TI DSP, MCU 및 Xilinx Zynq FPGA 프로그래밍 전문가 과정

IRON DRONE

Quad Copter

강사 – Innova Lee(이상훈)
gcccompil3r@gmail.com

학생 – GJ (박현우)
uc820@naver.com

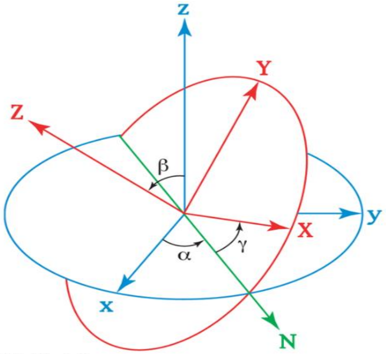
목차

Mathematical Modelling and Control of a Quadrotor

1. 배경지식 1)오일러 각도, 2) 회전행렬

Euler Transform Matrix (오일러 변환 행렬)은 관성 좌표계(inertial Frame)를 기체 좌표계(Body Frame)로 변환할 때 사용하는 행렬

일반적으로 3(z-축) – 2(y-축) – 1(x-축) 과정 (Yaw – Pitch – Roll) 의 순서로 변환



출처 : Wikimedia Commons

변환 - EULER

3. 변환

3.1 오일러 각도 변환 – con't

-. Z-축을 회전 축으로 하여 φ 만큼 회전

오른쪽 그림과 같이 Z-축을 기준으로 오른손 좌표 시스템을 설명할 수 있다.

$P_1(1,0,0)$ 에 대하여, φ 만큼 회전 시킬 경우, 삼각함수 표현법을 통하여,

$x = 1 \times \cos\varphi \quad y = 1 \times \sin\varphi \quad z = 0$

으로 변환된다.

$P_2(0,1,0)$ 에 대하여, φ 만큼 회전 시킬 경우, 삼각함수 표현법을 통하여,

$x = 1 \times \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin\varphi \quad y = 1 \times \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos\varphi \quad z = 0$

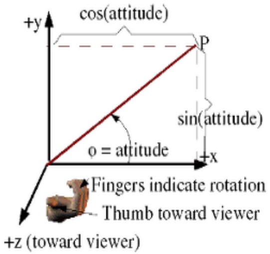
으로 변환된다.

$P_3(0,0,1)$ 의 경우 회전 축임으로, x = 0, y = 0, z = 1이 그대로 유지 된다.

점 세 개에 대한 열 기준 행렬로 표현 하면,

오일러 각도 변환 중 Z-축 기준 행렬 값을 얻을 수 있다.

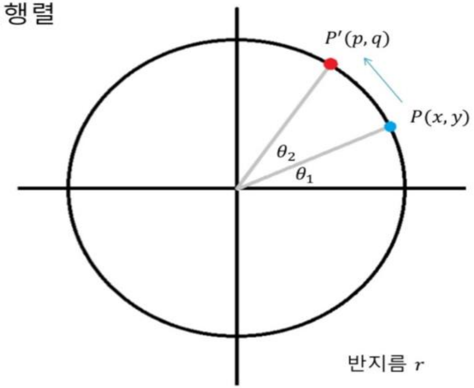
$$Z_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad X_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$$



$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

〈회전행렬〉

■ 회전행렬



$$\begin{cases} p = r\cos(\theta_1 + \theta_2) \\ q = r\sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = r\cos\theta_1 \cos\theta_2 - r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ q = r\sin\theta_1 \cos\theta_2 + r\cos\theta_1 \sin\theta_2 \end{cases}$$

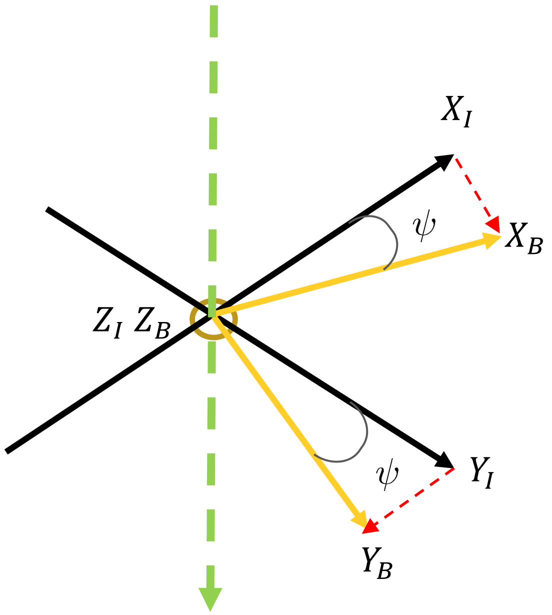
$$\begin{cases} p = x\cos\theta_2 - y\sin\theta_2 \\ q = y\cos\theta_2 + x\sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta_2 x - \sin\theta_2 y = p \\ \sin\theta_2 x + \cos\theta_2 y = q \end{cases}$$

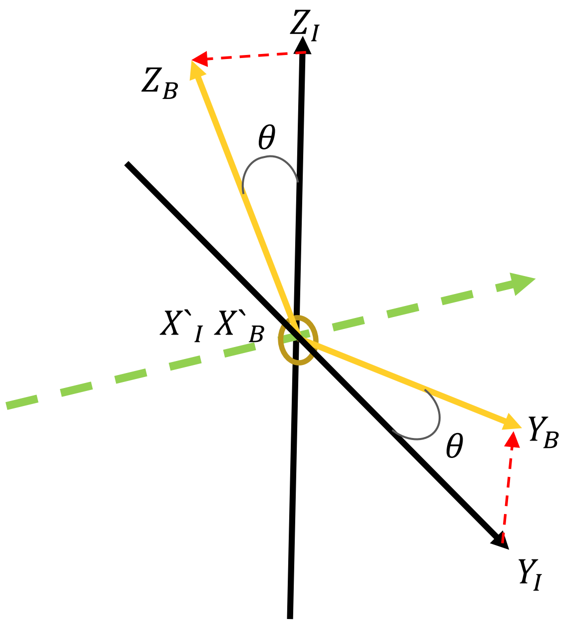
$$\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

1. 배경지식 1)오일러 각도, 2) 회전행렬

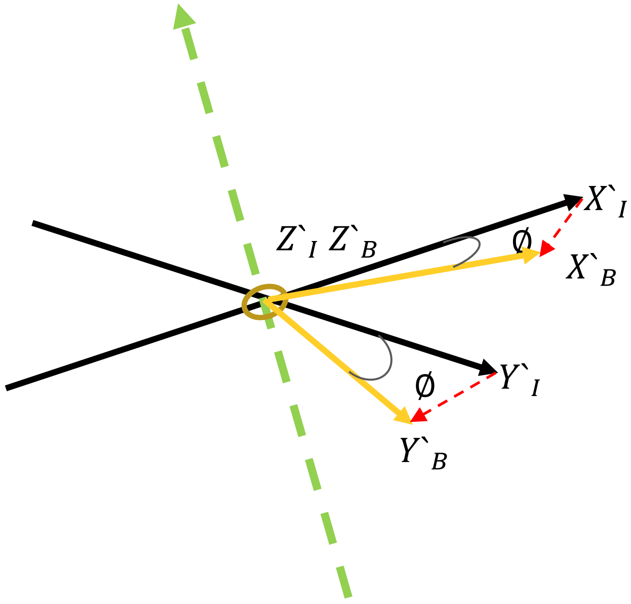
I = 관성 좌표계
B = 기체 좌표계



<Z축 기준 회전>



<바뀐 X축 기준 회전>



<바뀐 Z축 기준 회전>

1. 배경지식 1)오일러 각도, 2) 회전행렬

$$
{}^bC_e(\Theta) \quad = \quad C_x(\phi)C_y(\theta)C_z(\psi)
$$

X Y Z

$$
\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

XZX	$\begin{bmatrix} c_2 & -c_3 s_2 & s_3 s_2 \\ c_1 s_2 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_2 c_1 s_3 - c_3 s_1 \\ s_2 s_1 & c_1 s_3 + c_3 c_2 s_1 & c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 \end{bmatrix}$	**XZY**	$\begin{bmatrix} c_2 c_3 & -s_2 & c_2 s_3 \\ s_1 s_3 + c_3 c_1 s_2 & c_1 c_2 & c_1 s_2 s_3 - c_3 s_1 \\ c_3 s_1 s_2 - c_1 s_3 & c_2 s_1 & s_1 s_2 s_3 + c_1 c_3 \end{bmatrix}$
XYX	$\begin{bmatrix} c_2 & s_3 s_2 & c_3 s_2 \\ s_2 s_1 & c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & -c_1 s_3 - c_3 c_2 s_1 \\ -c_1 s_2 & c_1 c_2 s_3 + c_3 s_1 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 \end{bmatrix}$	**XYZ**	$\boxed{\begin{bmatrix} c_2 c_3 & -c_2 s_3 & s_2 \\ c_1 s_3 + c_3 s_1 s_2 & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -c_2 s_1 \\ s_1 s_3 - c_1 c_3 s_2 & c_1 s_2 s_3 + c_3 s_1 & c_1 c_2 \end{bmatrix}}$
YXY	$\begin{bmatrix} c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & s_2 s_1 & c_1 s_3 + s_1 c_2 c_3 \\ s_3 s_2 & c_2 & -c_3 s_2 \\ -c_2 c_1 s_3 - c_3 s_1 & c_1 s_2 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 \end{bmatrix}$	**YXZ**	$\begin{bmatrix} c_1 c_3 + s_1 s_2 s_3 & c_3 s_1 s_2 - c_1 s_3 & c_2 s_1 \\ c_2 s_3 & c_2 c_3 & -s_2 \\ c_1 s_2 s_3 - c_3 s_1 & s_1 s_3 + c_1 c_3 s_2 & c_1 c_2 \end{bmatrix}$
YZY	$\begin{bmatrix} c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_1 s_2 & c_2 c_1 s_3 + c_3 s_1 \\ c_3 s_2 & c_2 & s_3 s_2 \\ -c_1 s_3 - c_3 c_2 s_1 & s_2 s_1 & c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 \end{bmatrix}$	**YZX**	$\begin{bmatrix} c_1 c_2 & s_1 s_3 - c_1 c_3 s_2 & c_1 s_2 s_3 + c_3 s_1 \\ s_2 & c_2 c_3 & -c_2 s_3 \\ -c_2 s_1 & c_1 s_3 + c_3 s_1 s_2 & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 \end{bmatrix}$
ZYZ	$\begin{bmatrix} c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_2 s_3 c_1 - c_3 s_1 & c_1 s_2 \\ c_1 s_3 + c_3 c_2 s_1 & c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & s_2 s_1 \\ -c_3 s_2 & s_3 s_2 & c_2 \end{bmatrix}$	**ZYX**	$\begin{bmatrix} c_1 c_2 & c_1 s_2 s_3 - s_1 c_3 & s_1 s_3 + c_1 s_2 c_3 \\ s_1 c_2 & s_1 s_2 s_3 + c_1 c_3 & s_1 s_2 c_3 - c_1 s_3 \\ -s_2 & c_2 s_3 & c_2 c_3 \end{bmatrix}$
ZXZ	$\begin{bmatrix} c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & -c_1 s_3 - c_3 c_2 s_1 & s_2 s_1 \\ c_2 c_1 s_3 + c_3 s_1 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_1 s_2 \\ s_3 s_2 & c_3 s_2 & c_2 \end{bmatrix}$	**ZXY**	$\begin{bmatrix} c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -s_1 c_2 & c_1 s_3 + s_1 s_2 c_3 \\ c_1 s_2 s_3 + s_1 c_3 & c_1 c_2 & s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 \\ -c_2 s_3 & s_2 & c_2 c_3 \end{bmatrix}$

똑같은 각도라도 곱하는 순서마다 회전 방향이 달라진다.

where $c = cos$ and $s = sin$. Because ${}^bC_e$ is orthonormal [Bak, 2002, p. 13] the inverse transformation can be described at the transpose of ${}^bC_e$.

$$
{}^bC_e^{-1}(\Theta) \quad = \quad {}^bC_e^{\mathsf{T}}(\Theta) \tag{2.5}
$$

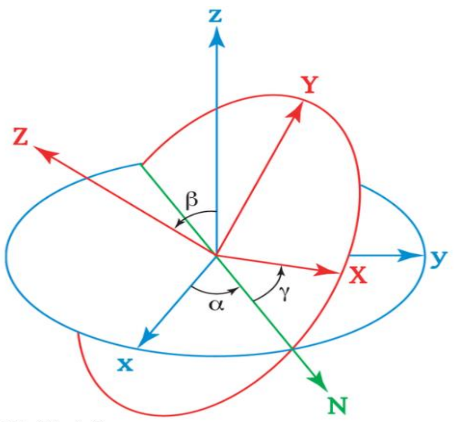
관성좌표계에서 기체좌표계로의 변환 행렬을

transpose하면 body frame에서 inertial frame으로 다시 변환할 수가 있다.

1. 배경지식 1)회전행렬

Euler Transform Matrix (오일러 변환 행렬)은 관성 좌표계(inertial Frame)를 기체 좌표계(Body Frame)로 변환할 때 사용하는 행렬

일반적으로 3(z-축) – 2(y-축) – 1(x-축) 과정 (Yaw – Pitch – Roll) 의 순서로 변환



출처 : Wikimedia Commons

오일러 각도

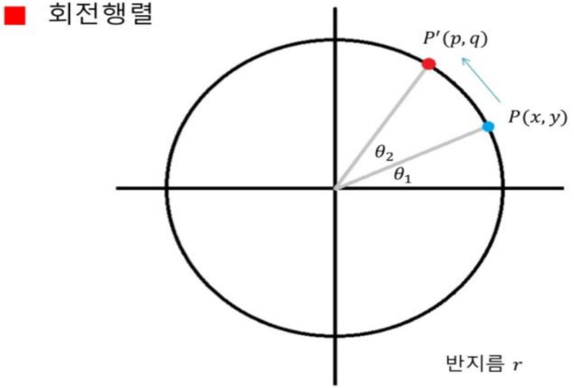
공간 좌표계(space coordinate)를 (x, y, z)라 하자.

