目录

第一章 卷积积分与卷积和

一、卷积积分在信号和系统理论中占有重要地位

卷积积分：图 1-1-1 定义了强度为 1（即脉冲波形下的面积为 1），宽度极窄的脉冲 $p_n(t)$。设当 $p_n(t)$ 作用于 LTI 系统时，其零状态响应为 $h_n(\mathrm{t})$,如图 1-1-1 所示：

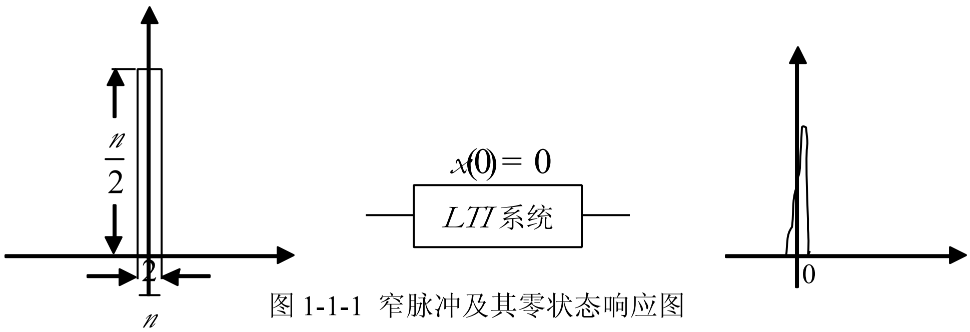


图 1-1-1 窄脉冲及其零状态响应图

显然由于 $\delta(t)=\lim\limits_{n\to\infty}p_n(t)$ （式 1-1-1）

所以对于 LTI 系统，其冲激响应 $h(t)=\lim\limits_{n\to\infty}h_n(t)$ （式 1-1-2）

现在考虑任意激励信号 $f(t)$，为方便，可令 $\Delta\tau=\dfrac{2}{n}$，把 $f(t)$ 分解成为许多宽度为 $\Delta\tau$ 的窄脉冲，如图 1-1-2 所示：

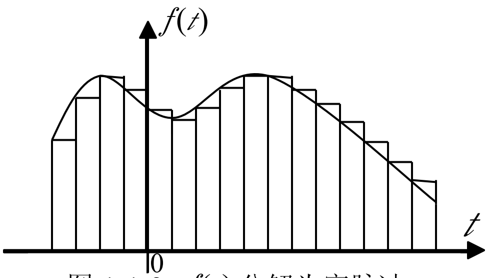


图 1-1-2 $f(t)$ 分解为窄脉冲

其强度（脉冲下的面积）为 $f(k\Delta\tau)\bullet\Delta\tau$

于是可以将 $f(t)$ 近似看作由一系列强度不同，接入时刻不同的窄脉冲组成，所有这些窄脉冲的和近似地等于 $f(t)$，即：$f(t)\approx\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}f(k\Delta\tau)p_n(t-k\Delta\tau)\Delta\tau$，式中 k 为整数。

如果 LTI 系统在极窄脉冲 $p_n(t)$ 作用下的零状态响应为 $h_n(t)$，那么根据 LTI 系统的零状态线性和激励与响应的时不变性，

线性： $T[\partial_1 f_1(\bullet)+\partial_2 f_2(\bullet)]=\partial_1 T[f_1(\bullet)]+\partial_2 T[f_2(\bullet)]$

时不变性： $T[\{0\},\partial f(\bullet)]=y_f(\bullet)$

在以上一系列窄脉冲的作用下，系统的零状态响应近似为

$$y_f(\bullet) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta\tau)h_n(t-k\Delta\tau)\Delta\tau$$

在 $\Delta\tau \to 0$（即 $n \to \infty$）的极限情况下，将 $\Delta\tau$ 写作 $d\tau$，它是时间变量，同时求和符号改积分符号，利用

式 1-1-1 和 1-1-2 可将 $f(t)$ 和 $y_f(t)$ 写为

$$f(t) = \lim_{\substack{\Delta\tau\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta\tau)p_n(t-k\Delta\tau)\Delta\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \qquad \text{式 1-1-3}$$

$$y_f(t) = \lim_{\substack{\Delta\tau\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta\tau)h_n(t-k\Delta\tau)\Delta\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad \text{式 1-1-4}$$

它们称为卷积积分。式 1-1-4 表明 LTI 系统的零状态响应 $y_f(t)$ 是激励 $f(t)$ 与冲激响应 $h(t)$ 的卷积积分。

一般而言，如有两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2^*(t)$，积分 $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$ 称为函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积积分，简称卷积，简记 $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$，即：$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{def} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$

二、卷积积分及其性质

1、定义： $r(t) = e(t) * h(t) \xleftrightarrow{def} \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau \xleftrightarrow{def} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e(t-\tau)\,d\tau$

2、卷积积分的性质： 设已知 $f(t) = f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

2.1 代数运算交换律：$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

证明 $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$

$$\xleftrightarrow[\eta=t-\tau]{\tau=t-\eta} \int_{+\infty}^{-\infty} f_1(t-\eta)f_2(\eta)d(-\eta) \qquad (t\text{常数} \quad \tau \quad \eta\text{参变量})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta)f_1(t-\eta)d(\eta) = f_2(t) * f_1(t)$$

2.2 代数运算分配律：$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$

证明：由定义导出 $f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)[f_2(t-\tau) + f_3(t-\tau)]\,d\tau$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_3(t-\tau)\,d\tau$$

$$= f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

2.3 代数运算结合律：$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$

证明： $[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(\eta-\tau)d\tau]f_3(t-\eta)d\eta$

交换上式积分次序，并令$x=\eta-\tau$

$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)[\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x)f_3(t-\tau-x)dx]d\tau$

$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_{23}(t-\tau)d\tau$

$=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$

式中 $f_{23}(t-\tau)$=$\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x)f_3(t-\tau-x)dx$，亦即 $f_{23}(t-\tau)$=$\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x)f_3(t-\tau-x)dx$=$f_2(t)*f_3(t)$

2.4 抽样性质：$f(t)*\delta(t)$=$f(t)$ 式 1-2-1

$f(t)*\delta(t-t_0)$=$f(t-t_0)$ 式 1-2-2

举一例证明之：$f(t)*\delta(t-t_0)$=$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-t_0)f(t-\tau)d\tau\xleftrightarrow[\tau=\eta+t_0]{\eta=\tau-t_0}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\eta)f(t-t_0-\eta)d\eta=f(t-t_0)$

另外有： $f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)$=$[f_1(t)*\delta(t-t_1)]*[f_2(t)*\delta(t-t_2)]$

$=f(t)*[\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2)]=f(t)*\delta(t-t_1-t_2)$

$=f(t-t_1-t_2)$

[可令式 1-2-2 中 $f(t)=\delta(t-t_2)$，立得$\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2)=\delta(t-t_1-t_2)$，注意区分与式：

$f_1(t-t_1)*\delta(t-t_2)=f_1(t-t_1-t_2)$的不同意义。]

2.5 微积分性质：用 $f^{(1)}(t)$ $f^{(-1)}(t)$分别表达任意可微与可积函数的微分和积分

即： $f^{(1)}(t)\xleftrightarrow{def}\dfrac{df(t)}{dt}$ 式 1-2-3

$f^{(-1)}(t)\xleftrightarrow{def}\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$ 式 1-2-4

式 1-2-4 中设 $f^{(-1)}(\infty)=0$，若 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$

则：$f^{(1)}(t)=f_1^{(1)}(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2^{(1)}(t)$

$f^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2^{(-1)}(t)$

证明：先证明微分 $f^{(1)}(t)=\dfrac{d}{dt}[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau]=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)[\dfrac{d}{dt}f_2(t-\tau)]d\tau=f_1(t)*f_2^{(1)}(t)$

第一支交换 $f_1(t)$和 $f_2(t)$可证。

再证明积分 $f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(x-\tau)d\tau]dx$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)[\int_{-\infty}^{t}f_2(x-\tau)dx]d\tau \text{ 交换积分次序}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)[\int_{-\infty}^{t-\tau}f_2(x-\tau)d(x-\tau)]d\tau$$

$$=f_1(t)*f_2^{(-1)}(t)$$

第一支交换 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 可证。

归纳为：微分性 $\frac{df(t)}{dt}=\frac{df_1(t)}{dt}*f_2(t)=f_1(t)*\frac{df_2(t)}{dt}$

积分性 $\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}[f_1(\tau)*f_2(\tau)]d\tau=f_1(t)*[\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)d\tau]=f_2(t)*[\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)d\tau]$

微积分 $f_1(t)*f_2(t)=\frac{df_1(t)}{dt}*[\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)d\tau]$

2.6 微(分)抽样性： $f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)$；$f(t)*\delta^{(n)}(t-t_0)=f^{(n)}(t-t_0)$

2.7 积累性(与 $u(t)$ 的卷积)： $f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)u(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,d\tau$

归纳为： $f(t)$ 与 $\delta'(t)$ 卷积相当于微分， $f(t)$ 与 $\delta(t)$ 卷积等于自身， $f(t)$ 与 $u(t)$ 卷积相当于积分。

三、卷积和

在 LTI 连续时间系统中，把激励信号分解为一系列冲激函数，求出各冲激函数单独作用于系统时的冲激响应，然后将这些响应相加得到系统对于该激励信号的零状态响应，这个相加的过程表现为求卷积积分。在 LTI 离散时间系统中可采用与上述大致相同的方法进行分析，由于离散信号本身是一个序列，因此激励信号分解为单位序列的工作很容易完成。如果系统的单位序列响应已知，也不难求得每个单位序列单独作用于系统的响应。把这些序列相加就得到系统对于该激励信号的零状态响应，这个相加的过程表现为求卷积和。

任意离散时间序列 $f(k)$ ($k=\cdots\cdots-2\ -1\ 0\ 1\ 2\cdots\cdots$ 可以表示为：

$$f(k)=\cdots\cdots+f(-2)\delta(k+2)+f(-1)\delta(k+1)+f(0)\delta(k)+f(1)\delta(k-1)+\cdots\cdots f(m)\delta(k-m)+\cdots\cdots$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)\delta(k-m) \qquad \text{式 1-3-1}$$

如果 LTI 系统的单位序列响应为 $h(k)$,那么由线性系统的齐次性和时不变系统的移不变性可知，系统对 $f(m)\delta(k-m)$ 的响应为 $f(m)h(k-m)$。根据系统的零状态响应线性性质，由式 1-3-1 的序列 $f(k)$ 作用于系统所引起的零状态响应 $y_f(k)$ 应为：

$$y_f(k)=\cdots\cdots+f(-2)h(k+2)+f(-1)h(k+1)+f(0)h(k)+f(1)h(k-1)+\cdots\cdots f(m)h(k-m)+\cdots\cdots$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)h(k-m) \qquad \text{式 1-3-2}$$

式 1-3-2 称为序列 $f(k)$ 与 $h(k)$ 的卷积和，它表明 LTI 系统对于任意激励 $f(k)$ 的零状态响应是激励与系统单位序列响应 $h(k)$ 的卷积和。

一般而言，若有两个序列 $f_1(k)$ 和 $f_2^*(k)$，和式 $f(k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(m) f_2(k-m)$ 称为序列 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$ 的卷积和，也简称卷积，即：$f(k)=f_1(k)*f_2(k) \xleftrightarrow{def} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(m) f_2(k-m)$ 　式 1-3-3

如果序列 $f_1(k)$ 是因果序列（即 $k<0$ 时，$f_1(k)=0$）则式 1-3-3 中求和下限可改写为零。即：

$$f_1(k)*f_2(k)=\sum_{m=0}^{\infty} f_1(m) f_2(k-m) \quad \text{当} k<0 \quad f_1(k)=0\text{时}$$

如果序列 $f_1(k)$ 不受限制，而 $f_2(k)$ 是因果序列，则式 1-3-3 中 $k-m<0$，　$m>k$ 时有 $f_2(k-m)=0$，求和上限可改写为 k，即 $f_1(k)*f_2(k)=\sum_{m=-\infty}^{k} f_1(m) f_2(k-m)$，　当 $m>k$，$f_2(k-m)=0$ 时

如果 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$ 均为因果序列，即

$$f_1(k)*f_2(k)=\sum_{m=0}^{k} f_1(m) f_2(k-m), \quad \text{当} k<0 \quad f_1(k)=f_2(k)=0\text{时}$$

卷积和的性质与卷积积分的性质类似。

四、LTI 系统

1、连续时间系统模型

$$e(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$
\begin{aligned}
\text{则} T[e(t)]=r(t)&=T[\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau] \\
&=\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)T[\delta(t-\tau)]d\tau \qquad \text{线性} \\
&=\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad \text{时不变性} \\
&=e(t)*h(t)
\end{aligned}
$$

