

Versuch 353

Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Stefanie Hilgers
Stefanie.Hilgers@tu-dortmund.de

Lara Nollen
Lara.Nollen@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.11.2017

Abgabe: 28.11.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	RC-Kreis und Relaxationsverhalten	3
2.2	Relaxationsvorgänge mit periodischer Auslenkung	4
2.3	RC-Kreis als Integrator	5
3	Durchführung	5
4	Auswertung	8
4.1	Bestimmung der RC-Konstanten durch die Entladungskurve	8
4.2	Bestimmung der RC-Konstanten durch Anregung mit einer Sinusspannung	10
4.3	Bestimmung der RC-Konstanten durch die Phasenverschiebung	12
4.4	Der RC-Kreis als Integrator	15
4.4.1	Sinusschwingen	15
4.4.2	Dreiecksspannung	16
4.4.3	Rechtecksspannung	17
5	Diskussion	18
	Literatur	18

1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird zunächst die Zeitkonstante eines RC-Kreises bestimmt. Anschließend wird die Amplitude der Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Frequenz und die Phasenverschiebung von Kondensator- und Generatorspannung ebenfalls in Abhängigkeit der Frequenz gemessen. Zum Schluss wird gezeigt, dass der RC-Kreis Spannungen integrieren kann.

2 Theorie

2.1 RC-Kreis und Relaxationsverhalten

Ein System zeigt ein Relaxationsverhalten, wenn es aus seinem Ausgangszustand ausgelenkt wurde und nicht-oszillatorisch in diesen zurückkehrt. Dabei ist die Änderungsgeschwindigkeit der Größe A zum Zeitpunkt t meist proportional zur Abweichung von A zum Endzustand $A(\infty)$

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)]. \quad (1)$$

Durch Integration dieser Gleichung von 0 bis t folgt

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)] \cdot \exp(ct) \quad (2)$$

womit A zum Zeitpunkt t berechnet werden kann. Dabei muss $c < 0$ gelten, damit A beschränkt bleibt.

Ein Beispiel für Relaxationsvorgänge ist das Auf- und Entladen eines Kondensators über einen Widerstand.

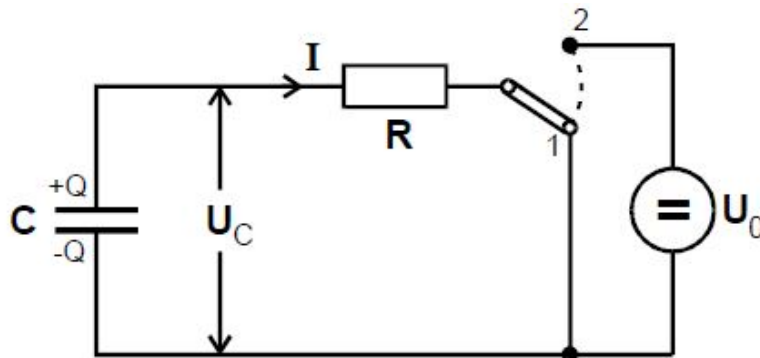


Abbildung 1: Entladung (Stellung 1) und Aufladung (Stellung 2) eines RC-Kreises.
[1]

Entladung eines Kondensators

Für die Spannung U_C am Kondensator mit der Kapazität C und der Ladung Q gilt:

$$U_C = \frac{Q}{C}. \quad (3)$$

Mit Hilfe des ohmschen Gesetzes $U = R \cdot I$ und der Beziehung $\dot{Q} = I$ folgt aus (??) eine Differentialgleichung für die Ladung des Kondensators.

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} Q(t) \quad (4)$$

Diese Differentialgleichung hat die gleiche Gestalt wie Gleichung (1). Mit der Annahme, dass der Kondensator nach $t \rightarrow \infty$ entladen ist, folgt nach Integration

$$Q(t) = Q(0) \exp\left(\frac{-t}{RC}\right). \quad (5)$$

Aufladen eines Kondensators

Ähnlich wie in Abschnitt 2.3 kann eine Gleichung für den Aufladevorgang des Kondensators hergeleitet werden. Hier gelten die Randbedingungen $Q(0) = 0$ und $Q(\infty) = CU_0$. Somit ergibt sich für den Aufladevorgang mit einer äußeren Spannungsquelle der Spannung U_0 die Gleichung

$$Q(t) = CU_0 \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)\right). \quad (6)$$

Dabei wird der Ausdruck RC als Zeitkonstante des Relaxationsvorganges bezeichnet, er ist ein Maß für die Geschwindigkeit, mit der das System seinem Endzustand entgegenstrebt.

2.2 Relaxationsvorgänge mit periodischer Auslenkung

Wenn ein System von außen periodisch aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt wird, treten ebenfalls Relaxationsvorgänge auf. In dem Beispiel des RC-Kreises wird das System mit einer Wechselspannung ausgelenkt, wie in Abbildung 2 zu sehen.

