Statistische Redeneren, Huiswerk Serie 1

Peter Verkade (10561773) David Veenstra (10094423)

4 april 2015

1 Vraag 8

1.1 Onderdeel A

Uit vraag 1 weten we dat $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cup B)$. En als we aannemen dat A en B onafhankelijk zijn, dan geldt dat $P(A \cup B) = P(A)P(B)$. Dus moet gelden dat:

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cup B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(B^c) \end{aligned}$$

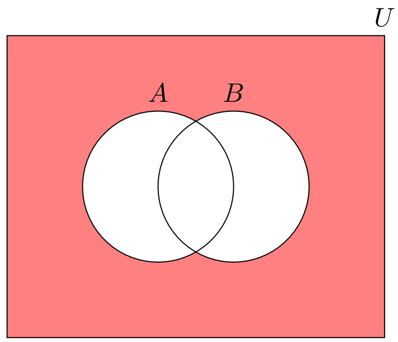
Dus als A en B onafhankelijk zijn, dan is A en B^c ook onafhankelijk. Bovendien, kan er met vergelijkbare redenatie laten zien worden dat $A \perp B^c \Rightarrow A \perp B$. Maar dan gaan de voorgaande vergelijking van beneden naar boven, in plaats van boven naar benden. Concluderend geldt er dat $A \perp B^c \iff A \perp B$.

1.2 Onderdeel B

Zelfde als in onderdeel A, doordat dat de doorsnede van sets communicatief is.

1.3 Onderdeel C

Plaatje 1 laat zien dat $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B)$. Als er weer wordt aangenomen dat $A \perp B$, dan geldt er dat:



Figuur 1: $A^c \cap B^c$.

$$\begin{aligned}
P(A^c \cap B^c) &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B) \\
&= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\
&= 1 - P(A) + P(B)(P(A) - 1) \\
&= P(A^c) - P(B)P(A^c) \\
&= P(A^c)(1 - P(B)) \\
&= P(A^c)P(B^c) \iff \\
& A \perp B \Rightarrow A^c \perp B^c
\end{aligned}$$

Hier kan ook weer dezelfde redenatie gebruikt worden, in om gekeerde volgorde, om te laten zien dat $A^c \perp B^c \Rightarrow A \perp B$. Dus geldt er dat $A^c \perp B^c \iff \perp B$.

2 Vraag 6

2.1 Onderdeel A

$$\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \iff \\
P(A \cap B) &= P(A|B)P(B)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(A_1A_2\cdots A_n) &= P(A_1 \cap (A_2\cdots A_n)) \\
&= P(A_1|A_2\cdots A_n)P(A_2 \cap (A_3\cdots A_n)) \\
&= P(A_1|A_2\cdots A_n)P(A_2|A_3\cdots A_n)P(A_3 \cap (A_4\cdots A_n)) \\
&\vdots \\
&= P(A_1|A_2\cdots A_n)P(A_2|A_3\cdots A_n)P(A_3 \cap (A_4\cdots A_n))\cdots P(A_{n-1} \cap A_n) \\
&= P(A_1|A_2\cdots A_n)P(A_2|A_3\cdots A_n)P(A_3 \cap (A_4\cdots A_n))\cdots P(A_{n-1}|A_n)P(A_n)
\end{aligned}
$$

2.2 Onderdeel B

Nee, in de eerste stap in onderdeel A werd $A_1A_2\cdots A_n$ op gesplit in $A_1 \cap (A_2\cdots A_n)$. In de overige stappen worden de doorsneden ook op gesplitst in een hoofd en een staart. Maar deze keuze is arbitrair, de doorsneden kunnen bijvoorbeeld ook opgesplitst worden in de eerste $n-1$ elementen en het laatste element, dus bijvoorbeeld zo $(A_1\cdots A_{n-1}) \cap A_n$. Als deze splitsing wordt aangehouden dan komt er de volgende chain-rule uit:

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$