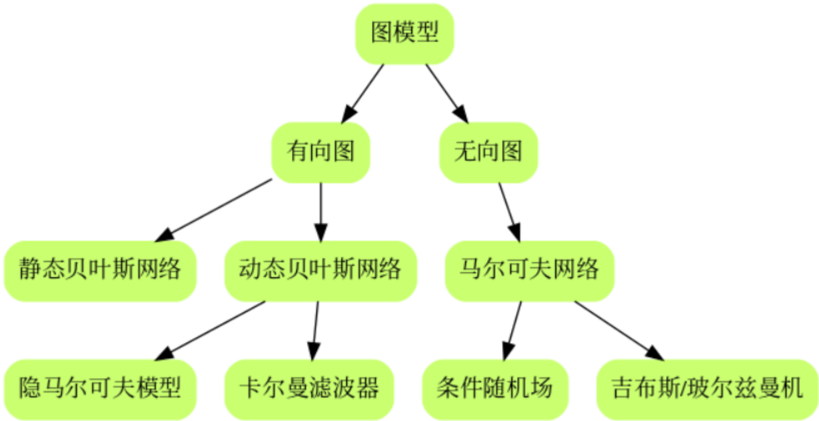
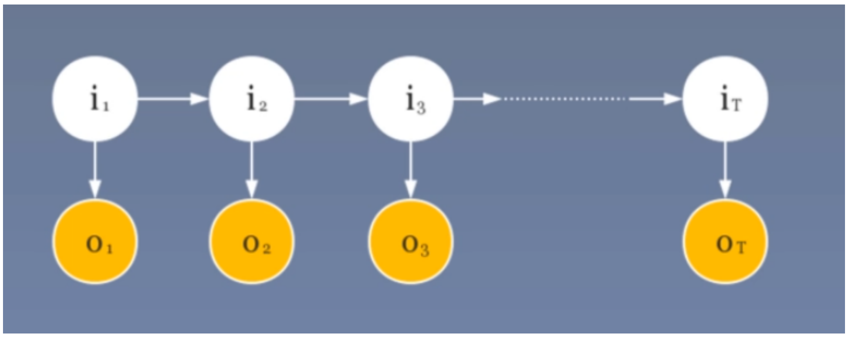
隐马尔可夫模型



隐马尔可夫模型的基本概念

隐马尔可夫模型由**初始概率分布、状态转移概率分布**以及**观测概率分布**确定。



- Q是所有N种可能的**状态的集合**：$Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_N\}$，V是所有M种可能的**观测的集合**：$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_M\}$。
- I是长度为T的**状态序列**：$I=(i_1,i_2,\cdots,i_T)$，O是对应的**观测序列**：$O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$。
- A是**状态转移概率矩阵**：$A=[a_{ij}]_{N\times N}$，其中$a_{ij}=P(i_{t+1}=q_j|i_t=q_i)\quad i=1,2,\cdots,N;j=1,2,\cdots,N;$
- B是**观测概率矩阵**：$B=[b_{jk}]_{N\times M}$，其中$b_{jk}=P(o_t=v_k|i_t=q_j)\quad j=1,2,\cdots,N;k=1,2,\cdots,M;$
- π**是初始状态概率向量**：$\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_N)$，其中，$\pi_i=P(i_1=q_i),i=1,2,\cdots,N$。

隐马尔可夫模型由初始状态概率向量π、状态转移概率矩阵A和观测概率矩阵B**决定**。π**和**A**决定状态序列**，B**决定观测序列**，因此隐马尔可夫模型可以用三元符号来表示，即：$\lambda=(A,B,\pi)$。

两个基本假设：

- **齐次马尔可夫性假设：** 即隐藏的马尔科夫链在任意t时刻的状态只依赖于其前一时刻的状态，与其他时刻的状态及观测无关，也与时刻t本身无关：

  $P(i_t|i_{t-1},o_{t-1},\cdots,i_1,o_1)=P(i_t|i_{t-1}),t=1,2\cdots,T$
- **观测独立性假设：** 即假设任意时刻的观测只依赖于该时刻的马尔可夫链的状态，与其他观测及状态无关：

$$P(o_t|i_T,o_T,i_{T-1},o_{T-1},\cdots,i_t,o_t,\cdots,i_1,o_1)=P(o_t|i_t)$$

三个基本问题：

- **概率计算问题：**

  给定模型参数$\lambda=(A,B,\pi)$和观测序列$O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$，计算在模型λ下**观测序列**O出现的概率$P(O|\lambda)$。（状态序列未知）换言之，如何评估模型和观测序列的匹配程度？
- **学习问题：**

