

Versuch 351

Fourier- Analyse und Synthese

Stefanie Hilgers
Stefanie.Hilgers@tu-dortmund.de

Lara Nollen
Lara.Nollen@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.11.2017

Abgabe: 21.11.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
3 Durchführung	4
3.1 Vorbereitung	4
3.1.1 Rechteck-Schwingung	5
3.1.2 Dreieck-Schwingung	6
3.1.3 Sägezahn-Schwingung	7
3.2 Fourier-Analyse	8
3.3 Fourier-Synthese	8
4 Auswertung	9
4.1 Fourier-Analyse	9
4.2 Fourier-Synthese	13
5 Diskussion	15
Literatur	16

1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen zunächst verschiedene periodische elektrische Schwingungen in ihre Fourier-Komponenten zerlegt werden. Anschließend sollen ebendiese Funktionen wieder aus ihren theoretisch errechneten Anteilen zusammengesetzt werden.

2 Theorie

Als periodische Funktionen werden jene Funktionen bezeichnet, welche nach einer bestimmten Periodendauer T oder einer festen Distanz D erneut ihren ursprünglichen Startwert annehmen, so dass

$$f(t + T) = f(t) \quad (1)$$

$$\text{und} \quad f(x + D) = f(x) \quad (2)$$

gilt. Häufig auftretende Funktion sind hierbei Sinus- und Cosinusfunktion, welche durch eine bestimmte Amplitude a_n bzw. b_n und eine Periodendauer T charakterisiert sind. Das Fouriersche Theorem besagt zudem, dass ein Großteil der stetigen periodischen Funktionen aus der Summation mehrerer dieser Funktion zusammensetzen lässt gemäß der Gleichung

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{2\pi}{T} t + b_n \sin n \frac{2\pi}{T} t \right) \quad (3)$$

wobei die Reihe gleichmäßig konvergent ist. Die entsprechenden Amplituden berechnen sich durch

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t dt \quad (4)$$

$$\text{und} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n \frac{2\pi}{T} t dt \quad (5)$$

mit $n \in \mathbb{N}$. Es treten dabei nur ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\nu = \frac{1}{T}$ auf, welche auch als harmonische Oberwellen bezeichnet werden. Trägt man diese gegen ihre jeweilige Amplitude auf, ergibt sich daraus ein diskretes Linienspektrum, wie es in Abbildung 1 zu sehen ist.

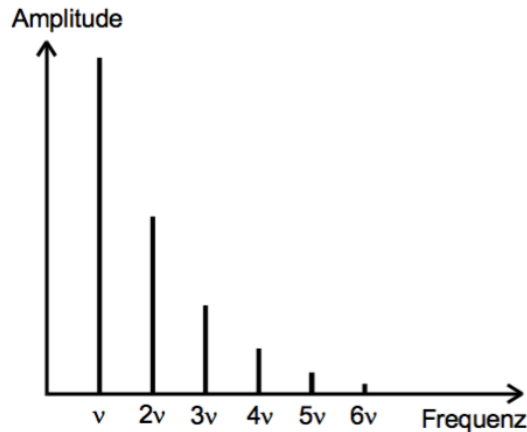


Abbildung 1: Linienspektrum einer Fourier-Analyse [1]

Handelt es sich bei der zu approximierenden Funktion $f(t)$ nicht um eine stetige Funktion, so kommt es zu endlichen Abweichungen der Reihe, was auch als Gibbsches Phänomen bezeichnet wird.

Soll hingegen eine nicht periodische zeitliche Funktion in ihr Frequenzspektrum zerlegt werden wird statt der Fourier-Reihe die Fourier-Transformation der Form

$$g(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ivt} dt \quad (6)$$

verwendet. Hierbei ergeben periodische Vorgänge erneut ein Spektrum aus δ -Funktionen und nicht periodische Funktionen transformieren sich zu kontinuierlichen Spektren. Da es jedoch in der Praxis nicht möglich ist über einen unendlichen Zeitraum zu integrieren kommt es zu Abweichungen in Form von Linien endlicher Breite statt δ -Funktionen und Nebenmaxima.

