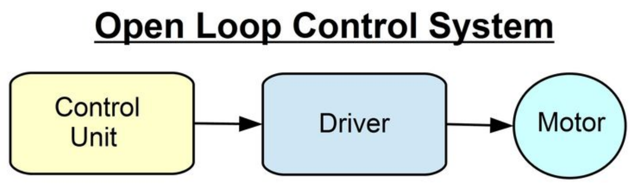
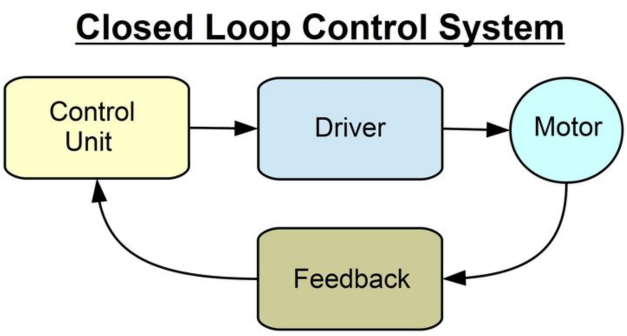
PID control

제어(control)란 제어변수(출력)을 측정하여 이 측정 값이 목표값에 가까워지도록 제어신호를 만들어 시스템에 공급하는 것을 말한다.
제어 방식은 크게 Open-loop control 과 Closed-loop control 로 나눌 수 있다.



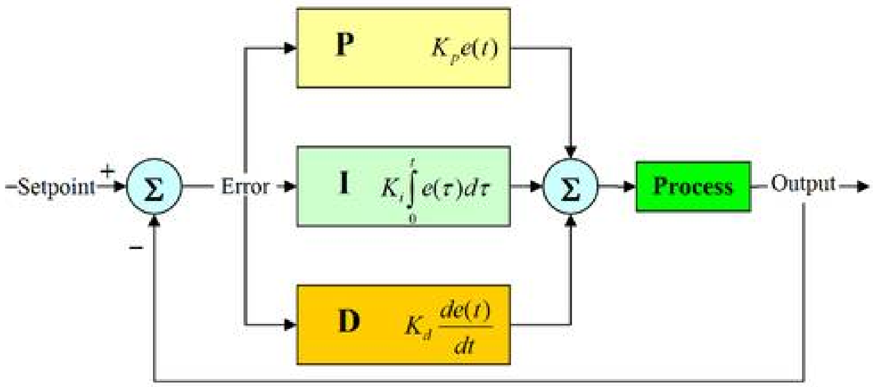
Open-loop 방식은 결과값의 피드백 없이 입력값을 넣어주면 시스템을 거쳐서 출력값이 바로 나오는 형태이다. 입력을 주었을 때 출력값을 예상할 수는 있지만 정확한 값이 출력되는지는 확인할 방법이 없어서 오차가 크게 발생할 수 있고 피드백 제어가 불가능하여 반응 속도 조절이 어렵다.



Closed-loop 방식은 입력에 대한 결과값을 지속적으로 피드백 받아서 원하는 결과값과의 오차만큼 보정해주는 형태이다.
입력을 주었을 때 출력값을 센서 등으로 피드백 받아 원하는 값이 될 때 까지 오차를 보정하는 방식이라 오차가 적고 반응 속도 조절하기가 용이하다.

따라서 Open-loop 제어 대신 Closed-loop 제어를 해야 시스템의 안정적인 PID 제어가 가능하다.

PID 제어는 제어 대상의 출력값을 측정하고 원하는 참조값과 비교하여 오차값을 얻어낸 뒤 제어값을 계산하여 원하는 반응을 만들어주는 것이 목표이다.



PID 제어는 Proportional(비례), Integral(적분), Derivative(미분) 의미하며 일반적으로 위와 같은 구조를 가지는데 이 각각의 항의 직관적인 의미는 다음과 같다.

