

Versuch 351

## **Fourier- Analyse und Sythese**

Stefanie Hilgers  
Stefanie.Hilgers@tu-dortmund.de

Lara Nollen  
Lara.Nollen@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.11.2018

Abgabe: 21.11.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Kathodenstrahlröhre . . . . .	3
2.2	Ablenkung im elektrischen Feld . . . . .	4
2.3	Kathodenstrahl-Oszillograph . . . . .	4
2.4	Ablenkung im magnetischen Feld . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>5</b>
3.1	Ablenkung im elektrischen Feld . . . . .	5
3.2	Ablenkung im magnetischen Feld . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
4.1	Elektronen im elektrischen Feld . . . . .	7
4.2	Elektronen im magnetischen Feld . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>15</b>

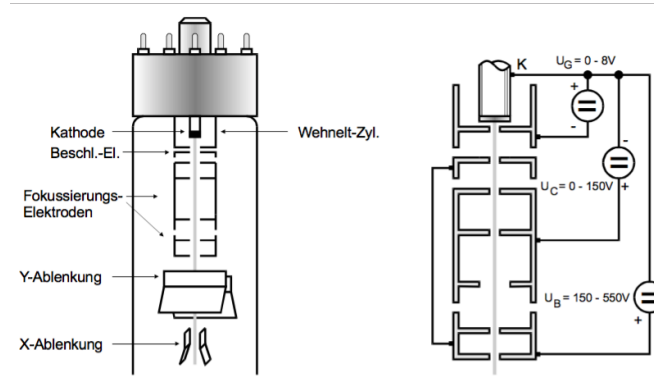
# 1 Zielsetzung

Bei diesen Experimenten soll das Ablenkverhalten eines Elektronenstrahls in einem elektrischen und einem magnetischen Feld untersucht werden. Zudem soll mittels Ablenkung in einem magnetischen Feld die spezifische Elektronenladung sowie das Magnetfeld der Erde am Ort der Messung bestimmt werden.

## 2 Theorie

### 2.1 Kathodenstrahlröhre

Da freie Elektronen üblicherweise mit Luftmolekülen wechselwirken würden, lässt sich dieses Experiment nur im Hochvakuum durchführen, was in diesem Fall durch eine weitgehend evakuierte Kathodenstrahlröhre realisiert wird, welche in Abbildung 1 schematisch dargestellt ist.



**Abbildung 1:** Aufbau einer Kathodenstrahlröhre [2].

In dieser treten zunächst Elektronen aus der sogenannten Kathode aus, was auf dem glühelektrischen Effekt beruht. Die Kathode ist dabei von einem Wehnelt-Zylinder umgeben, über welchen sich durch das negative Potential bezüglich der Kathode die Intensität des Strahls regulieren lässt.

Besitzen die Elektronen genug Energie um die Potentialdifferenz zu überwinden, treten diese durch eine Bohrung aus dem Zylinder aus und werden durch eine Beschleunigungsspannung  $U_B$  auf eine Geschwindigkeit von

$$v_z = \sqrt{\frac{2e_0 \cdot U_B}{m_0}} \quad (1)$$

beschleunigt, welche sich aus dem Energiesatz ergibt. Hierbei bezeichnet  $e_0$  die Elementarladung und  $m_0$  die Elektronenmasse. Anschließend wird der Elektronenstrahl durch eine elektronische Linse mittels inhomogener Felder fokussiert. Daraufhin durchläuft er zwei elektrisch aufladbare Plattenpaare, welche den Strahl aus seiner ursprünglichen Bahn

ablenken und somit den Auftreffpunkt verschieben. Dieser Auftreffpunkt wird mittels Lichtquantenemission auf dem Schirm sichtbar gemacht.

## 2.2 Ablenkung im elektrischen Feld

Das Prinzip der Ablenkung des Elektronenstrahls ist in Abbildung 2 dargestellt.

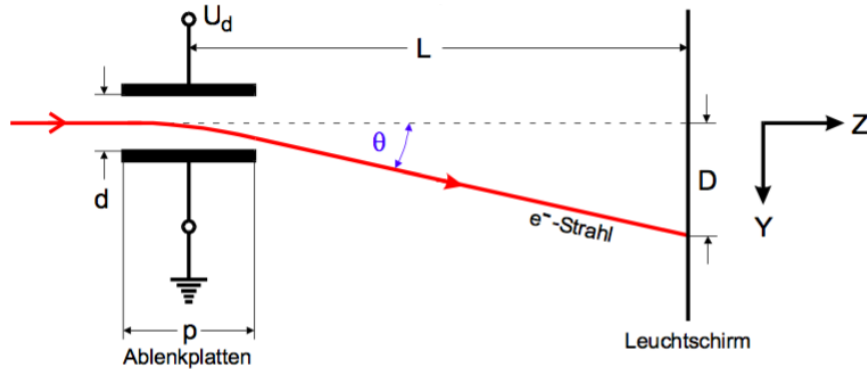


Abbildung 2: Ablenkung des Elektronenstrahls im elektrischen Feld [2].