2、离散时间系统模型

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

则 $T[x(n)]=y(n)=T[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)]$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)T[\delta(n-m)] \qquad \text{线性}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m) \qquad \text{时不变性}$$

$$=x(n)*h(n)$$

五、卷积积分表和卷积和表

卷积积分表

序号	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_1(t)*f_2(t)$
1	$f(t)$	$\delta'(t)$	$f'(t)$
2	$f(t)$	$\delta(t)$	$f(t)$
3	$f(t)$	$u(t)$	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$
4	$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
5	$tu(t)$	$u(t)$	$\frac{1}{2}t^2 u(t)$
6	$e^{-\partial t}u(t)$	$u(t)$	$\frac{1}{\partial}(1-e^{-\partial t})u(t)$
7	$e^{-\partial_1 t}u(t)$	$e^{-\partial_2 t}u(t)$	$\frac{1}{\partial_2-\partial_1}(e^{-\partial_1 t}-e^{-\partial_2 t})u(t)$, $\partial_1 \neq \partial_2$
8	$e^{-\partial t}u(t)$	$e^{-\partial t}u(t)$	$te^{-\partial t}u(t)$
9	$tu(t)$	$e^{-\partial t}u(t)$	$(\frac{\partial t-1}{\partial^2}+\frac{1}{\partial^2}e^{-\partial t})u(t)$
10	$te^{-\partial t}u(t)$	$e^{-\partial t}u(t)$	$\frac{1}{2}t^2 e^{-\partial t}u(t)$
11	$te^{-\partial_1 t}u(t)$	$e^{-\partial_2 t}u(t)$	$[\frac{(\partial_2-\partial_1)t-1}{(\partial_2-\partial_1)^2}e^{-\partial_1 t}+\frac{1}{(\partial_2-\partial_1)^2}e^{-\partial_2 t}]u(t)$, $\partial_1 \neq \partial_2$

卷积和表

序号	$f_1(k)$	$f_2(k)$	$f_1(k)*f_2(k)$
1	$f(k)$	$\delta(k)$	$f(k)$
2	$f(k)$	$u(k)$	$\sum_{m=-\infty}^{k} f(m)$
3	$u(k)$	$u(k)$	$(k+1)u(k)$
4	$ku(k)$	$u(k)$	$\frac{1}{2}(k+1)ku(k)$

5	$\partial^{k}u(k)$	$u(k)$	$\dfrac{1-\partial^{k+1}}{1-\partial}u(k)$, $\partial\neq 1$
6	$\partial_1^{k}u(k)$	$\partial_2^{k}u(k)$	$\dfrac{\partial_2^{k+1}-\partial_1^{k+1}}{\partial_2-\partial_1}u(k)$, $\partial_1\neq\partial_2$
7	$\partial^{k}u(k)$	$\partial^{k}u(k)$	$(k+1)\partial^{k}u(k)$
8	$\partial^{k}u(k)$	$ku(k)$	$\dfrac{k}{1-\partial}u(k)+\dfrac{\partial(\partial^{k}-1)}{(1-\partial)^2}u(k)$
9	$ku(k)$	$ku(k)$	$\dfrac{1}{6}(k+1)k(k-1)u(k)$

六、有关奇异函数卷积积分及卷积和的证明

预备知识：

Dirac 函数 $\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\\ \delta(t)=0,\ \ (t\neq 0\text{时})\end{cases}$ 另外：$\begin{cases}\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=1,\text{当}t>0\\ \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=0,\text{当}t<0\end{cases}\Rightarrow\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$

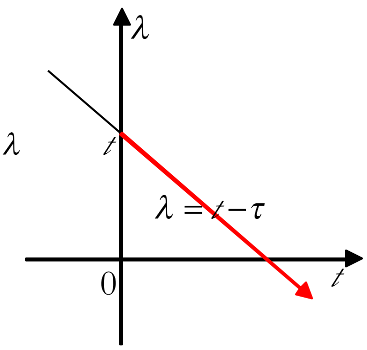
抽样函数 $\mathrm{S}a(t)=\dfrac{\sin t}{t}$

连续时间

6.1 $u(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t}1\times 1dt=tu(t)$

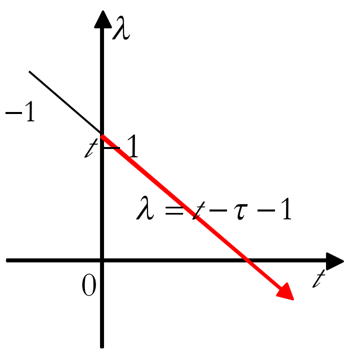
引申：
$$\begin{aligned}u(t)*u(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)u(t-\tau)d\tau\\&=\int_{0}^{\infty}u(t-\tau)d\tau\\&=\int_{t}^{-\infty}u(\lambda)(-d\lambda)\\&=\int_{-\infty}^{t}u(\lambda)d\lambda\\&=tu(t)\end{aligned}$$

$\lambda=t-\tau$ 则 $\tau=t-\lambda$

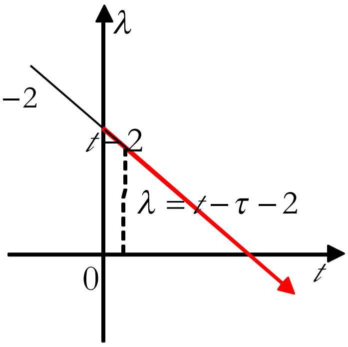


$$\begin{aligned}u(t)*u(t-1)&=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)u(t-\tau-1)d\tau\\&=\int_{0}^{\infty}u(t-\tau-1)d\tau\\&=\int_{t-1}^{-\infty}u(\lambda)(-d\lambda)\\&=\int_{-\infty}^{t-1}u(\lambda)d\lambda\\&=(t-1)u(t-1)\end{aligned}$$

$\lambda=t-\tau-1$ 则 $\tau=t-\lambda-1$



$$
\begin{aligned}
u(t-1)*u(t-2) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-1)u(t-\tau-2)d\tau \\
&= \int_{1}^{\infty} u(t-\tau-2)d\tau \qquad \lambda = t-\tau-2 \text{则} \tau = t-\lambda-2 \\
&= \int_{t-3}^{-\infty} u(\lambda)(-d\lambda) \\
&= \int_{-\infty}^{t-3} u(\lambda)d\lambda \\
&= (t-3)u(t-3)
\end{aligned}
$$



区别于 $u(k)*u(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)u(k-m) = \sum_{m=-\infty}^{k} u(m) \xleftrightarrow{equal} \sum_{m=-\infty}^{k} 1 = \begin{cases} k+1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} = (k+1)u(k)$

$$
\begin{aligned}
u(k+2)*u(k-5) &= [u(k)*\delta(k+2)]*[u(k)*\delta(k-5)] = (k+1)u(k)[\delta(k+2)*\delta(k-5)] \\
&= (k+1)u(k)\delta(k-3) \\
&= (k-2)u(k-3)
\end{aligned}
$$

6.2 $u(t)*u(t-t_0) = [u(t)*u(t)]*\delta(t-t_0) = tu(t)*\delta(t-t_0) = (t-t_0)u(t-t_0)$

6.3 $u(t-t_1)*u(t-t_2) = [u(t)*u(t)]*[\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2)] = tu(t)*\delta(t-t_1-t_2) = (t-t_1-t_2)u(t-t_1-t_2)$

6.4 $f(t)*u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} f(\tau)d\tau$

6.5 $f(t)*\delta(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)f(t-\tau)d\tau = f(t)$

6.6 $f(t)*\delta'(t) = \int_{-\infty}^{\infty}[\frac{d\delta(\tau)}{dt}f(t-\tau)]dt = \int_{-\infty}^{\infty}[\delta(\tau)\frac{df(t-\tau)}{d(t-\tau)}]dt = f'(t)$

6.7 $\delta(t)*\delta(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \delta(t)$

6.8 $\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2) = \delta(t-t_1-t_2)$

6.9 $\int_{-\infty}^{t} k\delta(\tau)d\tau = k$; $k\delta(\tau)$的面积是k

6.10 $\delta[f(t)] = \frac{\delta(t-t_0)}{\left|f'(t_0)\right|^{-1}}$, 其中$f(t)$是$t$的单调函数, $f(t_0)=0$, $f'(t_0) \neq 0$

$$\delta[x(\tau)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left|x'(\tau_i)\right|} \delta(\tau-\tau_i)$$

离散时间

6.10 $u(k)*\delta(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(m)u(k-m) = u(k)$

6.11 $\delta(k-m)*\delta(k-n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\tau-m)u(k-\tau-n) \xleftrightarrow{\tau=m} \delta(k-m-n)$

6.12 $u(k)\delta(k)=1\times\delta(k)=\delta(k)$

6.13 $u(k)u(k)=1\times u(k)=u(k)$

6.14 $\delta(k)\delta(k)=\delta(0)\times\delta(k)=\delta(k)$

抽样函数

6.15 $\mathrm{S}a(k\omega)\cos(k\omega)=\dfrac{\sin(k\omega)}{k\omega}\cos(k\omega)=\dfrac{\sin(2k\omega)}{2k\omega}=\mathrm{S}a(2k\omega)$

6.16 $\mathrm{S}a(0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$

等比级数

$a_0 \quad qa_0 \quad q^2 a_0 \quad q^3 a_0 \cdots\cdots q^n a_0 \quad q^{n+1} a_0 \cdots\cdots$

无穷项和：$\mathrm{S}_\infty=\dfrac{a_0}{1-q}$ ； 前 n 项和：$\mathrm{S}_n=\dfrac{a_0(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_0-a^{n+1}}{1-q}$

第二章 傅里叶变换

预备知识：$\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{j\Omega\tau} d\tau = \frac{1}{j\Omega}(e^{j\Omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\Omega\frac{\tau}{2}})$

$$= \frac{2}{\Omega}\sin(\frac{\Omega\tau}{2}) = \frac{\tau}{\frac{\Omega\tau}{2}}\sin(\frac{\Omega\tau}{2}) = \tau \mathrm{S}a(\frac{\Omega\tau}{2})$$

$$\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\Omega\tau} d\tau = -\frac{1}{j\Omega}(e^{-j\Omega\frac{\tau}{2}} - e^{j\Omega\frac{\tau}{2}}) = \frac{1}{j\Omega}(e^{j\Omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\Omega\frac{\tau}{2}})$$

$$= \tau \mathrm{S}a(\frac{\Omega\tau}{2}) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{j\Omega\tau} d\tau$$

$$\int_0^{\infty} e^{j\Omega\tau} d\tau = -\int_0^{\infty} e^{-j\Omega\tau} d\tau \xrightleftharpoons{\text{不予证明}} \frac{1}{j\Omega}$$

$$\int_{\partial}^{\beta} e^{-j\Omega\tau} d\tau = -\frac{1}{j\Omega}(e^{-j\Omega t})\Big|_{\partial}^{\beta} = (\beta-\partial)e^{j\Omega\frac{\beta+\partial}{2}}\mathrm{S}a\frac{(\beta-\partial)\Omega}{2} \quad \text{设}\tau\text{=}\beta\text{−}\partial \quad \text{则原式=}\underbrace{e^{j\Omega\frac{\beta+\partial}{2}} \bullet \tau \mathrm{S}a\frac{\Omega\tau}{2}}_{\text{中心移动}}$$

一、周期函数

$$f(t)\text{=}\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \qquad \text{其中}\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\text{则}a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)dt, \quad a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t dt, \quad b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\sin n\omega_0 t dt$$

三角函数形式转化为复指数形式（用 Euler 公式）：

$$f(t)\text{=}\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n\frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j})$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n - jb_n}{2}e^{jn\omega t} + \frac{a_n + jb_n}{2j}e^{-jn\omega t})$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t dt, \quad c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T_0}[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t dt - j\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\sin n\omega_0 t dt]$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)[\cos n\omega_0 t - j\sin n\omega_0 t]dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \qquad n = \text{正自然数}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)e^{jn\omega_0 t}dt \qquad n = \text{正自然数}$$

合为 $c_n=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \qquad n=$整数

若令 $\omega_n=n\omega, \quad n=$整数,

则: $f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{j\omega_n t}+c_{-n}e^{-j\omega_n t}) \qquad$ 其中$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}=\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(\tau)e^{-jn\omega\tau}d\tau]e^{jn\omega\tau}$$

二、傅里叶级数的定义

三角形式: <分量> $f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t) \qquad$ 其中$\omega_n=\frac{2n\pi}{T_0}$

则$a_0=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)dt, \quad a_n=\frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos\omega_n t dt, \quad b_n=\frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\sin\omega_n t dt$

