

Versuch 351

Fourier- Analyse und Sythese

Stefanie Hilgers
Stefanie.Hilgers@tu-dortmund.de

Lara Nollen
Lara.Nollen@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.11.2018

Abgabe: 21.11.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
2	Durchführung	3
3	Auswertung	3
4	Diskussion	8

1 Zielsetzung

Bei diesem Versuch soll durch Ausnutzung der Interferenzbilder eines Einzelspalts und zweier Doppelspalte deren Spaltbreite sowie gegebenenfalls der Abstand der beiden Spalte bestimmt werden.

2 Theorie

2.1 Fraunhofer Beugung

Trifft Licht auf eine Öffnung bzw. ein Hinderniss, welches in etwa in der Größenordnung der Wellenlänge liegt und zudem klein ist gegenüber dem Strahlendurchmesser, so kommt es zu dem Phänomen der Beugung, welche sich durch die Welleneigenschaften des Lichtes erklären lässt. Eine brauchbare Erklärung liefert das Huygenssche Prinzip der Elementarwellen, welches besagt, dass sich von jedem Punkt einer Wellenfront eine kugelförmige Elementarwelle ausbreitet, wobei sich diese Elementarwellen überlagern und konstruktiv oder destruktiv interferieren.

Bei der Beugung lassen sich im Allgemeinen zwei unterschiedliche Anordnungen beschreiben, wobei bei diesem Versuch die Fraunhofersche verwendet wird. Im Gegensatz zu der Fresnelschen liegt hier die Lichtquelle im Unendlichen (also praktisch: sehr großer Abstand zwischen der Lichtquelle und dem Spalt im Vergleich zur Wellenlänge), sodass die Wellenfront parallel auftrifft. Auch der Schirm befindet sich hierbei quasi im Unendlichen, beispielsweise realisiert durch eine Sammellinse wie in Abbildung ??, sodass jeweils die Strahlen interferieren, welche unter dem gleichen Winkel gebeugt wurden.

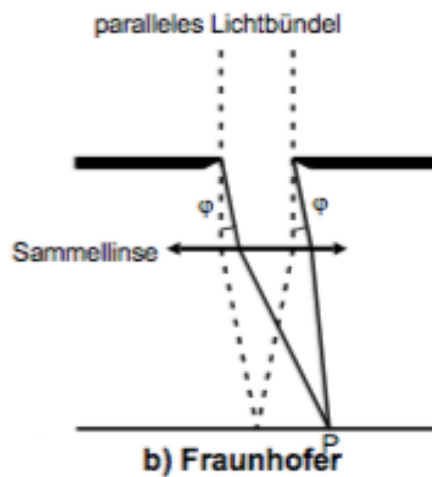


Abbildung 1: Fraunhofer Aufbau [skript].

2.2 Einzelspalt

Trifft nun zum Beispiel eine ebene Welle der Form

$$A(z, t) = A_0 \exp i(\omega t - 2\pi z/\lambda) \quad (1)$$

auf den Spalt, durchläuft sie diesen nicht nur gerade, sondern wird nach dem bereits erwähnten Huygensschen Prinzip hinter dem Spalt gebeugt, da sich die kugelförmigen Elementarwellen in alle Richtungen ausbreiten. Werden nun zwei Strahlenbündel betrachtet, welche an zwei unterschiedlichen Stellen mit Abstand x auf den Spalt treffen und unter demselben Winkel ϕ gebeugt werden, besitzen diese nach durchlaufen des Spaltes einen Wegunterschied s , aufgrund dessen sich eine Phasendifferenz der Form

$$\delta = \frac{2\pi s}{\lambda} = \frac{2\pi x \sin \phi}{\lambda} \quad (2)$$

ergibt. Die Gesamtwellen ergibt sich dabei durch Superposition der einzelnen Elementarwellen, wegen des infinitesimalen Abstands dx der einzelnen Strahlenbündel geht die Summe allerdings in eine Integration über, wobei auch die bereits beschriebene Phasendifferenz beachtet werden muss. Es ergibt sich somit durch Umformung mit der Eulerschen Formel für den Sinus folgende Formel für die Amplitude B unter dem Winkel ϕ :

$$B(z, t, \phi) = A_0 \exp \left\{ i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{\pi i b \sin \phi}{\lambda} \right\} \cdot \frac{\lambda}{\pi \sin \phi} \sin \left\{ \frac{\pi b \sin \phi}{\lambda} \right\} \quad (3)$$

