层次分析法

层次分析法AHP（Analytic Hierarchy Process）是美国运筹学家Saaty教授于二十世纪80年代提出的一种实用的多方案或多目标的决策方法。其主要特征是，它合理地将定性与定量的决策结合起来，按照思维和心理的规律把决策过程层次化、数量化。

层次分析法与熵权法的区别

层次分析法是一种主观赋权方法，其计算得到的权重是评价者的主观意识的反映

层次分析法

Example

假期某人想要出去旅游，现有三个目的地（方案）：风光绮丽的杭州（P1）、迷人的北戴河（P2）和山水甲天下的桂林（P3）。那么旅游目的地该如何选择?

假如选择的标准和依据（行动方案准则）有5个：景色、费用、饮食、居住和旅途。则常规思维的方式如下：

- 确定这些准则在心目中各占比重多大
- 就每一准则将三个地点进行对比
- 综合这两个层次的比较判断，做出选择

1. 建立层次结构

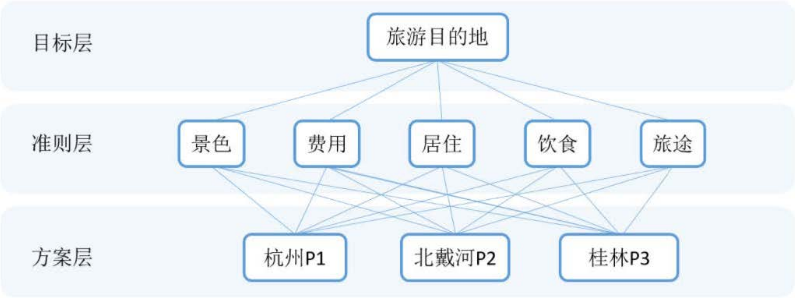


Figure 1: 层次结构

2. 构造判断矩阵

通过相互比较确定各准则对于目标的权重，构造判断矩阵。在层次分析法中，为使矩阵中的各要素的重要性能够进行定量显示，引进了**矩阵判断标度（1 ~9标度法）**。

后者=前者 ⇒ 1
前者=后者 ⇒ 1

标度	含义
1	两个元素相比，具有同样的重要性
3	两个元素相比，前者比后者稍重要
5	两个元素相比，前者比后者明显重要
7	两个元素相比，前者比后者极其重要
9	两个元素相比，前者比后者强烈重要
2，4，6，8	上述判断的中间值

Figure 2: 矩阵判断标度

$\frac{1}{3}$ 后者比前者稍重要

2. 构造判断矩阵

如何比较下层因素对上层因素的影响呢?
我们以其中的一个判断矩阵（景色）为例，介绍判断矩阵的构建方法。对于三个城市的景色对比来说，在B_1矩阵中，第i行第j列表示，第i个城市相比于第j个城市。

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
B_1 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \frac{w_2}{w_3} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & \frac{w_3}{w_3} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

- 对角线元素都是1，因为自己比自己的重要性肯定是相等的
- 沿对角线对称位置的元素互为倒数，也就是$a_{ij}a_{ji} = 1$

2. 构造判断矩阵

按照1-9标度法将得到的比较值填入判断矩阵，如：

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \text{杭} & \text{北} & \text{桂} \end{array} \\
B_1 = & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

- 第一行第二列的2则表示杭州相比北戴河，景色要稍微好一些（程度为2）
- 第一行第三列的5则表示杭州相比桂林，景色要明显好一些（程度为5）
- 第二行第三列的2则表示北戴河相比桂林，景色要稍微好一些（程度为2）

2. 构造判断矩阵

选择旅游目的地

景色	费用	居住	饮食	旅途
C_1	C_2	C_3	C_4	C_5

$$A = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

5个评价指标之间的判断矩阵

相对于景色

$$B_1 = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

相对于费用

$$B_2 = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/8 \\ 3 & 1 & 1/3 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

相对于居住

$$B_3 = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

相对于饮食

$$B_4 = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 1/4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

相对于旅途

$$B_5 = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1/4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

每个评价指标下，3个评价对象之间的判断矩阵.

Figure 3: 判断矩阵填充示意图

3. 判断矩阵的性质

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \frac{w_2}{w_3} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & \frac{w_3}{w_3} \end{bmatrix}$$

我们设每一个城市景色的重要性为$w = [w_1, w_2, w_3]^T$，上述B_1矩阵有一个非常有趣的性质：

$$B_1 w = 3w$$

我们后续将通过这个性质求解$w = [w_1, w_2, w_3]$，也就是每一个城市在景色上的得分。

- 请尝试证明上述性质$B_1 w = 3w$
- 对于更一般的$n \times n$的判断矩阵，请证明$Aw = nw$

3. 判断矩阵的性质

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \overset{=2}{\frac{w_1}{w_2}} & \overset{=5}{\frac{w_1}{w_3}} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \frac{w_2}{w_3} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & \frac{w_3}{w_3} \end{bmatrix} \quad \frac{w_2}{w_3} = 2$$

$w_1 = 5$

$w_2 = 25$

$w_3 = 1$

如果

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

请尝试求解$B_1 w = 3w$，你发现了什么？为什么会出现这个情况？

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad w_1 = w_2 = w_3 = 0$$

3. 判断矩阵的性质

判断矩阵的**不一致性**是导致无解问题出现的原因，也就是说方程

$$a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}, \ (i, j, k = 1, 2, \cdots, n)$$

