

TI DSP, MCU 및 Xilinx Zynq FPGA 프로그래밍 전문가 과정

(PID 제어)

강사 - 이상훈

gcccompil3r@gmail.com

학생 - 장성환

redmk1025@gmail.com

제어 시스템 설계 순서

1. 시스템을 도식화 (입력 ~ 출력에 관한 요소들을 조사한다)
2. 상태 방정식의 확립 (미분 방정식의 형태로 나타낸다.)
3. 라플라스 변환을 수행 (시간 t의 함수를 s의 함수로 변환한다.)
4. 전달 함수를 계산 (출력신호/입력신호 인 $Y(s)/X(s)$ 의 비를 계산한다.)
5. 블록 선도를 작성한다. (블록 결합법칙 등을 적용한다.)
6. 과도 응답의 조사
 - 역 라플라스 변환, 자동제어 시뮬레이터를 활용
 - 계단 응답, 램프 응답 등을 확인한다.
7. 정상 오차를 조사 (최종 값의 정리를 이용한, 위치, 속도, 가속도 등의 오차를 확인)
8. 주파수 응답을 조사 (시스템의 응답성과 안정성을 조사한다.)
 - 보드선도, 나이퀴스트 안정성 판별을 확인
9. 보상회로(제어 시스템)을 검토
 - 시스템의 특성을 개선하기 위해 삽입할 보상회로를 검토한다.

표준 2차 시스템의 형식.

$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ 의 형태이다.

단위 계단 응답이 입력되었을 경우, $G(s) * \frac{1}{s}$ 이며, 이를 역 라플라스 변환 한다.

zeta 가 $0 < \zeta < 1$ 인 부족 감쇠 형태에서

두 개의 복소수 극 P_1, P_2 는 $-\zeta\omega_n \pm j\omega_d$ 의 형태가 나온다.

($\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 으로 가정한다.)

이를 역 라플라스 변환하면,

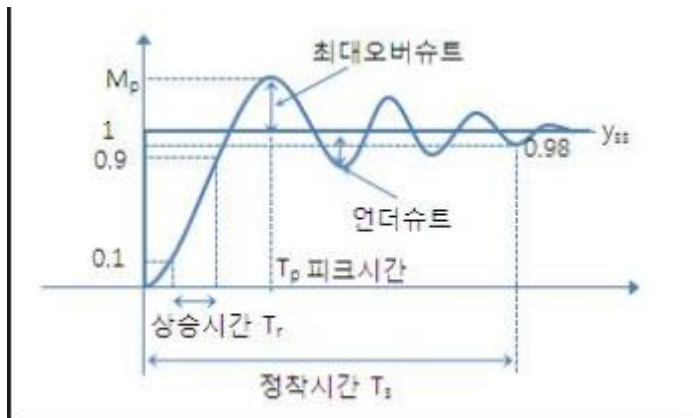
$$y(t) = k * \left[1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} * \sin(\omega_d t + \phi) \right], (t \geq 0)$$

지수함수 e의 영향으로 인하여 t가 무한대로 가면 k에 수렴하게 된다.

ϕ 는 약간의 계산을 거치면, $\phi = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\zeta\omega_n}$ 으로 주어진다.

위와 같이, 복소수의 극을 가지는 시스템의 응답특성에는 반드시 정현파 성분이 포함된다.

제어시스템 설계 시 부과되는 설계사양.



- 1) 지연시간 T_d : 응답이 출력 최종 값의 50%에 도달할 때까지 요구되는 시간, 일반적으로 시스템의 응답 특성의 빠르기를 나타내는 지표로 사용된다.
- 2) 상승시간 T_r : 응답이 최종 값의 10%에서 90%까지 올라갈 때까지 걸리는 시간을 나타낸다.
- 3) 피크시간 T_p : 응답의 첫 번째 피크 값에 도달할 때까지 걸리는 시간을 나타낸다.
- 4) 최대 오버슈터 M_p : 응답의 최대 피크 값이 최종 값에 비해 어느 정도인가를 나타내는 지표

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} * 100(\%)$$

- 5) 정정시간 T_s : 응답의 최종 값의 어떤 특정범위 2%오차 5%오차에 머물게 되기 까지 걸리는 시간이다. 따라서 시스템의 최대 시정수를 의미하는 것으로 해석 할 수 있다.

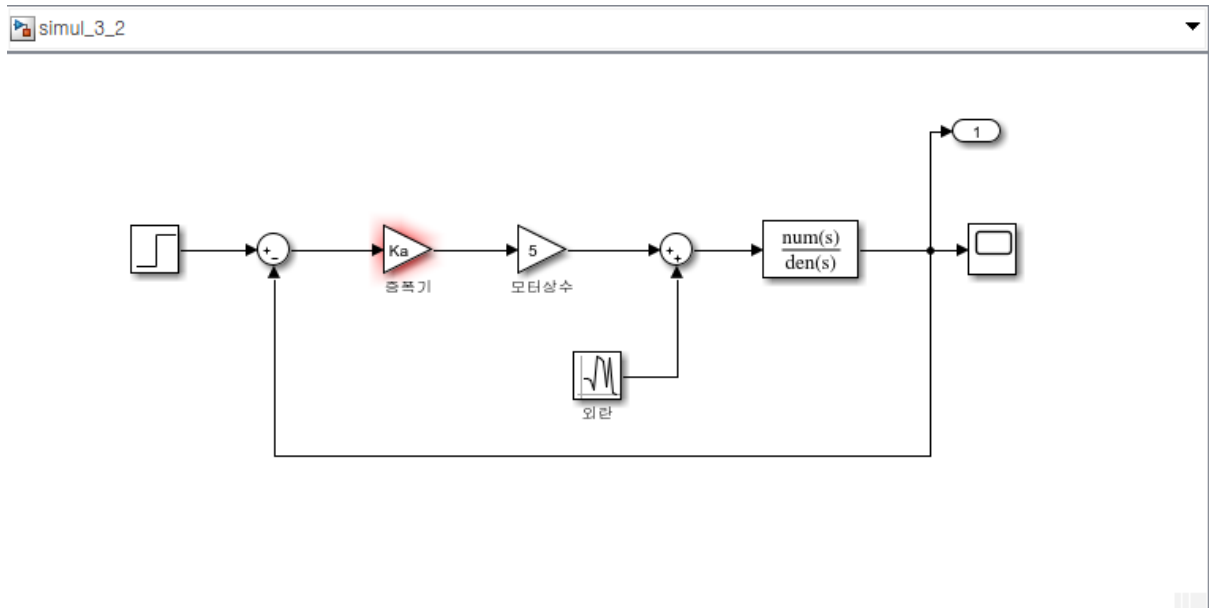
2차 시스템을 기반으로 $Y(s) = \frac{5Ka}{s^2 + 20s + 5Ka} * R(s)$ 의 형태를 지닌다고 할 때,

평균이 0이고 분산이 30인 노이즈가 외란으로 동작한다고 하자.