Durch die Relation  $d \ll p$  lässt sich das Elektrische Feld zwischen den Platten zu

$$E = \frac{U_d}{d} \quad (2)$$

nähern, wobei das Feld außerhalb der Platten praktisch Null ist. Durch die komponentenweise Betrachtung der Geschwindigkeit sowie der Betrachtung des Winkels der Ablenkung lässt sich durch Umformungen folgende Gleichung für die Verschiebung  $D$  herleiten:

$$D = \frac{L \cdot p \cdot U_d}{2d \cdot U_B} \quad (3)$$

Es lässt sich somit eine Proportionalität von  $D$  und  $U_d$  feststellen.

## 2.3 Kathodenstrahl-Oszillograph

Ein weiterer Verwendungszweck der Kathodenstrahlröhre ist der Kathodenstrahl-Oszillograph. Hierzu wird an eines der beiden ablenkenden Plattenpaare eine Sägezahnspannung angeschlossen und an das senkrecht dazu stehende Plattenpaar die zu untersuchende Wechselspannung. Dadurch lässt sich der zeitliche Verlauf der zu untersuchenden Spannung auf dem Leuchtschirm optisch darstellen, sobald die beiden Frequenzen in einem geeigneten rationalen Verhältniss zueinander stehen.

## 2.4 Ablenkung im magnetischen Feld

In einem magnetischen Feld wirkt nur auf relativ zu dem Feld bewegten Ladungen die sogenannte Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}, \quad (4)$$

welche stets senkrecht auf der Bewegungsrichtung der Ladungen sowie dem magnetischen Feld steht und in diesem Experiment für die Ablenkung des Elektronenstrahls sorgt. Aus der Bedingung des Gleichgewichts von Lorentzkraft und Zentrifugalkraft in Verbindung mit dem Energiesatz folgt, dass der Strahl hierdurch einen Kreis mit Radius

$$r = \frac{m_0 \cdot v_0}{e_0} \cdot B \quad (5)$$

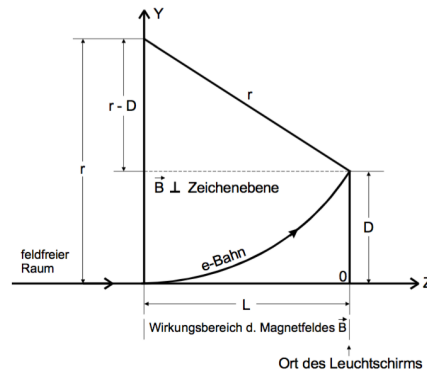
beschreibt. Die konstante Geschwindigkeit der Elektronen  $v_0$  lässt sich mithilfe des Energiesatzes zu

$$v_0 = \sqrt{2U_B \cdot e_0/m_0} \quad (6)$$

bestimmen.

Die tatsächlich messbare Verschiebung des Auftreffpunkts auf dem Leuchtschirm ergibt sich somit durch die Gleichungen 5 und 6 und die geometrischen Beziehungen, welche in Abbildung 3 dargestellt sind zu

$$\frac{D}{D^2 + L^2} = \frac{1}{\sqrt{8U_B}} \sqrt{\frac{e_0}{m_0}} \cdot B. \quad (7)$$



**Abbildung 3:** Ablenkung des Elektronenstrahls im magnetischen Feld [3].

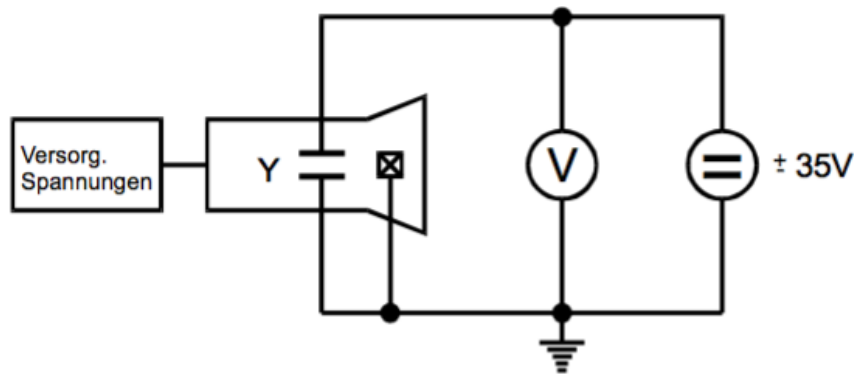
Hieraus kann man zum Beispiel die spezifische Ladung  $\frac{e_0}{m_0}$  der Elektronen bestimmen.

