

Versuch 302

Elektrische Brückenschaltungen

Stefanie Hilgers
Stefanie.Hilgers@tu-dortmund.de

Lara Nollen
Lara.Nollen@tu-dortmund.de

Durchführung: 05.12.2017

Abgabe: 12.12.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Wheatstonsche Brücke/Widerstandsmessbrücke	4
2.2 Kapazitätsmessbrücke	5
2.3 Induktivitätsmessbrücke	6
2.4 Maxwell-Brücke	7
2.5 Frequenzabhängige Brückenschaltung - Wien-Robinson-Brücke	7
2.6 Frequenzabhängige Brückenschaltung - TT-Brücke	8
3 Durchführung	9
3.1 Widerstandsmessbrücke	9
3.2 Kapazitätsmessbrücke	9
3.3 Induktivitätsmessbrücke und Maxwell-Brücke	10
3.4 Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung-Wien-Robinson-Brücke	10
4 Auswertung	10
4.1 Wheatstonesche Brücke	10
4.2 Kapazitätsmessbrücke	11
4.3 Induktivitätsmessbrücke	12
4.4 Maxwell-Brücke	13
4.5 Wien-Robinson-Brücke	13
4.6 Klirrfaktorbestimmung	15
5 Diskussion	15
Literatur	15

1 Zielsetzung

Mit der Hilfe von Brückenschaltungen lässt sich jede physikalische Größe, die sich eindeutig als Widerstand darstellen lässt messen. Dies wird mit verschiedenen Arten von Brückenschaltungen durchgeführt.

2 Theorie

Allgemein wird bei Brückenschaltungen die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten zweier getrennter stromdurchflossener Leiter in Abhängigkeit des Widerstandsverhältnisses gemessen. Daher hat sie im allgemeinen eine Schaltung wie in Abbildung 1 dargestellt.

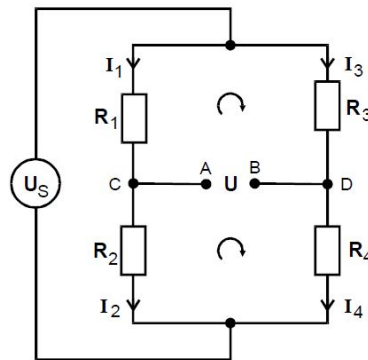


Abbildung 1: Allgemeine Schaltung einer Brückenschaltung [1].

Als Brückenspannung wird die zwischen den Punkten A und B auftretende Spannung bezeichnet. Sie lässt sich mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze berechnen. Dabei lautet das 1. Kirchhoffsche Gesetz: In einem Knotenpunkt muss die Summe aus allen Strömen (zufließend und abfließend) Null ergeben:

$$\sum_i I_i = 0. \quad (1)$$

Das zweite Kirchhoffsche Gesetz lautet: In jeder Masche eines Stromkreises ist die Summe über die Spannungen gleich Null:

$$\sum_i U_i = 0. \quad (2)$$

Aus diesen Gesetzen lässt sich folgender Zusammenhang für die Brückenspannung herleiten:

$$U = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} U_S. \quad (3)$$

Hieran lässt sich erkennen, dass die Brückenspannung für die Bedingung

$$R_2 R_3 = R_1 R_4 \quad (4)$$

verschwindet. Ist das der Fall, wird die Brücke als abgegliche Brücke bezeichnet. Da die Abgleichbedingung nur von den Widerständen abhängig ist, kann durch variieren dreier bekannter Widerstände (z.B. R_2, R_3, R_4) ein unbekannter Widerstand (z.B. R_1) ausgemessen werden. Die Genauigkeit der Messung ist davon abhängig, wie genau die Widerstände (z.B. R_2, R_3, R_4) bekannt sind und wie genau der Wert "Null" als Brückenspannung eingestellt werden kann. Die Abgleichbedingung ist unabhängig von der Speisespannung U_S , da die Brückenspannung aber proportional zu dieser ist, sollte sie dennoch hoch gewählt werden, um eine hohe Abgleichempfindlichkeit zu erhalten. Enthält die Brückenschaltung auch Kapazitäten und Induktivitäten, dann werden für die Berechnung komplexe Widerstände, auch Impedanzen genannt verwendet. Diese haben die allgemeine Form

$$Z = X + iY, \quad (5)$$

wobei X der Wirkwiderstand und Y der Blindwiderstand ist. Für einen Kondensator C , eine Induktivität L , und einen ohmschen Widerstand R ergeben sich folgende Impedanzen.