  已知观测序列$O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$**，估计模型**$\lambda=(A,B,\pi)$**参数，使得在该模型下观测序列概率**$P(O|\lambda)$**最大**，即用极大似然估计的方法估计参数。换言之，如何训练模型使其能最好地描述观测数据？
- **预测问题：**

  已知模型$\lambda=(A,B,\pi)$和观测序列$O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$，求**给定观测序列**下概率$P(I|O)$最大的**状态序列** $I=(i_1,i_2,\cdots,i_T)$。换言之，如何根据观测序列推断出隐藏的模型状态？

学习算法

监督学习

假设已给出训练数据包含S个**长度相同的**观测序列和对应的状态序列$\{(o_1,i_1),(o_2,i_2),\cdots,(o_S,i_S)\}$，那么可以利用**极大似然估计法**来估计$HMM$的参数：

- 转移概率a_{ij}的估计：

$$a_{ij}=\frac{A_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{N}A_{ij}}$$

  其中A_{ij}是样本时刻t处于状态i而$t+1$时刻转移到状态j的频数。

- 观测概率b_{jk}的估计：

$$b_{jk}=\frac{B_{jk}}{\sum\limits_{k=1}^{M}B_{jk}}$$

- 初始状态π_i的估计为S个样本中初始状态为q_i的概率。

例子：

考虑模型$\lambda=(A,B,\pi)$，状态集合$Q=\{1,2,3\}$，观测集合$V=\{a，b\}$。假设我们已知两组观测和状态序列：$O_1:\{a,a,b\},I_1:\{2,1,1\};O_1:\{a,b,a\},I_1:\{1,3,2\}$。

$$\begin{aligned} a_{11}=\frac{1}{2} \quad b_{1a}=\frac{2}{3} \\ a_{12}=0 \quad b_{1b}=\frac{1}{3} \\ a_{13}=\frac{1}{2} \\ \cdots \end{aligned}$$

得到状态转移概率矩阵：

$$A=\begin{vmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

观测概率矩阵：

$$B=\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

初始状态概率向量$\pi=\{0.5,0.5,0\}$。

$Baum-Welch$算法

如果用监督算法，一般需要人工标注大量状态序列，代价特别高，而且很多应用不可能做到此事。所以我们采用无监督学习，也即EM算法进行参数估计。

$$P(O|\lambda)=\sum_I P(O|I;\lambda)P(I|\lambda)$$

- 确定Q函数
  - 确定完全数据的对数似然函数：
    - 此时观测数据为$O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$，隐藏数据为$I=(i_1,i_2,\cdots,i_T)$，则完全数据为(O,I)，其对数似然函数为：

$$lnP(O,I|\lambda)$$

      其中$P(O,I|\lambda)=\pi_{i_1}b_{i_1o_1}a_{i_1i_2}b_{i_2o_2}\cdots a_{i_{T-1}i_T}b_{i_To_T}$，所以进一步可得：

$$lnP(O,I|\lambda)=ln(\pi_{i_1}b_{i_1o_1}a_{i_1i_2}b_{i_2o_2}\cdots a_{i_{T-1}i_T}b_{i_To_T})=ln\pi_{i_1}+\sum_{t=1}^{T-1}lna_{i_ti_{t+1}}+\sum_{t=1}^{T}lnb_{i_t}o_t$$

- 求Q函数$Q(\lambda,\hat{\lambda})$:

$$Q(\lambda,\hat{\lambda})=\sum_I P(I|O;\hat{\lambda})lnP(O,I|\lambda)$$

进一步:

$$\begin{aligned}Q(\lambda,\hat{\lambda})&=\sum_I P(I|O;\hat{\lambda})lnP(O,I|\lambda)\\&=\sum_I\frac{P(I,O|\hat{\lambda})}{P(O|\hat{\lambda})}lnP(O,I|\lambda)\end{aligned}$$