3 Durchführung

3.1 Vorbereitung

Zur Vorbereitung des Versuchs werden die Fourier-Koeffizienten von drei verschiedenen periodischen Funktionen, in diesem Fall Rechteck-, Dreieck-, und Sägezahn-Schwingungen, bestimmt. Dazu werden diese zur Vereinfachung so definiert, dass es sich entweder nur um gerade oder ungerade Funktionen handelt.

3.1.1 Rechteck-Schwingung

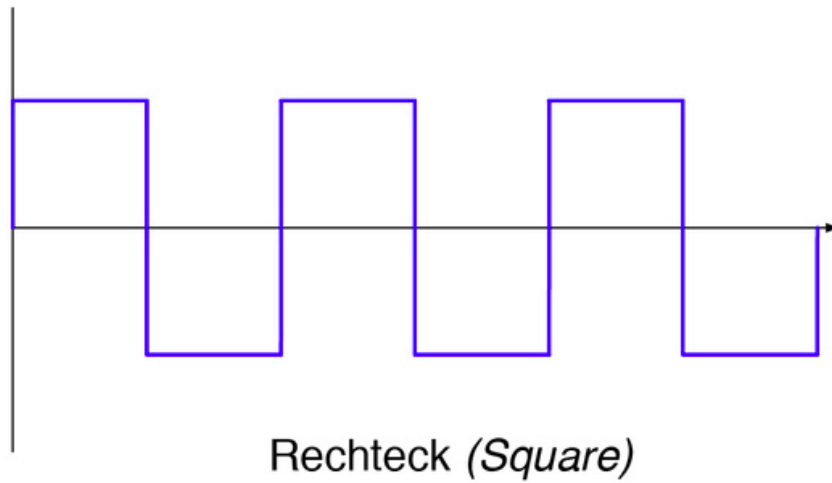


Abbildung 2: Rechteckschwingung [2]

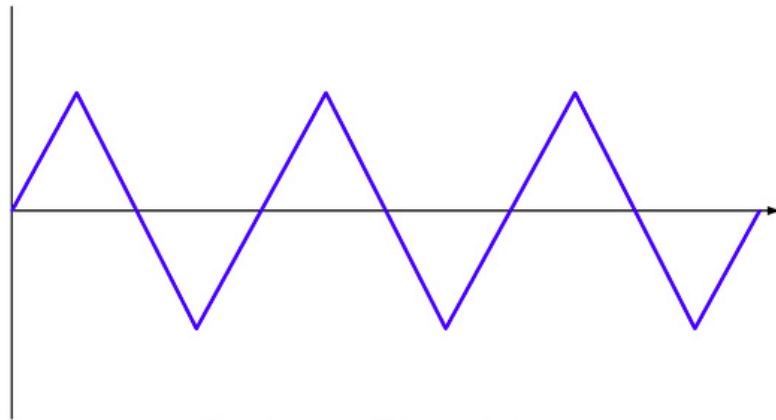
Definition:

$$f(t) = \begin{cases} -A, & -T < t < 0 \\ A, & 0 < t < T \end{cases} \quad (7)$$

Da es sich um eine ungerade Funktion handelt, gilt $a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T A \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \\ &= \frac{2A}{n\pi} \left[-\cos\frac{n\pi}{T}t \right]_0^T \\ &= \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) = \frac{2A}{n\pi} (1 - (-1)^n) \\ \Rightarrow b_n &= \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{4A}{n\pi}, & n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

3.1.2 Dreieck-Schwingung



Dreieck (*Triangle*)

Abbildung 3: Dreieckschwingung [2]

Definition:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2At}{T}, & -T < t < 0 \\ \frac{-2At}{T}, & 0 < t < T \end{cases} \quad (8)$$

Da es sich um eine gerade Funktion handelt, gilt $b_n = 0$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \left(\frac{-2A}{T}|t|\right) \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \\
 &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{-2A}{T}t \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \\
 &= -\frac{4A}{T^2} \int_0^T \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) t dt \\
 &= -\frac{4A}{T^2} \left(\left[\frac{Tt}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) \right]_0^T \right) - \frac{T}{n\pi} \int_0^T \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \\
 &= -\frac{4A}{T^2} \left(\frac{-T^2}{(n\pi)^2} \left[-\cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) \right] \right) \\
 &= -\frac{4A}{(n\pi)^2} (\cos(n\pi) - 1) \\
 &= \frac{4A}{(n\pi)^2} ((-1)^n - 1) \\
 \Rightarrow a_n &= \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ -\frac{2A}{(n\pi)^2}, & n \text{ ungerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

3.1.3 Sägezahn-Schwingung

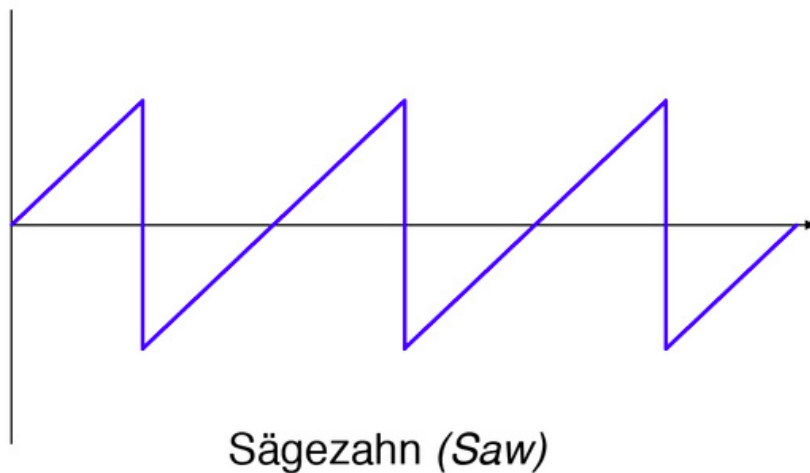


Abbildung 4: Sägezahnschwingung [2]

Definition:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{At}{T} - A, & -T < t < 0 \\ \frac{At}{T}, & 0 < t < T \end{cases} \quad (9)$$

Da es sich um eine ungerade Funktion handelt, gilt $a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \\ &= \frac{-2A}{T^2} \int_0^T t \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \\ &= \frac{-2A}{T^2} \left[-\frac{tT}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) + \frac{T^2}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) \right]_0^T \\ &= \frac{2A}{n\pi} (\cos(n\pi)) \\ &= \frac{2A}{n\pi} (-1)^n \\ \Rightarrow b_n &= \begin{cases} \frac{2A}{n\pi}, & n \text{ gerade} \\ \frac{-2A}{n\pi}, & n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

3.2 Fourier-Analyse

Zur Durchführung der Fourier-Analyse wird an dem Funktionsgenerator die zu analysierende Schwingung (Rechteck, Sägezahn oder Dreieck) eingestellt und anschließend wird dieser mit dem Oszilloskop verbunden. Dieses führt dann automatisch eine Fouriertransformation durch, sodass die Amplituden und Frequenzen der einzelnen δ -Peaks mithilfe des Cursors ausgemessen und werden können. Diese Messung wird für alle drei Schwingungsformen getrennt durchgeführt und die Messwerte werden notiert. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 5 grob skizziert.

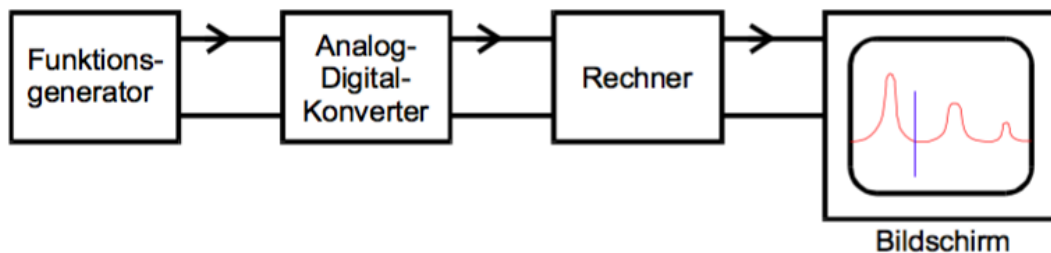


Abbildung 5: Versuchsaufbau [1]

3.3 Fourier-Synthese

Im zweiten Teil des Versuchs werden dann die in der Vorbereitung errechneten Koeffizienten der Fourier-Reihe verwendet um die drei Spannungsformen aus Sinusspannungen zusammenzusetzen.

Dazu wird das Oszilloskop in den X-Y-Betrieb geschaltet und mit je zwei Ausgängen eines Oberwellengenerators verbunden. Mithilfe der Lissajous-Figuren werden die beiden Ausgänge dann in Phase geschaltet. Anschließend wird einer der beiden Ausgänge zusammen mit einem der anderen Ausgänge an das Oszilloskop verbunden und dieser wird auf gleiche Weise erneut in Phase geschaltet. Dieser Vorgang wird solange wiederholt bis alle Ausgänge phasengleich sind. Dauraufhin wird das Oszilloskop zurück in den X-T-Betrieb gestellt und mit dem Summationskanal des Oberwellengenerators verbunden, sodass die aufaddierten Spannungen zu sehen sind.

Eventuell müssen die einzelnen Ausgänge dann noch um 180° variiert werden, bis die entsprechende Funktion möglichst genau approximiert ist. Ist dies bis zu einer ausreichenden Genauigkeit erfüllt, können die Ergebnisse mithilfe eines Thermodrucks auf einem USB Stick gesichert werden.

4 Auswertung

4.1 Fourier-Analyse

Für die Fourier-Analyse sind die Amplituden der Oberwellen ausschlaggebend. Die Messwerte der Amplituden, die auf die erste Oberwelle normierten Amplituden und die zugehörigen Frequenzen sind in den folgenden Tabellen aufgeführt.

Nr. der Oberwelle	ν /kHz	U_{Messwert} /V	$\frac{U_n}{U_1}$
1	100	4.12	1.00
2	300	1.44	0.35
3	500	0.78	0.19
4	700	0.62	0.15
5	887	0.42	0.10
6	1075	0.39	0.09
7	1263	0.30	0.07
8	1450	0.28	0.07
9	1650	0.24	0.06
10	1838	0.22	0.05

Tabelle 1: Gemessene Daten für die Rechteckschwingung.

Nummer der Oberwelle	ν /kHz	U_{Messwert} /V	$\frac{U_n}{U_1}$
1	100	2.66	1.00
2	260	0.29	0.11
3	420	0.10	0.04
4	580	0.05	0.02
5	745	0.03	0.01

Tabelle 2: Gemessene Daten für die Dreieckschwingung.

Nummer der Oberwelle	ν /kHz	U_{Messwert} /V	$\frac{U_n}{U_1}$
1	100	2.10	1.00
2	180	0.94	0.45
3	260	0.67	0.32
4	340	0.53	0.25
5	420	0.42	0.20
6	500	0.30	0.14
7	580	0.28	0.13
8	660	0.27	0.13
9	745	0.26	0.12
10	825	0.23	0.11

Tabelle 3: Gemessene Daten für die Sägezahnsschwingung.

Die Amplituden werden nun doppeltlogarithmisch gegen die Anzahl der Oberwellen aufgetragen, anschließend wird eine Ausgleichsgerade und deren Steigung a berechnet. An den in der Vorbereitung berechneten Fourier-Koeffizienten kann die erwartete Steigung der Ausgleichsgerade abgelesen werden, da diese entweder mit $\frac{1}{n}$ oder $\frac{1}{n^2}$ abfallen. Dieser Zusammenhang wird in folgender Rechnung deutlich:

$$\begin{aligned}
 y &= B * x^{-a} \\
 &= \ln(B) + \ln(x^{-a}) \\
 &= \ln(B) - a \ln(x).
 \end{aligned}$$

Diese Formel ist äquivalent zur allgemeinen Geradengleichung $y = mx + v$. Somit sind folgende Steigungen zu erwarten:

$$\begin{aligned}
 a_{\text{Rechteckspannung}} &= -1 \\
 a_{\text{Dreieckspannung}} &= -2 \\
 a_{\text{Sägezahnspannung}} &= -1
 \end{aligned}$$

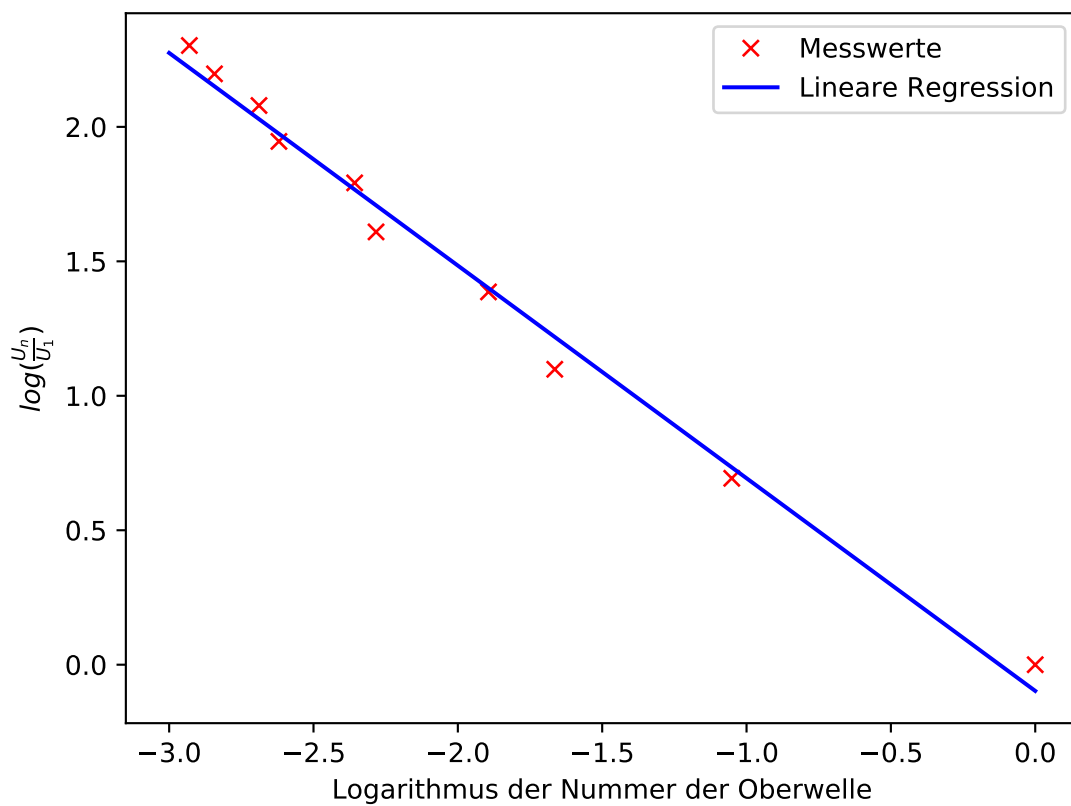


Abbildung 6: Überprüfung der Steigung für die Rechteckspannung.

Für die Steigung der Ausgleichsgerade der Rechteckspannung ergibt sich

$$a_{\text{Rechteckspannung}} = -0.791 \pm 0.028.$$

Die Abweichung der Steigung von den Theoriewerten wird durch

$$\left| \frac{a_{\text{Theorie}} - a_{\text{Messung}}}{a_{\text{Theorie}}} \right| \quad (10)$$

berechnet. Somit ergibt sich eine Abweichung von 20,9% von den Theoriewerten.

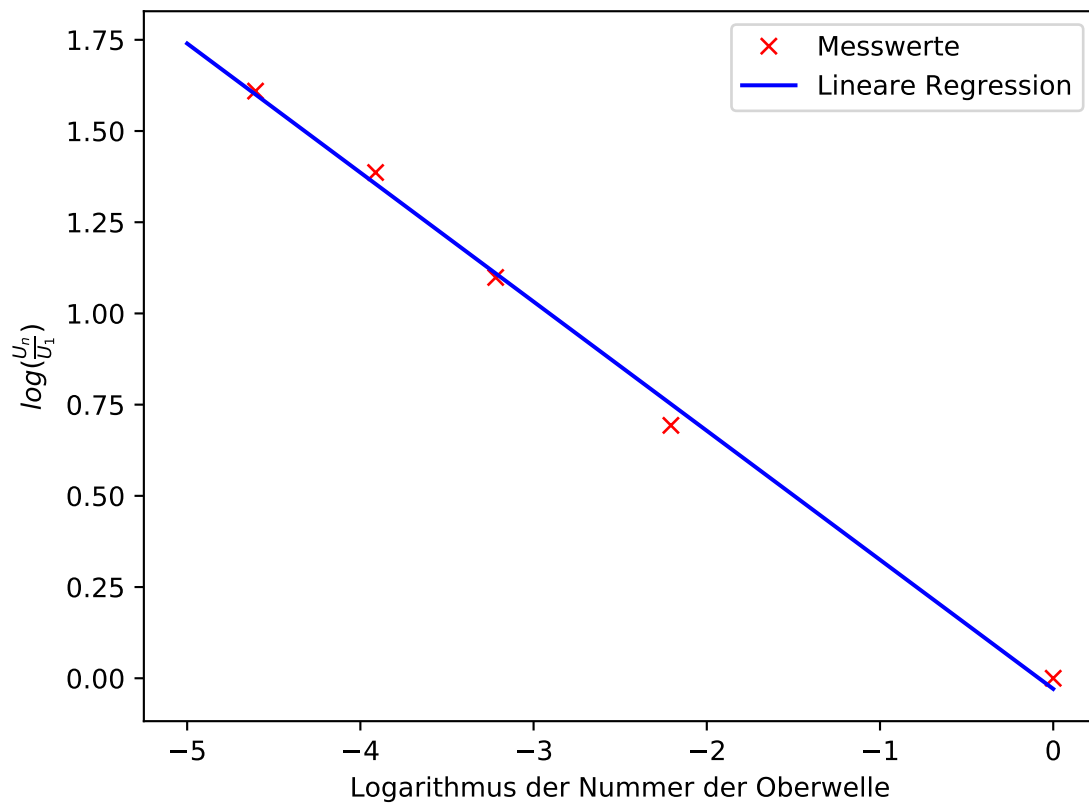


Abbildung 7: Überprüfung der Steigung für die Dreiecksspannung.

Die Steigung der Ausgleichsgerade beträgt

$$a_{\text{Dreiecksspannung}} = -0.354 \pm 0.012.$$

Für die Dreiecksspannung ergibt sich mit der Formel (10) eine Abweichung von 82,3%.

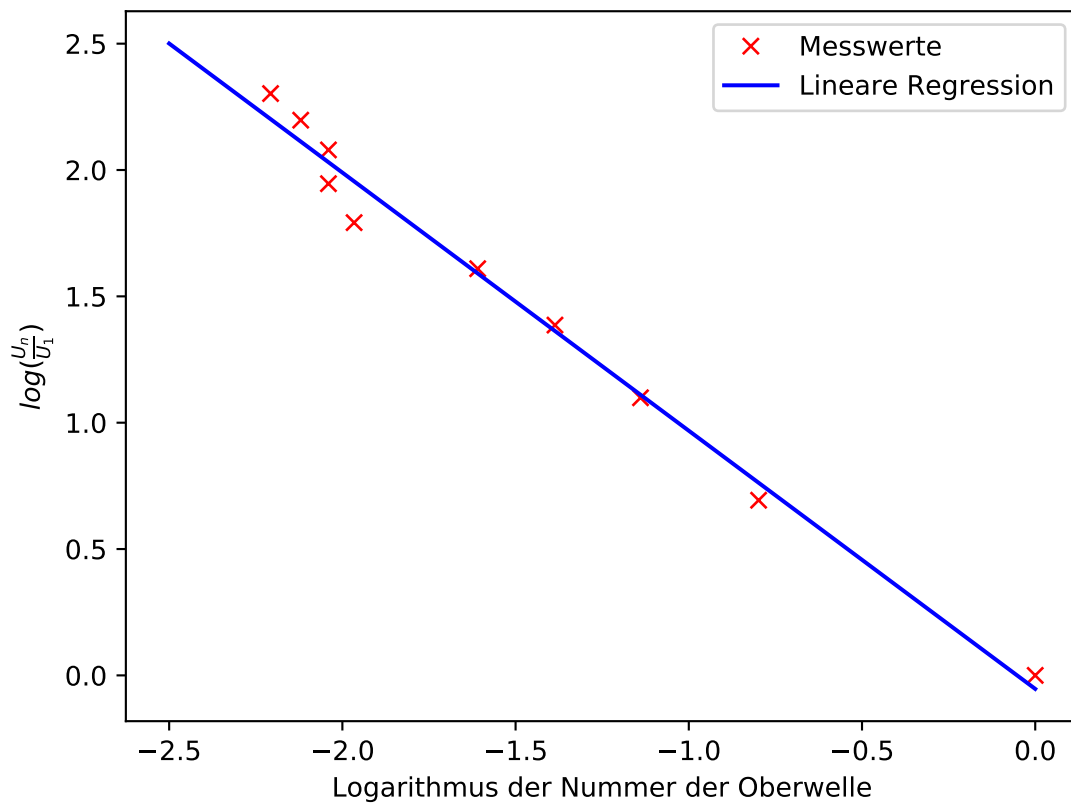


Abbildung 8: Überprüfung der Steigung für die Sägezahnspannung.

