

Versuch 204

## Wärmeleitung von Metallen

Stefanie Hilgers  
Stefanie.Hilgers@tu-dortmund.de

Lara Nollen  
Lara.Nollen@tu-dortmund.de

Durchführung: 09.01.2018

Abgabe: 16.01.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
<b>3 Durchführung</b>	<b>4</b>
3.1 Statische Methode . . . . .	4
3.2 Dynamische Methode . . . . .	5
<b>4 Auswertung</b>	<b>5</b>
4.1 Statische Methode . . . . .	5
4.2 Dynamische Methode . . . . .	9
<b>5 Diskussion</b>	<b>12</b>
<b>Literatur</b>	<b>13</b>

## 1 Zielsetzung

Bei dem Versuch soll die Wärmeleitfähigkeit von Messing, Aluminium und Edelstahl bestimmt werden.

## 2 Theorie

Liegt in einem Körper eine Temperaturdifferenz vor, kommt es laut dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zu einem Wärmetransport entlang des Temperaturgefälles. In einem festen Körper, wie die in dem Versuch zu untersuchenden Stäbe geschieht dies über Wärmeleitung mittels Phononen und freien Elektronen. Alternativ kann der Wärmetransport in anderen Materialien auch über Konvektion und Wärmestrahlung erfolgen.

Herrscht zwischen den zwei Enden eines Stabes eine Temperaturdifferenz, so fließt in der Zeit  $dt$  die Wärmemenge

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt, \quad (1)$$

wobei  $\kappa$  die Wärmeleitfähigkeit, welche abhängig vom Material ist, und  $A$  die Querschnittsfläche bezeichnet. Das negative Vorzeichen zeigt an, dass die Wärme stets von kälteren zu wärmeren Bereichen, also in Richtung abnehmender Temperatur fließt.

Mithilfe der Wärmestromdichte

$$j_w = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2)$$

lässt sich somit durch die Kontinuitätsgleich die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3)$$

aufstellen. Hierbei gibt  $\rho$  die Dichte des Materials und  $c$  die spezifische Wärme an. Durch den Term  $\sigma_T = \frac{\kappa}{\rho c}$  wird die "Geschwindigkeit" angegeben, mit der sich der Temperaturunterschied ausgleicht. Dieser wird als Temperaturleitfähigkeit bezeichnet.

Findet eine periodische Erwärmung und Abkühlung eines Stabes mit einer großen Länge statt, ergibt sich hierdurch eine Temperaturwelle mit zeitlicher und räumlicher Abhängigkeit in dem Stab. Diese Welle besitzt dann die Form

$$T(x, t) = T_{\max} e^{-\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x} \cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x). \quad (4)$$

Die Phasengeschwindigkeit lässt sich dabei über

$$v = \frac{\omega}{k} = \omega / \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} = \sqrt{\frac{2\kappa \omega}{\rho c}} \quad (5)$$

berechnen

Wird die Welle an 2 verschiedenen Stellen  $x_{\text{nah}}$  und  $x_{\text{fern}}$  gemessen, kann man durch das

Amplitudenverhältniss  $A_{\text{nah}}$  und  $A_{\text{fern}}$  die Dämpfung bestimmen. Bei einer Welle der Periode  $T^*$  und der Phase  $\phi$ , lässt sich durch die Gleichungen  $\omega = \frac{2\pi}{T^*}$  und  $\phi = \frac{2\pi\Delta t}{T^*}$  schlussendlich die Formel

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2\Delta t \ln(A_{\text{nah}}/A_{\text{fern}})} \quad (6)$$

für die Wärmeleitfähigkeit aufstellen, wobei  $\Delta x$  den räumlichen Abstand der beiden Messpunkte  $x_{\text{nah}}$  und  $x_{\text{fern}}$  und  $\Delta t$  die Phasendifferenz der Welle zwischen den beiden Messpunkten angibt.