<总量> $f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(\omega_n t+\varphi_n) \qquad$ 其中$c_0=a_0$, $c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, $\omega_n=\frac{2n\pi}{T_0}$

$\varphi_n=-\arctan\frac{b_n}{a_n}$

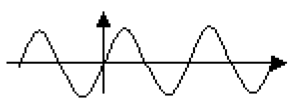
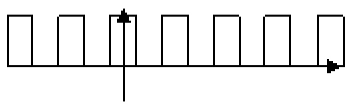
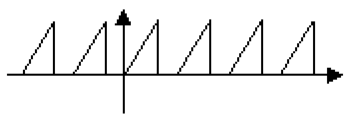
指数形式: $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{j\omega_n t}$, $c_0=a_n$, $c_n=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)e^{-j\omega_n t}dt$

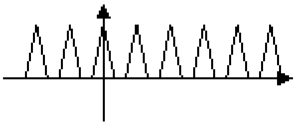
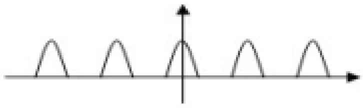
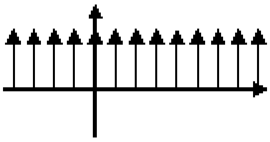
连续时间傅里叶级数的性质

	周期性信号	傅里叶级数
性质	$\left.\begin{matrix}x(t)\\y(t)\end{matrix}\right\}$ 周期T_0 $\omega_k=\frac{2k\pi}{T_0}$ 基波频率$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$	$a_k=\mathrm{Re}\{a_k\}+j\mathrm{Im}\{a_k\}=\|a_k\|e^{j\theta_k}$ $b_k=\mathrm{Re}\{b_k\}+j\mathrm{Im}\{b_k\}=\|b_k\|e^{j\varphi_k}$
线性	$Ax(t)+By(t)$	Aa_k+Bb_k
时移	$x(t-t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$(或者$a_k e^{-j\omega_k t_0}$)
频移	$e^{jM\omega_0 t}x(t)$	a_{k-M}
时间反转	$x(-t)$	a_{-k}

尺度变换	$x(at)$，$a>0$(周期$\frac{T_0}{a}$)	a_k
周期卷积	$\int_{-\frac{T0}{2}}^{\frac{T0}{2}} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$T_0 a_k b_k$
时域相乘	$x(t)\bullet y(t)$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{k-m}$(卷积和)
时域微分	$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k$(或者$j\omega_k a_k$)
积分	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$(仅当$a_0$=0时才有有限值，为周期的)	$\frac{1}{jk\omega_0}a_k$(或者$\frac{1}{j\omega_k}a_k$)
实信号共轭	$x(t)$为实信号	$a_k=a_{-k}^*$ $\text{Re}\{a_k\}=\text{Re}\{a_{-k}\},\text{Im}\{a_k\}=-\text{Im}\{a_{-k}\}$ $\left\|a_k\right\|=\left\|a_{-k}\right\|,\theta_k=-\theta_{-k}$
实偶信号	$x(t)$为实偶函数	a_k为实值且为偶
实奇信号	$x(t)$为实奇函数	a_k为纯虚值且为奇
实信号奇偶分解	$x_e(t)=\varepsilon_v\{x(t)\}$ $x_o(t)=o_d\{x(t)\}$	$\text{Re}\{a_k\}$ $j\text{Im}\{a_k\}$
帕塞瓦尔定理	$\frac{1}{T_0}\int_{T_0}\left\|x(t)\right\|^2 dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|a_k\right\|^2$	
共轭	$x^*(t)$	a_{-k}^*

典型周期信号的傅里叶级数

信号	图形	傅里叶级数
$\cos\omega_0 t$		$\cos\omega_0 t\xrightarrow{\mathscr{F}}\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}$
$\sin\omega_0 t$		$\sin\omega_0 t\xrightarrow{\mathscr{F}}\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}$
对称周期方波		$\frac{\omega_0\tau}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}Sa(k\omega_0 T)e^{jk\omega_0 t}$
周期性锯齿波		$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{j}{k}\bullet(-1)^k e^{jk\omega_0 t}$

对称周期三角波		$\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Sa^2(\frac{k\pi}{2})e^{jk\omega_0 t}$
周期半波余弦		$\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\frac{k\pi}{2})}{1-k^2}e^{jk\omega_0 t}$
冲激串$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_0)$		$x(t)=\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\omega_0 t}$

三、傅里叶变换

3.1 周期信号的 $f(t)$ 的傅里叶变换

$$\mathscr{F}[f(t)]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_0)\quad(\omega_0=\frac{2\pi}{T_0})$$

$$F_n=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}F_0(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2n\pi}{T_0}=n\omega_0}\ (F_0(\omega)\text{为单位脉冲的傅里叶变换})$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathscr{F}[\cos(\omega_0 t)]=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]\\ \mathscr{F}[\sin(\omega_0 t)]=j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]\end{array}\right\}\xleftrightarrow{equal}\left\{\begin{array}{l}\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)\\ \mathscr{F}[e^{-j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega+\omega_0)\end{array}\right.$$

令 $f(t)$ 的周期为 T_0，角频率$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=2\pi f_0$。可将 $f(t)$ 展开成傅里叶级数 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}$

等式两边同取傅里叶变换：$\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathscr{F}[e^{jn\omega_0 t}]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_0)$

周期信号频谱离散，由一些冲击函数组成，$F_n=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$。

单脉冲信号的 $F_0(\omega)$：$F_0(\omega)=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}f(t)e^{-j\omega t}dt$，比较前两式可得:$\boxed{F_n=\frac{1}{T_0}F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_0}}$

结论：周期脉冲序列的傅里叶级数系数 F_n 等于单脉冲 $F_0(\omega)$ 在 $n\omega_0$ 频率点的值乘以 $\frac{1}{T_0}$；利用单脉冲的傅里叶变换可方便地求周期性脉冲的傅里叶变换的系数。

3.2 非周期信号的傅里叶变换（频谱函数）

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

傅里叶逆变换： $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

频谱函数是复函数，写作 $F(j\omega)=\left|F(j\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)}=R(\omega)+jX(\omega)$

3.3 傅里叶变换的性质

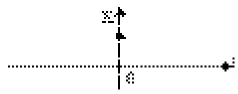
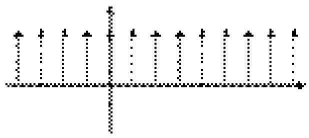
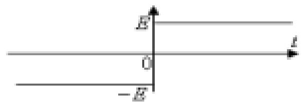
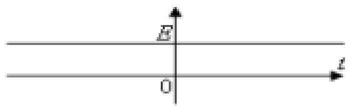
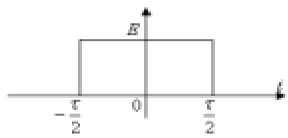
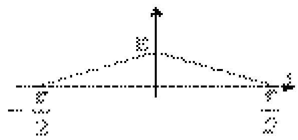
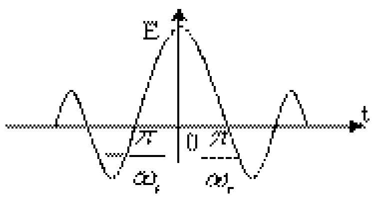
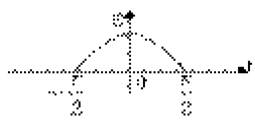
非周期傅里叶变换的性质

性质	非周期信号	傅里叶变换
	$x(t)$ $y(t)$	$X(j\omega)=\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}+j\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}=\left\|X(j\omega)\right\|e^{j\theta(\omega)}$ $Y(j\omega)=\mathrm{Re}\{Y(j\omega)\}+j\mathrm{Im}\{Y(j\omega)\}=\left\|Y(j\omega)\right\|e^{j\varphi(\omega)}$
线性	$ax(t)+by(t)$	$aX(j\omega)+bY(j\omega)$
时移	$x(t-t_0)$	$X(j\omega)e^{-j\omega_0 t}$
频移	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X[j(\omega-\omega_0)]$
时间反转	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
尺度变换	$x(at)\ \ or\ \ \dfrac{1}{\|a\|}x(\dfrac{t}{a})$	$\dfrac{1}{\|a\|}X(\dfrac{j\omega}{a})\ \ or\ \ X(ja\omega)$
时域卷积	$x(t)*y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
频域卷积（调制特性）	$x(t)y(t)$	$\dfrac{1}{2\pi}X(j\omega)*Y(j\omega)$
时域微分	$\dfrac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
时域积分	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\dfrac{X(j\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$
频域微分	$tx(t)$	$j\dfrac{dX(j\omega)}{d\omega}$
频域积分	$\pi f(0)\delta(t)+\dfrac{1}{(-jt)}f(t)$	$\int_{-\infty}^{\omega}F(j\omega)d\omega,\ \ F(-j\infty)=0$

实信号共轭对称性	$x(t)$为实数	$X(j\omega)=X^*(-j\omega)$ $\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}=\mathrm{Re}\{X(-j\omega)\}$ $\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}=-\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\}$ $\lvert X(j\omega)\rvert=\lvert X(-j\omega)\rvert$，$\theta(\omega)=-\theta(-\omega)$
实偶信号对称性	$x(t)$为实偶信号	$X(j\omega)$为实偶函数
实奇信号对称性	$x(t)$为实奇信号	$X(j\omega)$为纯虚函数
实信号的奇偶分解	$x_e(t)=\varepsilon_v\{x(t)\}$ $x_o(t)=o_d\{x(t)\}$	$\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}$ $j\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}$
对偶性	$f(t)=x(j\omega)\big\rvert_{\omega=t}$	$2\pi X(-j\omega)$
帕塞瓦尔定理	$\int_{-\infty}^{\infty}\lvert x(t)\rvert^2 dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert X(j\omega)\rvert^2 d\omega$	
共轭	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$

3.4 典型非周期信号的傅里叶变换

典型非周期信号的傅里叶变换

信号	时间函数	波形图	频谱函数
冲激函数	$E\delta(t)$		E
冲激序列	$E\delta_T(t)=E\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nt_0)$		$E[\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)],\ (\omega_0=\frac{2\pi}{T_0})$
阶跃函数	$Eu(t)$		$E[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)]$
符号函数	$E\,\mathrm{sgn}(t)$		$E[\frac{2}{j\omega}]$
直流信号	E		$E[2\pi\delta(\omega)]$
矩形脉冲	$\begin{cases}E, & (\lvert t\rvert\le\frac{\tau}{2})\\ 0, & (\lvert t\rvert>\frac{\tau}{2})\end{cases}$		$E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})=\frac{2E}{\omega}\sin(\frac{\omega\tau}{2})$
三角脉冲	$\begin{cases}E(1-\frac{2\lvert t\rvert}{\tau}), & (\lvert t\rvert\le\frac{\tau}{2})\\ 0, & (\lvert t\rvert>\frac{\tau}{2})\end{cases}$		$\frac{E\tau}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})=\frac{8E}{\omega^2\tau}\sin^2(\frac{\omega\tau}{4})$
抽样脉冲	$Sa(\omega_c t)=\frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}$		$\begin{cases}\frac{\pi}{\omega_c}, & (\lvert\omega\rvert\le\omega_c)\\ 0, & (\lvert\omega\rvert>\omega_c)\end{cases}$ 简记： $\frac{\pi}{\omega_c}[u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c)]$
余弦半波脉冲	$\begin{cases}E\cos(\frac{\pi t}{\tau}), & (\lvert t\rvert\le\frac{\tau}{2})\\ 0, & (\lvert t\rvert>\frac{\tau}{2})\end{cases}$		$E[\frac{2\tau}{\pi}\bullet\frac{\cos(\frac{\omega\tau}{2})}{1-(\frac{\omega\tau}{\pi})^2}]$
复指数序列	$Ee^{j\omega_0 t}$		$E[2\pi\delta(\omega-\omega_0)]$

第三章 拉普拉斯变换

一、最常用的拉普拉斯变换

$$\left.\begin{array}{ll}\mathscr{L}[e^{j\omega t}u(t)]=\dfrac{1}{s-j\omega} & \mathscr{L}[u(t)\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}\\ \mathscr{L}[e^{-j\omega t}u(t)]=\dfrac{1}{s+j\omega} & \mathscr{L}[u(t)\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\end{array}\right\}\mathrm{Re}\{s\}>0$$

二、拉普拉斯变换的基本性质

1．线性 $a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}a_1F_1(s)+a_2F_2(s),\quad \mathrm{Re}[s]>\max(\delta_1,\delta_2)$