由于当前的$\hat{\lambda}$是已经知道的，我们极大化λ的时候可以只将其看做常数，而且观测序列O也是确定的，所以$P(O|\hat{\lambda})$即为常数可以省略。

$$\begin{aligned}Q(\lambda,\hat{\lambda})&=\sum_I P(I,O|\hat{\lambda})lnP(O,I|\lambda)\\&=\sum_I P(I,O|\hat{\lambda})\left(ln\pi_{i_1}+\sum_{t=1}^{T-1}lna_{i_ti_{t+1}}+\sum_{t=1}^{T}lnb_{i_t}o_t\right)\\&=\sum_I P(I,O|\hat{\lambda})ln\pi_{i_1}+\sum_I P(I,O|\hat{\lambda})\left(\sum_{t=1}^{T-1}lna_{i_ti_{t+1}}\right)+\sum_I P(I,O|\hat{\lambda})\left(\sum_{t=1}^{T}lnb_{i_t}o_t\right)\end{aligned}$$

- 极大化Q函数可以得到:

$$\pi_i=\frac{P(O,i_1=q_i|\hat{\lambda})}{P(O|\hat{\lambda})}=P(i_1=q_i|O,\hat{\lambda})=\gamma_t(i)=\frac{P(i_t=q_i,O|\lambda)}{\sum_{j=1}^{N}P(i_t=q_j,O|\lambda)}=\frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{j=1}^{N}\alpha_t(j)\beta_t(j)}$$

$$a_{ij}=\frac{\sum_{t=1}^{T-1}\xi_t(i,j)}{\sum_{t=1}^{T-1}\gamma_t(i)}$$

$$b_{jk}=\frac{\sum_{t=1,o_t=v_k}^{T}\gamma_t(j)}{\sum_{t=1}^{T}\gamma_t(j)}$$

概率计算算法

直接计算法

给定模型$\lambda=(A,B,\pi)$和观测序列$O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$，对于求$P(O|\lambda)$最直接的方法就是按照全概率公式直接计算，即:

$$P(O|\lambda)=\sum_I P(O,I|\lambda)=\sum_I P(I|\lambda)P(O|I;\lambda)$$

其中，$P(I|\lambda)$表示给定模型参数λ时，产生**状态序列**$I=(i_1,i_2,\cdots,i_T)$的概率:

$$P(I|\lambda)=\pi_{i_1}a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{T-1}i_T}$$

$P(O|I;\lambda)$表示给定模型参数λ**且**状态序列为$I=(i_1,i_2,,\cdots,i_T)$时，产生**观测序列**$O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$的概率:

$$P(O|I;\lambda)=b_{i_1o_1}b_{i_2o_2}\cdots b_{i_To_T}$$

所以

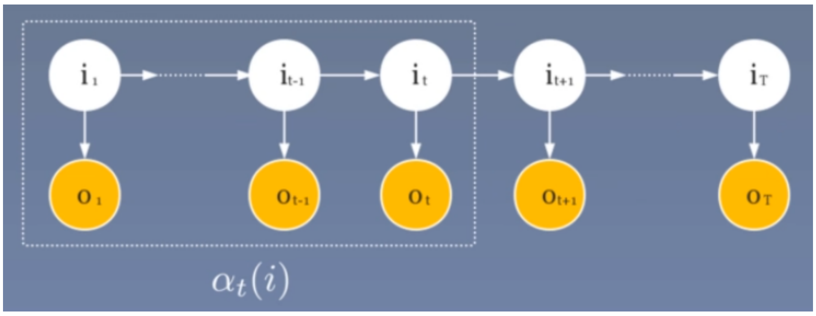
$$P(O|\lambda)=\sum_I P(O|I;\lambda)P(I|\lambda)=\sum_{i_1,i_2\cdots,i_T}\pi_{i_1}b_{i_1o_1}a_{i_1i_2}b_{i_2o_2}\cdots a_{i_{T-1}i_T}b_{i_To_T}$$

其中，$\sum\limits_{i_1,i_2\cdots,i_T}$ 共有N^T种可能，设计算$\pi_{i_1}b_{i_1o_1}a_{i_1i_2}b_{i_2o_2}\cdots a_{i_{T-1}i_T}b_{i_To_T}$的时间复杂度为$O(T)$，所以计算上式的时间复杂度为$O(TN^T)$，如果序列长度$T$很大，显然这种算法是不可行的。

