◎線形判別分析（LDA）

- m：全体の平均ベクトル
- m_i：クラス i の平均ベクトル
- w：新たな軸のベクトル
- n_i：クラス i のデータ数

理論① 別クラスのデータをできるだけ遠ざける

→ 各クラスの平均が、全体の平均から離れていればいい。

$$J_B(w) = \sum_{i=1}^{c} n_i \left\{ (m_i - m)^T w \right\}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{c} n_i \cdot w^T (m_i - m)^T (m_i - m) w$$

$$= w^T \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{c} n_i (m_i - m)^T (m_i - m) \right\}}_{\text{クラス間共分散行列}} w$$

$$= w^T S_B w \Rightarrow \boxed{\text{最大化}}$$

理論② 同じクラスのデータをできるだけ近づける

→ 射影後のクラス内の分散を小さくする。

$$J_i(w) = \sum_{x^{(i)} \in C_i} \left\{ (x^{(i)} - m_i)^T w \right\}^2$$

とすると全体は

$$J_w(w) = \sum_{i=1}^{c} J_i(w) = \sum_{i=1}^{c} \sum_{x^{(i)} \in C_i} \left\{ (x^{(i)} - m_i)^T w \right\}^2$$

$$J_w(w) = \sum_{i=1}^{c} \sum_{x^{(i)} \in C_i} \left\{ (x^{(i)} - m_i)^T w \right\}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{c} \sum_{x^{(i)} \in C_i} w^T (x^{(i)} - m_i)^T (x^{(i)} - m_i) w$$

$$= w^T \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{c} \sum_{x^{(i)} \in C_i} (x^{(i)} - m_i)^T (x^{(i)} - m_i) \right\}}_{\text{クラス内共分散行列}} w$$

$$= w^T S_w w \Rightarrow \boxed{\text{最小化}}$$

これをまとめて、

$$J(w) = \frac{\overbrace{J_B(w)}^{\boxed{\text{最大化}}}}{\underbrace{J_w(w)}_{\boxed{\text{最小化}}}} = \frac{w^T S_B w}{w^T S_w w} \Rightarrow \boxed{\text{最大化}}$$

ここで、$J(w)$ を最大化させる w を見つけたい。

→ $J(w)$ を w で微分する。

公式①
$$\frac{\partial}{\partial x} x^T A x = (A + A^T) x$$

$$\frac{\partial J(w)}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w} \cdot \frac{w^T S_B w}{w^T S_w w}$$

$$= \frac{1}{(w^T S_w w)^2} \left\{ (w^T S_w w)(S_B + S_B^T) w - (w^T S_B w)(S_w + S_w^T) w \right\}$$

↓ S_B, S_w は対称行列

$$= \frac{1}{(w^T S_w w)^2} \cdot \left\{ (w^T S_w w) \cdot 2 S_B w - (w^T S_B w) \cdot 2 S_w w \right\}$$

$$= \frac{2}{(w^T S_w w)^2} \left\{ (w^T S_w w) S_B w - (w^T S_B w) S_w w \right\}$$

$$= 0$$

したがって、

$$(w^T S_W w) S_B w = (w^T S_B w) S_W w$$

$$\Leftrightarrow \quad S_B w = \frac{w^T S_B w}{w^T S_W w} S_W w$$

$$\Leftrightarrow \quad S_W^{-1} S_B w = \frac{w^T S_B w}{w^T S_W w} w$$

$\dfrac{w^T S_B w}{w^T S_W w}$ はスカラー、$S_W^{-1} S_B$ は行列なので

$\dfrac{w^T S_B w}{w^T S_W w}$ は $S_W^{-1} S_B$ の固有値であり、w は $S_W^{-1} S_B$ の固有べクトル //