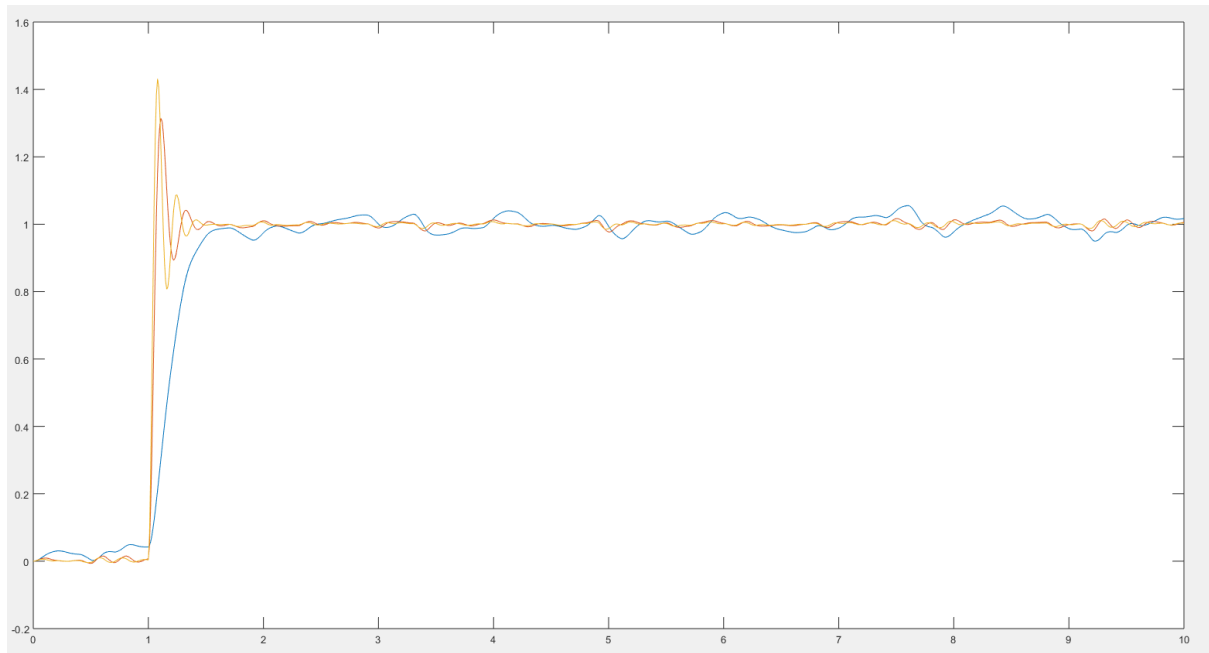
Ka값에 따른 응답을 확인해 보자.

($\omega_n = 5Ka, 2 * \text{zetaeta} * \omega_n = 20$ 의 관계식을 갖는다.)

<외란의 영향을 받는 블록선도>



< Ka 증폭기 크기에 따른 외란 억제 시뮬레이션>



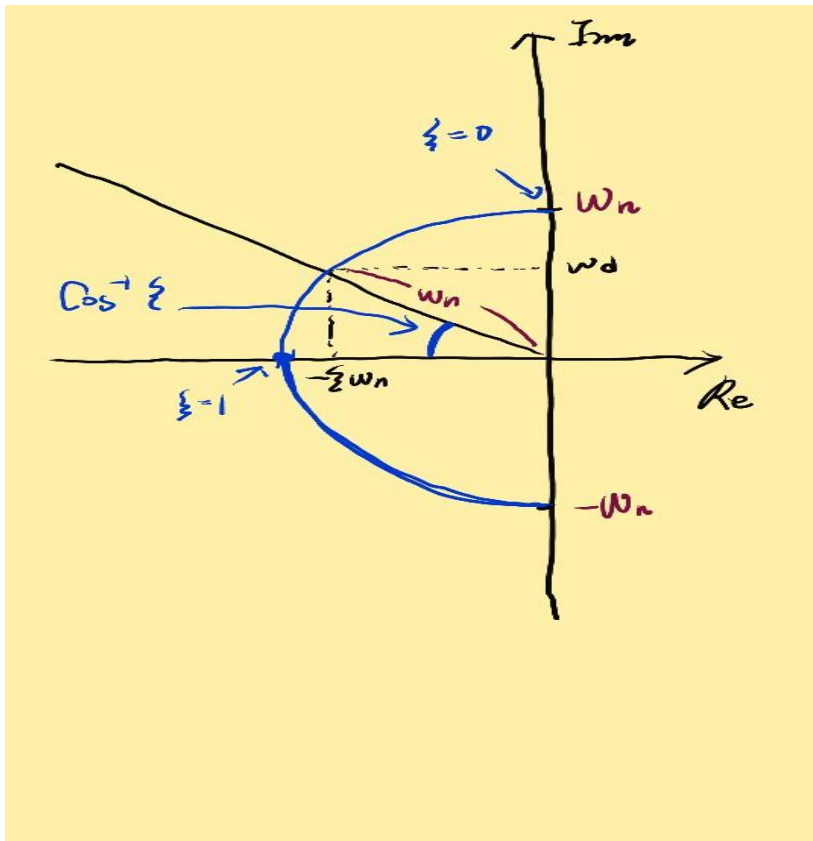
K_a 의 값이 높으면 외란의 영향을 덜 받게 된다.

(파란색이 K_a 20, 주황색이 K_a 180 노란색이 K_a 320 이다.)

표준 2차 시스템에서 감쇠비(zeta)와 고유진동수(ω_n)와의 관계

$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ 의 형태이다. 여기서 감쇠비의 크기 및 고유진동수 크기에 따른 계단응답의 형식을 알아본다.

<복소 평면에 따른 극의 위치>



복소 평면에 따른 극의 위치는 위 그림과 같다.

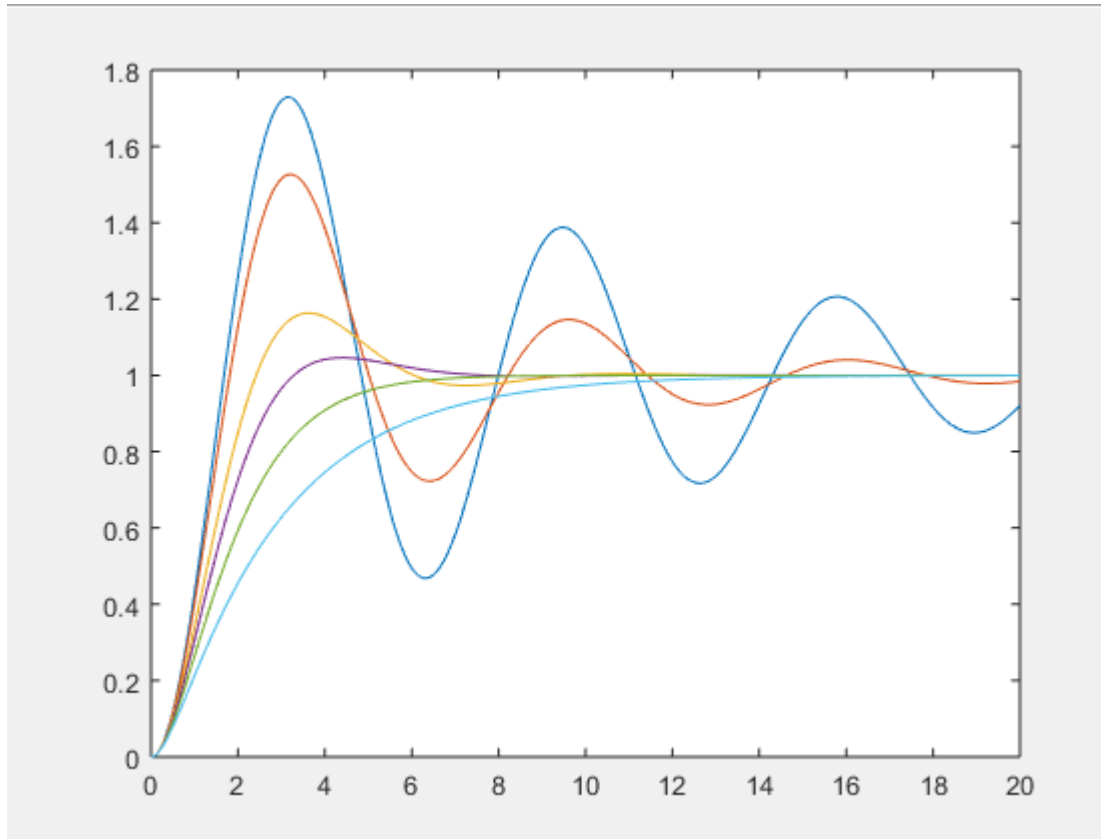
다음과 같은 코드로 zeta에 따른 2차시스템의 응답을 확인한다.

```
t = 0: 0.01 : 20;
zeta = [0.1 0.2 0.5 0.7 1.0 1.5];

for i=1:6
    num=1; den = [1 2*zeta(i) 1];
    sys = tf(num,den);
    y(:,i) = step(sys,t);
end

plot(t,y)
```

<표준 2차 시스템에서 zeta에 따른 응답>



zeta의 값을 0.1 에서 1.5까지 두었다.

zeta에 따른 응답을 보면 감쇄가 작으면 작을수록 진동이 더욱 커지는 것을 확인할 수 있다.