Diese Formel lässt sich durch die Substitution

$$\eta := \frac{\pi b \sin \phi}{\lambda} \quad (4)$$

zu

$$B(\phi) = A_0 b \frac{\sin \eta}{\eta} \quad (5)$$

vereinfachen. Eine solche Funktion ist in Abbildung ?? dargestellt.

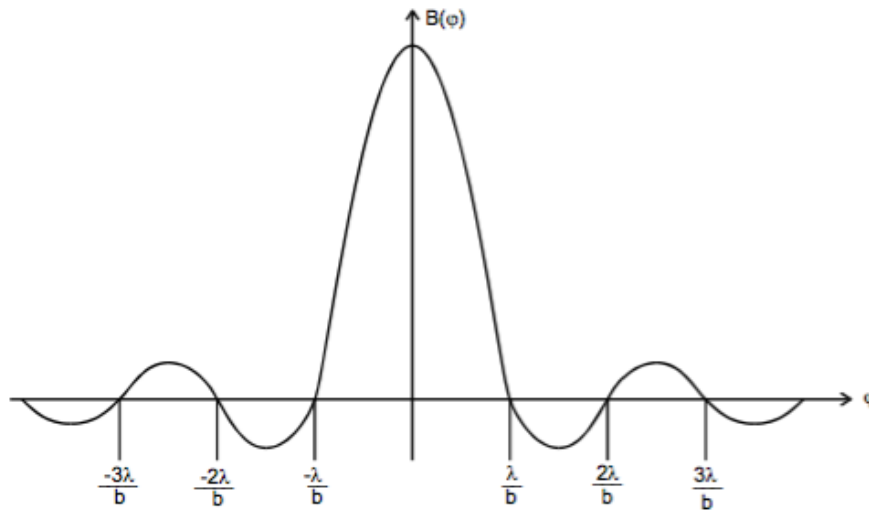


Abbildung 2: $B(\varphi)$ einer ebenen Welle nach durchlaufen eines Einzelspalts [skript].

Da sich die Amplitude in der Praxis jedoch nicht direkt messen lässt, wird hier die Intensität verwendet, welche durch die Funktion

$$I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = A_0^2 b^2 \left(\frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right)^2 \cdot \sin^2 \left\{ \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right\} \quad (6)$$

2.3 Doppelspalt

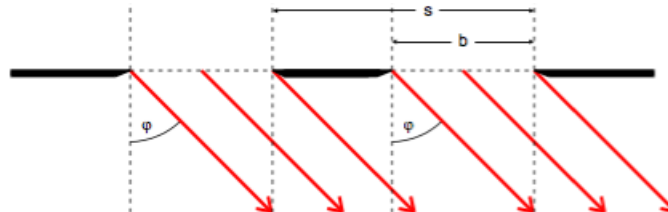


Abbildung 3: Beugung am Doppelspalt [skript].

Zur Berechnung des Beugungsmusters eines Doppelspalts, wird dieser als Überlagerung der Beugungsbilder zweier einzelner Spalte betrachtet, sodass sich eine Intensitätsverteilung von

$$I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = 4 \cdot \cos^2 \left\{ \frac{\pi s \sin \varphi}{\lambda} \right\} \cdot \left(\frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right)^2 \cdot \sin^2 \left\{ \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right\} \quad (7)$$

erhält, wobei s den Abstand der Spalte beschreibt und b die Breite, wie in Abbildung ?? zu sehen ist.

