Versuch 402

Dispersionsmessungen am Glasprisma

Stefanie Hilgers
Stefanie.Hilgers@tu-dortmund.de

Lara Nollen
Lara.Nollen@tu-dortmund.de

Durchführung: 26.06.2018 Abgabe: 03.07.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie **3**
1.1 Zielsetzung . . . 3
1.2 Theorie . . . 3
1.3 Die Dispersion . . . 3
1.4 Das Huygensche Prinzip . . . 3
1.5 Dispersionsgleichung . . . 4
1.6 Fallunterscheidung für Wellenlängen größer als die Absorptionswellenlänge 5
1.7 Fallunterscheidung für Wellenlängen kleiner als die Absorptionswellenlänge 6
1.8 Auflösungsvermögen eines Prismen-Spektralapparates . . . 6
1.9 Theoretischer Anhang . . . 8

2 Durchführung **8**
2.1 Phi-Messung . . . 8
2.2 Eta-Messung . . . 9

3 Auswertung **10**
3.1 Bestimmung des Winkels zwischen den brechenden Oberflächen . . . 10
3.2 Bestimmung der Brechungsinidizes . . . 11
3.3 Bestimmung der Dispersionskurve . . . 12
3.4 Abbesche Zahl . . . 13
3.5 Auflösungsvermögen . . . 13
3.6 Bestimmung der nächsten Absorptionsstelle . . . 13

4 Diskussion **14**

Literatur **14**

1 Theorie

1.1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird die Dispersionsrelation von Licht untersucht. Dispersion bedeutet, dass der Brechungsindex von der Wellenlänge abhäng ist. Dazu wird Licht einer Quecksilber-Cadmium-Lampe auf ein Glasprisma gelenkt und so in Spektrallinien zerlegt. Diese werden unterschiedlich stark gebrochen, wodurch die Brechungsindizes bestimmt werden können.

1.2 Theorie

1.3 Die Dispersion

Im Vakuum bewegt sich Licht mit einer konstanten Geschwindigkeit, der Lichtgeschwindigkeit c. Im Medien ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht kleiner, sie wird mit v bezeichnet. Der Quotient der Geschwindigkeiten definiert den Brechungsindex n:

$$n = \frac{c}{v}. \tag{1}$$

Ein Lichtstrahl der schräg auf eine Grenzfläche trifft erfährt so eine Richtungsänderung, dieses Phänomen wird als Brechung bezeichnet. Ist der Brechungsindex von der Wellenlänge bzw. von der Frequenz abhängig, so spricht man von Dispersion. Eine Funkion, die diese Abhängigkeit beschreibt heißt Dispersionskurve

$$n = f(\lambda). \tag{2}$$

1.4 Das Huygensche Prinzip

Das Huygensche Prinzip besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfront das Zentrum einer neuen, kugelförmigen Elementarwelle ist. Die Brechung an einer Grenzfläche kann durch diese Prinzip erläutert werden und ist in Abbildung 1 dargestellt.

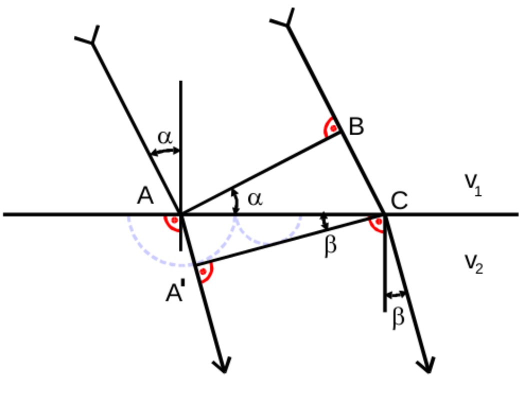

Abbildung 1: Brechung an einer Grenzfläche mit dem Huygenschen Prinzip. [1]