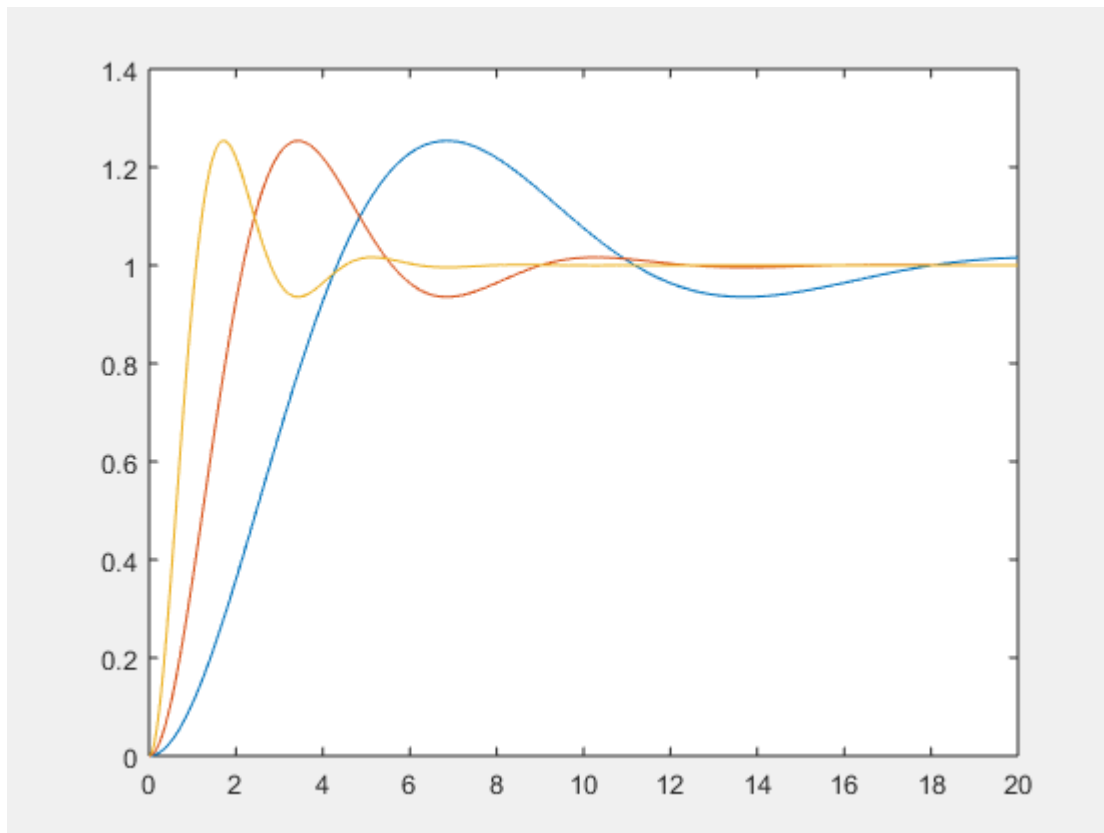
그리고 다음과 같은 코드로 고유진동수 ω_n 에 따른 2차시스템의 응답을 확인한다.

```
t = 0: 0.01 : 20;
omegan = [0.5 1 2]; zeta = 0.4

for i=1:3
    num=omegan(i)^2; den = [1 2*zeta*omegan(i) omegan(i)^2];
    sys = tf(num,den);
    y(:,i) = step(sys,t);
end

plot(t,y)
```

<표준 2차 시스템에서 ω_n 에 따른 응답>



ω_n 의 값은 0.5, 1, 2 까지 두었다.

ω_n 에 따른 응답을 확인해 보면, ω_n 값이 높을수록 계단응답의

출력식에서 $[y(t) = k * [1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta \omega_n t} * \sin(\omega_d t + \phi)], (t \geq 0)]$

지수 부분이 더 빠르게 영으로 수렴하므로 전체적으로 응답이 빠르게 정상상태 값에 수렴하게 된다. 그러나 진동성분인 ω_d 가 증가하였기 때문에 높은 진동 주파수를 가지게 된다.

시간응답의 설계 사양

제어 대상을 표준 2차시스템이라고 가정하고 설계 사양에 대한 표준 시스템의 두 변수인 감쇄비 (zeta)와 고유진동수 (w_n)을 이용한 근사 표현식이 필요하다. 공식의 유도를 위한 수식전개는 생략하도록 한다.

(1) 상승시간 t_r : $w_n t_r \approx 1 + 1.15 * zeta + 1.4 * zeta^2$

(2) 정정시간 t_s : $t_s \approx \frac{4}{zeta * w_n}$ (2% 이내 기준)

(3) 퍼센트 오버슈터 $M_p \approx 100 * e^{\frac{-zeta * \pi}{\sqrt{1-zeta^2}}}$

(4) 피크시간 $t_p = \frac{\pi}{w_n * \sqrt{1-zeta^2}}$

설계 사양의 중요 단골요소인 % 오버 슈트는 식에서 알 수 있듯이 zeta에 값에만 의존한다.

이러한 zeta에 따른 퍼센트 오버 슈트의 크기를 정리하면 다음과 같다.

<표준 2차형에서 zeta에 따른 오버 슈트의 크기>

Zeta	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3
%오버슈트	0.2	1.5	4.6	9.5	16.3	25.4	37.2

이것으로 출력파형의 모양은 대부분 감쇄비에, 수렴시간은 $1/w_n$ 에 의존한다는 제어기 설계의 기본원칙이 유도된다.

∴ w_n 은 사양을 벗어나지 않는 범위에서 가능한 크게 취하고, zeta는 대략 0.5 ~ 0.7 정도의 범위에 있는 것이 바람직하다.