3 Durchführung

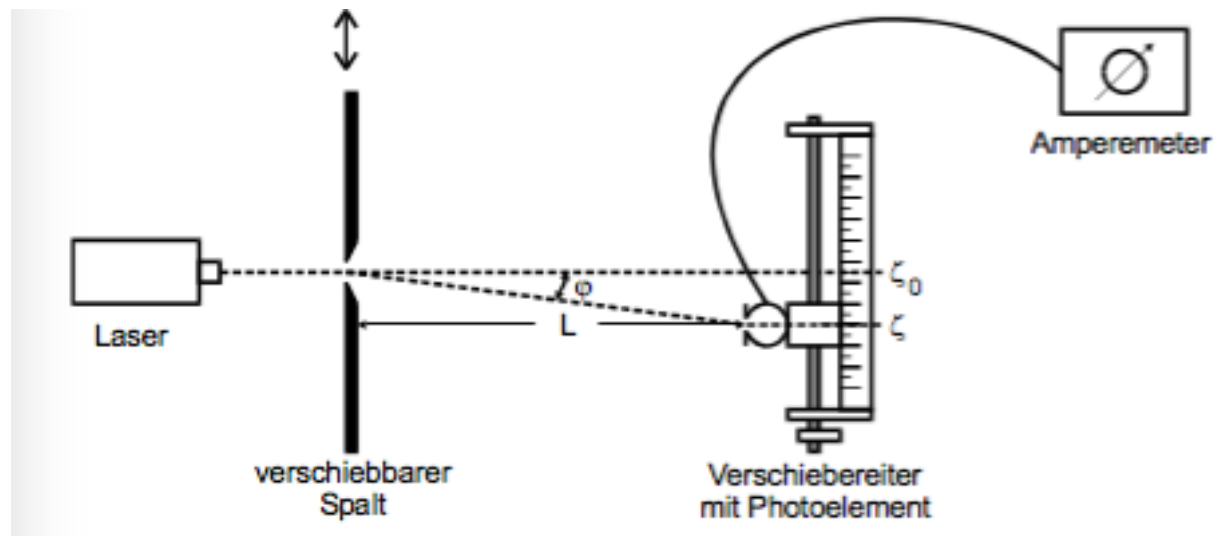


Abbildung 4: Versuchsaufbau [skript].

Wie in Abbildung ?? zu sehen ist, wird bei diesem Versuch ein verschiebbarer Einzel- oder Doppelspalt von einem Laser mit einer Wellenlänge von etwa 650 nm beleuchtet, sodass sich dahinter ein Beugungsbild ausbildet. Dieses wird von einem lichtempfindlichen Detektor auf einem Verschiebereiter mittels einer Photodiode ausgemessen. Es ist dabei darauf zu achten, dass der Detektor einen möglichst großen Abstand zum Spalt, also mindestens einen Meter, besitzt. Zudem muss vor Versuchsbeginn auch der Dunkelstrom gemessen werden, welcher von den Messwerten jeweils abgezogen wird. Es wird nun bei konstanten Lichtverhältnissen je eine Messreihe zu einem Einzelspalt und zu zwei verschiedenen Doppelspalten aufgenommen, wobei je mindestens 50 Messwerte genommen werden und das Hauptmaximum sowie beim Einzelspalt mindestens ein und bei den Doppelspalten mindestens zwei Nebenmaxima auf beiden Seiten gemessen werden

4 Auswertung

Die Werte für die Wellenlänge λ des Lasers, sowie der Abstand L vom Optischen Element zum Detektor betragen:

$$\lambda = 635 \text{ nm}$$

$$L = 1,085 \text{ m.}$$

Für den Dunkelstrom wurden

$$I_{\text{Dunkel}} = 0,1 \text{ nA}$$

gemessen.

