Capítulo 7: Variáveis Aleatórias Contínuas

Definição

Uma função X, definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é dita uma variável aleatória contínua. Nestas condições, a probabilidade da variável X assumir valores entre a e b é tal que

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Onde $f(x)$ é a *função densidade de probabilidade*, ou $f.d.p.$, da variável X. Note, os valores nas extremidades do intervalo não importam no cálculo da integral deste:

$$P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \ldots$$

Enquanto isso, o valor médio (a esperança) de uma variável aleatória contínua é dado por

$$E(X) = \int_a^b xf(x)dx$$

e, assim como para variáveis aleatórias discretas, a variância é dada por

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

e o desvio padrão é definido como

$$DP(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Função de distribuição acumulada

Tal qual definida no capítulo anterior, esta trata-se da função $F(x)$ tal que

$$F(X) = P(X \leq x),\ \text{para } -\infty < x < \infty$$

Ou seja,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

para todo número real x.

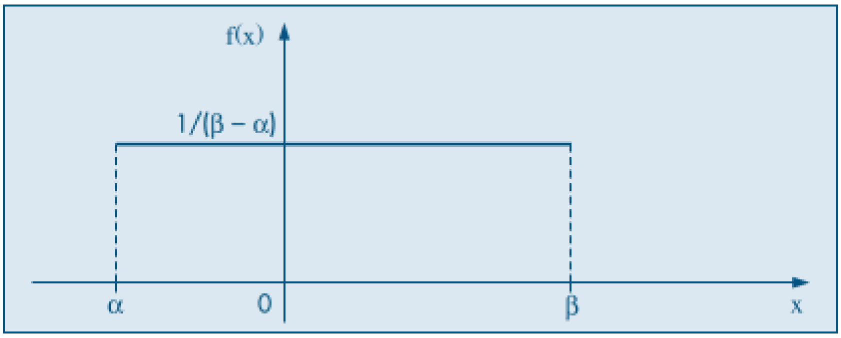
Alguns modelos probabilísticos para variáveis aleatórias contínuas

O modelo uniforme

A v.a. X tem distribuição uniforme no intervalo $[\alpha, \beta]$ se sua f.d.p. é dada por

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha}, & \text{se } \alpha \leq x \leq \beta; \\ 0, & \text{senão.} \end{cases}$$

Figura 7.9: Distribuição uniforme no intervalo $[\alpha, \beta]$.



Pode-se mostrar que, nestes casos,

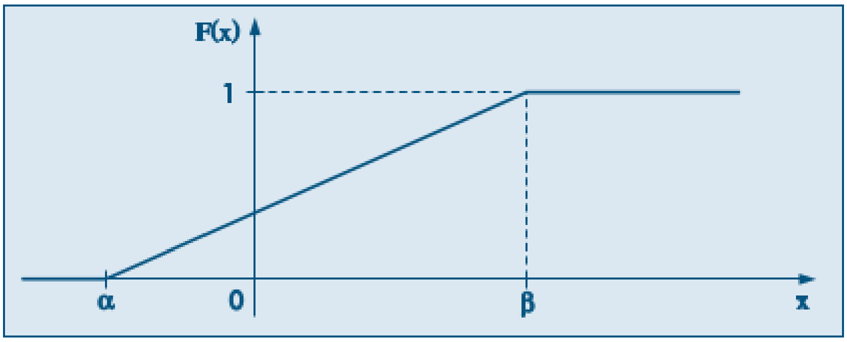
- $E(X) = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$;

- $Var(X) = \dfrac{(\beta-\alpha)^2}{12}$

- $F(x) = P(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } x < \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \text{se } \alpha \leq x < \beta \\ 1, & \text{se } x \geq \beta \end{cases}$

Onde $F(x)$ é a função de distribuição acumulada uniforme, cujo gráfico encontra-se abaixo.

Figura 7.10: f.d.a. de uma v.a. uniforme no intervalo $[\alpha, \beta]$.



Assim, para quaisquer dois valores c e d tais que $c < d$, teremos

$$P(c < X \leq d) = F(d) - F(c)$$

> **Nota:** Por vezes a notação $X \sim \mathbf{u}(\alpha, \beta)$ é utilizada para indicar que a v.a. X tem distribuição uniforme no intervalo $[\alpha, \beta]$.

