Resolução dos exercícios solicitados

Por Guilherme de Abreu Barreto, nUSP: 12543033

Questão 7.3

Admitindo ser igualmente possível atingir à qualquer ponto da superfície (distribuição uniforme contínua) do alvo, tido por certo que a superfície do alvo será atingida ($f(x) = 0$ para valores de x maiores que 10), a probabilidade de se atingir uma determinada região é proporcional à fração da área total que esta ocupa. Tratando-se de círculos concêntricos, têm-se:

$$P(0 < x \leq 10) = \frac{\pi x^2}{100\pi} = \frac{x^2}{100}$$

Ou seja, a chance de se acertar um centro de 1cm de raio é

$$P = \frac{1^2}{100} = \frac{1}{100} \blacksquare$$

Questão 7.8

a. Relembrando que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

e

$$P(a < x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

tem-se:

$$P\left(X > b \mid X < \frac{b}{2}\right) = \frac{P\left(b < X < \frac{b}{2}\right)}{P(X < \frac{b}{2})}$$

Sendo,

$$P\left(b < X < \frac{b}{2}\right) = \int_b^{\frac{b}{2}} 3x^2\, dx = \cancel{3}\left[\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_b^{\frac{b}{2}} = \frac{b^3}{8} - b^3$$

e

$$P\left(X < \frac{b}{2}\right) = \int_{-1}^{\frac{b}{2}} 3x^2\, dx = \cancel{3}\left[\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_b^{\frac{b}{2}} = \frac{b^3}{8} + 1$$

Logo,

$$P\left(X > b \mid X < \frac{b}{2}\right) = \frac{\frac{b^3}{8} - b^3}{\frac{b^3}{8} + 1} = \frac{b^3 - 8b^3}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{8}}{b^3 + 8} = -\frac{7b^3}{b^3 + 8} \blacksquare$$

b.

$$E(x) = \int_{-1}^{0} x\ f(x)\ dx = \int_{-1}^{0} x\ 3x^2\ dx = 3\int_{-1}^{0} x^3\ dx = 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = -\frac{3}{4} \blacksquare$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-1}^{0} x^2 \cdot 3x^2\ dx - \frac{9}{16} = 3\left(\frac{x^5}{5}\bigg|_{-1}^{0} - \frac{3}{16}\right) =$$

$$3\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{16}\right) = \frac{3}{80} \blacksquare$$

Questão 11

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} x2e^{-2x} dx$$

Seja $u = -2x$, então $du = -2dx \implies dx = -\frac{du}{2}$.

$$E(X) = \frac{1}{2}\int_{0}^{-\infty} ue^u\ du = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} ue^u\ du$$

Seja $v = u$, então $dv = du$; seja $dw = e^u du$, então $w = e^u$. Logo, pelo Teorema da integração por partes,

$$E(X) = -\frac{1}{2}\left(ue^u\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^u\ du\right) = -\frac{1}{2}\left(0 + \lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^b} - 1 + 0\right)$$

Pelo teorema de L' Hospital, tem-se:

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^b} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^b}$$

E portanto,

$$E(X) = -\frac{1}{2}(0 - 1) = \frac{1}{2} \square$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{0}^{\infty} x^2 2e^{-2x} dx - \frac{1}{4}$$

Seja $v = x^2$, então $dv = 2xdx$; e seja $du = e^{-2x}dx$, então $u = \int e^{-2x}dx$. Seja $w = -2x$, então $dw = -2dx \implies dx = -\frac{dw}{2}$ e $u = -\frac{1}{2}\int e^w dw = -\frac{e^w}{2} = -\frac{1}{2e^{2x}}$. Então, pelo teorema da integração por partes:

$$\int_0^\infty x^2 2e^{-2x}dx - \frac{1}{4} = 2\left[\left(-\frac{x^2}{2e^{2x}}\Bigg|_0^\infty\right) - \left(-\int_0^\infty xe^{-2x}dx\right)\right] - \frac{1}{4} =$$

$$2\int_0^\infty xe^{-2x}dx - \frac{x^2}{e^{2x}}\Bigg|_0^\infty - \frac{1}{4}$$

Sendo b uma variável que tende ao infinito, tem-se:

$$\lim_{b\to\infty} \frac{x^2}{e^{2x}}\Bigg|_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^2}{e^{2b}} - \cancel{\frac{0^2}{e^{2\cdot 0}}}\right) = \lim_{b\to\infty}\frac{x^b}{e^{2b}}$$

Aplicando-se o teorema de L' Hospital:

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{e^{2b}} = \lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{e^{2b}} = \lim_{b\to\infty}\frac{2b}{e^{2b}} = \frac{2}{e^{2\infty}} = 0$$

Continuando:

$$2\int_0^\infty xe^{-2x}dx - \cancel{\frac{x^2}{e^{2x}}\Bigg|_0^\infty} - \frac{1}{4}$$

Seja $v = x$, então $dv = dx$; e seja $du = e^{-2x}dx$, então $u = -\frac{1}{2e^{2x}}$. Novamente aplicando o teorema das partes:

$$2\left[\left(-\frac{x}{e^{2x}}\Bigg|_0^\infty\right) - \left(-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2x}dx\right)\right] - \frac{1}{4}$$

Novamente o teorema de L' Hospital:

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^{2b}} = \frac{1}{e^{2\infty}} = 0$$

Continuando:

$$\int_0^\infty e^{-2x}dx - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{2e^{2x}}\Bigg|_0^\infty\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \blacksquare$$