Die Elementarwellen an Punkt A breiten sich mit einer anderen Geschwindigkeit aus, als die Elementarwellen, die von Punkt B ausgehen, da sie sich in unterschiedlichen Medien bewegen. Wenn die Elementarwellen bzw. die durch sie neu gebildete Wellenfront die Grenzfläche erreichen breiten sie sich ebenfalls mit einer anderen Geschwindigkeit aus als zuvor. Durch Überlagerung der Elementarwellen aus Punkt A' und C baut sich eine neue Wellenfront auf. Dadurch ändert sich der Winkel zur Grenzebene gegenüber dem Einfallswinkel.
Aus Abbildung 1 kann das Snelliussche Brechungsgesetz hergeleitet werden, dieses lautet:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{v_1}{v_2} = n. \tag{3}$$

1.5 Dispersionsgleichung

Die Dispersionsgleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Brechungsindex. Um sie herzuleiten darf das Medium nicht als Kontinuum angesehen werden, sondern es muss die elektrische Ladungsverteilung durch Elektronen und Ionenrümpfe berücksichtigt werden. Diese befinden sich in einer Gleichgewichtslage, welche durch das elektrische Wechselfeld der Lichtwellen zu erzwungen Schwingungen angeregt wird. Allgemein existiert bei Schwingungsphänomenen eine Resonanzfrequenz, hier wird jedoch der Wellenlängenbereich betrachtet, in dem keine Resonanz, also nur geringe Absorption auftritt. Für andere Wellenlängenbereiche muss das Problem quantenmechanisch betrachtet werden.
Fällt Licht auf eine Materieschicht, so wirkt duch das elektrische Feld eine periodische Kraft

$$\vec{F_e} = q_h \cdot \vec{E} \tag{4}$$

auf die Ladungen der Materieschicht. (Die magnetische Wechselwirkung durch die Lorentzkraft kann vernachlässigt werden.) Dadurch werden die Teilchen um $\vec{x_h}$ aus Ihrer Ruhelage ausgelenkt und es entsteht ein elektrische Dipol. Gleichzeitig wirkt auf die Teilchen eine rücktreibende Kraft

$$\vec{F_{r,h}} = a_h \vec{x_h} \tag{5}$$

und eine Reibungskraft

$$\vec{F_{d,h}} = f_h \frac{\delta \vec{x_h}}{\delta t}. \tag{6}$$

Daraus ergibt sich die Differentialgleichung

$$m_h \frac{d^2 \vec{x_h}}{dt^2} + f_h \frac{d\vec{x_h}}{dt} + a_h \vec{x_h} = q_h \vec{E_0} \exp(i\omega t), \tag{7}$$

durch Umformungen mit der Relation $\sum_h N_h q_h \vec{x_h}$ und der Maxwellrealtion $n^2 = \epsilon$ ergibt sich ein Ausdruck für den Brechungsindex:

$$\tilde{n}^2 = 1 + \sum_h \frac{1}{\omega_h^2 - \omega^2 + i\frac{f_h}{m_h}\omega} \frac{N_q q_h^2}{m_h \epsilon_0}. \tag{8}$$

Durch ˜ wird angedeutet, dass die Dielektrizitätskonstante und der Brechungsindex als komplexe Größe angesetzt werden müssen. Es gilt:

$$\tilde{n} = n(1 - ik), \tag{9}$$

dann ist der Realteil n der nach Gleichung 1 definierte Brechungsindex. Der Imaginärteil ist relevant für die Absorption.
In Bereichen hoher Absorption trifft dieses Modell nur schlecht zu, daher werden nur Bereiche geringer Absorption betrachtet, in diesen gilt:

$$n^2 k \approx 0. \tag{10}$$

Mit dieser Relation folgt aus Gleichung 8 eine Formel für den Brechungsindex:

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_h \frac{N_h q_h^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_h} \frac{\lambda^2 \lambda_h^2}{\lambda^2 - \lambda_h^2}. \tag{11}$$

Im Folgenden wird angenommen, dass die betrachtete Materie eine Absorptionsstelle bei λ_1 besitzt. Die auf die Materie gestrahlte Wellenlänge λ kann nun größer oder klein sein als die Absorptionswellenlänge, daher sind folgende Fallunterscheidungen zu treffen.