## 3 Durchführung

### 3.1 Ablenkung im elektrischen Feld

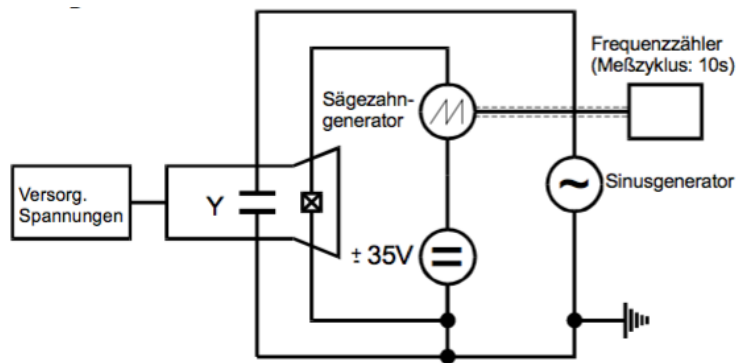
Vor Beginn der Messung muss die Kathodenstrahlröhre zunächst mindestens 1 Minute geheizt werden. Dann wird zuerst die Proportionalität zwischen Verschiebung und Spannung untersucht, indem für fünf verschiedene Beschleunigungsspannungen  $U_B$  zwischen 180 und 500 V die Ablenkspannung so eingestellt wird, dass der Auftreffpunkt jeweils

auf einer der 9 äquidistanten Linien des Schirms liegt. Die zu verwendende Schaltung ist hierbei in Abbildung 4 dargestellt.



**Abbildung 4:** Schaltung zur Untersuchung der Proportionalität [2].

Um mittels der Methode des Kathodenstrahl-Oszillographen eine Sinusspannung zu untersuchen, wird die Schaltung aus Abbildung 5 verwendet.



**Abbildung 5:** Schaltung zur Untersuchung des Kathodenstrahl-Oszillographen [2].

Zur Versuchsdurchführung wird die angelegte Sägezahnspannung solange variiert, bis auf dem Leuchtschirm eine stehende Welle zu erkennen ist. Dies soll für verschiedene rationale Verhältnisse der beiden Spannungen realisiert werden. Schlussendlich muss noch die maximale Auslenkung durch die zu untersuchende Spannung ausgemessen werden.

### 3.2 Ablenkung im magnetischen Feld

Zur Untersuchung der Abhängigkeit der Verschiebung des Auftreffpunktes von dem magnetischen Feld wird eine Helmholtzspule verwendet, in deren Mitte das magnetische Feld durch die Formel

$$B = \mu_0 \frac{8}{\sqrt{125}} \frac{IN}{R} \quad (8)$$

gegeben ist, wobei  $\mu_0$  die magnetische Feldkonstante bezeichnet,  $I$  den Spulenstrom,  $N$  die Windungszahl und  $R$  den Spulenradius. Zunächst wird bei abgeschaltetem Magnetfeld die Kathodenstrahlröhre in die Richtung der Horizontalkomponente ausgerichtet, welche mit einem speziellen Kompass, dem sogenannten Deklinatorium-Inklinatorium ermittelt wurde. Anschließend wird der Auftreffpunkt mittels Verschiebung durch elektrische Felder auf die unterste Linie gelegt. Nun wird bei Beschleunigungsspannungen von einmal 250 V und einmal 350 V die Helmholtzspule angeschaltet und der Spulenstrom und somit das Magnetfeld so variiert, dass der Leuchtfleck jeweils auf den äquidistanten Linien liegt. Zur Bestimmung des Erdmagnetfelds wird die Kathodenstrahlröhre zunächst in Richtung der Nord-Süd-Achse ausgerichtet, welche erneut mit dem Deklinatorium-Inklinatorium ermittelt wird. Der Auftreffpunkt wird dann notiert. Nun wird die Kathodenstrahlröhre in Ost-West-Richtung ausgerichtet, sodass sich durch das somit veränderte Magnetfeld eine Verschiebung ergibt, welche anschließend durch ein mit der Helmholtzspule erzeugtes Gegenfeld genau wieder ausgeglichen wird. Der hierzu verwendete Spulenstrom wird dabei notiert. Zuletzt muss noch mit dem Deklinatorium-Inklinatorium der sogenannte Inklinationswinkel  $\varphi$  bestimmt werden.

## 4 Auswertung

### 4.1 Elektronen im elektrischen Feld

Für die Auswertung sind folgende Daten der Apparaturen gegeben:

$$L = 14,3 \text{ cm}$$

$$p_x = 1,9 \text{ cm}$$

$$n = 20$$

$$r = 0,282 \text{ m}$$

Mit der Empfindlichkeit einer Kathodenstrahlröhre wird das Verhältnis zwischen Ablenkung  $D$  und angelegter Spannung  $U_d$  bezeichnet. In einem  $D$ - $U_d$ -Diagramm entspricht das genau der Steigung. Um die Empfindlichkeit zu bestimmen wird die Ablenkung  $D$  gegen die Spannung  $U_d$  aufgetragen, dies ist in Abbildung 6 zu sehen. Die dazu verwendeten Messdaten sowie die berechneten Empfindlichkeiten sind in Tabelle ?? zu finden.

