

Subsecuencia en común más larga

1. Planteamiento del problema

La Programación Dinámica se aplica en cuatro fases:

1. Identificar la naturaleza n-etápica del problema
2. Verificación del Principio de Optimalidad de Bellman
3. Planteamiento de una recurrencia
4. Cálculo de una solución.

Naturaleza n-etápica del problema

Sea la subsecuencia más larga x_1, x_2, \dots, x_n ; esta subsecuencia es resultado de una serie de sucesiones ya que tenemos que decidir los valores de x_i , con $1 \leq i \leq n$. Así primero tomaríamos una decisión sobre x_1 , luego sobre x_2 , y así sucesivamente.

Por lo que podemos ver que estamos ante un problema de decisión n-etápico.

Principio de Optimalidad de Bellman

Si x_i es un elemento intermedio de la subsecuencia más larga, entonces la subsecuencia x_1, x_2, \dots, x_i es una solución optimal, y también lo es la subsecuencia x_i, x_{i+1}, \dots, x_n .

Planteamiento de una recurrencia

Sean X_n la secuencia x_1, x_2, \dots, x_n y Y_m la secuencia y_1, y_2, \dots, y_m . Entonces llamemos $f(X_n, Y_m)$ al tamaño de la subsecuencia común más larga de X_n y Y_m , donde:

$$f(X_n, Y_m) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, m = 0 \\ 1 + f(X_{n-1}, Y_{m-1}) & \text{si } x_n = y_m \\ \max(f(X_n, Y_{m-1}), f(X_{n-1}, Y_m)) & \text{si } x_n \neq y_m \end{cases}$$

Cálculo de una solución

Para el cálculo de una solución crearemos una matriz en la que almacenaremos todos los valores posibles, evitando así operaciones repetidas, que en el caso de la recurrencia se repetirían. Una vez obtenida la matriz, la reconstrucción de la subsecuencia común más larga es sencilla a partir de la recurrencia planteada.

Sea m la matriz en la que se almacenarán los datos, en la que, la fila i representa el valor x_i y la columna j el valor y_j :

$$m(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0, j = 0 \\ 1 + m(i-1, j-1) & \text{si } x_i = y_j \\ \max(m(i-1, j), m(i, j-1)) & \text{si } x_i \neq y_j \end{cases}$$

2. Pseudocódigo

Sean S1 y S2 las secuencias de las cuales queremos hallar la subsecuencia común más larga, el algoritmo se describiría por el siguiente pseudocódigo.

```
1  INICIO DEL ALGORITMO
2      cadena reconstruccion(matriz M, cadena a, cadena b,
3          ↪ entero i, entero j)
4  INICIO DE LA FUNCION
5      Si i o j son 0:
6          Devolver {}
7      Si no, si a[i-1] es igual a b[j-1]:
8          Devolver reconstruccion(M, a, b, i-1, j-1) + a
9          ↪ [i-1]
10     Si no, si M[i-1][j] es mayor que M[i][j-1]:
11         Devolver reconstruccion(M, a, b, i-1, j)
12     Si no:
13         Devolver reconstruccion(M, a, b, i, j-1)
14 FIN DE LA FUNCION
15
16 TAM1=|S1|
17 TAM2=|S2|
18 Crear una matriz M con TAM1 filas y TAM2 columnas
19 Rellenar la primera fila y columna de M con ceros
20 Repetir desde i=1 hasta TAM1:
21     Repetir desde j=1 hasta TAM2:
22         Si S1[i-1] es igual a S2[j-1]:
23             M[i][j]=M[i-1][j-1]+1
24         Si no:
25             M[i][j]=max(M[i-1][j],M[i][j-1])
26 Devolver reconstruccion(M, S1, S2, TAM1, TAM2)
27 FIN DEL ALGORITMO
```

NOTA: El algoritmo muestra al principio una función *reconstrucción* que es recursiva y a la cual se la llama en primer lugar en la línea 24 del código mostrado.

3. Eficiencia

En cuanto a la eficiencia teórica del problema, tenemos dos cadenas de caracteres, una de tamaño m y otra de tamaño n (no tienen por qué ser iguales, como hemos visto a lo largo de toda la memoria).

Como vemos en el pseudocódigo primero se crea una matriz de tamaño $m \cdot n$, por lo que esta parte del algoritmo es de orden $O(n \cdot m)$.