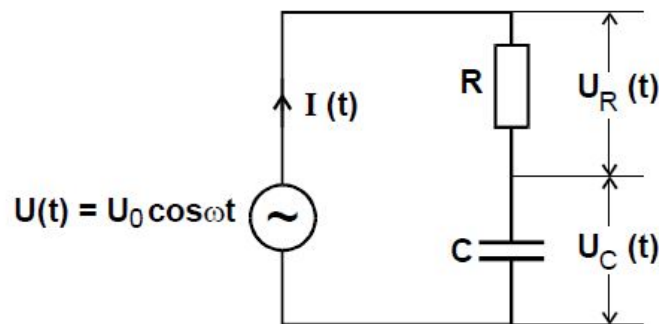


Abbildung 2: Periodische Anregung eines RC-Kreises.
[1]

An die Schaltung wird eine äußere Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) \quad (7)$$

mit der Kreisfrequenz ω angelegt. Gilt für diese $\omega \ll 1/RC$, so ist die Spannung U_C am Kondensator nahezu der angelegten Spannung $U(t)$. Mit steigender Frequenz sinkt die Amplitude von U_C und es bildet sich eine Phasenverschiebung ϕ aus, da Auf- und Entladung des Kondensators immer weiter hinter der angelegten Spannung zurückbleiben. Für diesen Problem wird folgender Ansatz gemacht:

$$U_C(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)). \quad (8)$$

Mit dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz und weiteren Umformungen folgt:

$$\phi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (9)$$

für die Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung. An dieser Formel wird deutlich, dass die Phasenverschiebung für sehr kleine ω gegen Null geht und sich für große ω dem Wert $\frac{\pi}{2}$ annähert. Aus weiteren Rechnungen folgt für die Frequenzabhängigkeit der Amplitude der Kondensatorspannung

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}. \quad (10)$$

Daraus ergibt sich, dass $A(\omega)$ für $\omega \rightarrow 0$ gegen U_0 geht und für $\omega \rightarrow \infty$ gegen Null geht. Für $\omega = 1/RC$ ergibt sich für $A(\omega)$ $U_0/\sqrt{2}$. Da von dieser RC-Schaltung niedrige Frequenzen durchgelassen werden und hohe Frequenzen nicht, wird diese Schaltung auch als Tiefpass bezeichnet.

2.3 RC-Kreis als Integrator

Gilt für die äußere angelegte Frequenz $\omega \gg 1/RC$, so kann gezeigt werden, dass ein RC-Kreis wie in Abbildung 2 eine periodische Spannung integrieren kann. Unter diesen Voraussetzungen gilt:

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt'. \quad (11)$$

>

3 Durchführung

Zu Beginn des Versuchs wird die Zeitkonstante RC bestimmt. Dies erfolgt über die in Abbildung 3 zu sehende Schaltung. Das Oszilloskop wird so eingestellt, dass ein Entladeforgang der Kondensatorspannung sichtbar wird. Mit Hilfe der Cursor-Funktion am Oszilloskop werden Messdaten der Kondensatorspannung U_C und der Zeit t erfasst.

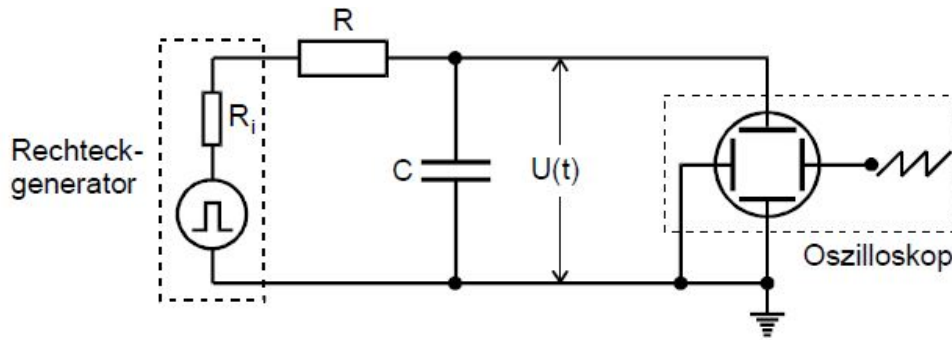


Abbildung 3: Messschaltung zur bestimmung der Zeitkonstante.
[1]

Anschließend wird die Amplitude A der Kondensatorsspannung in Abhängigkeit der Frequenz gemessen. Dies erfolgt mit derin Abbildung 4 dargestellten Schaltung.

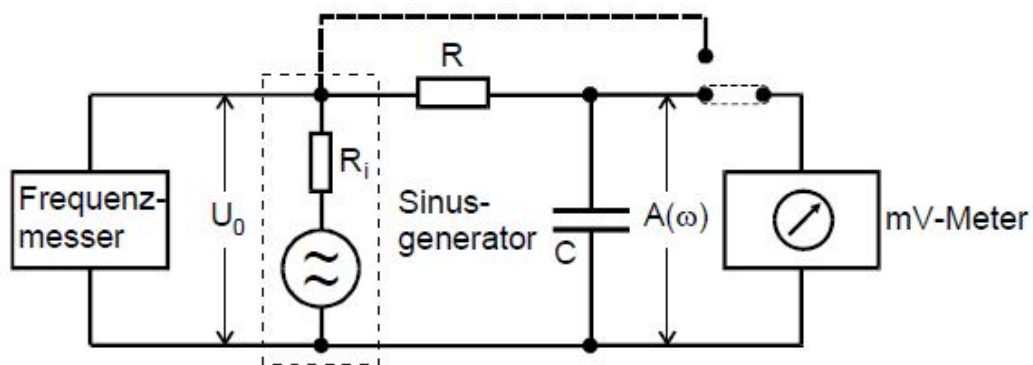


Abbildung 4: Messschaltung zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung.
[1]

Die Generatorfrequenz ν wird schrittweise erhöht, dabei werden Wertepaare der Frequenz ν und der Amplitude A gemessen. Um die Phasenverschiebung ϕ der Generator- und der Kondensatorspannung zu Messen, wird die in Abbildung 5 dargestellte Schaltung verwendet.