- **问题:**

  重复计算，比如仅最后一个状态改变，那么前边已经计算过的概率要重新计算，不能利用已经计算过的结果。考虑用**动态规划**的思想消除冗余计算。

前向算法



前向概率: 给定隐马尔可夫模型λ，**定义**到时刻t部分观测序列为$o_1,o_2,\cdots,o_t$，且**当前状态为**q_i的概率为前向概率，记作:

$$\alpha_t(i)=P(o_1,o_2,\cdots,o_t,i_t=q_i|\lambda)$$

值得注意的是: 此时的模型λ和观测序列O已经确定，我们唯一不确定的就是隐变量，为简单起见，该式子我们假设q_i是确定的，即我们假设**"终点"**是确定的，所谓的确定就是现在假定该状态只取一个确定的值，等到算出来该值，其他状态形式一致，只需要$\sum$即可。

根据前向概率的定义可推得

$$P(O|\lambda)=P(o_1,o_2,\cdots,o_T|\lambda)=\sum_{i=1}^{N}P(o_1,o_2,\cdots,o_T,i_T=q_i|\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_T(i)$$

于是求解$P(O|\lambda)$的问题就被**转化成了求解前向概率$\alpha_T(i)$的问题**，我们可做如下推导:

$$\alpha_1(i)=P(o_1,i_1=q_i|\lambda)=\pi_ib_{io_1}$$

$$\alpha_2(i)=P(o_1,o_2,i_2=q_i|\lambda)=\left[\sum_{j=1}^{N}\pi_jb_{jo_1}a_{ji}b_{io_2}\right]=\left[\sum_{j=1}^{N}\alpha_1(j)a_{ji}\right]\times b_io_2$$

$$\alpha_3(i)=P(o_1,o_2,o_3,i_3=q_i|\lambda)=\left[\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\pi_kb_{ko_1}a_{kj}b_{jo_2}a_{ji}b_{io_3}\right]=\left[\sum_{j=1}^{N}\alpha_1(k)a_{kj}b_{jo_2}a_{ji}b_{io_3}\right]=\left[\sum_{j=1}^{N}\alpha_2(j)a_{ji}\right]\times b_io_3$$

$$\cdots\cdots$$

$$\alpha_{t+1}(i)=\left[\sum_{j=1}^{N}\alpha_t(j)a_{ji}\right]\times b_io_{t+1}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\alpha_T(i)=\left[\sum_{j=1}^{N}\alpha_{T-1}(j)a_{ji}\right]\times b_io_T$$

代回到

$$P(O|\lambda)=P(o_1,o_2,\cdots,o_T|\lambda)=\sum_{i=1}^{N}P(o_1,o_2,\cdots,o_T,i_t=q_i|\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_T(i)$$

即可求得$P(O|\lambda)$。

前向算法的计算量是$O(N^2T)$阶的，它高效的关键是其局部计算前向概率，然后利用路径结构"递推"到全局。减少计算量的原因在于每一次计算直接引用前一个时刻的计算结果，避免重复计算。

- **例子:**

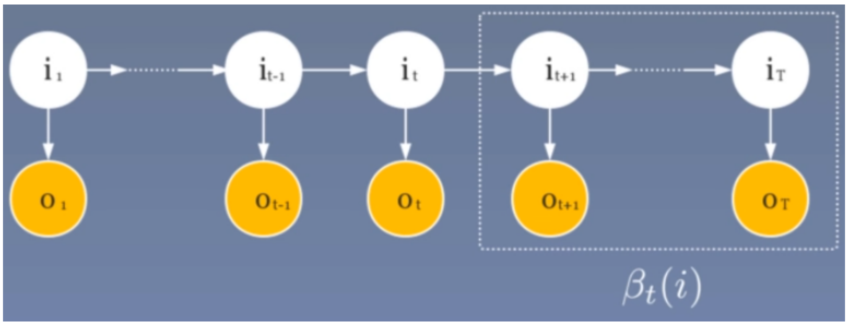
  考虑盒子和球模型$\lambda=(A,B,\pi)$，状态集合$Q=\{1,2,3\}$，观测集合$V=\{红，白\}$，

$$A=\begin{bmatrix}0.5&0.2&0.3\\0.3&0.5&0.2\\0.2&0.3&0.5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.5&0.5\\0.4&0.6\\0.7&0.3\end{bmatrix},\quad \pi=\begin{bmatrix}0.2\\0.4\\0.4\end{bmatrix}$$

