Variáveis Aleatórias Discretas

Uma **variável aleatória** trata-se de uma variável quantitativa, cujo resultado (valor) depende de fatores aleatórios. Ainda, esta é denominada **discreta** quando esta pode assumir valores que podem ser contados. São exemplos de variáveis aleatórias discretas:

- O lançamento de dados de seis lados é um exemplo de **variável aleatória discreta finita**. O dado fornece um valor inteiro em todos os lançamentos, de modo que não existe a possibilidade de ele cair de lado e fornecer um valor fracionário como 2,5555;

- Já o número de carros que passam por um pedágio é um exemplo de **variável aleatória discreta infinita**. Pode-se passar uma infinidade de carros, porém nunca passará a metade de um carro por um pedágio (não haverá frações no número de carros que passarão por um pedágio).

Chama-se **função de probabilidade** da v.a. discreta X, que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a função $\{(x_i, p(x_i)) \mid i = 1, 2, \ldots\}$, que a cada valor de x_i associa a sua probabilidade de ocorrência, isto é,

$$P(x_i) = P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \ldots$$

Valor médio de uma variável aleatória

Dada uma v.a. discreta X, assumindo os valores $x_1, \ldots, x_n$, chamamos valor médio ou esperança matemática de X o valor

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i)$$

Exemplo

considere um empresário que pretende estabelecer uma firma para montagem de um produto composto de uma esfera e um cilindro. As partes são adquiridas em fábricas diferentes (A e B), e a montagem consistirá em juntar as duas partes e pintá-las. O produto acabado deve ter o comprimento (definido pelo cilindro) e a espessura (definida pela esfera) dentro de certos limites, e isso só poderá ser verificado após a montagem. Para estudar a viabilidade de seu empreendimento, o empresário quer ter uma ideia da distribuição do lucro por peça montada.

Sabe-se que cada componente pode ser classificado como **bom**, **longo** ou **curto**, conforme sua medida esteja dentro da especificação, maior ou menor que a especificada, respectivamente. Além disso, foram obtidos dos fabricantes o preço de cada componente ($5,00) e as probabilidades de produção de cada componente com as características bom, longo e curto.

Produto	Fábrica A (Cilindro)	Fábrica B (Esfera)
Dentro das especificações (B, bom)	0,8	0,7
Maior que as especificações (L, longo)	0,1	0,2
Menor que as especificações (C, curto)	0,1	0,1

Distribuição da produção das fábricas A e B, de acordo com as medidas das peças produzidas.

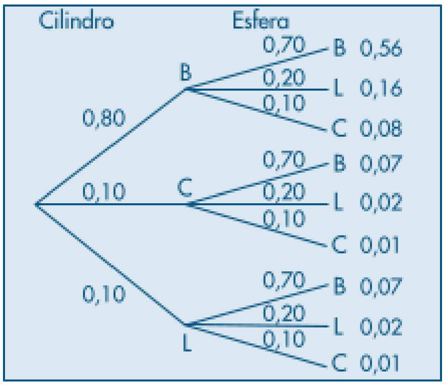


Diagrama de árvore indicando probabilidade $p(x)$, tal que $0 \leq p(x) \leq 1$, de cada evento.

Se o produto final apresentar algum componente com a característica C (curto), ele será irrecuperável, e o conjunto será vendido como sucata ao preço de $5,00. Cada componente longo poderá ser recuperado a um custo adicional de $5,00. Se o preço de venda de cada unidade for de $25,00, a distribuição de frequências da variável X – lucro por conjunto montado – será:

Produto	Probabilidade	Lucro por montagem (X)
BB	0,56	15
BL	0,16	10
BC	0,08	-5
LB	0,07	10
LL	0,01	5
LC	0,01	-5
CB	0,07	-5
CL	0,02	-5
CC	0,01	-5

Aglutinando estas probabilidades em função do Lucro por montagem, tem-se:

x	p(x)
15	0,56
10	0,23
5	0,02
-5	0,19
Total	1,00

Uma pergunta que logo ocorreria ao empresário é qual o lucro médio por conjunto montado que ele espera conseguir. Observamos que 56% das montagens devem produzir um lucro de 15 reais, 23% um lucro de dez reais, e assim por diante. Logo, o lucro esperado por montagem será dado por

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i) &= -5 \cdot p(-5) + 5 \cdot p(5) + 10 \cdot p(10) + 15 \cdot p(15) \\ &= -5(0,19) + 5(0,02) + 10(0,23) + 15(0,56) = 9,85 \end{aligned}$$

Variância e Desvio Padrão de uma variável aleatória discreta

$$\text{Var}(x) = \sum_{i=0}^{n} [x_i - E(x)]^2 p_i$$

Enquanto o desvio padrão de X, $DP(X)$ é a raiz quadrada positiva da variância.