2. 延迟 $f(t-t_0)u(t-t_0)\xrightarrow{\mathscr{L}}e^{-st_0}F(s),\quad t_0>0,\mathrm{Re}[s]>\delta_0$

3. 对称性 $f(-t)\xrightarrow{\mathscr{L}}-F(-s),\quad \mathrm{Re}[s]>\delta_0$

4. 尺度变换 $f(at)\xrightarrow{\mathscr{L}}\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right),\quad a>0,\mathrm{Re}[s]>a\delta_0$

5. 频移 $f(t)e^{-s_0t}\xrightarrow{\mathscr{L}}F(s+s_0),\quad \mathrm{Re}[s]>\delta_0+\mathrm{Re}[s_0]$

6. 时域微分 $\dfrac{df(t)}{dt}\xrightarrow{\mathscr{L}}sF(s)-f(0_-),\quad$ 收敛域至少为$\mathrm{Re}[s]>\delta_0$

7. 时域积分 $\int_{0_-}^{t}f(\tau)d\tau\xrightarrow{\mathscr{L}}\dfrac{1}{s}F(s),\quad$ 收敛域至少为$\mathrm{Re}[s]>\delta_0$

8. 时域卷积 $f_1(t)*f_2(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}F_1(s)F_2(s),\quad$ 收敛域至少为$\mathrm{Re}[s]>\max(\delta_1,\delta_2)$

9. 复频域微分 $(-t)^nf(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}F^{(n)}(s),\quad \mathrm{Re}[s]>\delta_0$

$tf(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}-F'(s),\quad \mathrm{Re}[s]>\delta_0$

10. 复频域积分 $\dfrac{f(t)}{t}\xrightarrow{\mathscr{L}}\int_s^{\infty}F(\eta)d\eta,\quad \mathrm{Re}[s]>\delta_0$

11. 复频域卷积 $f_1(t)f_2(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}\dfrac{1}{2\pi}[F_1(s)*F_2(s)],\quad \mathrm{Re}[s]>\delta_1+\delta_2$

12. 初值定理 $f(0_+)=\lim\limits_{s\to\infty}sF(s),\quad F(s)$为真分式

13. 终值定理 $f(\infty)=\lim\limits_{s\to 0}sF(s),\quad s=0$在收敛域内

三、拉普拉斯变换的几个重要性质的证明

1. 延迟 $f(t-t_0)u(t-t_0)\xrightarrow{\mathscr{L}}e^{-st_0}F(s),\quad t_0>0,\mathrm{Re}[s]>\delta_0$

证明：$\mathscr{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)]=\int_0^{\infty} f(t-t_0)u(t-t_0)e^{-st}dt$

$$=\int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-st}dt \quad 令\tau=t-t_0,\ 则t=\tau+t_0$$

$$\mathscr{L}\ [f(t-t_0)u(t-t_0)]=\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}d\tau \quad (t\Big|_{t_0}^{\infty}\xrightarrow{变换到}\tau\Big|_0^{\infty})$$

$$=e^{-st_0}\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau=e^{-st_0}F(s)$$

表明：若波形延迟 t_0，则拉普拉斯变换乘以 e^{-st_0} 。

单位阶跃延迟：$\mathscr{L}[u(t-t_0)]=\dfrac{e^{-st_0}}{s},\quad t_0>0,\mathrm{Re}[s]>\delta_0$

2. 频移 $f(t)e^{-s_0t}\xrightarrow{\mathscr{L}}F(s+s_0),\quad \mathrm{Re}[s]>\delta_0+\mathrm{Re}[s_0]$

证明：$\mathscr{L}[f(t)e^{-s_0t}]=\int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+s_0)t}dt=F(s+s_0)$

表明：时间函数乘以 e^{-s_0t} 相当于变换式在频域内向左平移 s_0 。

3. 尺度变换 $f(at)\xrightarrow{\mathscr{L}}\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right),\quad a>0,\mathrm{Re}[s]>a\delta_0$

证明：$\mathscr{L}[f(at)]=\int_0^{\infty} f(at)e^{-st}dt \quad 令\tau=at则$

$$\mathscr{L}[f(at)]=\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\frac{\tau}{a}}d\left(\frac{\tau}{a}\right) \quad (t\Big|_0^{\infty}\xrightarrow{变换到}\tau\Big|_0^{\infty})$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-\left(\frac{s}{a}\right)\tau}d\tau=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

4. 时域微分 $\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}F'(s)-s^{n-2}F''(s)-\cdots\cdots-s^2F^{(n-3)}(s)-s^1F^{(n-2)}(s)+s^0F^{(n-1)}(s)$，

n 阶有 $n+1$ 项

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}y(t)-s^{n-2}y'(t)-\cdots\cdots-s^2y^{n-3}(t)+s^1y^{n-2}(t)+s^0y^{n-1}(t)\Big|_{t=0_-}$$

当 $f(0\_)\neq 0$ 时 $\mathscr{L}[\dfrac{df(t)}{dt}]=sF(s)-f(0\_),\qquad \mathscr{L}[\dfrac{d^2f(t)}{dt^2}]=s^2F(s)-sf(0\_)-f'(0\_)$

当 $f(t)$ 在 $t=0$ 处不连续，$\dfrac{df(t)}{dt}$ 在 $t=0$ 处有冲激 $\delta(t)$ 存在，按规定积分下限从 $t=0_-$ 开始，则 $f(0)$ 应写作 $f(0_-)$，即：$\mathscr{L}[\dfrac{df(t)}{dt}]=sF(s)-f(0_-)$ 收敛域至少为 $\mathrm{Re}[s]>\delta_0$

四、常见信号的双边拉普拉斯变换

1. $\mathscr{L}[\delta(t)]=1$ 全部 s

2. $\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}\quad \mathrm{Re}\{s\}>0$； $\mathscr{L}[tu(t)]=\dfrac{1}{s^2}\quad \mathrm{Re}\{s\}>0$； $\mathscr{L}[t^2u(t)]=\dfrac{2}{s^3}\quad \mathrm{Re}\{s\}>0$

3. $\mathscr{L}[-u(-t)]=\frac{1}{s}\quad \mathrm{Re}\{s\}<0$

4. $\mathscr{L}[e^{-at}u(t)]=\frac{1}{s+a}\quad \mathrm{Re}\{s\}>-a$

5. $\mathscr{L}[-e^{-at}u(t)]=\frac{1}{s+a}\quad \mathrm{Re}\{s\}<-a$

6. $\mathscr{L}[tu(t)]=\frac{1}{s^2}\quad \mathrm{Re}\{s\}>0$

7. $\mathscr{L}[-tu(t)]=\frac{1}{s^2}\quad \mathrm{Re}\{s\}<0$

8. $\mathscr{L}[te^{-at}u(t)]=\frac{1}{(s+a)^2}\quad \mathrm{Re}\{s\}>-a$

9. $\mathscr{L}[\cos(\omega t)u(t)]=\frac{s}{s^2+\omega^2}\quad \mathrm{Re}\{s\}>0$

10. $\mathscr{L}[\sin(\omega t)u(t)]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\quad \mathrm{Re}\{s\}>0$

11. $\mathscr{L}[e^{-at}\cos(\omega t)u(t)]=\frac{s}{(s+a)^2+\omega^2}\quad \mathrm{Re}\{s\}>-a$

12. $\mathscr{L}[e^{-at}\sin(\omega t)u(t)]=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\quad \mathrm{Re}\{s\}>-a$

13. $\mathscr{L}[t\cos(\omega t)u(t)]=\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\quad \mathrm{Re}\{s\}<0$

14. $\mathscr{L}[t\sin(\omega t)u(t)]=\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}\quad \mathrm{Re}\{s\}>0$

五、常见函数拉普拉斯变换的证明

1、$\mathscr{L}[u(t)]=\int_0^{\infty}e^{-st}dt=\frac{-e^{-st}}{s}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s}$

2、$\mathscr{L}[e^{-at}u(t)]=\int_0^{\infty}e^{-at}e^{-st}dt=\int_0^{\infty}e^{-(a+s)t}dt$

$$=\frac{-1}{s+a}e^{-(a+s)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s+a}\quad \mathrm{Re}\{s\}>-a$$

3、$\mathscr{L}[t^n u(t)]=\int_0^\infty t^n e^{-st}dt=\int_0^\infty\left(\frac{-t^n}{s}\right)de^{-st}=\frac{-t^n}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty+\frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt$

$=\frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt=\frac{n}{s}\mathscr{L}[t^{n-1}]$

则$\mathscr{L}[t^n u(t)]=\frac{n}{s}\mathscr{L}[t^{n-1}]$，　当$n=1$时，易得$\mathscr{L}[tu(t)]=\frac{1}{s^2}$

$\Rightarrow n=2$时，得$\mathscr{L}[t^2(t)]=\frac{1\times 2}{s^3}$　类推$\mathscr{L}[t^n u(t)]=\frac{n!}{s^{n+1}}$

4、$\mathscr{L}[\delta(t)]=\int_0^\infty \delta(t)e^{-st}dt=1$　若冲激出现在$t=t_0(t_0>0)$时刻

$\mathscr{L}[\delta(t-t_0)]=\int_0^\infty \delta(t-t_0)e^{-st}dt=e^{-st_0}$

5、$\mathscr{L}[u(t)\cos(\omega t)]=\int_0^\infty \frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})e^{-st}dt$　代入$\mathscr{L}[u(t)e^{j\omega t}]=\frac{1}{s-j\omega}$，$\mathscr{L}[u(t)e^{-j\omega t}]=\frac{1}{s+j\omega}$

则$\mathscr{L}[u(t)\sin(\omega t)]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right)=\frac{s}{s^2+\omega^2}$　同理可证$\mathscr{L}[u(t)\sin(\omega t)]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

6、$\mathscr{L}[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}u(t)]=\int_{0_-}^\infty e^{-st}\frac{d}{dt}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)dt=e^{-st}\frac{df(t)}{dt}\Big|_{0_-}^\infty+s\int_{0_-}^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt=-f'(0_-)+s[sF(s)-f(0_-)]$

$=s^2F(s)-sf(0_-)-f'(0_-)$

7　$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,则$\mathscr{L}[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau]=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$

$f^{(-1)}(0_-)$是积分式$\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$在$t=0_-$处的值，无跳变可改为$f^{(-1)}(0)$

证明：$\mathscr{L}[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau]=\underbrace{\mathscr{L}[\int_{-\infty}^{0_-} f(\tau)d\tau]}+\mathscr{L}[\int_{0_-}^t f(\tau)d\tau]=\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}+\int_{0_-}^\infty[\int_{0_-}^t f(\tau)d\tau]e^{-st}dt$

$=[-\frac{e^{-st}}{s}\int_{0_-}^t f(\tau)d\tau]\Big|_{0_-}^\infty+\frac{1}{s}\int_{0_-}^\infty f(t)e^{-st}dt=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$

8　$\mathscr{L}[(-t)^n f(t)]=F^n(s)\Rightarrow\mathscr{L}[t^n f(t)]=\frac{F^n(s)}{(-1)^n}=(-1)^nF^n(s)$

六、常见的单边拉普拉斯逆变换

6.1　$\mathscr{L}^{-1}[s]=\delta'(t)$

6.1　$\mathscr{L}^{-1}[1]=\delta(t)$

6.2　$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s}]=u(t)$

6.3　$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s+\partial}]=e^{-\partial t}$

6.4 $\mathscr{L}^{-1}[\frac{n!}{s^{n+1}}]=t^{n}$

6.5 $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^{n+1}}]=\frac{t^{n}}{n!}$

6.6 $\mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{s^{2}+\omega^{2}}]=\cos\omega t$

6.7 $\mathscr{L}^{-1}[\frac{\omega}{s^{2}+\omega^{2}}]=\sin\omega t$

6.8 $\mathscr{L}^{-1}[\frac{s+\partial}{(s+\partial)^{2}+\omega^{2}}]=e^{-\partial t}\cos\omega t$

6.9 $\mathscr{L}^{-1}[\frac{\omega}{(s+\partial)^{2}+\omega^{2}}]=e^{-\partial t}\sin\omega t$

6.10 $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(s+\partial)^{2}}]=te^{-\partial t}$

6.11 $\mathscr{L}^{-1}[\frac{s^{2}-\omega^{2}}{(s^{2}+\omega^{2})^{2}}]=t\cos\omega t;\qquad \mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{s^{2}-\omega^{2}}]=\cosh\omega t$

6.12 $\mathscr{L}^{-1}[\frac{2\omega s}{(s^{2}+\omega^{2})^{2}}]=t\sin\omega t;\qquad \mathscr{L}^{-1}[\frac{\omega}{s^{2}-\omega^{2}}]=\sinh\omega t$