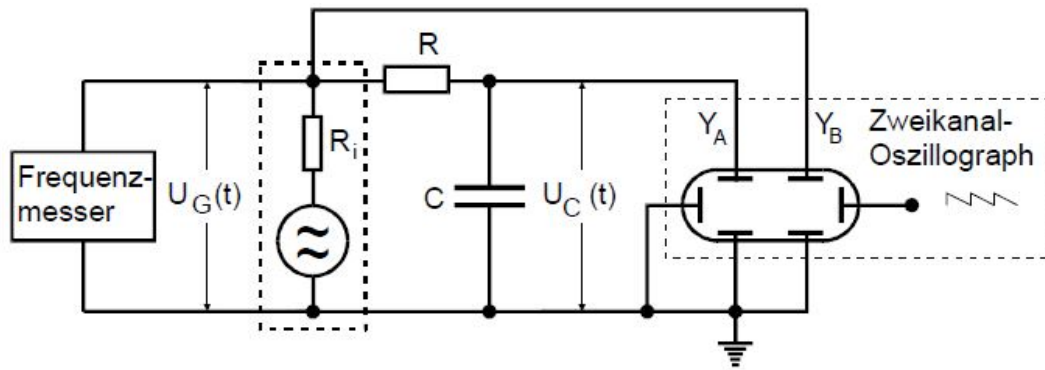


Abbildung 5: Messschaltung zur Bestimmung der Phasenverschiebung.

[1]

Auf dem Y_B Eingang der Oszilloskops wird die Kondensatorspannung U_C und auf dem Y_A Eingang die Generatorspannung U_G aufgetragen. Wenn die Phasenverschiebung größer als Null ist, ergibt sich ein Schirmbild wie in Abbildung 6.

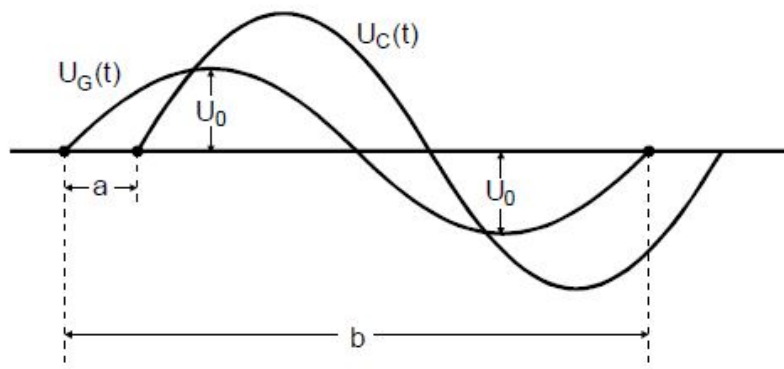


Abbildung 6: Beispielhafte Darstellung der Phasenverschiebung der Kondensator- und der Generatorspannung.

[1]

An diesem Schirmbild wird mit Hilfe der Cursor-Funktion der Abstand der Nulldurchgänge a und die Schwingungsdauer b gemessen. Um zu zeigen, dass ein RC-Kreis bestimmte Spannungen integrieren kann, wird die Schaltung aus Abbildung 5 verwendet. Die Frequenz der Generatorspannung wird konstant gehalten und nacheinander wird eine Rechteck-, Sinus- und Dreieckspannung auf den RC-Kreis gegeben. Das Oszilloskop wird so eingestellt, dass die angelegte Spannung und die integrierte Spannung eingezeigt wird. Von diesem Schirmbild wird ein Thermodruck angefertigt.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der RC-Konstanten durch die Entladungskurve

In der Abbildung ist die zur Ausmessung verwendete Entladungskurve des Kondensators, welcher durch einen Generator mit der Frequenz von $\nu = 50 \text{ Hz}$ mit $U = 12.00 \text{ V}$ aufgeladen wurde, zu sehen.