Die Messwerte für den ersten Doppelspalt sind in Tabelle 1 zu sehen. Mit Hilfe einer Ausgleichsfunktion werden die Werte für die Spaltbreite b , den Spaltabstand s und die Verschiebung des Maximums vom Nullpunkt x_0 bestimmt. Diese Ausgleichsfunktion wird nach Gleichung ?? berechnet und ist in Abbildung 1 zu sehen. Für ϕ wurde die Relation $\phi = \frac{x-x_0}{L}$ verwendet. Für den ersten Spalt sind

$$b = 0,15 \text{ mm} \quad s = 1 \text{ mm}$$

vom Hersteller angegeben.

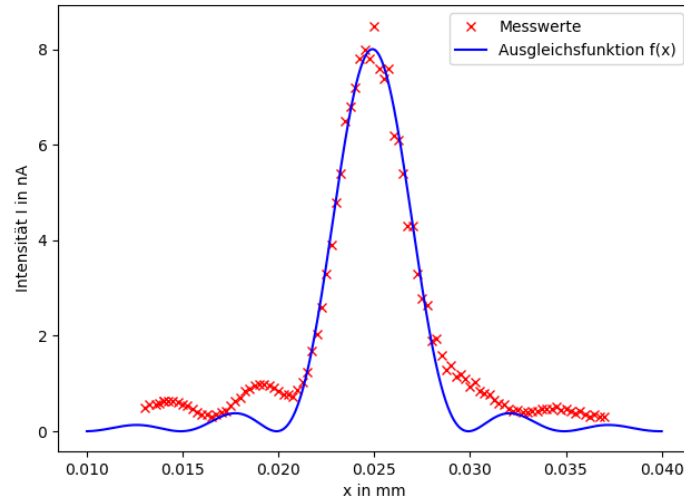


Abbildung 5: Messwerte und Ausgleichsfunktion für den ersten Doppelspalt.

Die Regression ergibt für den ersten Spalt folgende Werte:

$$\begin{aligned} b &= (2,48 \pm 136\,312,78) \cdot 10^{-7} \text{ mm} \\ s &= (24,9 \pm 0,0) \text{ mm} \\ x_0 &= (0,12 \pm 0,03) \text{ mm} \end{aligned}$$

Um die Messwerte mit den Herstellerangaben zu vergleichen wird die Abweichung nach folgender Formel berechnet:

$$\text{Abweichung} = \frac{\text{Messwert} - \text{Herstellerangabe}}{\text{Herstellerangabe}} * 100 \quad (8)$$

Daraus ergibt sich, dass die Spaltbreite b um -99% abweicht und der Spaltabstand s um 2390%. Um die Abweichung der Nulllinie zu bestimmen wird der Winkel ϕ nach $\phi = \frac{x-x_0}{L}$ berechnet. Theoretisch liegt die Nulllinie bei $\Delta\phi = 0 \text{ rad}$. Es ergibt sich

$$\Delta\phi = (0,023 \pm 0,003) \text{ rad.}$$

Für den zweiten Doppelspalt wird analog vorgegangen, die Messwerte sind in Tabelle 2