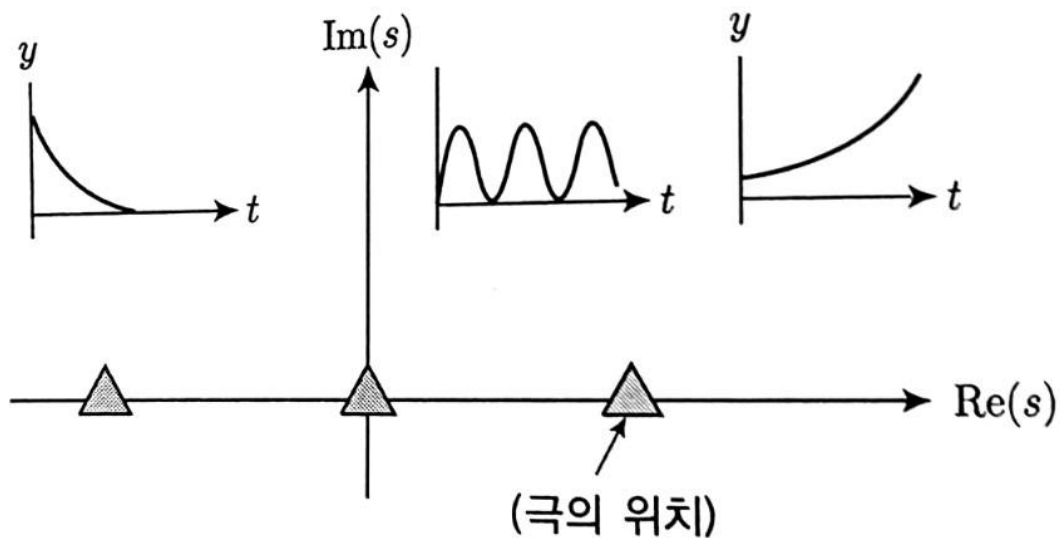
안정성과 시스템의 정상상태 특성

안정성의 의미?

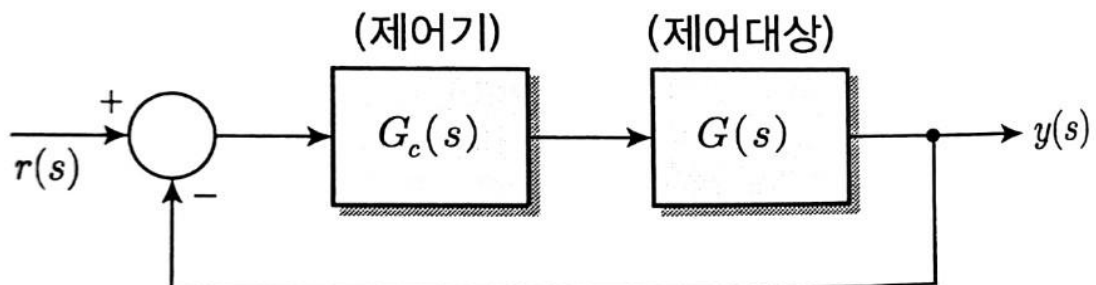
시스템이 안정하다고 하는 것은 일반적으로 '한정된 크기의 입력이 인가되었을 때, 한정된 크기의 출력이 나오는 것'을 의미한다.

이러한 안정성이 성립되기 위한 조건은 시스템 전달함수의 모든 극이 s 평면의 허수축을 제외한 왼쪽 영역에 존재하여야 한다는 것이다.

< s 평면에서의 극의 위치와 안정성 >



피드백 시스템의 기본구조는 다음과 같다.

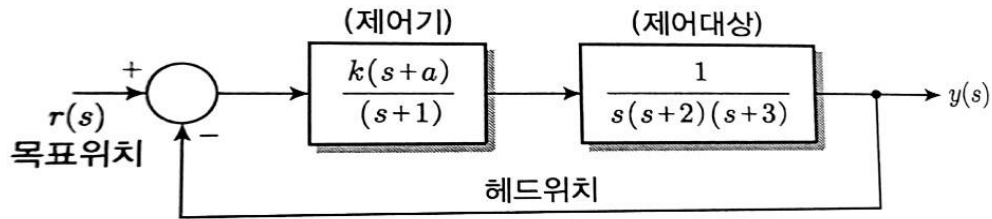


입력과 출력의 전달함수는 $H(s) = \frac{G(s)G_c(s)}{1+G(s)G_c(s)}$ 로 나타난다. 분모를 0으로 만드는 것을 특성방정식이라고 한다. 따라서 특성 방정식은 $1 + G(s)G_c(s) = 0$ 으로 나타난다.

안정성 판별법

간단하게 s 평면에서 허수축을 중심으로 오른쪽에 근이 존재하는지 아닌지 알려주는 Routh-Hurwitz 안정판별법 이라는 방법이 있다.

<제어 블록선도>



다음과 같은 블록선도가 있다고 가정하자,

입력과 출력의 전달함수를 구하면, $H(s) = \frac{G(s)G_c(s)}{1+G(s)G_c(s)} = \frac{k(s+a)}{s^4+6s^3+11s^2+(k+6)s+ka}$ 이다.

특성 방정식의 계수가 모두 양이어야 하므로 $K+6 > 0$, $ka > 0$ 을 만족해야 한다.

<라우스 후르비츠 테이블>

s^4	1	11	ka
s^3	6	$k+6$	
s^2	b_1	ka	
s^1	c_1		
s^0	ka		

위 테이블의 해당 계수를 넣어 라우스 표를 작성한다.

$$b_1 = \frac{60-k}{6}, \quad c_1 = \frac{b_1(k+6)-6ka}{b_1}$$

따라서,

1) $k+6 > 0$, $Ka > 0$

2) $0 < b_1 = \frac{60-k}{6} \rightarrow k < 60$

3) $0 < c_1 \rightarrow a < \frac{(60-k)(k+6)}{36k}$ 의 조건이 만족되는 값이다. 예를 들어 $k = 40$ 이면 $a < 0.639$ 이어야 한다.

피드백 시스템의 정상특성

$t \rightarrow \infty$ 로 되었을 경우에 시스템의 응답특성을 알아보자.

최종치 정리를 이용하면, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s * E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s * \frac{1}{1+G_c(s)G(s)} R(s)$

목표신호 $R(s)$ 즉, $r(t)$ 가 어떤 신호 인지에 따라서 정상오차가 달라질 수 있다.

그리고 시스템의 형이 정상오차를 결정하는데 중요한 역할을 한다.

시스템의 형은 분모에 s 의 개수(적분기의 개수)를 의미한다. 이러한 시스템의 형과 정상오차의 관계를 아래의 표에 정리한다.

적분기의 개수	계단신호 ($r(t) = A$)	램프신호 ($r(t) = At$)	포물선신호 ($r(t) = At^2/2$)
0 (0 형)	$e_{ss} = \frac{A}{1+K_p}$	∞	∞
1 (1 형)	$e_{ss} = 0$	$\frac{A}{K_v}$	∞
2 (2 형)	$e_{ss} = 0$	0	$\frac{A}{K_a}$

근 궤적을 이용한 설계

근 궤적은 피드백 시스템의 과도특성과 안정성에 관한 정보를 제공한다. 따라서 이득의 변동에 따른 폐루프의 특성변화를 빠르고 간단하게 파악할 수 있다.

오버 슈트에 대한 설계사양을 만족시키는 이득의 조정은 결과적으로 정정시간을 증가시켜 바람직하지 않은 응답특성을 보이게 된다. 또한 이득의 조정은 과도특성에만 영향을 미치기 때문에 정상상태 응답특성을 개선하기 위해서는 근 궤적을 적용할 수 없다.