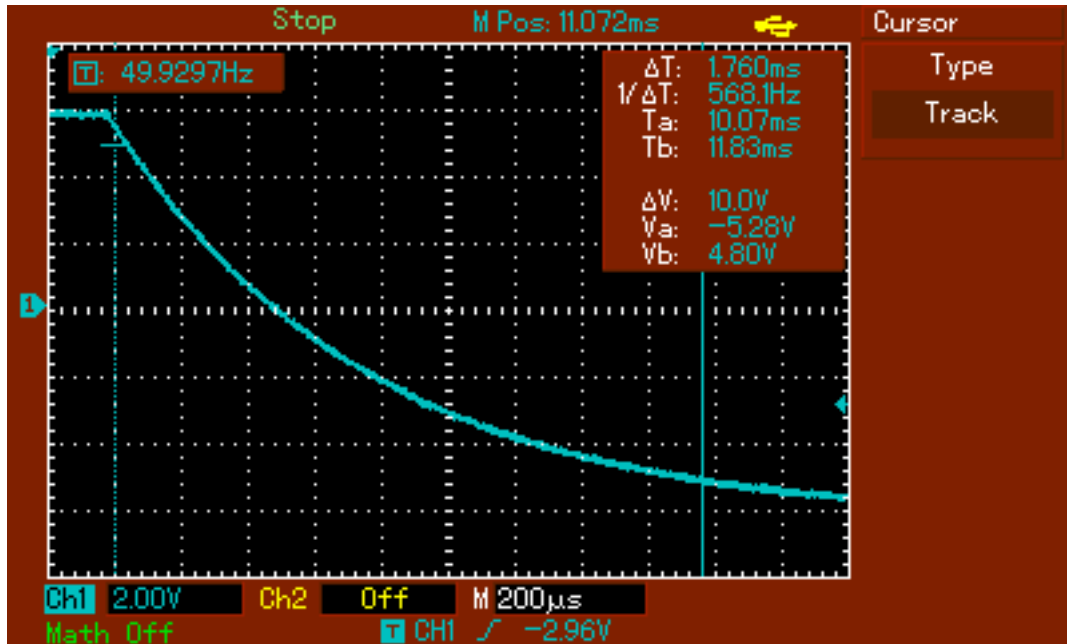


Abbildung 7: Entladungskurve

In Tabelle 1 sind die aus ihr gewonnenen Messwertpaare zusammen mit dem Verhältniss $\frac{U}{U_0}$ und dessen Logarithmus, welcher zur Auswertung nötig ist, abzulesen.

Tabelle 1: Messwerte zur Bestimmung der RC-Konstanten

t / ms	U_C / V	$\frac{U_C}{U_0}$	$\ln \frac{U_C}{U_0}$
0.000	12.00	1.000	0.000
0.080	10.88	0.907	-0.098
0.160	9.84	0.820	-0.198
0.240	8.96	0.747	-0.292
0.320	8.16	0.680	-0.386
0.400	7.44	0.620	-0.478
0.480	6.80	0.567	-0.568
0.560	6.16	0.513	-0.667
0.640	5.68	0.473	-0.748
0.720	5.20	0.433	-0.836
0.800	4.72	0.393	-0.933
0.880	4.32	0.360	-1.022
0.960	4.00	0.333	-1.099
1.040	3.68	0.307	-1.182
1.120	3.36	0.280	-1.273
1.200	3.12	0.260	-1.347
1.280	2.88	0.240	-1.427
1.360	2.64	0.220	-1.514
1.440	2.48	0.207	-1.577
1.520	2.32	0.193	-1.643
1.600	2.16	0.180	-1.715
1.680	2.00	0.167	-1.792
1.760	2.00	0.167	-1.792

Zur Bestimmung der RC-Konstante wird dann der Logarithmus des Verhältnisses gegen die Zeit in einem halblogarithmischen Diagramm aufgetragen, wie in Abbildung 8 zu sehen ist, und eine lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt.

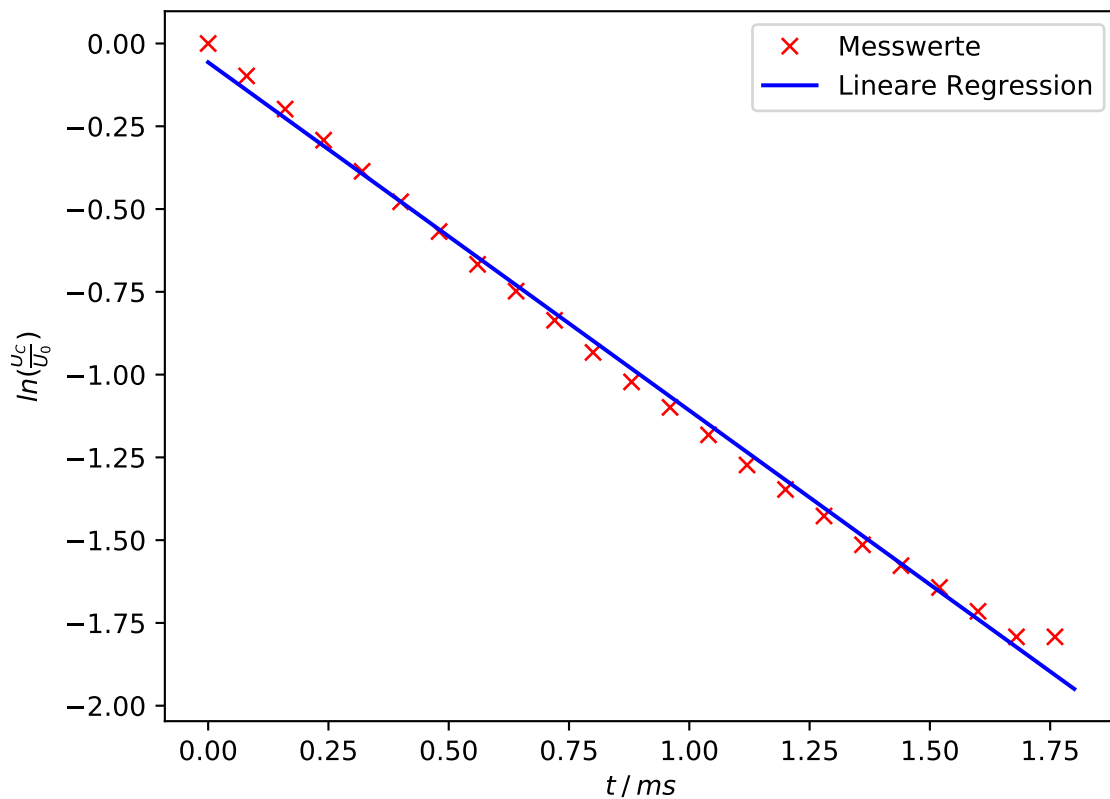


Abbildung 8: Halblogarithmisches Diagramm des Entladevorgangs

Hieraus ergeben sich für die Steigung a und den y-Achsenabschnitt die Parameter

$$a = (-1,0513 \pm 0,0015) \text{ 1/ms}$$

$$b = -0.057 \pm 0.016$$

Nach Umstellen der Gleichung 5 ergibt sich für die RC Konstante:

$$\text{RC} = -\frac{t}{\log\left(\frac{U}{U_0}\right)} = -\frac{1}{a} = (0,951 \pm 0,014) \text{ ms} \quad (12)$$

4.2 Bestimmung der RC-Konstanten durch Anregung mit einer Sinusspannung

Eine weitere Methode zur Bestimmung der RC-Konstanten ist das Anlegen einer Sinusspannung, wobei die Frequenz ν variiert wird und die entsprechenden Amplituden gemessen, wie in Tabelle 2 zu sehen ist.