1.6 Fallunterscheidung für Wellenlängen größer als die Absorptionswellenlänge

Wird die Gleichung 11 in eine Potenzreihe entwickelt ergibt sich:

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{N_1 q_1^2 \lambda_1^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_1} \left(1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^4 + ...\right). \tag{12}$$

Vereinfacht kann auch

$$n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_4}{\lambda^4} + ... \tag{13}$$

geschrieben werden. Dabei gilt für die Koeffizienten $A_0, A_2, A_4 > 0$. Für diesen Fall nimmt die Dispersionskurve die Gestalt aus Abbildung 2 an.

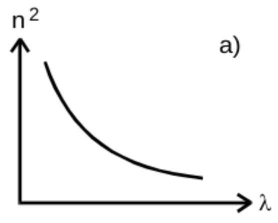

Abbildung 2: Verlauf der Dispersionskurve.
[1]

1.7 Fallunterscheidung für Wellenlängen kleiner als die Absorptionswellenlänge

Für diesen Fall nähert sich die verwendete Wellenlänge von einem kurzwelligeren Bereich an die Absorptionsstelle an. Hier lässt sich Gleichung 11 zu

$$n^2(\lambda) = 1 - \frac{N_1 q_1^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_1} \Big(\Big(\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda^6}{\lambda_1^4} ... \Big). \tag{14}$$

entwickeln. Mit den Koeffizienten $A_i' > 0$ ergibt sich vereinfacht:

$$n^2(\lambda) = 1 - A_2'\lambda^2 - A_4'\lambda^4 - .... \tag{15}$$

Für diesen Fall ist die Dispersionskurve in Abbildung 3 dargestellt.

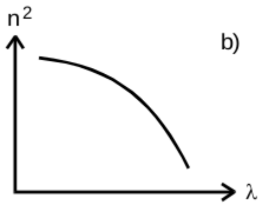

Abbildung 3: Verlauf der Dispersionskurve.
[1]

Beide Abbildungen 2 und 3 haben gemeinsam, dass der Brechungsindex mit zunehmender Wellenlänge abnimmt. Dieses Verhalten wird als normale Dispersion bezeichnet. Der umgekehrte Fall, also die Zunahme des Brechungsindex mit der Wellenlänge wird anormale Dispersion genannt. Anormale Dispersion kann nicht durch die Formeln 13 und 16 beschrieben werden.

1.8 Auflösungsvermögen eines Prismen-Spektralapparates

Um die Frage zu beantworten, wie gering der Wellenlängenunterschied $\Delta\lambda$ werden darf, dass zwei benachbarte Spektrallinien noch getrennt werden können, wird das Auflösungsvermögen A definiert:

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \tag{16}$$

Dabei bezeichnet λ die gemittelte Wellenlänge der beiden Spektrallinien. Das Auflösungsvermögen ist durch Beugungserscheinungen beschränkt, denn das Prisma wirkt aufgrund seiner endlichen Größe wie eine spaltförmige Blende. Deshalb wird in der Brennebene kein scharfes Bild, sondern eine Beugungsfigur abgebildet. Fallen nun zwei Wellen mit leicht unterschiedlicher Wellenlänge in den Spektralapparat, so werden sie aufgrund der Dispersion unterschiedlich stark gebrochen. Der Richtungsunterschied sei $\Delta\eta$. Es entstehen in der Brennebene zwei leicht unterschiedliche Brechungsfiguren, deren Maximum leicht gegeneinander verschoben ist. Siehe dazu Abbildung 4.

