와 같다.

$$V_L = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{V_L}{L} dt = di \Rightarrow \int di = \int \frac{V_L}{L} dt$$

$$\Delta I_{L(ON)} = \frac{V_{in} - V_{out}}{L} t_{ON} = \frac{12 - 5}{100\mu H} 5\mu s = 350mA$$

ON 시간 끝에서 인덕턴스 전류는 Peak 에 도달한다.

여기서 발생하는 또 다른 문제는 전기에서의 관성이다.

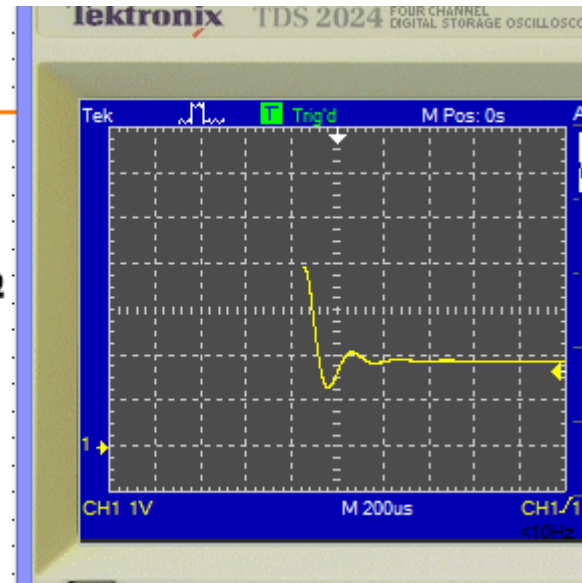
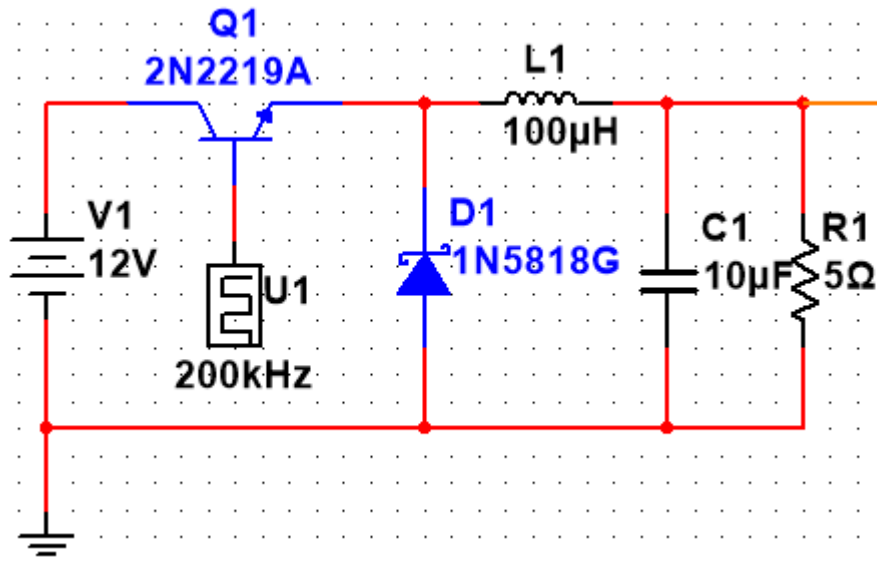
달리던 버스가 갑자기 멈추면 우리 몸이 관성에 의해 앞으로 달려 나가듯이

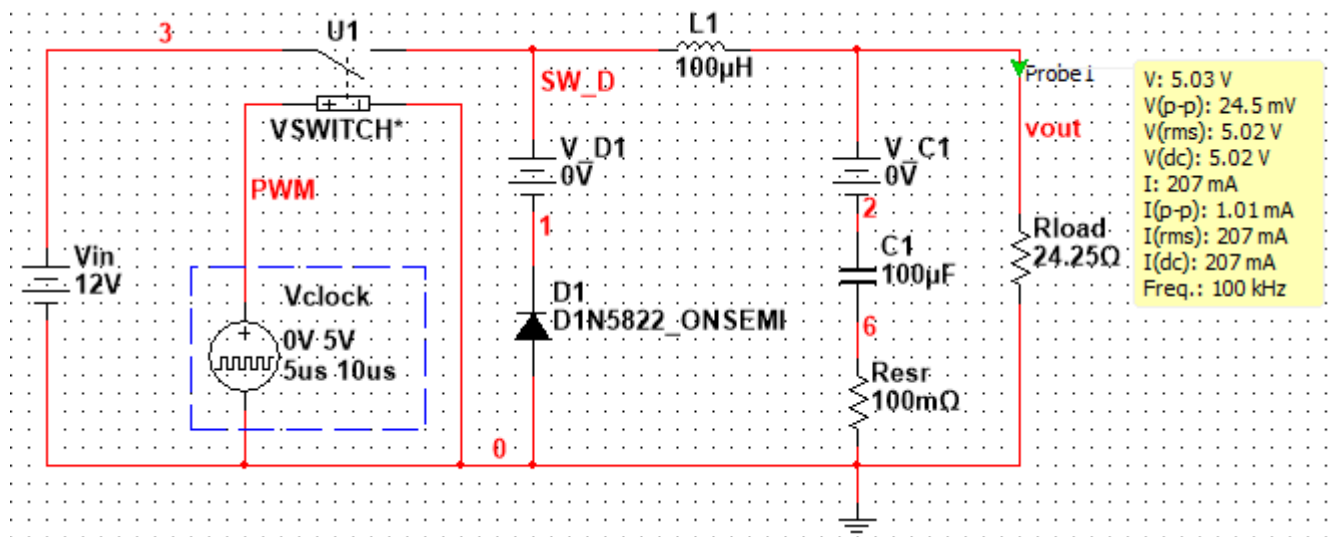
코일도 이와 같은 관성의 특성을 가지고 있어 갑자기 전류가 끊기면 튀어나가고 싶어한다.

그래서 스위치가 Open 될 때도 전류가 흐를 수 있게 길을 만들어줘야 한다.

(이 길이 없다면 수천 kV 의 피크 전압이 발생하여 모든 회로가 박살나 버린다)

고로 Freewheeling Diode 를 달아서 다시 흐를 수 있게 만들어주는 것이다.

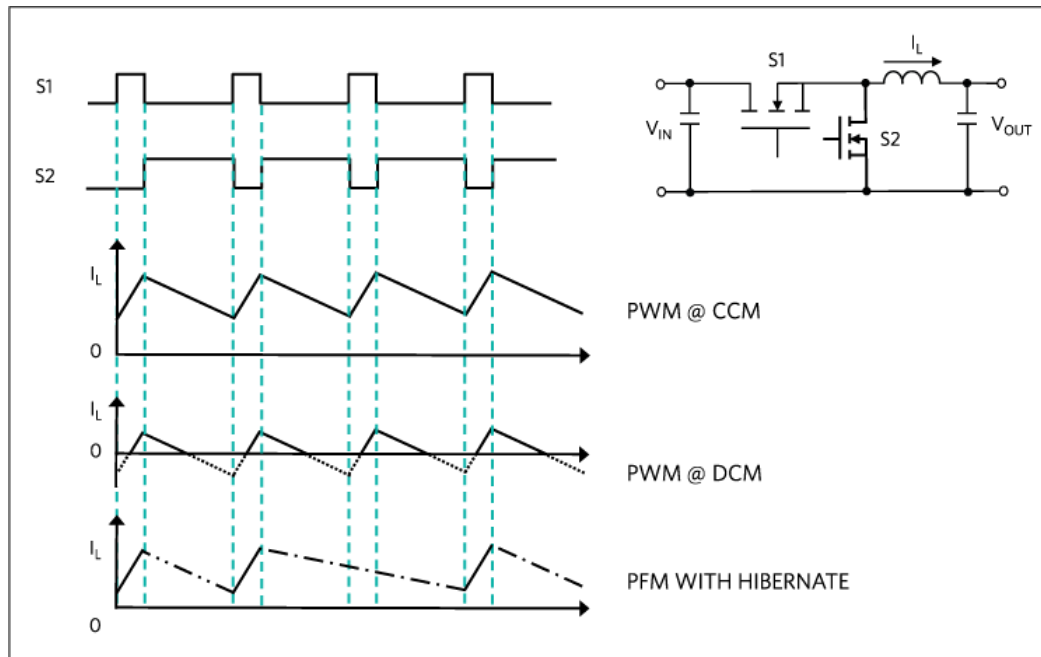




# Three Type of Inductance Driving Mode

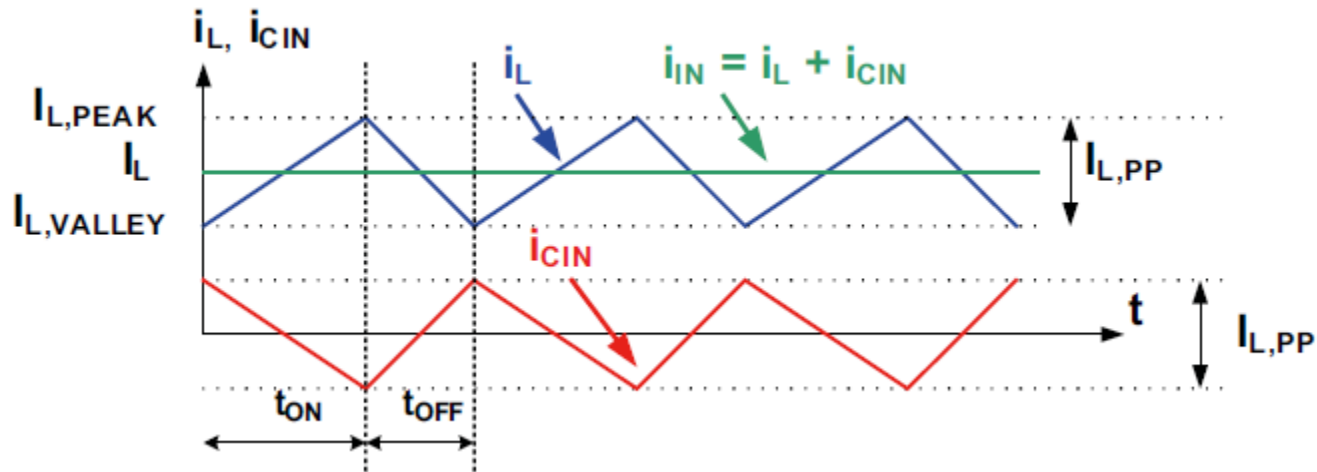
인덕터 전류에 따라 아래와 같은 3 가지 동작 모드가 존재한다.

- 1) **CCM(Continuous Conduction Mode)**  
인덕터 전류가 스위칭 주기 동안 결코 0 이 되지 않는다.  
코일의 자속이 스위칭 주기 동안 0 이 되지 않는다.  
즉 스위치가 인덕터 전류가 0 이 되지 않도록 동작한다.
- 2) **DCM(Discontinuous Conduction Mode)**  
인덕터 전류가 스위칭 주기 동안에 0 이 되는 구간이 있다.
- 3) **BCM(Boundary or Borderline Conduction Mode)**  
제어기가 인덕터 전류를 관측하여 0 이 될 때 스위치가 즉시 동작한다.  
피크 전류가 크고 하강 기울기가 크지 않으면 스위칭 기간이 길어질 것이다.



## 아래 그래프를 보면서 해석을 진행해보자!

먼저 맥동 전류에 대해 알아보도록 하자!



$$\Delta I_L = I_{peak} - I_{valley}$$

위 정의로 도출되는 전류를 맥동 전류라고 한다.

평균적으로 흐르는 DC 성분은 이 차이의 절반이 되므로 식을 다시 쓰면 아래와 같다.

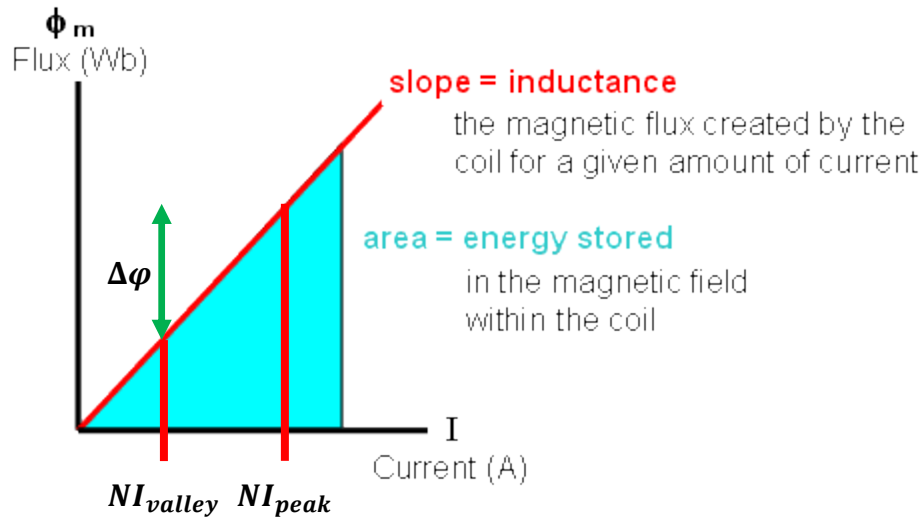
$$\Delta I_L = I_{L(average)} + \frac{V_1}{L} t_{ON} - \left( I_{L(average)} - \frac{V_2}{L} t_{OFF} \right) = \frac{V_1 t_{ON} - V_2 t_{OFF}}{2L}$$

Buck 인 경우에는 아래와 같다.

$$V_1 = V_{in} - V_{out}, \quad V_2 = V_{out}$$

## 다음으로 자속에 관한 곡선을 살펴보자!

먼저 맥동 전류에 대해 알아보도록 하자!