Tabelle 2: Amplitude in Abhängigkeit der Frequenz

ν /Hz	U_C /V
10	14.85
30	14.65
70	13.94
100	13.15
300	8.40
700	4.28
1000	3.09
2000	1.50
3000	1.01
4000	0.76
5000	0.62

Mit der normierten Spannung wird dann eine Ausgleichsrechnung mit der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + a \cdot x^2}} \quad (13)$$

durchgeführt, wie in dem halblogarithmischen Diagramm 9 zu sehen ist.

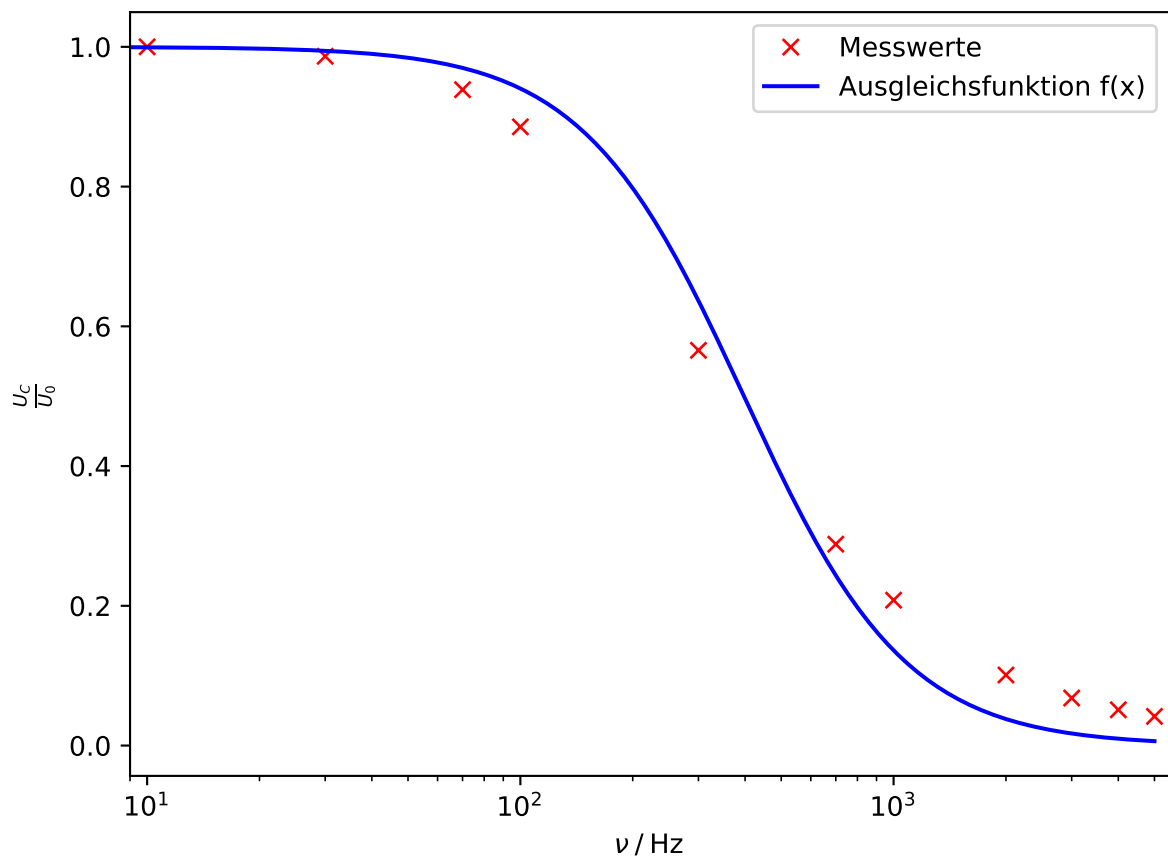


Abbildung 9: Frequenzabhängigkeit der Amplitude

Für den Parameter a ergibt sich daraus:

$$a = (6,34 \pm 0,98) \cdot 10^{-6} \text{ 1/s}$$

Aus der Gleichung 10 ergibt sich für die RC-Konstante somit:

$$RC = \sqrt{a} \cdot \frac{1}{2\pi} = (0,401 \pm 0,031) \text{ ms} \quad (14)$$

4.3 Bestimmung der RC-Konstanten durch die Phasenverschiebung

Im dritten Versuchsteil wird die Phasenverschiebung zwischen der Spannung des Generators und des RC-Glieds verwendet um die RC-Konstante zu bestimmen. Dazu werden die zeitliche Verschiebung a und die Schwingungslänge b gemessen, woraus sich mit

$$\phi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi \quad (15)$$

die Phasenverschiebung berechnen lässt, wie in Tabelle 3 dargestellt ist.