Die Steigung der Sägezahnspannung beträgt

$$a_{\text{Sägezahnspannung}} = -1.022 \pm 0.041.$$

Nach Gleichung (10) ergibt sich eine Abweichung von 2,2%.

4.2 Fourier-Synthese

Bei der Fourier-Synthese werden die Spannungen aus einer endlichen Anzahl von Spannungsamplituden zusammengesetzt. Diese können wie in Kapittel 3 berechnet werden. Am Oberwellengenerator werden die Werte aus Tabelle 4.

Nummer der Oberwelle	$U_{\text{Theorie,Rechteck}} / \text{V}$	$U_{\text{Theorie,Dreieck}} / \text{V}$	$U_{\text{Theorie,Sgezahn}} / \text{V}$
1	900	900	900
2	0	0	450
3	300	100	300
4	0	0	225
5	180	36	180
6	0	0	150
7	129	18	129
8	0	0	113
9	100	11	100
10	0	0	90

Tabelle 4: Eingestellte Schwingungsamplituden.

Diese Werte sind gerundet, denn die Genauigkeit mit der die Spannungsamplituden eingestellt werden können ist begrenzt. So ergeben sich die folgenden Spannungsbilder.

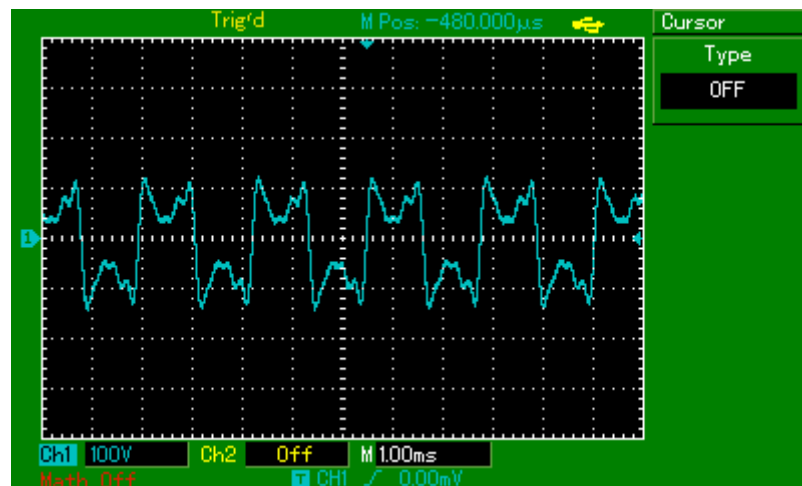


Abbildung 9: Synthetisierte Rechteckspannung.

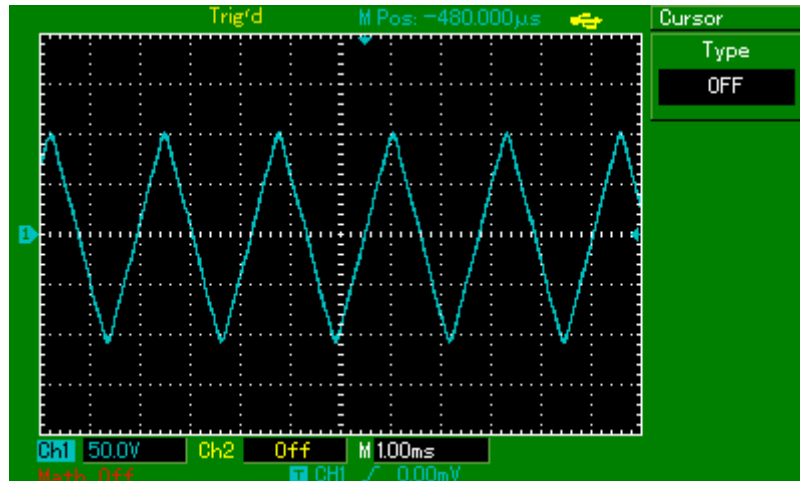


Abbildung 10: Synthetisierte Dreiecksspannung.