只有在理想的情况下是成立的，但是真实的判断矩阵会有一定程度的不一致性存在。

为此，我们求解如下特征方程（把3改为一个参数λ）：

特征值

$$B_1 w = \lambda w$$

特征向量

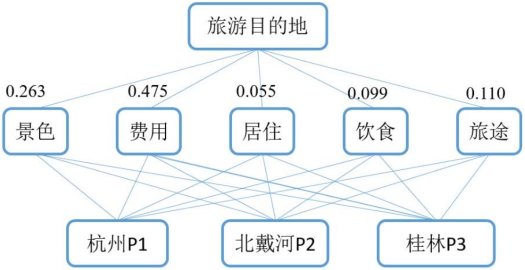
其中，~~λ是矩阵B_1的特征向量~~。层次分析法中，我们取最大特征值所对应的特征向量作为权重的最终计算结果。

4. Python求解矩阵的特征值与特征向量

下面介绍使用Python求解矩阵的特征值与特征向量的方法：

```python
A = [[1,2,5],[1/2,1,2],[1/5,1/2,1]]   # 矩阵的输入
import numpy as np
## 调用np.linalg.方法计算矩阵的特征值和特征向量，其中是特征值，是特征向量eiglambv
lamb,v = np.linalg.eig(A)
lambda_max = max(abs(lamb))
# 提取最大的特征值
loc = np.where(lamb==lambda_max)
# 获取最大特征值的索引
weight = abs(v[0:len(A),loc[0][0]])
# 获取最大特征值对应的特征向量
weight = weight/sum(weight)
# 归一化
print(weight)
```

对于图 3中的其他判断矩阵也可以执行类似操作，最终的计算结果如下所示



$$w_1 = \begin{bmatrix} 0.595 \\ 0.277 \\ 0.129 \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0.082 \\ 0.236 \\ 0.682 \end{bmatrix} \quad w_3 = \begin{bmatrix} 0.429 \\ 0.429 \\ 0.142 \end{bmatrix} \quad w_4 = \begin{bmatrix} 0.633 \\ 0.193 \\ 0.175 \end{bmatrix} \quad w_5 = \begin{bmatrix} 0.166 \\ 0.166 \\ 0.668 \end{bmatrix}$$

进行层次总排序即可得到最终的打分结果

$$
W = W^{(3)}W^{(2)} = \begin{array}{c} \\ \text{杭} \\ \text{北} \\ \text{桂} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \text{景} & \text{费} & \text{居} & \text{饮} & \text{旅} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0.595 & 0.082 & 0.429 & 0.633 & 0.166 \\ 0.277 & 0.236 & 0.429 & 0.193 & 0.166 \\ 0.129 & 0.682 & 0.142 & 0.175 & 0.668 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} 0.263 \\ 0.475 \\ 0.055 \\ 0.099 \\ 0.110 \end{bmatrix}
\begin{array}{c} \text{景} \\ \text{费} \\ \text{居} \\ \text{饮} \\ \text{旅} \end{array}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0.300 \\ 0.246 \\ 0.456 \end{bmatrix}
$$

决策结果首选旅游地为桂林（P3），其次为~~北戴河~~杭（P1），再次为~~杭州~~北（P2）。

5. 判断矩阵的不一致性

判断矩阵通常是不一致的，但是为了能用判断矩阵对应于特征根的特征向量作为被比较因素的权向量，其不一致程度应在容许的范围内。如何确定这个范围？

一致性指标：

判断矩阵的最大特征值。

$$CI = \frac{\lambda - n}{n-1}$$

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

判断矩阵的行数

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

当$CR < 0.1$时，认为层次排序是具有满意的一致性的，我们可以接受该分析结果。

⇒ 判断矩阵合理

5. 判断矩阵的不一致性

```
A = [[1,2,5],[1/2,1,2],[1/5,1/2,1]]
import numpy as np
## 调用np.linalg.方法计算矩阵的特征值和特征向量，其中是特征值，是特征向量eiglambv
lamb,v = np.linalg.eig(A)
lambda_max = max(abs(lamb))   # 提取最大的特征值
loc = np.where(lamb==lambda_max) # 获取最大特征值的索引
weight = abs(v[0:len(A),loc[0][0]])      # 获取最大特征值对应的特征向量
weight = weight/sum(weight)              # 归一化
RI_list = [0,0,0.58,0.9,1.12,1.24,1.32,1.41,1.45]
RI = RI_list[len(A)-1]                   # 计算RI
CI = (lambda_max-len(A))/(len(A)-1)      # 计算CI
CR = CI/RI                               # 计算CR
```

5. 判断矩阵的不一致性

```
## 接上页
print('最大特征值 lambda_max=',lambda_max)
print('最大特征值对应的特征向量 w=',weight)
print('CI=',CI)
print('RI=',RI)
print('CR=',CR)
```

计算结果为：

```
lambda_max= 3.0055351117384985
w= [0.59537902 0.27635046 0.12827052]
CI= 0.0027675558692492608
RI= 0.58
CR= 0.004771648050429 76
```

6. 层次分析法流程回顾

层次分析法的基本思路：
先分解后综合。首先将所要分析的问题**层次化**，根据问题的性质和要达到的总目标，将问题分解成不同的组成因素，按照因素间的相互关系及隶属关系，将因素按不同层次聚集组合，形成一个多层分析结构模型，最终归结为最低层（方案、措施、指标等）相对于最高层（总目标）相对重要程度的权值或相对优劣次序的问题。
运用层次分析法建模，大体上可按下面四个步骤进行：

1. 建立递阶层次结构模型；
2. 构造出各层次中的所有判断矩阵；
3. 层次单排序及一致性检验；
4. 层次总排序及一致性检验。