$\phi(t)$	인덕터 자속
$N$	인덕터 권선 수
$I$	인덕터 전류

인덕터에서 측정되는 전압은 Faraday 법칙으로부터 아래와 같다.

$$V_L(t) = N \frac{d\phi(t)}{dt}$$

양 변을 적분하면 아래와 같다.

$$\int V_L(t) dt = \int N \frac{d\phi(t)}{dt} dt$$

여기서  $N$  은 인덕터의 권선 수로 상수이며 인덕터의 전압은 변수로  $On, Off$  에 일정한 값을 가진다.  
그러므로 아래와 같이 정리 할 수 있다.

$$Vt = N\phi$$

초기 조건을 고려하면 아래와 같다.

$$V\Delta t = N\Delta\phi$$

평형 상태에서 자속은 초기값으로 환원 되므로 아래가 성립한다.

$$V_1 t_{ON} = V_2 t_{OFF}$$

결과적으로 앞서 알아봤던 전류의 변화량을 아래와 같이 적을 수 있다.

$$\Delta I_L = I_{L(average)} + \frac{V_1}{L} t_{ON} - \left( I_{L(average)} - \frac{V_2}{L} t_{OFF} \right) = \frac{V_1 t_{ON} - V_2 t_{OFF}}{2L}$$

$$\Delta I_L = \frac{N\Delta\phi + N\Delta\phi}{2L} = \frac{N\Delta\phi}{L}$$

결국 아래와 같은 결론을 도출 할 수 있다.

- 1) 큰 인덕터는 작은 맥동 전류를 유도한다.
- 2) 같은 출력 전류인 경우 작은 맥동 전류를 가지는 출력 전류의 실효치는 큰 맥동 전류를 가지는 경우에 비해 상대적으로 작은 값이 된다.  
그러므로 CCM 은 DCM 및 BCM 에 비하여 더 손실의 정도가 낮다.
- 3) 작은 인덕터는 더 큰 맥동을 가져오고 DCM 방식이 될 수도 있다.  
맥동 전류가 더 크기 때문에 손실이 많다.
- 4) 피크 전류와 평균 전류의 관계는 동작 모드에 따라 아래와 같다.

$$CCM - I_{L(avg)} > \frac{I_{peak}}{2}$$

$$DCM - I_{L(avg)} < \frac{I_{peak}}{2}$$

$$BCM - I_{L(avg)} = \frac{I_{peak}}{2}$$



인덕터를 자화하는 On 시간 동안  $V_1$  이 인가되고 자화를 리셋하는 Off 동안  $V_2$  가 인가 된다.

아래 그림에 앞서 도출한 결론을 적용하면 평균 전압이 0 임을 알 수 있다.

$$V_1 t_{ON} = V_2 t_{OFF}$$



식은 아래와 같이 적을 수 있다.

$$\frac{1}{T_{SW}} \int_0^{T_{SW}} V_L(t) dt = \langle V_L \rangle_{T_{SW}} = 0$$

이를 인덕터의 Volt Second 평형이라 한다.

$\varphi(t)$

이 개념을 콘덴서에도 적용해보도록 한다.

콘덴서에 흐르는 전류는 정의에 의해 전압을 변동시킨다.

$$I_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dV_C(t)}{dt}$$

양변을 콘덴서 C 로 나누고 적분하면 아래와 같다.

$$\frac{1}{C} \int_0^t I_C(t) dt = \int_0^t \frac{dV_C(t)}{dt} dt$$

우변을 아래와 같이 변형할 수 있다.

$$\frac{1}{C} \int_0^t I_C(t) dt = \Delta V_C(t)$$

전류의 적분은 전하 Q 가 되며 위 식은 결국 아래와 같이 적을 수 있게 된다.

$$\frac{1}{C} \Delta Q_C(t) = \Delta V_C(t)$$

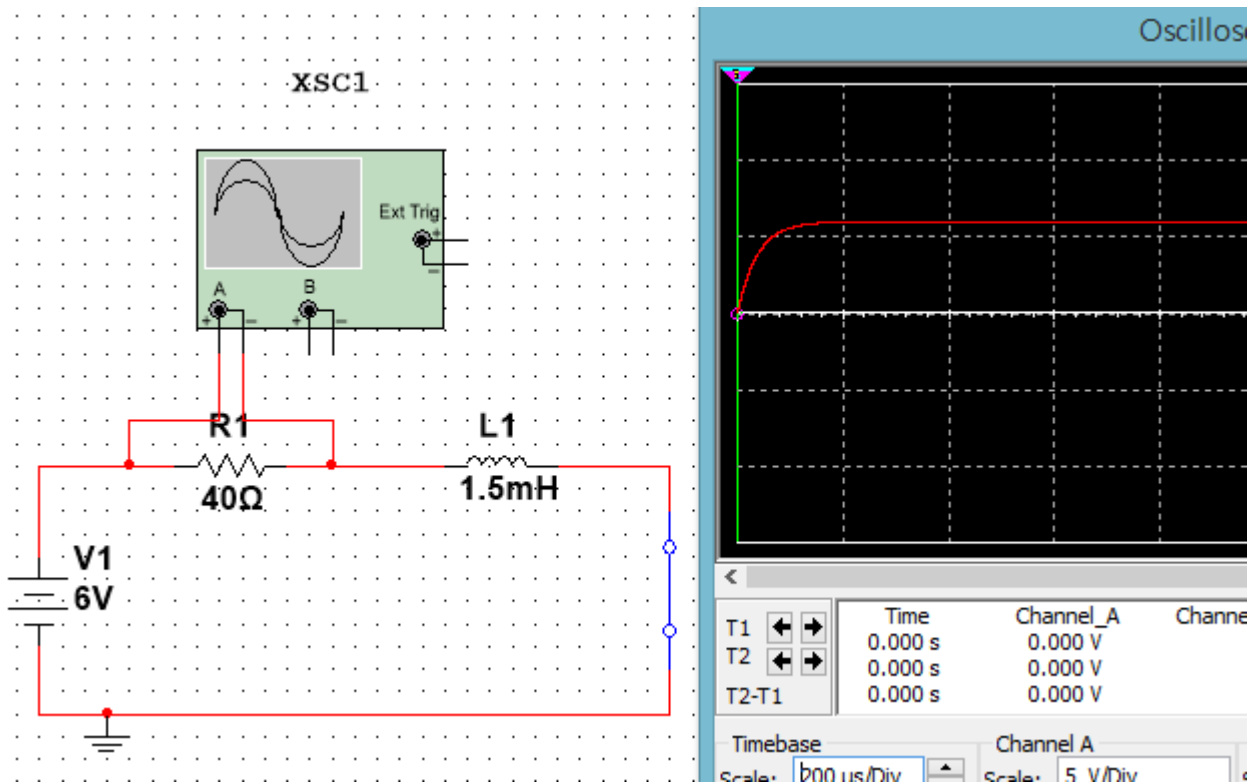
$\varphi(t)$

인덕터의 자속과 같이 전류의 양이 양수면 콘덴서가 충전되고 음이면 방전 된다.

$$\int_0^{T_{sw}} I_C(t) dt = \langle I_C \rangle_{T_{sw}} = 0$$

# RL Circuit Response

저항과 인덕터로 구성된 RL 회로의 동작에 대해 살펴보도록 하자!



위와 같은 결과가 나오는 이유에 대해서 생각을 해보도록 하자!

먼저 RL Circuit에서  $i_L(t)$ 에 대한 미분방정식을 유도하면  $V_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ 를 통해  $i_L(t_0^+)$ 를 계산할 수 있다.

$$V_s = i_L(t)R + V_L(t)$$

$$V_s = i_L(t)R + L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L}i_L(t) = \frac{1}{L}V_s$$

$$\frac{dy}{dt} + ky = p$$

$$\mu(t) = e^{\int k dt} = e^{kt}$$

$$e^{kt} \frac{dy}{dt} + e^{kt}ky = \frac{d}{dt}(e^{kt}y) \quad (\text{좌변})$$

$$pe^{kt} \quad (\text{우변})$$

$$\int \frac{d}{dt}(e^{kt}y) dt = e^{kt}y$$

$$\int pe^{kt} dt = \frac{p}{k}e^{kt} + C$$

$$y = \frac{p}{k} + Ce^{-kt}$$

$$i_L(t) = \frac{L V_s}{R L} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L(t) = \frac{V_s}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{V_s}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

이 미분방정식의 계산의 편의를 위해 간단한 치환을 수행한다.

$$i_L(t) = y, \quad \frac{R}{L} = k, \quad \frac{V_s}{L} = p$$

우리의 예에서 p 값이 0이 아니므로 공업수학에서 배운 1계 미분 방정식에 해당한다.  
적분 인자  $\mu(x)$ 를 구하도록 하자!

양변을  $\mu(x)$ 인 적분 인자로 나누어 y에 대해 정리하여 일반해를 얻어보자!

치환했던 식들을 모두 다시 대입해보면 아래와 같이 정리된다.

$$t = 0, i_L = 0, t = \infty, i_L = \frac{V_s}{R}$$

$C(\text{적분상수}) = -\frac{V_s}{R}$ 이고 만약  $i_L$ 이 0이 아닌 값이 존재한다면 식이 바뀐다.  
(이 경우에는  $i_L(0) - \frac{V_s}{R} = C$ 가 된다)

$$i_L(t) = \frac{V_s}{R} - (i_L(0) - \frac{V_s}{R})e^{-\frac{R}{L}t}$$

## Inductor의 자연 응답에 대해서도 생각해보도록 하자!

아래와 같이 Switch가 열려 있는 상황에서 Inductor가 전류원으로써 동작할 경우를 생각하는 것이다.

$$L \frac{di}{dt} + iR = 0$$

$$\frac{di}{dt} + i \frac{R}{L} = 0$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{R}{L} dt} = e^{\frac{R}{L}t}$$

$$e^{\frac{R}{L}t} \frac{di}{dt} + e^{\frac{R}{L}t} \frac{R}{L} i = \frac{d}{dt} (e^{\frac{R}{L}t} i) \quad (\text{좌변})$$

$$0 \quad (\text{우변})$$

$$\int \frac{d}{dt} (e^{\frac{R}{L}t} y) dt = e^{\frac{R}{L}t} i$$

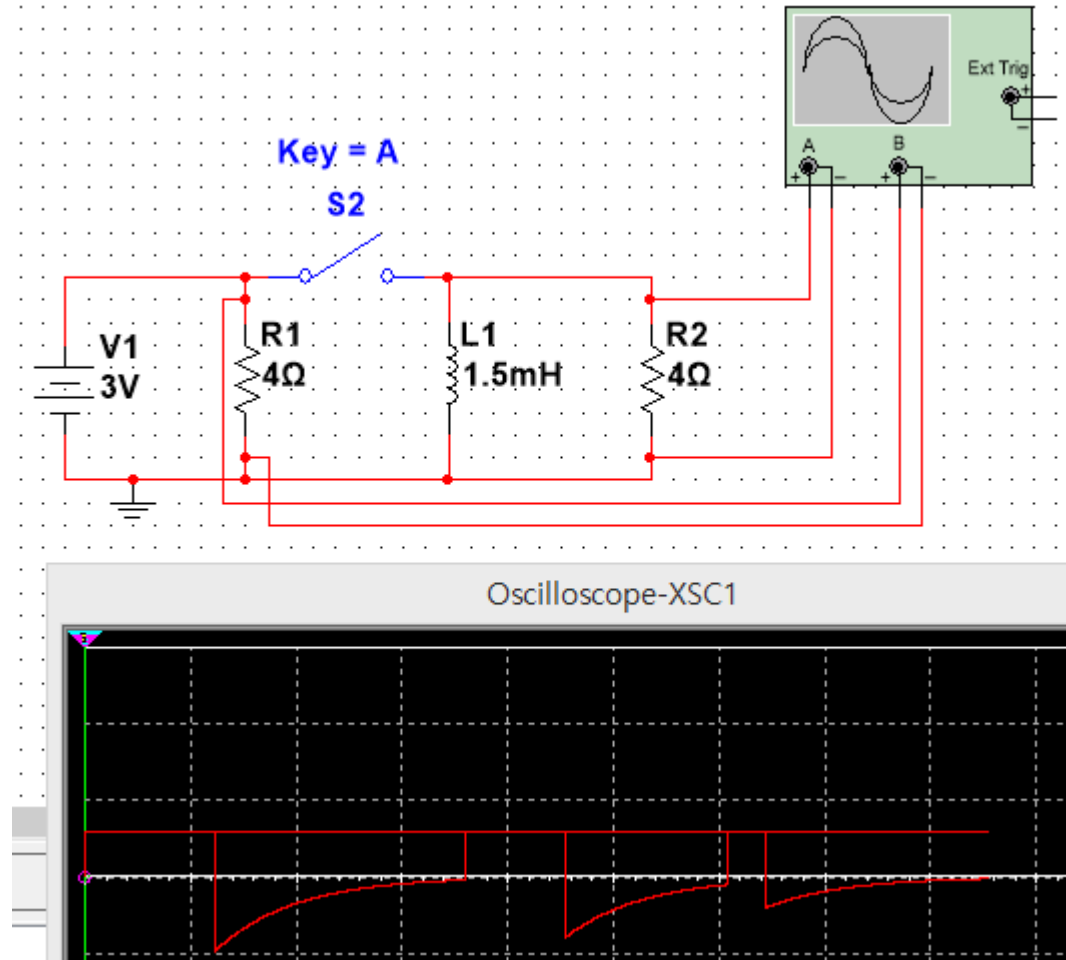
$$\int 0 dt = C$$

$$i = C e^{-\frac{R}{L}t} \quad t = 0, i = i_0, t = \infty, i = 0$$

$$i = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad L \frac{di}{dt} = V_L$$

$$V_L = -R i_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$



이 결과는 유도되는 기전력이 원래의 전압보다 높음을 의미한다(에너지를 만땅으로 충전했을 경우)  
 축적된 에너지가 만땅이 아니라면 오히려 더 낮을 수도 있는데 그림에서 3번째 곡선을 보면  
 에너지를 축적할 시간을 별로 주지 않고 바로 동작시켰을 때 유도 기전력이 원래 전압보다 낮은 것을 볼 수 있다.

## Capacitor와 유사하게 Inductor도 전류가 흐르다가 결국에 흐르지 않게 된다.

Inductor는 Newton의 제 1 법칙에 해당하는 관성에 따르는데 뭘 따른다는걸까 ?

우선 관성이란 무엇인가 ?

물체가 현재의 상태를 계속 유지하려는 것

일반적인 역학에서 그렇다면

우리가 살펴보는 회로에서는 어떨까 ?

Inductor에서의 관성이란 무엇일까 ?

Switch가 닫혀 있던 상황을 생각해보자!

Inductor에 특정한 전류가 흐르고 있다.

