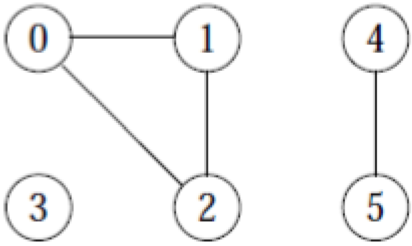
Anotações da aula 2

Ciclos

Em um grafo não direcionado denomina-se um **ciclo** a sequência de vetores conectados entre si por pelo menos três arestas $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$, o *caminho*, em que $v_0 = v_k$. O ciclo é simples se todos os vértices do caminho são distintos entre si. No exemplo abaixo, nota-se que o caminho $(0, 1, 2, 0)$ é um ciclo:



Subgrafos

Para um dado grafo $G = (V, A)$ o grafo $G' = (V', A')$ é subgrafo deste se $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$. No exemplo abaixo, o grafo à direita é subgrafo do grafo à esquerda:

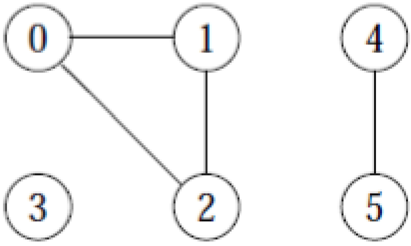
Subgrafo próprio

Segue da definição de subgrafo que para qualquer grafo G, G é subgrafo de si próprio. Assim distingue-se o G' subgrafo de G tal que $G' \neq G$ denominando-o um **subgrafo próprio**.

Grafo conectado (ou conexo)

O grafo aquele onde qualquer par de vértices contidos neste encontra-se conectado por um caminho.

Por exemplo, o grafo G seguinte não é conectado:



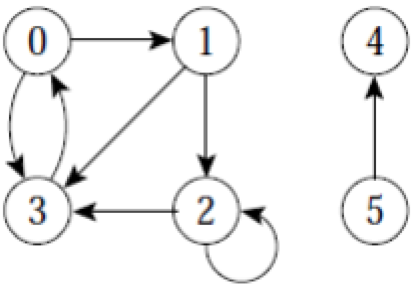
Mas se considerarmos apenas os subgrafos $\{0, 1, 2\}$ e $\{4, 5\}$, teremos que cada um destes é um grafo conectado. Estes são **componentes conectados** (ou conexos) de G. No mais, estes são componentes conexos **maximais** pois cada um destes compõe a maior cadeia conexa a incorporar os vértices que estes integram.

Componentes Fortemente Conectados

Um grafo **direcionado** é dito **fortemente conectado** se cada dois vértices quaisquer deste são alcançáveis a partir um do outro. Por extensão,

- os componentes conexos maximais de um grafo direcionado G são também fortemente conectados.
- Um grafo direcionado fortemente conectado tem apenas um componente fortemente conectado

Por exemplo, no grafo

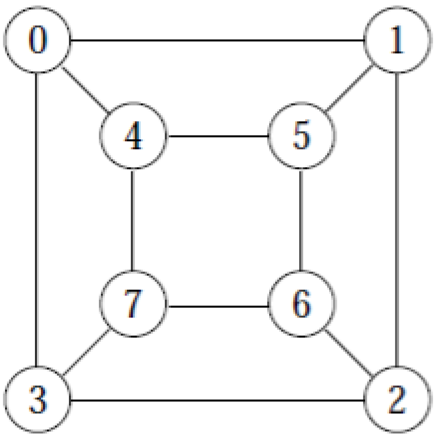


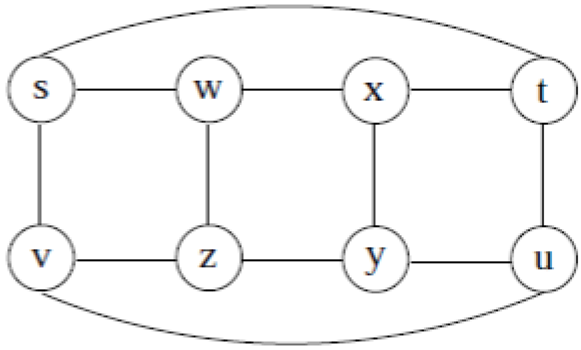
São os componentes fortemente conectados $\{0, 1, 2, 3\}$, $\{4\}$ e $\{5\}$. $\{4, 5\}$ não o é pois o vértice 5 não é alcançável a partir do vértice 4.

Grafos isomorfos

Grafos $G = (V, A)$ e $G' = (V', A')$ são isomorfos se existir uma bijeção $f : V \to V'$ tal que $(u, v) \in A$ se e somente se $(f(u), f(v)) \in A'$.