设$T=3, O=$(红，白，红)，试用前向算法计算$P(O|\lambda)$。

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1(1)=\pi_1 b_1(o_1)=0.2\times 0.5=0.10\\
&\alpha_1(2)=\pi_2 b_2(o_1)=0.4\times 0.4=0.16\\
&\alpha_1(3)=\pi_3 b_3(o_1)=0.4\times 0.7=0.28\\
&\alpha_2(1)=\left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_1(i)a_{i1}\right]b_1(o_2)=[0.1\times 0.5+0.16\times 0.3+0.28\times 0.2]\times 0.5=0.154\times 0.5=0.077\\
&\alpha_2(2)=\left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_1(i)a_{i2}\right]b_2(o_2)=0.184\times 0.6=0.1104\\
&\alpha_2(3)=\left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_1(i)a_{i3}\right]b_3(o_2)=0.202\times 0.3=0.0606\\
&\alpha_3(1)=\left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_2(i)a_{i1}\right]b_1(o_3)=0.04187\\
&\alpha_3(2)=\left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_2(i)a_{i2}\right]b_2(o_3)=0.03551\\
&\alpha_3(3)=\left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_2(i)a_{i3}\right]b_3(o_3)=0.05284\\
&P(O|\lambda)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_3(i)=0.13022
\end{aligned}
$$

后向算法



后向概率：给定隐马尔可夫模型λ，**定义**在时刻t状态为q_i的条件下，从$t+1$到T的部分观测序列为$o_{t+1},o_{t+2},\cdots,o_T$的概率为后向概率，记作：

$$\beta_t(i)=P(o_{t+1},o_{t+2},\cdots,o_T|i_t=q_i,\lambda)$$

注意：此时我们同前向概率一样假定了q_i是确定的。即"起点"是确定的。

- 补充：不难看出，所谓的"起点"确定和"终点"确定表现在式子中就是作为条件和结果。

由后向概率的定义可知：

$$
\begin{aligned}
&\beta_T(i)=P(i_T=q_i,\lambda)=1\\
&\beta_{T-1}(i)=P(o_T|i_{T-1}=q_i,\lambda)=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}b_{jo_T}\times 1=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}b_{jo_T}\beta_T(j)\\
&\beta_{T-2}(i)=P(o_{T-1},o_T|i_{T-2}=q_i,\lambda)=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}b_{jo_{T-1}}\sum_{k=1}^{N}a_{jk}b_{ko_T}=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}b_{jo_{T-1}}\beta_{T-1}(j)\\
&\cdots\cdots\\
&\beta_t(i)=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}b_{jo_{t+1}}\beta_{t+1}(j)\\
&\cdots\cdots\\
&\beta_1(i)=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}b_{jo_2}\beta_2(j)
\end{aligned}
$$

又

$$P(O|\lambda)=P(o_1,o_2,\cdots,o_T|\lambda)=\sum_{i=1}^{N}P(o_1,i_1=q_i|\lambda)P(o_2,o_3,\cdots,o_T|i_1=q_i,\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\pi_i b_{io_1}\beta_1(i)$$

即可求得$P(O|\lambda)$。

- **例子：**

  考虑盒子和球模型$\lambda=(A,B,\pi)$，状态集合$Q=\{1,2,3\}$，观测集合$V=\{红，白\}$，

  $$A=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.3\\0.3 & 0.5 & 0.2\\0.2 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\0.4 & 0.6\\0.7 & 0.3\end{bmatrix},\quad \pi=\begin{bmatrix}0.2\\0.4\\0.4\end{bmatrix}$$

  设$T=4,O=(红，白，红，白)$，试用后向算法计算$P(O|\lambda)$。

  - 初始化：

    $$\beta_4(i)=1,\quad i=1,2,3$$

  - 递推计算：

    $$\beta_3(1)=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}b_{jo_4}\beta_4(j)=0.5\times0.5+0.2\times0.6+0.3\times0.3=0.25+0.12+0.09=0.46$$
    $$\beta_3(2)=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}b_{jo_4}\beta_4(j)=0.15+0.3+0.06=0.51$$
    $$\beta_3(3)=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}b_{jo_4}\beta_4(j)=0.1+0.18+0.15=0.43$$
    $$\beta_2(1)=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}b_{jo_3}\beta_3(j)=0.25\times0.46+0.08\times0.51+0.21\times0.43=0.2461$$
    $$\beta_2(2)=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}b_{jo_3}\beta_3(j)=0.15\times0.46+0.2\times0.51+0.14\times0.43=0.2312$$
    $$\beta_2(3)=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}b_{jo_3}\beta_3(j)=0.1\times0.46+0.12\times0.51+0.35\times0.43=0.2577$$
    $$\beta_1(1)=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}b_{jo_2}\beta_2(j)=0.25\times0.2461+0.12\times0.2312+0.09\times0.2577=0.112462$$
    $$\beta_1(2)=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}b_{jo_2}\beta_2(j)=0.15\times0.2461+0.3\times0.2312+0.06\times0.2577=0.121737$$
    $$\beta_1(3)=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}b_{jo_2}\beta_2(j)=0.1\times0.2461+0.18\times0.2312+0.15\times0.2577=0.104881$$

