Inhalt

1. Komplexe Zahlen

Die Komplexen Zahlen erweitern den bisher bekannten Zahlenbereich und lösen damit das Problem, dass $x^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{R}$ nicht lösbar ist. Man erweitert den Zahlenbereich durch $\sqrt{-1}$.

Def.

$$i^2 = -1$$

1.1 Kartesische Form

Eine komplexe Zahl ist ein geordnetes Paar (a, b) für $a, b \in \mathbb{R}$. In der kartesischen Form schreibt man $z = a + bi$.
a wird als Realteil $Re(z)$ bezeichnet und bi als Imaginärteil $Im(z)$.

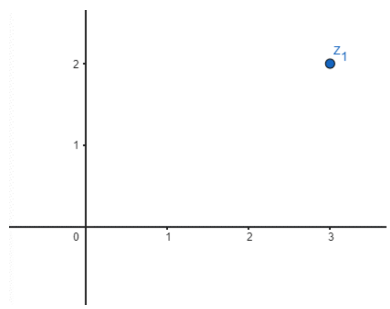
Die komplexe Zahlenmenge wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Def.

$$\mathbb{C} = \{\mathrm{a} + \mathrm{bi} : \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}\}$$

Eine komplexe Zahl $z = a + bi$ kann in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden, indem man $x = a$ und $y = b$ annimmt.

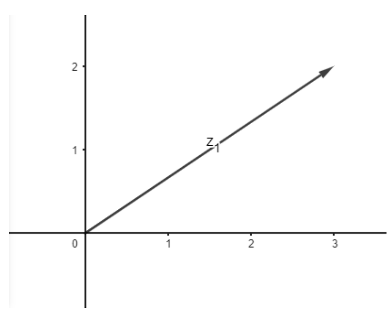
Die Zahl $z = 3 + 2i$ kann also wie folgt dargestellt werden:



Die y-Achse wird normalerweise mit *Im* beschriftet, die x-Achse mit *Re.*

1.2 Addition, Multiplikation und Betrag

Um die Addition, die Multiplikation und den Betrag einer komplexen Zahl zu veranschaulichen, kann man z auch als Vektor betrachten:



Somit kann man alle bereits bekannten Rechenregeln der Vektoren übertragen, wodurch man zu folgenden Definitionen kommt:

Def.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

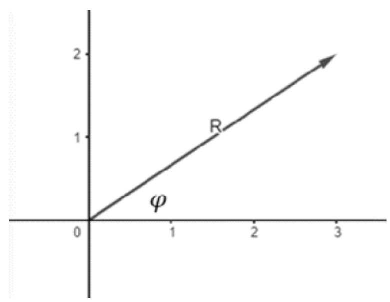
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2};$$

hier mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1.3 Polardarstellung

Da sich eine komplexe Zahl auch als Vektor in einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem darstellen lässt, kann man sie auch nur mit einer länge und einem Winkel beschreiben. Diese Schreibweise wird als Polardarstellung bezeichnet.

Hier wird z durch eine länge R für $R = |z|$ und einen Winkel φ angegeben.



φ kann folgendermaßen berechnet werden: (für $Re(z) > 0$)

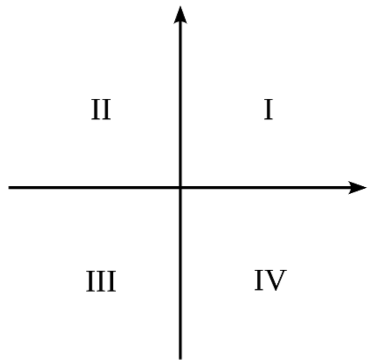
$$x = a = Rcos(\varphi)$$

$$y = b = Rsin(\varphi)$$

$$tan(\varphi) = \frac{Rsin(\varphi)}{Rcos(\varphi)}$$

$$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Diese Berechnung gilt nur für $Re(z) > 0$, für $Re(z) < 0$ müssen 180° addiert werden.