第四章 激励与响应的关系

<table>
<tr><td colspan="2">连续时间函数</td></tr>
<tr><td>激励函数</td><td>响应形式</td></tr>
<tr><td>$e(t)=E(\text{常数})$</td><td>$r(t)=B(\text{常数})$</td></tr>
<tr><td>$e(t)=t^{p}$</td><td>$r(t)=B_1t^{p}+B_2t^{p-1}+B_3t^{p-2}+\cdots\cdots+B_pt+B_{p+1}$</td></tr>
<tr><td>$e(t)=\cos\omega t$</td><td rowspan="2">$r(t)=B_1\cos\omega t+B_2\sin\omega t$</td></tr>
<tr><td>$e(t)=\sin\omega t$</td></tr>
<tr><td>$e(t)=t^{p}e^{-\partial t}\cos\omega t$</td><td rowspan="2">$r(t)=(B_1t^{p}+B_2t^{p-1}+B_3t^{p-2}+\cdots\cdots$
$+B_pt+B_{p+1})e^{-\partial t}\cos\omega t+(D_1t^{p}+D_2t^{p-1}+D_3t^{p-2}+\cdots\cdots$
$+D_pt+D_{p+1})e^{-\partial t}\sin\omega t$</td></tr>
<tr><td>$e(t)=t^{p}e^{-\partial t}\sin\omega t$</td></tr>
<tr><td colspan="2">离散时间函数</td></tr>
<tr><td>激励函数</td><td>响应形式</td></tr>
<tr><td>$x(n)=E(\text{常数})$</td><td>$y(n)=A(\text{常数})$</td></tr>
<tr><td>$x(n)=n^{k}$</td><td>$y(n)=A_kn^{k}+A_{k-1}n^{k-1}+A_{k-2}n^{k-2}+\cdots\cdots+A_1n+A_0$</td></tr>
<tr><td>$x(n)=\cos\omega n$</td><td>$y(n)=\cos(\omega n+\theta)$</td></tr>
<tr><td>$x(n)=\sin\omega n$</td><td>$y(n)=\sin(\omega n+\theta)$</td></tr>
<tr><td>$x(n)=e^{-\partial n}$</td><td>$y(n)=Ae^{-\partial n}$</td></tr>
<tr><td>$x(n)=e^{-j\omega n}$</td><td>$y(n)=Ae^{-j\omega n}$</td></tr>
<tr><td>$x(n)=\lambda^{n}$</td><td>$\begin{cases} y(n)=A\lambda^{n} & \text{（无重根）} \\ y(n)=(nA_1+A_2)\lambda^{n} & \text{（}\lambda\text{与特征根重合）} \end{cases}$</td></tr>
</table>

第五章 Z变换

一、双边Z变换

$$\int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t-kT_s)\right\}e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k][\delta(t-kT_s)e^{-st}]dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathrm{z}^{-k} \qquad (\mathrm{z} = e^{-skT_s})$$

1.1 从拉普拉斯变换到Z变换

对连续时间信号进行均匀冲激抽样后就得到离散时间信号。

设有连续时间信号 $f(t)$，每间隔时间 T抽样一次，这相当于连续时间信号 $f(t)$ 乘以冲激序列$\delta_T(t)$。考虑冲激函数的抽样性质，取样信号 $f_s(t)$ 可写为：

$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$，取拉普拉斯变换，

由 $\mathscr{L}[\delta(t-kT)] = e^{-kTs}$，令 $\mathrm{z} = e^{sT}$，上式变为 z的函数：

$$F[\mathrm{z}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\,\mathrm{z}^{-k}$$

上式称为序列 $f(kt)$ 的双边 Z变换。

可见当令 $\mathrm{z} = e^{sT}$时，序列 $f(kt)$ 的双边 Z变换就等于抽样信号 $f_s(t)$ 的拉普拉斯变换，即：

$$F[\mathrm{z}]\Big|_{\mathrm{z}=e^{-st}} = F(s)$$

复变量 z与 s的关系是：$\mathrm{z} = e^{sT}$，　$s = \dfrac{1}{T}\ln \mathrm{z}$。

为了方便，序列仍用 $f(k)$ 表示，如果序列是由连续信号 $f(t)$ 经抽样得到的，那么

$$f(k) = f(kT) = f(t)\Big|_{t=kT}$$　　式中 T 为取样周期或称间隔。

1.2 Z变换

如有离散序列 $f(k)$, $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$，$Z$为复变量，则函数

$$F(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}$$

称为序列 $f(k)$ 的双边 Z变换。上式求和是在正、负 k域（或称序域）上进行的。如果求和只在 k的非负值域进行（无论 $k<0$时$f(k)$是否等于零），即

$$F[z]=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k} \qquad \text{式 6-1-1}$$

称为序列 $f(k)$ 的单边 Z变换。易见上式也即 $f(k)u(k)$ 的双边 Z变换，故 $f(k)$ 的单边 Z变换也可以写作 $F[z]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)u(k)z^{-k}$。根据以上定义，如果 $f(k)$ 是因果序列，则单双边 Z变换相等，否则不相等。在不致引起混淆的情况下，可统称 Z变换。

1.3 收敛域

按式 6-1-1 定义的 Z变换为 Z的幂级数，必然要求幂级数收敛，即：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f(k)z^{-k}\right|<\infty$$

这样序列 $f(k)$ 的 Z变换才有意义。上式称为绝对可和条件，它是序列 $f(k)$ 的 Z变换存在的充要条件。

二、Z变换的主要性质

Z变换的主要性质

信号	Z变换	收敛域
$x(n)$	$X(z)$	$R_{x_1}<\lvert z\rvert<R_{x_2}$
$h(n)$	$H(z)$	$R_{h_1}<\lvert z\rvert<R_{h_2}$
$ax(n)+bh(n)$	$aX(z)+bH(z)$	$\max(R_{x_1},R_{h_1})<\lvert z\rvert<\min(R_{x_2},R_{h_2})$
$\mathrm{Re}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}[X(z)+X^*(z^*)]$	$R_{x_1}<\lvert z\rvert<R_{x_2}$
$\mathrm{Im}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2j}[X(z)-X^*(z^*)]$	$R_{x_1}<\lvert z\rvert<R_{x_2}$

$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$R_{x_1} < \|z\| < R_{x_2}$
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$R_{x_1} < \|z^{-1}\| < R_{x_2}$
$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\|a\| R_{x_1} < \|z\| < \|a\| R_{x_2}$
$(-1)^n x(n)$	$X(-z)$	$R_{x_1} < \|z\| < R_{x_2}$
$nx(n)$	$-Z\dfrac{dX(z)}{dz}$	$R_{x_1} < \|z\| < R_{x_2}$
$x(n-m)$	$Z^{-m}X(z)$	$R_{x_1} < \|z\| < R_{x_2}$
$x(n+m)$	$Z^{m}X(z)$	$R_{x_1} < \|z\| < R_{x_2}$
$x(-n+m)$	$Z^{-m}X(z^{-1})$	$R_{x_1} < \|z\| < R_{x_2}$
$x(-n-m)$	$Z^{m}X(z^{-1})$	$R_{x_1} < \|z\| < R_{x_2}$
$x(n)*h(n)$	$X(z)H(z)$	$\max(R_{x_1}, R_{h_1}) < \|z\| < \min(R_{x_2}, R_{h_2})$
$x(n)h(n)$	$\dfrac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)H(\dfrac{Z}{v})\dfrac{dv}{v}$	$R_{x_1} \bullet R_{h_1} < \|z\| < R_{x_2} \bullet R_{h_2}$
$\sum_{k=0}^{n} x(k)$	$\dfrac{z}{z-1}X(z) = Z[x(n)u(n)]$	
$\dfrac{1}{n+a}x(n)$	$-z^a\int_0^z \dfrac{X(v)}{v^{a+1}}dv$	
$\dfrac{1}{n}x(n)$	$-\int_0^z X(v)v^{-1}dv$	

三、典型离散时间序列的单边 Z 变换

典型离散时间序列的单边 Z 变换

序列	单边 Z 变换	收敛域
$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$	1	$\|z\| \geq 0$
$u(n)$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
n	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\| > 1$

n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\|z\|>1$
a^n	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|$
na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$\frac{(n+1)(n+2)......(n+m)}{m!}a^n$, $m\geq 1$	$\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{n+1}}$	$\|z\|>\|a\|$
e^{an}	$\frac{z}{z-e^a}$	$\|z\|>\|e^a\|$
$e^{jn\omega_0}$	$\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}$	$\|z\|>1$
$\cos n\omega_0$	$\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\|z\|>1$
$\sin n\omega_0$	$\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\|z\|>1$
$\beta^n\cos n\omega_0$	$\frac{z(z-\beta\cos\omega_0)}{z^2-2\beta z\cos\omega_0+\beta^2}$	$\|z\|>\beta$
$\beta^n\sin n\omega_0$	$\frac{z\beta\sin\omega_0}{z^2-2\beta z\cos\omega_0+\beta^2}$	$\|z\|>\beta$

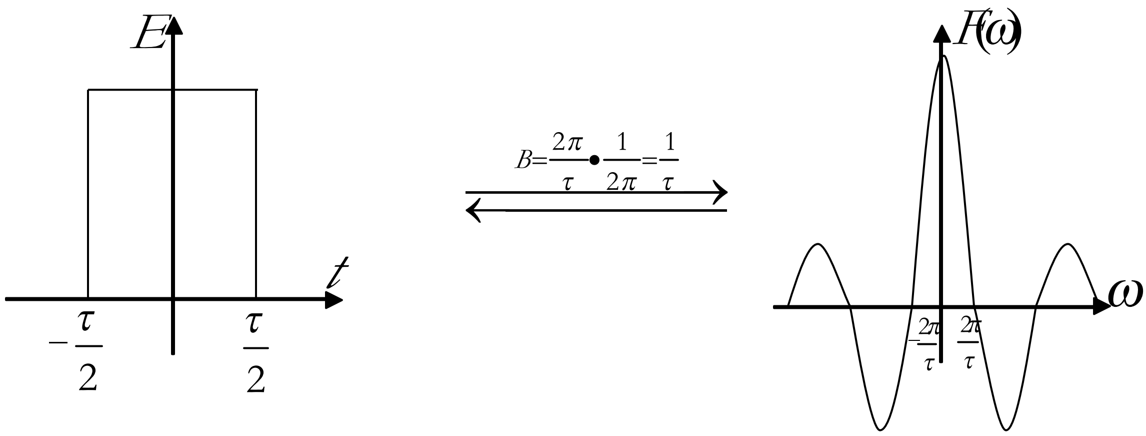
附录一 常用傅里叶变换的证明

1、 冲激串

$$E\delta_T(t)=E\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nt_0)$$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[E\delta_T(t)]&=2E\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_0)\\&=2E\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_0}\delta(\omega-n\omega_0)\\&=E[\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)]\end{aligned}$$

2、 矩形脉冲

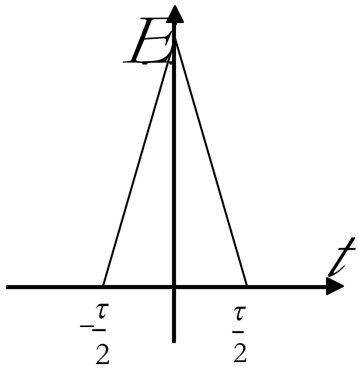


$$f(t)=\begin{cases}E, & (|t|\le\frac{\tau}{2})\\ 0, & (|t|>\frac{\tau}{2})\end{cases}\xrightarrow{\mathscr{F}}F(\omega)=E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

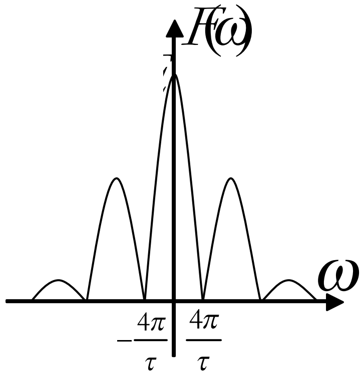
证明：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=E\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-j\omega t}dt$

$$\begin{aligned}&=E\bullet\frac{-1}{j\omega}(e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{j\omega\frac{\tau}{2}})=E\bullet\frac{1}{j\omega}2j\sin(\frac{\omega\tau}{2})\\&=\frac{2E}{\omega}\sin(\frac{\omega\tau}{2})=E\tau\frac{1}{\frac{\omega\tau}{2}}\sin(\frac{\omega\tau}{2})\\&=E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})\end{aligned}$$