$$\begin{aligned} Z_C &= \frac{-i}{\omega C} \\ Z_L &= i\omega L \\ Z_R &= R \end{aligned}$$

Für eine Brückenschaltung mit Impedanzen lautet die Abgleichbedingung äquivalent zu Gleichung 4:

$$Z_2 Z_3 = Z_1 Z_4. \quad (6)$$

Imaginäre Zahlen sind im Allgemeinen genau dann gleich, wenn der Real- und Imaginärteil gleich sind. Daher muss für eine abgegliche Wechselspannungsbrücke die Brückenspannung nach Betrag und Phase verschwinden. Deshalb besitzt jede Wechselstrombrücke zwei voneinander unabhängige Stellglieder.

2.1 Wheatstonsche Brücke/Widerstandsmessbrücke

Diese Brückenschaltung kann mit Gleich- und Wechselstrom betrieben werden, da sie nur ohmsche Widerstände enthält.

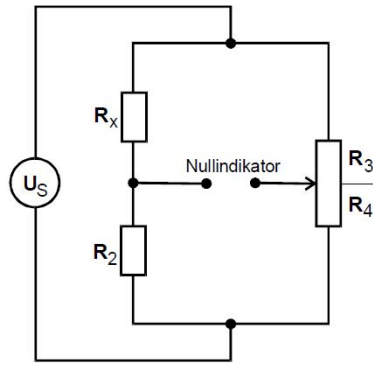


Abbildung 2: Wheatstonsche Brückenschaltung
[1].

Mit dieser Schaltung kann der unbekannte Widerstand R_x gemessen werden. Nach Gleichung 4 gilt die Bedingung

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4}. \quad (7)$$

R_x ist von dem Verhältnis von R_3 zu R_4 abhängig. Dieses Bauteil, dessen Widerstand stufenlos verstellbar ist, wird auch als Potentiometer bezeichnet.

2.2 Kapazitätsmessbrücke

Da es in einem realen Kondensator durch die Umwandlung von elektrischer Energie in Wärme zu dielektrischen Verlusten kommt, wird ein Ersatzschaltbild eingeführt. In diesem Ersatzschaltbild wird der Kondensator mit einem (fiktiven) ohmschen Widerstand in Reihe geschaltet. Somit ergibt sich für einen realen Kondensator:

$$Z_{C_{\text{real}}} = R - \frac{i}{\omega C}.$$

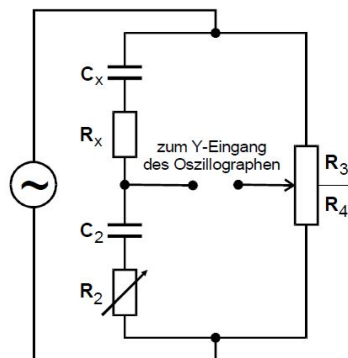


Abbildung 3: Kapazitätsmessbrücke für Kondensatoren mit dielektrischen Verlusten
[1].