Somit gilt die Formel $\varphi = arg(z) = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ für die Quadranten I und IV und die Formel $\varphi = arg(z) = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + 180°$ für die Quadranten II und III.

Eine komplexe Zahl kann in der Polardarstellung auf zwei verschiedene Arten ausgedrückt werden. Man kann sie als R_φ bezeichnen, wobei $\varphi \in [0°, 360°)$ oder $\varphi \in (-180°, 180°]$ gilt. Alternativ gibt es auch $Re^{\varphi i}$ mit $\varphi \in [0,2\pi)$.
Für die Rückrechnung zurück zur kartesischen Form gilt:

$$z = R\big(cos(\varphi) + isin(\varphi)\big)$$

1.4 Exponentialrechnung

Die Exponentialrechnung mit komplexen Zahlen ist in der Polardarstellung einfacher.
Das kann man sehen, wenn man die Multiplikation in der kartesischen Form mit der in der Polardarstellung vergleicht. Für die Multiplikation in der kartesischen Form wird die Formel $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ genutzt, in der Polardarstellung gilt folgende Formel:

$$A_\alpha \times B_\beta = (A \times B)_{(\alpha+\beta)}$$

Somit kann folgende Formel für eine komplexe Zahl hoch n aufgestellt werden:

$$(A_\alpha)^n = A^n_{\alpha \times n}$$

1.A Der Beweis für diese Formel wird dem Leser überlassen.

1.B Die Division kann einfach von der Multiplikationsformel abgeleitet werden, sie lauter daher $\frac{A_\alpha}{B_\beta} = \left(\frac{A}{B}\right)_{\alpha-\beta}$. Der Beweis wird an dieser Stelle wieder dem Leser überlassen.

1.5 Wurzeln

Durch die im letzten Kapitel hergeleitete Divisionsformel kann man nun eine Regel für die Wurzel einer Zahl $z \in \mathbb{C}$ definieren.

$$\sqrt[n]{A_\alpha} = \sqrt[n]{A}_{\frac{\alpha}{n}}$$

Das ist allerdings nicht die einzige Lösung, genau genommen ist es eine der n Lösungen. Nimmt man das Ergebnis wieder hoch n, so wird der Winkel mit n multipliziert. Dabei wird er automatisch Modulo 360° genommen. Nimmt man also eine Zahl R_φ an und nimmt sie hoch n, so ist das Ergebnis R_θ^n mit $\theta = (\varphi \times n)\ mod\ 360°$. Da sich also jedes vielfache von 360° herauskürzt, wäre $\theta = \varphi \times n + \frac{360°}{n}$ ebenfalls eine Lösung. Dadurch kommt man auf eine Lösungsmenge von L_n für jedes mögliche θ mit:

$$L_n = \{\varphi n + \frac{N_j \times 360°}{n} : N_j \in \mathbb{N}_0\ for\ j = 0, \dots, n-1\}$$

Die Lösungsmenge für $\sqrt[n]{R_\varphi}$ ist damit:

$$R_n = \{\sqrt[n]{R}_{\theta_j} : \theta_j \in L_n\ for\ j = 0, \dots, n-1\}$$

1.6 Eulersche Identität

In Kapitel 1.3 wurde bereits definiert, dass eine Komplexe Zahl mit $R\big(cos(\varphi) + isin(\varphi)\big)$ beschrieben werden kann. Somit gilt $Re^{\varphi i} = R\big(cos(\varphi) + isin(\varphi)\big)$. Für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ ist z in $\mathbb{R}$. Die eulersche Identität ist $e^{\pi i} = -1$.