### 3 Durchführung

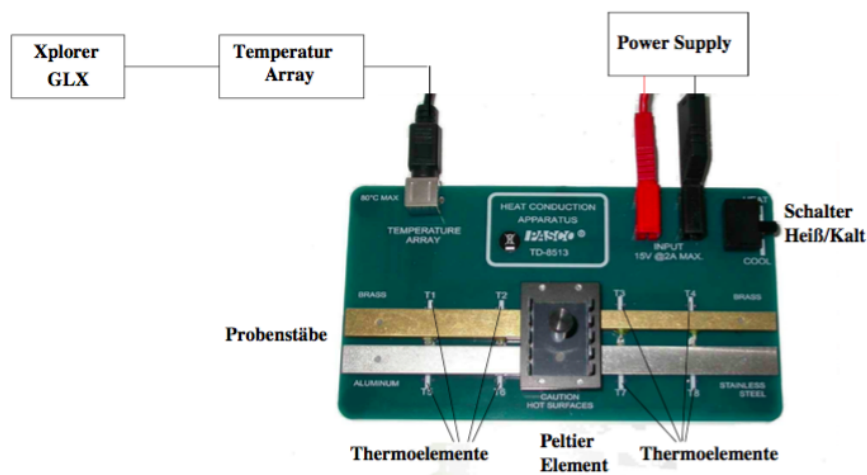


Abbildung 1: Versuchsaufbau [1].

In der Abbildung 1 ist der Versuchsaufbau zu sehen. Hierbei sind die 4 zu untersuchenden Stäbe aus Messing(2x), Aluminium und Edelstahl auf der Platine befestigt, wobei sich an jedem Stab je zwei Thermoelemente zur Temperaturmessung befinden. Diese können automatisch vom GLX ausgelesen und die Messwerte per USB-Anschluss exportiert werden. In der Mitte befindet sich zudem ein Peltierelement, womit die Stäbe geheizt bzw. gekühlt werden können, wobei darauf geachtet werden muss, dass der Schalter vor Versuchsbeginn auf "COOL" steht.

#### 3.1 Statische Methode

Im ersten Versuchsteil wird zunächst überprüft, ob alle 8 Thermoelemente auf dem GLX angezeigt werden und die Abtastrate wird auf 5s gesetzt. Am Netzgerät wird eine Spannung von 5V bei maximalem Strom eingestellt und die Isolierung auf die Stäbe gelegt, um den Temperaturaustausch mit der Umgebung zu minimieren. Anschließend

wird der Schalter auf “HEAT” gestellt und die Temperatur der Thermoelemente wird 30 min, bzw solange bis eines der Thermoelemente über 45 °C anzeigt, gemessen. Nach der Messreihe wird der Schalter wieder auf “COOL” gestellt und die Isolierung abgenommen.

### 3.2 Dynamische Methode

Im zweiten Versuchsteil wird die Spannung auf 8 V erhöht und die Abtastrate auf 2 s herabgesetzt. Die Messung kann beginnen, sobald alle Thermoelemente maximal 30 °C anzeigen. Dann wird die Isolierung wieder auf die Stäbe gelegt und das Peltier-Element periodisch zunächst für 40 s auf “HEAT” und dann für 40 s auf “COOL”. Dabei werden mindestens 10 Perioden gemessen und anschließend wird die Isolierung wieder entfernt und das Gerät in der Stellung “COOL” belassen.

Sind die Stäbe wieder hinreichend abgekühlt (unter 30 °C), wird eine analoge Messung mit einer Periode von 200 s, also einem Umschalten alle 100 s durchgeführt. Es wird solange gemessen, bis mindestens 10 Perioden aufgenommen sind oder eines der Thermoelemente 30 °C überschreitet.