Mit dieser Brücke kann eine unbekannte Kapazität C_x gemessen werden. Dabei ist neben dem Potentiometer auch der Widerstand R_2 veränderlich. Aus der Abgleichbedingung 6 ergibt sich

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad \text{und} \quad (8)$$

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3}. \quad (9)$$

2.3 Induktivitätsmessbrücke

Auch eine reale Induktivität wandelt einen Teil der Enrgie in Wärme um, daher wird äquivalent zum Kondensator ein Ersatzschaltbild eingeführt, in dem ein ohmscher Widerstand in Reihe zur Induktivität geschaltet wird. Daraus ergibt sich für die Impedanz einer realen Spule:

$$Z_{L_{real}} = R + i\omega L. \quad (10)$$

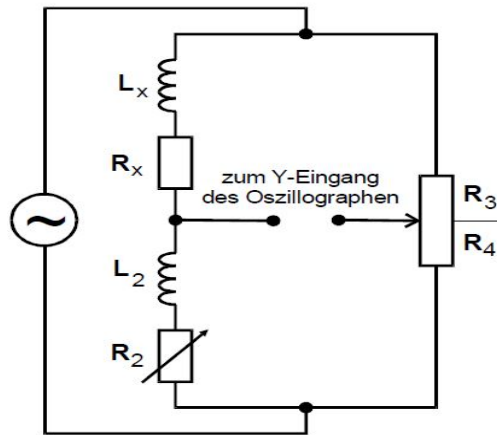


Abbildung 4: Messbrücke für reale Induktivitäten [1].

Aus der Abgleichbedingung 6 ergibt sich

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad \text{und} \quad (11)$$

$$L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4}. \quad (12)$$

In dieser Schaltung sollte die Induktivität L_2 möglichst geringe Verluste besitzen und der Wirkanteil sollte nur durch den Widerstand R_2 erzeugt werden. Diese Forderungen sind bei niedrigen Frequenzen schwer zu realisieren, weshalb stattdessen häufig die Maxwell-Brücke verwendet wird.

2.4 Maxwell-Brücke

In der Maxwellbrücke dienen die Widerstände R_3 und R_4 als Abgleichelemente, R_2 ist ein bekannter Widerstand.

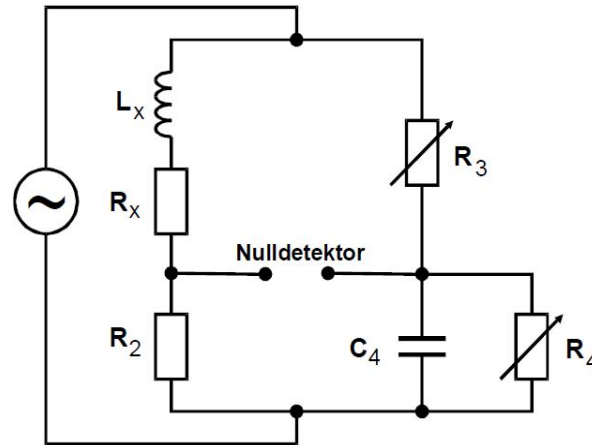


Abbildung 5: Maxwell-Brücke zur untersuchung realer Induktivitäten [1].

Aus den Abgleichbedingungen 6 folgt:

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} \quad \text{und} \quad (13)$$

$$L_x = R_2 R_3 C_4. \quad (14)$$

In den bisher vorgestellten Brückenschaltungen sind die Abgleichbedingungen unabhängig von der Frequenz der Speisespannung. Theoretisch sollten sich die Brücken bei jeder Frequenz abgleichen lassen, in der Praxis gibt es jedoch einen Frequenzbereich in dem dies besonders gut funktioniert, dieser muss im Experiment ermittelt werden. Bei zu hohen Frequenzen wird der Einfluss der Streukapazitäten zu hoch, während bei zu niedrigen Frequenzen aufgrund der Einschwingvorgänge mehrere Periodendauern gewarten werden muss, bis sich eine stabile Brückenspannung einstellt. Der optimale Frequenzbereich ist, wenn die Blind- und Wirkwiderstände in der Schaltung die gleiche Größenordnung besitzen.

2.5 Frequenzabhängige Brückenschaltung - Wien-Robinson-Brücke

Diese Brücke ist frequenzabhängig und enthält im Vergleich zu den bisherigen Brücken keine Abgleichelemente.