Tabelle 3: Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz

ν / Hz	a / ms	b / ms	ϕ / rad
10	0.40	100.00	0.025
30	0.80	33.33	0.151
70	0.80	14.29	0.352
100	0.88	10.00	0.553
300	0.48	3.33	0.906
700	0.28	1.43	1.230
1000	0.22	1.00	1.382
2000	0.11	0.50	1.382
3000	0.08	0.33	1.523
4000	0.06	0.25	1.508
5000	0.05	0.20	1.571

Anschließend wird wieder eine Ausgleichsrechnung durchgeführt, diesmal mit der Funktion

$$f(x) = \arctan(c \cdot x) \quad (16)$$

Hieraus ergibt sich für den Parameter c

$$c = (4,85 \pm 0,33) \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$0.000771489860295 \pm 5.20447852037\text{e-}05$ Aus Gleichung 9 folgt somit

$$RC = \frac{c}{2\pi} = (0,771 \pm 0,052) \text{ ms} \quad (17)$$

Die Ausgleichsfunktion ist zusammen mit den Wertepaaren in dem halblogarithmischen Diagramm 10 dargestellt.

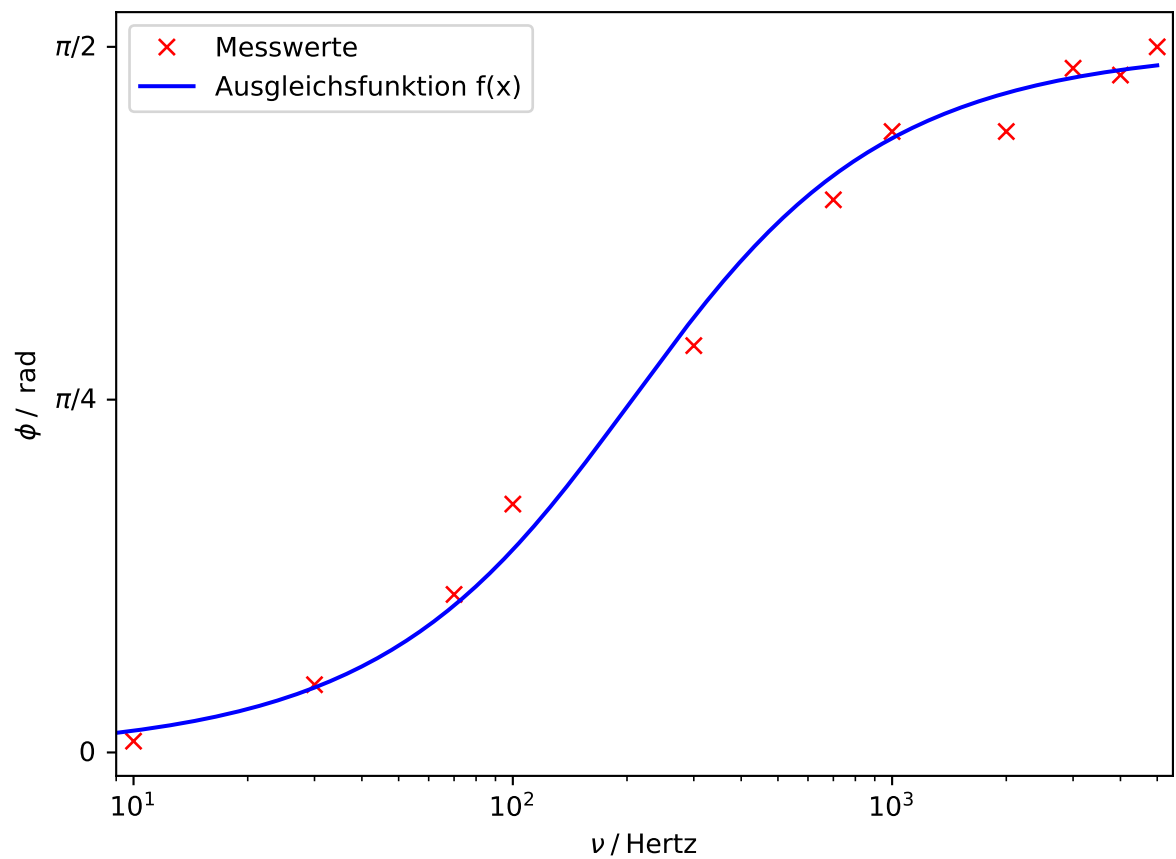


Abbildung 10: Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung

Mit den nun bereits vorhandenen Messwerten aus den Tabellen 2 und 3 lässt sich nun ein Polar-Plot erstellen (Abbildung 11), in welchem die Messwerte zusammen mit der Theoriekurve dargestellt werden.