## 4 Auswertung

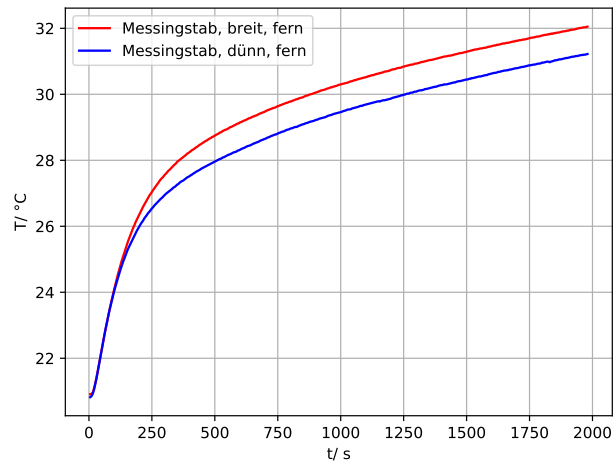
Material	Abmessungen [cm]	Dichte $\rho$ [ $\frac{kg}{m^3}$ ]	c [ $\frac{J}{kgK}$ ]	$\kappa$ [ $\frac{W}{mK}$ ]	$\Delta x$ [cm]
Messing (breit)	9*1,2*0,4	8520	385	120	3
Messing (schmal)	9*0,7*0,4	8520	385	120	3
Aluminium	9*1,2*0,4	2800	830	237	3
Edelstahl	9*1,2*0,4	8000	400	15	3

**Tabelle 1:** Gegebene Daten und Konstanten der verwendeten Metalle ( $\kappa$  ist hier der nachgeschlagene Literaturwert)

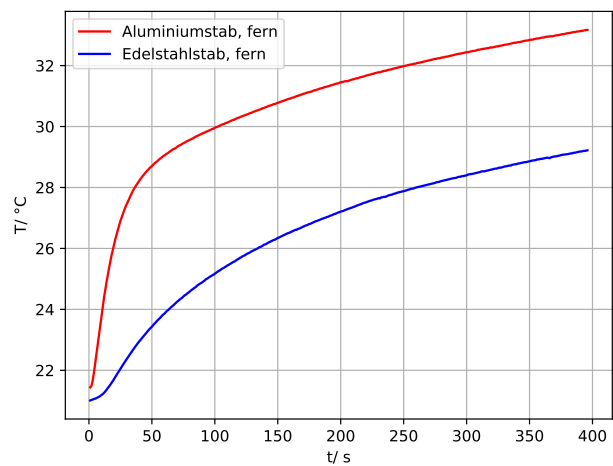
[1] [2].

### 4.1 Statische Methode

Zunächst werden die Messwerte T1 und T4 sowie T5 und T8 gegen die Zeit aufgetragen. (Für die Bezeichnungen der Thermoelemente siehe Abbildung 1)



**Abbildung 2:** Temperatur der Thermoelemente T1 und T4.



**Abbildung 3:** Temperatur der Thermoelemente T5 und T8.

Im Vergleich der Diagramme 2 und 3 fällt auf, dass die Temperaturen exponentiell ansteigen. In Diagramm 2 haben die Stäbe zu Beginn die gleiche Temperatur, diese steigt circa bis zum Zeitpunkt  $t = 150\text{ s}$  sehr stark an. Danach flachen die Graphen ab und streben unterschiedliche Temperaturen an. In Diagramm 3 haben die Stäbe schon zu Beginn eine kleine Temperaturdifferenz. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Temperatur des Aluminiumstabes viel schneller ansteigt, als die des Edelstahlstabes. Außerdem strebt der Aluminiumstab während der gesamten Messung gegen eine höhere Temperatur. Im folgenden werden die Temperaturen zum Zeitpunkt  $t = 700\text{ s}$  notiert:

$$T1 = 29,48\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T4 = 28,65\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T5 = 29,48\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T8 = 26,13\text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Aus den Diagrammen 2 und 3, als auch aus den notierten Temperaturen kann abgelesen werden, dass T5 (Aluminiumstab) die höchste Temperatur erreicht. Daraus kann gefolgert werden, dass Aluminium die Wärme am besten leitet. Am schlechtesten leitet Edelstahl die Wärme. Das der breite Messingstab die Wärme besser leitet als der dünne Messingstab dann dadurch begründet werden, dass  $\kappa \propto A$  gilt und der dünne Messingstab deshalb eine geringere Wärmeleitfähigkeit besitzt.