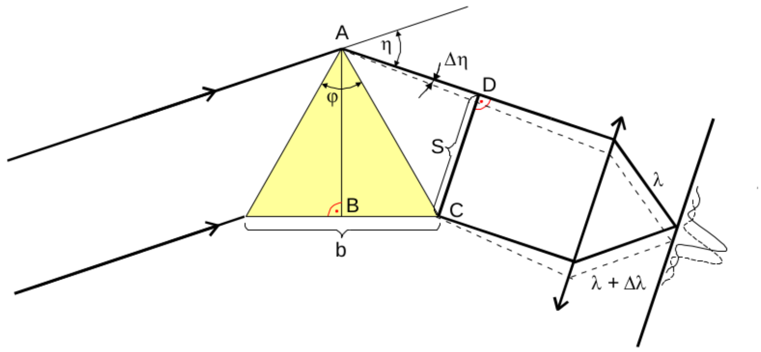

Abbildung 4: Skizze eines Prismen-Spektralapparates.
[1]

Eine Trennung der Spektrallinien soll noch möglich sein, wenn ein Maximum genau in ein Minimum der anderen Wellenlänge fällt. Das erste Beugungsminimum liegt immer an der Stelle

$$\sin\theta_{min} = \frac{\lambda}{s}. \tag{17}$$

(s=Spaltbreite) Für den Richtungsunterschied $\Delta\eta$ folgt

$$\sin(\Delta\eta) = \frac{\lambda}{s} \tag{18}$$

mit der Kleinwinkelnäherung ergibt sich:

$$\Delta\eta = \frac{\lambda}{s}. \tag{19}$$

Nach weiteren Umformungen und der Verwendung der Basisbreite b des Prismas lässt sich folgender Ausdruck für das Auflösungsvermögen herleiten:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = b\frac{dn}{d\lambda}. \tag{20}$$

Die Ableitung von $n(\lambda)$ nach λ ergibt sich zu

$$\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\sqrt{A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}} = -\frac{A_2}{\lambda^3}\sqrt{A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}}, \tag{21}$$

somit kann das Auflösungsvermögen über

$$A = b\frac{A_2}{\lambda^3}\sqrt{A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}}. \tag{22}$$

berechent werden.

1.9 Theoretischer Anhang

Um eine möglichst genaue Dispersionsgleichung zu erhalten, muss entschieden werden, welche der möglichen Dispersionsgleichungen 13 und 16 sich den Wertepaaren am besten anpasst. Um das herauszufinden kann die Methode der kleinsten Quadrate verwendet werden um die optimalen Koeffizienten A_i und A'_1 zu bestimmen. Die Summe der Abweichungsquadrate errechnet sich nach:

$$s_n^2 = \frac{1}{z-2} \sum_{i=1}^{z} \Big(n^2(\lambda_i) - A_0 - \frac{a_2}{\lambda_i^2} \Big) \tag{23}$$

$$\text{bzw.} s_n'^2 = \frac{1}{z-2} \sum_{i=1}^{z} \Big(n^2(\lambda_i) - A'_0 + A'_2 \lambda_i^2 \Big) \tag{24}$$

$$. \tag{25}$$

Es wird die Dispersionsrelation mit dem kleineren s^2 als passend angenommen.
Nicht jedes Material streut die Farben gleich stark, daher wird mit

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} \tag{26}$$

die Abbelsche Zahl definiert, die ein Maß für die Farbstreuung darstelt. Dabei sind $n_C, n_D \text{und} n_F$ als die Brechungsindices der Frauenhoferschen Linien definiert.
$\lambda_C = 656\ nm,\ \lambda_D = 589\ nm,\ \lambda_F = 486\ nm$

2 Durchführung

Die Durchführung gliedert sich in zwei Teile, zum einen die Messung des brechenden Winkels φ des Prismas, zum anderen die Messung der Beugungswinkel η der Spektrallinien.

2.1 Phi-Messung

Für diese Messung wird das Prisma so in den Strahlengang gebracht, dass das Licht parallel auf die Spitze der brechenden Kanten fällt. Dabei wird das Licht von den Prismenoberflächen reflektiert. Dieser Aufbau ist in Abbildung 5 zu sehen.