Inductor에는 원래 전류가 흐르지 않았기에

흐르지 않는 상태를 유지하기 위해 반대 방향으로 이를 밀어내고 싶어한다. Oscilloscope-XSC1

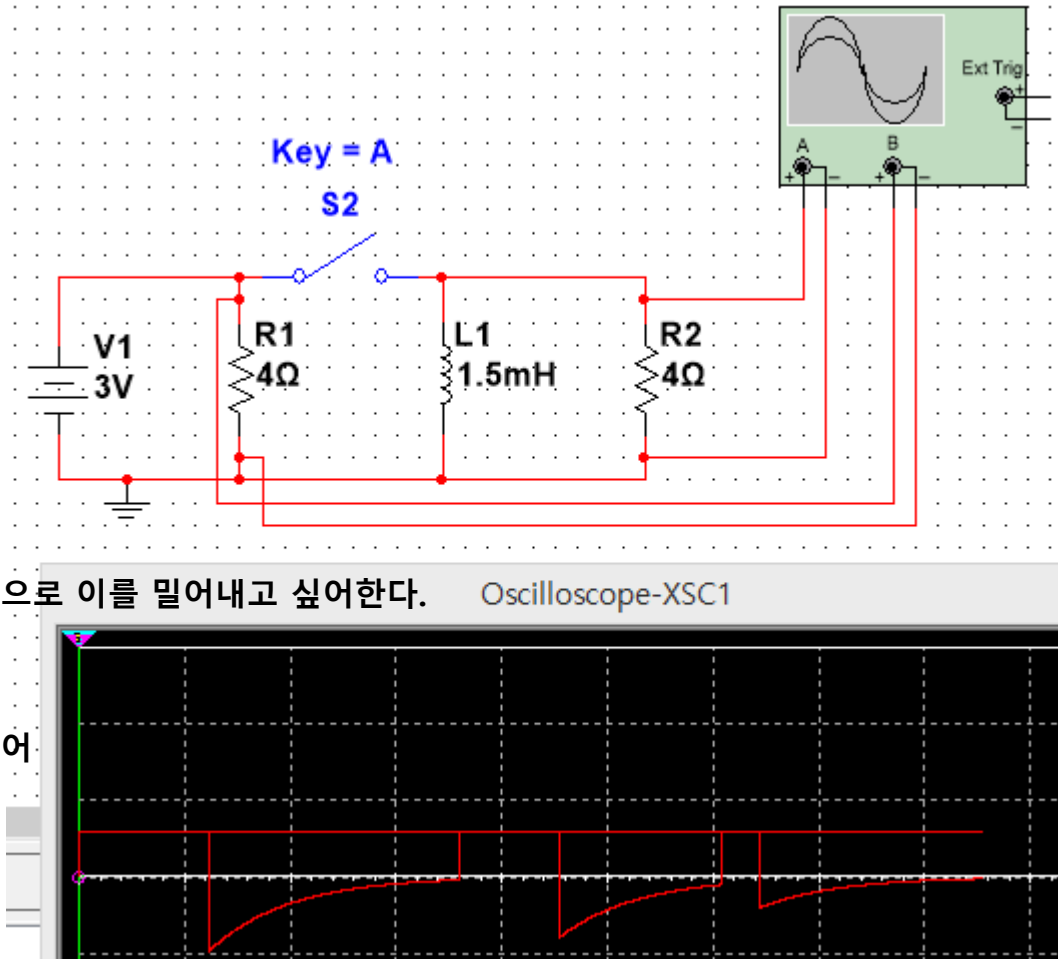
그런데 갑자기 전원 공급이 끊어지면

들어오는 것을 막기 위한 상태를 유지하고 싶어

반대 방향으로 전압이 발생하게 된다.

이것을 유도 기전력이라고 부른다.

Maxwell Equation에서는 Faraday's Law라함



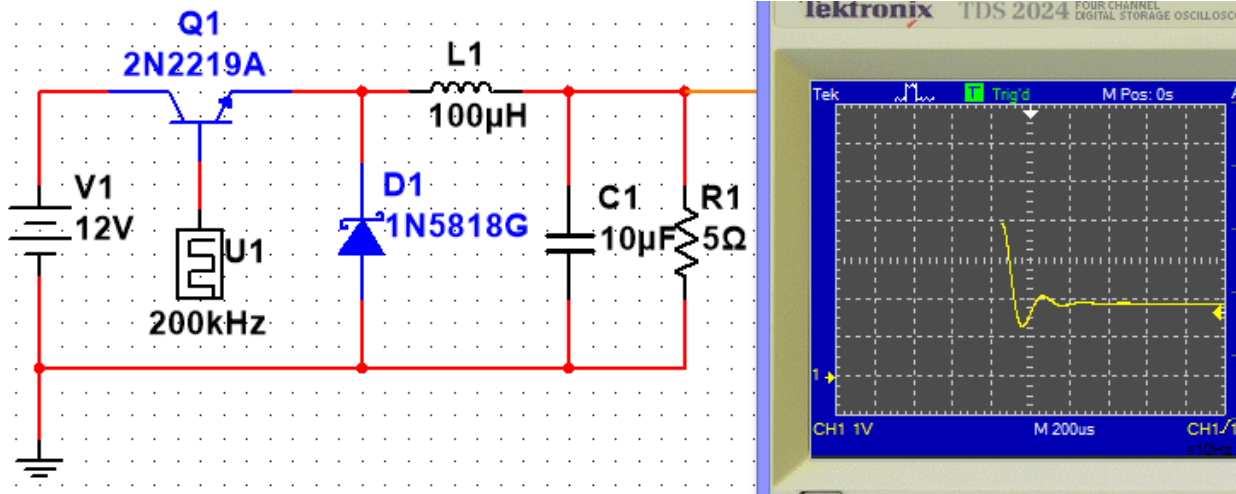
# Buck Converter

## 아래 Buck Converter 회로를 살펴보도록 하자!

아래 회로는 결국 스위치가 달려 있는 회로와 마찬가지로 동작을 보여준다.

스위치가 닫히자마자 인덕터에 전류가 흐르고

직렬 저항을 가지는 인덕터 L 에 전압 V 를 인가하면 아래와 같이 전류가 지수적으로 흐르게 된다.



$$I_L(t) = \frac{V_L}{r_{Lf}} \left(1 - e^{-\frac{r_{Lf}}{L}t}\right)$$

인덕터에 걸리는 전압과 인덕터의 직렬 저항을 가지고 식을 세웠다.

여기서 실제 직렬 저항은 아주 작기 때문에 아래와 같이 근사 할 수 있다.

$$I_L(t) = \frac{V_L}{r_{Lf}} \left(1 - e^{-\frac{r_{Lf}}{L}t}\right) \approx \frac{V_L}{r_{Lf}} \left(1 - 1 + t \frac{r_{Lf}}{L}\right) = \frac{V_L}{L} t$$

# Maclaurin & Taylor Series

Taylor 및 Maclaurin 급수는 복잡한 수식을  
다항함수로 나타낸다는데 가장 큰 초점을 둔다.

Image Processing에서는 주로 보간법(Interpolation)에서 사용됨  
실제 Computer의 sin, cos, tan, exp와 같은 것의 계산도 포함됨

우선적으로 Taylor Series는 아래와 같다.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{이 때 } a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Maclaurin Series는  $z_0 = 0$ 인 Taylor 급수를 의미한다.



$$f(z) = \sum_{n=1} a_n (z - z_0)^n \quad \text{이 때 } a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

위 식을 다시 전개하게 되면 아래와 같을 것이다.

$$f(z) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{1!} f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + R_n(z)$$

이를 활용하여 우리는  $e^{ix}$ 와  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\tan x$ 등을 구할 수 있으며  $\sin x$ 에서  $x$ 가 아주 작아질 경우  $x$ 에 수렴함도 얻을 수 있다.

Fourier 급수와 Laurent 급수는 다루지 않겠지만  
이 둘을 이용하여 Taylor 급수에서 풀 수 없는 문제 또한 풀 수 있다.

$$\begin{aligned}
e^x &= \frac{e^0}{0!} (x-0)^0 + \frac{e^0}{1!} (x-0)^1 + \frac{e^0}{2!} (x-0)^2 + \dots \\
&= \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \\
&= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \frac{\sin(0)}{0!} (x-0)^0 + \frac{\cos(0)}{1!} (x-0)^1 + \frac{-\sin(0)}{2!} (x-0)^2 + \frac{-\cos(0)}{3!} (x-0)^3 + \frac{\sin(0)}{4!} (x-0)^4 + \dots \\
&= \frac{0}{0!} + \frac{x}{1!} - \frac{0}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{0}{4!} \dots \\
&= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (n=0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

## 테일러 및 맥클로린 급수를 베이스로 앞서 적었던 식을 재정립 해보자!

먼저 앞서 적었던 식을 다시 표기해보면 아래와 같다.

$$I_L(t) = \frac{V_L}{r_{Lf}} (1 - e^{-\frac{r_{Lf}}{L}t}) \approx \frac{V_L}{r_{Lf}} \left(1 - 1 + t \frac{r_{Lf}}{L}\right) = \frac{V_L}{L} t$$

먼저 테일러 급수 전개할 녀석을 전개해보도록 하자!

$$e^{-\frac{r_{Lf}}{L}t} = 1 - \frac{1}{1!} \frac{r_{Lf}}{L} t + \frac{1}{2!} \left(\frac{r_{Lf}}{L} t\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{r_{Lf}}{L} t\right)^3 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{r_{Lf}}{L} t\right)^n$$
$$\lim_{r_{Lf} \rightarrow 0} e^{-\frac{r_{Lf}}{L}t} = 1 - \frac{r_{Lf}}{L} t$$

이와 같이 맨 위의 식이 도출된다.

스위치가 On 되면 전류는 최고치에 도달하게 되고 아래와같이 적을 수 있다.

$$I_{peak} = I_{valley} + \frac{V_{in} - V_{out}}{L} t_{ON}$$

인덕터 최저 전류는 아래와 같이 적을 수 있다.

$$I_{valley} = I_{peak} - \frac{V_{out}}{L} t_{OFF}$$

평형 상태에서 인덕터에 흐르는 전류는 콘덴서와 저항에 흐르게 되고  
일반적으로 콘덴서에는 AC 성분이 흐르고 부하 저항에는 DC 성분이 흐르게 된다.  
이를 베이스로 맥동의 크기를 계산하는데 도움이 된다.

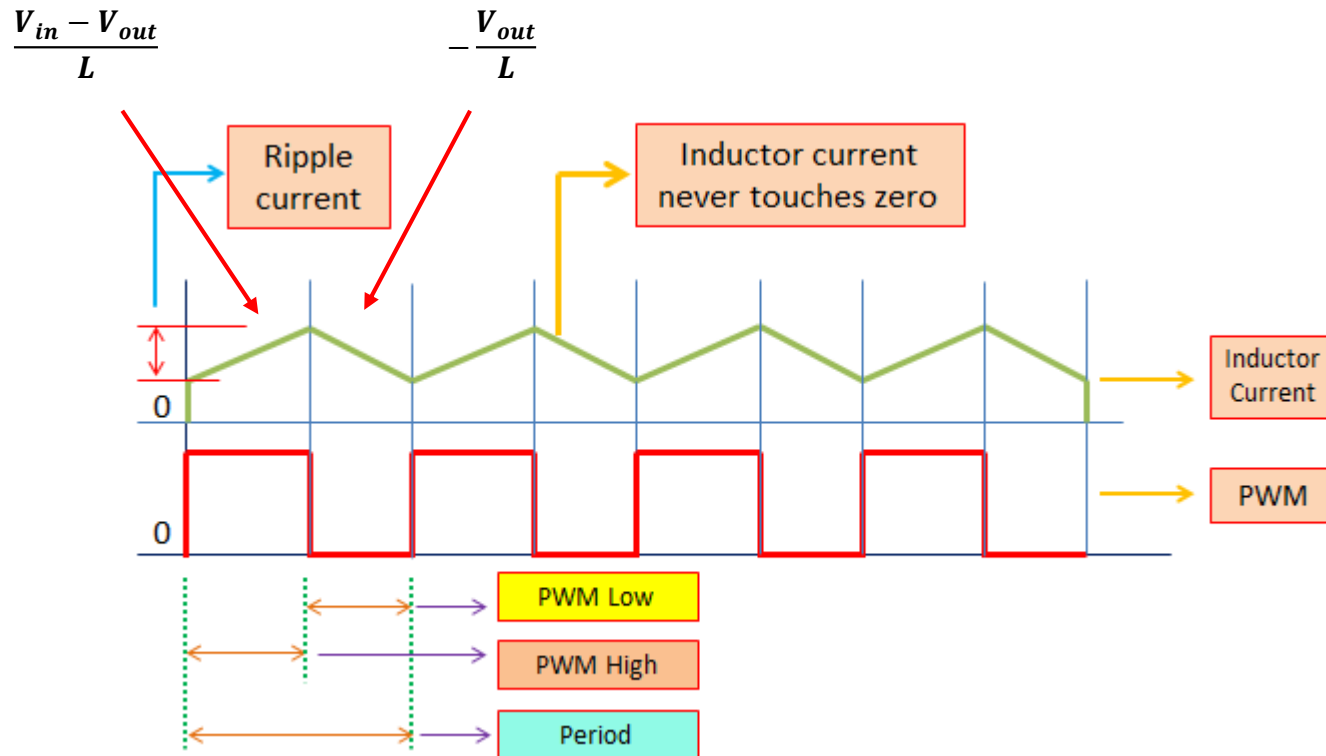
# CCM Waveform of Buck Converter

우선 아래와 같은 Buck Converter 의 CCM Waveform 을 살펴보자!

PWM 파형은 Switch 의 On, Off 에 따른 파형을 보여준다.