	$U_B = 180 \text{ V}$	$U_B = 220 \text{ V}$	$U_B = 270 \text{ V}$	$U_B = 370 \text{ V}$	$U_B = 500 \text{ V}$
Käschchen	$U/\text{V}$	$U/\text{V}$	$U/\text{V}$	$U/\text{V}$	$U/\text{V}$
0.00	17.84	21.20	26.40	-	-
0.63	14.35	17.81	21.9	29.90	-
1.25	11.38	14.12	17.28	23.30	34.50
1.88	8.24	10.33	12.54	17.35	25.20
2.50	4.86	6.71	7.99	10.62	16.14
3.13	1.80	2.94	3.17	4.20	6.93
3.75	-1.41	-1.16	-1.66	-2.42	-2.80
4.38	-5.18	-5.16	-7.04	-9.25	-13.15
5.00	-8.40	-9.32	-11.82	-15.98	-23.10
$\frac{D}{U_d} \frac{\text{cm}}{\text{V}}$	-0.19	-0.16	-0.13	-0.095	-0.07

**Tabelle 1:** Gemessenen Spannung in Abhängigkeit der Anzahl der Kästchen und der Beschleunigungsspannung, sowie die entsprechende Empfindlichkeit.

Um die Apparaturkonstante

$$K = \frac{pL}{2d} \quad (9)$$

aus den Messwerten zu bestimmen wird in einem weiteren Diagramm die Empfindlichkeit  $a$  gegen den Kehrwert der Beschleunigungsspannung  $1/U_B$  aufgetragen. Das Ergebnis ist in Abbildung 7 zu sehen.

Die lineare Regression liefert folgende Ausgleichsgerade:

$$\frac{D}{U_d} = (-36,8 \pm 1,5) \frac{1}{\text{V}} + (0,01 \pm 0,00) \frac{\text{cm}}{\text{V}}. \quad (10)$$

Die Steigung der Ausgleichsgerade gibt nach folgender Beziehung die Apperaturkonstante an:

$$D = \frac{pL}{2d} \frac{U_d}{U_B} \Leftrightarrow \frac{D}{U_d} = \frac{Lp}{2d} \frac{1}{U_B} = a \cdot \frac{1}{U_B}. \quad (11)$$

Als theoretischer Wert für die Apperaturkonstante ergibt sich nach 9

$$K = 35,75 \text{ cm}. \quad (12)$$

Nach der Formel

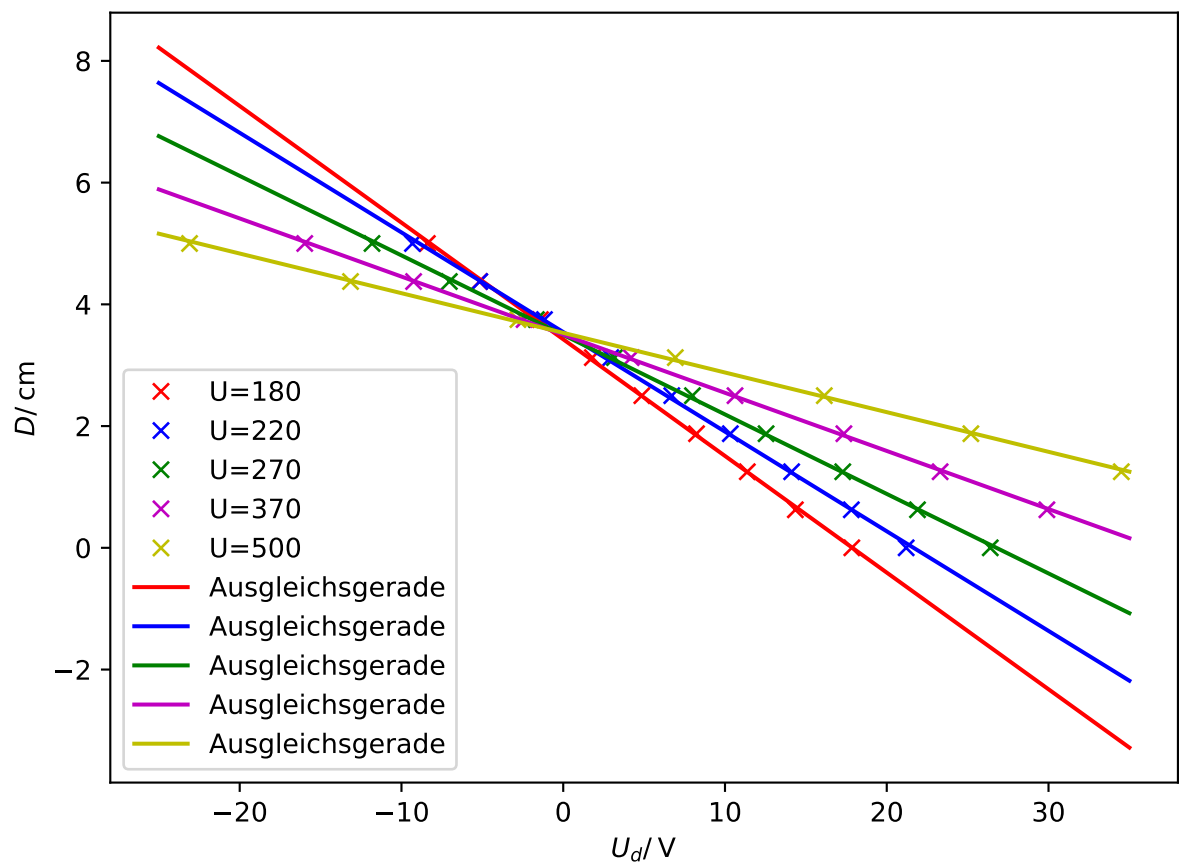
$$\frac{\text{Theoriewert-Messwert}}{\text{Theoriewert}} \cdot 100 \quad (13)$$