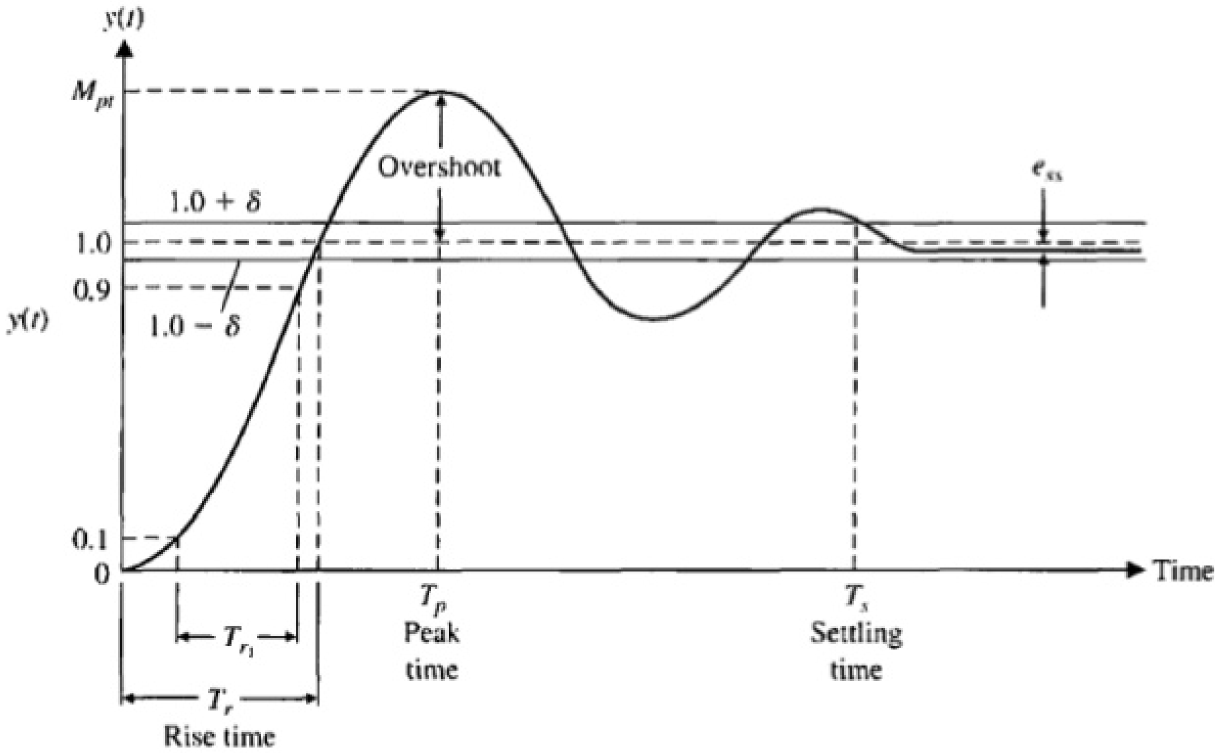
P(비례) - 현재 상태에서 오차값의 크기에 비례한 제어작용을 한다.
I(적분) – 정상상태(steady-state) 오차를 없애는 작용을 한다.
D(미분) - 출력값의 급격한 변화를 막아 오버슈트(overshoot)를 줄이고 안정성을 향상시킨다.

Effects of *increasing* a parameter independently

Parameter	Rise time	Overshoot	Settling time	Steady-state error	Stability
K_p	Decrease	Increase	Small change	Decrease	Degrade
K_i	Decrease	Increase	Increase	Eliminate	Degrade
K_d	Minor change	Decrease	Decrease	No effect in theory	Improve if K_d small

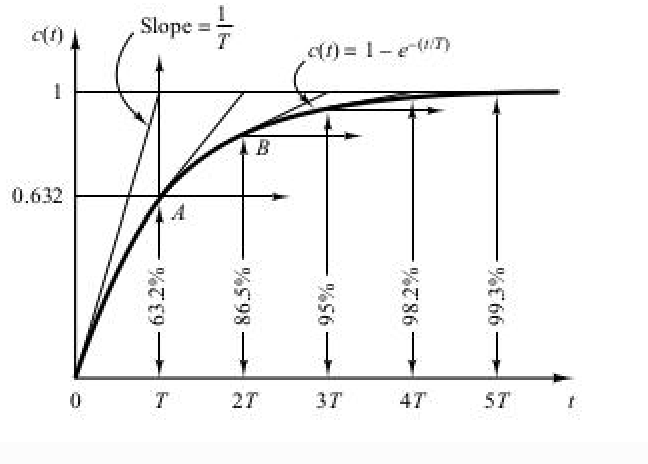
PID 디자인 팁
1. Rise time 조정 위해 K_p 정함
2. Overshoot 조정 위해 K_d 정함
3. S-S error 가 발생하면 K_i 정함
위의 순서로 원하는 성능이 나올 때까지 계속 반복하여 필요한 값을 구한다.