1. (z 회전) z-축을 회전축으로 하여 α 만큼 x-y 좌표축을 회전시키고,
2. (x 회전) 회전된 좌표축 x-축(이제 N-축)을 회전축으로 하여 β 만큼 z-y 좌표축을 회전시키고,
3. (z 회전) 다시 z-축을 회전축으로 γ 만큼 x-y 좌표축을 회전시킨다.

이와같이 z-x-z 순서로 차례로 회전시키면, 물체 좌표계 (body coordinate) (X, Y, Z)를 얻는다.

<회전행렬>

■ 회전행렬



$$\begin{cases} p = r\cos(\theta_1+\theta_2) \\ q = r\sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta_2 x - \sin\theta_2 y = p \\ \sin\theta_2 x + \cos\theta_2 y = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = r\cos\theta_1 \cos\theta_2 - r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ q = r\sin\theta_1 \cos\theta_2 + r\cos\theta_1 \sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = x\cos\theta_2 - y\sin\theta_2 \\ q = y\cos\theta_2 + x\sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

1. 배경지식 3) 선속도와 각속도

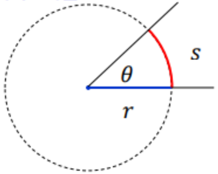
일정하게 가속된 선운동 방정식과 회전운동 방정식의 유사성

접선 운동	회전 운동
$v = v_0 + at$ $d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$d \Rightarrow \theta$
$v \Rightarrow \omega$
$a \Rightarrow \alpha$

- 회전 중심으로부터 수직거리 r 만큼 떨어진 곳에 있는 사람이 각도 θ만큼 움직였을 때 원 둘레를 따라 움직인 원호의 길이가 s라면

$$\theta = \frac{s}{r} \Rightarrow s = r \cdot \theta$$

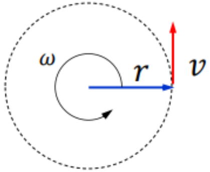


- 사람의 선속도는?

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{r \cdot \theta}{t} = r \cdot \frac{\theta}{t} = r \cdot \omega$$

$$\Rightarrow \frac{v}{r} = \omega = \frac{\theta}{t}$$



선속도는 반지름 r 에 비례하므로

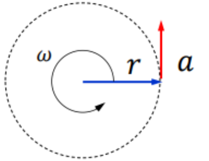
- 중심에서 멀리 있는 사람의 선속도가 크다.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dr}{dt}w + \frac{dw}{dt}r \text{ (r vector)}$$

- 접선 성분

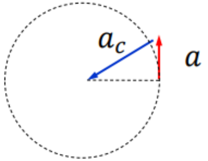
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{rd\omega}{dt} = r\alpha$$

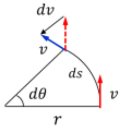
$$\frac{v}{r} = \omega \Leftrightarrow \frac{a}{r} = \alpha$$

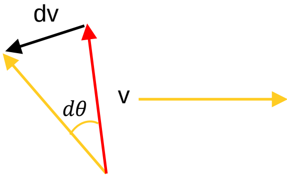


- 지름 성분 (구심 가속도)

$$a_c = \frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

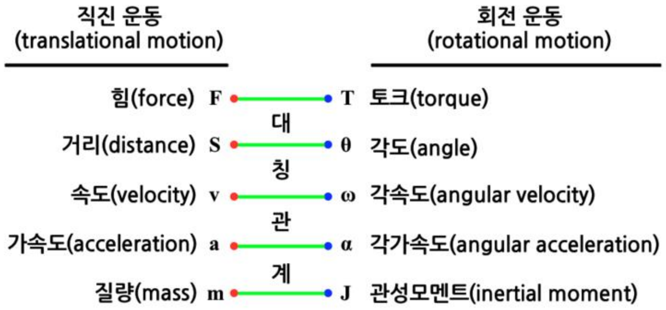


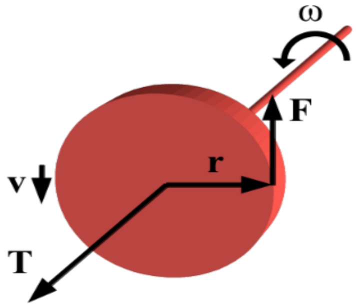




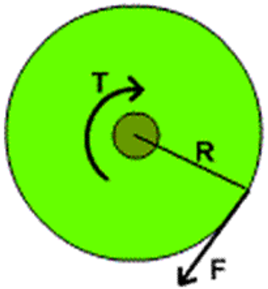
dv = v $d\theta$

1. 배경지식 4) 토크

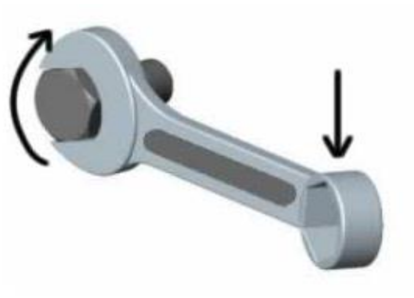




$$T = r \times F$$
$$v = r \cdot \omega$$



Torque applied to wheel results in force on edge



Force on wrench creates torque on bolt

transpose

$A = (a_{ij}) \in Mat_{m,n}(K)$ 라고 할 때,

$A^T = (a_{ji}) \in Mat_{n,m}(K)$ 를 A 의 전치행렬이라고 합니다. 말 그대로 i와 j의 순서가 뒤바뀐 거죠. 예를 들어서,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$ 가 되겠죠.

$A, B \in Mat_{m,n}(K)$, $C \in Mat_{n,r}(K)$, $k \in K$ 일 때,

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(kA)^T = kA^T$

$(A^T)^T = A$

$(AC)^T = C^T A^T$

대각행렬 곱

$A \in Mat_{n,n}(K)$일 때

$$tr(A) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$A, B \in Mat_{n,n}(K)$, $k \in K$일 때

$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

$tr(kA) = k \cdot tr(A)$

$tr(AB) = tr(BA)$

$tr(A^T) = tr(A)$

$AB - BA = I_n$인 n차 정사각행렬 A, B는 존재하는가?

$tr(AB-BA) = tr(AB) - tr(BA) = 0 \neq n = tr(I)$

Diagonal

여기 hyon notation을 소개하는 부분에서

$$J = \begin{pmatrix} I_2 & \text{싹다}0 \\ \text{싹다}0 & I_2 \end{pmatrix}$$ 라는 행렬을 한 번 소개했는데,

그럼 얘는 $diag(I_2, I_2)$ 가 되겠습니다.

이런 block diagonal matrix는 다음과 같은 성질을 가집니다.

$diag(A_1, \dots, A_k) \cdot diag(B_1, B_2, \dots, B_k) = diag(A_1 B_1, \dots, A_k B_k)$

$diag(A_1, \dots, A_k)^{-1} = diag(A_1^{-1}, \dots, A_k^{-1})$

벡터, 행렬 표현 및 미분 기호

	스칼라	벡터	행렬
스칼라	$\frac{\partial y}{\partial x}$	$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}$	$\frac{\partial Y}{\partial x}$
벡터	$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}}$	$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$	
행렬	$\frac{\partial y}{\partial X}$		

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}=\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial X}=\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_{1n}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{mn}} \end{bmatrix} \quad \text{--- (3)}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=\begin{bmatrix} \frac{\partial y_{11}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_{1n}}{\partial x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{m1}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_{mn}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{--- (4)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{--- (5)}$$

3. 벡터, 행렬 미분의 계산

상수벡터 **a**와 열벡터 **x**에 대해 $\mathbf{a}^T\mathbf{x}$를 **x**로 미분하면 그 결과값은 $\mathbf{a}^T$가 됩니다. 정말로 그렇게 되는지 앞서 설명한 벡터, 행렬 미분 정의에 따라 실제로 계산을 해 보겠습니다.

$$\mathbf{a}^T\mathbf{x}=\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \quad \text{--- (6)}$$

와 같이 $\mathbf{a}^T\mathbf{x}$는 하나의 스칼라 값입니다. 따라서 스칼라 $\mathbf{a}^T\mathbf{x}$를 식 (1)을 이용하여 벡터 **x**로 미분하면

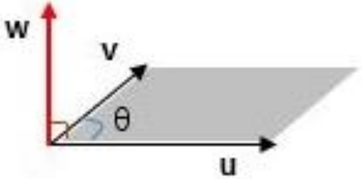
$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{a}^T\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}&=\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}^T\mathbf{x}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{a}^T\mathbf{x}}{\partial x_n} \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} \frac{\partial (a_1x_1+\cdots+a_nx_n)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial (a_1x_1+\cdots+a_nx_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\\ &=\mathbf{a}^T \end{aligned} \quad \text{--- (7)}$$

a, **b**: 상수 벡터
A: 상수 행렬
y, **z**: **x**와 함수관계를 갖는 벡터

식	x로 미분 결과
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{a}^T\mathbf{x}=\mathbf{x}^T\mathbf{a}$	$\mathbf{a}^T$
$A\mathbf{x}$	A
$\mathbf{x}^TA$	A^T
$\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$	$\mathbf{x}^T(A+A^T)$
$\mathbf{y}^TA\mathbf{z}$	$\mathbf{y}^TA\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}}+\mathbf{z}^TA^T\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$
$\mathbf{y}^T\mathbf{z}=\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}$	$\mathbf{y}^T\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}}+\mathbf{z}^T\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$

$\lVert\mathbf{x}\rVert^2=\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}^T\mathbf{x}$	$2\mathbf{x}^T$
$\lVert\mathbf{x}\rVert$	$\frac{\mathbf{x}^T}{\lVert\mathbf{x}\rVert}$
$\lVert\mathbf{x}-\mathbf{a}\rVert$	$\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T}{\lVert\mathbf{x}-\mathbf{a}\rVert}$
$\lVert A\mathbf{x}-\mathbf{b}\rVert^2$	$2(A\mathbf{x}-\mathbf{b})^TA$

1. 배경지식 7) 벡터의 외적

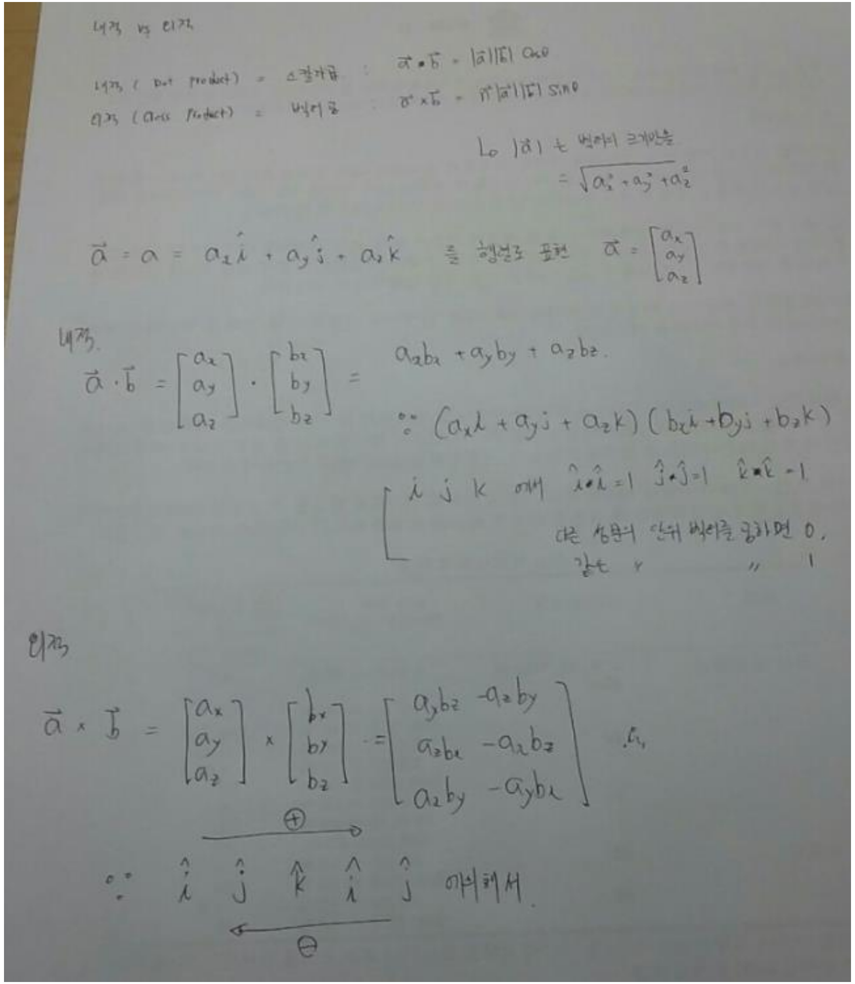


$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$$
$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

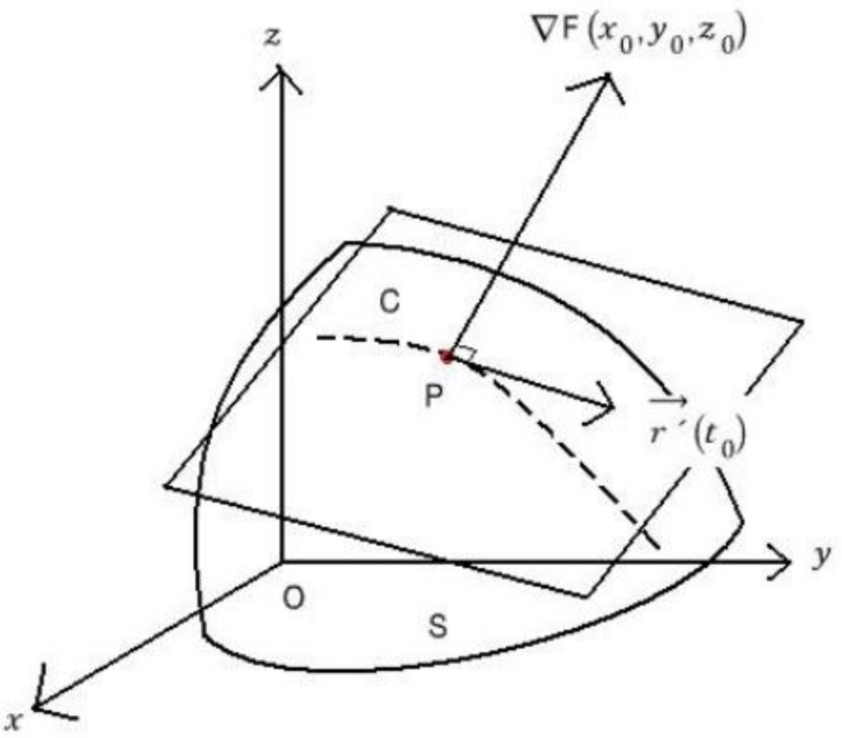
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$$



1. 배경지식 8) 기울기 벡터(Gradient Vector)



- 정리 1 -

곡면 $S : F(x,y,z) = k$ (k는 상수) 위의 점 $P(x_0, y_0, z_0)$ 에 대하여 $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ 는 점 P에서 곡면 S에 접하는 접평면의 법선벡터이다.