Im Folgenden wird der Wärmestrom  $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$  der Metalle nach der Formel 1 berechnet. Die Werte der Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  wurden aus der Literatur [2] entnommen. Der Abstand  $\Delta x$  zwischen den Thermoelenten wurde gemessen, die restlichen Werte wurden aus der Versuchsanleitung [1] entnommen.

Zeit t/ s	$(T_2 - T1)/\text{K}$	$\frac{\Delta Q_{12}}{\Delta t} / \text{W}$	$(T_7 - T_8)/\text{K}$	$\frac{\Delta Q_{78}}{\Delta t} / \text{W}$
100	1,95	-0,37	4,06	-0,09
200	1,30	-0,25	4,24	-0,10
300	0,97	-0,19	3,96	-0,09
400	0,82	-0,16	3,72	-0,08
500	0,75	-0,14	3,55	-0,09

**Tabelle 2:** Temperaturdifferenzen  $(T_2 - T_1)$  und  $(T_7 - T_8)$  mit zugehörigem Wärmestrom.

Zeit t/ s	$(T_3 - T4)/\text{K}$	$\frac{\Delta Q_{34}}{\Delta t} / \text{W}$	$(T_6 - T_5)/\text{K}$	$\frac{\Delta Q_{56}}{\Delta t} / \text{W}$
100	2,37	-0,46	1,26	-0,48
200	1,72	-0,33	0,79	-0,29
300	1,43	-0,27	0,61	-0,23
400	1,31	-0,25	0,55	-0,21
500	1,25	-0,24	0,52	-0,19

**Tabelle 3:** Temperaturdifferenzen  $(T_3 - T_4)$  und  $(T_6 - T_5)$  mit zugehörigem Wärmestrom.

Die Ergebnisse für den Wärmestrom werden nach

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_1^N x_i \quad (7)$$

gemittelt und der zugehörige Fehler berechnet sich nach

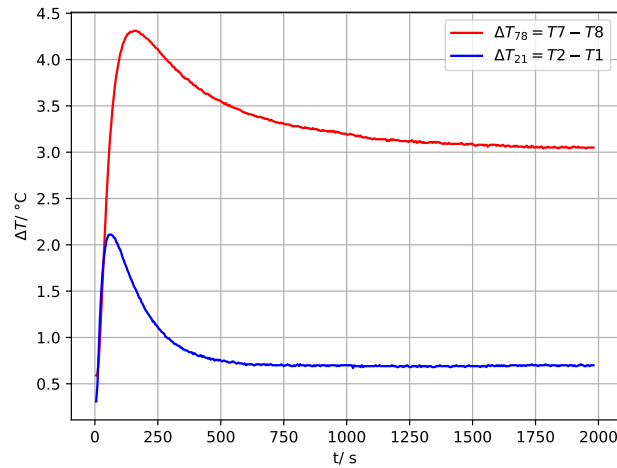
$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (8)$$

Somit ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Q_{12}}{\Delta t} &= (-0,22 \pm 0,04) \text{ W} & \frac{\Delta Q_{34}}{\Delta t} &= (-0,28 \pm 0,04) \text{ W} \\ \frac{\Delta Q_{56}}{\Delta t} &= (-0,31 \pm 0,03) \text{ W} & \frac{\Delta Q_{78}}{\Delta t} &= (-0,09 \pm 0,00) \text{ W} \end{aligned}$$

Da  $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$  proportional zu  $\kappa$  und der Querschnittsfläche  $A$  ist, ist zu erwarten, dass der Wärmestrom von Aluminium an größten ist. Das wird auch durch die Messwerte bestätigt. Edelstahl sollte von den vorliegenden Metallen den geringsten Wärmestrom aufweisen, doch das wird nicht durch die Messung bestätigt. Es ist aber deutlich zu erkennen, dass der Wärmestrom des breiten Messingstabes größer ist, als der des schmalen Messingstabes. Dieses Ergebnis war aufgrund von  $\frac{\Delta Q}{\Delta t} \propto \kappa$  zu erwarten. Das Minuszeichen lässt sich dadurch erklären, dass die Wärme immer vom wärmeren zum kälteren Wärmereservoir fließt.