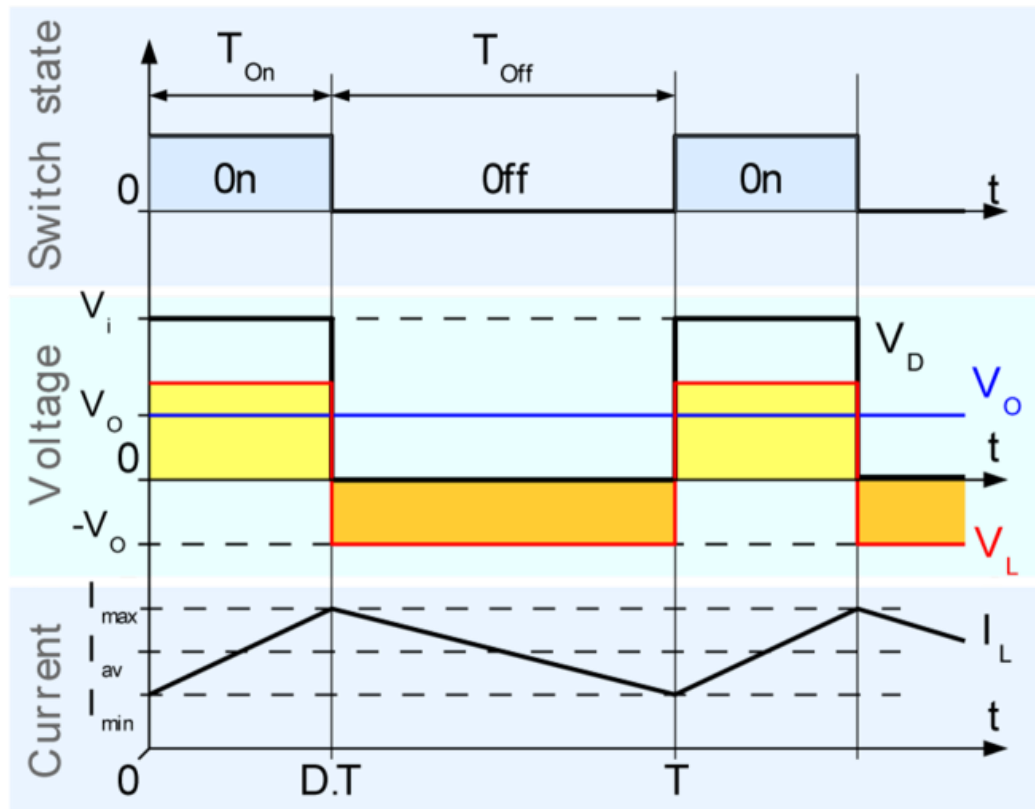
스위치가 닫히면 다이오드에 의해 인덕터 전류가 바이어스 되고 음수의 다이오드 전압 강하만이 걸린다.

이와 같은 것을 freewheeling(순환 전류)라고 부른다.



L의 평균 전압은 평형 상태에서 0 이므로 위 면적과 아래 면적의 합이 0임을 의미한다.  
 위쪽 노란색 면은 On 상태에서의 전압과 시간의 면적이고 아래쪽 주황색은 Off 상태에서의 전압 시간 면적이다.

$$\begin{aligned} S_1 &= (V_{in} - V_{out})DT_{SW}, & S_2 &= -V_{out}(1-D)T_{SW} \\ \frac{(S_1 + S_2)}{T_{SW}} &= \frac{(V_{in} - V_{out})DT_{SW} - V_{out}(1-D)T_{SW}}{T_{SW}} = 0 \\ V_{out} &= DV_{in}, & M &= \frac{V_{out}}{V_{in}} = D \end{aligned}$$



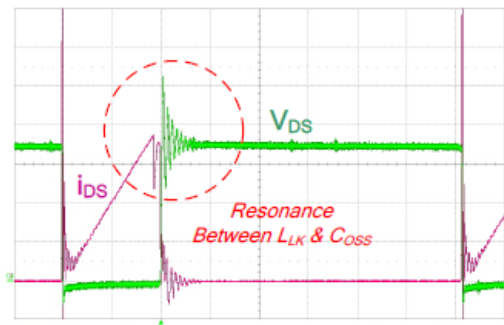
# DCM Waveform of Buck Converter

## 이번에는 Buck Converter 의 DCM Waveform 을 살펴보자!

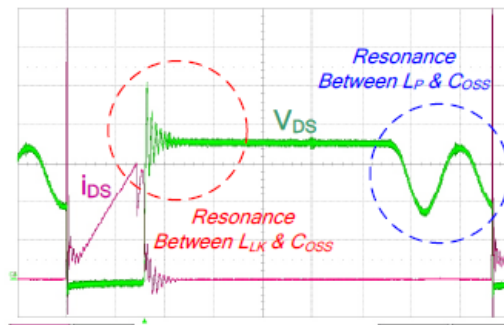
부하 저항을 조정하면 OFF 구간에서 인덕터 전류는 완전히 0 감소되고 스위치가 다시 ON 되길 기다린다.  
스위치가 OFF 되고 다이오드가 차단되는 구간에서 콘덴서가 부하에 전류를 공급한다.  
인덕터 전류가 0 으로 가서 유지되는 부분을 볼 수 있다.  
이론적으로 L 에 더 이상 전류가 흐르지 않으므로 발진 없이 출력 전압이 된다.

그러나 주위의 모든 기생 콘덴서(다이오드 및 스위치 기생 콘덴서) 때문에 공진이 형성되어 지직거리는 파형과 같이 정현파 신호가 나타나고 저항 댐핑에 따라 몇 사이클 후에 소멸 된다.  
(RLC 회로의 응답 특성을 상기해보자)

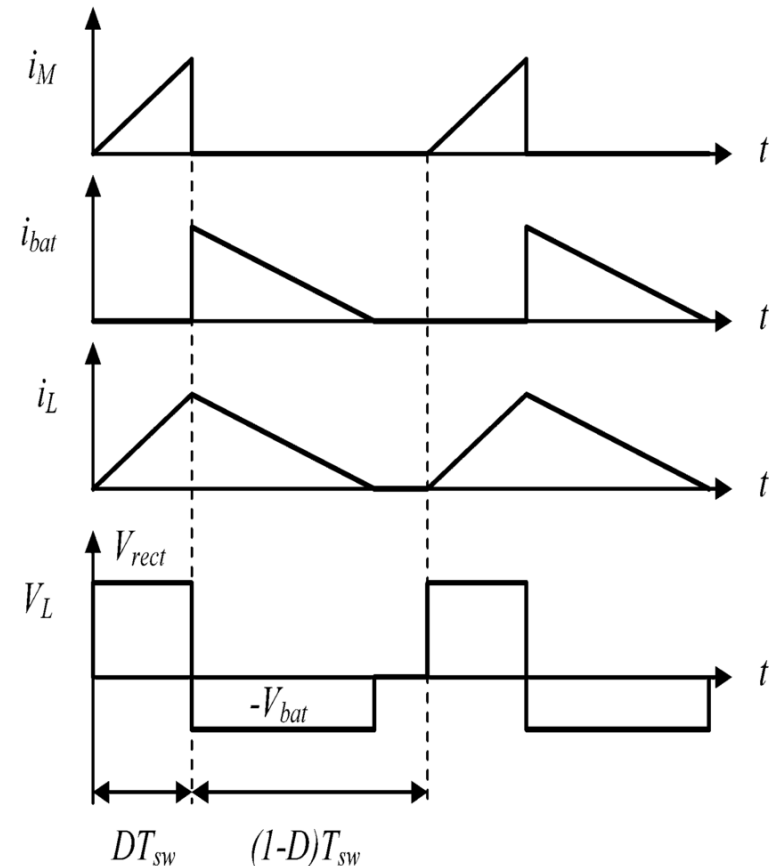
이제부터 전압과 전류의 변동을 살펴보도록 하자!



(a) In continuous conduction mode (CCM)



(b) In discontinuous conduction mode (DCM)



인덕터에 걸리는 전압과 전류를 살펴보자!

평균 전압이 0 이라는 것을 베이스로 Buck DCM 에 대한 식을 아래와 같이 설계할 수 있다.

$$T_{SW}(V_{in} - V_{out})D - T_{SW}D_2V_{out} = 0$$

Buck 회로에서 출력 전류는 인덕터에 흐르는 전류의 DC 또는 평균값이다.

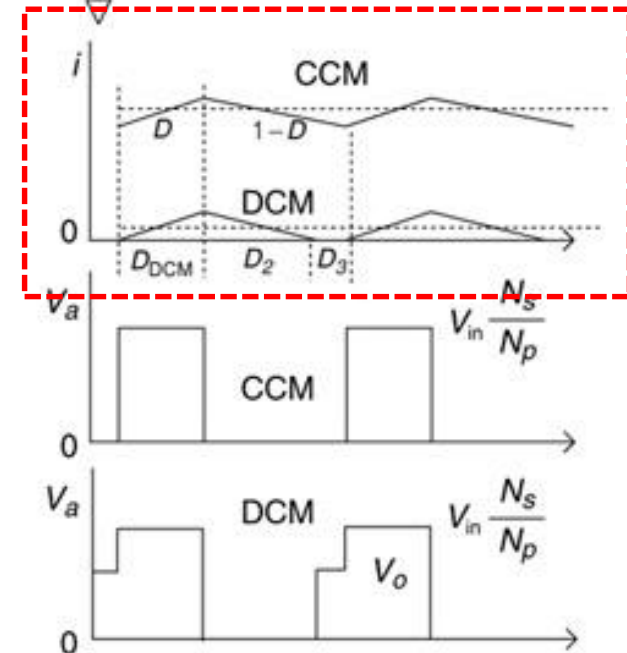
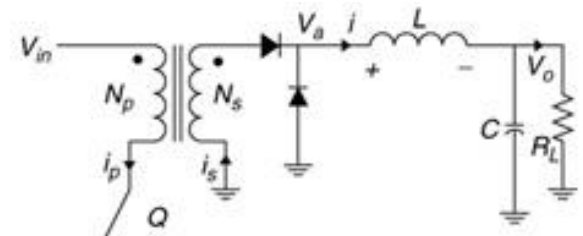
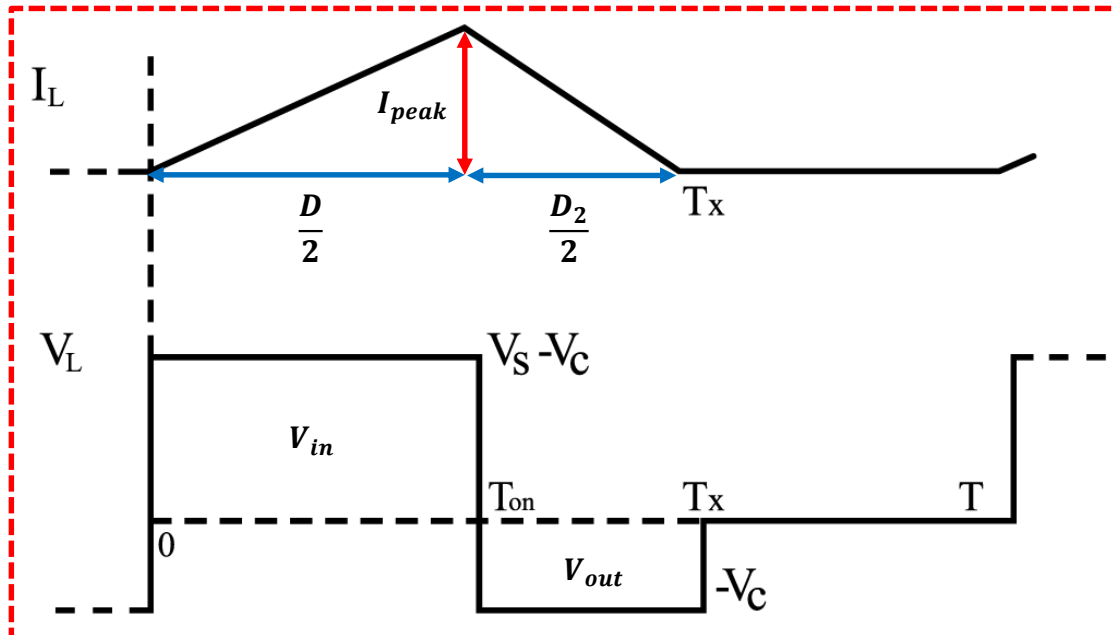
따라서 인덕터의 전류 함수를 아래와 같이 적을 수 있을 것이다.

(삼각형의 면적을 고려해보면 답을 알 수 있다)

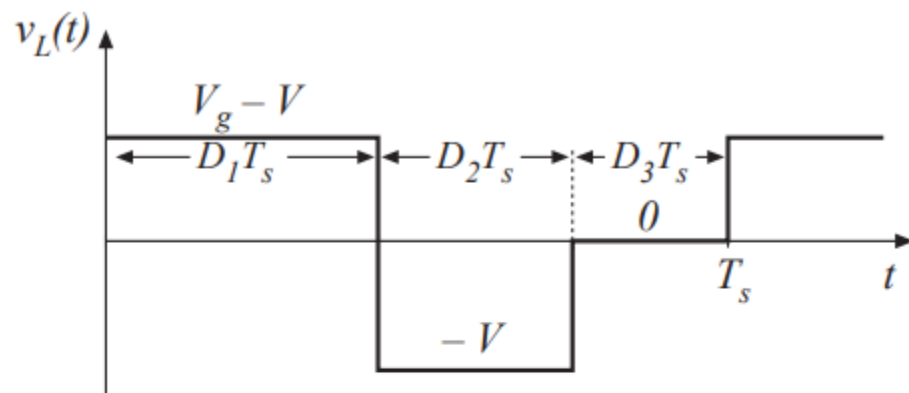
$$\begin{aligned} \frac{D}{2}I_{peak} + \frac{D_2}{2}I_{peak} &= I_{out} \Leftrightarrow D_2I_{peak} = 2I_{out} - DI_{peak} \\ D_2 &= \frac{2I_{out} - DI_{peak}}{I_{peak}} \end{aligned}$$

여기서 피크 전류값을 대입하도록 한다.

$$I_{valley} = I_{peak} - \frac{V_{out}}{L}t_{OFF} \Leftrightarrow I_{peak} = \frac{V_{out}}{L}t_{OFF} = \frac{V_{out}}{L}D_2T_{SW}$$



아래와 같이 에너지 보존 법칙으로 문제를 해결 할 수 있다.