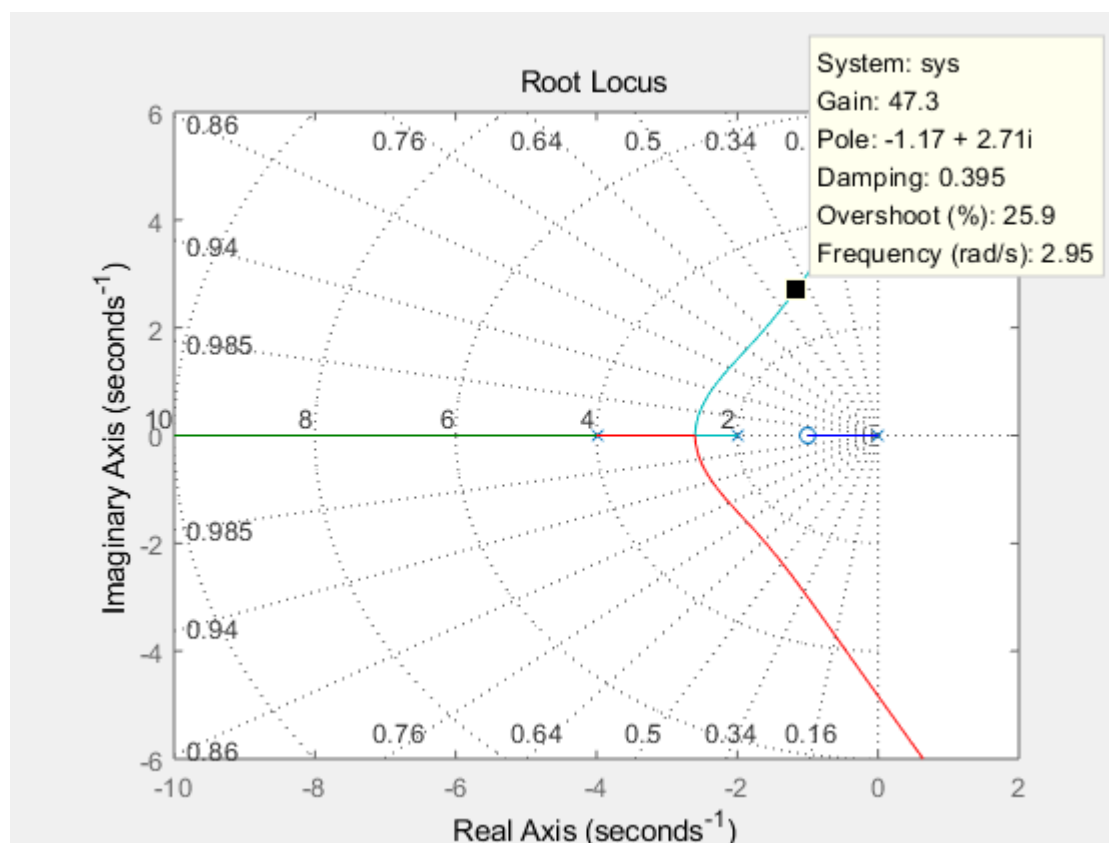
예를 들어 시스템 $G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+4)^2}$ 이라고 하자.

해당 근 궤적은 다음과 같은 코드로 간단히 살펴 볼 수 있다.

```
num = [1 1];  
den = conv(conv([1 0],[1 2]),conv([1 4],[1 4]));
```

```
rlocus(num,den);  
sgrid
```

<근 궤적도>



이러한 근 궤적에서 2차표준 시스템의 감쇄비를 0.395로 설정할 경우의 이득, 지배극, 오버슈트, 고유 진동수를 확인 할 수 있다.

이러한 특성으로 피드백 시스템의 응답의 예측이 가능하다.

다만, $-1.17 + j2.71$ 의 극이 아닌 ω_n 을 증가시켜 더 빠른 응답을 원하는 경우에 이러한 시스템은 이를 만족할 수 없다. 따라서 보상기를 이용하여 근 궤적을 변형 시켜서 내가 원하는 극을 통과 시킬 수 있도록 해야 한다.

정상상태의 개선은 극과 영점을 적절히 추가 (원점에 극을 추가) 하면, 시스템의 형이 증가하여 정상상태 오차를 0으로 만들 수 있다.

이러한 개선은 PI 제어와 PD제어 그리고 PID 제어를 통하여 알아 보도록 한다.

비례 적분(PI제어)를 이용한 정상오차의 개선

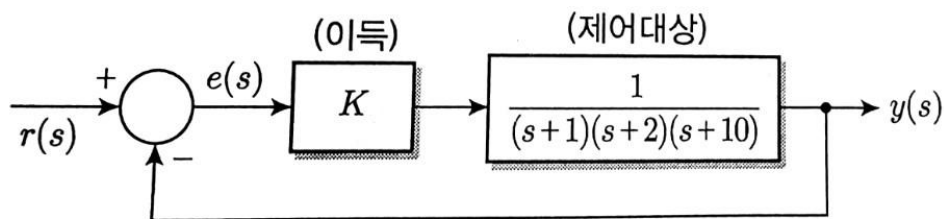
과도특성을 변화시키지 않고 정상오차를 개선할 수 있는 방법으로 2가지가 존재한다.

1) 순수 적분기를 시스템에 추가.

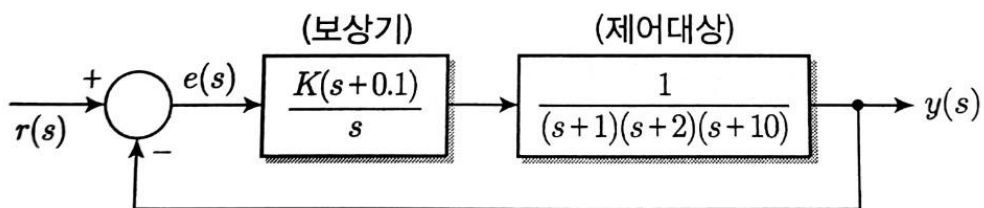
2) 원점 근처에 극을 가지는 시스템을 추가.

1)번의 경우에는 정상상태 오차를 0으로 만들 수 있지만, 능동형 소자가 필요하여 시스템이 복잡해진다. 2)번의 경우에는 수동형 소자를 사용하여 시스템이 간단하고 오차를 대폭적으로 줄일 수 있다.

< 이득 조정에 의한 설계 >



<PI 보상의 설계>



블록선도를 보면, 보상기로 $\frac{K(s+0.1)}{s}$ 가 추가 되었다. (원점에 극을 갖는 순수 적분기 형태)

시스템의 형이 증가했으므로 당연히 정상상태 오차가 0으로 갈 것으로 예상된다.

(시스템의 감쇄비 0.174를 위하여 기존 근 궤적에서의 이득을 165로 설정하였다.)