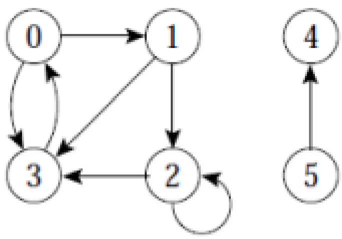
Noutras palavras, é possível re-rotular os vértices de G para serem rótulos de G' mantendo as arestas correspondentes G e G':

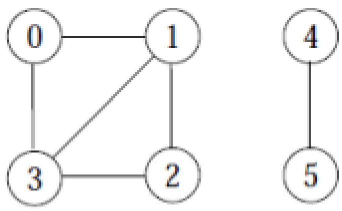




Vizinhos e adjacentes

Em um grafo **direcionado**, um **vizinho** de um vértice é qualquer outro vértice que, na versão mão direcionada deste grafo estaria ligado a este por uma aresta. Por vez, um vértice adjacente é aquele que pode ser alcançado por um dado vértice meio de uma única aresta. Em gráficos não direcionados, não há distinção entre vértices vizinhos e adjacentes.





1 é adjacente a 3 ? Não
1 é vizinho de 3 ? Sim
3 é adjacente a 1 ? Sim
3 é vizinho de 1 ? Sim

1 é adjacente a 3 ? Sim
1 é vizinho de 3 ? Sim
3 é adjacente a 1 ? Sim
3 é vizinho de 1 ? Sim

Grafos completos

São os grafos não direcionados aqueles em que qualquer vértice encontra-se conectado por uma aresta a todos os demais.

- O número de arestas em um gráfico deste tipo é dado pela fórmula:

$$\frac{|V|(|V|-1)}{2}$$

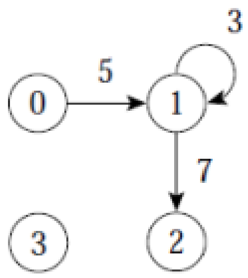
> Sendo $|V|$ o número de vértices.

- Enquanto o número total de grafos diferentes com $|V|$ vértices é dado por:

$$|\mathcal{P}(G)| = 2^{\frac{|V|(|V|-1)}{2}}$$

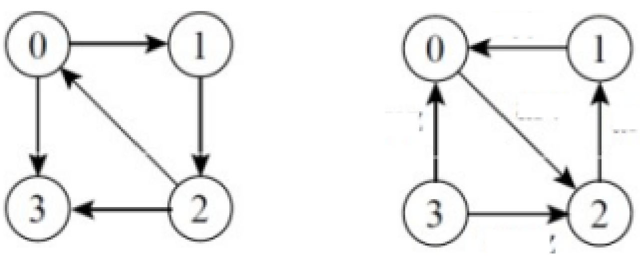
Grafo ponderado

Possui pesos associados às arestas



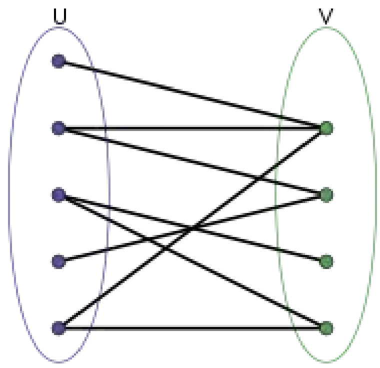
Grafo transposto

O grafo G' obtido a partir da inversão da direção das arestas de G.



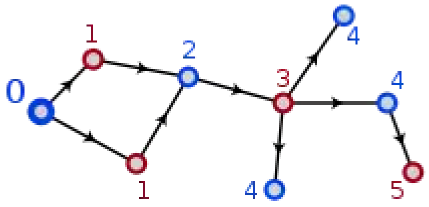
Grafo Bipartido

Um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos *U* e *V* tais que toda aresta conecta um vértice em *U* a um vértice em *V*;



Exemplo de um grafo bipartido

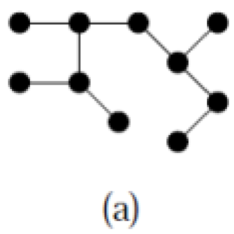
Equivalentemente, um grafo bipartido é um grafo que não contém qualquer ciclo de comprimento ímpar.



Encontrando uma bipartição usando paridade

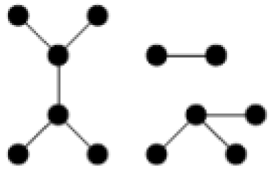
Árvores

- **Árvore livre:** grafo não direcionado, acíclico e conectado. Comumente referido simplesmente enquanto "árvore" apenas.



árvore

- **Floresta:** grafo não direcionado acíclico o qual pode, ou não, estar conectado.



(b)

floresta

- **Árvore/Floresta Geradora:** o subgrafo $G = (V, A)$ que contém a totalidade dos vértices de G que juntos compõem uma árvore/floresta.

Matriz de adjacências

Representação de um grafo contendo n vértices fazendo uso de uma matriz de dimensões $n \times n$.

	0	1	2	3	4	5
0		1		1		
1			1	1		
2			1	1		
3	1					
4						
5					1	

(a)

	0	1	2	3	4	5
0		1	1			
1	1		1			
2	1	1				
3						
4						1
5					1	

(b)