In Diagramm 4 sind die Temperaturdifferenzen  $T_7 - T_8$  und  $T_2 - T_1$  dargestellt. Auffällig ist, dass beide Graphen zu Beginn sehr stark ansteigen und ein Maximum erreichen. Anschließend fallen beide Graphen ab und verlaufen dann parallel zu t-Achse. Insgesamt liegt der Graph des Edelstahlstabes  $\Delta T_{78}$  deutlich über dem des breiten Messingstabes  $\Delta T_{21}$ .



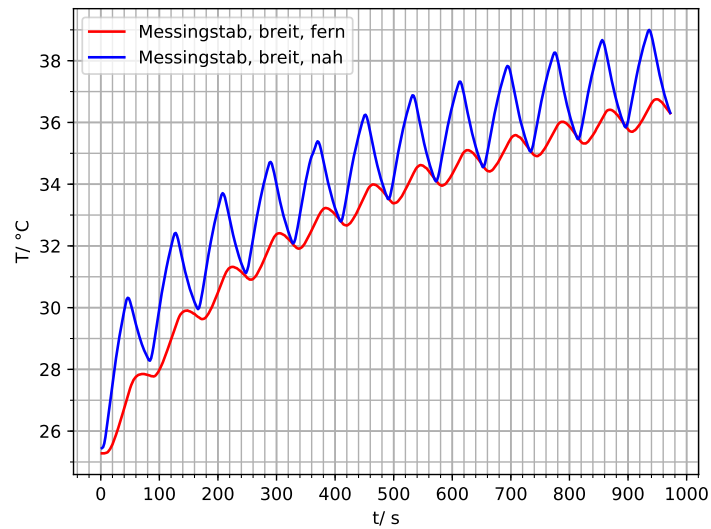
**Abbildung 4:** Temperaturdifferenz  $T_7 - T_8$  und  $T_2 - T_1$  aufgetragen gegen die Zeit.



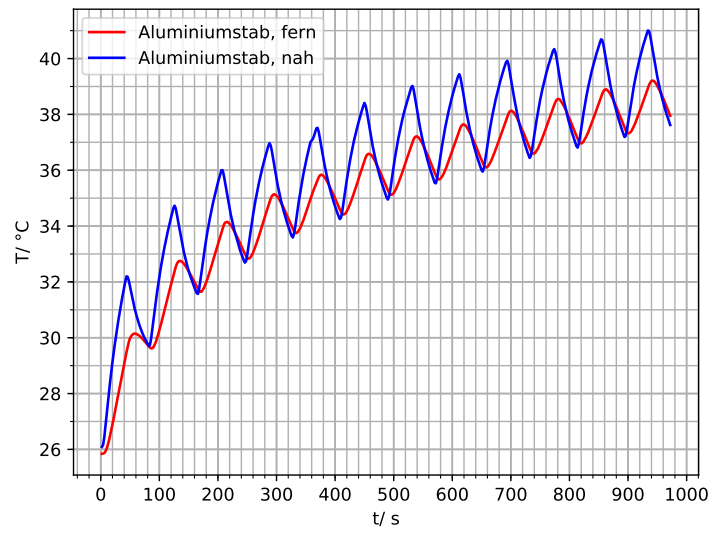
## 4.2 Dynamische Methode

In diesem Teil wird die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  der verschiedenen Materialien bestimmt. Die Messwerte der verschiedenen Materialien werden graphisch in den Diagrammen 5, 6 und 7 dargestellt. Daraus werden die Werte für die Amplitude und die Phasendifferenz  $\Delta x$  abgelesen.