해당 시뮬레이션을 위하여 아래와 같은 코드를 동작하여 본다.

```

numG = [1] ;
denG = poly([-1 -2 -10]);
numC = [1 0.1];
denC = [1 0];

G = tf(numG, denG);
C = tf(numC, denC);

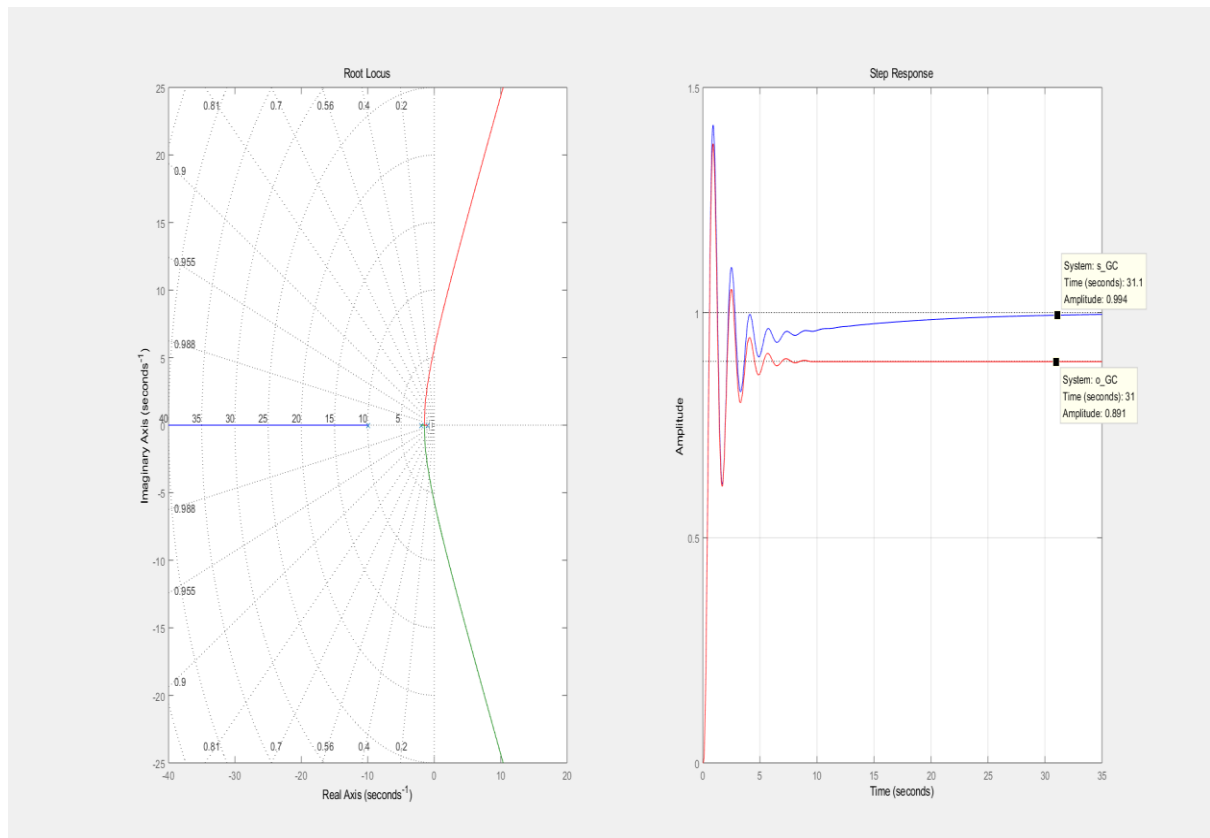
GC = series(G,C);
subplot(1,2,1);
rlocus(G);
%rlocus(GC);
sgrid

subplot(1,2,2);
s_GC = GC*165;
s_GC = feedback(s_GC, [1]);
G = G*165;
o_GC = feedback(G, [1]);

hold on
step(s_GC, 'b');
step(o_GC, 'r');
grid
hold off

```

<근 궤적 및 계단응답 확인>



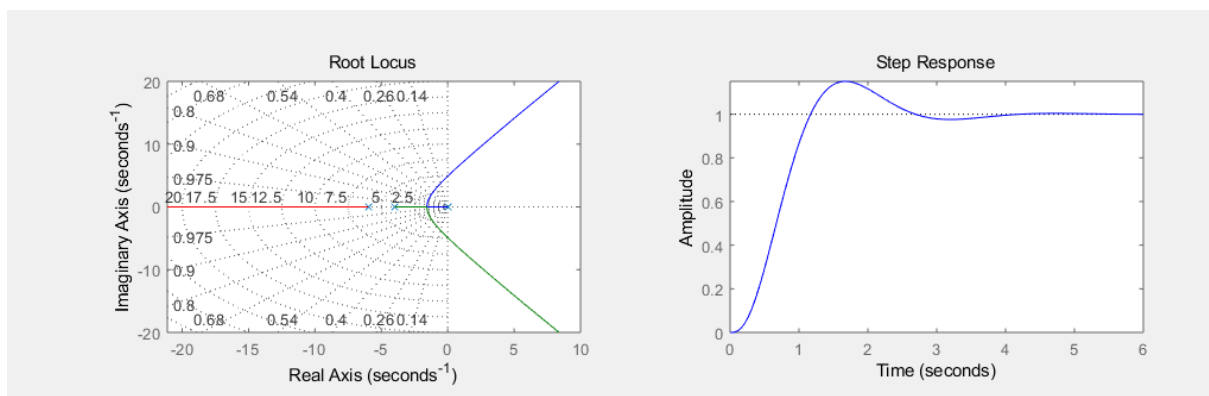
비례 미분(PD제어)를 이용한 과도특성의 개선

시스템의 과도특성의 개선은 복소평면에서 페루프 극의 위치를 적절히 선정하여 얻어 질 수 있다. 다시 말하면, 바람직한 페루프의 극이 근 궤적상에 존재 한다면 이득의 조정으로 가능하지만, 그렇지 않을 경우에는 극과 영점을 루프내에 추가하여 과도특성을 만족시키는 페루프의 극이 근 궤적 위에 존재하도록 해야 한다.

과도특성의 하나인 상승시간을 개선시키는 방법에 대하여 생각해 보면, 가장 간단한 방법은 영점을 추가하는 것이다. ($C(s) = s + z_c$)

$G(s) = \frac{1}{s(s+4)(s+6)}$ 으로 주어진 시스템에서 16% 정도의 오버슈트를 발생시키는 이득 K를 결정한 경우, 정정시간이 매우 길다. 따라서 현재보다 3배 이상 개선이 이루어 지도록 PD 보상기를 설계하여 본다.

<기존 시스템의 근 궤적과 계단응답>



근 궤적 확인 결과, 16%의 오버 슈트를 발생시키는 감쇄비 $\zeta = 0.504$ 이며 이득 K는 43.35가 된다. 이때의 지배극은 $-1.2 + j 2.06$ 이 된다.

$t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n}$ (2% 이내 기준) 이고, 현재의 t_s 는 3.33sec 이다. 따라서 t_s 가 1.11sec이 되도록 설정하면 $\zeta \omega_n = 3.60$ 이 되며 이는 지배극의 실수부가 된다. $\cos^{-1} \zeta$ 를 통하여 허수부 6.19를 구한다.

새로운 영점이 설정되었으므로 근 궤적의 전체 위상을 -180도로 맞추어야 한다.

극점의 위상은 -275.6도이므로, 영점의 위상은 95.6도가 되어야한다.

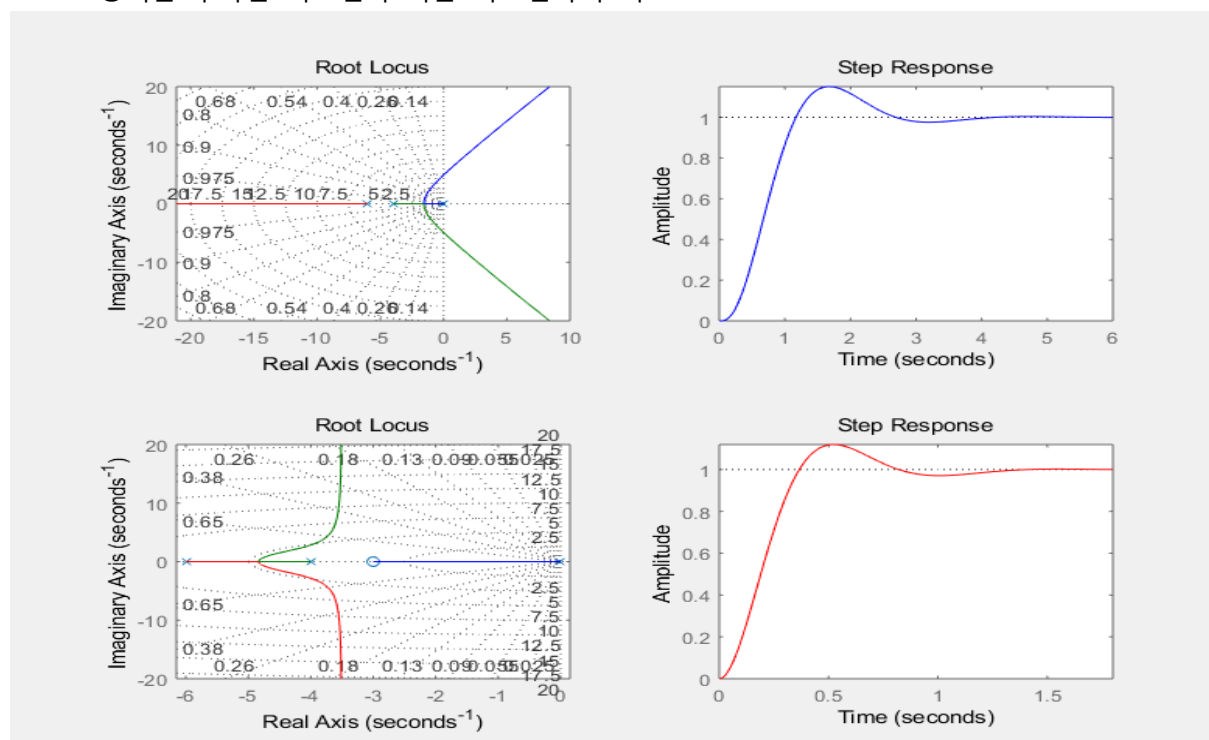
영점의 위치를 구하기 위하여 각도기준 $\tan^{-1}(180 - 95.6) = \frac{6.19}{3.60 - Z_c}$ 이다.