berechnet sich die Abweichung zu 4,07%, wobei die Beträge verwendet werden.

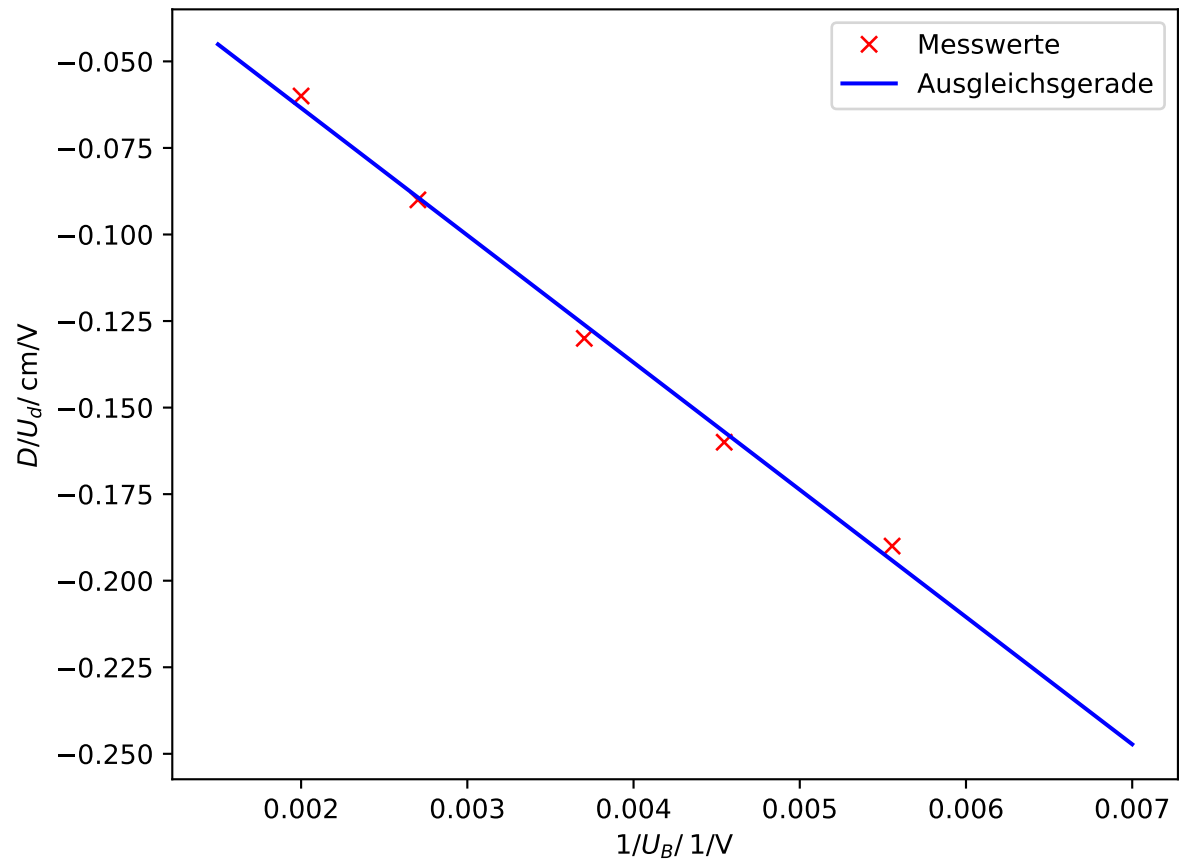
Aus den gemessenen Synchrosinationsfrequenzen in Tabelle ?? wird die Frequenz der Sinusspannung ermittelt, denn stehende Bilder bilden sich nur für ein rationales Verhältnis von  $\nu_{Sge}$  zu  $\nu_{Wechsel}$ . Es gilt die Formel