3、 三角形脉冲



$$\underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{B=\frac{4\pi}{\tau}\bullet\frac{1}{2\pi}=\frac{2}{\tau}}}$$



$$f(t)=\begin{cases}E(1-\frac{2|t|}{\tau}), & (|t|\le\frac{\tau}{2})\\ 0, & (|t|>\frac{\tau}{2})\end{cases}\xrightarrow{\mathscr{F}}F(\omega)=\frac{E\tau}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

证明：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=E\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}(1-\frac{2|t|}{\tau})e^{-j\omega t}dt=E(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-j\omega t}dt+\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0}\frac{2t}{\tau}e^{-j\omega t}dt-\int_{0}^{\frac{\tau}{2}}\frac{2t}{\tau}e^{-j\omega t}dt)$

$$=E\left\{\frac{1}{j\omega}(e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{-j\omega\frac{\tau}{2}})+\frac{2}{\tau}[\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0}te^{-j\omega t}dt-\int_{0}^{\frac{\tau}{2}}te^{-j\omega t}dt]\right\}$$

$$=\frac{E}{j\omega}(e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{-j\omega\frac{\tau}{2}})+\frac{2E}{\tau}\left\{[\frac{1}{\omega^2}-(\frac{1}{\omega^2}+\frac{\tau}{2j\omega})e^{j\omega\frac{\tau}{2}}]-[(\frac{1}{\omega^2}-\frac{\tau}{2j\omega})e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-\frac{1}{\omega^2}]\right\}$$

$$=\frac{E}{j\omega}(e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{-j\omega\frac{\tau}{2}})+\frac{2E}{\tau}[\frac{2}{\omega^2}-(\frac{1}{\omega^2}+\frac{\tau}{2j\omega})e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-(\frac{1}{\omega^2}-\frac{\tau}{2j\omega})e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}]$$

$$=\frac{E}{j\omega}(e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{-j\omega\frac{\tau}{2}})+\frac{2E}{\tau\omega^2}-E(\frac{2}{\tau\omega^2}+\frac{1}{j\omega})e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-E(\frac{2}{\tau\omega^2}-\frac{1}{j\omega})e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$$

$$=E(\frac{4}{\tau\omega^2}-\frac{2}{\tau\omega^2}e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-\frac{2}{\tau\omega^2}e^{-j\omega\frac{\tau}{2}})$$

$$=-\frac{2E}{\tau\omega^2}(e^{j\omega\frac{\tau}{4}}-e^{-j\omega\frac{\tau}{4}})^2=-\frac{2E}{\tau\omega^2}(2j\sin\frac{\omega\tau}{4})^2$$

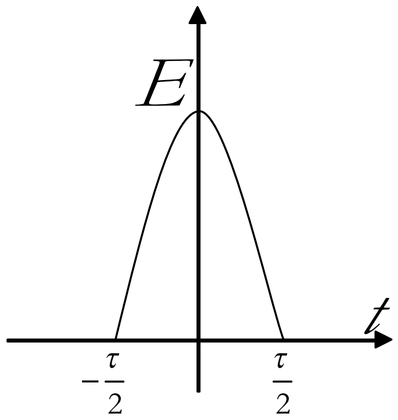
$$=\frac{8E}{\tau\omega^2}\sin^2(\frac{\omega\tau}{4})=\frac{E\tau}{2}\bullet\frac{16}{\tau^2\omega^2}\bullet\sin^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

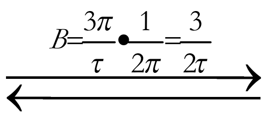
$$=\frac{E\tau}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

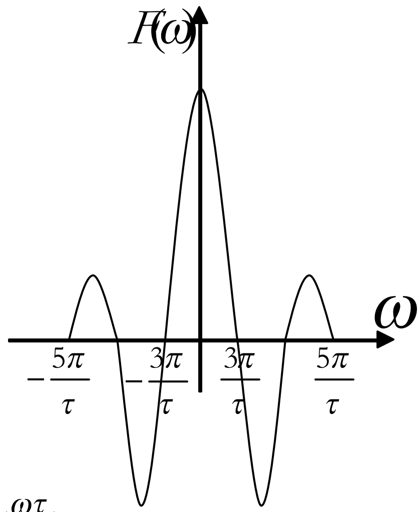
另证明：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=E\mathscr{F}\left\{\frac{2}{\tau}\bullet[g_{\frac{\tau}{2}}(t)*g_{\frac{\tau}{2}}(t)]\right\}=E\bullet\frac{2}{\tau}[\frac{\tau}{2}Sa(\frac{\omega\bullet\frac{\tau}{2}}{2})]^2$

$$=\frac{E\tau}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

4、 余弦半波脉冲







$$f(t)=\begin{cases} E\cos(\frac{\pi t}{\tau}), & (|t|\le\frac{\tau}{2}) \\ 0, & (|t|>\frac{\tau}{2}) \end{cases} \xrightarrow{\mathscr{F}} F(\omega)=\frac{2E\tau}{\pi}\bullet\frac{\cos(\frac{\omega\tau}{2})}{1-(\frac{\omega\tau}{\pi})^2}$$

证明：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=E\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\cos(\frac{\pi t}{\tau})e^{-j\omega t}dt=\frac{E}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}(e^{j\frac{\pi t}{\tau}}+e^{-j\frac{\pi t}{\tau}})e^{-j\omega t}dt$

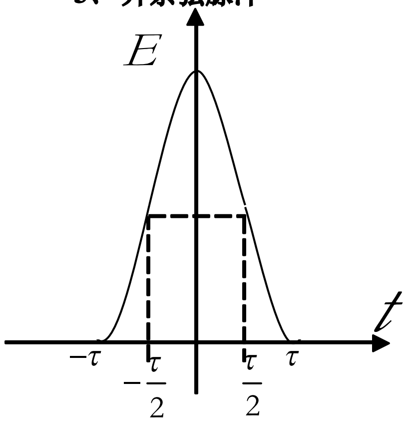
$$=\frac{E}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}(e^{jt(\frac{\pi}{\tau}-\omega)}+e^{-jt(\frac{\pi}{\tau}+\omega)})dt=\frac{E\tau}{2}[Sa(\frac{\pi}{\tau}-\omega)\bullet\frac{\tau}{2}+Sa(\frac{\pi}{\tau}+\omega)\bullet\frac{\tau}{2}]$$

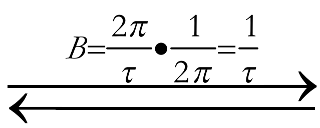
$$=\frac{E\tau}{2}[\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega\tau}{2})}{\frac{\pi-\omega\tau}{2}}+\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\omega\tau}{2})}{\frac{\pi+\omega\tau}{2}}]=E\tau\cos(\frac{\omega\tau}{2})\bullet(\frac{1}{\pi-\omega\tau}+\frac{1}{\pi+\omega\tau})$$

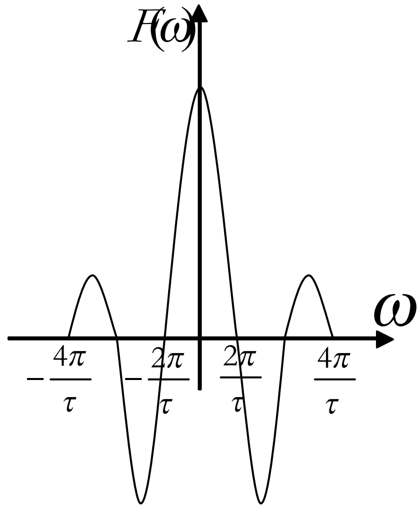
$$=E\tau\cos(\frac{\omega\tau}{2})\bullet(\frac{2\pi}{\pi^2-\omega^2\tau^2})=\frac{E\tau}{\pi}\bullet2\cos(\frac{\omega\tau}{2})\bullet(\frac{\pi^2}{\pi^2-\omega^2\tau^2})$$

$$=\frac{2E\tau}{\pi}\bullet\frac{\cos(\frac{\omega\tau}{2})}{1-(\frac{\omega\tau}{\pi})^2}$$

5、 升余弦脉冲







$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{E}{2}[1+\cos(\dfrac{\pi t}{\tau})], & (|t|\le\tau)\\ 0, & (|t|>\tau)\end{cases}\xrightarrow{\mathscr{F}}F(\omega)=E\tau\bullet\frac{Sa(\omega\tau)}{1-(\dfrac{\omega\tau}{\pi})^2}$$

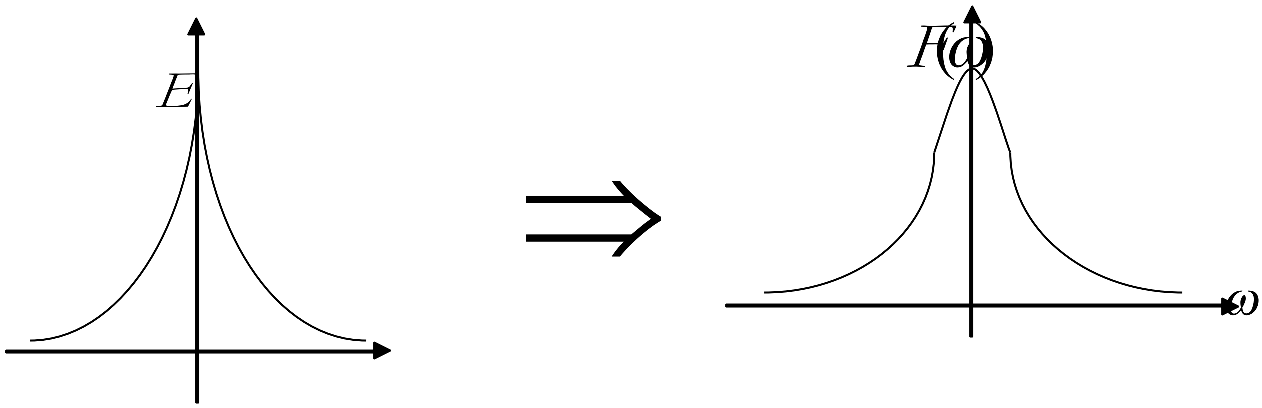
证明：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\dfrac{E}{2}\int_{-\tau}^{\tau}(1+\cos\dfrac{\pi t}{\tau})e^{-j\omega t}dt=\dfrac{E}{2}\int_{-\tau}^{\tau}e^{-j\omega t}dt+\dfrac{E}{2}\int_{-\tau}^{\tau}\cos(\dfrac{\pi t}{\tau})e^{-j\omega t}dt$

$$=E\tau Sa\omega\tau+\frac{E}{4}\int_{-\tau}^{\tau}(e^{j\frac{\pi t}{\tau}}+e^{-j\frac{\pi t}{\tau}})e^{-j\omega t}dt=E\tau Sa\omega\tau+\frac{E\tau}{2}[Sa(\frac{\pi}{\tau}-\omega)\tau+Sa(\frac{\pi}{\tau}+\omega)\tau]$$

$$=E\tau[Sa\omega\tau+\frac{1}{2}Sa(\pi-\omega\tau)+\frac{1}{2}Sa(\pi+\omega\tau)]=E\tau\sin\omega\tau[\frac{1}{\omega\tau}+\frac{1}{2(\pi-\omega\tau)}+\frac{1}{2(\pi+\omega\tau)}]$$

$$=E\tau\frac{\pi^2\sin\omega\tau}{\omega\tau(\pi^2-\omega^2\tau^2)}=E\tau\frac{Sa(\omega\tau)}{1-(\dfrac{\omega\tau}{\pi})^2}$$

6、 双边指数



$$f(t)=e^{-a|t|}(-\infty<t<\infty)\xrightarrow{\mathscr{F}}F(\omega)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

证明：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{(a-j\omega)t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-(a+j\omega)t}dt$

$$=\frac{1}{a-j\omega}-\frac{-1}{a+j\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

7、 若$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，则$\mathscr{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$

证明：$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega\Rightarrow f(-t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$

将变量t与ω互换，可得:

$2\pi f(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{j\omega t}dt$，即:$\mathscr{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$

8、若$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，则$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$　　a为非零常数

证明：$\mathscr{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(at)e^{-j\omega t}dt$　令$x=at$

当$a>0$时，$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-j\omega\frac{x}{a}}dx=\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$

当$a<0$时，$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty}f(x)e^{-j\omega\frac{x}{a}}dx=\frac{-1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-j\omega\frac{x}{a}}dx=\frac{-1}{a}F(\frac{\omega}{a})$

综上所得：$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$

特别地$a=-1$,则$\mathscr{F}[f(-t)]=F(-\omega)$

9、若$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，则$\mathscr{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}]=F(\omega-\omega_0)$　　频谱搬移技术

证明：$\mathscr{F}[f(t)e^{-j\omega_0 t}]=\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)e^{-j\omega_0 t}]e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j(\omega_0+\omega)t}dt=F(\omega_0+\omega)$