  - 终止

    $$P(O|\lambda)=\sum_{i=1}^{3}\pi_i b_{iO_1}\beta_1(i)=0.2\times0.5\times0.112462+0.4\times0.4\times0.121737+0.4\times0.7\times0.104881=0.0600908$$

- **推论：**

  利用前向概率和后向概率，可以得到关于**单个状态概率和两个状态概率**的一些计算公式：

  - 给定模型参数λ和观测O，**在时刻t处于状态q_i的概率**，记为$\gamma_t(i)=P(i_t=q_i|O,\lambda)$

    $$\gamma_t(i)=P(i_t=q_i|O;\lambda)=\frac{P(i_t=q_i,O|\lambda)}{P(O|\lambda)}=\frac{P(i_t=q_i,O|\lambda)}{\sum_{j=1}^{N}P(i_t=q_j,O|\lambda)}$$

    又由前向概率和后向概率的定义可知：

    $$\begin{aligned}&P(i_t=q_i,O|\lambda)\\&=P(o_1,o_2,\cdots,o_{t-1}|\lambda)P(i_t=q_i,o_t|\lambda)P(o_{t+1},o_{t+2},\cdots,o_T|\lambda)\\&=P(o_1,o_2,\cdots,o_t,i_t=q_i|\lambda)P(o_{t+1},o_{t+2},\cdots,o_T|i_t=q_i;\lambda)=\alpha_t(i)\beta_t(i)\end{aligned}$$

    注意第二个等式是由于**两个基本假设。**

直观地想来就是，当时刻t的状态确定时，后向概率的“起点”和前向概率的“终点”确定，并且并无交叉。

所以

$$\gamma_t(i)=\frac{P(i_t=q_i,O|\lambda)}{\sum\limits_{j=1}^{N}P(i_t=q_j,O|\lambda)}=\frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_t(j)\beta_t(j)}$$

- 给定模型参数λ和观测O，**在时刻t处于状态q_i且在时刻$t+1$处于状态q_j的概率**，记为$\xi_t(i,j)=P(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j|O;\lambda)$

  进行如下推导：

$$\xi_t(i,j)=\frac{P(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,O|\lambda)}{P(O|\lambda)}=\frac{P(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,O|\lambda)}{\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}P(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,O|\lambda)}$$

对分子进行如下变形：

$$\begin{aligned}
&P(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,O|\lambda)\\
&=P(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,o_1,o_2,\cdots,o_T|\lambda)\\
&=P(o_1,o_2,\cdots o_{t-1}|\lambda)P(o_t,o_{t+1},i_t=q_i,i_{t+1}=q_j|\lambda)P(o_{t+2},o_{t+3},\cdots o_T|i_{t+1}=q_j;\lambda)\\
&=P(o_1,o_2,\cdots o_{t-1}|\lambda)P(o_t,i_t=q_i|\lambda)P(o_{t+1},i_{t+1}=q_j|i_t=q_i;\lambda)P(o_{t+2},o_{t+3},\cdots o_T|i_{t+1}=q_j;\lambda)\\
&=P(o_1,o_2,\cdots o_t,i_t=q_i|\lambda)P(o_{t+1},i_{t+1}=q_j|i_t=q_i;\lambda)P(o_{t+2},o_{t+3},\cdots o_T|i_{t+1}=q_j;\lambda)\\
&=\alpha_t(i)a_{ij}b_{jo_{t+1}}\beta_{t+1}(j)
\end{aligned}$$

注意第二、三个等式是由于**两个基本假设**和概率的乘法公式。

所以：

$$\xi_t(i,j)=\frac{P(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,O|\lambda)}{\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}P(i_t=q_i,i_{t+1}=q_j,O|\lambda)}=\frac{\alpha_t(i)a_{ij}b_{jo_{t+1}}\beta_{t+1}(j)}{\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_t(i)a_{ij}b_{jo_{t+1}}\beta_{t+1}(j)}$$