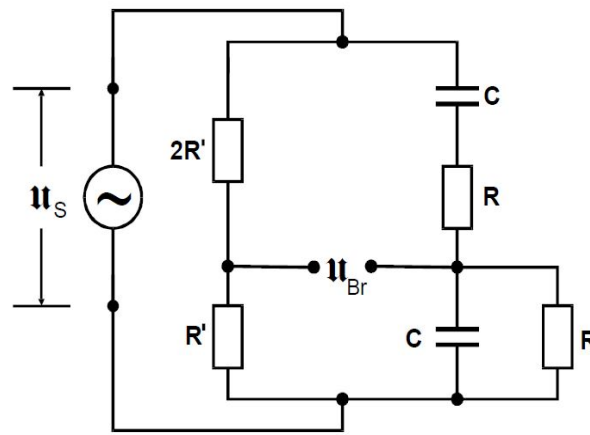


Abbildung 6: Schaltbild der Wien-Robinson-Brücke [1].

Aus den Gleichungen 3 und 6 erhält man, dass die Brückenspannung genau für

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

verschwindet. Zur Vereinfachung wird das Frequenzverhältnis $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ eingeführt. Damit ergibt sich für das Verhältnis von Speise- zu Brückenspannung:

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_s} \right| = \frac{((\Omega)^2 - 1)^2}{9(1 - (\Omega)^2)^2 + 9(\Omega)^2}. \quad (15)$$

An dieser Gleichung 15 wird deutlich, dass die Wien-Robinson-Brücke die Funktion eines elektrischen Filters hat. Sie filtert aus einem kontinuierlichem Spektrum alle Wellen der Frequenz $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ heraus.

Mit dieser Brücke kann eine sogenannte Klirrfaktormessung durchgeführt werden. Der Klirrfaktor gibt an, in welchem Maß die Grundschiwingung von Oberwellen überlagert wird. Eine Sinusschwingung sollte eigentlich keine Oberwellen besitzen, doch mit realen Sinusgeneratoren ist dies nur schwer zu realisieren. Der Klirrfaktor dient deshalb als Maß für die Qualität eines Sinusgenerators. Um den Klirrfaktor zu messen, wird am Sinusgenerator die Sperrfrequenz ω_0 der Wien-Robinson-Brücke eingestellt. Somit bleiben nur die von ω_0 verschiedenen Frequenzen übrig.

2.6 Frequenzabhängige Brückenschaltung - TT-Brücke

Die TT-Brücke ist ebenfalls frequenzabhängig und hat wie die Wien-Robinson-Brücke die Funktion eines elektrischen Filters.

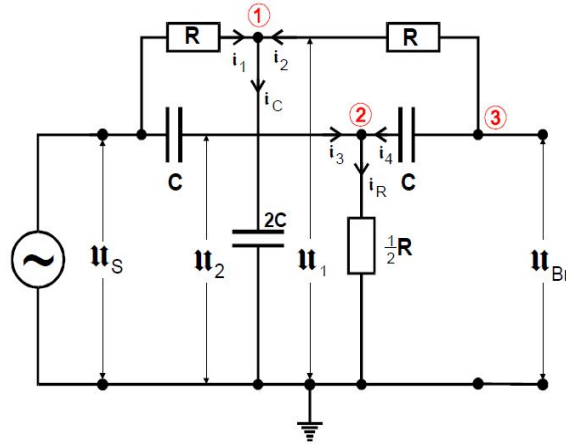


Abbildung 7: Schaltung einer TT-Brücke [1].

Der Vorteil dieser Schaltung ist, dass die Brückenspannung U_{Br} und auch die Speisenspannung U_S gegen Masse angeschlossen werden können. Mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze erhält man folgenden Ausdruck für die Brückenspannung

$$U_{Br} = U_S \frac{1 - \omega^2 R^2 C^2}{1 - \omega^2 R^2 C^2 - 4i\omega RC}. \quad (16)$$

Für die Frequenz $\omega = \frac{1}{RC}$ verschwindet die Brückenspannung. Mit der Relation $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ ergibt sich

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_s} \right|^2 = \frac{(1 - \Omega^2)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 16\Omega^2}. \quad (17)$$

Es sind viele Ähnlichkeiten zur Wien-Robinson-Brücke erkennen.