所以$\mathscr{F}[f(t)e^{-j\omega_0 t}]=F(\omega+\omega_0)$

同理$\mathscr{F}[f(t)e^{+j\omega_0 t}]=F(\omega-\omega_0)$

10、若$\mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$，$\mathscr{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$　则$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\bullet F_2(\omega)$

证明:$\Rightarrow$由$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

故$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau]e^{-j\omega t}dt$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)[\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t-\tau)e^{-j\omega t}dt]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)F_2(\omega)e^{-j\omega\tau}d\tau=F_2(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=F_1(\omega)\bullet F_2(\omega)$$

11、若$\mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$，$\mathscr{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$　则$\mathscr{F}[f_1(t)\bullet f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}\left[F_1(\omega)*F_2(\omega)\right]$

证明:$\Leftarrow F_1(\omega)*F_2(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)F_2(\omega-u)du$

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\left[F_1(\omega)*F_2(\omega)\right]\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}F_1(u)F_2(\omega-u)du]e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)e^{jut}du\bullet\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_2(\omega-u)e^{j(\omega-u)t}d(\omega-u)$$

$$=f_1(t)\bullet f_2(t)$$

即　$\mathscr{F}[f_1(t)\bullet f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}\left[F_1(\omega)*F_2(\omega)\right]$

12、预备知识：
$$\begin{cases} S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j2\pi ft}dt \\ s(t)=\int_{-\infty}^{\infty}S(f)e^{j2\pi ft}df \end{cases} \qquad \begin{cases} S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt \\ s(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{j\omega t}d\omega \end{cases}$$

若$\mathscr{F}[g_1(t)]=G_1(f)$，$\mathscr{F}[g_2(t)]=G_2(f)$ 则$\mathscr{F}[g_1(t)\bullet g_2(t)]=G_1(f)*G_2(f)$

$$\text{证明:}\Leftarrow \mathscr{F}^{-1}\{G_1(f)*G_2(f)\}=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}G_1(u)G_2(f-u)du]e^{j2\pi ft}df$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}G_1(u)e^{j2\pi ut}du\bullet\int_{-\infty}^{\infty}G_2(f-u)e^{j2\pi(f-u)t}d(f-u)$$
$$=g_1(t)\bullet g_2(t)$$

即 $\mathscr{F}[g_1(t)\bullet g_2(t)]=G_1(f)*G_2(f)$

13、$\delta(\omega)=\delta(2\pi f)=\dfrac{1}{2\pi}\delta(f)$

首先证明$\delta(kt)=$？ 由$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(kt)dt=\dfrac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(kt)d(kt)=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\delta(t)}{k}dt$

即$\delta(kt)=\dfrac{\delta(t)}{k}=\dfrac{1}{k}\delta(t)$

易证明：$\delta(\omega)=\delta(2\pi f)=\dfrac{1}{2\pi}\delta(f)$

14、$\int_{-\infty}^{\infty}h(\partial)e^{-j\omega\partial}d\partial=H(\omega)$ $\int_{-\infty}^{\infty}h(\partial)e^{j\omega\partial}d\partial=H^{*}(\omega)$ $\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)d\tau=H(0)$

$\int_{-\infty}^{\infty}h(\partial)e^{-j2\pi f\partial}d\partial=H(f)$ $\int_{-\infty}^{\infty}h(\partial)e^{j2\pi f\partial}d\partial=H^{*}(f)$

15、$P=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}s^2(t)dt \xleftrightarrow{\text{有周期}T_0} \dfrac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}s^2(t)dt$ $\qquad c_n=\dfrac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}s(t)e^{-j2\pi nf_0t}dt=\dfrac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}s(t)e^{-jn\omega_0t}dt$

周期函数的帕塞瓦尔定理 $P=\dfrac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}s^2(t)dt=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$

用连续谱表示此离散谱 $P=\int_{-\infty}^{\infty}|c(f)|^2\delta(f-nf_0)df$

被积因子即功率谱密度 $P(f)=|c(f)|^2\delta(f-nf_0)$

附录二 部分分式展开法

如果 $F(s)$ 是 s 的实系数有理真分式： $F(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}=\dfrac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+......+b_1s^1+b_0}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+......+a_1s^1+a_0}$， $m\le n$

式中 $A(s)$ 称为系统的特征多项式，方程 $A(s)$=0 称特征方程，它的根称为特征根，也称系统的固有频率或自然频率。

为将 $F(s)$ 展开为部分分式，要求出特征方程的 n 个特征根 s_i $(i=1,2,3.......n)$，s_i 亦称极点。特征根可能是实根（含零根）或复根（含虚根）；可能是单根，也可能是重根，根据特征根的数目和性质分为三种情况讨论。

一、**特征根为普通单根（ $F(s)$ 有单极点）**

如果方程 $A(s)$=0 的根都是单根，其 n 个特征根 s_i $(i=1,2,3.......n)$ 都互不相等，那么据代数理论，$F(s)$ 可以展开为如下部分分式：

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+\cdots\cdots+\frac{K_i}{s-s_i}+\cdots\cdots+\frac{K_n}{s-s_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{s-s_i}$$

待定系数可以用如下方法求得：

$$(s-s_i)F(s)=\frac{(s-s_i)B(s)}{A(s)}=\frac{(s-s_i)K_1}{s-s_1}+\frac{(s-s_i)K_2}{s-s_2}+\cdots\cdots+K_i++\frac{(s-s_i)K_n}{s-s_n}$$

当 $s\to s_i$ 时，由于各根均不相等，故右端除 K_i 一项外均趋于零，于是得：

$$K_i=(s-s_i)F(s)\Big|_{s=s_i}=\lim_{s\to s_i}[(s-s_i)\frac{B(s)}{A(s)}]$$

系数 K_i 还可以用另一方法确定。由于 s_i 是 $A(s)$=0 的根，故 $A(s_i)$=0 ,上式改写为：

$$K_i=\lim_{s\to s_i}[\frac{B(s)}{\frac{A(s)-A(s_i)}{s-s_i}}]=\frac{B(s_i)}{A'(s_i)}$$ 由 $\mathscr{L}[\frac{1}{s-s_i}]=e^{s_it}$,利用线性性质，得原函数

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{i=1}^{n}K_ie^{s_it}u(t)$$

二、**特征根为共轭单根（ $F(s)$ 有共轭单极点）**

如果方程 $A(s)$=0 有复数根，那么据代数理论它们必定共轭成对， 否则 $A(s)$ 的系数中必有一部分为复数或虚数，而不可能全为实数。 $A(s)$=0 有共轭复根计算较复杂，下面导出实用关系式。

设 $A(s)$=0 的一对共轭单根 $s_{1\ 2}$=$-\partial\pm j\beta$，将 $F(s)$ 的展开式分为两个部分：

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{B(s)}{(s+\partial-j\beta)(s+\partial+j\beta)A_2(s)}=\frac{K_1}{s+\partial-j\beta}+\frac{K_2}{s+\partial+j\beta}+\frac{B_2(s)}{A_2(s)}=F_1(s)+F_2(s)$$

式中 $F_1(s)$=$\frac{K_1}{s+\partial-j\beta}+\frac{K_2}{s+\partial+j\beta}$ $F_2(s)=\frac{B_2(s)}{A_2(s)}$。$F_2(s)$ 的展开式由 $A_2(s)=0$ 的根 s_3，$s_4\cdots\cdots s_n$ 的具体情况确定。

应用 $K_i=\dfrac{B(s_i)}{A'(s_i)}$ 可求得 $K_1=\dfrac{B(s_1)}{A'(s_1)}=\dfrac{B(-\partial+j\beta)}{A'(-\partial+j\beta)}$,

$$K_2=\frac{B(s_1)}{A'(s_1)}=\frac{B(-\partial-j\beta)}{A'(-\partial-j\beta)}=\frac{B(s_1^*)}{A'(s_1^*)}$$

由于 $B(s)$ 和 $A'(s)$ 都是 s 的实系数多项式，故 $B(s_1^*)$=$B^*(s_1)$，$A'(s_1^*)=A^{*\prime}(s_1)$，因而上述系数 K_1 和 K_2 互为共轭复数，即 K_2=K_1^*，令：

$$\left.\begin{aligned}K_1&=\frac{B(s_1)}{A'(s_1)}=|K_1|e^{j\theta}\\K_2&=\frac{B(s_2)}{A'(s_2)}=|K_1|e^{-j\theta}\end{aligned}\right\}\text{式中}\, s_1=-\partial+j\beta, s_2=s_1^* \;\Rightarrow F_1(s)=\frac{|K_1|e^{j\theta}}{s+\partial-j\beta}+\frac{|K_1|e^{-j\theta}}{s+\partial+j\beta}$$

取拉普拉斯逆变换，得

$$\begin{aligned}f_1(t)&=[|K_1|e^{j\theta}\bullet e^{(-\partial+j\beta)t}+|K_1|e^{-j\theta}e^{(-\partial-j\beta)t}]u(t)\\&=|K_1|e^{-\partial t}[e^{j(\beta t+\theta)}+e^{-j(\beta t+\theta)}]u(t)\qquad(\quad\theta\neq\arctan\frac{\beta}{\partial})\\&=2|K_1|e^{-\partial t}\cos(\beta t+\theta)u(t)\end{aligned}$$

这样只需要求得一个系数 $|K_1|$ 就可以按式写出结果。

三、**特征根为重根（$F(s)$ 有重极点）**

如果方程 $A(s)$=0 在 s=s_1 处有 r 重根，即 s_1=s_2=s_3= …… =s_r,而其余的 $(n-r)$ 个根都不等于 s_1，

则 $$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K_{11}}{(s-s_1)^r}+\frac{K_{12}}{(s-s_1)^{r-1}}+\cdots\cdots+\frac{K_{1(r-1)}}{(s-s_1)^2}+\frac{K_{1r}}{s-s_1}+\frac{B_2(s)}{A_2(s)}$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\frac{K_{1i}}{(s-s_1)^{r-i+1}}+\frac{B_2(s)}{A_2(s)}$$

$=F_1(s)+F_2(s)$ 式中 $F_2(s)=\dfrac{B_2(s)}{A_2(s)}$ 是除重根以外的项，当 s=s_1 时，$A_2(s_1)\neq 0$。各系数 $K_{1i}(i=1,2,3......r)$ 可这样求得：

$$(s-s_1)^rF(s)=K_{11}+(s-s_1)K_{12}+\cdots\cdots+(s-s_1)^{i-1}K_{1i}+\cdots\cdots+(s-s_1)^{r-1}K_{1r}+(s-s_1)^r\frac{B_2(s)}{A_2(s)}$$

令 s=s_1，得

$$K_{11}=(s-s_1)^rF(s)\Big|_{s=s_1}$$

$$\frac{d}{ds}[(s-s_1)^rF(s)]=K_{12}+\cdots\cdots+(i-1)(s-s_1)^{i-2}K_{1i}+\cdots\cdots+(r-1)(s-s_1)^{r-2}K_{1r}+\frac{d}{ds}[(s-s_1)^r\frac{B_2(s)}{A_2(s)}]$$

令 $s=s_1$，得

$$K_{12}=\frac{d}{ds}[(s-s_1)^r F(s)]\Big|_{s=s_1}$$

以此类推，可得：

$$K_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}}[(s-s_1)^r F(s)]\Big|_{s=s_1}$$ 由式 $\mathscr{L}[t^n u(n)]=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$,利用复频移特性，得到

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(s-s_1)^{n+1}}]=\frac{1}{n!}t^n e^{s_1 t}u(t)$$ 于是重根部分象函数 $F_1(s)$ 的原函数是：

$$f_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[\sum_{i=1}^{r}\frac{K_{1i}}{(s-s_1)^{r-i+1}}]=[\sum_{i=1}^{r}\frac{K_{1i}}{(r-i)!}t^{r-i}]e^{s_1 t}u(t)$$

附录三 逆 Z 变换的求法

求逆 Z 变换的方法有：幂级数展开法、部分分式展开法和留数法（反演积分法）。

一般而言，双边序列 $f(k)$ 可以分为因果序列 $f_1(k)$ 和反因果序列 $f_2(k)$ 两个部分，即：

$$f(k)=f_1(k)+f_2(k)=f(k)u(-k-1)+f(k)u(k)$$

相应地，其 Z 变换也分为两部分：

$$F(\mathrm{z})=F_1(\mathrm{z})+F_2(\mathrm{z}),\qquad \partial<|\mathrm{z}|<\beta \quad 其中\begin{cases}F_1(\mathrm{z})=Z[f(k)u(k)]=\sum\limits_{k=0}^{\infty}f(k)\,\mathrm{z}^{-k}, & |\mathrm{z}|>\partial\\ F_2(\mathrm{z})=Z[f(k)u(-k-1)]=\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}f(k)\,\mathrm{z}^{-k}, & |\mathrm{z}|<\beta\end{cases}$$

