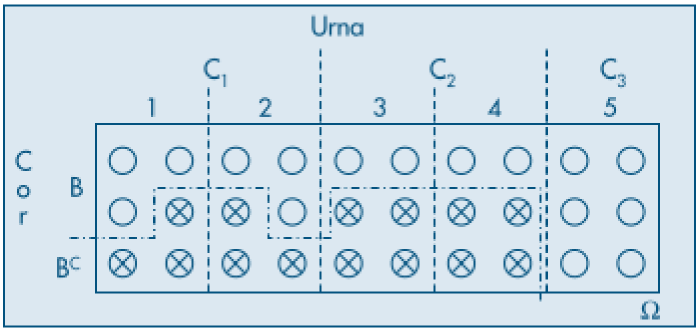
Capítulo 5.4: Teorema de Bayes

Em teoria das probabilidades e estatística, o **teorema de Bayes** (ou lei de Bayes, ou regra de Bayes) descreve a **probabilidade condicional** de um evento, baseado em um conhecimento *a priori* que pode estar relacionado ao evento. O teorema mostra como alterar as probabilidades *a priori* tendo em vista novas evidências para obter probabilidades *a posteriori*, de forma a expressar como a probabilidade de um evento (ou o grau de crença na ocorrência de um evento) deve ser alterada após considerar evidências sobre a ocorrência deste evento. A versão mais simples desse teorema é dada pela fórmula:

$$P(A|B) = \frac{P \cap B}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Exemplo



Temos cinco urnas, cada uma com seis bolas. Duas dessas urnas (tipo C_1) têm 3 bolas brancas, duas outras (tipo C_2) têm 2 bolas brancas, e a última urna (tipo C_3) tem 6 bolas brancas. Escolhemos uma urna ao acaso e dela retiramos uma bola. Qual a probabilidade de a urna escolhida ser do tipo C_3, sabendo-se que a bola sorteada é branca? Ou seja, estamos buscando $P(C_3|B)$, sabendo que

$$\begin{aligned} P(C_1) &= 2/5, \quad P(B|C_1) = 1/2, \\ P(C_2) &= 2/5, \quad P(B|C_2) = 1/3, \\ P(C_3) &= 1/5, \quad P(B|C_3) = 1/1. \end{aligned}$$

Da definição de probabilidade condicional, temos:

$$P(C_3|B) = \frac{P(C_3)P(B|C_3)}{P(B)}$$

Resta encontrar o valor de $P(B)$, já que aquele do numerador já passível de ser obtido. Como C_1, C_2 e C_3 são eventos mutuamente exclusivos, e reunidos compõem o espaço amostral completo de bolas brancas, podemos decompor o evento B como sendo a reunião de três outros:

$$B = (C_1 \cap B) \cup (C_2 \cap B) \cup (C_3 \cap B)$$

Ou seja,

$$P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{8}{15}$$

Substituindo este resultado na fórmula, obtemos:

$$P(C_3|B) = \frac{\frac{1}{5} \cdot 1}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{8} \blacksquare$$

Corolário

Podemos generalizar o resultado anterior da seguinte forma: sejam $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ partições de um espaço amostral Ω, e para um evento qualquer A são conhecidas as probabilidades $P(C_i)$ e $P(A|C_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, então:

$$P(C_i|A) = \frac{P(C_i) \cdot P(A|C_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(C_j) \cdot P(A|C_j)}$$

Tal qual ilustra o seguinte diagrama: