01 什么是线性方程?

包含变量$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的方程组，形如：

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

称为**线性方程**，其中：

- 系数 a 可以是实数或复数
- n 是任意正整数，在本教程中，一般为2~5，实际中，n 可能是50、5000乃至更大。

下面这些方程就不是线性方程：

$$4x_1 - 5x_2 = x_1x_2 \qquad x_2 = 2\sqrt{x_1} - 6 \tag{2}$$

因为方程1包含 $x_1 \times x_2$，而方程2包含 $\sqrt{x_1}$，它们未知数的次数都不是1。

02 什么是线性方程组?

一个或多个线性方程合在一起，它就称为**线性方程组**，例如下面这个式子：

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 = 8 \\ x_1 - 4x_3 = -7 \end{aligned} \tag{3}$$

03 线性方程组的解是个什么东西?

线性方程组的解是一组数，比如我们记为 $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$，将这组数带入方程组后，方程组左右两边的式子就相等了。比如说上面这个方程组（3），其有一组解为 $(x_1 = 5, x_2 = 6.5, x_3 = 3)$，带入后，等式两边就相等了：

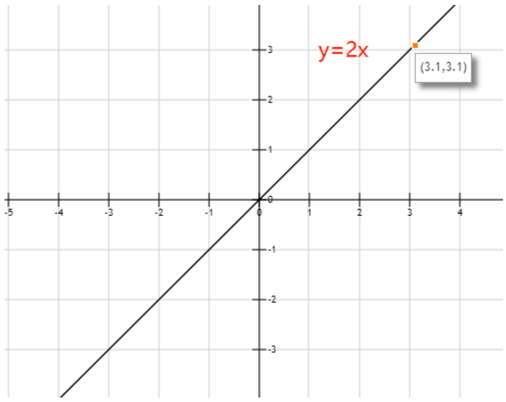
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 = 8 \\ x_1 - 4x_3 = -7 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 2 \times 5 - 6.5 + 1.5 \times 3 = 8 \\ 5 - 4 \times 3 = -7 \end{aligned} \tag{4}$$

我们称这些使得方程组左右两侧相等的数组（这些数组可能有很多个，下面我们会讲）为线性方程组的**解**，也称为**解集**。

03 线性方程组的解有几种情况？方程有解意味着什么？那没有解呢？

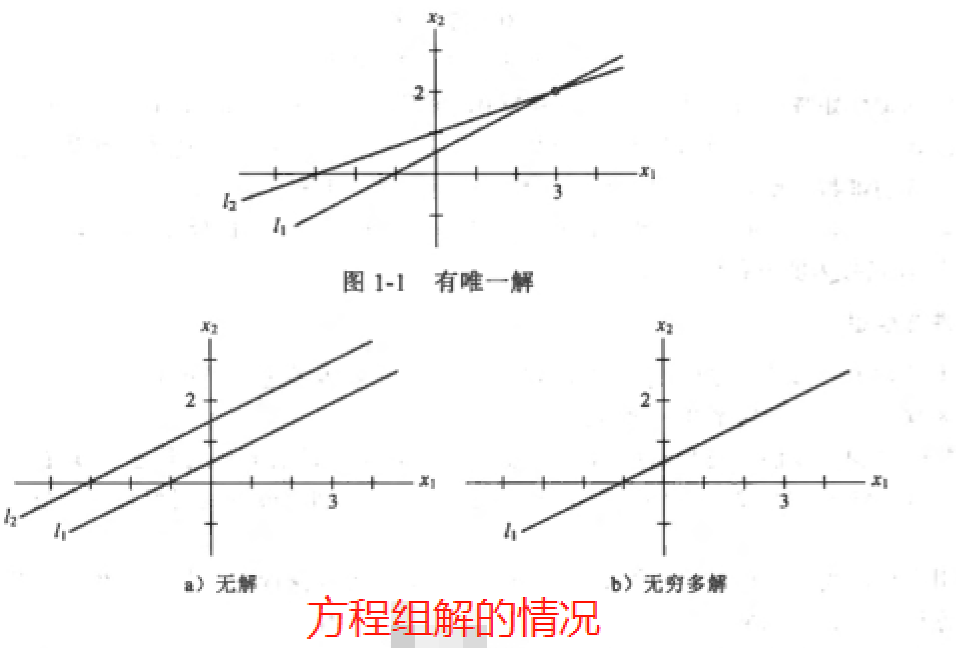
方程的含义

方程组的解有几种情况？考虑只有两个未知数的情况，我们知道包含2个未知数的方程组代表二维平面的直线，比如说 $y=x$，代表的就是下面的图形：



解的不同情况及意义

方程组的解就是两个函数的交点，有以下几种情况：



方程组解的情况

- 唯一解
- 无解
- 无穷解

有解（相容）

方程组有解/无解还有个说法，我们称如果它：

- 有解（唯一/无穷），我们称它是相容的；

- 无解，不相容的；

> 线性代数里充斥着大量同样事情有不同称呼的情况，比如说线性无关，满秩等等，虽然这些概念会有些许区别，但其实本质区别也不大，是同一样东西。难道换个马甲你就认不到了吗？希望你记住这些不同称呼。

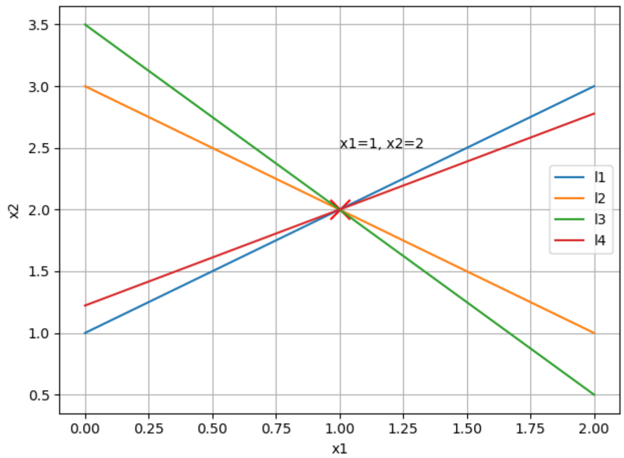
方程组等价的含义

对了，不同的线性方程组，它们可能的解是相同的，比如下面方程组 (5) 和 (6)，如下图所示，它们的交点都是 $x_1 = 1, x_2 = 2$，也就是拥有相同的解集，我们称这些方程组是等价的：

> 只要解相同，我们就称两个方程组等价。

$$\begin{aligned} l_1 &:= x_1 - x_2 = -1 \\ l_2 &:= x_1 + x_2 = 3 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} l_3 &:= 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ l_4 &:= 7x_1 - 9x_2 = -11 \end{aligned} \tag{6}$$



04 高斯消元很麻烦，有没有解方程组简单点的表示？系数矩阵+增广矩阵

如果我们自己去动手解过这些方程组，你会发现这些消元还是蛮复杂的，$x_1, x_2, \ldots x_n$ 带来带去的，很容易弄错。那么是否有简单点的表达方式？当然有，数学家是简洁的，他们才不喜欢啰嗦。

> 为什么说数学家喜欢简洁：比如教科书数学证明里的由此可得，一般而言有两个意思，要么就是下面这步推导傻子都能看懂，要么就是这个推导复杂地一批，你自己查文献去。简洁吧，一句话两句意思。

这里主要有两个核心概念：**系数矩阵**和**增广矩阵**。举个例子，下面这个线性方程组这样的：

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + \quad x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 5x_1 \qquad\quad - 5x_3 &= 10 \end{aligned}$$

系数矩阵：将方程组每个变量的系数写在对齐的一列中。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \tag{7}$$

增广矩阵：如果我们将它右侧的常量也放到这个矩阵里，即为增广矩阵。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \tag{8}$$

矩阵的维度

还有个问题，有了这些矩形阵列，也称为矩阵，我们怎么用数学符号去描述它的形状，也就是有几行几列？上面例子中，系数矩阵和增广矩阵，显然它们的形状有明显区别。这里有个概念叫做**维度**，我们用它去讲一个矩阵的形状。

假设一个矩阵有 m 行，n 列（m, n 都是是正整数），那么我们就记它为 $m \times n$ 矩阵。比如说上面的增广矩阵，它有 3 行 4 列，我们记为 3×4 的矩阵，前面的代表行，后面的代表列。

> 通常来说，矩阵的维度是两维，但在一些领域，比如说深度学习，矩阵的维度可能是高维的，比如说表示用于训练某个batch的图像数据：$[N, C, H, W] = 8 \times 3 \times 224 \times 224$，我们也称这个块为矩阵（更准确的说法是张量，但通常我们不会严格去区分这些概念，之前讲过，这些概念本质上就是同样东西换了个马甲）。

05 怎么去求解线性方程组？行化简，阶梯最简型

有了上面这些概念之后，我们解方程组的速度就可以快很多了，比如下面这个方程组：

> 为了便于大家理解是怎么用增广矩阵来解方程的，我们将普通线性方程组和增广矩阵的解法放在左右两侧做比较，你不用立马去计算，写作业的时候对照着去做即可。

问题：

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 5x_1 - 5x_3 &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

求解：

保留第一个方程中的 x_1，把其他方程中的 x_1 消去．为此，把第一个方程乘以 -5，加到第三个方程上．熟练之后可以通过心算完成：

$$\begin{array}{rr} -5\cdot[\text{方程1}]: & -5x_1 + 10x_2 - 5x_3 = 0 \\ +[\text{方程3}]: & 5x_1 - 5x_3 = -9 \\ \hline [\text{新方程3}]: & 10x_2 - 10x_3 = 10 \end{array}$$

把原来的第三个方程用所得新方程代替：

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 10x_2 - 10x_3 &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

其次，把方程 2 乘以 1/2，使 x_2 的系数变成 1.（这步计算可以简化下一步中的运算.）

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 4x_3 &= 4 \\ 10x_2 - 10x_3 &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

利用方程 2 中的 x_2 项消去方程 3 中的项 $10x_2$，用心算计算如下：

$$
\begin{array}{rr}
-10\cdot[\text{方程}2]: & -10x_2+40x_3=-40 \\
+[\text{方程}3]: & 10x_2-10x_3=\ 10 \\
\hline
[\text{新方程}3]: & 30x_3=-30
\end{array}
$$

计算结果可以写作之前的第三个方程（行）：

$$
\begin{aligned}
x_1-2x_2+\ x_3&=\ 0 \\
x_2-4x_3&=\ 4 \\
30x_3&=-30
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 30 & -30 \end{bmatrix}
$$

现在，将方程 3 乘以 $\frac{1}{30}$ 以得到 1 作为 x_3 的系数.（这步计算可以简化下一步中的运算.）

$$
\begin{aligned}
-x_1-2x_2+\ x_3&=\ 0 \\
x_2-4x_3&=\ 4 \\
x_3&=-1
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

新的方程组是三角形形式（直观的术语三角形将在下一节中用更精确的词替代）：

$$
\begin{aligned}
-x_1-2x_2+\ x_3&=0 \\
x_2-4x_3&=4 \\
x_3&=-1
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

现在 x_3 可以求出来了，代回第二行，x_2 也可以求解出来，再是 x_1。

但是数学家是喜欢简洁的，我们还可以继续消。这里，第 2 行可以加上 4 倍的第 3 行，式子就变为了：

$$
\begin{aligned}
x_1-2x_2\qquad &=1 \\
x_2\qquad &=0 \\
x_3&=-1
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

同理，第 1 行可以加上 2 倍的第 2 行，式子变为：

$$
\begin{cases}
x_1 \qquad\qquad =1 \\
\qquad x_2 \qquad =0 \\
\qquad\qquad x_3=-1
\end{cases}
\qquad
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

那么答案也非常明显了，方程组的解为：$(1,0,-1)$。

行简化、阶梯最简型

上面的一系列操作称为**行化简**，化简完的矩阵，它的形状称为**阶梯型矩阵**，长下面这样：

$$
\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}
0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare &
\end{bmatrix}
$$

这些站在前面的方块 ■ 称为主元，通常：

- 我们会将主元化为1方便方程求解，称为**简化阶梯型矩阵**；
- 简化阶梯型矩阵是唯一的；
- 它呈现上三角分布，主元的是该列唯一的一个非零元素；

> **关于数值精度问题**

> 实际计算时候，为避免舍入误差，计算机还会选择主元大的数放在上面，当然还有一系列操作保证计算精度。虽然本门课将要讲怎么用计算机去求解这些线性方程组，但你也不用去担心一些特殊矩阵、操作会导致计算的数值精度很差问题。通常，高度优化过的现代数值计算库已经帮你完成这些优化的工作了。而日常工作中，通常通过调包来求解这些方程组，类似的操作，如线性方程组的求解、矩阵求逆、求伪逆、特征值等。
>
> 当然，数值计算中不可避免地出现一些精度问题，参考《数值计算中的一些精度问题》，但怎么去避免又是另外一门课《数值分析》的事情了。在这里，你无需担心，通常线性代数大多数情况是线性操作，而求逆这些可能导致问题的矩阵，现代数值库已经帮你优化过了，大多数情况下你无需担心。

初等行变换

在之前一系列行间的猛如虎的操作中，还涉及到一个线性代数中非常重要的概念：**初等行变换**。初等行变换不会影响到方程组的解（所以说一顿猛如虎的操作，然而卵用没有，菜地抠脚，又不影响方程组的解）。初等航变换有以下三种：

- **对换操作**：方程组之间的位置两两对换；
- **倍乘操作**：某行方程乘以一个非零常数；
- **倍加操作**：某行方程+其它行方程的倍数；

简单说，你只要给方程组不把某一行方程乘以0（万物皆空），或者取对数这些非线性运算（犯规了好吗？我们讨论线性方程组），它的行操作是任意的。这些行操作称为初等行变换。

行等价

还有个概念，如果一个线性方程组经过初等行变换，可以完成变成另一个新的方程组，那么这两个方程组是等价的，称为增广矩阵的行等价，它们的解相同。

验算

做了这么多，最好还是验证下 $(1,0,-1)$ 是不是原方程组的解，回带一下，结果与原方程右侧一致：

$$\begin{aligned} 1(1)-2(0)+1(-1) &= 1-0-1 &&= 0 \\ 2(0)-8(-1) &= 0+8 &&= 8 \\ 5(1)-5(-1) &= 5+5 &&= 10 \end{aligned}$$

事实上，每个线性方程表示的都是一个平面，而它们有解，因为这三个平面交于同一个点：

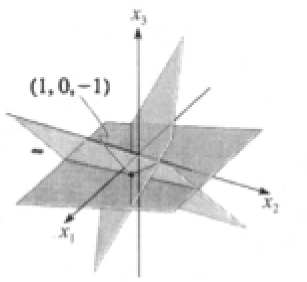


图 1-3　每个方程确定三维空间中的一个平面．点(1，0，−1)落在三个平面上

> 如果时间充裕的话，做完数学题最好去检查一下，没有人可以保证自己不犯错。前苏联的联盟一号飞船在返回途中无法打开降落伞坠毁，就是因为在地面检查的时候忽略了一个小数点，导致飞船在进入轨道后出现一系列故障——右侧太阳能电池阵打不开、无线电短波发射器无法使用，直到飞船的最后的坠毁，换句话说，这艘飞船只要发射上去，就注定不能安全返回地面。既然前苏联的那些顶尖的科学家都难免返错误，那么你为什么不去检查一下呢？

> 另外，我们还建议你平时日常多练习下心算的能力，它可以有效地提升做题速度和准确率，这不光有助于你提升你应式的分数，同样对你数学能力的提升帮助很大。

06 什么时候方程组有解？怎么判断?增广矩阵出0=b情况，方程组无解

不知道你们有没有想过下面这几个问题（这是线性代数的核心问题，之后我们会以各种形式讨论这个问题）：

1. **方程组什么时候有解?**
2. **如果有解，它有几个解?**

我们先回答第一个问题，例如下面这个方程组：

$$
\begin{aligned}
x_2 - \quad 4x_3 &= 8 \\
2x_1 - 3x_2 \quad + 2x_3 &= 1 \\
4x_1 - 8x_2 + 12x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

我们换一个更简洁的求解表达形式：

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{bmatrix} \overset{l_1 \leftrightarrow l_2}{=} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{bmatrix} \\
&\overset{l_3 - 2l_1}{=} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \end{bmatrix} \overset{l_3 + 2l_2}{=} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{9}
$$

现在增广矩阵已经化成三角形式的，为了理解这个矩阵，我们将其转换为方程表示：

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\
x_2 - 4x_3 &= 8 \\
0 &= 15
\end{aligned}
$$

显然，0 是不可能等于 15的，因而这个方程组没有解。原方程在三维空间上的表示是这样的：

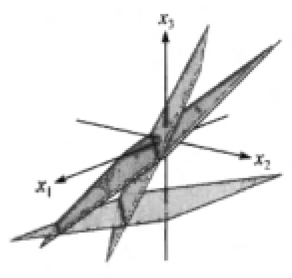


图 1-4　该方程组是不相容的，因为没有同时落在三个平面上的点

注意（7）的增广矩阵，它的最后一行在三角形不相容方程组中是典型的.

那么就得到了我们的结论：

- **如果增广矩阵化成的三角矩阵，某些行出现形如$0=b$的情况，即方程组无解；**
- 否则方程组有解；

> 这个判断方法显然要去化这个增广矩阵为三角形，还是有一定计算量的。那么有没有更简单的计算方法呢？还真没有。之后你将知道，行列式、增广矩阵的秩等都可以判断线性方程组是否有解。但现在我不会跟你讲这些，因为你连这些概念都不知道。

07 如果方程组有解，那么它有几个解？解的通式是什么？

之后如果方程组有解，那么它有几个解呢？事实上，这得分两种情况讨论：

- **齐次** 线性方程组
- **非齐次** 线性方程组

不过在此之前，我们需要补充线性方程的另一种记号，**矩阵方程**。你总不能每次都像下面两种形式来表示这个线性方程组吧？那写起来也太麻烦了。

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 5x_1 \qquad\quad - 5x_3 &= 10 \end{aligned} \qquad -> \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

上面那个方程组还可以有另一种记号，即基于 **矩阵方程** 的描述 $Ax = b$：

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 5x_1 \qquad\quad - 5x_3 &= 10 \end{aligned} \ -> \mathbf{Ax} = \mathbf{b} -> \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

7.1 齐次线性方程组的解

1）齐次线性方程组定义

若方程组可以写成 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的形式，即右侧的 $\mathbf{b}$ 全为零，那么我们就称它为齐次线性方程组，这样的方程组至少有一个解，即 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$。

2）解的情况：零解/非零解

齐次线性方程组的解存在两种情况：

- **存在唯一解：那么只有零解**；
- **存在非零解：就有无数解；**

这个道理很简单，例如只有2个未知变量的时候，也就是一个方程代表二维平面的一条直线，存在两种情况：

- 要么相交，只能交于 $(0, 0)$ 点，唯一解（还有其他情况吗？平行是不可能的）。
- 这两条直线要么重合，即存在无数解；

在三维平面也是相类似的，可以自己去想象。

3）怎么去判断是零解/有非零解？

> 齐次方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有非零解，意味着方程组里至少有一个自由变量。

以下面方程组为例：

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + \ \ x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

令 A 为该方程组的系数矩阵，用行化简法把增广矩阵 $[A, 0]$ 化为阶梯型：

$$
\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}
$$

通过判断阶梯型中是否存在全为零的行（自由变量），我们即可判断齐次方程组是否有无穷解：

- **存在零行，存在无穷解；（x_3可以取任意值）**
- **不存在零行，只有零解；**

4）通解形式

将上面式子进一步将阶梯型化简为简化阶梯型：

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} -> \begin{matrix} x_1 & -\frac{4}{3}x_3 & =0 \\ x_2 & & =0 \\ & 0 & =0 \end{matrix} \tag{11}
$$

可以得出：$x_1 = \frac{4}{3}x_3, x_2 = 0, x_3 = *$。这里有两个概念：

- 由于x_3可以任取一个值，方程组都成立，因而称之为自由变量；
- x_1, x_2 无法任取，因而称之为固定变量；

将其中的公因式提出来，即为通解的矩阵形式：

$$
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ b \\ 1 \end{bmatrix} = x_3 v \; (v = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \tag{12}
$$

几何意义上，这个方程的通解是一条直线，一个点 x_3，即对应一个x_1, x_2，有无数解：

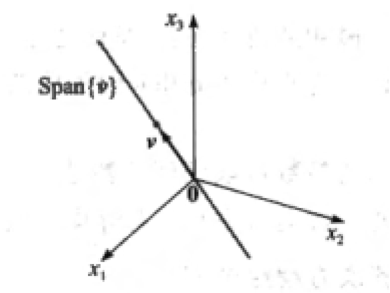


图 1-21

更普遍的通解形式

上面是含有一个自由变量的情况，但当含有多个自由变量时呢？

下面，我们以下面这个式子为例，直接告诉你如何求解含多个自由变量的齐次线性方程组的通解：

$$
\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 &= 0 \\ 2x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - \ \ x_2 - 4x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned} \tag{13}
$$

由于右侧都为零，我们去掉右侧，直接用系数矩阵，然后将其简为简化阶梯型：

$$
\begin{aligned}
A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}\\
\xrightarrow[r_2\div(-3)]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&-\frac{5}{3}\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

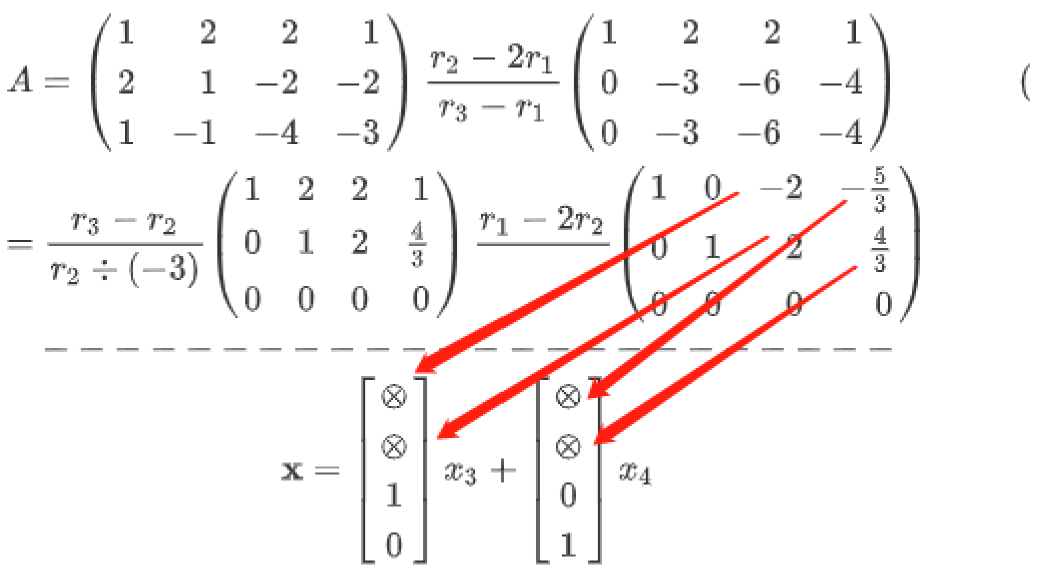
可以看出这里：存在2个自由变量 x_3, x_4。

> 一个方程组只能确定一个未知数，4个未知数，2个方程组，因而自由变量的个数是2个。

通解也是由这两个自由变量构成的，因为这些自由变量可以取任意值，为了方便，我们取它们的系数分别为 $[0,1],[1,0]$，写出通解自由变量的部分：

$$
\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\otimes\\\otimes\\1\\0\end{bmatrix}x_3+\begin{bmatrix}\otimes\\\otimes\\0\\1\end{bmatrix}x_4 \tag{15}
$$

之后填入固定变量，即对应位置的值取反填入相应的 $\otimes$：



将 x_3, x_4 替换为更普遍的值 c_1, c_2，最终齐次线性方程组通解的形式，也称为解的参数向量形式：

$$
\mathbf{x}=c_1\begin{bmatrix}2\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}\frac{5}{3}\\-\frac{4}{3}\\0\\1\end{bmatrix}\quad(c_1,c_2\in R) \tag{16}
$$

7.2 非齐次线性方程组的解

1）非齐次线性方程组定义

形如$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$格式，即为非齐次线性方程组。

2）通解形式

以下面这个方程组为例：

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{5} & -\mathbf{4}\\ -\mathbf{3} & -\mathbf{2} & \mathbf{4}\\ \mathbf{6} & \mathbf{1} & -\mathbf{8}\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}\mathbf{7}\\ -\mathbf{1}\\ -\mathbf{4}\end{bmatrix} \tag{17}$$

我们对增广矩阵 $[\mathbf{A},\mathbf{b}]$ 进行行变换：

$$\begin{bmatrix}3 & 5 & -4 & 7\\ -3 & -2 & 4 & -1\\ 6 & 1 & -8 & -4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{4}{3} & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{18}$$

先写出其特解（发生了一个特解的平移）：

$$\mathbf{x}=\otimes+\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{bmatrix} \tag{19}$$

再将齐次部分补上，只有一个自由变量，先写自由变量部分：

$$\mathbf{x}=c_1\begin{bmatrix}\otimes\\ \otimes\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{bmatrix} \tag{20}$$

再填上对应的空格，写出通解的格式（非齐次解=齐次解+特解）：

$$\mathbf{x}=c_1\begin{bmatrix}\frac{4}{3}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}(c_1\in R) \tag{21}$$

这里需要说明的是$\mathbf{x}=\mathbf{c_1}[\ldots]$ 是齐次方程 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解。

08 总结

在本小节中，我们针对线性代数核心即解线性方程组进行分析，一步步研究如何求解已知的方程组。在自己复习过程中，请按以下逻辑主线对本节课进行回顾：

核心

1. 什么是线性方程?

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b \tag{22}$$

2. 什么是线性方程组?

   几个线性方程组一起即线性方程组。

3. 线性方程组的解释什么东西?

   x_1、x_2的值， 一组数，使得方程组左右两边相等。

4. 方程组的解有几种情况？方程组有解意味着什么？没有解呢?
   - 二维平面方程（两个未知数，直线）
     - 唯一解：直线有交点
     - 无解：直线平行（不重合）
     - 无穷解：直线重合
   - 三维平面方程（三个未知数，代表一个平面）：

        - 唯一解：三个平面交一点
        - 无解：三个平面无公共角点
        - 无穷解：三个平面交于一条线，或者全部重合。
5. 怎么求解方程组？

   行化简，最简阶梯型；

6. 怎么判断方程组是否有解？

   增广矩阵出0=b情况，方程组无解

7. 方程组有解，有几个解？解的通式是什么？
    - 齐次线性方程组，$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$
        - 一定存在零解
        - 存在非零解，即无数解
        - 通解形式：

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (c_1, c_2 \in R) \tag{23}$$

    - 非齐次线性方程组
        - 解的情况（阶梯型矩阵后，一个方程确定一个未知数，少一个方程即少一个约束）
            - 无解：不存在自由变量
            - 有解：存在自由变量
        - 解的形式：齐次解+特解

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} (c_1 \in R) \tag{24}$$

其它概念

1. 有解，也称为相容
2. 方程组等价，有相同解即可（而非方程组系数、数量都一致）
3. 系数矩阵、增广矩阵
4. 行化简、阶梯型、最简阶梯型
5. 矩阵的描述，维度

还有，数值计算精度不用太过担心，一般不太会出问题。

把握住这些概念之后，首先恭喜你，你已经学会了线性代数最最核心的内容了。