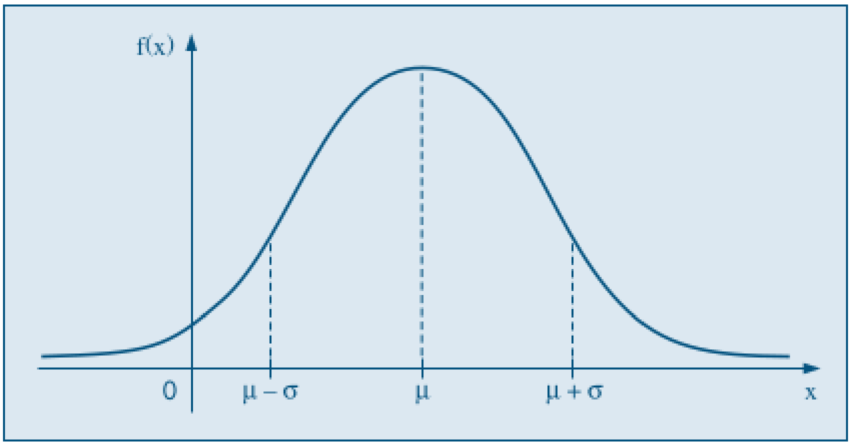
O modelo Normal

Dizemos que a v.a. X tem *distribuição normal* com parâmetros μ e σ^2, $-\infty < \mu < \infty$ e $0 < \sigma^2 < \infty$ se sua densidade é dada por

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

em que $x \in \mathbb{R}$. O gráfico abaixo demonstra esta função:

Figura 7.11: f.d.p. de uma v.a. normal com média μ e desvio padrão σ.



Vê-se pela imagem que

- $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são os pontos de inflexão da função;

- μ é o ponto máximo da função – e o valor máximo desta é $(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}$;
- A densidade $f(x;\mu,\sigma^2)$ é simétrica em relação à reta $x = u$, isto é, $f(\mu + x;\mu,\sigma^2) = f(\mu - x;\mu,\sigma^2)$.

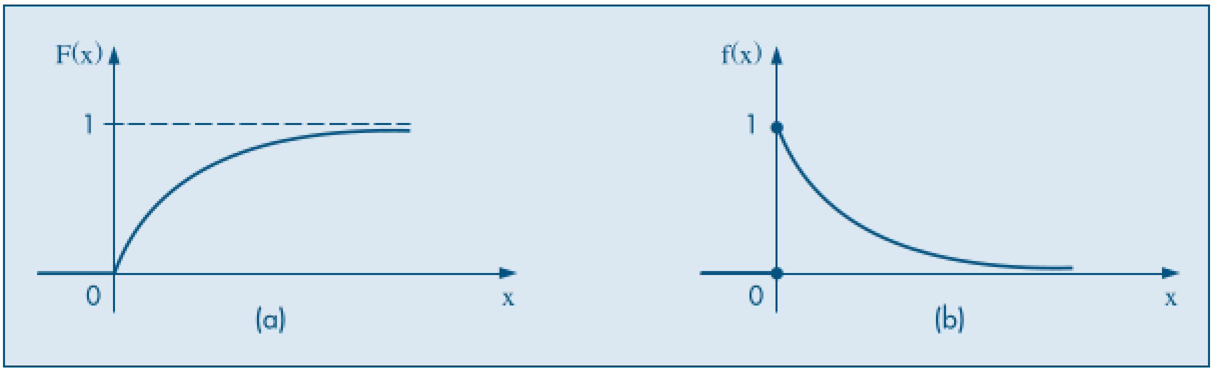
Pode-se demonstrar que, nestes casos,

- $E(X) = \mu$,
- $Var(X) = \sigma^2$,
- $f(x;\mu,\sigma^2) = 0$ quando $x \to \pm\infty$.

> **Nota:** Por vezes a notação $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ é utilizada para denotar este tipo de distribuição.

O modelo Exponencial

Figura 7.8: Distribuição exponencial $(\beta = 1)$ (a) f.d.a. (b) f.d.p.



A v.a. T tem *distribuição exponencial* com o parâmetro $\beta > 0$ se sua f.d.p. tem forma

$$f(t;\beta) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta}, \text{ se } t \geq 0 \\ 0, \text{ se } t < 0 \end{cases}$$

Denota-se isto brevemente com $T \sim \text{Exp}(\beta)$. São os momentos da função exponencial:

- $E(T) = \beta$;
- $Var(T) = \beta^2$;
- $F(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } t < 0; \\ 1 - e^{-\frac{t}{\beta}}, \text{ se } t \geq 0 \end{cases}$