3 Durchführung

3.1 Widerstandsmessbrücke

Zu Beginn werden mit der Widerstandsmessbrücke zwei unbekannte Widerstände R_x mit drei verschiedenen Widerständen R_2 ausgemessen. Dazu wird Wechselstrom an die Schaltung angelegt. Außerdem wird vor das Oszilloskop ein Tiefpass geschaltet, um hochfrequente Störspannungen zu unterdrücken. Als Abstimmvorrichtung wird ein Potentiometer mit 1 k Ω Gesamtwiderstand verwendet. Nun wird das Potentiometer so eingestellt, dass am Oszilloskop ein Minimum der Brückenspannung zu messen ist. Dieser Vorgang wird für zwei weitere Widerstände R_2 wiederholt.

3.2 Kapazitätsmessbrücke

Nun wird mit Hilfe der Kapazitätsmessbrücke die Kapazität zweier unbekannter Kondensatoren C_x sowie die Daten einer RC-Kombination ausgemessen. Jede Kapazität

wird mit drei verschiedenen Kondensatoren C_2 ausgemessen. Da diese Schaltung zwei Abstimmvorrichtungen R_2 und R_3/R_4 besitzt werden diese alternierend verstellt.

3.3 Induktivitätsmessbrücke und Maxwell-Brücke

Unter Verwendung der Induktivitätsmessbrücke wird nun die Induktivität sowie der Verlustwiderstand einer unbekannten Spule ausgemessen. Das Vorgehen ist hier ähnlich wie bei der Kapazitätsmessbrücke. Die gleiche Induktivität wird nun ein zweites mal vermessen. Dieses Mal unter Verwendung der Maxwell-Brücke.

3.4 Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung-Wien-Robinson-Brücke

Hier wird die Brückenspannung in Abhängigkeit der Speisespannung und deren Frequenz gemessen. Dazu wird die Frequenz am Sinusgenerator langsam von 20 Hz auf 30 000 Hz erhöht und die dazugehörigen Werte für die Brückenspannung und die Speisespannung notiert.

4 Auswertung

4.1 Wheatstonesche Brücke

Die gemessenen Werte für die Widerstände R_2 , R_3 und R_4 zur Bestimmung des unbekannten Widerstands R_{x10} (Wert 10) befinden sich in der untenstehenden Tabelle 1

Tabelle 1: Werte der Messreihe für Wert 10

R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
332	419	581
500	324	676
1000	192	800

Durch die Gleichung 7 und Mittelung mit :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (18)$$

wobei der dazugehörige Fehler sich durch

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (19)$$

berechnet, ergibt sich somit:

$$R_{x10} = (239,69 \pm 0,17) \Omega$$

Da das Verhältniss von $\frac{R_3}{R_4}$ laut Hersteller bereits mit einem Fehler von $\pm 0.5\%$ behaftet ist und auch R_2 nur bis auf 0,2 % genau ist, muss hier die auch die Gaußsche Fehlerfortpflanzung mit der Formel

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2} \quad (20)$$

beachtet werden, durch die sich für R_{x10} ein Fehler von $\pm 1.29\Omega$ ergibt, welcher deutlich größer als der Mittelwertfehler ist und somit der signifikante Fehler. Somit ergibt sich insgesamt

$$R_{x10} = (239,7 \pm 1,3) \Omega$$

Analog lässt sich der Wert 11 berechnen, dessen Messwerte sich in Tabelle 2 befinden

Tabelle 2: Werte der Messreihe für Wert 11

R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
332	595	405
500	494	506
1000	328	672

Hierdurch ergibt sich für Wert 11:

$$R_{x11} = (487,0 \pm 2,6) \Omega$$

wobei wieder der Gauß-Fehler der größere und somit signifikante ist. Der Fehler des Mittelwerts beträgt dabei $\pm 0.12\Omega$.