성능지표

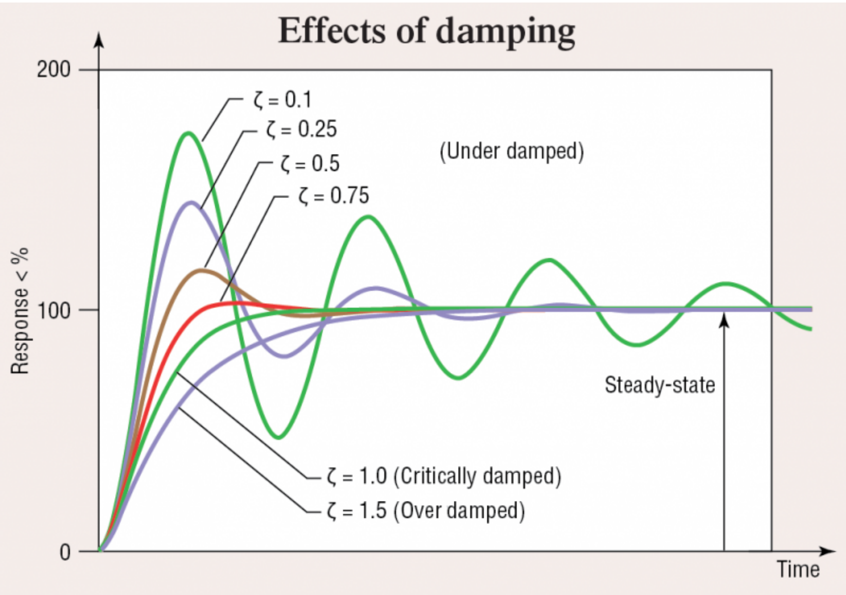


M_p (Maximum Overshoot): 정상상태 기준으로 응답 곡선이 최대로 올라간 비율
t_d (delay time): 응답이 처음으로 최종값의 반이 되는 데 걸리는 시간
t_r (rise time): 응답이 최종값까지 상승하는데 걸리는 시간
t_s (settling time): 응답곡선이 최종값의 절대 퍼센트 (보통 2% 또는 5%) 내의 범위에 들어와서 머물게 되는데 걸리는 시간
t_p (peak time): 응답이 최대 오버슈트까지 도달하는데 걸리는 시간

1 차 시스템에서 단위계단응답



2 차 시스템에서 감쇠비(damping ratio)에 따른 단위계단응답



감쇠비는 직관적으로 마찰과 같이 에너지가 감소하는 비율을 의미하는데

감쇠비에 따라 Under damped($0< \zeta <1$), Critically damped($\zeta = 1$), Over damped($1 < \zeta$)로 나뉜다.

일반적으로 원하는 응답을 얻기 위해 감쇠비를 0.4 ~ 0.8 정도로 두는데 감쇠비가 0.4 보다 작으면 지나친 오버슈트가 발생하고, 0.8 보다 크면 응답 속도가 느려진다.