- 정리 2 -

곡면 $S : F(x,y,z) = k$ (k는 상수) 위의 점 $P(a,b,c)$ 에 접하는 접평면의 방정식은 $F_x(a,b,c)(x-a) + F_y(a,b,c)(y-b) + F_z(a,b,c)(z-c) = 0$ 이다.

그리고 점 P를 지나면서 접평면에 수직인 법선의 방정식은 $\dfrac{x-a}{F_x(a,b,c)} = \dfrac{y-b}{F_y(a,b,c)} = \dfrac{z-c}{F_z(a,b,c)}$ 이다.

ex1) 타원체 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 3$ 위의 점 P(-2, 1, -3) 에 접하는 접평면의 방정식과 점 P를 지나고 접평면에 수직인 법선의 방정식을 구하시오.

(풀이)

$F(x,y,z) = \dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9}$ 이라고 하면 $\nabla F = \left\langle \dfrac{x}{2}, 2y, \dfrac{2z}{9} \right\rangle$

따라서 점 P에서의 법선벡터는 $\nabla F(-2,1,-3) = \left\langle -1, 2, -\dfrac{2}{3} \right\rangle$ 이므로 접평면의 방정식은

$-(x+2) + 2(y-1) - \dfrac{2}{3}(z+3) = 0$ 이고 정리하면 $3x - 6y + 2z + 18 = 0$ 이다.

그리고 법선의 방정식은 $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{-6} = \dfrac{z+3}{2}$ 이다.

- 회전에 대한 뉴턴 방정식

$$\overrightarrow{\tau_{net}} = I\ \vec{\alpha}$$

각가속도 : $\vec{\alpha} = \dfrac{\overrightarrow{d\omega}}{dt}$

각속도 크기 : $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

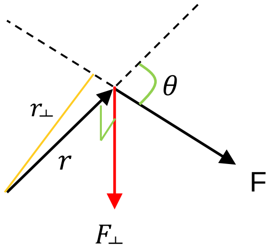
회전 관성

알짜토크

합 $\vec{\tau}$(시계 +) + 합 $\vec{\tau}$(반시계 -)

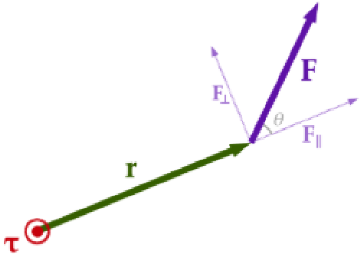
- Moment의 크기 : $\tau = \gamma\ F\ \sin\theta$

  $= r\ F_{\perp} = r_{\perp} F$



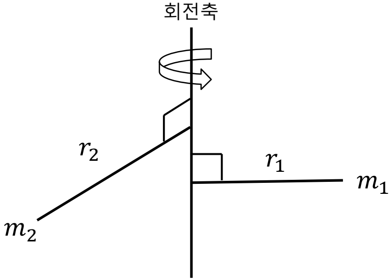
- Torque의 크기

  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

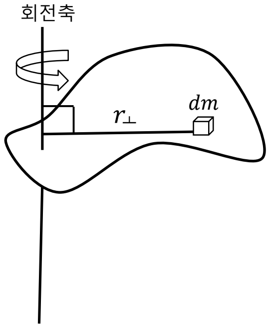


- 회전관성(I)

1) 질점계 $I = \sum_i m_i {r^2}_{i\perp}$

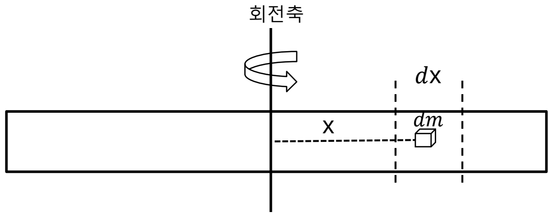


2) 고체(강체 : Rigid Body)계 : $I = \int {r^2}_{\perp}\, dm$



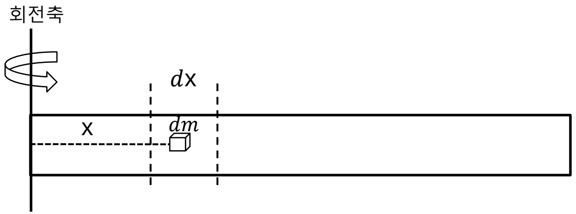
1. 배경지식 10) 평행축 정리

예제) 길이 L, 질량 M인 균일 막대



∴ $I = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 \ \lambda \ dx$, $dm = \lambda \ dx$, λ(선밀도 $\left[\frac{kg}{m}\right]$: 일정)

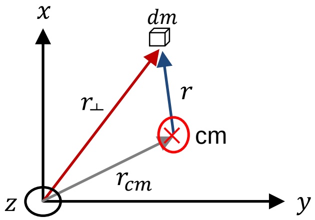
$I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$



∴ $I = \int_0^L x^2 \lambda \, dx = \frac{1}{3} ML^2$

평행축 정리 → $I = \frac{1}{12} ML^2 + M \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$

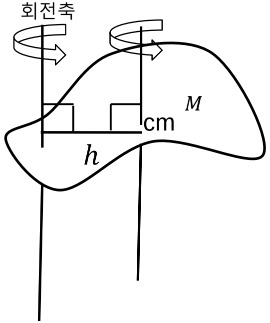
증명)



$I = \int r^2{}_\perp \, dm = \int (r^2{}_{cm} + r^2 + \overrightarrow{r_{cm}} \cdot \vec{r} \,)dm$

$= \int r^2{}_{cm} dm + \int r^2 dm + \cancel{\boxed{\int \overrightarrow{r_{cm}} \cdot \vec{r} \ dm}}$ = 0

- 평행축 정리 → $I = I_{cm} + \ Mh^2$



2. Kinematic Model

- Rotation Matrix

$$R_{i\ xyz}^{b} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\psi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi s\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

$$(R_{i\ xyz}^{b})^{T} = R_{b\ xyz}^{i} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\theta c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\theta c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

- Body Frame에서는 추력과 같은 힘을 표현.
- Inertial Frame에서는 중력, 쿼드로터의 위치를 표현.

➢ 그러므로, 둘 사이의 관계식이 필요하다.
➢ 또한, 쿼드로터의 각속도를 알기 위해서는 Body Coordinate Frame의 <u>**속도를 측정해주는 IMU**</u>가 필요하다.

2. Kinematic Model

- Rotation Matrix

Inertial Frame에서의 측정된 Euler rates $\dot{\eta} = [\,\dot{\phi}\ \ \dot{\theta}\ \ \dot{\varphi}\,]^T$와 angular body rates $\omega = [\,p\ q\ r\,]^T$ 를 연관을 짓기 위해 변형이 필요하다.

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = R(\dot{\phi}) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R(\phi)R(\dot{\theta}) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R(\phi)R(\theta)R(\dot{\psi}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \sin\theta\dot{\psi} \\ \cos\phi\dot{\theta} + \sin\phi\cos\theta\dot{\psi} \\ -\sin\phi\dot{\theta} + \cos\phi\cos\theta\dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$\dot{\phi}$ $\dot{\theta}$ $\dot{\varphi}$ 의 값은 작으므로, $R(\dot{\phi}) = R(\dot{\theta}) = R(\dot{\psi}) = I$

$$\omega = R_r\,\dot{\eta} \quad \text{where} \quad \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

*hover position*에서 각도는 $\cos\phi \equiv 1\,, \cos\theta \equiv 1$

$\sin\phi = \sin\theta = 0\ \ (\phi = \theta = 90°)$

2. Kinematic Model

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\emptyset & s\emptyset c\theta \\ 0 & -s\emptyset & c\emptyset c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\emptyset} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\dot{T} = \left(\frac{\partial T}{\partial \emptyset}\dot{\emptyset} + \frac{\partial T}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial T}{\partial \varphi}\dot{\varphi}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\theta} c\theta \\ 0 & -\dot{\emptyset} s\emptyset & \dot{\emptyset} c\emptyset c\theta - \theta s\dot{\emptyset} s\theta \\ 0 & -\dot{\emptyset} c\emptyset & -\dot{\emptyset} s\emptyset c\theta - \dot{\theta} c\emptyset s\theta \end{bmatrix}$$

- $\dot{\psi}$ is measured in the Inertial Frame
- $\dot{\theta}$ is measured in Intermediate Frame #1
- $\dot{\phi}$ is measured in Intermediate Frame #2
- ... which is

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3 \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{H}_2^B \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{H}_2^B \mathbf{H}_1^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_I^B \dot{\boldsymbol{\Theta}}$$

Can the inversion become singular?
What does this mean?

Inverse transformation $[(.)^{-1} \neq (.)^T]$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi\sec\theta & \cos\phi\sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{L}_B^I \boldsymbol{\omega}_B$$

3. Dynamics Model

- ## Rotational Equations of Motion

뉴턴-오일러 방정식을 가지고 Body Frame에서 rotational equations of motion을 도출하면,

$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega + M_G = M_B$$

Body Frame에서 각가속도의 변화율 / 로터의 회전 moments = $\omega \times [0\ 0\ J_r\Omega_r]^T$

∴ 쿼드 움직임의 회전식은 = $J\dot{\omega} + \omega \times J\omega + \omega \times [0\ 0\ J_r\Omega_r]^T = M_B$ 으로 다시 쓸 수 있다.

Inertial Frame이 아닌, Body Frame에서의 회전식을 도출한 이유는 Inertia matrix는 시간에 독립적이기 때문이다.

J : 쿼드로터의 diagonal inertia 행렬
ω : 각도의 Body rates
M_G : 로터 inertia의 Gyroscopic moments
M_B : Body Frame에서 쿼드로터에 미치는 Moments

J_r rotors' inertia

Ω_r rotors' relative speed $\Omega_r = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4$

3. Dynamics Model

- ## Inertia Matrix

Inertia Matrix는 diagonal matrix이다. 쿼드로터의 대칭성 때문에 나머지 성분은 0으로 볼 수 있다.

I_{xx} , I_{yy} 그리고 I_{zz}는 Body Frame에서 축에 관한 area moments of inertia로 표현된다.

- ## Moments Action on the Quadrotor(M_B)

공기역학의 Momnets
= 상수 (프로펠러에 의해 고정값)

Thrust

$$F_i = \boxed{\frac{1}{2}\rho A C_T r^2}\Omega_i^2$$

$$= K_f \Omega_i^2$$

관성 모멘트

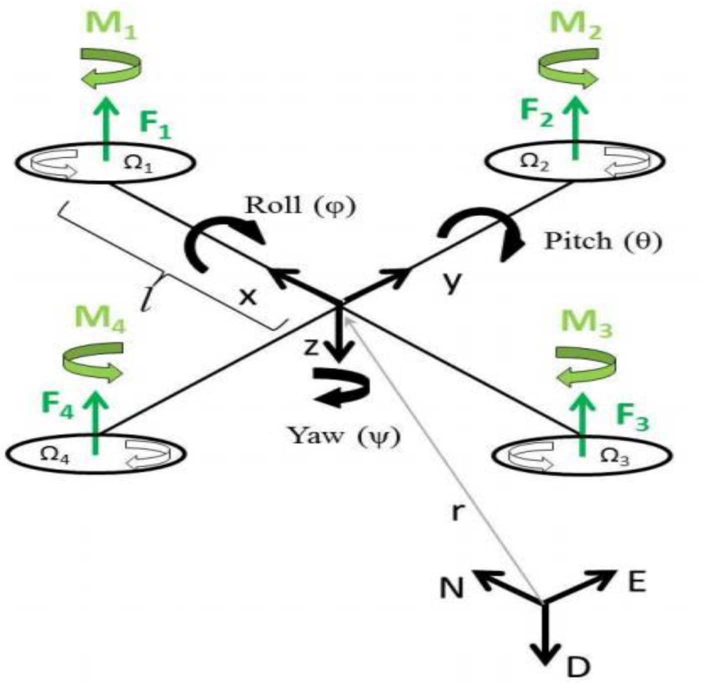
$$M_i = \boxed{\frac{1}{2}\rho A C_D r^2}\Omega_i^2$$

$$= K_M \Omega_i^2$$

ρ	air density
A	blade area
C_T, C_D	aerodynamic coefficients
r_b	radius of blade
Ω_i	angular velocity of rotor i

3. Dynamics Model

- Moments Action on the Quadrotor(M_B)



① x축에 관한 모멘트는 F_2와F_4에 의해 만들어짐.

$$M_x = -F_2 l + F_4 l$$
$$= -(K_f\Omega_2^2)l + (K_f\Omega_4^2)l$$
$$= lK_f(-\Omega_2^2 + \Omega_4^2)$$

② y축에 관한 모멘트는 F_1와F_3에 의해 만들어짐.

$$M_y = F_1 l - F_3 l$$
$$= (K_f\Omega_1^2)l - (K_f\Omega_3^2)l$$
$$= lK_f(\Omega_1^2 - \Omega_3^2)$$

③ z축에 관한 모멘트는 로터들의 추력 F에 의해 만들어지지 않는다.

$$M_z = M_1 - M_2 + M_3 - M_4$$
$$= (K_M\Omega_1^2) - (K_M\Omega_2^2) + (K_M\Omega_3^2) - (K_M\Omega_4^2)$$
$$= K_M(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2))$$

$$M_B = \begin{bmatrix} lK_f(-\Omega_2^2 + \Omega_4^2) \\ lK_f(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\ K_M(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \end{bmatrix}$$

➢ Moments의 크기 : $\tau = \gamma\, F\ \sin\theta$, $\theta = 90°$

3. Dynamics Model

where $t(\theta) = \tan(\theta)$. So, the kinematic model of the quadrotor is:

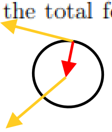
$$\begin{cases} \dot{x} = w[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)] - v[c(\phi)s(\psi) - c(\psi)s(\phi)s(\theta)] + u[c(\psi)c(\theta)] \\ \dot{y} = v[c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\psi)s(\theta)] - w[c(\psi)s(\phi) - c(\phi)s(\psi)s(\theta)] + u[c(\theta)s(\psi)] \\ \dot{z} = w[c(\phi)c(\theta)] - u[s(\theta)] + v[c(\theta)s(\phi)] \\ \dot{\phi} = p + r[c(\phi)t(\theta)] + q[s(\phi)t(\theta)] \\ \dot{\theta} = q[c(\phi)] - r[s(\phi)] \\ \dot{\psi} = r\frac{c(\phi)}{c(\theta)} + q\frac{s(\phi)}{c(\theta)} \end{cases} \tag{2.8}$$

Newton's law states the following matrix relation for the total force acting on the quadrotor:

F = ma (a = 구심가속도 + 각속도)

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix}$$

$$m(\boldsymbol{\omega_B} \wedge \mathbf{v_B} + \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{B}) = \mathbf{f_B}, \tag{2.9}$$



where m is the mass of the quadrotor, $\wedge$ is the cross product and $\mathbf{f_B} = [f_x \quad f_y \quad f_z]^T \in \mathbb{R}^3$ is the total force.