Volt-second balance:

$$\langle v_L(t) \rangle = D_1(V_g - V) + D_2(-V) + D_3(0) = 0$$

Solve for  $V$ :

$$V = V_g \frac{D_1}{D_1 + D_2}$$

note that  $D_2$  is unknown



# Capacitor charge balance

node equation:

$$i_L(t) = i_C(t) + V / R$$

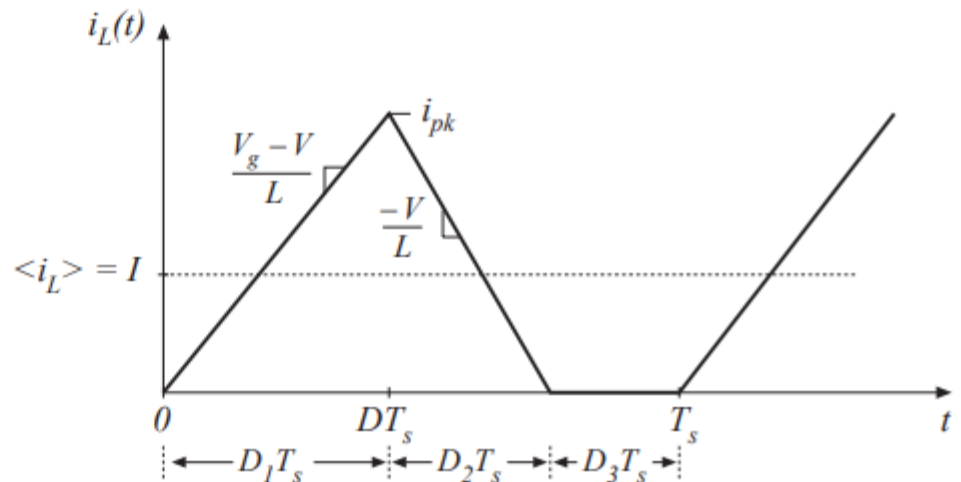
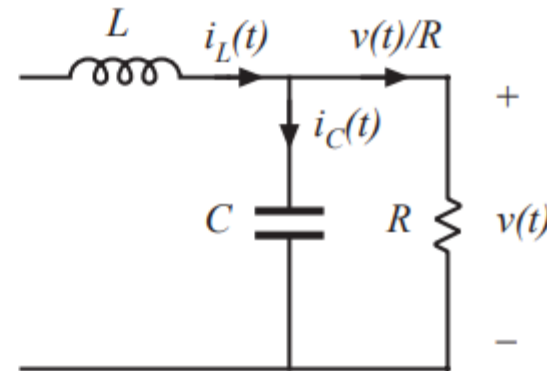
capacitor charge balance:

$$\langle i_C \rangle = 0$$

hence

$$\langle i_L \rangle = V / R$$

must compute dc component of inductor current and equate to load current (for this buck converter example)



# Inductor current waveform

peak current:

$$i_L(D_1 T_s) = i_{pk} = \frac{V_g - V}{L} D_1 T_s$$

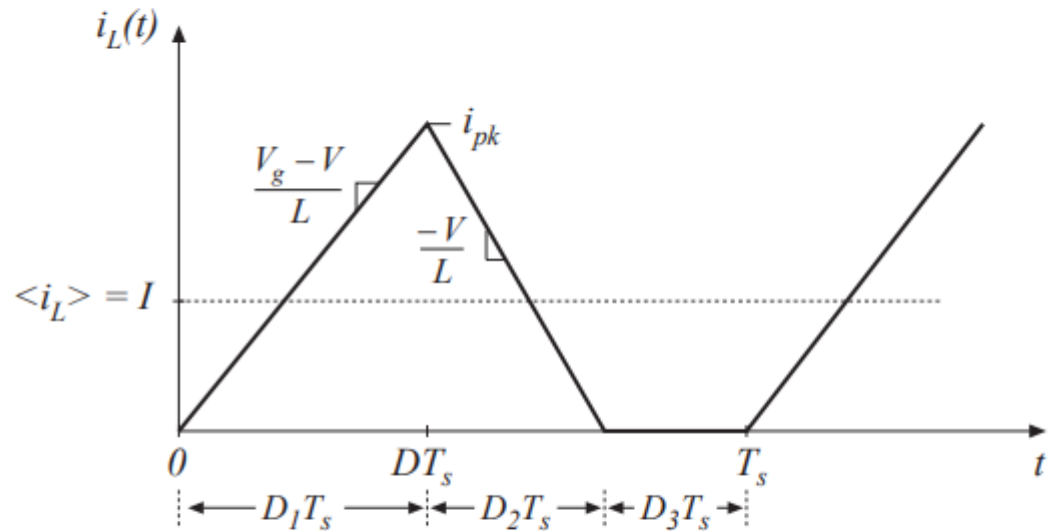
average current:

$$\langle i_L \rangle = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} i_L(t) dt$$

triangle area formula:

$$\int_0^{T_s} i_L(t) dt = \frac{1}{2} i_{pk} (D_1 + D_2) T_s$$

$$\langle i_L \rangle = (V_g - V) \frac{D_1 T_s}{2L} (D_1 + D_2)$$



equate dc component to dc load current:

$$\frac{V}{R} = \frac{D_1 T_s}{2L} (D_1 + D_2) (V_g - V)$$

## Solution for $V$

---

Two equations and two unknowns ( $V$  and  $D_2$ ):

$$V = V_g \frac{D_1}{D_1 + D_2} \quad (\text{from inductor volt-second balance})$$

$$\frac{V}{R} = \frac{D_1 T_s}{2L} (D_1 + D_2) (V_g - V) \quad (\text{from capacitor charge balance})$$

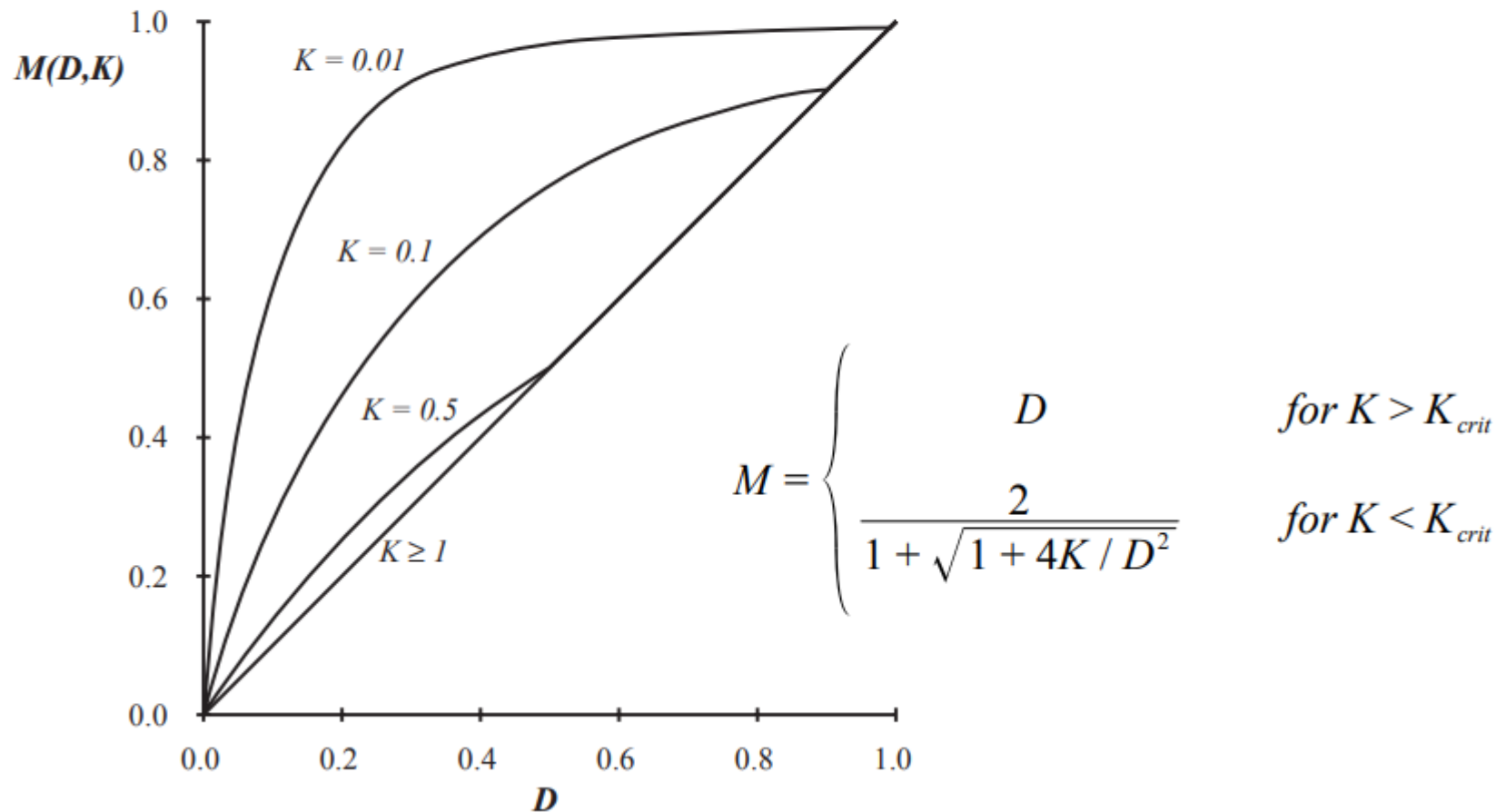
Eliminate  $D_2$ , solve for  $V$ :

$$\frac{V}{V_g} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4K / D_1^2}}$$

where  $K = 2L / RT_s$

valid for  $K < K_{crit}$

## Buck converter $M(D,K)$



양키들은 에너지 보존 법칙으로 문제를 해결하였다만 나는 평균값으로 문제에 접근해왔다.

$$I_{peak} = \frac{V_{in} - V_{out}}{L} t_{ON} = \frac{V_{out}}{L} t_{OFF}$$

$$D_{OFF} = D_2 = \frac{(V_{in} - V_{out}) D_{ON}}{V_{out}}$$

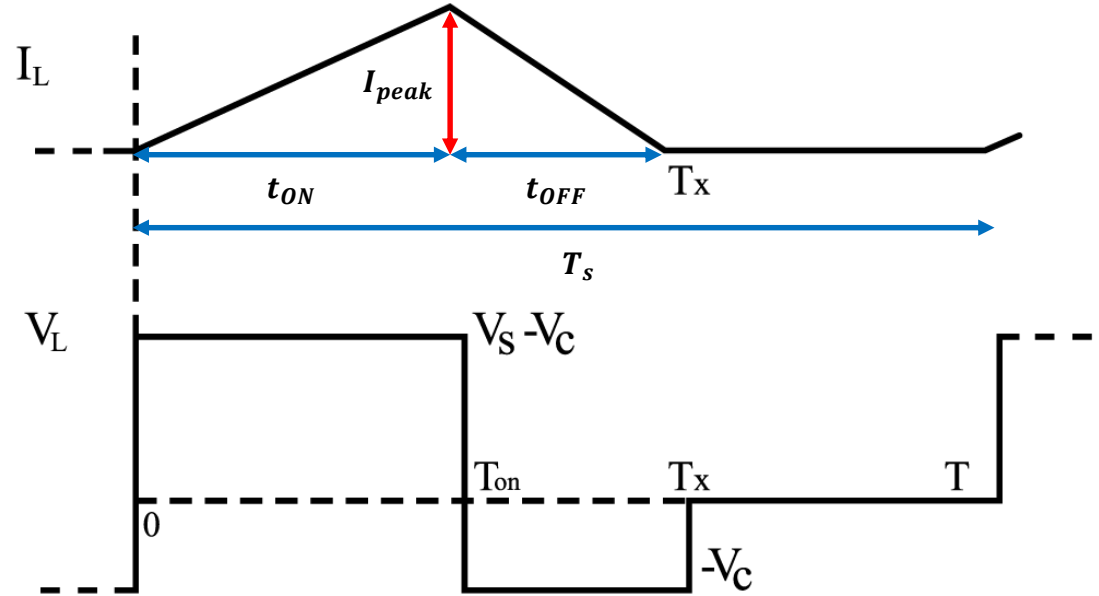
$$t_{OFF} = \frac{(V_{in} - V_{out})}{V_{out}} t_{ON} = T_{SW} D_{OFF}$$

$$t_{ON} = T_{SW} D_{ON}$$

결국 따지고 보면 이것도  
에너지 보존으로 접근하는 것과 다르지 않다.  
어쨌든 평균값으로 접근해보도록 하자!

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V^2(t) dt}$$

$$V_{AVG} = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt$$



적분 구간을 잘 나눠서 계산해야 한다.

$$I_{AVG} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} I(t) dt = \frac{1}{T_s} \left( \int_0^{t_{ON}} \frac{V_{in} - V_{out}}{L} t dt + \int_{t_{ON}}^{t_{ON}+t_{OFF}} -\frac{V_{out}}{L} t dt + \int_{t_{ON}+t_{OFF}}^{T_s} 0 dt \right) =$$

$$\frac{1}{T_s} \left[ \left( \frac{V_{in} - V_{out}}{L} \frac{1}{2} \right) t_{ON}^2 + \left( -\frac{V_{out}}{L} \frac{1}{2} \right) t_{OFF}^2 + 0 \right] = \frac{1}{T_s} \frac{1}{2} \left[ \frac{V_{in} - V_{out}}{L} t_{ON}^2 + \frac{V_{out}}{L} t_{OFF}^2 \frac{(V_{in} - V_{out})}{V_{out}} t_{ON} \right] =$$

$$\frac{1}{T_s} \frac{1}{2} \left( \frac{V_{in} - V_{out}}{L} \right) t_{ON} (t_{ON} + t_{OFF}) = \frac{1}{2} \left( \frac{V_{in} - V_{out}}{L} \right) t_{ON} D_{ON} (1 + D_{OFF}) =$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{V_{in} - V_{out}}{L} \right) t_{ON} D_{ON} \left( 1 + \frac{(V_{in} - V_{out})}{V_{out}} \right)$$

그리고 또 다른 평균 식을 하나 더 세울 수 있는데 출력 전압이 저항에 걸리는 케이스로 평균 전류를 적을 수 있다.

$$I_{AVG} = \frac{1}{2} \left( \frac{V_{in} - V_{out}}{L} \right) t_{ON} D_{ON} \left( 1 + \frac{(V_{in} - V_{out})}{V_{out}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{V_{in} - V_{out}}{L} \right) t_{ON} D_{ON} \left( \frac{V_{in}}{V_{out}} \right)$$

$$= \frac{V_{out}}{R}$$

이 2 개의 식을 정리해보도록 한다.

$$\frac{1}{2} \left( \frac{V_{in} - V_{out}}{L} \right) t_{ON} D_{ON} \left( \frac{V_{in}}{V_{out}} \right) = \frac{V_{out}}{R} \Rightarrow R(V_{in} - V_{out}) D_{ON}^2 T_{SW} V_{in} = 2LV_{out}^2$$

$$2LV_{out}^2 = RV_{in} D_{ON}^2 T_{SW} V_{in} - RV_{out} D_{ON}^2 T_{SW} V_{in}$$

$$2LV_{out}^2 + RD_{ON}^2 T_{SW} V_{in} V_{out} - RD_{ON}^2 T_{SW} V_{in}^2 = 0$$

$$2L \frac{V_{out}^2}{V_{in}^2} + RD_{ON}^2 T_{SW} \frac{V_{out}}{V_{in}} - RD_{ON}^2 T_{SW} = 0$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (a = 2L, \quad b = RD_{ON}^2 T_{SW}, \quad c = -RD_{ON}^2 T_{SW})$$

$$\frac{V_{in}}{V_{out}} = \frac{-RD_{ON}^2 T_{SW} \pm \sqrt{(-RD_{ON}^2 T_{SW})^2 - 4(2L)(-RD_{ON}^2 T_{SW})}}{2(2L)} = -\frac{RD_{ON}^2 T_{SW}}{4L} \pm \sqrt{\frac{(-RD_{ON}^2 T_{SW})^2}{(4L)^2} - \frac{4(2L)(-RD_{ON}^2 T_{SW})(RD_{ON}^2 T_{SW})}{(4L)^2(RD_{ON}^2 T_{SW})}}$$

이제 정리를 하면 된다.

$$\frac{V_{in}}{V_{out}} = -\frac{RD_{ON}^2 T_{SW}}{4L} \pm \sqrt{\frac{(-RD_{ON}^2 T_{SW})^2}{(4L)^2} + \frac{4(2L)(RD_{ON}^2 T_{SW})(RD_{ON}^2 T_{SW})}{(4L)^2(RD_{ON}^2 T_{SW})}} = \frac{RD_{ON}^2 T_{SW}}{4L} \left( -1 \pm \sqrt{1 + \frac{8L}{RD_{ON}^2 T_{SW}}} \right)$$

# BCM Waveform of Buck Converter

이번에는 Buck Converter 의 BCM Waveform 을 살펴보자!