Por otra parte la función de reconstrucción es una función recursiva. Sin embargo, como podemos ver, la reconstrucción se apoya en los valores de la matriz. Esto hace que la reconstrucción sea directa, por lo que esta parte del algoritmo es de orden $O(n)$.

Por lo tanto, podemos concluir que el algoritmo es de orden $O(n \cdot m)$.

En el caso de que esta matriz no existiese, estaríamos hablando de un algoritmo de orden $O(2^n)$, ya que la función recursiva debería realizar todas las operaciones posibles, repitiendo muchas de ellas. Por lo tanto, la programación dinámica supone una gran mejora.

4. Código

Aquí se muestra el código utilizado escrito en lenguaje C++.

Hemos indicado las 2 funciones utilizadas. La primera a la que se llama desde el *main* es la función *subsecuencia*. Y esta a su vez hace uso de la función *reconstrucción*.

```
1 //Funcion de reconstruccion recursiva
2 string reconstruccion(vector <vector <int>> matriz, string
   ↳ a, string b, int i, int j){
3     if (i==0 || j==0)
4         return "";
5     else if (a[i-1] == b[j-1])
6         return reconstruccion (matriz, a, b, i-1, j-1) + a
   ↳ [i-1];
7     else if (matriz[i-1][j]>matriz[i][j-1])
8         return reconstruccion (matriz, a, b, i-1, j);
9     else
10        return reconstruccion (matriz, a, b, i, j-1);
11 }
12
13 //Funcion para hallar la subsecuencia mas corta con
   ↳ programacion dinamica
14 string subsecuencia(string a, string b){
15     int a_tam= a.size();
16     int b_tam= b.size();
17
18     //Creacion de la matriz con los valores y la matriz
   ↳ con las direcciones
19     vector <vector <int>> matriz(a_tam+1, vector <int> (
   ↳ b_tam+1, 0));
20
21     for (int i=1; i<a_tam+1; i++){
22         for (int j=1; j<b_tam+1; j++){
23             if (a[i-1]==b[j-1])
24                 matriz[i][j]= matriz[i-1][j-1]+1;
25             else{
26                 if (matriz[i-1][j]>matriz[i][j-1])
27                     matriz[i][j]= matriz[i-1][j];
28                 else
29                     matriz[i][j]= matriz[i][j-1];
30             }
31         }
32     }
33
34     //Return
35     return reconstruccion(matriz, a, b, a_tam, b_tam);
36 }
```



5. Escenarios de ejecución

Utilizando las secuencias *jacobocasadodegracia* y *jesusjosemariamaldonadoarroyo*, la sub-secuencia común más larga es *josadoaa*.

Aquí podemos ver la matriz de números que se construye.

```

      j e s u s j o s e m a r i a m a l d o n a d o a r r o y o
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
j 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
a 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
c 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
o 0 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3
b 0 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3
o 0 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4
c 0 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4
a 0 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 5 5 5 5
s 0 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 5 5 5 5
a 0 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5
d 0 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5
o 0 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 5 6 6 6 6 6 6 6 6
d 0 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 5 6 6 6 7 7 7 7 7 7
e 0 1 2 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 5 6 6 6 7 7 7 7 7 7
g 0 1 2 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 5 6 6 6 7 7 7 7 7 7
r 0 1 2 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 6 6 6 7 7 7 8 8 8
a 0 1 2 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 6 6 6 6 6 6 6 7 7 7 8 8 8 8
c 0 1 2 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 6 6 6 6 6 6 6 7 7 7 8 8 8 8
i 0 1 2 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 6 6 6 6 6 6 6 6 7 7 7 8 8 8 8
a 0 1 2 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 6 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 8 8 8 8