4.2 Kapazitätsmessbrücke

Im zweiten Teil sollen zwei unbekannte Kapazitäten und eine RC-Kombination vermessen werden. Die gemessenen Werte der ersten Kapazität C_{x3} (Wert 3) befinden sich in Tabelle 3 und die der zweiten Kapazität C_{x1} (Wert 1) in der darauf folgenden Tabelle 4

Tabelle 3: Werte der Messreihe für Wert 3

C_2 / nF	R_3 / Ω	R_4 / Ω
450	515	485
597	590	410
992	701	299

Tabelle 4: Werte der Messreihe für Wert 1

C_2 / nF	R_3 / Ω	R_4 / Ω
450	405	595
597	478	522
992	603	397

Aus Gleichung 9 ergibt sich damit für

$$C_{x3} = (420,6 \pm 2,9) \text{ nF}$$

$$C_{x1} = (655,4 \pm 3,5) \text{ nF}$$

wobei bei C_{x3} der Fehler des Mittelwerts der größere war und bei C_{x1} der Gauß-Fehler durch die Ungenauigkeit von C_2 mit $\pm 0.2\%$ und von dem Verhältniss von $\frac{R_3}{R_4}$ mit $\pm 0.5\%$. Der Gauß-Fehler von C_{x3} beträgt dabei $\pm 2.3 \text{ nF}$ und der Mittelwertfehler von C_{x1} beträgt $\pm 2.9 \text{ nF}$.

Die RC-Kombination (Wert 9) mit der Kapazität C_{x9} und dem Widerstand R_{x9} ergibt sich mit den Werten aus Tabelle 5 zu

$$C_{x9} = (417 \pm 13) \text{ nF}$$

$$R_{x9} = (475 \pm 14) \Omega$$

Dabei wurde für die Kapazität C_{x9} der Mittelwertfehler verwendet und für den Widerstand R_{x9} der Fehler nach Gauß mit der Formel 20, welcher durch die Abweichung des variablen Widerstands R_2 mit $\pm 3\%$ recht groß ausfällt. Der entsprechende Mittelwertfehler von R_{x9} beträgt dabei $\pm 0.54 \Omega$ und der Gauß-Fehler von C_{x9} beträgt $\pm 2.56 \text{ nF}$.

Tabelle 5: Werte der Messreihe für Wert 9

C_2 / nF	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
399	469	504	496
450	446	516	484
597	348	577	423

4.3 Induktivitätsmessbrücke

Die Werte der unbekannten Induktivität L_{x16} und dem dazugehörigen Widerstand R_{x16} (Wert 16) sind in Tabelle 6 abzulesen.

Tabelle 6: Werte der Messreihe für Wert 16

L_2 / mH	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
14.6	114	778	222
20.1	151	719	281
27.5	210	651	349

Durch die Gleichungen 12 ergibt sich somit

$$R_{x16} = (393 \pm 12) \Omega$$

$$L_{x16} = (51,3 \pm 2,1) \text{mH}$$

mit den Fehlern aus Gleichung 20, da die Mittelwertfehler aus Gleichung 19 mit $\pm 3.8\Omega$ für R_{x16} und $\pm 0.076\text{mH}$ für L_{x16} jeweils kleiner sind.

4.4 Maxwell-Brücke

Bei der Messung wird eine Kapazität $C_2 = (450,0 \pm 0,9) \text{nF}$ verwendet. Die Messwerte befinden sich in Tabelle 7

Tabelle 7: Werte der zweiten Messreihe für Wert 16

R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
500	178	328
664	178	328
1000	119	332

Aus den Gleichungen 14 ergibt sich

$$R_{x16} = (330 \pm 29) \Omega$$

$$L_{x16} = (49 \pm 14) \text{mH}$$

wobei der Mittelwertfehler für R_{x16} verwendet wurde (Gauß-Fehler = $\pm 14\Omega$) und der Gauß-Fehler für L_{x16} (Mittelwertfehler = $\pm 4.4\text{mH}$).