$$n\nu_{Sge} = \nu_{Wechsel} \quad (14)$$





**Abbildung 6:** Diagramm zur Bestimmung der Empfindlichkeit.



**Abbildung 7:** Empfindlichkeit aufgetragen gegen  $\frac{1}{U_B}$ .

und da  $n$  ein rationales Verhältnis einnehmen muss, hier  $\frac{n}{2}$ , kann daraus die Wechselspannung ermittelt werden. Die werte dafür sind in Tabelle ?? zu sehen.

n	$\nu / 1/s$	$\nu_n - \nu_{n-1}$	$\nu_{wechsel}$
1	23,93	-	-
2	50.00	26.07	26.07
3	60.01	10.01	20.02
4	69.98	9.97	19.94
5	79.93	9.95	19.95
6	89.94	10.01	20.02
7	100.01	10.07	20.14

**Tabelle 2:** Gemessene Frequenzen der Sägezahnspannung, Differenzen zwischen den Messwerten, sowie die Daraus resultierenden Frequenzen für die Wechselspannung.

Aus diesen Werten wird der Mittelwert berechnet und es ergibt sich  $\nu_{wechsel} = (21,02 \pm 0,92)$  Hz. Außerdem wurde die Maximale Auslenkung der stehenden Welle in y-Richtung ausgemessen, diese beträgt 2,5 cm.

## 4.2 Elektronen im magnetischen Feld

Nun soll die Ablenkung der Elektronen im magnetischen Feld untersucht werden. Dazu sind in Tabelle ?? die Messwerte für den Spulenstrom  $I$ , das dazugehörige magnetische Feld  $B$ , sowie die Ablenkung  $D$  der Elektronen zu finden.

	$U_B = 250 \text{ V}$		$U_B = 350 \text{ V}$	
Käschchen	$I/ \text{ A}$	$B/ \text{ mT}$	$I/ \text{ A}$	$B/ \text{ mT}$
0.00	0	0	0	0
0.31	0.15	0.01	0.17	0.01
0.63	0.30	0.02	0.38	0.02
0.94	0.46	0.03	0.54	0.03
1.25	0.64	0.04	0.75	0.05
1.56	0.82	0.05	0.95	0.06
1.88	0.97	0.06	1.10	0.07
2.19	1.10	0.07	1.30	0.08
2.50	1.25	0.08	1.50	0.10
2.81	1.40	0.09	1.65	0.11
3.13	1.60	0.10	1.85	0.12
3.44	1.75	0.11	2.05	0.13
3.75	1.90	0.12	2.25	0.14
4.06	2.10	0.13	2.45	0.16
4.38	2.25	0.14	2.65	0.17
4.69	2.40	0.15	2.85	0.18
5.00	2.55	0.16	3.05	0.19

**Tabelle 3:** Ablenkung  $D$  in Abhängigkeit des Spulenstroms und des Magnetfeldes.

Die Ablenkung wurde für beide Beschleunigungsspannungen gegen das Magnetfeld aufgetragen. Die Messwerte und die lineare Regression sind in den Abbildungen 8 und 9 zu sehen.

Für  $U_B = 250 \text{ V}$  und  $U_B = 350 \text{ V}$  ergeben die Regressionen folgende Ausgleichsgeraden:

$$D = (30,49 \pm 0,18) \frac{\text{cm}}{\text{mT}} \cdot B + (0,02 \pm 0,02) \text{ cm} \quad D = (25,79 \pm 0,14) \frac{\text{cm}}{\text{mT}} \cdot B + (0,03 \pm 0,02) \text{ cm} \quad (15)$$