1.7 Natürlicher Logarithmus negativer Zahlen

Im letzten Kapitel wurde gezeigt, dass es eine Lösung für die Gleichung $e^x = -1$ gibt, wenn x in $\mathbb{C}$ liegt. Damit lässt sich annehmen, dass es eine Lösung für $ln(x)$ mit $x < 0$ gibt.
Wir können auch sagen, dass die Lösung dieser Gleichung eine Komplexe Zahl $z = a + bi$ ist.

$$ln(x) = a + bi$$

$$x = e^a e^{bi}$$

$$x = e^a \times \big(cos(b) + isin(b)\big)$$

$$e^a = \frac{x}{cos(b) + isin(b)}$$

$$a = ln\left(\frac{x}{cos(b) + isin(b)}\right)$$

Da wir bis jetzt noch keine natürlichen Logarithmen komplexer Zahlen berechnen können, muss die Lösung für $\frac{x}{cos(b)+isin(b)}$ in $\mathbb{R}$ liegen. Die einzigen Möglichkeiten welche diese Aussage erfüllen sind $b = 0$ und $b = n\pi$ wobei n in $\mathbb{N}$ liegen muss und n ungerade ist.

Die Lösung $b = 0$ funktioniert nicht, da $cos(0) + isin(0) = 1$. Daher wäre die gesamte Term $\frac{x}{cos(b)+isin(b)}$ lediglich x und da x bereits eine negative Zahl ist, würde die Operation in einer Rekursion enden. Für $b = n\pi$ is die Lösung des Terms in jedem Fall $-x$, was wieder eine positive Zahl ist.

Wir können daher sagen $b = n\pi$ für $n \in \mathbb{N}$ und $n\ mod\ 2 = 1$.

In jedem Fall bleibt am Ende $a = ln(-x)$.
Da wir nun sowohl a als auch b haben, können wir die komplexe Lösung $z = a + bi$ formen.

Danach bleibt die Formel

$$ln(x) = ln(-x) + n$$

für $x \in \mathbb{R}, x < 0, n \in \mathbb{N}, n\ mod\ 2 = 1$.

1.8 Natürlicher Logarithmus komplexer Zahlen

Eine weitere Frage die sich stellt, wenn man die komplexe Zahlenebene mit einbezieht, ist der natürliche Logarithmus einer komplexen Zahl.

Dafür nehmen wir zunächst eine Zahl $z = a + bi$ für $z \in \mathbb{C}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Wir schreiben z in der Polardarstellung so dass

$$z = |z|e^{iarctan\left(\frac{b}{a}\right)}$$

für $a > 0$ gilt und

$$z = |z|e^{i\left(arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi\right)}$$

für $a < 0$ gilt.

Wir können beide Funktionen zusammenfassen indem wir

$$z = |z|e^{i\left(arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\varphi(a)\right)}$$

mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & if\ x > 0, \\ \pi & if\ x < 0 \end{cases}$$

Annehmen.

Nun können wir den natürlichen Logarithmus z berechnen.

$$ln\left(|z|e^{i\left(arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\varphi(a)\right)}\right)$$

$$ln(|z|) + i\left(arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \varphi(a)\right)$$

Am Ende bleibt folgende Formel für $ln(z)$.

$$ln(a + bi) = ln\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right) + i\left(arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \varphi(a)\right)$$

1.9 Aufgaben

1.C Geben Sie $z = 3 + 9i$ in der Polardarstellung der Form R_φ an.

1.D Geben Sie $z = -3 + 2i$ in der Polardarstellung der Form $e^{\varphi i}$ an.

1.E Geben Sie $z = 5e^{0,295\pi i}$ in kartesischer Form an.

1.F Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen

$$e^{\pi(1+i)/4}, \qquad \frac{1}{i}, \qquad \frac{2+i}{1-i}.$$

1.G Zeigen Sie dass $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = 1$ (Hinweis: Pascalsches Dreieck)

1.H Geben Sie die Zahl $\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)^{10}$ in kartesischer Darstellungsform an.

1.I Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 8 + 8\sqrt{3}i$ und geben Sie mindestens eine der Lösungen in kartesischer Form an.

1.J Geben sie jeweils mindestens zwei Lösungen für den natürlichen Logarithmus der der folgenden Zahlen an.

$$-1, -54{,}598, -1337$$

1.K Beweisen Sie, dass es keine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $|z| - z = i$ gibt.

1.L Zeigen Sie, dass für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ die Dreiecksungleichung $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ erfüllt wird.