$x/ \text{ mm}$	$A/ \text{ nA}$	$x/ \text{ mm}$	$A/ \text{ nA}$	$x/ \text{ mm}$	$A/ \text{ nA}$
13,00	5,10	21,00	8,80	29,25	11,50
13,25	5,60	21,25	10,50	29,50	12,00
13,59	5,80	21,50	12,50	29,75	11,00
13,75	6,00	21,75	17,00	30,00	9,50
14,00	6,50	22,00	20,50	30,25	10,50
14,00	6,50	22,25	26,00	30,50	8,60
14,25	6,30	22,50	33,00	30,75	8,10
14,50	6,40	22,75	39,00	31,00	7,90
14,75	6,20	23,00	48,00	31,25	6,60
15,00	5,60	23,25	54,00	31,50	6,00
15,25	5,40	23,50	65,00	31,75	5,60
15,50	4,70	23,75	68,00	32,00	4,80
15,75	4,00	24,00	72,00	32,25	4,30
16,00	3,70	24,25	78,00	32,50	4,60
16,25	3,50	24,50	80,00	32,75	4,00
16,50	3,20	24,75	78,00	33,00	4,10
16,75	3,50	25,00	85,00	33,25	4,40
17,00	4,00	25,25	76,00	33,50	4,20
17,25	4,40	25,50	74,00	33,75	4,80
17,50	5,50	25,75	76,00	34,00	4,70
17,75	6,30	26,00	62,00	34,25	4,80
18,00	7,10	26,25	61,00	34,50	5,20
18,25	8,40	26,50	54,00	34,75	4,50
18,50	9,00	26,75	43,00	35,00	4,80
18,75	9,60	27,00	43,00	35,25	4,40
19,00	10,00	27,25	33,00	35,50	3,80
19,25	9,90	27,50	28,00	35,75	4,20
19,50	9,70	27,75	26,50	36,00	3,50
19,75	9,20	28,00	19,00	36,25	3,20
20,00	8,40	28,25	19,50	36,50	3,60
20,25	7,90	28,50	16,00	36,75	3,10
20,50	7,90	28,75	13,00	37,00	3,20
20,75	7,40	29,00	14,00		

Tabelle 1: Messwerte für den ersten Doppelspalt.

zu finden und die Ausgleichsfunktion in Abbildung 2. Für diesen Doppelspalt wurden vom Hersteller

$$b = 0,1 \text{ mm} \quad s = 0,4 \text{ mm}$$

angegeben.

$x/ \text{ mm}$	$A/ \text{ nA}$	$x/ \text{ mm}$	$A/ \text{ nA}$	$x/ \text{ mm}$	$A/ \text{ nA}$	$x/ \text{ mm}$	$A/ \text{ nA}$
5,00	3,9	16,50	8,0	25,50	30,0	35,50	2,7
5,50	2,6	17,00	10,5	25,75	27,0	36,00	3,5
6,00	1,6	17,50	9,0	26,00	25,0	36,50	2,2
6,50	1,3	18,00	9,0	26,25	24,0	37,00	2,6
7,00	2,5	18,50	11,5	26,50	26,00	37,50	2,3
7,50	3,8	19,00	9,5	26,75	26,0	38,00	2,0
8,00	3,0	19,50	12,0	27,00	26,0	38,50	2,2
8,50	6,0	20,00	14,5	27,50	19,0	39,00	1,8
9,00	6,6	20,50	11,5	28,00	21,0	39,50	2,2
9,50	5,1	21,00	19,0	28,50	18,0	40,00	2,1
10,00	6,6	21,50	19,5	29,00	12,5	40,50	1,8
10,50	5,2	22,00	14,5	29,50	15,0	41,00	1,9
11,00	4,3	22,50	24,5	30,00	11,0	41,50	2,0
11,50	3,4	23,00	23,0	30,50	8,4	42,00	1,7
12,00	3,0	23,25	20,5	31,00	8,6	42,50	1,7
12,50	3,3	23,50	22,5	31,50	5,9	43,00	2,0
13,00	2,6	23,75	28,0	32,00	5,6	43,50	1,5
13,50	3,7	24,00	31,0	32,50	4,0	44,00	1,7
14,00	6,1	24,25	30,0	33,00	4,2	44,50	1,4
14,50	5,8	24,50	25,0	33,50	4,0	45,00	1,5
15,00	6,4	24,75	25,0	34,0	2,5		
15,50	9,8	25,00	28,0	34,50	4,3		
16,00	8,2	25,25	31,0	35,00	3,1		

Tabelle 2: Messwerte für den ersten Doppelspalt.