```

Y aquí podemos ver la matriz de direcciones que se construye.

```

      j e s u s j o s e m a r i a m a l d o n a d o a r r o y o
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
j 0 \ - - - - \ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
a 0 | - - - - - - - - \ - - \ - \ - - - - \ - - \ - - -
c 0 | - - - - - - - - | - - - - - - - - - - - - - - - -
o 0 | - - - - - \ - - - - - - - - - - - \ - - - \ - - \
b 0 | - - - - - | - - - - - - - - - - - | - - - - - - - -
o 0 | - - - - - \ - - - - - - - - - - - \ - - - \ - - \
c 0 | - - - - - | - - - - - - - - - - - | - - - | - - - -
a 0 | - - - - - | - - - \ - - \ - \ - - - - \ - - \ - - -
s 0 | - \ - \ - - \ - - - - - - - - - - - | - - | - - - -
a 0 | - | - - - - | - - - \ - - \ - \ - - - - \ - - \ - - -
d 0 | - | - - - - | - - - | - - - - - - \ - - - \ - - - -
o 0 | - | - - - - \ - - - | - - - - - - | \ - - - \ - - - \
d 0 | - | - - - - | - - - | - - - - - - \ | - - - \ - - - -
e 0 | \ - - - - | - \ - - - - - - - - - | | - - - | - - - -
g 0 | | - - - - | - | - - - - - - - - - | | - - - | - - - -
r 0 | | - - - - | - | - - \ - - - - - - | - - - | - - \ - -
a 0 | | - - - - | - | - \ - - \ - \ - - - - \ - - \ - - -
c 0 | | - - - - | - | - | - - | - - - - - - | - - | - - - -
i 0 | | - - - - | - | - | - \ - - - - - - | - - | - - - -
a 0 | | - - - - | - | - \ - | \ - \ - - - - \ - - \ - - -

```



Vamos a observar otro ejemplo utilizando las secuencias de caracteres *ignaciosanchezherrera* y *juanmiguelhernandezgomez*, cuya subsecuencia común más larga es *ignaneze*.

```

      j u a n m i g u e l h e r n a n d e z g o m e z
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
i 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
g 0 0 0 0 0 0 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
n 0 0 0 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
a 0 0 0 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4
c 0 0 0 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4
i 0 0 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4
o 0 0 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 3 4 4 4 4 4 4 5 5 5
s 0 0 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 3 4 4 4 4 4 4 5 5 5
a 0 0 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 3 4 4 4 4 4 4 5 5 5
n 0 0 0 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 4 5 5 5 5 5 5 5 5
c 0 0 0 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 4 5 5 5 5 5 5 5 5
h 0 0 0 1 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 4 5 5 5 5 5 5 5 5
e 0 0 0 1 2 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 6 6 6 6 6 6
z 0 0 0 1 2 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 6 7 7 7 7 7
h 0 0 0 1 2 2 2 2 2 3 3 4 4 4 4 4 5 5 6 7 7 7 7 7
e 0 0 0 1 2 2 2 2 2 3 3 4 5 5 5 5 5 5 6 7 7 7 7 8
r 0 0 0 1 2 2 2 2 2 3 3 4 5 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 8
r 0 0 0 1 2 2 2 2 2 3 3 4 5 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 8
e 0 0 0 1 2 2 2 2 2 3 3 4 5 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8
r 0 0 0 1 2 2 2 2 2 3 3 4 5 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8
a 0 0 0 1 2 2 2 2 2 3 3 4 5 6 6 7 7 7 7 7 7 7 7 8

```

Y aquí podemos ver la matriz de direcciones que se construye.

```

      j u a n m i g u e l h e r n a n d e z g o m e z
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
i 0 - - - - - \ - - - - - - - - - - - - - - -
g 0 - - - - - | \ - - - - - - - - - - - \ - - -
n 0 - - - \ - - | - - - - - \ - \ - - - - - - -
a 0 - - \ - - - | - - - - - | \ - - - - - - - -
c 0 - - | - - - | - - - - - | | - - - - - - - -
i 0 - - | - - \ - - - - - | | - - - - - - - -
o 0 - - | - - | - - - - - | | - - - - - \ - - -
s 0 - - | - - | - - - - - | | - - - - - | - - -
a 0 - - \ - - | - - - - - | \ - - - - - | - - -
n 0 - - | \ - - - - - - - \ | \ - - - - - - - -
c 0 - - | | - - - - - - - | | | - - - - - - - -
h 0 - - | | - - - - - \ - - - | | - - - - - - -
e 0 - - | | - - - \ - - \ - - - | - \ - - - \ -
z 0 - - | | - - - | - - | - - - | - | \ - - - \
h 0 - - | | - - - | - \ - - - - | - | | - - - -
e 0 - - | | - - - \ - | \ - - - - \ | - - - \ -
r 0 - - | | - - - | - | | \ - - - - | - - - | -
r 0 - - | | - - - | - | | \ - - - - | - - - | -
e 0 - - | | - - - \ - | \ | - - - - \ - - - \ -
r 0 - - | | - - - | - | | \ - - - - | - - - | -
a 0 - - \ | - - - - | - | | | - \ - - - - - | -

```