Aus der Gleichung

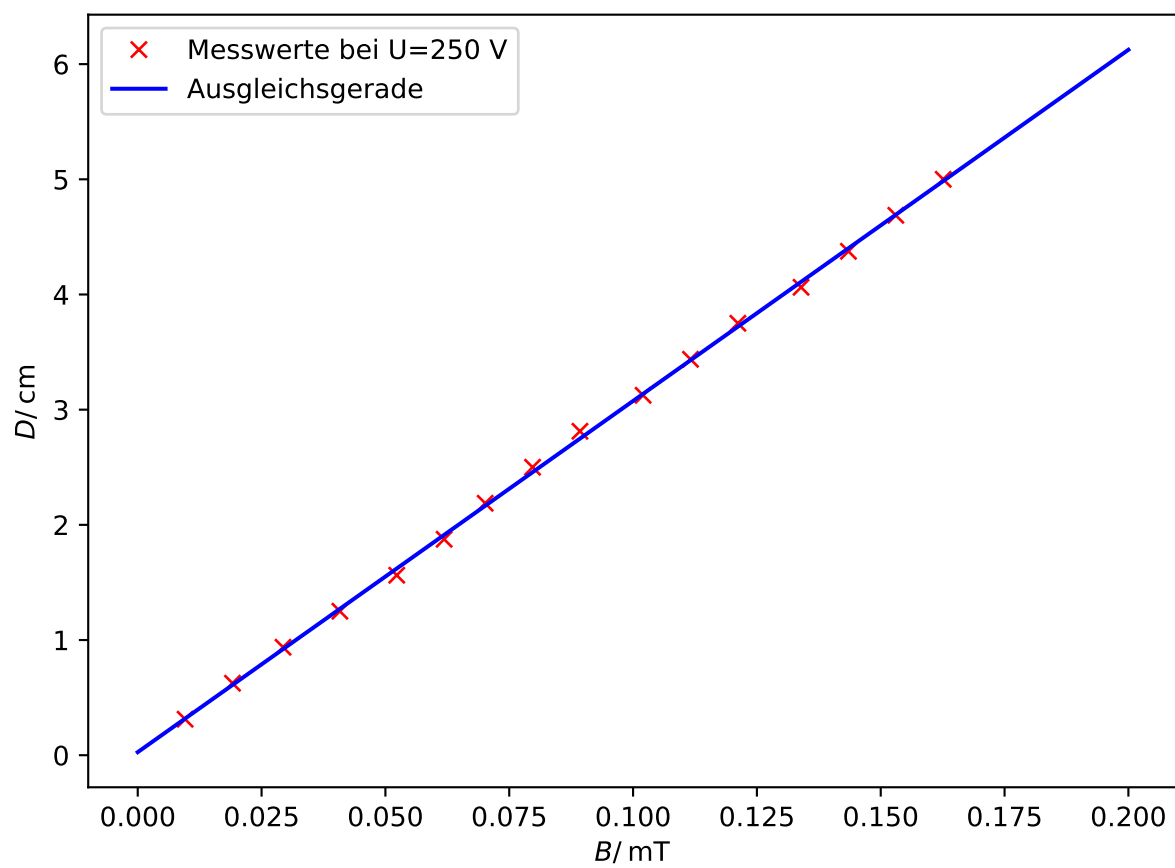
$$D = \left( L + \frac{l}{2} \right) \frac{lB\sqrt{e}}{\sqrt{2U_B}m_e} \quad (16)$$

lässt sich die Steigung

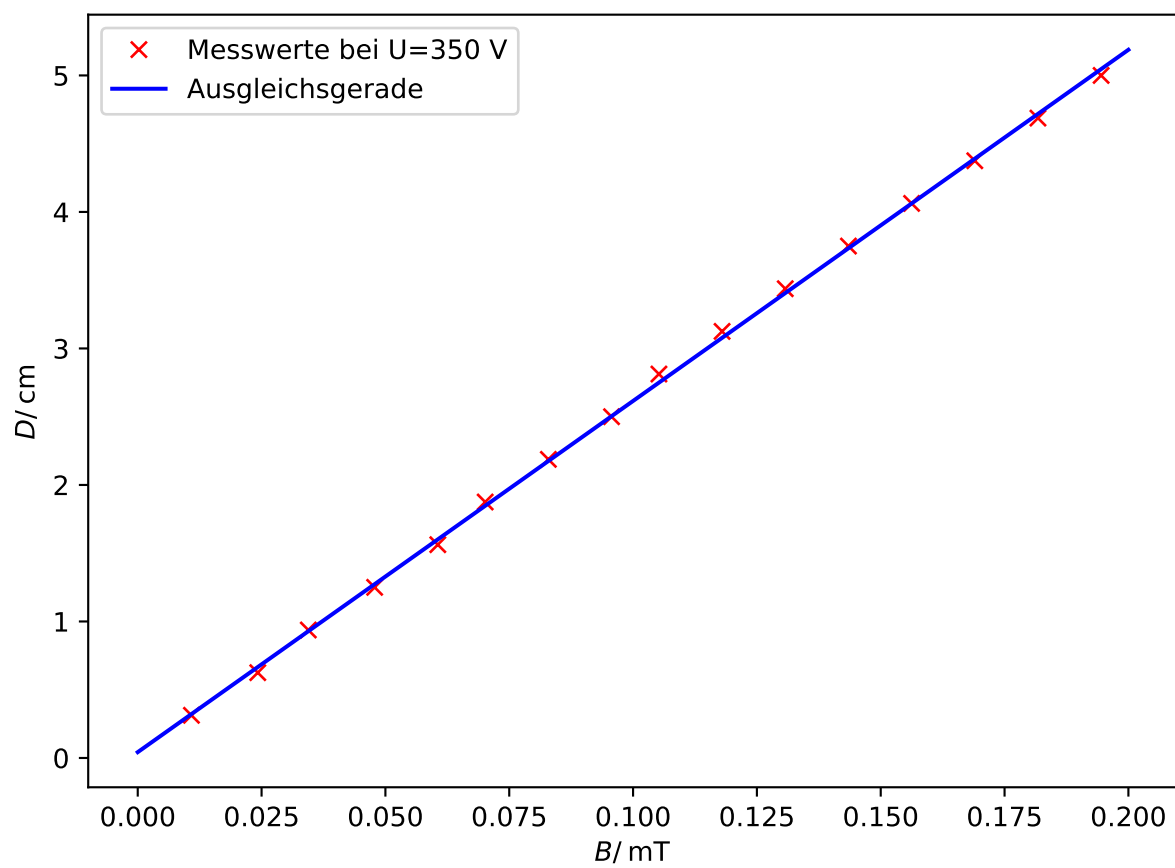
$$a = \left( L + \frac{l}{2} \right) \frac{l\sqrt{2U_B}}{\sqrt{\frac{e}{m_e}}} \quad (17)$$