따라서 Z_c 의 크기는 3이된다. (설계상 추가하는 영점은 -3에 생성이 된다.)

보상기를 추가한 응답을 확인하는 코드는 다음과 같다.

```
numG = [1];
denG = conv([1 4 0],[1 6]);
numD = [1 3];
denD = [1];
G = tf(numG, denG);
D = tf(numD, denD);
GD = series(G,D);
subplot(2,2,1);
rlocus(G);
sggrid
subplot(2,2,2);
G_step = feedback(43.35*G, [1])
step(G_step, 'b');
subplot(2,2,3);
rlocus(GD);
sggrid
subplot(2,2,4);
GD_step = feedback(47.5*GD, [1])
step(GD_step, 'r');
```

<PD 보상기를 추가한 시스템과 기존 시스템과의 비교>



근 궤적 비교를 해도, 기존의 근 궤적에 있던 지배극은 허수 축 근처에 존재한다. 따라서 정정시간이 길 것으로 바로 예상이 된다. PD 보상기를 추가하여 허수축으로 왼쪽으로 근 궤적을 끌어온 보상 시스템은 지배극이 상대적으로 멀기 때문에 정상상태로의 수렴이 훨씬 빨라질 것으로 예상 이 된다.

비례 적분 미분(PID제어)를 이용한 과도특성과 정상응답 개선

앞에서 본 것처럼 정상상태와 과도응답 특성의 개선이 서로 독립적으로 이루어 짐을 알 수 있다. 즉, PD 제어를 통해 과도응답특성을 개선하고, PI 제어를 통하여 정상오차의 개선이 가능하다. 그러나 이 결과로 응답특성이 조금 늦어진다.

이에 대안으로 PI제어 PD제어 순으로 하면 전 단계에서 결정된 정상오차가 조금 증가하게 된다.

결과적으로 추가된 보상기로 인하여 이미 결정되어 있는 설계사양에 변화가 발생한다.

PID 제어의 기본 식

$$u(t) = K_p(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt})$$

로 나타난다. 이를 라플라스 변환을 하면, 다음과 같이 표현이 가능하다.

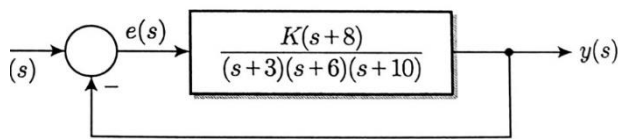
$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \equiv K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s = \frac{K_3(s^2 + \frac{K_1}{K_3}s + \frac{K_2}{K_3})}{s}$$

이를 토대로, PID보상기는 두 개의 영점과 원점에 하나의 극을 가진다는 것을 알 수 있다.

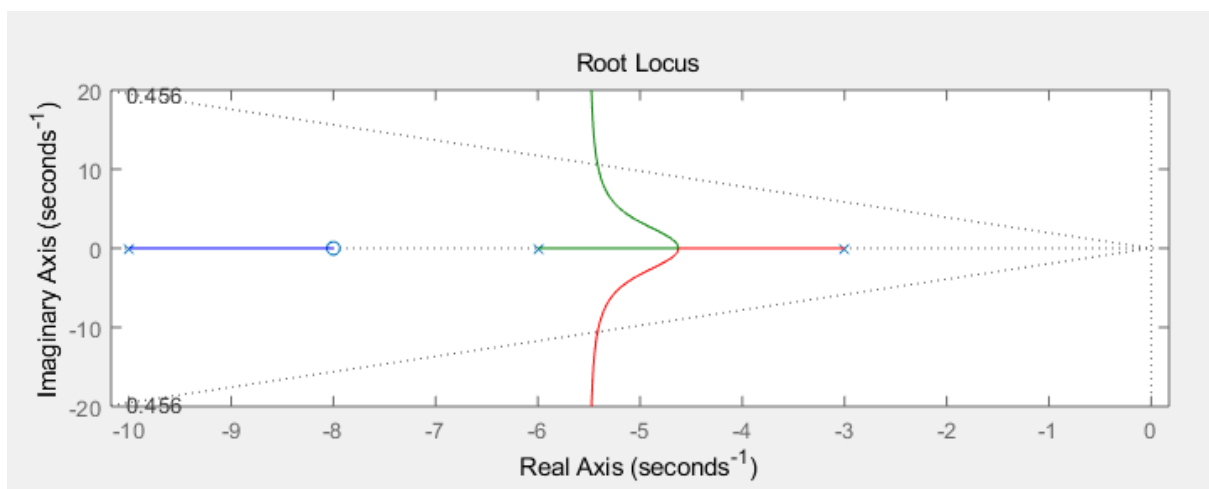
PID 설계의 순서는 다음과 같다.

- 1) 보상 전 시스템을 평가하여 어느 정도의 과도특성이 개선되어야 하는지를 평가한다.
- 2) 평가 결과에 따라서 PD보상기를 설계한다. 이 과정에서 보상기 영점위치와 루프이득이 결정.
- 3) 설계 사양이 만족되었는지 확인 후, 반복 설계
- 4) 정상오차에 대한 설계사양을 만족시키기 위하여 PI 보상기를 설계한다.
- 5) PI와 PD를 합하여 계수 K1, K2, K3를 결정한다.
- 6) 시뮬레이션을 통하여 설계사양의 만족여부를 확인하고, 부족하다면 위 과정을 반복한다.

PID 설계 과정



위와 같은 시스템이 있다고 하자. 계단응답의 정상오차는 0, 20%오버슈트, 피크타임의 2/3을 가지도록 하는 PID 보상기를 설계하여 본다.



해당 루트 로커스를 토대로 20%의 오버슈트를 가지는 $\zeta = 0.456$ 선은 이득 $K = 121.5$ 에서 지배극이 $-5.415 + j10.57$ 에서 만난다.

피크시간 $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$ 이므로, $0.297s$ 를 나타낸다.

해당 피크시간을 2/3으로 줄이기 위하여 보상한 시스템의 지배극의 위치가 필요하다.