인덕터 전류가 스위칭 구간 동안에 0 으로 감소하면 Converter 는 DCM 방식이 된다.

반대로 스위칭 구간에서 전류가 0 이 되지 않으면 CCM 방식이 된다.

부하 저항이 내려가면 인덕터 평균 전류도 내려간다.

전류가 0 이 되는 점을 경계점 또는 임계점이라고 한다.

BCM 방식에서 평균 전류는 피크 값을 단순히 2 로 나누면 된다.

$$\langle I_L \rangle_{T_{SW}} = \frac{I_{peak}}{2}$$

기울기는 이전과 마찬가지로 아래와 같다.

$$S_{ON} = \frac{V_{in} - V_{out}}{L}, \quad S_{OFF} = -\frac{V_{out}}{L}$$

피크 값은 아래와 같다.

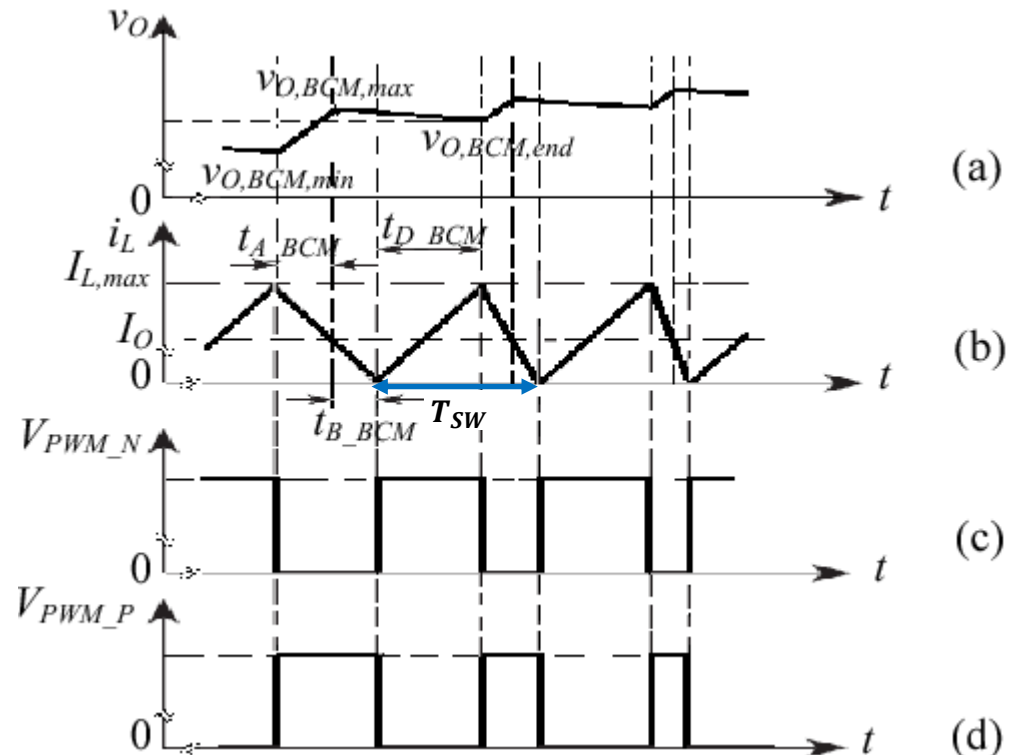
$$i_{peak} = \frac{V_{in} - V_{out}}{L} DT_{SW}$$

$$\langle I_L \rangle_{T_{SW}} = \frac{I_{peak}}{2} = \frac{V_{in} - V_{out}}{2L} DT_{SW}$$

인덕터 DC 성분은 출력 전류에 해당한다.

$$\langle I_L \rangle_{T_{SW}} = \frac{V_{out}}{R}$$

$$\frac{V_{in} - V_{out}}{2L} DT_{SW} = \frac{V_{out}}{R} = \frac{DV_{in}}{R}$$



앞서 구한 식에서 D 를 소거하도록 한다.

$$\begin{aligned}\langle I_L \rangle_{T_{SW}} &= \frac{V_{out}}{R} \\ \frac{V_{in} - V_{out}}{2L} D T_{SW} &= \frac{V_{out}}{R} = \frac{D V_{in}}{R} \\ (V_{in} - V_{out}) T_{SW} R &= 2L V_{in}\end{aligned}$$

이를 베이스로 R 과 L 을 구해보도록 한다.

$$\begin{aligned}R &= \frac{2L V_{in}}{(V_{in} - V_{out}) T_{SW}} = \frac{2L V_{in}}{(V_{in} - D V_{in}) T_{SW}}, \quad (V_{out} = D V_{in}) \\ \therefore R &= \frac{2L V_{in}}{(1 - D) T_{SW} V_{in}} = \frac{2L}{(1 - D) T_{SW}} = \frac{2L}{(1 - D)} F_{SW} \\ \therefore L &= \frac{(1 - D)}{2 F_{SW}} R\end{aligned}$$

위 식들을 Duty Ratio 를 가지고 다시 정리 할 수 있다.

$$\begin{aligned}D &= \frac{V_{out}}{V_{in}} \\ R &= 2L F_{SW} \frac{1}{\left(1 - \frac{V_{out}}{V_{in}}\right)} = 2L F_{SW} \frac{V_{in}}{V_{in} - V_{out}} \\ L &= \frac{1}{2 F_{SW}} R \left(1 - \frac{V_{out}}{V_{in}}\right) = \frac{1}{2 F_{SW}} R \left(\frac{V_{in} - V_{out}}{V_{in}}\right)\end{aligned}$$



# CCM Mode Ripple of Buck Converter

출력 콘덴서에 흐르는 선형 변동 전류를 나타낸다.

콘덴서에 걸리는 전압은 콘덴서 전류를 적분하여 구한다.

이 전류는 ax 형태의 선형 방정식이고 이것의 적분은  $bx^2$  형태의 포물선이다.

여기서 일단 콘덴서에 흐르는 전류를 구해야 하는데 교재 페이지 39 의 그림을 베이스로 설명하도록 한다.

$$I_{C1}(t) = -\frac{\Delta I_L}{2} + \Delta I_L \frac{t}{t_{ON}}$$
$$I_{C2}(t) = \frac{\Delta I_L}{2} - \Delta I_L \frac{t'}{t_{OFF}}$$

단순한 삼각형 문제임

전압 Ripple 은 이를 적분하여 얻을 수 있다.

$$i_c = C \frac{dV}{dt} \Rightarrow V = \frac{1}{C} \int i_c dt$$

$$V_{C1} = -\frac{\Delta I_L}{2C} t + \frac{\Delta I_L}{2C t_{ON}} t^2 = \frac{\Delta I_L}{2C} \left( \frac{t^2}{t_{ON}} - t \right)$$

$$V_{C2} = \frac{\Delta I_L}{2C} t - \frac{\Delta I_L}{2C t_{OFF}} t^2 = \frac{\Delta I_L}{2C} \left( t - \frac{t^2}{t_{OFF}} \right)$$

위 값들이 Peak 값에 어떻게 영향을 받는지 알아보도록 한다.

$$\frac{\Delta I_L}{2} = \Delta I_L \frac{t}{t_{ON}} \Rightarrow t = \frac{t_{ON}}{2}$$
$$\frac{\Delta I_L}{2} - \Delta I_L \frac{t}{t_{OFF}} \Rightarrow t = \frac{t_{OFF}}{2}$$

이 결과를 다시 전압 식에 대입해주도록 한다.

$$\begin{aligned}
 V_{C1} &= -\frac{\Delta I_L}{2C}t + \frac{\Delta I_L}{2Ct_{ON}}t^2 = \frac{\Delta I_L}{2C}\left(\frac{t^2}{t_{ON}} - t\right) \\
 V_{C2} &= \frac{\Delta I_L}{2C}t - \frac{\Delta I_L}{2Ct_{OFF}}t^2 = \frac{\Delta I_L}{2C}\left(t - \frac{t^2}{t_{OFF}}\right) \\
 t &= \frac{t_{ON}}{2}, \quad t = \frac{t_{OFF}}{2} \\
 \frac{\Delta I_L}{2C}\left(\frac{t^2}{t_{ON}} - t\right) &= \frac{\Delta I_L}{2C}\left(\frac{1}{t_{ON}}\frac{t_{ON}^2}{4} - \frac{t_{ON}}{2}\right) = -\frac{\Delta I_L t_{ON}}{8C} \\
 \frac{\Delta I_L}{2C}\left(t - \frac{t^2}{t_{OFF}}\right) &= \frac{\Delta I_L}{2C}\left(\frac{t_{OFF}}{2} - \frac{1}{t_{OFF}}\frac{t_{OFF}^2}{4}\right) = \frac{\Delta I_L t_{OFF}}{8C}
 \end{aligned}$$

전체 Ripple 은 두 식을 서로 빼면 된다.

$$\Delta V = V_{C2} - V_{C1} = \frac{\Delta I_L t_{OFF}}{8C} - \left(-\frac{\Delta I_L t_{ON}}{8C}\right) = \frac{\Delta I_L}{8C}(t_{ON} + t_{OFF}) = \frac{\Delta I_L}{8C}T_{SW}$$

위 식이 CCM Buck Converter 의 Ripple 이 되고 Ripple 요구 사양에 따른 출력 콘덴서의 계산에 활용 된다.  
여기서 등가 직렬 저항(ESR)의 영향은 고려하지 않았다.

Buck Converter 에서 전류 변화량은 매우 중요한 요소에 해당한다.  
평형이라면 전류의 증가는 아래와 같다.

$$-\frac{\Delta I_L}{2} \sim \frac{\Delta I_L}{2}$$

앞선 결과를 베이스로 아래와 같은 식을 작성 할 수 있다.

$$-\frac{\Delta I_L}{2} = \frac{\Delta I_L}{2} - \frac{V_{out}}{L} t_{OFF}$$

전류의 변화량에 대해 정리하면 아래와 같이 적을 수 있다.

$$\frac{V_{out}}{L} t_{OFF} = \Delta I_L$$

위 식을 Ripple 식에 대입해서 정리해보도록 한다.

$$\Delta V = \frac{1}{8} \left[ \frac{V_{out}}{L} t_{OFF} \right] \frac{T_{SW}}{C}$$

스위치 온 시간과 OFF 시간에 대한 식을 기반으로 위 식을 다시 작성 할 수 있다.

$$t_{ON} = DT_{SW}, \quad t_{OFF} = (1 - D)T_{SW}$$
$$\Delta V = \frac{T_{SW}}{8LC} [V_{out}(1 - D)T_{SW}] = \frac{T_{SW}^2}{8LC} [V_{out}(1 - D)]$$

오타자들이 어디에 있는지는 아래에서 잘 설명해준다(계산이 이상하게 되면 참조하도록 한다)

<http://cbasso.pagesperso-orange.fr/Downloads/Book/All%20corrections%20first%20edition.pdf>

All corrections first edition 1 / 15

Continued by JASON, May 2007

**Page 40/41:** in equation 1-83, I wrongly expressed the  $-\Delta I_L/2$  and needs to go back to that value. Therefore, I

$$-\frac{\Delta I_L}{2} = \frac{\Delta I_L}{2} - \frac{V_{out}}{L} t_{off} \quad (1-83)$$

Re-arranging to extract  $\Delta I_L$  leads to

$$\Delta I_L = \frac{V_{out}}{L} t_{off} \quad (1-84)$$

이제 Buck Converter 를 LC 필터가 부착된 구형파 발생기로 고려하는 경우에 Filter 의 차단 주파수에 대해 살펴본다.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Leftrightarrow LC = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2}$$

전압에 대한 Ripple 식에 LC 를 대입하고 Switching 주파수를 사용하면 아래와 같은 식을 적을 수 있다.

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{T_{SW}^2}{8LC} [V_{out}(1-D)] \\ T_{SW} &= \frac{1}{F_{SW}} \\ \Delta V &= \frac{1}{8} \frac{1}{F_{SW}^2} 4\pi^2 f_0^2 [V_{out}(1-D)] = \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{f_0}{F_{SW}} \right)^2 [V_{out}(1-D)]\end{aligned}$$

단위 전압당 Ripple 을 알아보기 위해 출력 전압으로 정규화 하도록 한다.

$$\frac{\Delta V}{V_{out}} = \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{f_0}{F_{SW}} \right)^2 [V_{out}(1-D)] \frac{1}{V_{out}} = \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{f_0}{F_{SW}} \right)^2 [1-D]$$

# ESR Consideration

ESR 은 콘덴서에 직렬로 연결되는 저항을 의미한다.