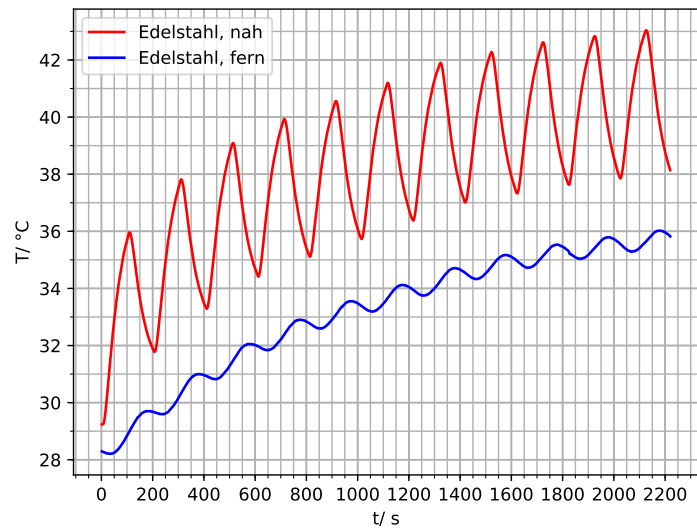
Im Folgenden sind die Temperaturverläufe der verschiedenen Metalle sowie die abgelesenen Daten dargestellt.



**Abbildung 5:** Temperaturverlauf des breiten Messingstabes, Periodendauer 80s.



**Abbildung 6:** Temperaturverlauf des Aluminiumstabes, Periodendauer 80s.



**Abbildung 7:** Temperaturverlauf des Edelstahlstabes, Periodendauer 200s.

$A_{nah}/\text{K}$	$A_{fern}/\text{K}$	$\ln \frac{A_{nah}}{A_{fern}}/\text{K}$	Phasendifferenz $\Delta t/\text{s}$
3,2	1,0	1,16	10
3,2	1,2	0,98	18
3,3	1,1	1,10	19
3,1	1,1	1,04	19
3,1	1,0	1,13	16
2,9	1,0	1,06	12
3,0	0,8	1,32	10
3,0	0,9	1,20	12
3,0	0,8	1,32	11
3,0	0,9	1,20	11
2,9	0,8	1,28	11

**Tabelle 4:** Amplituden und Phasenverschiebung des Messingstabes.

$A_{nah}/\text{K}$	$A_{fern}/\text{K}$	$\ln \frac{A_{nah}}{A_{fern}}/\text{K}$	Phasendifferenz $\Delta t/\text{s}$
4,1	2,1	0,67	6
3,9	2,1	0,62	4
3,9	1,9	0,72	6
3,8	1,8	0,75	6
3,6	1,9	0,64	6
4,0	1,8	0,79	8
3,8	1,5	0,93	6
3,6	1,9	0,64	6
3,9	1,9	0,72	6
3,7	1,9	0,67	4
3,7	1,9	0,67	2
3,8	1,5	0,93	4

**Tabelle 5:** Amplituden und Phasenverschiebung des Aluminiumstabes.

$A_{nah}/\text{K}$	$A_{fern}/\text{K}$	$\ln \frac{A_{nah}}{A_{fern}}/\text{K}$	Phasendifferenz $\Delta t/\text{s}$
5,5	0,8	1,93	50
5,4	0,7	2,04	48
5,2	0,6	2,16	48
5,0	0,7	1,97	49
5,0	0,6	2,12	48
5,1	0,6	2,14	50
5,2	0,7	2,01	48
5,1	0,6	2,14	48
5,1	0,7	1,98	48
5,0	0,6	2,12	49

**Tabelle 6:** Amplituden und Phasenverschiebung des Edelstahlstabes.

Mit Gleichung 7 und 8 ergeben sich aus den Tabellen 4, 5 und 6 folgende Werte:

$$\begin{aligned}
\text{Messingstab : } \ln \frac{A_{nah}}{A_{fern}} &= (1,16 \pm 0,10) & \Delta t &= (13,54 \pm 0,38) \text{ s} \\
\text{Aluminiumstab : } \ln \frac{A_{nah}}{A_{fern}} &= (0,73 \pm 0,00) & \Delta t &= (4,84 \pm 0,22) \text{ s} \\
\text{Edelstahlstab : } \ln \frac{A_{nah}}{A_{fern}} &= (2,07 \pm 0,00) & \Delta t &= (48,60 \pm 0,08) \text{ s}
\end{aligned}$$