ablesen. Umstellen nach  $\frac{e}{m_e}$  ergibt

$$\frac{e}{m_e} = \frac{2U_B a^2(2)}{l^2 \left( L + \frac{l}{2} \right)^2}. \quad (18)$$



**Abbildung 8:** Ablenkung der Elektronen bei  $U=250$  V.



**Abbildung 9:** Ablenkung der Elektronen bei  $U=350 \text{ V}$ .

Mit den Werten  $L = 14,3 \text{ cm}$  und  $l = 4 \text{ cm}$  ergeben sich für die beiden Messreihen die folgenden Werte für die spezifische Masse des Elektrons:

$$\frac{e}{m_e} = (1,26 \pm 0,00) \cdot 10^6 \frac{\text{C}}{\text{kg}} \frac{e}{m_e} = (1,26 \pm 0,00) \cdot 10^6 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

Aus den weiteren Messwerten wird die Stärke des Erdmagnetfeldes bestimmt. Dazu wurde der Inklinationwinkel mit  $\phi = 65^\circ$  und die angelegte Spannung mit

$$I_1 = 0,16 \text{ A und } I_2 = 0,16 \text{ A}$$

bestimmt.

Daraus ergibt sich folgender Wert für die horizontale Komponente des Erdmagnetfeldes:

$$B_1 = 1 \cdot 10^{-5} \text{ mT}.$$

Unter der Berücksichtigung des Inklinationwinkels ergibt sich für das Erdmagnetfeld

$$B_{\text{Erde}} = 1,77 \text{ mT}.$$

## 5 Diskussion

Die Apparatkonstante  $K$ , welche über das elektrische Feld bestimmt wird ist mit einer betragsmäßigen Abweichung von 4,07% sehr genau. Der Theoriewert wird mit 35,75 cm bestimmt und die Messung ergibt  $(-36,8 \pm 1,5) \text{ cm}$ . Die unterschiedlichen Vorzeichen lassen sich über die Polung der Kathodenstrahlröhre erklären.

Über die Erzeugung von stehenden Wellen wurde die Frequenz der Wechselspannung zu

$$\nu_{\text{Wechsel}} = (21,02 \pm 0,92) \text{ Hz}$$

bestimmt.

Aus dem zweiten Versuchsteil wird die spezifische Ladung der Elektronen mit

$$\frac{e}{m_e} = (1,26 \pm 0,00) \cdot 10^6 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

bestimmt. Der Vergleich mit dem Theoriewert  $\frac{e}{m_e} = 1,75882 \cdot 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$  [1] ergibt eine Abweichung von 99,9%. Da der Fehler für beide Rechnungen so verschwindend klein ist, dass vernachlässigt werden kann, aber die Abweichung zum Theoriewert doch so hoch ist, ist von einem systematischen Fehler auszugehen. Zum einen ist die Messung der Ablenkung der Elektronen höchst ungenau, da der Referenzpunkt nicht markiert ist und die Verschiebung des Elektronenstrahls sehr schlecht abgemessen werden kann. Zudem wird in der Rechnung das Magnetfeld über den Strom berechnet. Die Kathodenstrahlröhre befindet sich aber in der Mitte des Helmholtzspulenpaares und da das Magnetfeld mit  $B \propto \frac{1}{r^2}$  abfällt ist dieser Wert fehlerbelastet.

## Literatur

- [1] 13. Mai 2018. URL: <https://www.didaktik.physik.uni-muenchen.de/elektronenbahnen/b-feld/e-m-bestimmung/auswertungen.php>.
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 501: Das Michelson-Interferometer.*
- [3] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 502: Das Michelson-Interferometer.*