또한 ESR 의 약자는 Equivalent Series Resistance 이며 ESI(Equivalent Series Inductance) 도 존재한다. 우리는 ESI 는 무시할 것이며 이 상태에서 저항에 걸리는 전압은 아래와 같다.

$$\Delta V_{ESR} = \Delta I_L R_{ESR}$$

ESR 저항에 흐르는 Ripple 전류를 알 수 있으므로 아래와 같이 적을 수 있다.

$$\Delta V_{ESR} = \frac{V_{in} - V_{out}}{L} t_{ON} R_{ESR} = \frac{V_{in} - V_{out}}{L} D T_{SW} R_{ESR}$$

Duty Ratio 를 대입하고 출력 전압을 사용해 정규화하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} D &= \frac{V_{out}}{V_{in}} \\ \Delta V_{ESR} &= \frac{V_{in} - V_{out}}{L} D T_{SW} R_{ESR} \\ \Delta V_{ESR} &= \frac{\frac{V_{out} - D V_{out}}{D}}{\frac{L}{1}} D T_{SW} R_{ESR} = \frac{(1 - D) V_{out}}{L} T_{SW} R_{ESR} \\ \frac{\Delta V_{ESR}}{V_{out}} &= \frac{(1 - D)}{L} \frac{1}{F_{SW}} R_{ESR} \end{aligned}$$

콘덴서 또는 저항에 따라 최종 Ripple 곡선은 ESR 이 무시되는 경우에 정현파가 되고 ESR 이 큰 경우에는 삼각파가 된다.

# Buck ESR Example

일전에 살펴봤던 단순한 회로에 ESR 을 추가해보도록 한다.

ESR 값은 다음과 같다.

$$R_{ESR} = 500m\Omega, \quad \text{Duty Ratio} = 50\% \quad (0.5), \quad V_{out} = 5.8V, \quad F_{SW} = 100kHz$$

LC 차단 주파수를 구하면 아래와 같다.

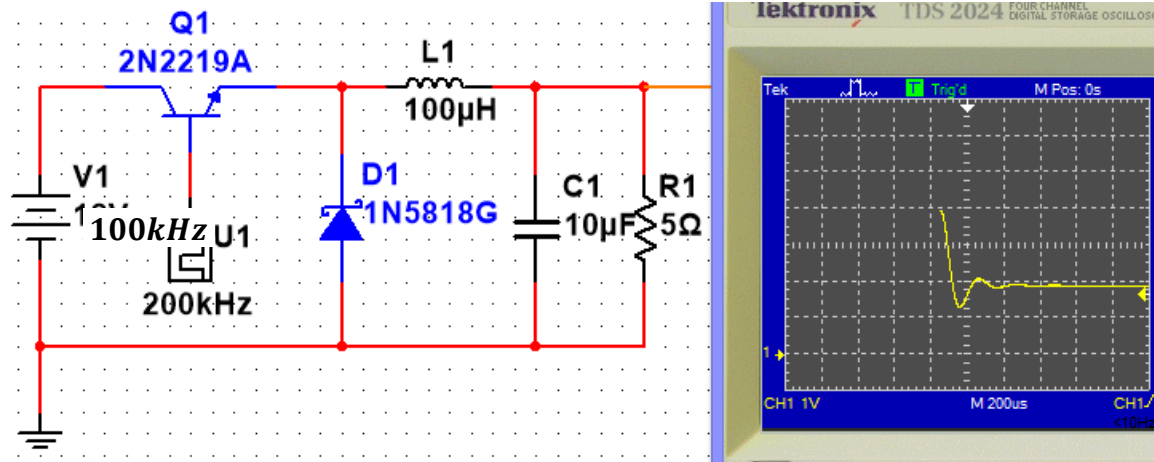
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2(3.1415)\sqrt{100(10^{-6})(10)(10^{-6})}} = 5.03kHz$$

콘덴서를 고려한 전압 Ripple 은 아래와 같다.

$$\Delta V = \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{f_0}{F_{SW}} \right)^2 [1 - D] = \frac{(3.1415)^2}{2} \left( \frac{5.03(1000)}{100(1000)} \right)^2 (0.5)(5.8V) = 0.036 = 36mV$$

ESR 저항을 고려한 경우를 살펴해보도록 한다.

$$\Delta V_{ESR} = \frac{(1 - D)}{L} \frac{1}{F_{SW}} R_{ESR} V_{out} = \frac{0.5}{100 * 10^{-6} * 100 * 1000} 500 * 10^{-3} * 5.8V = 0.145 = 145mV$$



# Boost Converter

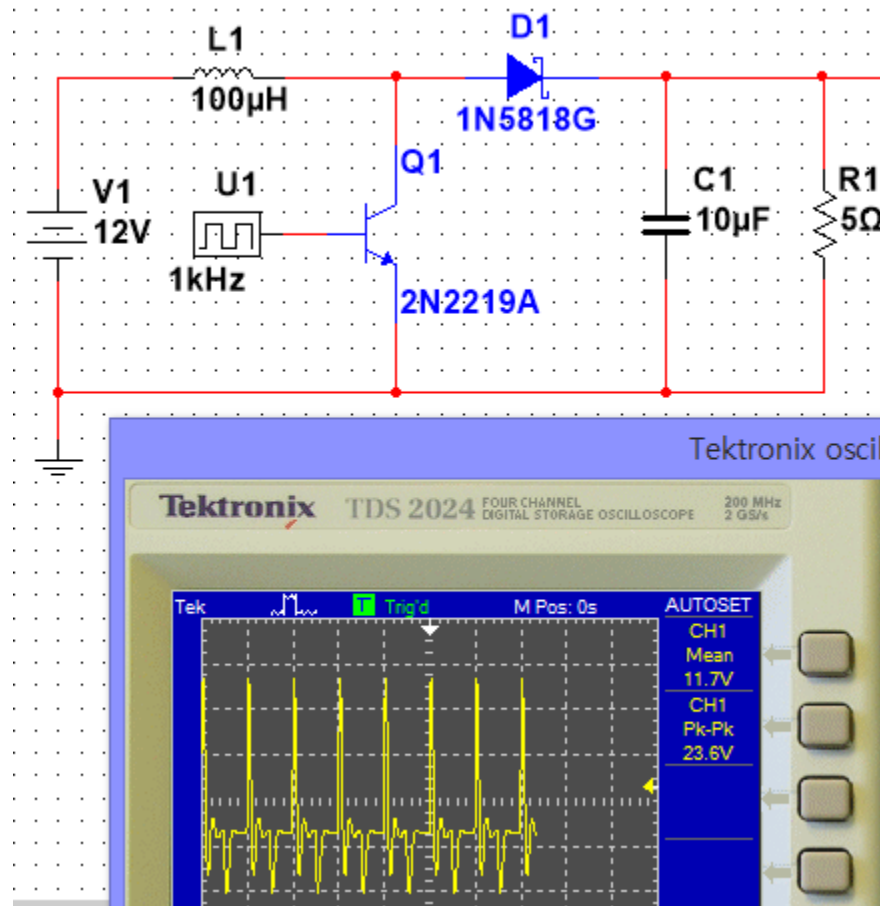
아래 Buck Converter 회로를 살펴보도록 하자!

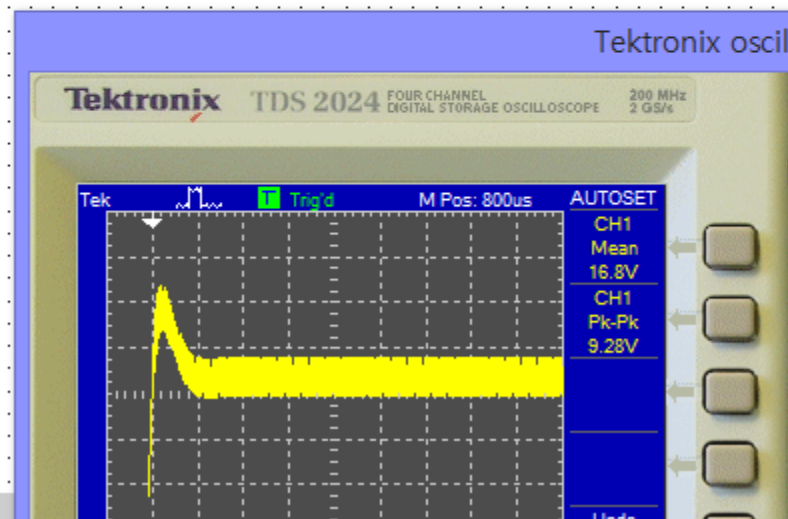
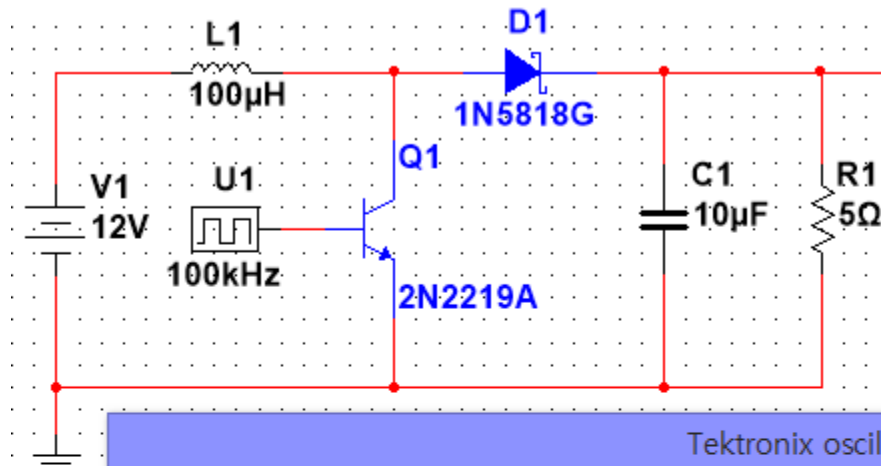
Boost Converter 는 간접 에너지 전달 컨버터에 해당한다.

에너지 저장 상태와 에너지 방출 상태로 구성 된다.

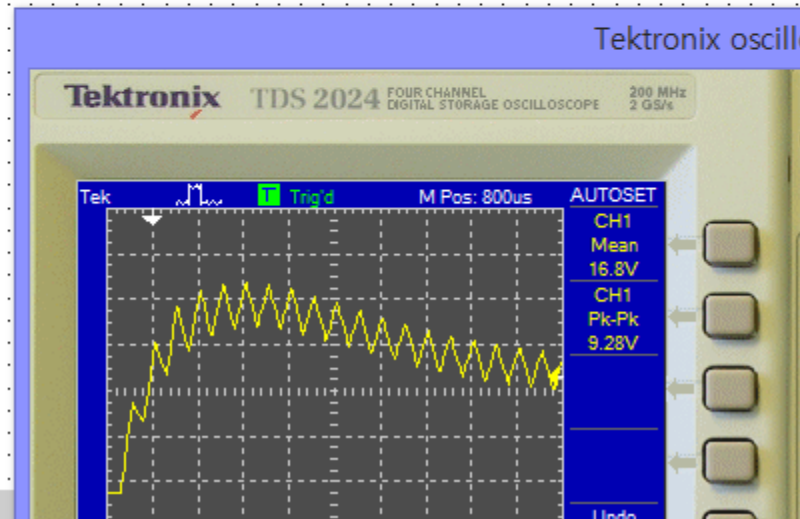
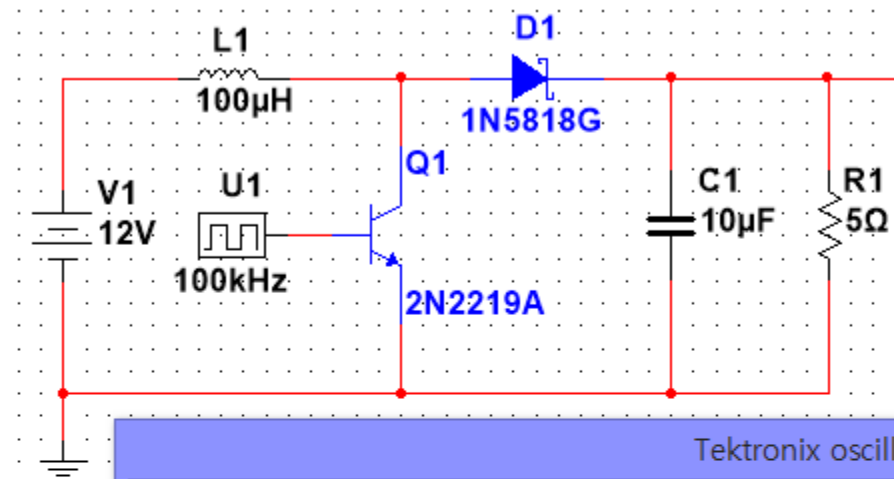
ON 에서 인덕터는 에너지를 저장하고 출력 콘덴서만이 부하에 전력을 공급한다.

OFF 에서 저장된 인덕터 에너지가 입력 전원과 함께 출력으로 공급된다.









# Input Filter

Switch Mode Converter 는 노이즈가 크기 때문에 다른 장치에 간섭을 초래한다.

계측 장비, 통신 장비등이 특히나 더더욱 그러하다.

입력 필터 회로가 전원과 Converter 입력 사이에 설치되며 이것은 EMI(전자장 간섭) 필터로서 동작하게 된다.

필터 출력(Converter 입력)에 연결되는 부하의 특성에서 문제가 발생 할 수 있다.

Closed Loop 시스템은 항상 일정 출력을 유지하려고 한다.

입력 전압이 증가하면 전류가 감소하고 입력 전압이 감소하면 전류가 증가한다.