4.5 Wien-Robinson-Brücke

Die Messung der Wien-Robinson-brücke wird mit einer Kapazität $C=992\text{nF}$ und einem Widerstand von $R= 664\Omega$ durchgeführt. Die Messwerte sind in Tabelle 8 dargestellt.

Tabelle 8: Werte der Messreihe die Wien-Robinson-brücke

ν / Hz	U_b / V	U_s / V	$\frac{U_b}{U_s}$
20	0.120	3.08	0.039
50	0.248	4.56	0.054
100	0.320	4.64	0.069
150	0.264	4.56	0.058
200	0.136	4.50	0.030
220	0.072	4.48	0.016
230	0.032	4.48	0.007
240	0.024	4.48	0.005
242	0.016	4.48	0.004
250	0.040	4.48	0.009
265	0.080	4.48	0.018
300	0.298	4.56	0.065
500	0.704	4.56	0.154
1000	1.17	4.32	0.271
3000	1.41	4.28	0.330
10000	1.44	4.24	0.340
20000	1.44	4.24	0.340
30000	1.44	4.24	0.340

In Abbildung 8 ist das Verhältniss $\frac{U_b}{U_s}$ gegen $\frac{\nu}{\nu_0}$ aufgetragen.

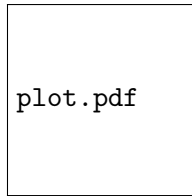


Abbildung 8: Diagramm zur Wien-Robinson-Brücke

Der Theoriwert für ω_0 ergibt sich zu

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{664\Omega \cdot 992\text{nF}} = 1518.17\text{Hz}$$

und somit

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 241.62\text{Hz}$$

4.6 Klirrfaktorbestimmung

Das Minimum der Frequenz liegt bei einer Frequenz von 242 Hz mit einer Brückenspannung $U_b = 0.016\text{V}$ und $U_s = 4.48\text{V}$. Durch die Gleichung 15 ergibt sich $f(2)$ zu

$$f(\Omega = 2) = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2}} = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot \frac{(3)^2}{(-3)^2 + 36}} = \frac{1}{\sqrt{45}}$$

Daraus folgt, dass

$$U_2 = \frac{U_b}{f(2)} = 2,385\text{ mV}$$

und schlussendlich

$$k = \frac{U_2}{U_1} = 0.149$$

5 Diskussion

Bei den Messungen ist allgemein zu erkennen, dass die Fehler durch den Mittelwert meistens kleiner waren als die, die nach der Fehlerfortpflanzung berechnet werden und sich durch die Ungenauigkeiten der Bauteile ergeben, was auf eine recht genaue Messung schließen lässt.

Insbesondere bei der Maxwell-Brücke treten jedoch auch teilweise recht große Fehler auf, was auf eine eher geringe Genauigkeit hindeutet. Auch der nach Gauß berechnete Fehler ist durch die mit $\pm 3\%$ Ungenauigkeit behafteten Bauteile R_3 und R_4 recht groß. Zudem ist auch auffällig, dass der Widerstand R_{x16} bei der Messung durch die Induktionsbrücke zu

$$R_{x16} = (393 \pm 12) \Omega$$

und durch die Maxwell-Brücke zu

$$R_{x16} = (330 \pm 29) \Omega$$

ergibt, also eine Abweichung von etwa 19%, was zudem außerhalb der Fehlerintervalle liegt und somit auf einen systematischen Fehler in einer der beiden Messungen hindeutet. Auch bei der Wien-Robinson-Brücke scheint ein systematischer Fehler vorzuliegen, da die Messwerte bei hohen Frequenzen und im Minimum zwar nahe an der Theoriekurve liegen, bei niedrigen Frequenzen treten jedoch große Abweichungen auf.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Versuch 302: Elektrische Brückenschaltung.*