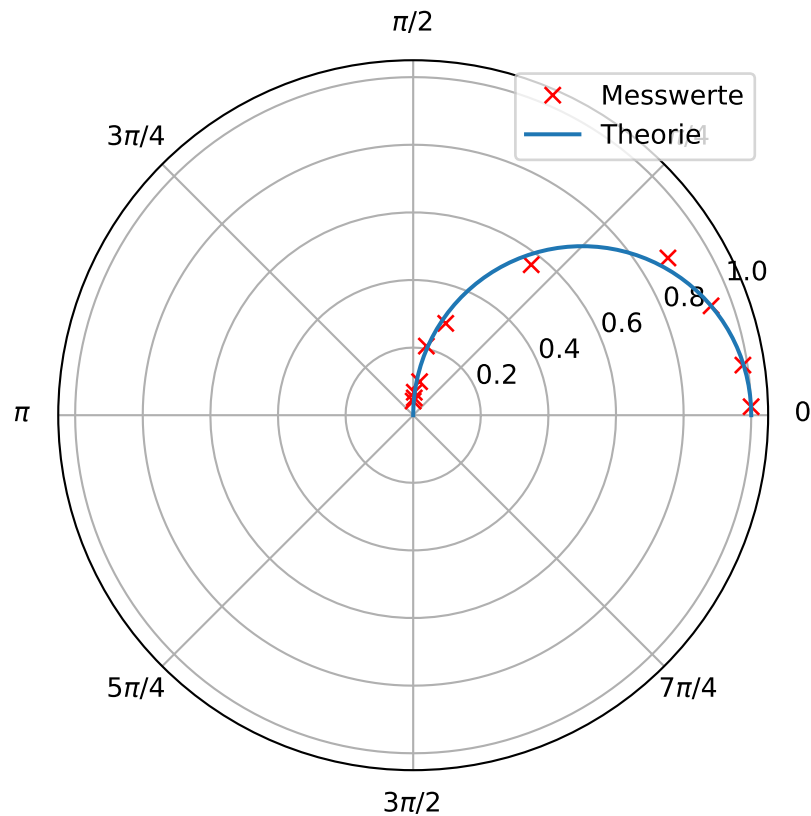


Abbildung 11: Polare Darstellung der Amplitude und Phasenverschiebung

4.4 Der RC-Kreis als Integrator

Schlussendlich soll noch gezeigt werden, dass der RC-Kreis als Integrator fungieren kann, was durch die folgenden Grafiken deutlich wird. Dabei ist die Generatorfrequenz in gelb und die resultierende Frequenz des RC-Kreises in blau dargestellt. Zu beachten ist, dass hierbei unterschiedliche Skalierungen vorgenommen wurden.

4.4.1 Sinusschwingen

Eine Sinusspannung der Form

$$f(x) = a \cdot \sin x$$

ergibt durch Integration die Stammfunktion

$$F(x) = -a \cdot \cos x + C$$

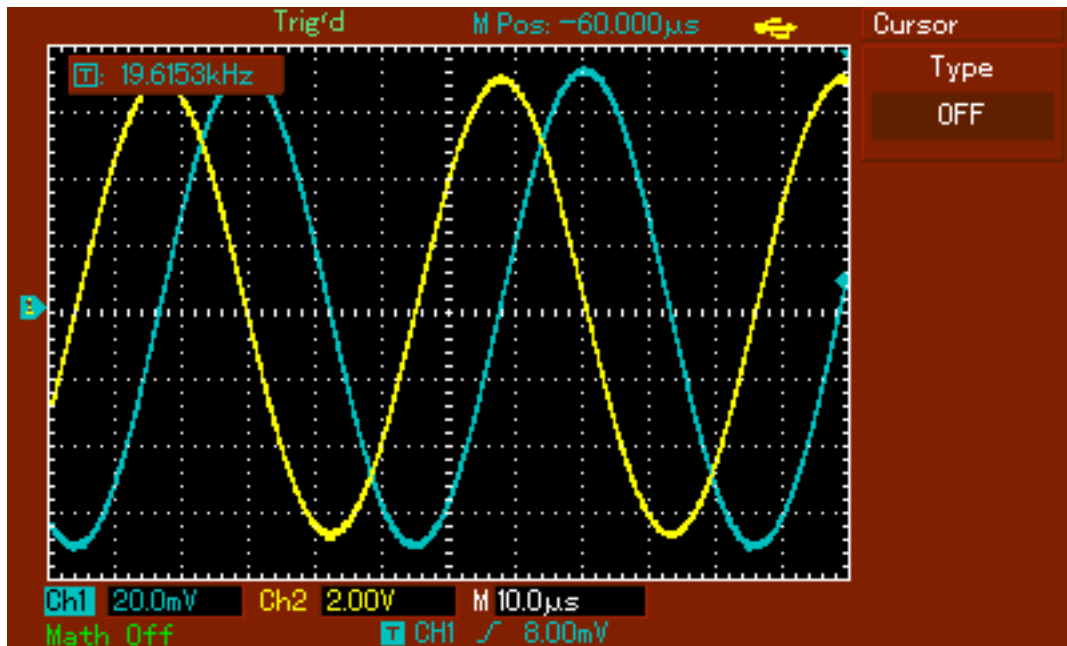


Abbildung 12: Integration der Sinusspannung

4.4.2 Dreiecksspannung

Eine Dreiecksspannung der Form

$$f(x) = \begin{cases} b \cdot x, & -a < x < a \\ -b \cdot x, & a < x < 3a \end{cases}$$

ergibt durch Integration die Stammfunktion

$$F(x) = \begin{cases} \frac{b}{2} \cdot x^2, & -a < x < a \\ -\frac{b}{2} \cdot x^2, & a < x < 3a \end{cases}$$

