① 评价

② 规划

评价模型

Evaluation Model

③ 预测

June 10, 2021

评价模型介绍

如何去思考综合评价问题的建模呢？通常有如下五个角度

1. 评价对象(Evaluation Objects)：评价对象就是综合评价问题中所研究的对象，或称为系统。通常情况下，在一个问题中评价对象是属于同一类的，且个数要大于1，不妨假设一个综合评价问题中有n个评价对象，分别记为

$$S_1, S_2, \cdots, S_n (n > 1) \tag{1}$$

2. 评价指标(Evaluation Indexs)：评价指标是反映评价对象的运行（或发展）状况的基本要素。通常的问题都是有多项指标构成，每一项指标都是从不同的侧面刻画系统所具有某种特征大小的一个度量。一个综合评价问题的评价指标一般可用一个向量x表示，称为评价指标问题，其中每一个分量就是从一个侧面反映系统的状态，即称为综合评价的指标体系。不失一般性，设系统有m个评价指标，分别记为

$$x_1, x_2, \cdots, x_m (m > 1) \tag{2}$$

3. 权重系数(Weights)：每一个综合评价问题都有相应的评价目的，针对某种评价目的，各评价指标之间的相对重要性是不同的，评价指标之间的这种相对重要性的大小，可用权重系数来刻画。

评价模型介绍

当各评价对象和评价指标值都确定以后，综合评价结果就依赖于权重系数的取值了，即权重系数确定的合理与否，直接关系到综合评价结果的可信度，甚至影响到最后决策的正确性。因此，权重系数的确定要特别谨慎，应按一定的方法和原则来确定。如果用$w_j (j = 1, 2, \cdots, m)$来表示评价指标$x_j$的权重系数，一般应满足

$$w_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, m \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{m} w_j = 1 \tag{4}$$

4. 综合模型(Evaluation Model)：对于多指标（或多因素）的综合评价问题，就是要通过建立一定的数学模型将多个评价指标值综合成为一个整体的综合评价值，作为综合评价的依据，从而得到相应的评价结果。

5. 评价者(Evaluation Perspective)：评价者是直接参与评价的人，可以是一个人，也可以是一个团体。对于评价目的选择、评价指标体系确定、权重系数的确定和评价模型的建立都与评价者有关。因此，评价者在评价过程中的作用是不可小视的。

评价模型介绍

目前常用的综合评价方法有数十种之多，其中主要使用的评价方法有：

- 主成分分析法
- 因子分析
- **TOPSIS评价法**
- 秩和比法
- 灰色关联法
- **熵权法**
- **层次分析法**
- 模糊评价法等

步骤：

1、收集数据

2、数据预处理

3、代入评价模型

4、分析计算结果

注意

评价方法多种多样，各方法都有其适用场景。我们将重点展开讲其中较为经典的TOPSIS、熵权法和层次分析法。实际上，学会所有的模型也是不可能的，模型千变万化，从经典模型中我们要学习的更重要的是建模的思维，而并非死板的方法。

数据预处理方法

在展开这模型原理之前，由于原始数据存在各种各样的问题，往往不能直接用来计算，我们首先来学习数据的预处理方法。

一般情况下，在综合评价指标中，有的指标比较重要，有的影响微乎其微，另外各指标值可能属于不同类型、不同单位或不同数量级，从而使得各指标之间存在着不可公度性，给综合评价带来了诸多不便。为了尽可能地反映实际情况，消除由于各项指标间的这些差别带来的影响，避免出现不合理的评价结果，就需要对评价指标进行一定的预处理，包括:

- 指标的筛选
- 指标的一致化处理
- 无量纲化处理
- 定性数据定量化

下面分别展开

评价指标的筛选

要根据综合评价的目的，针对具体的评价对象、评价内容收集有关指标信息，采用适当的筛选方法对指标进行筛选，合理地**选取主要指标，剔除次要指标，以简化评价指标体系**。常用的评价指标筛选方法主要有最小均方差法、极大极小离差法等。

最小均方差法

对于n个评价对$S_1, S_2, \cdots, S_n$每个评价对象有m个指标，其观测值分别为

$$a_{ij}(i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m) \tag{5}$$

最小均方差法的筛选过程如下：首先求出第j项指标的平均值和均方差

$$\mu_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \tag{6}$$

$$s_j = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{ij} - \mu_j)^2}, \quad j = 1, 2, \cdots, m \tag{7}$$