Euler's equation gives the total torque applied to the quadrotor:

$$\mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_\mathbf{B} + \boldsymbol{\omega_B} \wedge (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega_B}) = \mathbf{m_B},$$

T = I x a + Wb ^ (I * Wb)(I * Wb 는 각운동량)

where $\mathbf{m_B} = [m_x \quad m_y \quad m_z]^T \in \mathbb{R}^3$ is the total torque and $\mathbf{I}$ is the diagonal inertia matrix:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}.$$

쿼드로터의 운동학적인 모델은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \dot{x} = w[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)] - v[c(\phi)s(\psi) - c(\psi)s(\phi)s(\theta)] + u[c(\psi)c(\theta)] \\ \dot{y} = v[c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\psi)s(\theta)] - w[c(\psi)s(\phi) - c(\phi)s(\psi)s(\theta)] + u[c(\theta)s(\psi)] \\ \dot{z} = w[c(\phi)c(\theta)] - u[s(\theta)] + v[c(\theta)s(\phi)] \\ \dot{\phi} = p + r[c(\phi)t(\theta)] + q[s(\phi)t(\theta)] \\ \dot{\theta} = q[c(\phi)] - r[s(\phi)] \\ \dot{\psi} = r\frac{c(\phi)}{c(\theta)} + q\frac{s(\phi)}{c(\theta)} \end{cases} \tag{2.8}$$

뉴턴의 법칙은 밑에 2.9에 있는 관계식은
쿼드로터에 작용하는 총 힘에 관한 식이다.

m은 쿼드로터의 질량, A는 외적이고 $f_B = [f_x, f_y, f_z]^T$는 힘의 총합이다.
오일러의 식은 쿼드로터에 적용되는 총 토크를 준다.

m은 쿼드로터의 질량, A는 외적이고 $f_B = [f_x, f_y, f_z]^T$는
힘의 총합이다.
오일러의 식은 쿼드로터에 적용되는 총 토크를 준다.

$m_B = [m_x, m_y, m_z]^T$은 총 토크의 합이고 I는 사선의

관성 좌표이다.

3. Dynamics Model

So, the dynamic model of the quadrotor in the body frame is:

$$\begin{cases} f_x = m(\dot{u} + qw - rv) \\ f_y = m(\dot{v} - pw + ru) \\ f_z = m(\dot{w} + pv - qu) \\ m_x = \dot{p}I_x - qrI_y + qrI_z \\ m_y = \dot{q}I_y + prI_x - prI_z \\ m_z = \dot{r}I_z - pqI_x + pqI_y \end{cases}$$

The equations stand as long as we assume that the origin and the axes of the body frame coincide with the barycenter of the quadrotor and the principal axes.

동체좌표계에서 쿼드로터의 동적인 모델은 아래와 같다

$$\begin{cases} f_x = m(\dot{u} + qw - rv) \\ f_y = m(\dot{v} - pw + ru) \\ f_z = m(\dot{w} + pv - qu) \\ m_x = \dot{p}I_x - qrI_y + qrI_z \\ m_y = \dot{q}I_y + prI_x - prI_z \\ m_z = \dot{r}I_z - pqI_x + pqI_y \end{cases}$$

이 방정식은 동체좌표계와 쿼드로터의 중심 및 주축이 일치하는 것을 가정한다.

3. Dynamics Model

- ## Translational Equations of Motion

쿼드의 TEM(Translational Equations of Motion)은 뉴턴의 제 2법칙에 근간을 둔다. 밑의 식은 Earth inertial Frame에서 도출된다.

$$m\ddot{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} + RF_B$$

$r = [x\ y\ z]^T$	Quadrotor's distance from the inertial frame
m	Quadrotor's mass
g	gravitational acceleration $g = 9.81 m/s^2$
F_B	nongravitational forces acting on the quadrotor in the body frame

- ## Nongravitational Forces Acting on the Quadrotor

쿼드로터가 평행 상태(롤링, 피칭 x)일 때, 비 중력적인 힘은 프로펠러의 회전에 의해 생긴 힘(Thrust)이 생긴다.

$$F_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -K_f(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{bmatrix}$$

✓ 1, 2번째 행은 x , y 축 방향으로의 힘은 존재하지 않는다.
✓ 또한, 3번째 행에서만 힘을 받고 이 힘은 4개의 프로펠러가 만든 힘의 합이다.
✓ z-축이 기준이 아래를 향하기 때문에 현재 추력은 위로 작용하므로 추력의 부호는 (-)를 가진다.

3. Dynamics Model

- ## Aerodynamic Effects

지금까지의 공식들은 quad body에 미치는 공기역학 효과는 무시했다. 하지만, 정확하게 현실에 적용하기 위해서는 공기역학을 포함시켜야 한다. 즉, 두 종류의 공기역학인 drag forces와 drag moments를 고려해야 한다.

- ## Drag forces

Quad Body가 움직이면서 공기와 마찰이 생기기 때문에, quad body의 움직임에 반하는 힘이 생긴다. Quad의 속도가 증가하면 Drag forces는 바로 증가한다.

Drag forces F_a는 대략 $F_a = K_t \dot{r}$ 로 근사화 된다. (K_t : 공기역학의 변형 계수 행렬 , $\dot{r}$: 위치벡터 r의 미분)

Quad Body에 추가적인 힘의 영향으로 TEM은 다시 재정의 된다.

$$m\ddot{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} + RF_B - F_a$$

3. Dynamics Model

- ## Drag Moments

Drag forces와 마찬가지로 공기 마찰 때문에 Drag moments M_a도 quad body에 영향을 준다.

$$M_a = K_r \dot{\eta}$$

(K_r : 공기역학의 회전계수 행렬 , $\dot{\eta}$: Euler rates)

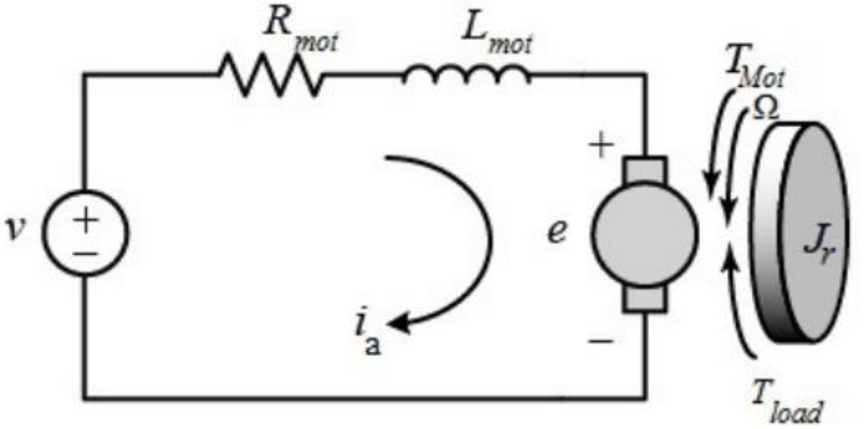
따라서, 재정의 된 Rotational equations of Motion은 아래와 같다.

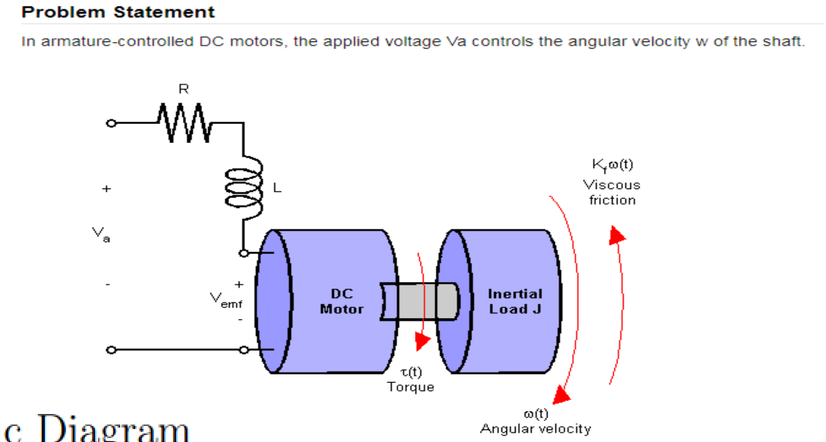
$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega + \omega \times [0\ 0\ J_r\Omega_r]^T = M_B - M_a$$

J	Quadrotor's diagonal inertia Matrix
ω	Angular body rates
M_G	Gyroscopic moments due to rotors' inertia
M_B	Moments acting on the quadrotor in the body frame

4. Rotor Dynamics

- Quadrotor에서는 주로 BLDC 모터를 사용한다. BLDC모터가 높은 Torque와 작은 마찰을 가지기 때문이다.
- 모터와 프로펠러는 기어가 없는 강체의 쌍으로 가정된다.
- 평형 상태에서의 BLDC 모터의 동역학은 전형적으로 DC모터와 동일하다.





DC Motor Schematic Diagram

- 키르히호프의 전압법칙을 사용하면 아래와 같은 식을 구할 수 있다.

$$v = R_{mot} i_a + L_{mot} \frac{di_a}{dt} + K_{mot}\Omega$$

위 식을 다시 정리하면 (L값이 매우 작다고 가정), $v = R_{mot} i_a + \boxed{K_{mot}} \Omega_i$ 또는 $i_a = \frac{v - K_{mot}\Omega_i}{R_{mot}}$

모터 토크 상수

4. Rotor Dynamics

- 기계적인 도출로 옮겨서 다시 식을 정리하면,

모터가 만드는 토크

$$J_r\dot{\Omega}_i = T_{mot} - T_{load}$$

프로펠러에 의해 생긴 토크

$$J_r\dot{\Omega}_i = \boxed{K_{mot}\frac{v - K_{mot}\Omega_i}{R_{mot}}} - \boxed{K_M\Omega_i^2}$$

- 오른쪽의 식처럼 전압에 관한 식으로 바꿀 수 있다.

$$v = \frac{R_{mot}}{K_{mot}}J_r\dot{\Omega}_i + K_{mot}\Omega_i + K_M R_{mot}\Omega_i^2$$

- Matlab`s system Identifiaction ToolBox를 사용하여 지금까지 도출한 전압의 식을 오른쪽의 식처럼 1차 lag 전달함수로 근사화시킬 수 있다.

$$G(s) = \frac{\text{Actual rotor speed}}{\text{Commanded rotor speed}} = \frac{0.936}{0.178s + 1}$$

- BLDC 모터의 경우 PWM으로 작동하니 voltage가 RPM에 비례한다.

- 둘 사이의 관계는 모터와 프로펠러를 가지고 black box identification process를 사용하면 알아 낼 수 있다.

5. State Space Model

➢ Quadrotor의 수학적인 모델을 상태공간 모델로 바꾸면 Control 문제를 보다 쉽게 다룰 수 있다.

- ## State Vector X

➢ Quadrotor의 경우 위치, 각속도와 선속도를 state vector로 정의한다.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \end{bmatrix}^T$$

$$X = \begin{bmatrix} \phi & \dot{\phi} & \theta & \dot{\theta} & \psi & \dot{\psi} & z & \dot{z} & x & \dot{x} & y & \dot{y} \end{bmatrix}^T$$

- ## Control Input Vector - U

➢ U_1 : $altitude\ (z\ \dot{z})$, U_2: $roll\ (\emptyset\ \dot{\emptyset})$, U_3: $pitch\ (\theta\ \dot{\theta})$, U_4 : $yaw\ (\varphi\ \dot{\varphi})$

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$U_1 = K_f(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \longrightarrow$$

$$U_2 = K_f(-\Omega_2^2 + \Omega_4^2)$$

$$U_3 = K_f(\Omega_1^2 - \Omega_3^2)$$

$$U_4 = K_M(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2)$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_f & K_f & K_f & K_f \\ 0 & -K_f & 0 & K_f \\ K_f & 0 & -K_f & 0 \\ K_M & -K_M & K_M & -K_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix}$$

5. State Space Model

- ## Control Input Vector - U

➢ 컨트롤 입력으로부터 rotor의 각속도가 필요하다면, inverse 관계를 이용하면 된다.

$$\begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4K_f} & 0 & \frac{1}{2K_f} & \frac{1}{4K_M} \\ \frac{1}{4K_f} & -\frac{1}{2K_f} & 0 & -\frac{1}{4K_M} \\ \frac{1}{4K_f} & 0 & -\frac{1}{2K_f} & \frac{1}{4K_M} \\ \frac{1}{4K_f} & \frac{1}{2K_f} & 0 & -\frac{1}{4K_M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sqrt{\omega}}$$

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{1}{4K_f}U_1 + \frac{1}{2K_f}U_3 + \frac{1}{4K_M}U_4}$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{1}{4K_f}U_1 - \frac{1}{2K_f}U_2 - \frac{1}{4K_M}U_4}$$

$$\Omega_3 = \sqrt{\frac{1}{4K_f}U_1 - \frac{1}{2K_f}U_3 + \frac{1}{4K_M}U_4}$$

$$\Omega_4 = \sqrt{\frac{1}{4K_f}U_1 + \frac{1}{2K_f}U_2 - \frac{1}{4K_M}U_4}$$

5. State Space Model

- Rotational Equations of Motion

➢ 모멘트에 관해 재정의를 하자.

$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega + \omega \times [0\ 0\ J_r\Omega_r]^T = M_B - M_a$$

$$M_B = \begin{bmatrix} l\,U_2 \\ l\,U_3 \\ U4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_r\Omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l\,U_2 \\ l\,U_3 \\ U4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{xx}\ddot{\phi} \\ I_{yy}\ddot{\theta} \\ I_{zz}\ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}I_{zz}\dot{\psi} - \dot{\psi}I_{yy}\dot{\theta} \\ \dot{\psi}I_{xx}\dot{\phi} - \dot{\phi}I_{zz}\dot{\psi} \\ \dot{\phi}I_{yy}\dot{\theta} - \dot{\theta}I_{xx}\dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}J_r\Omega_r \\ -\dot{\phi}J_r\Omega_r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l\,U_2 \\ l\,U_3 \\ U4 \end{bmatrix}$$

J_r rotors' inertia

Ω_r rotors' relative speed $\Omega_r = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4$

5. State Space Model

- Rotational Equations of Motion

➢ 이전 장에서 구한 식을 각가속도에 관해서 정리하면 아래와 같다.

$$\ddot{\phi} = \frac{l}{I_{xx}}U_2 - \frac{J_r}{I_{xx}}\dot{\theta}\Omega_r + \frac{I_{yy}}{I_{xx}}\dot{\psi}\dot{\theta} - \frac{I_{zz}}{I_{xx}}\dot{\theta}\dot{\psi}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{l}{I_{yy}}U_3 - \frac{J_r}{I_{yy}}\dot{\phi}\Omega_r + \frac{I_{zz}}{I_{yy}}\dot{\phi}\dot{\psi} - \frac{I_{xx}}{I_{yy}}\dot{\psi}\dot{\phi}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_{zz}}U_4 + \frac{I_{xx}}{I_{zz}}\dot{\theta}\dot{\phi} - \frac{I_{yy}}{I_{zz}}\dot{\phi}\dot{\theta}$$

➢ 식은 간단히 하기 위해 아래와 같이 정리한다.

$$a_1 = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}$$

$$a_2 = \frac{J_r}{I_{xx}} \qquad b_1 = \frac{l}{I_{xx}}$$

$$a_3 = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \qquad b_2 = \frac{l}{I_{yy}}$$

$$a_4 = \frac{J_r}{I_{yy}} \qquad b_3 = \frac{l}{I_{zz}}$$

$$a_5 = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}$$

➢ 변수를 각각 상응하는 것으로 바꾸고 정리하면
각가속도에 대한 최종 수식은 아래와 같다.

definition of $a_1 \rightarrow a_5$ and $b_1 \rightarrow b_3$

$x_1 \rightarrow x_6$ $\phi,\ \dot{\phi},\ \theta,\ \dot{\theta},\ \psi,\ \dot{\psi}$

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{\phi} &= b_1U_2 - a_2x_4\Omega_r + a_1x_4x_6 \\ \ddot{\theta} &= b_2U_3 + a_4x_2\Omega_r + a_3x_2x_6 \\ \ddot{\psi} &= b_3U_4 + a_5x_2x_4 \end{aligned}}$$

5. State Space Model

- Translational Equation of Motion

➢ 추력에 관해 재정의를 하자.

$$F_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -U_1 \end{bmatrix} \qquad m\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\phi s\theta & s\phi s\psi + c\phi c\psi s\theta \\ c\theta s\psi & c\theta c\psi + s\phi s\psi s\theta & c\phi s\psi s\theta - c\psi s\theta \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -U_1 \end{bmatrix}$$

$$m\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (s\phi s\psi + c\phi c\psi s\theta)(-U_1) \\ (c\phi s\psi s\theta - c\psi s\phi)(-U_1) \\ (c\phi c\theta)(-U_1) \end{bmatrix}$$

$$\ddot{x} = \frac{-U_1}{m}(\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi\sin\theta)$$

$$\ddot{y} = \frac{-U_1}{m}(\cos\phi\sin\psi\sin\theta - \cos\psi\sin\phi)$$

$$\ddot{z} = g - \frac{U_1}{m}(\cos\phi\cos\theta)$$

5. State Space Model

• Translational Equation of Motion

➢ 이전 장의 추력에 관해 재정의된 식을 가속도에 관해서 다시 정리해보자.

$$\ddot{x} = \frac{-U_1}{m}(\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi\sin\theta)$$
$$\ddot{y} = \frac{-U_1}{m}(\cos\phi\sin\psi\sin\theta - \cos\psi\sin\phi)$$
$$\ddot{z} = g - \frac{U_1}{m}(\cos\phi\cos\theta)$$

$\xrightarrow{\text{State 변수 X}}$

$$\ddot{x} = \frac{-U_1}{m}(\sin x_1\sin x_5 + \cos x_1\cos x_5\sin x_3)$$
$$\ddot{y} = \frac{-U_1}{m}(\cos x_1\sin x_5\sin x_3 - \cos x_5\sin x_1)$$
$$\ddot{z} = g - \frac{U_1}{m}(\cos x_1\cos x_3)$$

5. State Space Model

- State space Representation

➢ 지금까지 정리한 모든 식을 상태 공간 표현으로 된 Quadrotor의 완전한 수학적인 모델은 아래와 같다.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{\phi} = x_2 \\
\dot{x}_2 &= \ddot{\phi} = x_4 x_6 a_1 - x_4 \Omega_r a_2 + b_1 U_2 \\
\dot{x}_3 &= \dot{\theta} = x_4 \\
\dot{x}_4 &= \ddot{\theta} = x_2 x_6 a_3 + x_2 \Omega_r a_4 + b_2 U_3 \\
\dot{x}_5 &= \dot{\psi} = x_6 \\
\dot{x}_6 &= \ddot{\psi} = x_2 x_4 a_5 + b_3 U_4 \\
\dot{x}_7 &= \dot{z} = x_8 \\
\dot{x}_8 &= \ddot{z} = g - \frac{U_1}{m}(\cos x_1 \cos x_3) \\
\dot{x}_9 &= \dot{x} = x_{10} \\
\dot{x}_{10} &= \ddot{x} = \frac{-U_1}{m}(\sin x_1 \sin x_5 + \cos x_1 \sin x_3 \cos x_5) \\
\dot{x}_{11} &= \dot{y} = x_{12} \\
\dot{x}_{12} &= \ddot{y} = \frac{U_1}{m}(\sin x_1 \cos x_5 - \cos x_1 \sin x_3 \sin x_5)
\end{aligned}
$$

$$
f(X,U) = \begin{array}{c}
\left[\begin{array}{c}
x_2 \\
x_4 x_6 a_1 - x_4 \Omega_r a_2 + b_1 U_2 \\
x_4 \\
x_2 x_6 a_3 + x_2 \Omega_r a_4 + b_2 U_3 \\
x_6 \\
x_2 x_4 a_5 + b_3 U_4 \\
x_8 \\
g - \frac{U_1}{m}(\cos x_1 \cos x_3) \\
x_{10} \\
\frac{-U_1}{m}(\sin x_1 \sin x_5 + \cos x_1 \sin x_3 \cos x_5) \\
x_{12} \\
\frac{U_1}{m}(\sin x_1 \cos x_5 - \cos x_1 \sin x_3 \sin x_5)
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c}
\dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{y}
\end{array}
$$

6. Linear Model

- 지금까지 해온 일련의 식들을 나타내보자.

$$\mathbf{x} = [\phi \quad \theta \quad \psi \quad p \quad q \quad r \quad u \quad v \quad w \quad x \quad y \quad z]^T \in \mathbb{R}^{12}$$

$$\dot{\phi} = p + r[c(\phi)t(\theta)] + q[s(\phi)t(\theta)]$$
$$\dot{\theta} = q[c(\phi)] - r[s(\phi)]$$
$$\dot{\psi} = r\frac{c(\phi)}{c(\theta)} + q\frac{s(\phi)}{c(\theta)}$$
$$\dot{p} = \frac{I_y - I_z}{I_x} rq + \frac{\tau_x + \tau_{wx}}{I_x}$$
$$\dot{q} = \frac{I_z - I_x}{I_y} pr + \frac{\tau_y + \tau_{wy}}{I_y}$$
$$\dot{r} = \frac{I_x - I_y}{I_z} pq + \frac{\tau_z + \tau_{wz}}{I_z}$$
$$\dot{u} = rv - qw - g[s(\theta)] + \frac{f_{wx}}{m}$$
$$\dot{v} = pw - ru + g[s(\phi)c(\theta)] + \frac{f_{wy}}{m}$$
$$\dot{w} = qu - pv + g[c(\theta)c(\phi)] + \frac{f_{wz} - f_t}{m}$$
$$\dot{x} = w[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)] - v[c(\phi)s(\psi) - c(\psi)s(\phi)s(\theta)] + u[c(\psi)c(\theta)]$$
$$\dot{y} = v[c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\psi)s(\theta)] - w[c(\psi)s(\phi) - c(\phi)s(\psi)s(\theta)] + u[c(\theta)s(\psi)]$$
$$\dot{z} = w[c(\phi)c(\theta)] - u[s(\theta)] + v[c(\theta)s(\phi)]$$

$$\ddot{x} = -\frac{f_t}{m}[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)]$$
$$\ddot{y} = -\frac{f_t}{m}[c(\phi)s(\psi)s(\theta) - c(\psi)s(\phi)]$$
$$\ddot{z} = g - \frac{f_t}{m}[c(\phi)c(\theta)]$$

$$\ddot{x} = -\frac{f_t}{m}[s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta)]$$
$$\ddot{y} = -\frac{f_t}{m}[c(\phi)s(\psi)s(\theta) - c(\psi)s(\phi)]$$
$$\ddot{z} = g - \frac{f_t}{m}[c(\phi)c(\theta)]$$

$$\ddot{\phi} = \frac{I_y - I_z}{I_x}\dot{\theta}\dot{\psi} + \frac{\tau_x}{I_x}$$
$$\ddot{\theta} = \frac{I_z - I_x}{I_y}\dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{\tau_y}{I_y}$$
$$\ddot{\psi} = \frac{I_x - I_y}{I_z}\dot{\phi}\dot{\theta} + \frac{\tau_z}{I_z}$$

6. Linear Model

- 삼각 함수가 서로 관련이 없으므로 폐쇄 형으로 찾기가 어렵다. 이러한 이유로 선형화는 small oscillation 으로 불리는 단순화 된 모델로 바꿔야 한다. 이 단순화는 sine 함수를 인수(θ)로, cosine 함수를 1로 근사해서 만든다. 근사값은 인수(θ)가 작은 경우 유효합니다. 결과 시스템에 해당하는 방정식은 아래와 같다.

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi} &\approx p + r\theta + q\phi\theta \\
\dot{\theta} &\approx q - r\phi \\
\dot{\psi} &\approx r + q\phi \\
\dot{p} &\approx \tfrac{I_y - I_z}{I_x} rq + \tfrac{\tau_x + \tau_{wx}}{I_x} \\
\dot{q} &\approx \tfrac{I_z - I_x}{I_y} pr + \tfrac{\tau_y + \tau_{wy}}{I_y} \\
\dot{r} &\approx \tfrac{I_x - I_y}{I_z} pq + \tfrac{\tau_z + \tau_{wz}}{I_z} \\
\dot{u} &\approx rv - qw - g\theta + \tfrac{f_{wx}}{m} \\
\dot{v} &\approx pw - ru + g\phi + \tfrac{f_{wy}}{m} \\
\dot{w} &\approx qu - pv + g + \tfrac{f_{wz} - f_t}{m} \\
\dot{x} &\approx w(\phi\psi + \theta) - v(\psi - \phi\theta) + u \\
\dot{y} &\approx v(1 + \phi\psi\theta) - w(\phi - \psi\theta) + u\psi \\
\dot{z} &\approx w - u\theta + v\phi
\end{aligned}
$$

$$
\longrightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \xrightarrow{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{d}}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi} &= p \\
\dot{\theta} &= q \\
\dot{\psi} &= r \\
\dot{p} &= \tfrac{\tau_x + \tau_{wx}}{I_x} \\
\dot{q} &= \tfrac{\tau_y + \tau_{wy}}{I_y} \\
\dot{r} &= \tfrac{\tau_z + \tau_{wz}}{I_z} \\
\dot{u} &= -g\theta + \tfrac{f_{wx}}{m} \\
\dot{v} &= g\phi + \tfrac{f_{wy}}{m} \\
\dot{w} &= \tfrac{f_{wz} - f_t}{m} \\
\dot{x} &= u \\
\dot{y} &= v \\
\dot{z} &= w
\end{aligned}
$$

6. Linear Model

➢ 선형화 방법은 평형점을 찾아서 행렬 미분을 한 후 더해야 한다.