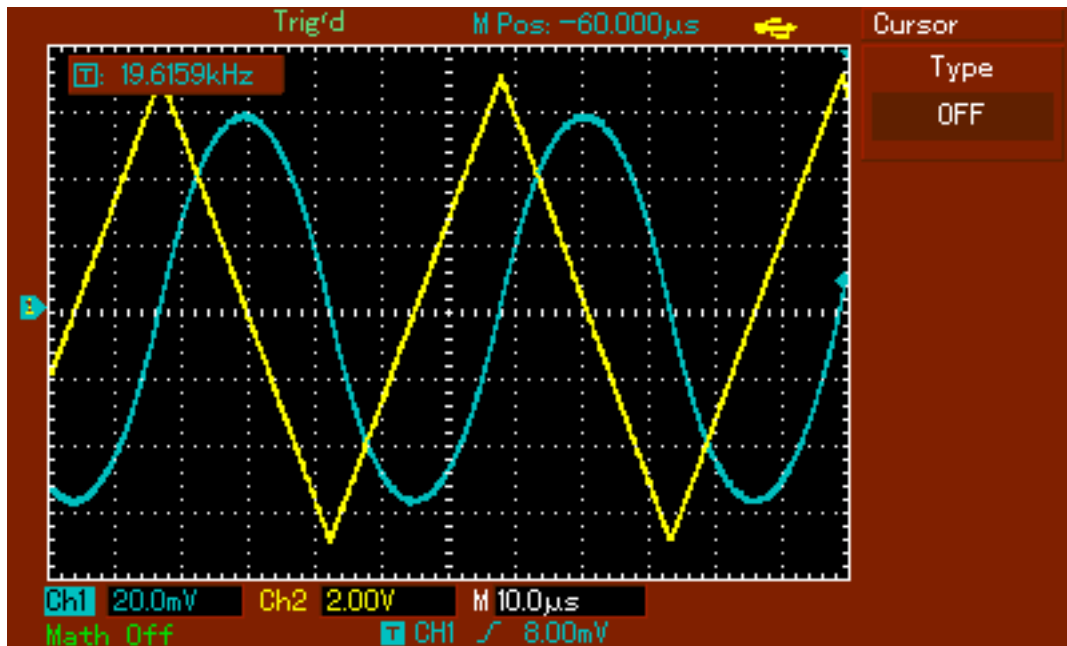


Abbildung 13: Integration der Dreiecksspannung

4.4.3 Rechtecksspannung

Eine Rechtecksspannung der Form

$$f(x) = \begin{cases} b, & 0 < x < a \\ -b, & a < x < 2a \end{cases}$$

ergibt durch Integration die Stammfunktion

$$f(x) = \begin{cases} b \cdot x, & 0 < x < a \\ -b \cdot x, & a < x < 2a \end{cases}$$

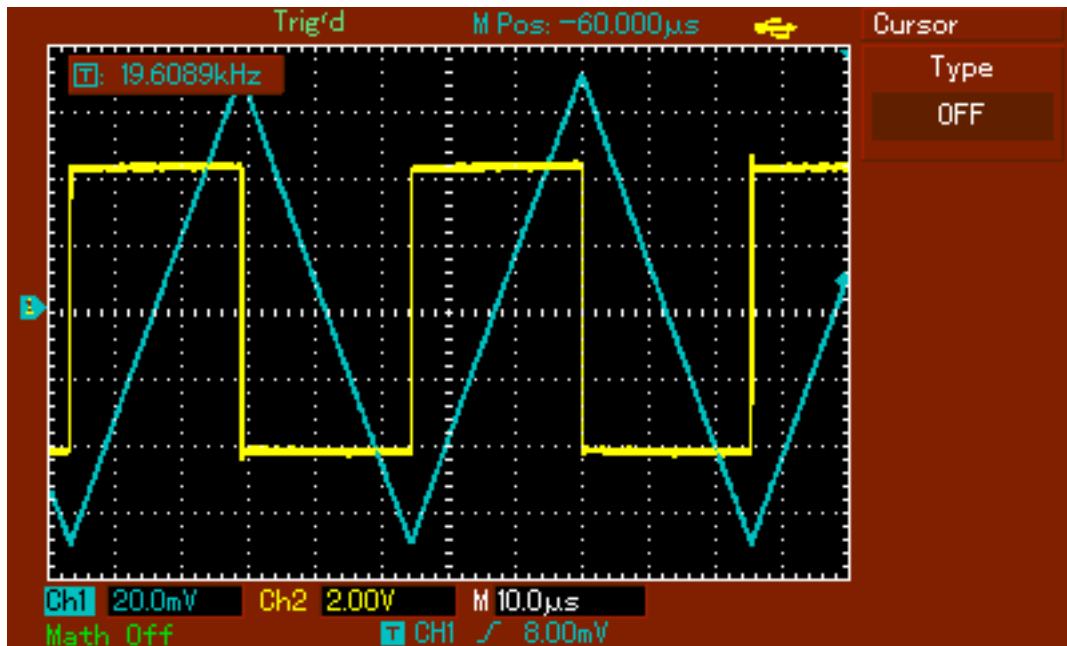


Abbildung 14: Integration der Rechteckspannung

5 Diskussion

Bei den unterschiedlichen Methoden lassen sich große Unterschiede erkennen, so liegt beispielsweise die Abweichung zwischen dem Wert $RC = (0,951 \pm 0,014)$ ms des ersten Auswertungsteiles und dem Wert $RC = (0,401 \pm 0,031)$ ms des zweiten Auswertungsteiles bei 137,16 % (berechnet durch $|\frac{\text{Wert}_1 - \text{Wert}_2}{\text{Wert}_1}|$). Dies lässt sich vermutlich auf einen systematischen Fehler in der Messung zurückführen, eventuell spielt auch der Innenwiderstand des Generators eine Rolle.

Im letzten Auswertungsteil konnte experimentell gezeigt werden, dass der RC-Kreis bei großen Frequenzen tatsächlich als Integrator genutzt werden kann, die Theorie wurde somit bestätigt.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Versuch 353: Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises.*