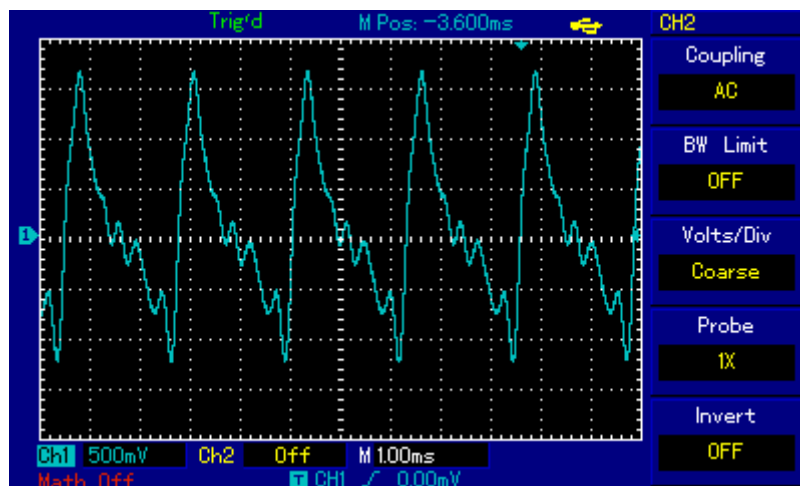


Abbildung 11: Synthetisierte Sägezahnspannung.

Die Dreiecksspannung in Abbildung 10 lässt sich trotz der wenigen Spannungsamplituden gut approximieren. Die Rechteckspannung in Abbildung 9 und auch die Sägezahnspannung in Abbildung 11 dagegen zeigen größere Abweichungen, besonders an den unstetigen Punkten.

5 Diskussion

Die bei der Fourieranalyse ermittelte Steigung für die Rechteckspannung weicht 20,9% von dem Theoriewert ab, dass entspricht 7,5 Fehlerintervallen. Die Abweichung der Sägezahnspannung ist mit 2,2% sehr gering, dass ist auch an den Fehlerintervallen zu erkennen, denn die Steigung weicht um 0,5 Fehlerintervalle von dem Theoriewert ab. Eine sehr hohe

Abweichung tritt bei der Dreiecksspannung auf, sie beträgt 82,3%, beziehungsweise 137,2 Fehlerintervalle. Da die Abweichung bei der Rechtecksspannung mit 7,5 Fehlerintervallen recht hoch ist, lässt sich vermuten, dass ein systematischer Fehler vorliegt, der die Messung verfälscht. Für die sehr hohe Abweichung der Dreiecksspannung ist es sehr wahrscheinlich, dass ein systematischer Fehler vorliegt. Eine weitere Erklärung können die wenigen Messwerte sein, denn im Vergleich zur Rechteck- und Sägezahnspannung werden nur die Hälfte der Messwerte ermittelt, da die Spannungsamplitude für die Dreiecksspannung mit $\frac{1}{n^2}$ abfällt. Dadurch können die wenigen und sehr kleinen Spannungsamplituden nur schwer bestimmt werden.

Durch die Fourier-Synthese kann die Dreiecksspannung gut approximiert werden, denn es treten nur sehr kleine Ungenauigkeiten auf. Das lässt sich durch den Abfall der Spannungsamplituden mit $\frac{1}{n^2}$ erklären, denn dadurch lässt sich die Dreiecksspannung schon durch wenige Spannungsamplituden gut approximieren. Zur Approximation der Rechteck- und Sägezahnspannung sind mehr Spannungsamplituden notwendig, da diese aber nicht exakt eingestellt werden können, ergibt sich auch für die approximierte Spannung ein größerer Fehler. Wie schon in der Auswertung erwähnt ist der Fehler an den unstetigen Punkten besonders gut zu erkennen.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Versuch 351: Fourier- Analyse und Sythese.*
- [2] *Oszillatoren*. 18. Nov. 2017. URL: <https://www.bonedo.de/artikel/einzelansicht/synthesizer-und-sounddesign-1-oszillatoren.html>.