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{12} \quad \bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} mg & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4. \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} f_{wx} & f_{wy} & f_{wz} & \tau_{wx} & \tau_{wy} & \tau_{wz} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^6$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{d}}$$

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Quadrotor Parameters

- quadrotors inertia

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{2MR^2}{5} + 2l^2 m_r$$

$$I_{zz} = \frac{2MR^2}{5} + 4l^2 m_r$$

$$I_{xx} = I_{yy} = 0.0325325 \; kg/m^2$$

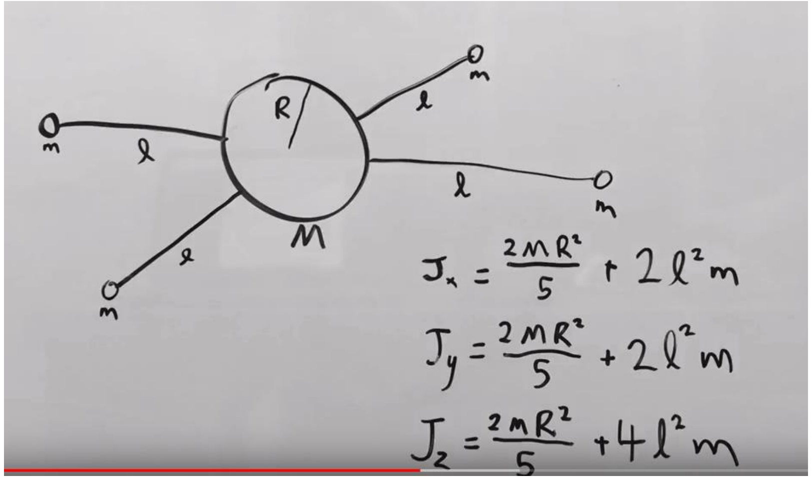
$$I_{zz} = 0.057845 \; kg/m^2$$

M 은 멀티로터 무게 : 약 2kg (배터리 제외, 포함 2.677kg)

R 은 멀티로터 중심 반지름 : 18.945cm/2 (약 0.095m)

L은 기체 팔의 길이 : 22.5cm (약 0.225m)

m 은 로터 하나의 무게 : 148g + 104g (약 0.25kg - esc를 모터 밑에 달아둠)



7. Quadrotor Parameters

➢ Drag Force / Thrust

관성 모멘트

$$M_i = \boxed{\frac{1}{2}\rho A C_D r^2}\Omega_i^2 \quad = K_M \Omega_i^2$$

$$Drag\ Force = \frac{1}{2}\rho V^2 A C_d$$

Where,

- ρ = 1.225 (Density of air, kg/m^3)
- $A = \pi r^2$ (Area Swept by the propeller, m^2)
- r = 0.0635 (Radius of the propeller blade, m)
- C_d = 1.3 (Coefficient of drag)
- V (Velocity of the air swept by the propeller blade, m/s^2) for the velocity of the air, I consider V is equal to the Angular velocity of the motor

$$F = \boxed{1.225}\boxed{\frac{\pi(0.0254 \cdot d)^2}{4}}\left(RPM_{prop} \cdot \boxed{0.0254 \cdot pitch} \cdot \frac{1min}{60sec}\right)^2 \boxed{\left(\frac{d}{3.29546 \cdot pitch}\right)^{1.5}}$$

$$r_d = 0.09525 \left(propeller\ diam\ 15in \ \rightarrow 0.0254 * \frac{15}{2}, m\right)$$

$$r_p = 0.06604 \left(pitch\ 5.2in \ \rightarrow 0.0254 * \left(\frac{5.2}{2}\right), m\right)$$

MTM = 0.62m

공기역학의 Momnets
= 상수 (프로펠러에 의해 고정값)

Thrust

$$F_i = \boxed{\frac{1}{2}\rho A C_T r^2}\Omega_i^2 \quad = K_f \Omega_i^2$$

$$T = \frac{1}{2}\rho C_D A V^2$$

ρ – 1.225 * 10^3 g/m^3 (density of air)

Thrust co-efficient, Cl = 1.5 Ns^2

V – Angular Velocity of the model, determined from the motor dynamics

A – Top Area of the Quadcopter, the formula is given below

$$A = \frac{1}{2}(MTM)^2 + 3 * \pi * r_{prop}^2$$

MTM – Motor to Motor Distance

R_{prop} – Radius of Propeller

Using the 250 FPV Racing Quad, MTM = 0.255 m

When we use 5 inch propeller, r = 0.0635 m

$$k_m = \frac{1}{2} * 1.225 * \pi * (0.09525)^2 * 1.3 * (0.06604)^2 = 9.834895862920147 \times 10^{-5}\ (N \cdot s^2)$$

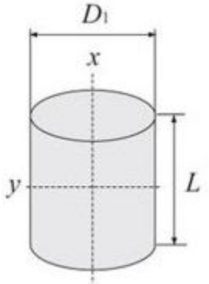
$$k_f = \frac{1}{2} * 1.225 * 1.5 * \left(\frac{1}{2}(0.62)^2 + 3 * \pi * (0.09525)^2\right) * (0.06604)^2 = 1.112751355 \times 10^{-3}\ (N \cdot s^2)$$

7. Quadrotor Parameters

- Motor inertia.

$$Jx = \frac{1}{8} m D_1^2 = \frac{\pi}{32} \rho L D_1^4$$

$$Jy = \frac{1}{4} m \left(\frac{D_1^2}{4} + \frac{L^2}{3} \right)$$



Jx : Inertia on x axis
Jy : Inertia on y axis
m : Mass
D_1 : Outer diameter
ρ : Density
L : Length

$$J_s = 38.8\times10^{-7}\ \text{kg-m}^2$$

$$J_L = m\times\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 = 9\ \text{kg}\times\left(\frac{0.02032\ \text{m}}{2\pi}\right)^2 = 9.42\times10^{-5}\,\text{kg-m}^2$$

$$J_T = J_s + J_L = 38.8\times10^{-7}\ \text{kg-m}^2 + 9.42\times10^{-5}\ \text{kg-m}^2 = 9.81\times10^{-5}\ \text{kg-m}^2$$

D_1 = 0.046m
m = 0.148kg
L = 0.032m
ρ = m / ($\pi(\frac{D_1}{2})^2$ * L)

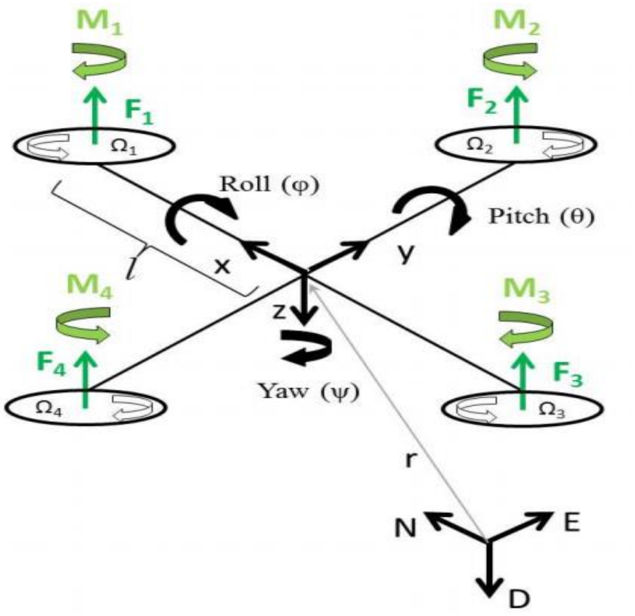
$$J_x = 3.9146 \times 10^{-5} kg \cdot m^2$$

$$J_y = 3.46976 \times 10^{-4} kg \cdot m^2$$

$$J_x + J_y = J_r = 4.3136224 \times 10^{-5} kg \cdot m^2$$

8. Quadrotor Model Summary

- Quad-rotor 동역학



Inertia frame		Body frame
(1) $p = [\, x \; y \; z \,]^T$	$\overset{R}{\leftrightarrow}$	$v = [v_x \; v_y \; v_z]^T$
(2) $\eta = [\emptyset \; \theta \; \varphi]^T$	$\overset{T}{\leftrightarrow}$	$\omega = [\omega_x \; \omega_y \; \omega_z]^T$

(1) 표현은 관성 좌표계에서의 위치(p) 와 기체 좌표계에서의 속도(v)의 관계를 나타낸다.

(2) 표현은 관성 좌표계에서의 오일러 각(η)과 기체 좌표계에서의 각속도(ω)의 관계를 나타낸다.

$$\dot{p} = Rv \quad , \qquad \omega = c\,\dot{\eta}$$

위의 식은 (1)과 (2)의 관계를 식으로 표현한 것이다.

8. Quadrotor Model Summary

➢ Rotation matrix

R은 관성좌표계를 기체 좌표계로 회전변환 하는 행렬로 다음과 같이 정의한다.

$$R_x(\emptyset) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\emptyset & -sin\emptyset \\ 0 & sin\emptyset & cos\emptyset \end{bmatrix}, \; R_y\theta = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix}, \; R_z(\varphi) = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\phi)$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$

8. Quadrotor Model Summary

➢ Rotation matrix

C은 관성좌표계의 오일러 각을 기체 좌표계의 각속도의 벡터간의 관계를 행렬로 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\phi)\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\psi}\end{bmatrix}+\mathbf{R}_z(\psi)\begin{bmatrix}0\\\dot{\theta}\\0\end{bmatrix}+\mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta)\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\0\\0\end{bmatrix}+\mathbf{R}_x^T(\phi)\begin{bmatrix}0\\\dot{\theta}\\0\end{bmatrix}+\mathbf{R}_x^T(\phi)\mathbf{R}_y^T(\theta)\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\psi}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}=\mathbf{C}\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\\dot{\theta}\\\dot{\psi}\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\theta\\0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta\\0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}$$

8. Quadrotor Model Summary

➢ 앞 장에서의 도출한 식을 미분하여 다시 정리

관성 좌표계 가속도

$$\dot{p} = Rv$$

$$\ddot{p} = R\dot{v} + \dot{R}v$$

기체 좌표계 가속도

$$\omega = c\,\dot{\eta}$$

$$\dot{\omega} = C\ddot{\eta} + \dot{C}\dot{\eta}$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\emptyset & s\emptyset c\theta \\ 0 & -s\emptyset & c\emptyset c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\emptyset} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\dot{C} = \left(\frac{\partial C}{\partial \emptyset}\dot{\emptyset} + \frac{\partial C}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial C}{\partial \varphi}\dot{\varphi}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\theta}c\theta \\ 0 & -\dot{\emptyset}s\emptyset & \dot{\emptyset}c\emptyset c\theta - \theta s\dot{\emptyset}s\theta \\ 0 & -\dot{\emptyset}c\emptyset & -\dot{\emptyset}s\emptyset c\theta - \dot{\theta}c\emptyset s\theta \end{bmatrix}$$

8. Quadrotor Model Summary

➢ 뉴턴의 제 2법칙 (기체에 작용하는 힘과 모멘트의 보존법칙을 이용한 식 유도 1)

(1) $$m\dot{v} + \omega \times (mv) = F + F_g$$

(2) $$I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega) = M - M_g$$

(1) m 은 기체의 질량, I는 기체의 관성모멘트이다. $m\dot{v}$ 는 가속도에 의한 힘, $\omega \times (mv)$ 는 구심력이다.

(2) 이 식은 모멘트에 관한 오일러 방정식이다.

쿼드로터는 선대칭적으로 설계하기 때문에 관성 모멘트는 아래와 같고, $I_{xx} = I_{yy}$ 이다.

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

8. Quadrotor Model Summary

➢ 뉴턴의 제 2법칙 (기체에 작용하는 힘과 모멘트의 보존법칙을 이용한 식 유도 2)

(1) $m\dot{v} + \omega \times (mv) = F + F_g$

(2) $I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega) = M - M_g$

(1) 식에서 F_g는 기체에 작용하는 중력으로 기체 좌표계에서 표시되어야 한다. 그렇다면, 관성 좌표계에서의 중력 벡터 ($g^o = [0 \ \ 0 \ \ g]^T, g = 9.8$)를 기체 좌표계로 회전시켜야 한다.

$F_g = mR^T g^o$ ($R^T = R^{-1}$) 로 식을 바꿀 수 있다.

(2) 식에서 M_g는 자이로 이펙트로, 기체에 있는 모터 4개의 로터 각속도 Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , Ω_4로부터 아래와 같이 정의된다.

$$M_g = \omega \times I_R \, \Omega_G$$

이 식에서 I_R는 로터의 관성 모멘트이고, $\Omega_G = [0 \quad 0 \quad \Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4]$ 이다.

다시 F와 M은 기체의 제어를 위해서 가해주는 힘과 모멘트로, 모터 4개의 각속도와는 아래와 같은 관계로 표현된다.

$$F = [0 \quad 0 \quad F_1 + F_2 + F_3 + F_4]^T$$

$$M = [l(F_4 - F_2) \quad l(F_3 - F_1) \quad M_1 - M_2 + M_3 - M_4]^T$$

8. Quadrotor Model Summary

➢ 뉴턴의 제 2법칙 (기체에 작용하는 힘과 모멘트의 보존법칙을 이용한 식 유도 3)

$$F = [0 \quad 0 \quad F_1 + F_2 + F_3 + F_4]^T$$

$$M = [l(F_4 - F_2) \quad l(F_3 - F_1) \quad M_1 - M_2 + M_3 - M_4]^T$$

$F_i = K_t {\Omega_i}^2 \quad M_i = K_d {\Omega_i}^2$ 이다.

l은 로터와 기체의 중심사이의 거리이고 K_t, K_d는 I번째 로터의 각속도 Ω_i와 관계되는 thrust와 torque의 상관계수이다.