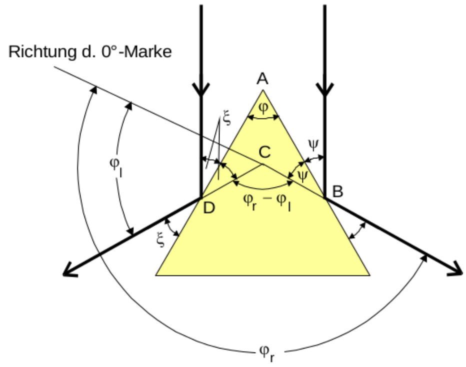

Abbildung 5: Bestimmung des Winkels zwischen den brechenden Kanten. [1]

Es werden 7 verschiedene Wertepaare von den Winkeln φ_r und φ_l, unter denen der reflektierte Strahl zu beobachten ist gemessen. Dazu wird die Position des Prismas vor jeder Messung leicht verändert. Der gesuchte Wilkel φ ergibt sich durch

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_r - \varphi_l). \tag{27}$$

Der Versuchsaufbau, sowie die Messapparatur sind in Abbildung 6 zu sehen.

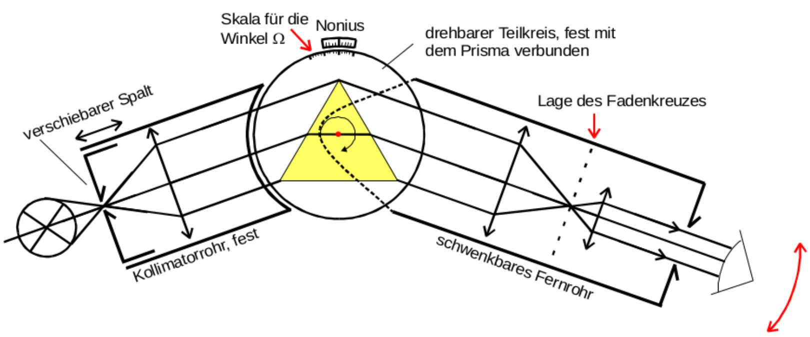

Abbildung 6: Aufbau und Messapparatur. [1]

2.2 Eta-Messung

Um die Beugungswinkel η der Spektrallinien zu messen muss ein paralleler Strahlengang vorliegen. Dazu muss der reflektierte Strahl mit einer Spektralline übereinstimmen. Ist die Messapparatur so eingestellt, dass das Fadenkreuz, der reflektierte Strahl und die Spektrallinie übereinander liegen, wird der Winkel abgelesen. Diese Messung wird für alle Spektrallinien vorgenommen. Nachdem das Prisma gedreht wurde wird die Messung mit eiener spiegelsymmetrischen Anordnung, wie in Abbildung 7, wiederholt.

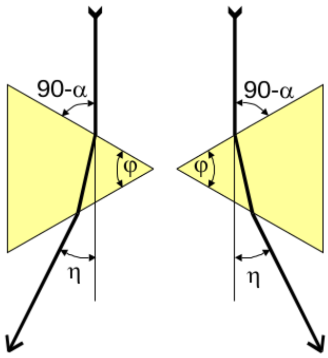

Abbildung 7: Spiegelsymmetrische Anordnung zur Bestimmung des Brechungswinkels. [1]

Aus den Wertepaaren η_r und η_l ergibt sich der gesucht Brechungswinkel durch:

$$\eta = 180 - (\eta_r - \eta_l). \tag{28}$$

Der Brechungsindex kann aus φ und η mit der Formel

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\eta+\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \tag{29}$$

berechnet werden.

3 Auswertung

3.1 Bestimmung des Winkels zwischen den brechenden Oberflächen

Die Messwerte zur Bestimmung des Winkels φ zwischen den brechenden Oberflächen befinden sich in Tabelle 1, zusammen mit den durch Gleichung 29 errechneten Werten.