预测算法

近似算法

分别求出在每个时刻最有可能出现的状态i_t^*，从而得到一个状态序列$I^*=(i_1^*,i_2^*,\cdots,i_T^*)$，将它作为预测结果即可。

给定HMM的参数λ和观测序列O，在时刻t处于状态q_i的概率$\gamma_t(i)$：

$$\gamma_t(i)=\frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_t(j)\beta_t(j)}$$

在每一个时刻t最有可能的状态i_t^*是：

$$i_T^*=\underset{1\leqslant i\leqslant N}{arg\,max}[\gamma_t(i)],\quad t=1,2,\cdots,T$$

但是，局部的状态并不能确定全局最优的状态序列：我们计算的时候仅考虑了当前状态，并没有考虑前面的状态。如果状态转移概率矩阵中有为0的，那么实际上求出来的状态是不存在的。

维特比算法

用动态规划来求最大概率的路径，实际上，从图的角度来看计算最优隐状态序列概率等价于计算最大路径。也就是说，维特比算法与前向概率计算思想一致，只是将加法替换为求最大。

- 定义在时刻t状态为q_i的所有单个路径$(i_1,i_2,\cdots,i_t)$中概率最大为

$$\delta_t(i)=\max_{i_1,i_2,\cdots,i_{t-1}}P(o_1,\cdots,o_t,i_1,\cdots,i_{t-1},i_t=q_i)$$

则：

$$\delta_1(i) = \pi_i b_{io_1}$$
$$\delta_2(i) = \max_{1\leqslant j\leqslant N}[\delta_1(j)a_{ji}]b_{io_2}$$
$$\delta_3(i) = \max_{1\leqslant j\leqslant N}[\delta_2(j)a_{ji}]b_{io_3}$$
$$\cdots$$
$$\delta_t(i) = \max_{1\leqslant j\leqslant N}[\delta_{t-1}(j)a_{ji}]b_{io_t}$$

- 定义在t时刻状态为q_i的所有单个路径$(i_1, i_2, \cdots, i_{t-1}, i_t)$中概率最大的路径的第$t-1$个节点为

$$\psi_t(i) = \arg\max_{1\leqslant j\leqslant N}[\delta_{t-1}(j)a_{ji}]$$

这个形式化的定义就是为了回溯前面的状态。

例子:

假设有三个盒子，每个盒子里面都装有红白两种颜色的球，盒子里的红白球数如下所示:

盒子	1	2	3
红球数	5	4	7
白球数	5	6	3

按照下面的方法抽球，产生一个球的颜色观测序列：首先以$0.2, 0.4, 0.4$的概率从$1, 2, 3$号盒子中选取一个盒子，从这个盒子中随机抽取一个球，记录颜色后放回，接着按以下概率选取下一个盒子:

	1	2	3
1	0.5	0.2	0.3
2	0.3	0.5	0.2
3	0.2	0.3	0.5

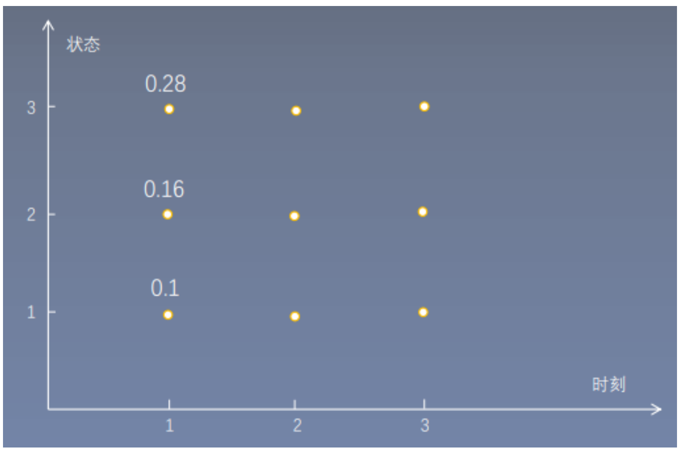
确定转移的盒子后，再从盒子里随机抽取一个球，记录颜色后放回，如此下去重复三次，最终得到的观测序列为$O = \{红，白，红\}$，记选取的盒子序列为状态序列，试求最优状态序列，即最优路径$I^* = (i_1^*, i_2^*, i_3^*)$。