Aus diesen Werten und den Angaben aus Tabelle 3 lässt sich mit Hilfe der Formel 6 die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  bestimmen:

$$\begin{aligned}
\kappa_{Messing} &= (93,98 \pm 10,74) \frac{\text{W K}}{\text{m}} \\
\kappa_{Aluminium} &= (295,99 \pm 13,45) \frac{\text{W K}}{\text{m}} \\
\kappa_{Edelstahl} &= (14,31 \pm 0,02) \frac{\text{W K}}{\text{m}}
\end{aligned}$$

## 5 Diskussion

Mit Hilfe der statischen Methode ist zu erkennen, dass Aluminum die Wärme am besten leitet, da es von den vorliegenden Materialien die größte Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  besitzt. An den Ergebnissen des schmalen und breiten Messingstabes wird deutlich, dass der Wärmestrom proportional zur Querschnittsfläche ist, weshalb der breite Stab die Wärme besser leitet. Edelstahl leitet die Wärme am schlechtesten, dieses Ergebnis war aufgrund der geringen Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  zu erwarten. Ein Vergleich mit Theoriewerten ist hier nicht möglich, da die Wärmeströme von der einstellten Spannung abhängen.

Aus dem Graphen 4 der Temperaturdifferenzen lässt sich ablesen, dass die Temperaturdifferenz von Edelstahl als auch von Messing am Ende des Graphen einen Wert  $> 0$  annimmt. Das bedeutet, dass das Termoelement nahe dem Peltier-Element eine größere Temperatur hat als das fern vom Peltier-Element. Da der Edelstahl Graph über dem Messing Graphen verläuft kann auf eine höhere Wärmeleitfähigkeit von Messing geschlossen werden, da die Wärme das ferne Termoelement schneller erreicht und daher die Temperaturdifferenz geringer ist. Auf diese Weise sind auch die Maxima zu Beginn der Messung zu erklären, da zu diesem Zeitpunkt die Temperaturdifferenz besonders hoch ist. Die Temperatur steigt zu Beginn am nahen Termoelement sehr stark an, doch das ferne Termoelement erwärmt sich nur langsam. Diese Ergebnisse stimmen mit den Erwartungen aus der Theorie überein: Edelstahl leitet aufgrund der geringen Wärmeleitfähigkeit die Wärme schlechter als Messing.

Die Ergebnisse der dynamischen Methode werden mit den nachgeschlagenen Theoriewerten verglichen, um die relative Abweichung zu ermitteln.

$$\begin{aligned}
 \kappa_{\text{Messing}} &= (93,98 \pm 10,74) \frac{\text{W K}}{\text{m}} & \kappa_{\text{Messing, Theorie}} &= 120 \frac{\text{W K}}{\text{m}} \\
 \Rightarrow \text{relative Abweichung} &= 21,63\% \\
 \kappa_{\text{Aluminium}} &= (295,99 \pm 13,45) \frac{\text{W K}}{\text{m}} & \kappa_{\text{Aluminium, Theorie}} &= 237 \frac{\text{W K}}{\text{m}} \\
 \Rightarrow \text{relative Abweichung} &= 24,89\% \\
 \kappa_{\text{Edelstahl}} &= (14,31 \pm 0,02) \frac{\text{W K}}{\text{m}} & \kappa_{\text{Edelstahl, Theorie}} &= 15 \frac{\text{W K}}{\text{m}} \\
 \Rightarrow \text{relative Abweichung} &= 4,6\%
 \end{aligned}$$

Der Messwert für Edelstahl weist den geringsten Fehler auf, aber auch die Werte für Messing und Aluminium liegen im Rahmen der Messungenauigkeit. Diese ist zum einen durch das ablesen der Werte aus den Diagrammen zu erklären, eine weitere Erklärung sind die leichten Zeitverzögerungen beim Umschalten des Peltier-Elements.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Versuch 204: Wärmeleitung von Metallen.*
- [2] *Literaturwerte der Wärmeleitfähigkeit.* 10. Jan. 2018. URL: <http://www.chemie.de/lexikon/W%C3%A4rmeleitf%C3%A4higkeit.html>.