Tabelle 1: Messwerte und Ergebnisse der Bestimmung von φ

φ_l / °	φ_r / °	φ / °
101,8	221,9	60,05
97,0	216,9	59,95
93,7	213,6	59,95
96,6	216,7	60,05
89,1	209,2	60,05
87,7	207,7	60,00
84,6	204,6	60,00

Durch die Gleichung

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{30}$$

lässt sich der Mittelwert bilden, wobei der dazugehörige Fehler sich durch

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} \tag{31}$$

ergibt. Somit ergibt sich insgesamt:

$$\varphi = 60,01° \;\pm\; 0,02°$$

3.2 Bestimmung der Brechungsinidizes

Die gemessenen Wertepaare aus Ω_l und Ω_r lassen sich in Tabelle 2 ablesen. Aus Gleichung 30 lässt sich hieraus der Winkel η berechnen, aus welchem sich wiederum durch Gleichung 31 der jeweilige Brechungsindex bestimmen lässt. Die Ergebnisse sind ebenfalls in Tabelle 2 aufgeführt.

Tabelle 2: Messwerte und Ergebnisse zur Bestimmung von ν und n

λ / nm	Ω_l / °	Ω_r / °	η / °	n	Δn
435,8	63,4	313,5	70,1	1,813	0,020
467,8	64,4	312,4	68,0	1,797	0,019
480,0	65,0	311,8	66,8	1,788	0,019
508,6	65,4	311,5	66,1	1,783	0,019
546,1	65,9	311,0	65,1	1,775	0,018
577,0	66,3	310,4	64,1	1,767	0,018
623,4	66,6	310,2	63,6	1,762	0,018
643,9	67,2	309,8	62,6	1,754	0,018

Der Fehler von n ergibt sich hierbei durch die Gauß´sche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}\,, \tag{32}$$

in diesem Fall also

$$\Delta n = \sqrt{\left(\frac{\sin(-\frac{\eta}{2})}{\sin^2(\frac{\varphi}{2})}\right)^2 \cdot (\Delta\varphi)^2}\,. \tag{33}$$

3.3 Bestimmung der Dispersionskurve

Die Wertepaare aus n^2 und λ werden zunächst in der Abbildung 8 graphisch dargestellt.

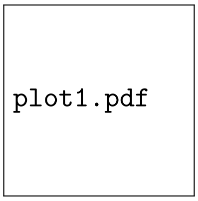

Abbildung 8: Wertepaare zur Ermittlung der Dispersionskurve

Nun muss zwischen den beiden möglichen Dispersionskurven unterschieden werden. Dazu werden zunächst die optimalen Parameter A_0 und A_2, sowie A'_0 und A'_2 bestimmt, indem eine lineare Ausgleichsrechnung der Form

$$y = a \cdot x + b \tag{34}$$

durchgeführt wird. Für die Gleichung 13 werden dazu Wertepaare aus $\frac{1}{\lambda^2}$ und n^2 verwendet (Dispersionskurve 1), für die Gleichung 16 Wertepaare aus λ^2 und n^2 (Dispersionskurve 2). Hieraus ergeben sich die Parameter:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_0 &= 2.92 \pm 0,01 \\
\mathrm{A}_2 &= (68\,122 \pm 3750)\,\mathrm{m}^2 \\
\mathrm{A}'_0 &= 3.41 \pm 0.03 \\
\mathrm{A}'_2 &= (-8{,}2 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-7}\,\frac{1}{\mathrm{m}^2}
\end{aligned}$$

Durch diese Parameter lassen sich die jeweiligen Dispersionskurven erstellen, welche in Abbildung 9 graphisch dargestellt sind.

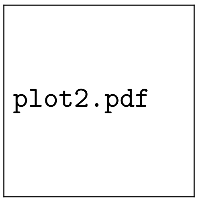

Abbildung 9: Wertepaare und Dispersionskurven

Hieran lässt sich bereits erkennen, dass die Dispersionskurve 1 die Wertepaare genauer approximiert und somit vermutlich geeigneter ist. Um eine genauere Aussage treffen zu können, werden zudem die Abweichungsquadrate gemäß Gleichung 27 bestimmt, woraus sich für die jeweiligen Abweichungsquadrate die Werte

$$\begin{aligned}
\mathrm{s}_\mathrm{n}^2 &= 0,00010 \\
\mathrm{s}_\mathrm{n}'^2 &= 0,00047
\end{aligned}$$

ergeben. Auch hieran lässt sich erkennen, dass $s_n'^2$, also das Abweichungsquadrat von Dispersionskurve 2 deutlich größer ist (Faktor 4,7) als s_n^2. Dispersionskurve 1 approximiert die Kurve also deutlich besser, sodass sich also der Brechungsindex durch die Formel

$$n(\lambda) = \sqrt{2,92 + \frac{68\,122\,\mathrm{m}^2}{\lambda^2}} \tag{35}$$

annähern lässt.

3.4 Abbesche Zahl

Zur Bestimmung der Abbeschen Zahl wird Gleichung 28 verwendet. Hierzu müssen zunächst die Brechungsindizes der Fraunhofer Linien bestimmt werden, wozu Gleichung 37 genutzt wird. Die Ergebnisse befinden sich in Tabelle 3

Tabelle 3: Brechungsindizes der Fraunhofer Linien

Linie	λ / nm	Brechungsindex
λ_c	656	1,7540
λ_d	589	1,7648
λ_f	486	1,7907

Hieraus ergibt sich die Abbesche Zahl zu

$$\nu = 20,84\,. \tag{36}$$

3.5 Auflösungsvermögen

Das Auflösungsvermögen lässt sich aus der Gleichung 23 bestimmen, wobei $b = 3\,\mathrm{cm}$ die Basislänge des Prismas bezeichnet. Hiermit wird das Auflösungsvermögen für die Fraunhofer Linien bestimmt, wobei die Ergebnisse in Tabelle 4 angegeben sind.

Tabelle 4: Auflösungsvermögen der Fraunhofer Linien

Linie	λ / nm	Auflösungsvermögen
λ_c	656	2353
λ_d	589	3251
λ_f	486	5787

3.6 Bestimmung der nächsten Absorptionsstelle

Aus den Gleichungen 13 und 12 folgt, dass die nächste Absorptionsstelle sich durch die Gleichung

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{A_2}{A_0 - 1}} \tag{37}$$

gegeben ist, die sich somit zu

$$\lambda_1 = 188{,}45\,\mathrm{nm}$$

ergibt und im ultravioletten Bereich liegt.

4 Diskussion

In dem Versuch wurde der Winkel zwischen den brechenden Oberflächen zu

$$\varphi = 60,01° \;\pm\; 0,02°$$

bestimmt. Da ein komplett symmetrisches Prisma verwendet wurde, beträgt der theoretische Wert also 60,00° Durch die Formel

$$\frac{|\mathrm{Wert}_{\mathrm{Theorie}} - \mathrm{Wert}_{\mathrm{Messung}}|}{\mathrm{Wert}_{\mathrm{Theorie}}}$$

lässt sich die relative Abweichung zu 0,0167% bestimmen, was für eine sehr genaue Messung spricht.
Das Abweichungsquadrat

$$\mathrm{s}_{\mathrm{n}}^2 = 0,00010$$

der gewählten Funktion ist ebenfalls sehr klein, sodass auch dies für die Genauigkeit der Messung spricht.
Der Theoriewert der Abbeschen Zahl für SF14 beträgt 26,53 [2]. Dies bedeutet also eine relative Abweichung von 21,45% zu dem errechnete Wert von 20,84. Dies ist eine recht große Abweichung im Vergleich zu den vorherigen Auswertungsteilen, was auf einen systematischen Fehler hindeutet, beispielsweise das Vernachlässigen von Termen mit λ^4.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch V402, Dispersionsmessung am Glasprisma.*

[2] *Optical Glass Properties.* URL: `https://www.physics.ohio-state.edu/~dws/class/8820.uf/schott/optic_catalog.pdf`.