

② 線形判別分析

m : 全体の平均ベクトル
 m_c : クラス c の平均ベクトル (2クラス分類のため $c \in \{1, 2\}$)
 w : 求めたい新しい軸

理論① 別クラスのデータをできるだけ遠ざける

各クラスの平均ベクトル m_1, m_2 がそれぞれ線形変換ベクトル w により、射影されたときの差が最大になるようにする。

$$w^T m_1 - w^T m_2 = w^T (m_1 - m_2) \Rightarrow \boxed{\text{大きくする}}$$

理論② 同じクラスのデータをできるだけ近づける

\Rightarrow 射影後のクラス内の分散を小さくする

$$\text{クラス1: } S_1^2 = \sum_{i \in C_1} (w^T x_i - w^T m_1)^2 \Rightarrow \boxed{\text{小さくする}}$$

$$\text{クラス2: } S_2^2 = \sum_{i \in C_2} (w^T x_i - w^T m_2)^2 \Rightarrow \boxed{\text{小さくする}}$$

$$\text{よって, } S^2 = S_1^2 + S_2^2 \Rightarrow \boxed{\text{小さくする}}$$

$$\text{つまり, } S^2 = S_1^2 + S_2^2 = \sum_{i \in C_1} (w^T x_i - w^T m_1)^2 + \sum_{i \in C_2} (w^T x_i - w^T m_2)^2$$

$$S_w = \sum_{i \in C_1} (x_i - m_1)^2 + \sum_{i \in C_2} (x_i - m_2)^2 \quad \text{つまり}$$

$$S^2 = \frac{w^T S_w w}{\text{スカラー}} \quad S_w: \text{クラス内変動行列} \Rightarrow \boxed{\text{小さくする}}$$

つまり、理論①の式を合流の形にする。

$$w^T (m_1 - m_2)$$

$$\text{から, } w^T (m_1 - m_2) (m_1 - m_2)^T w$$

$$S_B = (m_1 - m_2) (m_1 - m_2)^T \text{ とすると}$$

$$\frac{w^T S_B w}{\text{スカラー}}$$

S_B : クラス間変動行列

$\Rightarrow \boxed{\text{大きくする}}$

$$\text{よって, } \frac{w^T S_B w}{w^T S_w w} \text{ を 大きくすればよい,}$$

\hookrightarrow これをラグランジュで解く

$$\underbrace{S_w^{-1} S_B w}_{\text{ベクトル}} = \frac{w^T S_B w}{w^T S_w w} \underbrace{w}_{\text{スカラー}}$$

よって、 $S_w^{-1} S_B$ の固有値と固有ベクトルを求めてあげる。