然后找到最小均方差

$$S_{j0} = \min_{1 \le j \le m} \{s_j\} \tag{8}$$

如果最小均方差$S_{j0} \approx 0$，则可删除与S_{j0}对应的指标 。考察完所有指标，即可得到最终的评价指标体系 。

极大极小离差法

对于n个评价对$S_1, S_2, \cdots, S_n$每个评价对象有m个指标，其观测值分别为

$$a_{ij} (i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m) \tag{9}$$

极大极小离差法的筛选过程如下：首先求出第j项指标的最大离差

$$d_j = \max_{1 \le i,k \le n} \{|a_{ij} - a_{kj}|\}, j = 1, 2, \cdots, m \tag{10}$$

然后求出最大离差中的最小值

$$d_{j0} = \min_{1 \le j \le n} \{d_j\} \tag{11}$$

评价指标的筛选

如果最小离差$d_{j_0} \approx 0$，则可删除与d_{j_0}对应的指标x_{j_0}，考察完所有指标，即可得到最终的评价指标体系。

提示

最小均方差法和极大极小离差法的出发点是：如果n个评价对象关于某项指标的观测值都差不多，那么不管这个评价指标重要与否，对于这n个评价对象的评价结果所起的作用将是很小的。因此，在评价过程中就可以删除这样的评价指标。这种指标筛选方法尤其对于参数较多的评价问题更为实用。

指标的一致化处理

所谓一致化处理就是将评价指标的类型进行统一。一般来说，在评价指标体系中，可能会同时存在极大型指标、极小型指标、居中型指标和区间型指标，它们都具有不同的特点。若指标体系中存在不同类型的指标，必须在综合评价之前将评价指标的类型做一致化处理。例如，将各类指标都转化为极大型指标，或极小型指标。一般的做法是将非极大型指标转化为极大型指标。

极小型指标化为极大型指标

对极小型指标x_j(如评价老师教学质量的时候，不及格率追求越小越好)，将其转化为极大型指标时，只需对指标x_j取倒数：

$$x_j' = \frac{1}{x_j} \tag{12}$$

或做平移变换：

$$x_j' = M_j - x_j \tag{13}$$

其中,$M_j = \max_{1\le i\le n}\{a_{ij}\}$,即$n$个评价对象第$j$项指标值$a_{ij}$最大者。
当然，其他能改变单调性的转换方法也是可行的。

指标的一致化处理

居中型指标化为极大型指标

对居中型指标x_j(如评价水质的时候，PH值中性为最优，过高过低都不好),令$M_j=\max_{1\le i\le n}\{a_{ij}\}$， $m_j=\min_{1\le i\le n}\{a_{ij}\}$,取

$$x_j'=\begin{cases}\dfrac{2(x_j-m_j)}{M_j-m_j}, & m_j\le x_j\le \dfrac{M_j+m_j}{2}\\[2ex] \dfrac{2(M_j-x_j)}{M_j-m_j}, & \dfrac{M_j+m_j}{2}\le x_j\le M_j\end{cases} \tag{14}$$

就可以将x_j转化为极大型指标。

思考

上述公式的图像是什么样子?

区间型指标化为极大型指标

对区间型指标x_j(如评价健康情况时，体温36.5附近为最优，过高过低都不好)，x_j是取值介于区间$\left[b_j^{(1)}, b_j^{(2)}\right]$,内时为最好，指标值离该区间越远就越差。令

$$M_j = \max_{1\le i\le n}\{a_{ij}\},\quad m_j = \min_{1\le i\le n}\{a_{ij}\},\quad c_j = \max\left\{b_j^{(1)} - m_j, M_j - b_j^{(2)}\right\} \tag{15}$$

就可以将区间型指标x_j转化为极大型指标。

$$x_j' = \begin{cases} 1 - \dfrac{b_j^{(1)} - x_j}{c_j}, & x_j < b_j^{(1)} \\ 1, & b_j^{(1)} \le x_j \le b_j^{(2)} \\ 1 - \dfrac{x_j - b_j^{(2)}}{c_j}, & x_j > b_j^{(2)} \end{cases} \tag{16}$$

思考

上述公式的图像是什么样子?