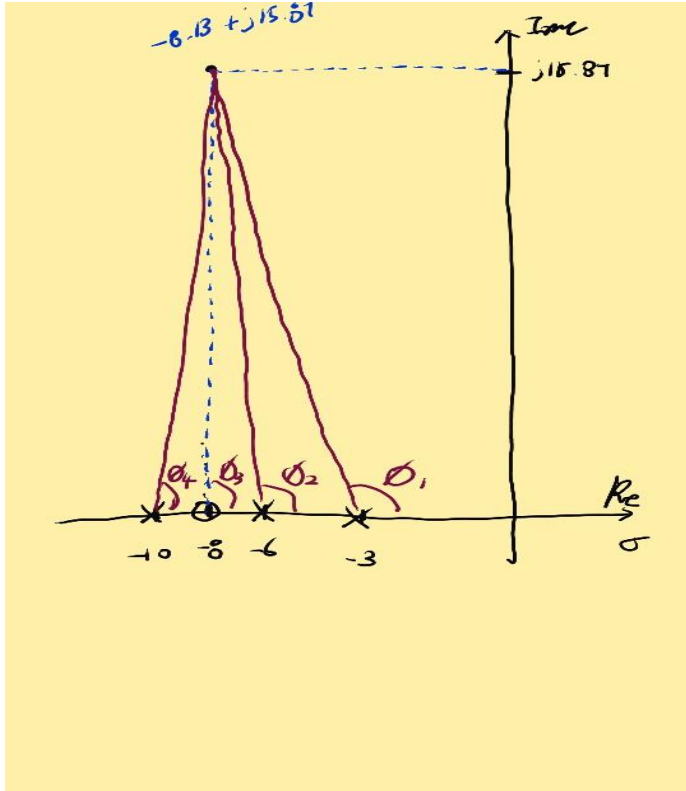
$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ 이므로 17.8319의 값이며, $\sin^{-1}\left(\frac{\omega_d}{\omega_n}\right) * \frac{180}{\pi} = 62.8705$ 도를 나타낸다.

따라서 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = \frac{\pi}{t_p} = 15.87$ 허수부가 결정이 된다.

실수부는 $\sigma = \frac{\omega_d}{\tan(62.87)} = 8.13$ 이 된다.

따라서 새로운 보상기의 지배극은 $-8.13 \pm j15.87$ 이 된다.

근 궤적을 위하여 각도기여를 확인하도록 한다.



$$180 - \tan^{-1}\left(\frac{15.87}{8.13-3}\right) = 107.913 \text{ 도}$$

$$180 - \tan^{-1}\left(\frac{15.87}{8.13-6}\right) = 97.6443 \text{ 도}$$

$$180 - \tan^{-1}\left(\frac{15.87}{8.13-8}\right) = 90.6443 \text{ 도}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{15.87}{10-8.13}\right) = 83.2797 \text{ 도}$$

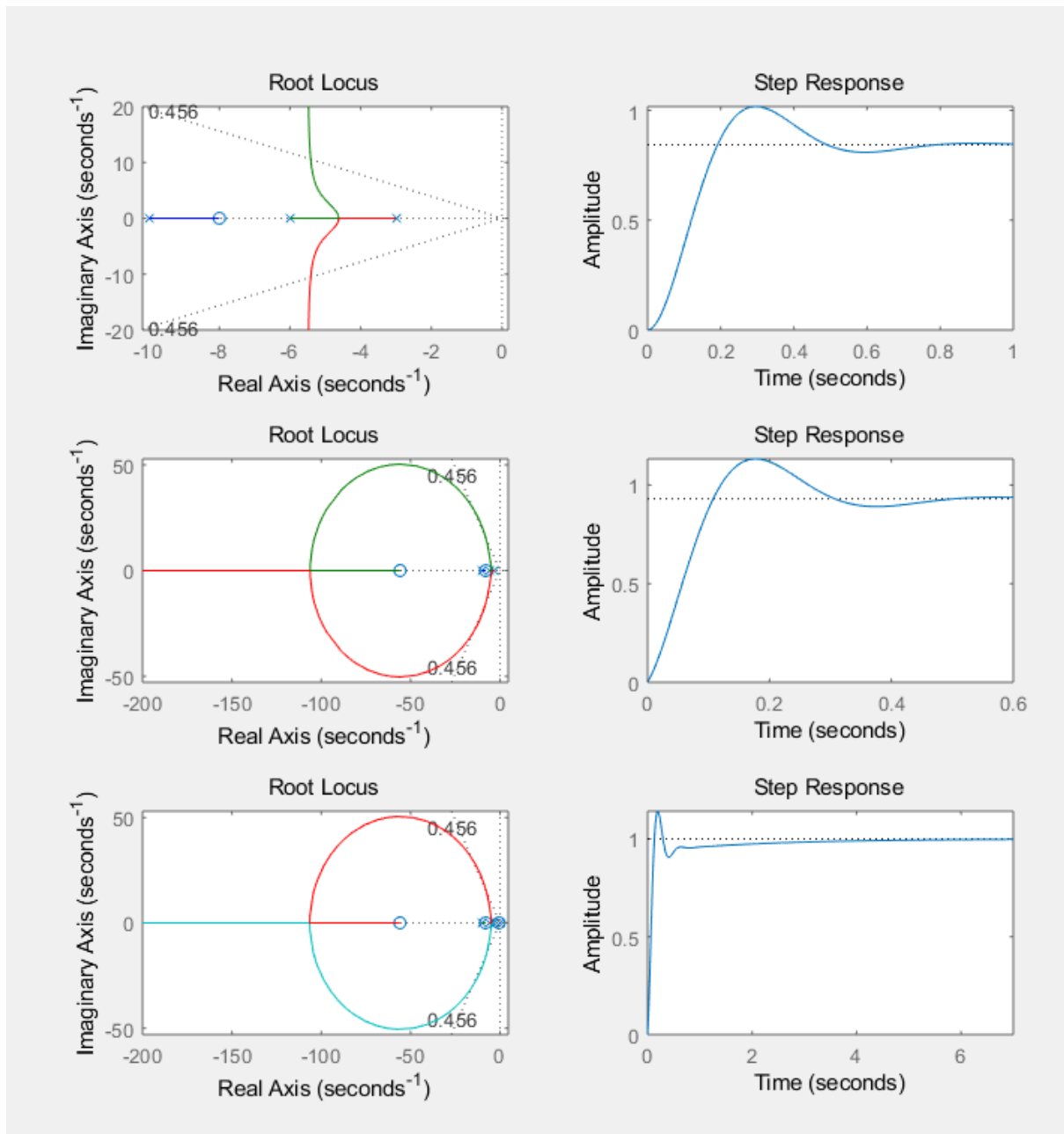
각각의 각도기여를 계산하면, 비 보상기 시스템은 -198.368 도를 나타내므로, +18.37 도의 각도 기여가 필요하다.

따라서 $\frac{15.87}{Z_c - 8.13} = \tan 18.37$ 의 방정식을 풀면, Z_c 의 값이 55.92가 된다. 따라서 - 부호 실수축 55.92에 영점을 설계하여 PD 보상기를 설계한다.

추가로 적분기는 $\frac{(s+Z_z)}{s}$ 형태가 순수 적분기 형태로 Z_z 를 0.5로 설정하여 PI 적분기를 설계하여 본 다.

그 결과값은 아래와 같다.

<PID 제어 결과>



기존 근 궤적도에 비해 2 번째 근 궤적은 PD 제어를 통하여 확연히 많은 변화가 보인다. 하지만 3 번째 근 궤적은 큰 차이를 보이지 않지만, 계단응답에서 큰 차이가 있다.

PD, PI 설계를 결합하면 $G_{PID}(s) = \frac{4.6(s^2 + 56.42s + 27.96)}{s}$ 이므로 $K_1 = 259.5$, $K_2 = 128.6$, $K_3 = 4.6$ 과 같은 계수가 구해진다. 계수 변환하면 PID의 계수를 구한 셈이다.