Hier ergibt die Regression:

$$b = (3,148 \pm 0,000) \cdot 10^{-2} \text{ mm}$$

$$s = (24,699 \pm 0,000) \text{ mm}$$

$$x_0 = (2,611 \pm 0,001) \cdot 10^{-2} \text{ mm}.$$

Die Abweichungen von den Herstellerangaben berechnen sich analog zum ersten Doppelspalt, es ergibt sich für den Spaltabstand s eine Abweichung von 6075% und für die Spaltbreite eine Abweichung von -69%. Für den Winkel der Nulllinie ergibt sich:

$$\Delta\phi = (0,023 \pm 0,000) \text{ rad.} \quad (9)$$

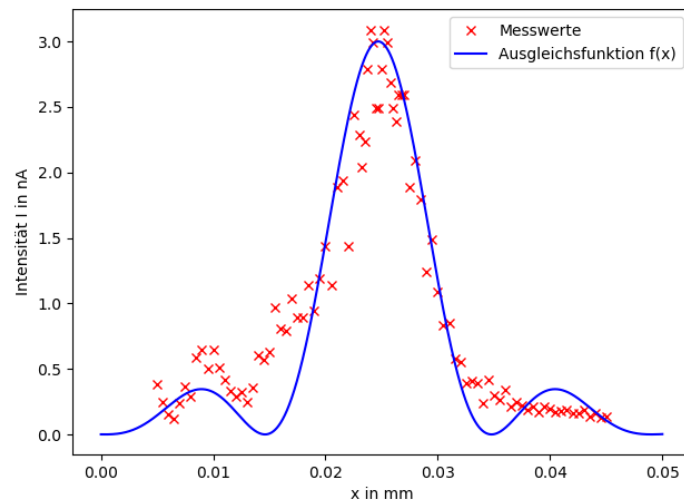


Abbildung 6: Ausgleichsfunktion und Messwerte des zweiten Doppelspaltes.

Für die Ausgleichfunktion in Abbildung 3 des Einzelspaltes wird Gleichung ?? verwendet. Die dazugehörigen Messwerte stehen in Tabelle 3. Vom Hersteller wird hier die Spaltbreite mit $b = 0,15$ mm angegeben.

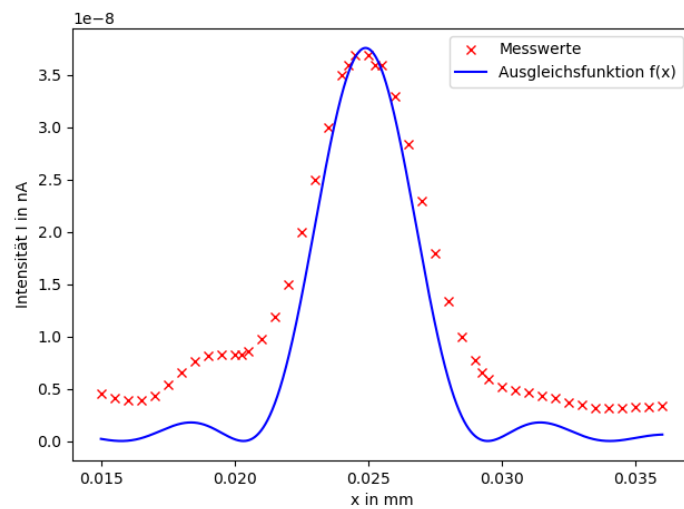


Abbildung 7: Ausgleichsfunktion und Messwerte des Einzelspaltes.

Die Regression ergibt für den Einzelspalt diese Werte:

$$b = (0,15 \pm 0,04) \text{ mm}$$

$$x_0 = (24,89 \pm 0,12) \text{ mm.}$$

Hier ist zu beachten, dass der Wert des Maximums aus der Ausgleichsrechnung ausge-

