Inhalt

1. Komplexe Zahlen 2

1.1 Kartesische Form 2

1.2 Addition, Multiplikation und Betrag 2

1.3 Polardarstellung 3

1.4 Exponentialrechnung 4

1. Komplexe Zahlen

Die Komplexen Zahlen erweitern den bisher bekannten Zahlenbereich und lösen damit das Problem, dass $x^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{R}$ nicht lösbar ist. Man erweitert den Zahlenbereich durch $\sqrt{-1}$.

Def.

$$i^2 = -1$$

1.1 Kartesische Form

Eine komplexe Zahl ist ein geordnetes Paar (a, b) für $a, b \in \mathbb{R}$. In der kartesischen Form schreibt man $z = a + bi$.
a wird als Realteil $Re(z)$ bezeichnet und bi als Imaginärteil $Im(z)$.

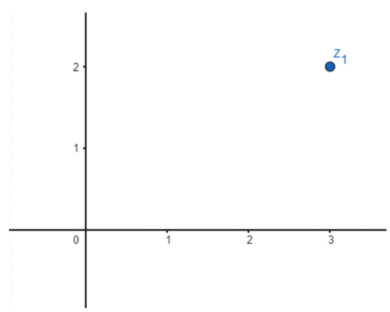
Die komplexe Zahlenmenge wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Def.

$$\mathbb{C} = \{\mathrm{a + bi} : \mathrm{a, b} \in \mathbb{R}\}$$

Eine komplexe Zahl $z = a + bi$ kann in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden, indem man $x = a$ und $y = b$ annimmt.

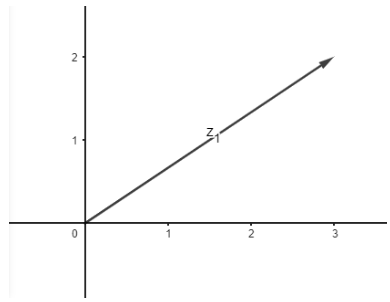
Die Zahl $z = 3 + 2i$ kann also wie folgt dargestellt werden:



Die y-Achse wird normalerweise mit *Im* beschriftet, die x-Achse mit *Re.*

1.2 Addition, Multiplikation und Betrag

Um die Addition, die Multiplikation und den Betrag einer komplexen Zahl zu veranschaulichen, kann man z auch als Vektor betrachten:



Somit kann man alle bereits bekannten Rechenregeln der Vektoren übertragen, wodurch man zu folgenden Definitionen kommt:

Def.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i,$$

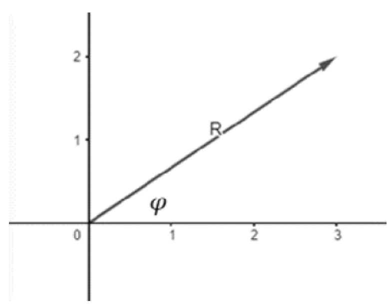
$$|z|=\sqrt{a^2+b^2};$$

hier mit $a,b,c,d\ \in \mathbb{R}$.

1.3 Polardarstellung

Da sich eine komplexe Zahl auch als Vektor in einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem darstellen lässt, kann man sie auch nur mit einer länge und einem Winkel beschreiben. Diese Schreibweise wird als Polardarstellung bezeichnet.

Hier wird z durch eine länge R für $R=|z|$ und einen Winkel φ angegeben.



φ kann folgendermaßen berechnet werden: (für $Re(z)>0$)

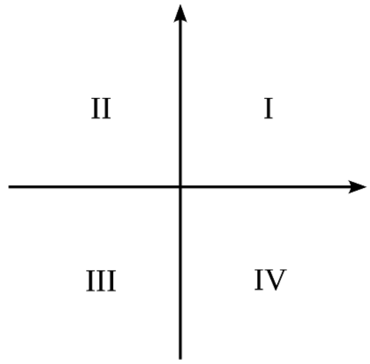
$$x=a=Rcos(\varphi)$$

$$y=b=Rsin(\varphi)$$

$$tan(\varphi)=\frac{Rsin(\varphi)}{Rcos(\varphi)}$$

$$\varphi=tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Diese Berechnung gilt nur für $Re(z) > 0$, für $Re(z) < 0$ müssen 180° addiert werden.



Somit gilt die Formel $\varphi = arg(z) = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ für die Quadranten I und IV und die Formel $\varphi = arg(z) = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + 180°$ für die Quadranten II und III.

Eine komplexe Zahl kann in der Polardarstellung auf zwei verschiedene Arten ausgedrückt werden. Man kann sie als R_φ bezeichnen, wobei $\varphi \in [0°, 360°)$ oder $\varphi \in (-180°, 180°]$ gilt. Alternativ gibt es auch $Re^{\varphi i}$ mit $\varphi \in [0,2\pi)$.
Für die Rückrechnung zurück zur kartesischen Form gilt:

$$z = R\big(cos(\varphi) + isin(\varphi)\big)$$

1.4 Exponentialrechnung

Die Exponentialrechnung mit komplexen Zahlen ist in der Polardarstellung einfacher.
Das kann man sehen, wenn man die Multiplikation in der kartesischen Form mit der in der Polardarstellung vergleicht. Für die Multiplikation in der kartesischen Form wird die Formel $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ genutzt, in der Polardarstellung gilt folgende Formel:

$$A_\alpha \times B_\beta = (A \times B)_{(\alpha+\beta)}$$

Somit kann folgende Formel für eine komplexe Zahl hoch n aufgestellt werden:

$$(A_\alpha)^n = A^n_{\alpha \times n}$$

1.A
Der Beweis für diese Formel wird dem Leser überlassen.

1.B
Die Division kann einfach von der Multiplikationsformel abgeleitet werden, sie lautet daher $\frac{A_\alpha}{B_\beta} = \left(\frac{A}{B}\right)_{\alpha-\beta}$. Der Beweis wird an dieser Stelle wieder dem Leser überlassen.