이제 마무리로, 관성 좌표계에서 기체의 가속도에 대한 식을 유도하면

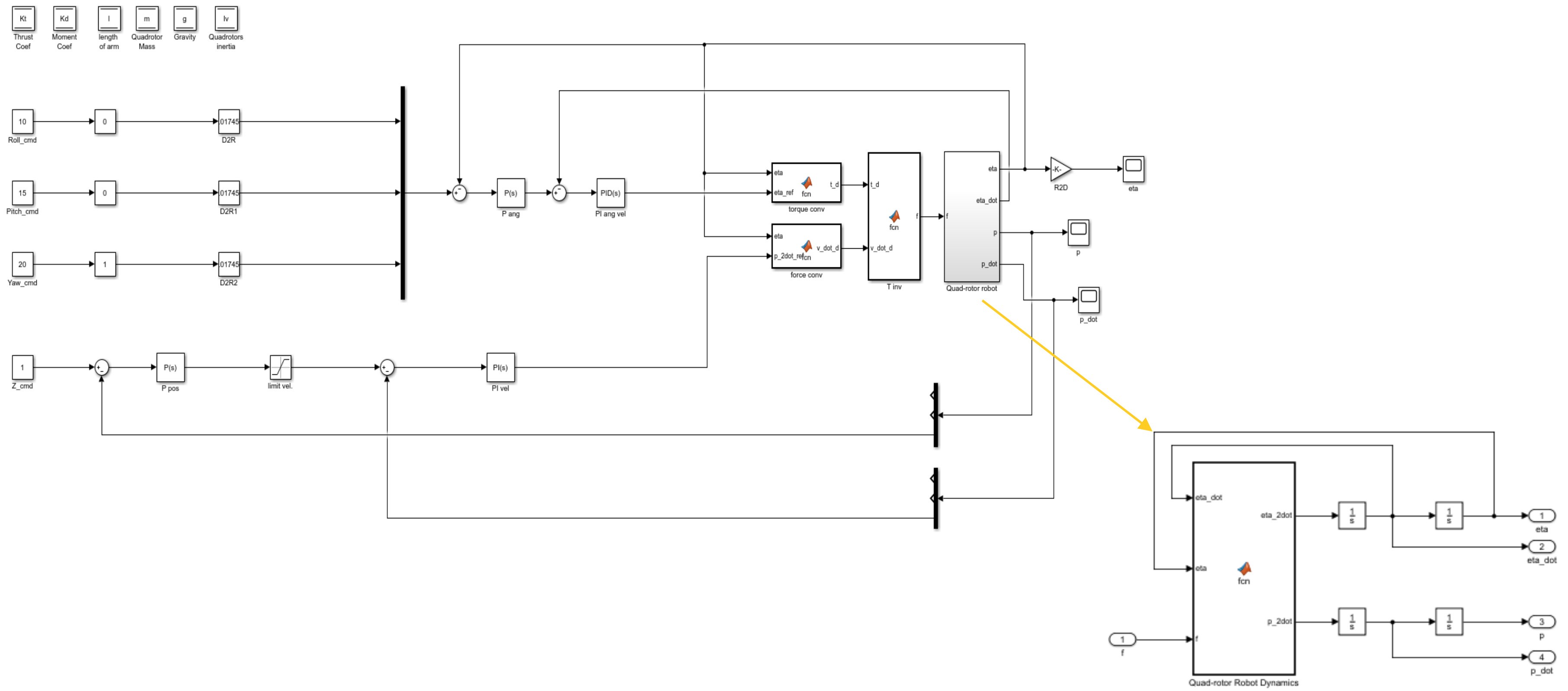
$$mR^T\ddot{p} = F + mR^T g^o \quad \rightarrow \quad \ddot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{g^o} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{RF}$$

또한, 관성 좌표계에서 기체의 각가속도에 대한 식은 다음과 같이 유도된다.

$$I\left(C\ddot{\eta} + \dot{C}\dot{\eta}\right) + C\dot{\eta} \times (IC\dot{\eta}) = M - C\dot{\eta} \times I_R\Omega_G \quad \rightarrow \quad \ddot{\eta} = (\boldsymbol{IC})^{-1}(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{I\dot{C}}\dot{\eta} - \boldsymbol{C}\dot{\eta} \times (\boldsymbol{IC}\dot{\eta} + \boldsymbol{I_R\Omega_G}))$$

9. Using matlab for Quadrotor Control

➢ Quadrotor 제어 설계



9. Using matlab for Quadrotor Control

- Quadrotor 제어 코드 블럭

torque conv

```
function t_d = fcn(eta, eta_ref)

global Iv;

sphi = sin(eta(1,1));
cphi = cos(eta(1,1));
stht = sin(eta(2,1));
ctht = cos(eta(2,1));
spsi = sin(eta(3,1));
cpsi = cos(eta(3,1));

C = [1   0     -stht;
     0   cphi  sphi*ctht;
     0   -sphi cphi*ctht];

t_d = Iv*C*eta_ref;
```

In some papers, the second term of the right side of the above equation $\boxed{I^{-1}(I\vec{\omega})\wedge\vec{\omega}}$ is $\boxed{\text{neglected}}$ [8], [19]. This approximation can be made by assuming that:

- ✓ the angular rate about the z axis, r, is small enough to be neglected
- ✓ $I_{xx} = I_{yy}$

$$M = I(C\ddot{\eta} + \cancel{\dot{C}\dot{\eta}}) + \cancel{C\dot{\eta} \times (IC\dot{\eta})}$$

$$\underline{\boldsymbol{M = IC\ddot{\eta}}}$$

지운 부분은 위 조건을 만족시에 외란으로 보고 무시가 가능하다.

저기에 대한 자세한 이유는 논문을 참고해야 함.

9. Using matlab for Quadrotor Control

➢ Quadrotor 제어 코드 블록

```
function v_dot_d = fcn(eta, p_2dot_ref)

sphi = sin(eta(1,1));
cphi = cos(eta(1,1));
stht = sin(eta(2,1));
ctht = cos(eta(2,1));
spsi = sin(eta(3,1));
cpsi = cos(eta(3,1));

R = [cpsi*ctht cpsi*stht*sphi-spsi*cphi cpsi*stht*cphi+spsi*sphi;
     spsi*ctht spsi*stht*sphi+cpsi*cphi spsi*stht*cphi-cpsi*sphi;
     -stht     ctht*sphi                ctht*cphi];

u = [0; 0; p_2dot_ref(1,1)];
d = R'*u;

v_dot_d = d(3,1);
```

$$\dot{p} = Rv$$

$$\ddot{p} = R\dot{v} + \cancel{\dot{R}v}$$

$$\underline{\boldsymbol{\dot{v} = R^{-1}\ddot{p}}}$$

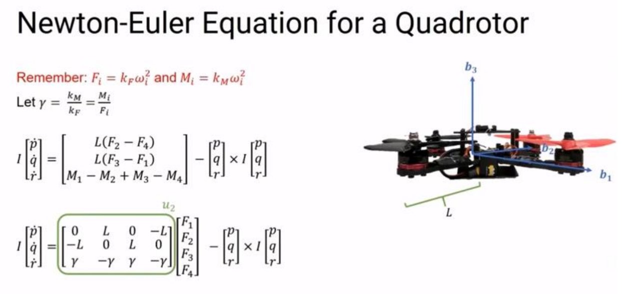
지운 부분은 외란으로 보고 무시가 가능하다.

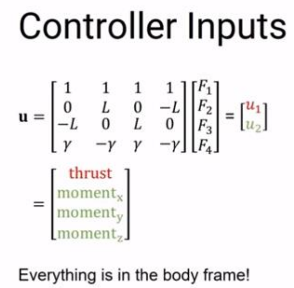
저기에 대한 자세한 이유는 논문을 참고해야 함.

9. Using matlab for Quadrotor Control

➢ Quadrotor 제어 코드 블록

```
function f = fcn(t_d, v_dot_d)

global Kt Kd l m

r = Kd / Kt;

T = [1/m  1/m  1/m  1/m;
     0    -l   0    l;
     -l   0    l    0;
     r    -r   r    -r];

u = [v_dot_d(1,1); t_d(1,1); t_d(2,1); t_d(3,1)];

f = inv(T)*u;

% limits min and max force from rotor
% because motor can't make unlimited force
min_f = 0;
max_f = 10;

if (f(1,1) < min_f) f(1,1) = min_f; end
if (f(2,1) < min_f) f(2,1) = min_f; end
if (f(3,1) < min_f) f(3,1) = min_f; end
if (f(4,1) < min_f) f(4,1) = min_f; end

if (f(1,1) > max_f) f(1,1) = max_f; end
if (f(2,1) > max_f) f(2,1) = max_f; end
if (f(3,1) > max_f) f(3,1) = max_f; end
if (f(4,1) > max_f) f(4,1) = max_f; end
```





위의 자료를 참고하면

입력과 모터의 추력에 관한 관계를 세울 수 있다.

$$u = Tf$$

$$\underline{\boldsymbol{f = T^{-1}u}}$$

9. Using matlab for Quadrotor Control

➢ Quadrotor 동역학 블록

```
function [eta_2dot, p_2dot] = fcn(eta_dot, eta, f)

global Kt Kd l m g Iv;

phi_dot = eta_dot(1,1);
theta_dot = eta_dot(2,1);
psi_dot = eta_dot(3,1);

sphi = sin(eta(1,1));
cphi = cos(eta(1,1));
stht = sin(eta(2,1));
ctht = cos(eta(2,1));
spsi = sin(eta(3,1));
cpsi = cos(eta(3,1));

R = [cpsi*ctht cpsi*stht*sphi-spsi*cphi cpsi*stht*cphi+spsi*sphi;
     spsi*ctht spsi*stht*sphi+cpsi*cphi spsi*stht*cphi-cpsi*sphi;
     -stht      ctht*sphi                 ctht*cphi];

C = [1 0      -spsi;
     0 cphi   sphi*ctht;
     0 -sphi  cphi*ctht];

C_dot = [0 0              -theta_dot*ctht;
         0 -phi_dot*sphi  phi_dot*cphi*ctht-theta_dot*sphi*stht;
         0 -phi_dot*cphi  -phi_dot*sphi*ctht-theta_dot*cphi*stht];

F1 = Kt*f(1,1);
F2 = Kt*f(2,1);
F3 = Kt*f(3,1);
F4 = Kt*f(4,1);

t1 = Kd*f(1,1);
t2 = Kd*f(2,1);
t3 = Kd*f(3,1);
t4 = Kd*f(4,1);

F = [0; 0; F1+F2+F3+F4];
Q = [l*(F4-F2); l*(F3-F1); t1-t2+t3-t4];

p_2dot = g + R*F/m;
eta_2dot = inv(Iv*C)*Q;
```

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\phi)$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\emptyset & s\emptyset c\theta \\ 0 & -s\emptyset & c\emptyset c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\emptyset} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{g^o} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{RF}$$

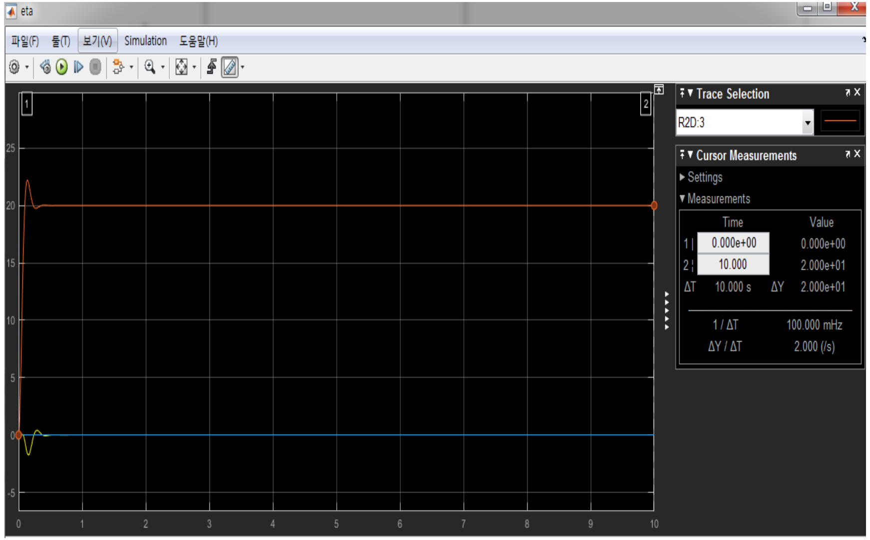
$$\ddot{\eta} = (\boldsymbol{IC})^{-1}(\boldsymbol{M})$$

이 식을 사용하여 관성 좌표계의 가속도

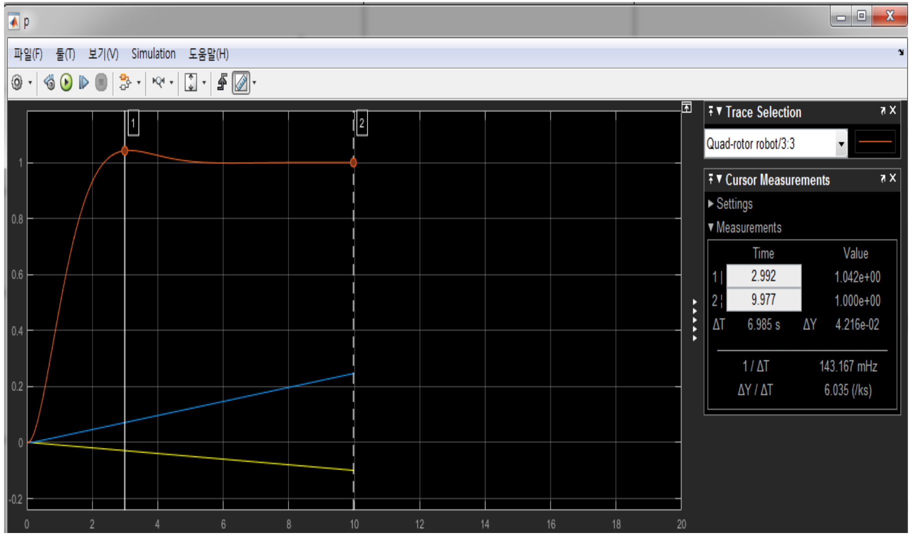
기체 좌표계의 각가속도를 구할 수 있다.

9. Using matlab for Quadrotor Control

➢ Quadrotor 제어 시뮬레이션



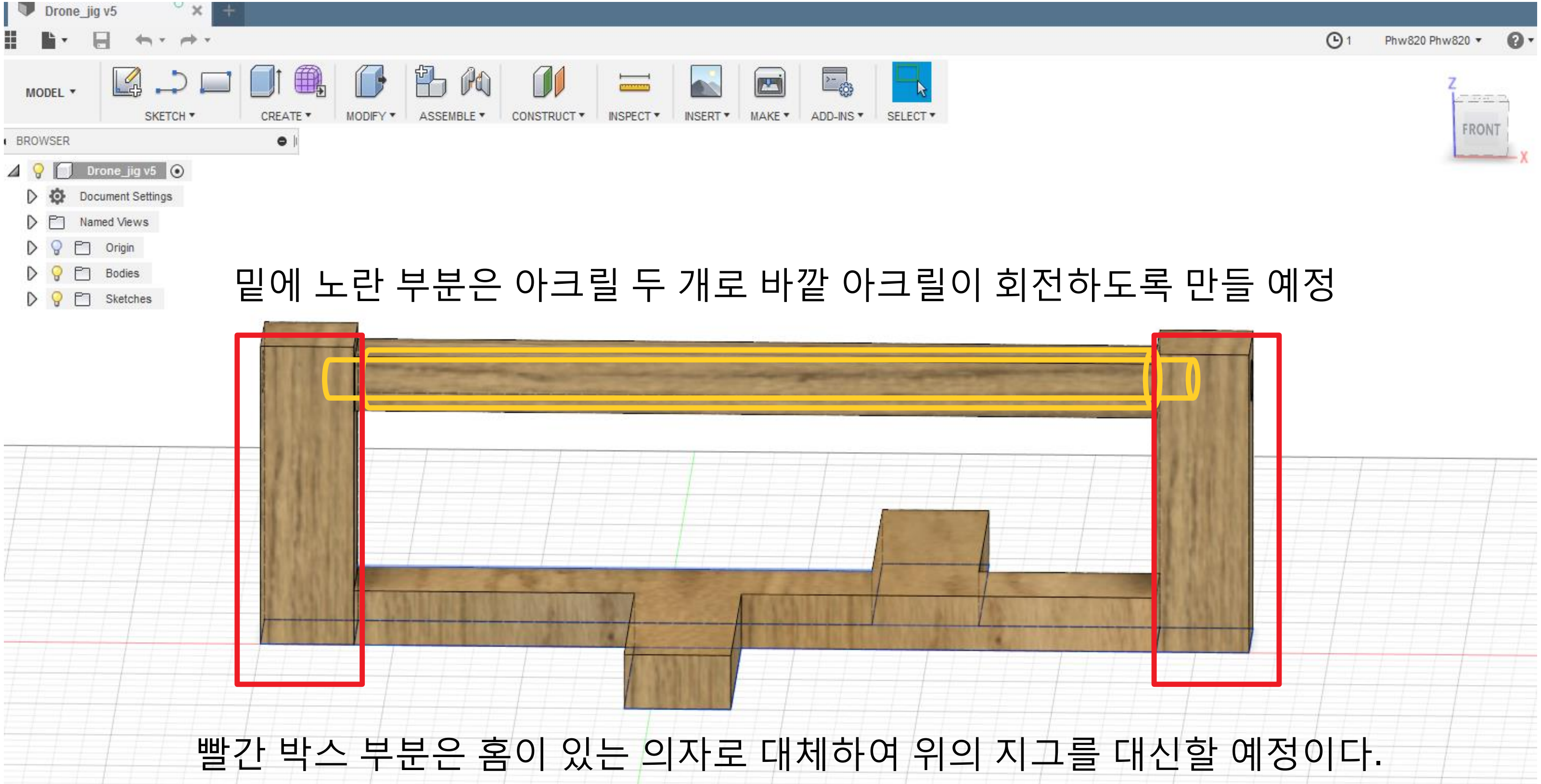
Yaw각도 제어한 시뮬레이션이다.
0.3초 이내에 20°에 도달하는 것을 볼 수 있다.



Z축을 제어한 시뮬레이션이다.
3초쯤에 1m에 근접하며 이후에 1m로 안정적으로 도달하는 것을 볼 수 있다.

10. 간단한 지그 제작

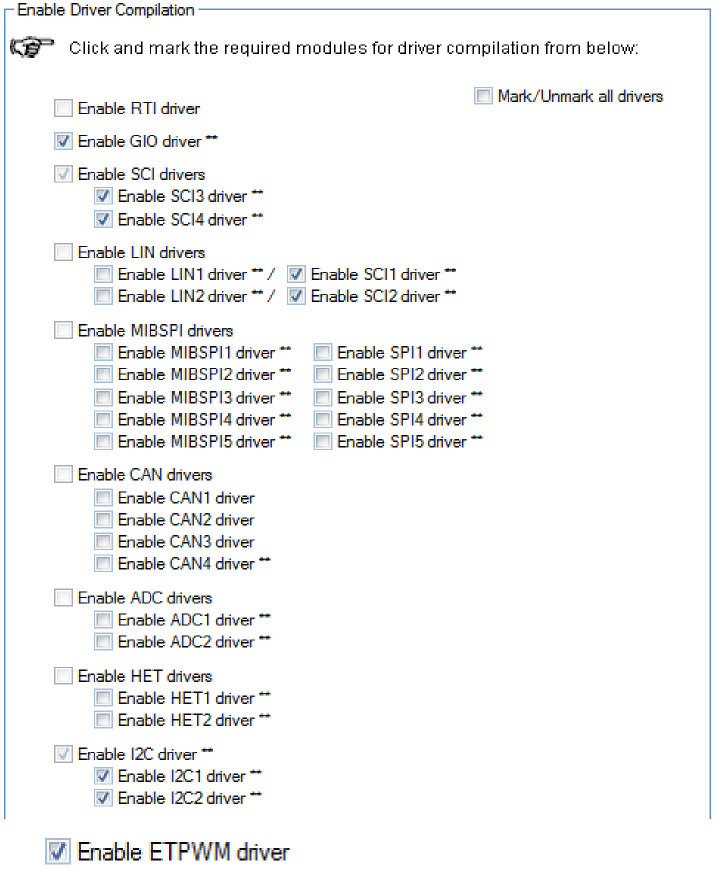
➤ 비용과 크기의 문제로 인하여 저렴한 아크릴과 의자를 이용하여 만들 예정

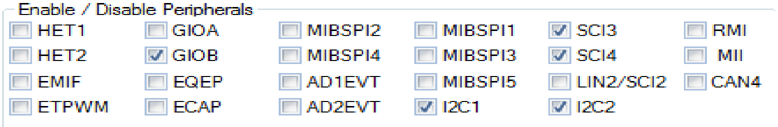


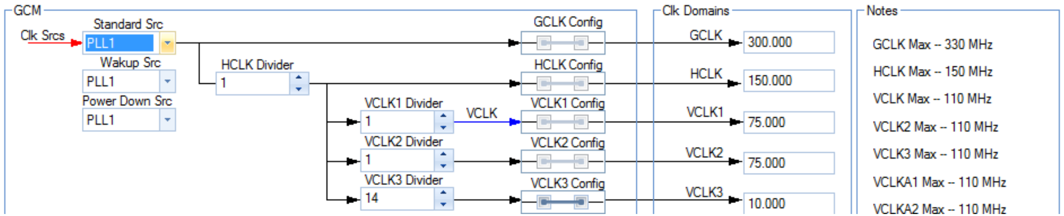
밑에 노란 부분은 아크릴 두 개로 바깥 아크릴이 회전하도록 만들 예정

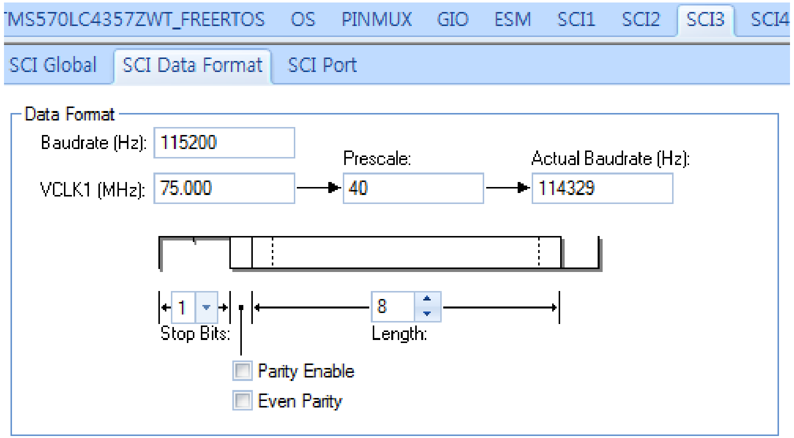
빨간 박스 부분은 홈이 있는 의자로 대체하여 위의 지그를 대신할 예정이다.

11. Halcogen 설정

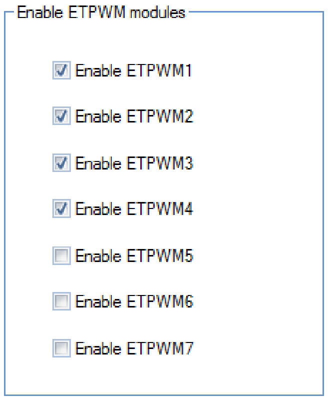


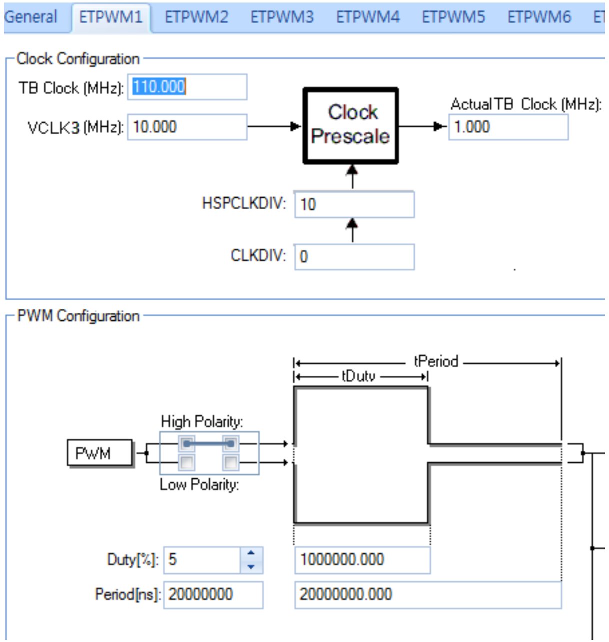


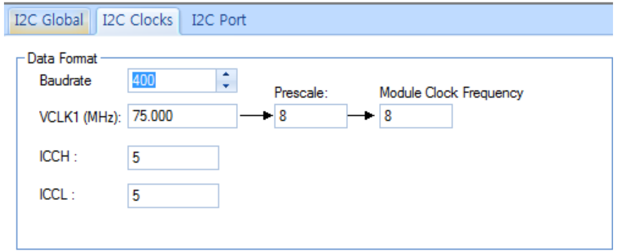




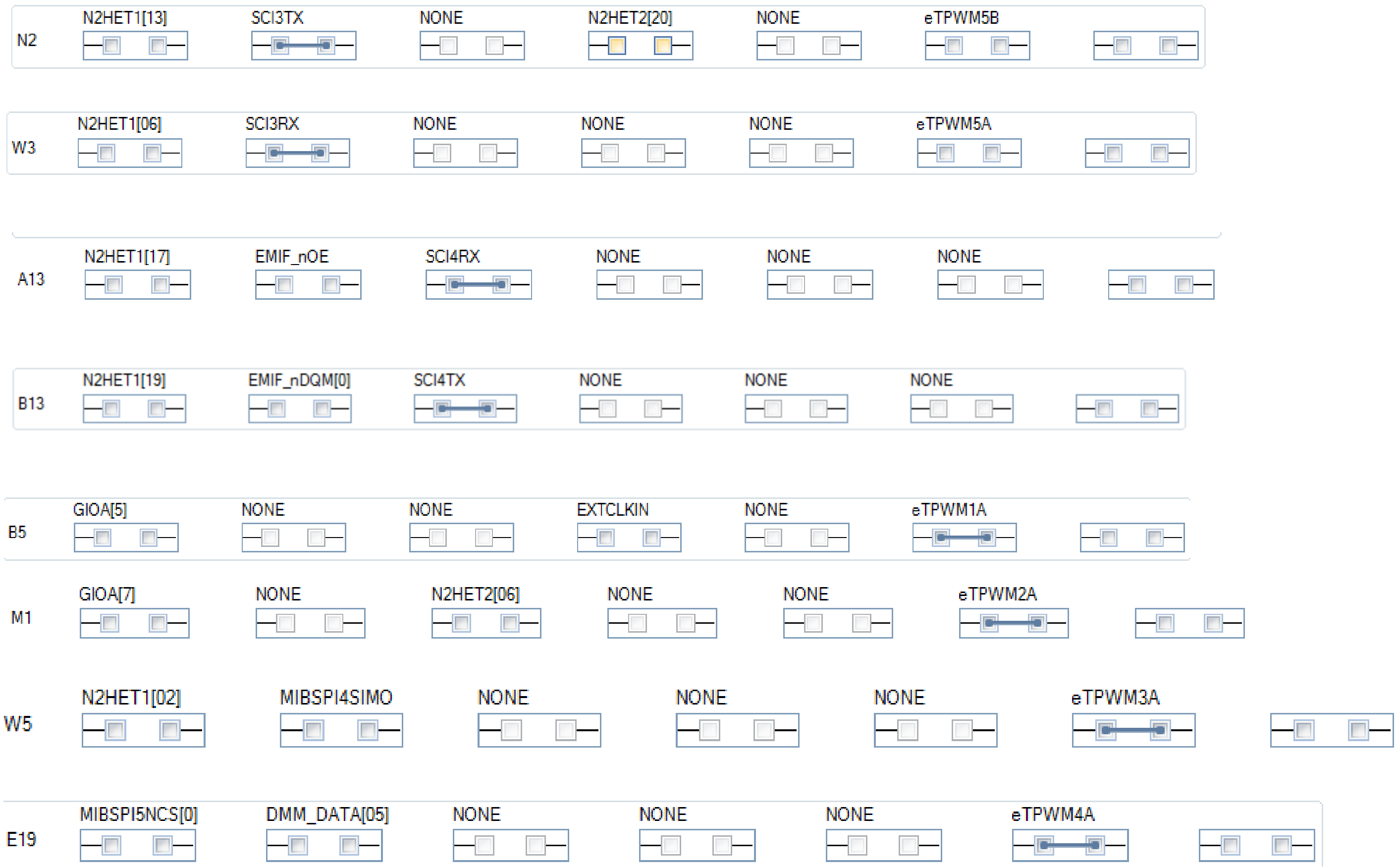
11. Halcogen 설정







11. Halcogen 설정



11. Halcogen 설정