Algumas propriedades do valor médio

Suponhamos que todos os preços z do exemplo anterior estivessem errados pela mesma razão: na verdade estes valem o dobro $2x$ do que foi descrito. O valor da esperança pode ser ajustado simplesmente ajustando o valor de x_i na equação:

$$E(Z) = \sum z_i p(z_i) = \sum (2x_i) p(x_i) = 19,70$$

O mesmo é verdade para qualquer função $h(x)$ sobre o valor de x.

$$E[h(x)] = \sum h(x_i) p(x_i)$$

Seja $h(x) = aX + b$, onde a e b são constantes, então

- $E(aX + b) = aE(X) + b$;
- $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$
- $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum x_i^2 p(x_i) - \left[\sum x_i p(x_i)\right]^2$

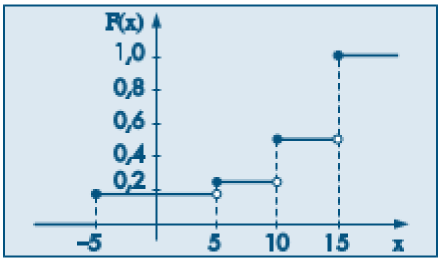
Função de Distribuição Acumulada

Dada a variável aleatória X, chamaremos de **função de distribuição acumulada** (f.d.a.), ou simplesmente **função de distribuição** (f.d.) $F(x)$ à função

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Exemplo

Dada a situação supracitada do empresário buscando estabelecer seu negócio, temos que a f.d.a. pode ser expressa pelo seguinte gráfico:



f.d.a. para a v.a. X= lucro por montagem.

Perceba que o domínio de F é o conjunto dos números reais, enquanto o contradomínio é apenas o intervalo [0,1].

Alguns Modelos Probabilísticos para Variáveis Aleatórias Discretas

Distribuição Uniforme Discreta

O caso em que cada valor possível ocorre com a mesma probabilidade.

$$P(X = x_i) = p(x_i) = p = \frac{1}{k}$$

Para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.

Distribuição (ou ensaio) de Bernoulli

Quando a variável aleatória X assume apenas os valores 0 ou 1, com função de probabilidade tal que

$$f(x, p(x)) = \begin{cases} p(0) = P(X = 0) = 1 - p \\ p(1) = P(X = 1) = p \end{cases}$$

Segue-se facilmente que

$$E(X) = p;\ Var(X) = p - p^2;\ F(X) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - p, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Distribuição Binomial

Chama-se de experimento binomial o experimento em que

- Ocorrem n ensaios de Bernoulli;
- cada qual independente dos demais; e
- para o qual a probabilidade de sucesso de cada ensaio é sempre igual a p, $0 < p < 1$.

Seja q a probabilidade de insucesso, $q = 1 - p$, tem-se que:

$$E(X) = np;\ Var(X) = npq$$

E a probabilidade de quaisquer k sucessos em n ensaios é igual à:

$$P(X = k \mid n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) p^k q^{n-k}$$

Nota: por vezes $P(X = k \mid n, p)$ é denotado simplesmente por $b(k; n, p)$.

Distribuição hipergeométrica

Semelhante à distribuição binomial, mas nesta os ensaios de Bernoulli não são independentes entre si pois, ao extrairmos um elemento da amostra, este não é reposto nas extrações subsequentes.

Sendo N a população de objetos, r dos quais possuem um atributo a ser encontrado e n o tamanho da amostra, a probabilidade p_k de se encontrar na amostra k elementos com a propriedade característica de r é dada por:

$$p_k = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Segue que se N for muito grande se comparado a n, $p_k \simeq b(k;\ n, p)$. Pode-se demonstrar que a v.a. X definida desta forma tem esperança e variância dadas por

$$E(X) = np;\ Var(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$

Sendo $p = \frac{r}{N}$. Denota-se a distribuição hipergeométrica de X por

$$X \sim \text{hip}(N, r, n)$$

Distribuição de Poisson

A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta que expressa a probabilidade de um dado evento (como um sucesso ou falha), ou série de eventos, ocorrer dado um certo **período de tempo** dado que estes eventos ocorrem de maneira **independente** entre si. Essa é expressa por:

$$f(k;\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!\,e^\lambda}$$

Sendo:

- λ um número real igual ao número esperado de ocorrências em um dado intervalo de tempo. Por exemplo, se o evento ocorre em média uma vez a cada 4 minutos e estamos interessados no número de eventos que ocorrem num intervalo de 10 minutos, $\lambda = \frac{10}{4}$.
- k um dado número de ocorrências;
- e portanto $f(k;\lambda)$ é a probabilidade deste número de ocorrências acontecer no intervalo de tempo considerado por λ.