결국 입력측에서는 Converter 는 일종의 음수 저항에 해당한다고 볼 수 있다.

$$\text{if efficient 100\%)} \quad P_{in} = P_{out} = V_{in}I_{in} = V_{out}I_{in}$$

전압비 M 의 역수를 아래와 같이 정의한다.

$$\frac{V_{in}}{V_{out}} = \frac{I_{out}}{I_{in}} = \mu$$

Converter 의 정적 입력 저항은 아래와 같다.

$$R_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}}$$

증분 저항은 아래와 같다.

$$R_{in,inc} = \frac{dV_{in}}{dI_{in}}$$

앞서 살펴본 식은 저항의 변동이 어떻게 움직이는가를 나타낸다.  
증분 저항에 아래 식을 대입하도록 한다.

$$V_{in} = \frac{P_{in}}{I_{in}}, \quad P_{in} = P_{out} = I_{out}^2 R_{load}$$

식을 대입하면 아래와 같은 식이 작성 된다.

$$R_{in,inc} = \frac{dV_{in}}{dI_{in}} = \frac{d}{dI_{in}} \frac{P_{in}}{I_{in}} = \frac{d}{dI_{in}} \frac{I_{out}^2 R_{load}}{I_{in}} = -R_{load} \frac{I_{out}^2}{I_{in}^2} = -R_{load} \mu^2$$

부하 저항은 다른 스위치형, 단순 저항형 및 선형 레귤레이터에서도 적용되는 부하 저항이다.

$$R_{in,inc} = -\frac{V_{out}}{I_{out}} \mu^2 = -\frac{V_{out}^2}{P_{out}} \mu^2$$

결국 이 뜻은 Closed Loop Converter 에서 입력 저항이 음수임을 나타낸다.  
이제 RLC 필터에 대해 알아보도록 하자!

# RLC Filter

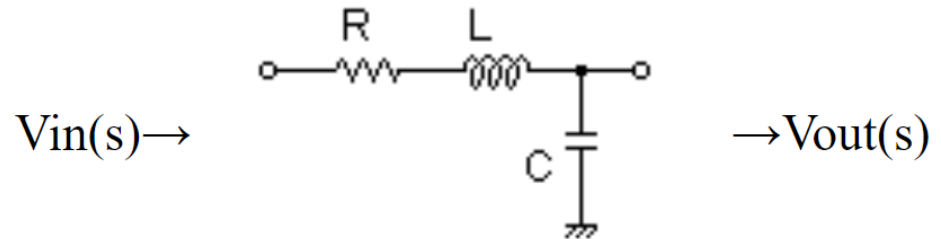
Closed Loop Converter 에서 입력 저항이 음이라는 것을 앞서 살펴보았다.

이 결과는 재미나게도 RC 필터 보다는 LC 필터가 더 효율이 좋다는 것을 의미한다.  
Filter 는 전원과 Converter 입력 사이에 놓인다.

Inductance L 은 Inductor 의 저항과 직렬이며  
여기서 결국 저항 손실이 발생한다.

또한 이러한 RLC 조합은 공진을 발생시킨다.  
이론적으로 RLC 회로에서 입력 전압 펄스가 가해지면  
출력은 수렴하는 정현파 형태가 된다.

RLC 회로의 전달 함수는 2 차 함수임을  
회로 이론과 공업 수학 시간에 살펴보았다.



$$V_i = i_s R + L \frac{di_s}{dt} + \frac{1}{C} \int i_s dt, \quad V_o = \frac{1}{C} \int i_s dt$$

$$V_i(s) = I_s(s)R + sLI_s(s) + \frac{1}{sC}I_s(s), \quad V_o(s) = \frac{1}{sC}I_s(s)$$

$$V_i(s) = \left( sL + R + \frac{1}{sC} \right) I_s(s), \quad V_o(s) = \frac{1}{sC} I_s(s)$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC} I_s(s)}{\left( sL + R + \frac{1}{sC} \right) I_s(s)}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = T(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

# Serial Resonance Circuit

공진 현상은 실 세계의 여러 방면에서 접할 수 있다.

전기 회로의 경우 L 과 C 를 직렬 또는 병렬로 연결하여 전기적인 공진을 발생시킬 수 있다.

공진은 아주 다양한 분야에서 많이 활용되고 있는데

특히 통신 시스템에서 사용되는 주파수 선택성 회로의 기본적인 동작 원리로

TV, Radio 등의 수신기가 여러 방송 채널 중에서 특정 방송국의 신호만을 수신하고

나머지 신호들은 수신하지 않는 것이 바로 이 공진의 원리에 바탕을 두고 있다.

아래 회로의 전체 임피던스를 구하면 아래와 같다.

$$Z_{eq} = Z_R + Z_L + Z_C = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

직렬 RLC 회로에서 유도성 리액턴스와 용량성 리액턴스가 같을 때

전체 임피던스는 순수 저항 성분만을 가지게 된다.

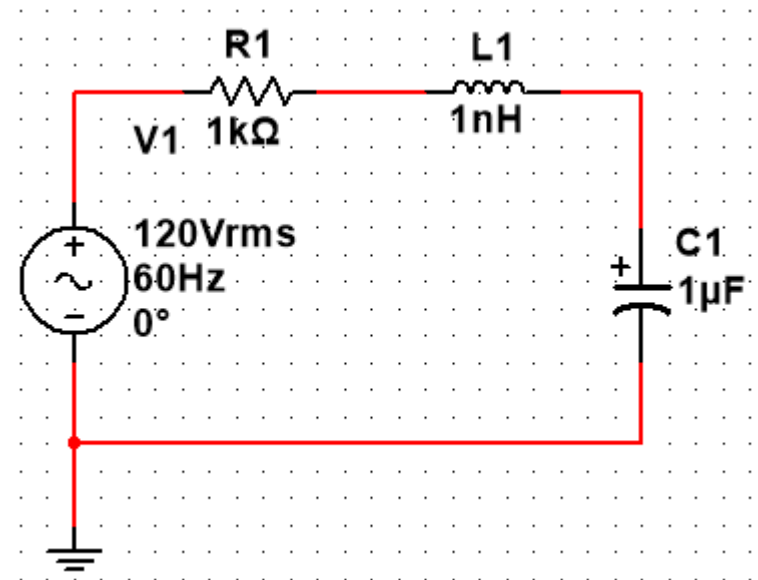
이때 직렬 RLC 회로는 공진 상태에 있다고 한다.

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Leftrightarrow X_L = X_C$$
$$Z_{eq} = R$$

직렬 RLC 회로에서 공진은 오직 한 각 주파수  $\omega_0$  에서 발생되며

이를 기반으로 각주파수를 구할 수 있다.

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



## 우선 직렬 RLC Circuit의 동작 과정에 대해 분석을 해보도록 하자!

먼저 RLC Circuit에서 KVL을 적용해보도록 하자!

$$V_s = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

이 식에서 적분을 제거하기 위해 시간 t에 대해 미분을 수행한다.

$$0 = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C}$$

동차 상수 계수 2계 미분 방정식에 해당하는 것을 알 수 있으므로 특성방정식을 세워야 한다.

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

2차 방정식의 근의 공식  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  (특성 방정식)

$$x^2 + \frac{R}{L}x + \frac{1}{LC} = 0$$

$$x = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$x = -\frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

여기서  $\alpha = R/2L$  로 놓고  $\zeta = \alpha/\omega_0$  로 놓는다.

다시 본론으로 돌아가 공진 주파수와 댐핑 계수를 살펴보도록 한다.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \zeta = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{\frac{R}{2L}}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} = R \sqrt{\frac{C}{4L}}$$

댐핑 계수는 RLC 회로를 해석하면 아래와 같이 정의할 수 있다.

잘 살펴보면 특성 방정식이 제타값(댐핑 계수)과 공진 주파수로 표현 할 수 있음을 살펴볼 수 있다.

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = T(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + 1}$$

다시 본론으로 돌아가 공진 주파수와 댐핑 계수를 살펴보도록 한다.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \zeta = R \sqrt{\frac{C}{4L}}$$

이제 댐핑 계수를 Q 로 표현해보도록 하자!

$$Q_s = \frac{X_0}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{L}{R} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Bandwidth = \frac{\omega_0}{Q_s} = R \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{L}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 2R \sqrt{\frac{C}{4L}} = 2\zeta$$

입력이 Step 인 경우 라플라스 변환은 아래와 같다.

$$Y(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + 1} \frac{1}{s} = \frac{1}{\frac{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}{\omega_0^2}} \frac{1}{s} = \frac{\omega_0^2}{s^3 + 2\zeta\omega_0 s^2 + \omega_0^2 s} = \frac{\omega_0^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)}$$

부분 분수 변환은 아래와 같이 하면 된다.

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{\omega_0^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} = \frac{As^2 + 2\zeta\omega_0As + A\omega_0^2 + Bs^2 + Cs}{(s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2)s} \\
 &= \frac{(A+B)s^2 + (2\zeta\omega_0A + C)s + A\omega_0^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2)s}
 \end{aligned}$$

각각의 계수를 구해보도록 한다.

$$\begin{aligned}
 A + B &= 0, & 2\zeta\omega_0A + C &= 0, & A &= A\omega_0^2 \\
 A &= 1, & B &= -1, & C &= -2\zeta\omega_0
 \end{aligned}$$

이제 계수를 대입해서 정리하도록 한다.

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_0}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_0}{(s^2 + 2\zeta\omega_0s + \zeta^2\omega_0^2) - \zeta^2\omega_0^2 + \omega_0^2} \\
 &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_0}{(s + \zeta\omega_0)^2 - \zeta^2\omega_0^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{s} - \frac{(s + \zeta\omega_0) + \zeta\omega_0}{(s + \zeta\omega_0)^2 - (\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2})^2} \\
 &= \frac{1}{s} - \frac{(s + \zeta\omega_0)}{(s + \zeta\omega_0)^2 - (\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2})^2} + \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\zeta\omega_0}{(s + \zeta\omega_0)^2 - (\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2})^2} \\
 &= \frac{1}{s} - \frac{(s + \zeta\omega_0)}{(s + \zeta\omega_0)^2 - (\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2})^2} + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}}{(s + \zeta\omega_0)^2 - (\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2})^2}
 \end{aligned}$$

이를 라플라스 역변환 해보도록 한다.



# Example

$$f(t) = e^{at} \sin(bt)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} \sin(bt) dt$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at} f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} \sin(bt) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} \frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i} dt \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} (e^{ibt} - e^{-ibt}) dt = \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} e^{-(s-a-ib)t} - e^{-(s-a+ib)t} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2i} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s-a-ib} e^{-(s-a-ib)t} + \frac{1}{s-a+ib} e^{-(s-a+ib)t} \right]_0^k$$

$$= \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{s-a-ib} - \frac{1}{s-a+ib} \right]$$

$$= \frac{1}{2i} \times \frac{s-a+ib - s+a+ib}{a^2 - 2as + s^2 + b^2} = \frac{1}{2i} \frac{2ib}{(a-s)^2 + b^2}$$

$$\therefore \mathcal{L}[e^{at} \sin(bt)] = F(s) = \frac{b}{(a-s)^2 + b^2}$$

$$e^{ibt} = \cos(bt) + i \sin(bt), \quad e^{-ibt} = \cos(bt) - i \sin(bt)$$

$$\sin(bt) = \frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i}, \quad \cos(bt) = \frac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2}$$

# Example

$$f(t) = e^{at} \cos(bt)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(bt) dt$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at} f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} \cos(bt) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} \frac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} (e^{ibt} + e^{-ibt}) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(s-a-ib)t} + e^{-(s-a+ib)t} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s-a-ib} e^{-(s-a-ib)t} - \frac{1}{s-a+ib} e^{-(s-a+ib)t} \right]_0^k$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-a-ib} + \frac{1}{s-a+ib} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{s-a+ib + s-a-ib}{a^2 - 2as + s^2 + b^2}$$

$$\therefore \mathcal{L}[e^{at} \cos(bt)] = F(s) = \frac{a-s}{(a-s)^2 + b^2}$$

$$e^{ibt} = \cos(bt) + i \sin(bt), \quad e^{-ibt} = \cos(bt) - i \sin(bt)$$

$$\sin(bt) = \frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i}, \quad \cos(bt) = \frac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2}$$

다시 본론으로 돌아와 역변환을 수행해보자!

$$\mathcal{L}[e^{at}\sin(bt)] = \frac{b}{(a-s)^2 + b^2}, \quad \mathcal{L}[e^{at}\cos(bt)] = \frac{a-s}{(a-s)^2 + b^2}$$

역변환을 수행할 대상은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{(s + \zeta\omega_0)}{(s + \zeta\omega_0)^2 - (\omega_0\sqrt{1-\zeta^2})^2} + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}{(s + \zeta\omega_0)^2 - (\omega_0\sqrt{1-\zeta^2})^2} \\ y(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} t) \\ &= 1 - e^{-\zeta\omega_0 t} \left[ \cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} t) \right] \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[ \sqrt{1-\zeta^2} \cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} t) + \zeta \sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} t) \right] \end{aligned}$$

다시 이 정리 된 식을 변환하도록 한다.

$$A = \zeta, \quad B = \sqrt{1-\zeta^2}, \quad A^2 + B^2 = \zeta^2 + (\sqrt{1-\zeta^2})^2 = 1$$

특정 각도  $\alpha$  에 대해 아래가 성립한다.

$$\zeta = \cos(\alpha), \quad \sqrt{1-\zeta^2} = \sin(\alpha)$$

이를 원식에 적용한다.

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[ \sin(\alpha) \cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} t) + \cos(\alpha) \sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} t) \right]$$

여기서 삼각 함수의 합성 공식을 다시 한 번 활용한다.

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \cos(x) + i\sin(x), & e^{-ix} &= \cos(x) - i\sin(x) \\e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i\sin(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i\{\cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)\} \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), & \sin(x+y) &= \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)\end{aligned}$$

여기서 아래와 같은 정의를 세운다.

$$\beta = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t$$

이 정보들을 베이스로 다시 원식을 수정하도록 한다.

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\alpha + \beta)$$

다시 한 가지 변환을 더 수행하면 최종 식이 완성 된다.

$$\zeta = \cos(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(\zeta)$$

최종적으로 아래와 같은 식이 완성 된다.

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left[ \cos^{-1}(\zeta) + \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t \right]$$

여기서 댐핑 계수의 역할은 숫자가 클 수록 발진 크기가 빨리 감소하여 안정화된다는 것이다.

댐핑 계수가 0 보다 작은 경우 입력이 무엇이든지 발산하게 된다.

댐핑 계수가 0 인 경우엔 근은 허수가 되며 시스템은 수렴하지 않고 진동하게 된다.

댐핑 계수가 0 보다 큰 경우엔 시스템 응답은 Over Damping 이나 Critical Damping, 수렴하는 진동이 발생한다.

각각의 경우는 1 보다 클 경우 Over Damping, 1 인 경우 Critical Damping, 0 초과 1 미만이면 진동이다.