当已知象函数 $F(\mathrm{z})$ 时，根据给定的收敛域由 $F(\mathrm{z})$ 不难求得 $F_1(\mathrm{z})$ 和 $F_2(\mathrm{z})$，并分别求得它们所对应的原序列 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$，然后按照线性性质，将二者相加就得到 $F(\mathrm{z})$ 所对应的原序列 $f(k)$。此处讨论的逆 Z 变换均为单边逆 Z 变换。

一、幂级数展开法

预备知识：

① $$\frac{1}{1-\mathrm{z}}=1+\mathrm{z}+\mathrm{z}^2+\cdots\cdots+\mathrm{z}^n+\cdots\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{z}^n \qquad |\mathrm{z}|<1$$

② $$e^{\mathrm{z}}=1+\frac{\mathrm{z}}{1!}+\frac{\mathrm{z}^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{\mathrm{z}^n}{n!}+\cdots\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{z}^n}{n!} \qquad |\mathrm{z}|\in C$$

③ $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\qquad |z|\in C$

④ $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad |z|\in C$

⑤ $\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}+\cdots\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}\qquad |z|<1$

⑥ $(1+z)^{\partial}=1+C_{\partial}^{1}z+C_{\partial}^{2}z^2+\cdots\cdots+C_{\partial}^{n}z^n+\cdots\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}C_{\partial}^{n}z^n\qquad |z|<1,\quad C_{\partial}^{n}=\frac{1}{n!}\partial(\partial-1)(\partial-2)\cdots\cdots$

$(\partial-n+1)$

根据 Z 变换的定义，因果序列 $f_1(k)$ 和反因果序列 $f_2(k)$ 的象函数是 z^{-1} 和 z 的幂级数。因此，根据给定的收敛域可以将 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 展开为幂级数，它们的系数即相应序列的值，这种方法不适合写闭合式。

$f(k)$ 为因果序列时，用长除法将 $F(z)$（其分子、分母均按 z 的降幂排列）展开为 z^{-1} 的幂级数。

$f(k)$ 为反因果序列，则长除法将 $F(z)$（其分子、分母均按 z 的升幂排列）展开为 z 的幂级数。

二、部分分式展开法

在离散系统分析中，常见的象函数是含 z 的有理分式，可表示为：

$F(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots\ldots b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots\ldots a_1 z+a_0}$，（$m<n$,根据代数学，只有真分式才能展开为部分分式）

当 $m=n$ 时，不能将 $F(z)$ 直接展开，通常可以先将 $\frac{F(z)}{z}$ 展开再乘以 z；或先从 $F(z)$ 中分出常数项，再将剩下的真分式展开成部分分式。如果象函数有以上的形式，则：

$\frac{F(z)}{z}=\frac{B(z)}{zA(z)}=\frac{B(z)}{z(z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots\ldots+a_1 z+a_0)}$　式中 $B(z)$ 的最高次幂 $m<n+1$。

$F(z)$ 的分母多项式为 $A(z)$，特征方程 $A(z)=0$ 有 n 个根 $z_1,z_2,z_3\cdots\cdots z_n$,它们称为 $F(z)$ 的极点。据 $F(z)$ 的极点的类型，$\frac{F(z)}{z}$ 的展开式有以下三种情况。

2.1　$F(z)$ 有普通单极点

如果 $F(z)$ 的极点 $z_1,z_2,z_3\cdots\cdots z_n$ 互不相同，且不等于 0，则 $\frac{F(z)}{z}$ 可展开为：

$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_0}{z}+\frac{K_1}{z-z_1}+\cdots\cdots+\frac{K_n}{z-z_n}=\sum_{i=0}^{n}\frac{K_i}{z-z_i}$　式中 $z_0=0$，各系数

$K_i=(z-z_i)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=z_i}=\frac{(z-z_i)}{z}F(z)\Big|_{z=z_i}$　将求得的各系数 K_i 代入上式后，等号两端同乘以 z，得

$F(z)=K_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i z}{z-z_i}$　根据给定的收敛域，将上式划为 $F_1(z)(|z|>\partial)$ 和 $F_2(z)(|z|<\beta)$ 两部分，据已知的变换对：

$$\begin{cases}\delta(k)\xrightarrow{Z}1\\ a^k u(k)\xrightarrow{Z}\frac{z}{z-a},|z|>a\\ -a^k u(-k-1)\xrightarrow{Z}\frac{z}{z-a},|z|<a\end{cases}$$　易求得原函数。

2.2　$F(z)$ 有共轭单极点

如果 $F(z)$ 有一对共轭单极点 $z_{1\ 2}=c\pm jd$,则可将 $\frac{F(z)}{z}$ 展开为

$\frac{F(z)}{z}=\frac{F_a(z)+F_b(z)}{z}=\frac{K_1}{z-z_1}+\frac{K_2}{z-z_2}+\frac{F_b(z)}{z}$　式中 $\frac{F_b(z)}{z}$ 是出去共轭单极点所形成分式外的其余部分，而 $\frac{F_a(z)}{z}=\frac{K_1}{z-c-jd}+\frac{K_2}{z-c+jd}$　可以证明若 $A(z)$ 是实系数多项式，则 $K_2=K_1^*$。

将 $F(z)$ 的极点 z_1 和 z_2 写成指数形式，即 $z_{1,2}=c\pm jd=\partial^{e\pm j\beta}$

式中 $\partial=\sqrt{c^2+d^2}$，　$\beta=\arctan(\frac{d}{c})$

令 $K_1=|K_1|e^{j\theta}$则$K_2=|K_2|e^{-j\theta}$　式$\frac{F_a(z)}{z}$可改写为：$\frac{F_a(z)}{z}=\frac{|K_1|e^{j\theta}}{z-\partial e^{j\beta}}+\frac{|K_2|e^{-j\theta}}{z-\partial e^{j\beta}}$

取上式逆 Z 变换，得：

$$\begin{cases}\text{若}|z|>\partial\text{，则}f_a(k)=2|K_1|a^k\cos(\beta k+\theta)\bullet u(k)\\ \text{若}|z|<\partial\text{，则}f_a(k)=-2|K_1|a^k\cos(\beta k+\theta)\bullet u(-k-1)\end{cases}$$

2.3　$F(z)$ 有重极点

如果方程 $F(z)$ 在 $z=z_1=a$ 处有 r 重极点，则 $\frac{F(z)}{z}$ 可以展开为：

$\frac{F(z)}{z}=\frac{F_a(z)+F_b(z)}{z}=\frac{K_{11}}{(z-a)^r}+\frac{K_{12}}{(z-a)^{r-1}}+\cdots\cdots+\frac{K_{1r}}{z-a}+\frac{F_b(z)}{z}$　式中 $\frac{F_b(z)}{z}$ 是除重极点

$z=a$ 以外的项，在 $z=a$ 处 $F_b(z)\neq\infty$。各系数 K_{1i} 可用下式求得：

$$K_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}[(z-a)^r\frac{F(z)}{z}]\Big|_{z=a}$$

得到的系数 K_{1i} 代入 $\frac{F(z)}{z}$ 后，两端同乘以 z 得

$$F(z)=\frac{K_{11}z}{(z-a)^r}+\frac{K_{12}z}{(z-a)^{r-1}}+\cdots\cdots+\frac{K_{1r}z}{z-a}+F_b(z)$$ 根据给定的收敛域，易得其逆 Z 变换。

2.4 $F(z)$ 有共轭二重极点

如果 $F(z)$ 有共轭二重极点 $z_{1,2}=c\pm j\beta=\partial e^{\pm j\beta}$ 利用式 $K_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}[(z-a)^r\frac{F(z)}{z}]|_{z=a}$ 求得系数 K_{11} 和 K_{12} 后，可以根据给定的收敛域按下式求得其逆变换：

当 $|z|>a$,则 $Z^{-1}[\frac{z|K_{11}|e^{j\theta_{11}}}{(z-z_1)^2}+\frac{z|K_{11}|e^{-j\theta_{11}}}{(z-z_2)^2}]=2|K_{11}|ka^{k-1}\cos[(k-1)\beta+\theta_{11}]u(k)$

$$Z^{-1}[\frac{z|K_{12}|e^{j\theta_{12}}}{z-z_1}+\frac{z|K_{12}|e^{-j\theta_{12}}}{z-z_2}]=2|K_{12}|a^k\cos[(k\beta+\theta_{12}]u(k)$$

当 $|z|<a$,则 $Z^{-1}[\frac{z|K_{11}|e^{j\theta_{11}}}{(z-z_1)^2}+\frac{z|K_{11}|e^{-j\theta_{11}}}{(z-z_2)^2}]=-2|K_{11}|ka^{k-1}\cos[(k-1)\beta+\theta_{11}]u(-k-1)$

$$Z^{-1}[\frac{z|K_{12}|e^{j\theta_{12}}}{z-z_1}+\frac{z|K_{12}|e^{-j\theta_{12}}}{z-z_2}]=-2|K_{12}|a^k\cos[(k\beta+\theta_{12}]u(-k-1)$$

三、留数法（反演积分法）

复变函数中的柯西积分公式为：

$$\oint_c z^m dz=\begin{cases}2\pi j, & m=-1\\ 0, & m\neq -1\end{cases}$$

其中积分路径 c 是绕原点逆时针方向的围线。双边序列 $F(z)$ 的双边 Z 变换为： $F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}$ 将此式两端同乘以 z^{n-1}，并对它在收敛域内进行围线积分：

$$\oint_c F(z)z^{n-1}dz=\oint_c\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k+n-1}dz=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)\oint_c z^{-k+n-1}dz$$

据此可知，仅当 $-k+n-1=-1$，即 $n=k$ 时，上式等号右端的积分是 $2\pi j$，其他 $n\neq k$ 时积分为零。于是得

$\oint_c F(z)z^{n-1}dz=2\pi jf(n)$ 式中 n 代换为 k 即得 $F(z)$ 的逆 Z 变换式：

$$f(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c F(z)z^{k-1}dz \quad \partial<|z|<\beta$$

式中 c 为 $F(z)$ 的收敛域内绕原点逆时针方向的闭合路径。上式称为 $F(z)$ 逆变换或反演积分。

为方便，将象函数 $F(z)$ 分为 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 两个部分： $F(z)=F_1(z)+F_2(z)$ $\quad \partial<|z|<\beta$

其中 $F_1(z)$ 的收敛域为 $|z|>\partial$，它对应于因果序列 $f_1(k)$； $F_2(z)$ 的收敛域为 $|z|<\beta$，它对应于反因果序列 $f_2(k)$。

对于 $F_1(z)$ 而言，它的极点均在收敛圆 $|z|=\partial$ 内部，根据留数定理：

$$f_1(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c F_1(z)z^{k-1}dz=\begin{cases}0, & k<0\\ \sum\limits_{c\text{内极点}} \mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}], & k\geq 0\end{cases}$$

对于 $F_2(z)$ 而言，它的极点均在收敛圆 $|z|=\beta$ 外部，把 $|z|=\beta$ 看作其外部区域的边界，根据留数定理该围线积分的值等于 c 包围的极点的留数之和，但是对于 c 的外部区域来说，积分路径的方向相反，故：

$$f_2(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c F_2(z)z^{k-1}dz=\begin{cases}-\sum\limits_{c\text{内极点}} \mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}], & k<0\\ 0, & k\geq 0\end{cases}$$

归纳以上结果，得

$$f(k)=\begin{cases}-\sum\limits_{c\text{内极点}} \mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}], & k<0\\ \sum\limits_{c\text{内极点}} \mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}], & k\geq 0\end{cases}$$

如果 $F(z)z^{k-1}$ 在 $z=z_i$ 处有一阶极点，则该极点的留数

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{z=z_i}[F(z)z^{k-1}]=(z-z_i)F(z)z^{k-1}\Big|_{z=z_i}$$

如果 $F(z)z^{k-1}$ 在 $z=z_i$ 处有 r 阶极点，则该极点的留数

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{z=z_i}[F(z)z^{k-1}]=\frac{1}{(r-1)!}\bullet\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}[(z-z_i)^r F(z)z^{k-1}]\Big|_{z=z_i}$$

说明：鉴于信号与系统课程公式多，难证明，本人于 2011 年 7 月特写作了本手册并完成了校对，其中错误在所难免，希望各位 读者指出，并在作者博客：
“风静雪冷” http://blog.sina.com.cn/19891204f 留言
更多问题可与作者邮箱： fengou601323135@vip.qq.com 联系。