$x/ \text{ mm}$	$A/ \text{ nA}$	$x/ \text{ mm}$	$A/ \text{ nA}$	$x/ \text{ mm}$	$A/ \text{ nA}$
15,0	4,6	23,0	25,0	29,5	6,0
15,5	4,2	23,5	30,0	30,0	5,3
16,0	4,0	24,0	35,0	30,5	4,9
16,5	4,0	24,25	36,0	31,0	4,7
17,0	4,4	24,5	37,0	31,5	4,4
17,5	5,5	24,75	38,0	32,0	4,2
18,0	6,6	25,00	37,0	32,5	3,8
18,5	7,7	25,25	36,0	33,0	3,6
19,0	8,2	25,5	36,0	33,5	3,2
19,5	8,4	26,0	33,0	34,0	3,2
20,0	8,4	26,5	28,5	34,5	3,2
20,25	8,4	27,0	23,0	35,0	3,3
20,5	8,7	27,5	18,0	35,5	3,4
21,0	9,8	28,0	13,5	36,0	3,5
21,5	12,0	28,5	10,0		
22,0	15,0	29,0	7,8		
22,5	20,0	29,25	6,7		

Tabelle 3: Messwerte für den ersten Doppelspalt.

nommen wurde, da sich ansonsten kein numerisch zu verarbeitender Wert ergibt. Hier beträgt die Abweichung der Spaltbreite 0%. Die Abweichung der Nulllinie wird äquivalent wie beim Doppelspalt berechnet. Es ergibt sich

$$\Delta\phi = (0,006 \pm 0,011) \text{ rad.}$$

5 Diskussion

Die berechneten Werte für die Spaltbreite b , den Spaltabstand s und die Verschiebung vom Mittelpunkt $\Delta\phi$ der beiden Doppelspalte sind hier noch einmal zusammengefasst.

Erster Doppelspalt:

$$\begin{aligned}
 b &= (2,48 \pm 136\,312,78) \cdot 10^{-7} \text{ mm} \\
 s &= (24,9 \pm 0,0) \text{ mm} \\
 \Delta\phi &= (0,023 \pm 0,003) \text{ rad.}
 \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich sehr hohe Abweichungen von den Herstellerangaben. Für die Spaltbreite beträgt die Abweichung -99% und für den Spaltabstand 2390%. Der berechnete Mittelpunkt, bzw. der Ort des Hauptmaximums weist nur eine geringe Abweichung von der theoretischen Nulllinie bei $\Delta\phi = 0 \text{ rad}$ auf.

Zweiter Doppelspalt:

$$b = (3,148 \pm 0,000) \cdot 10^{-2} \text{ mm}$$

$$s = (24,699 \pm 0,000) \text{ mm}$$

$$\Delta\phi = (0,023 \pm 0,000) \text{ rad.}$$

Hier sind die Abweichungen ebenfalls sehr hoch, für die Spaltbreite liegt sie bei -69% und für die Spaltabstand bei 6075%. Wie beim ersten Doppelspalt auch liegt das Hauptmaximum vergleichsweise nah an dem theoretischen Wert von $\Delta\phi = 0 \text{ rad.}$

Für den Einzelspalt ergeben sich folgende Messwerte:

$$b = (0,15 \pm 0,04) \text{ mm}$$

$$\Delta\phi = (0,006 \pm 0,011) \text{ rad.}$$

Überraschenderweise stimmt hier die Spaltbreite sehr gut mit dem Theoriewert überein, auch die Abweichung der Nulllinie ist sehr gering.

Die Nulllinie liegt bei allen Messungen sehr nah am Theoriewert, obwohl das optische Element per Hand im Strahlengang des Lasers platziert wird und schon minimale Positionsänderungen das Interferenzbild verändern.

Da bei den Doppelspalten die Abweichungen der Spaltbreite und des Spaltabstandes sehr hoch sind, ist von einem systematischem Fehler auszugehen. Eine weitere Begründung könnte eine nicht optimale Ausgleichsfunktion sein. Wie in den Abbildungen zu erkennen passt die Ausgleichsfunktion nicht immer ideal zu den Messwerten, daher kann es zu Fehlern bei der Berechnung der Parameter kommen. Die Versuche die Ausgleichfunktion besser anzupassen zeigten leider keinen Erfolg.