指标的无量纲化处理

所谓无量纲化，也称为指标的规范化，是通过数学变换来消除原始指标的单位及其数值数量级影响的过程。

对于n个评价对象$S_1, S_2, \cdots, S_n$，每个评价对象有m个指标，其观测值分别为

$$a_{ij}(i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m) \tag{17}$$

标准样本变换法

令

$$a_{ij}^* = \frac{a_{ij} - \mu_j}{s_j}(1 \le i \le n, 1 \le j \le m) \tag{18}$$

其中样本均值$\mu_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$,样本均方差$s_j = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{ij} - \mu_j)^2}$,称为标准观测值。

指标的无量纲化处理

比例变换法

对于极大型指标，令

$$a_{ij}^{*}=\frac{a_{ij}}{\max_{1\leq i\leq n}a_{ij}}\left(\max_{1\leq i\leq n}a_{ij}\neq 0,1\leq i\leq n,1\leq j\leq m\right)\qquad(19)$$

对极小型指标，令

$$a_{ij}^{*}=\frac{\min a_{ij}}{a_{ij}}(1\leq i\leq n,1\leq j\leq m)\qquad(20)$$

或

$$a_{ij}^{*}=1-\frac{a_{ij}}{\max_{1\leq i\leq n}a_{ij}}\left(\max_{1\leq i\leq n}a_{ij}\neq 0,1\leq i\leq n,1\leq j\leq m\right)\qquad(21)$$

该方法的优点是这些变换前后的属性值成比例。但对任一指标来说，变换后的$a_{ij}^{*}=1$和$a_{ij}^{*}=0$不一定同时出现。

指标的无量纲化处理

向量归一化法

对于极大型指标，令

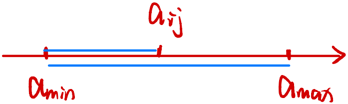
$$a_{ij}^* = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ij}^2}}(i = 1, 2, \cdots, n, 1 \leq j \leq m) \tag{22}$$

对于极小型指标，令

$$a_{ij}^* = 1 - \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ij}^2}}(i = 1, 2, \cdots, n, 1 \leq j \leq m) \tag{23}$$

极差变换法

对于极大型指标



$$a_{ij}^* = \frac{a_{ij} - \min_{1 \leq i \leq n} a_{ij}}{\max_{1 \leq i \leq n} a_{ij} - \min_{1 \leq i \leq n} a_{ij}}(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m) \tag{24}$$

对于极小型直指标

$$a_{ij}^* = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} a_{ij} - a_{ij}}{\max_{1 \leq i \leq n} a_{ij} - \min_{1 \leq i \leq n} a_{ij}}(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m) \tag{25}$$

指标的无量纲化处理

经过极差变换后，均有$0 \le a_{ij}^* \le 1$，且最优指标值$a_{ij}^* = 1$，最劣指标值$a_{ij}^* = 0$。该方法的缺点是变换前后的各指标值不成比例。

功效系数法

令，

$$a_{ij}^* = c + \frac{a_{ij} - \min_{1\le i\le n} a_{ij}}{\max_{1\le i\le n} a_{ij} - \min_{1\le i\le n} a_{ij}} \times d (1 \le i \le n, 1 \le j \le m) \tag{26}$$

其c, d均为确定的常数，c表示“平移量”，表示指标实际基础值，d表示“旋转量”，即表示“放大”或“缩小”倍数

定性指标的定量化

在综合评价工作中，有些评价指标是定性指标，即只给出定性的描述，例如，质量很好、性能一般、可靠性高等。对于这些指标，在进行综合评价时，必须先通过适当的方式进行赋值，使其量化。一般来说，对于指标最优值可赋值1，对于指标最劣值可赋值0。对极大型定性指标常按以下方式赋值:

对于极大型定性指标而言，如果指标能够分为很低、低、一般、高和很高五个等级，则可以分别取量化值为0，0.1，0.3，0.5，0.7，1，对应关系如下表所示。介于两个等级之间的可以取两个分值之间的适当数值作为量化值。极小型指标同理。

等级	很低	低	一般	高	很高
量化值	0	0.3	0.5	0.7	0.9