确定HMM模型的参数为:

$$A = \begin{vmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{vmatrix} \quad \pi = \begin{vmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{vmatrix}$$

按照维特比算法进行如下计算:

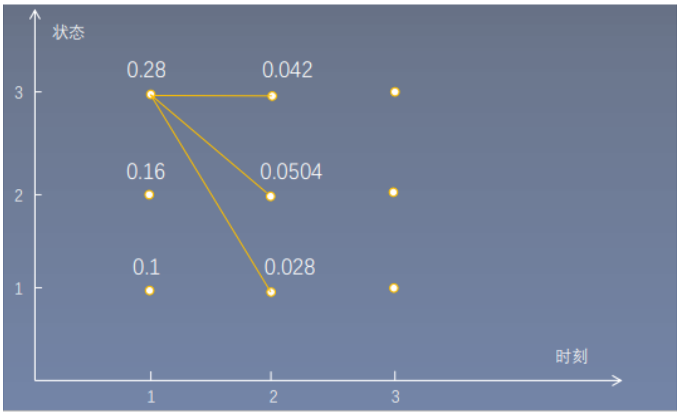
$$\delta_1(1) = \pi_1 b_{1o_1} = 0.2 \times 0.5 = 0.1, \quad \psi_1(1) = 0$$
$$\delta_1(2) = \pi_2 b_{2o_1} = 0.4 \times 0.4 = 0.16, \quad \psi_1(2) = 0$$
$$\delta_1(3) = \pi_3 b_{3o_1} = 0.4 \times 0.7 = 0.28, \quad \psi_1(3) = 0$$



$$\delta_2(1)=\max_{1\leqslant j\leqslant 3}[\delta_1(j)a_{j1}]b_{1o_2}=\max\begin{Bmatrix}0.1\times 0.5=0.05\\0.16\times 0.3=0.048\\0.28\times 0.2=0.056\end{Bmatrix}\times 0.5=0.028\quad \psi_2(1)=arg\max_{1\leqslant j\leqslant 3}[\delta_1(j)a_{j1}]=3$$

$$\delta_2(2)=\max_{1\leqslant j\leqslant 3}[\delta_1(j)a_{j2}]b_{2o_2}=\max\begin{Bmatrix}0.1\times 0.2=0.02\\0.16\times 0.5=0.08\\0.28\times 0.3=0.084\end{Bmatrix}\times 0.6=0.0504\quad \psi_2(2)=arg\max_{1\leqslant j\leqslant 3}[\delta_1(j)a_{j2}]=3$$

$$\delta_2(3)=\max_{1\leqslant j\leqslant 3}[\delta_1(j)a_{j3}]b_{3o_2}=\max\begin{Bmatrix}0.1\times 0.3=0.03\\0.16\times 0.2=0.032\\0.28\times 0.5=0.14\end{Bmatrix}\times 0.3=0.042\quad \psi_2(3)=arg\max_{1\leqslant j\leqslant 3}[\delta_1(j)a_{j3}]=3$$



$$\delta_3(1)=\max_{1\leqslant j\leqslant 3}[\delta_1(j)a_{j1}]b_{1o_2}=\max\begin{Bmatrix}0.028\times 0.5=0.014\\0.0504\times 0.3=0.01512\\0.042\times 0.2=0.0084\end{Bmatrix}\times 0.5=0.00756\quad \psi_3(1)=arg\max_{1\leqslant j\leqslant 3}[\delta_2(j)a_{j1}]=2$$

$$\delta_3(2)=\max_{1\leqslant j\leqslant 3}[\delta_1(j)a_{j2}]b_{2o_2}=\max\begin{Bmatrix}0.028\times 0.2=0.0056\\0.0504\times 0.5=0.0252\\0.042\times 0.3=0.0126\end{Bmatrix}\times 0.4=0.01008\quad \psi_3(2)=arg\max_{1\leqslant j\leqslant 3}[\delta_2(j)a_{j2}]=2$$

$$\delta_3(3)=\max_{1\leqslant j\leqslant 3}[\delta_1(j)a_{j3}]b_{3o_2}=\max\begin{Bmatrix}0.028\times 0.3=0.0084\\0.0504\times 0.2=0.01008\\0.042\times 0.5=0.021\end{Bmatrix}\times 0.7=0.0147\quad \psi_3(3)=arg\max_{1\leqslant j\leqslant 3}[\delta_2(j)a_{j3}]=3$$