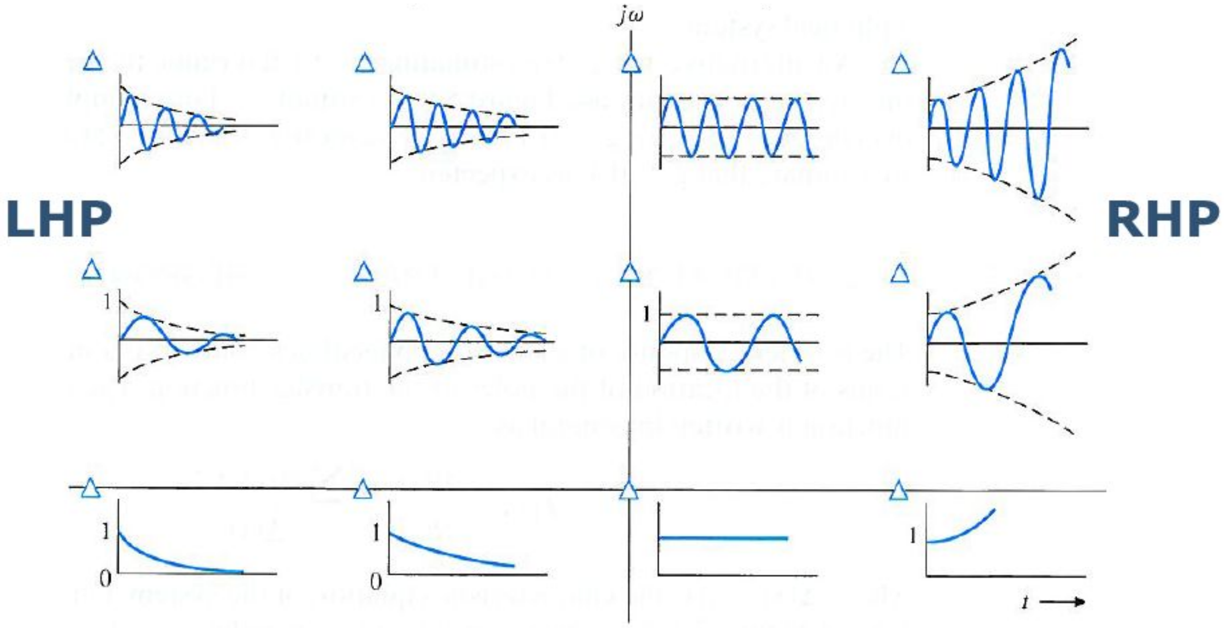
고차시스템

고차시스템의 응답은 1 차 시스템과 2 차 시스템의 응답의 합으로 표현될 수 있다.

폐루프극점 가까이에 폐루프영점이 있으면 영점이 극점의 영향력을 상쇄시킨다.

주요 폐루프극점(dominant pole): 허수축에 가까운 극점 (영향력이 가장 크다)
실수부의 비율이 5 가 넘고 근처에 영점이 없다면 허수축에 가장 가까운 극점이 과도응답의 거동을 좌우한다.

Routh’s 안정도 판별법



S 평면에서 전달함수의 모든 폐루프 극점(poles)들이 왼쪽 반평면에 위치하면
안정적인 시스템이다.

이것을 이용하여 시스템의 전달함수에서 분모 다항식의 모든 근의 부호가 음수인지 아닌지만 판별하여 시스템이 안정적인지 확인하는 방법이 Routh’s 안정도 판별법이다.

Routh’s 안정도 판별법의 계산 방법은 다음과 같다.

For the transfer function;

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b_m}{\boxed{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n}}$$

In this criterion, the coefficients of denominator are arranged in an Array called “Routh’s Array”;

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n = 0$$

먼저 전달함수의 분모 다항식을 0 으로 두고 0 인 근을 모두 제거한다.

Routh-Hurwitz Criterion

$$
\begin{array}{l|l|llll}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^2 & k_1 & k_2 & & & \\
s^1 & l_1 & & & & \\
s^0 & m_1 & & & &
\end{array}
$$

The number of roots in the open right half-plane is equal to the number of sign changes in the first column of Routh array.

분모 다항식을 위와같은 구조로 배열한다

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \qquad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$

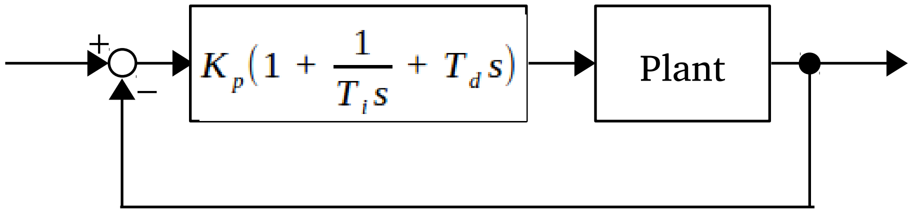
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

그리고 위의 방식으로 끝까지 계산하면 위에서 주황색으로 표시된 부분에서
(부호가 바뀐 횟수) = (S 평면의 오른쪽 반평면에 존재하는 극점의 개수)를 의미한다.

따라서 시스템이 안정하기 위해서는 모든 계수가 부호변환 없이 양수값이 나와야 한다.

PID 제어기의 Ziegler-Nichols 튜닝 규칙

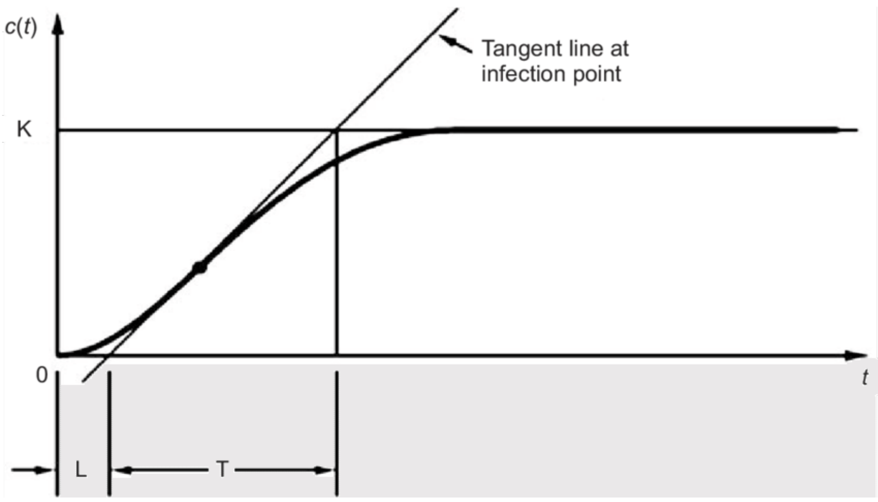
PID 제어는 대부분의 제어시스템에 폭넓게 적용될 수 있다. 특히 플랜트의 수학적 모델이 주어지지 않아 해석적인 설계방법을 적용할 수 없는 경우나 플랜트가 너무 복잡하여 수학적 모델이 쉽게 얻어지지 않을 경우 PID 제어가 유용하게 쓰일 수 있다.



Ziegler-Nichols 튜닝 규칙은 주어진 플랜트의 과도응답 특성에 근거하여
비례이득 K_p, 적분시간 T_i, 미분시간 T_d의 값을 간단하게 결정하는 규칙으로
단 한번의 시도로 K_p, T_i, T_d의 최종값을 결정해주는 방법이 아니라
미세 튜닝을 위한 시작값을 제공해 주는 역할을 하며 튜닝 방법은 두 가지가 있다.

제 1 방법

→ 실험값 또는 모델링에 의해 그려진 단위계단입력에 대한 플랜트의 응답이 다음과 같은 S 자 곡선이 될 때만 사용할 수 있는 방법이다. (플랜트가 적분기나 주요 켤레복소극점을 갖고 있지 않는 경우에 단위계단 응답 곡선이 S 자 곡선이 된다)



1. 먼저 위의 그래프와 같이 S 곡선의 변곡점에서 그은 접선과 시간축 및 c(t) = K 인 선과의 교점을 기준으로 L 과 T 의 길이를 구한다.

2. 전달함수 C(s)/U(s)를 다음과 같은 운반지연을 갖는 1 차 시스템으로 근사화한다.

$$G(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1}$$

3. 다음 표를 이용해 원하는 제어기를 설계한다.

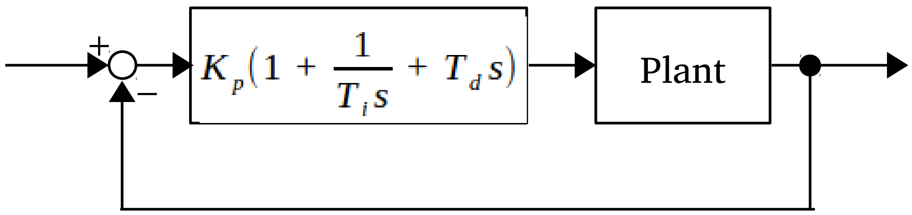
제어기 형태	K_p	T_i	T_d
P	T / L	∞	0
PI	0.9 T / L	L / 0.3	0
PID	1.2 T / L	2 / L	0.5 L

Ziegler-Nichols 제 1 방법의 규칙에 의해 튜닝된 PID 제어기는 다음과 같다

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) = 1.2\frac{T}{L}\left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls\right)$$

제 2 방법

1. 먼저 $T_i = \infty$, $T_d = 0$ 으로 설정한다.(비례제어동작만 사용함)



2-1. (실험값인 경우)
비례제어동작만을 사용하여 K_p 값을 0 에서부터 증가시켜가면서 출력이 최초로 지속적인 진동을 하게 되는 임계값 K_{cr} 을 찾고 이에 해당하는 주기 P_{cr} 을 실험적으로 구한다.
(어떤 K_p 값에 대해서도 출력이 지속적인 진동을 하지 않을 경우에는 이 방법을 적용할 수 없다.)

2-2. (시스템의 전달함수와 같은 수학적 모델이 주어져 있는 경우)
근궤적법이나 Routh 의 안정도 판별법을 이용하여 임계이득 K_{cr} 과 임계주파수 ω_{cr} 를 구할 수 있다. ($P_{cr} = 2\pi / \omega_{cr}$)
(근궤적선도에서 허수축과의 교점이 없으면 이 방법을 적용할 수 없다.)

3. 다음 표를 이용해 원하는 제어기를 설계한다.

제어기 형태	K_p	T_i	T_d
P	0.5 K_{cr}	∞	0
PI	0.45 K_{cr}	P_{cr} / 1.2	0
PID	0.6 K_{cr}	0.5 P_{cr}	0.125 P_{cr}

Ziegler-Nichols 제 1 방법의 규칙에 의해 튜닝된 PID 제어기는 다음과 같다

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) = 0.6K_{cr}\left(1 + \frac{1}{0.5P_{cr}s} + 0.125P_{cr}s\right)$$