马尔可夫过程课程学习报告

董开明　海洋
王秀程　柴智
曹思齐

26/09/2019

研究马尔可夫过程的思想

首先通过条件概率去定义一种特殊的随机过程：任何时刻的结果仅依赖于前一时刻的结果，而与再以前的结果无关。由于随机变量的一次观测结果，映射到一个状态，即研究马氏链状态之间的关系就可以通过研究随机变量之间的关系，故可以用有限维概率分布去描述马尔可夫过程。

使用乘法公式，得出马尔可夫过程的有限维概率分布可由初始概率密度和转移概率密度确定。故研究一般的状态转移过程得出C-K 方程，并按C-K 方程的形式改用矩阵的形式表达，故引入状态转移矩阵，至此通过有限维概率分布完整地描述了马尔可夫过程。

为了更深入地说明转移概率，我们想到马氏链的两个状态之间的关系类似于两个随机变量之间的相关关系，即可以用相关函数去表达。只是它们的区别在于，对于一般的随机过程，是研究两个时刻随机变量集合平均的相关关系；而对于马尔可夫过程状态之间的相关关系，是通过转移概率来描述的。

马尔可夫过程是一个随机过程，对于随机过程来说需要研究它的平稳性，通过引入稳态概率，说明了在遍历的条件下，有限维概率分布趋向于平稳分布。即在任意时刻下，不同状态的概率分布不随时间变化。即可看成马氏链具有严平稳性。

马尔可夫过程的提出

马尔可夫在研究中为了证明随机变量间的独立性不是弱大数定律和中心极限定理成立的必要条件，构造了一个按条件概率相互依赖，它在任何时刻的结果仅依赖于前一时刻的结果，而与再以前的结果无关的随机过程，并证明其在一定条件下收敛。

上面提到，马尔可夫过程研究的是这样一类随机过程的模型：它在任何时刻的结果仅依赖于前一时刻的结果，而与再以前的结果无关。

即我们如果规定当前时刻 $x(t_{n-1})$ 的取值，则过去 $x(t_{n-1}),\cdots,x(t_1)$ 的取值不会影响其未来 $x(t_n)$ 的取值，则可用条件概率去定义**马尔可夫过程**：

$$P\left[x(t_n)\leqslant x_n|x(t_{n-1}),\cdots,x(t_1)\right]=P\left[x(t_n)\leqslant x_n|x(t_{n-1})\right]$$

有了以上对马尔可夫过程的定义，下面需要建立数学模型去描述马尔可夫过程。

1. 有限维概率分布

马尔可夫过程也是随机过程，描述随机过程的重要工具就是有限维概率分布。对于离散马尔可夫过程，n 维联合概率分布可表示为

$$f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_X(x_n|x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) f_X(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$$

由马尔可夫过程的定义可得

$$f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_X(x_n|x_{n-1}) f_X(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$$

同样的办法最终得到

$$f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_X(x_n|x_{n-1}) f_X(x_{n-1}|x_{n-2}) \cdots f_X(x_2|x_1) f_X(x_1)$$

我们称 $f_X(x_n|x_{n-1})$ 为转移概率密度，不难看出马尔可夫过程的有限维概率分布可由初始概率密度和转移概率密度确定。

2.C-K 方程

为了更深入了解转移概率的含义，由于随机变量的一次观测结果，映射到一个状态，故研究马氏链状态之间的关系就可以通过研究随机变量之间的关系。

设在具有状态 $e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots$ 的离散马氏链 $\{x_n\}$ 中，用

$$x_m \to x_{m+1} \to \cdots \to x_n, \cdots$$

表示系统的演变过程，则从 x_m 到 x_n转移概率可描述为:

$$\begin{aligned} p_{ij}(m,n) = P\{x_n = e_j | x_m = e_i\} &= \sum_k P\{x_n = e_j, x_r = e_k | x_m = e_i\} \\ &= \sum_k P\{x_n = e_j | x_r = e_k, x_m = e_i\} P\{x_r = e_k | x_m = e_i\} \\ &= \sum_k P\{x_n = e_j | x_r = e_k\} P\{x_r = e_k | x_m = e_i\} \end{aligned}$$

进一步简化为

$$p_{ij}(m,n) = \sum_k p_{ik}(m,r) p_{kj}(r,n)$$

上式称为C-K 方程。

3. 状态转移矩阵

C-K 方程 $p_{ij}(m,n)=\sum_k p_{ik}(m,r)p_{kj}(r,n)$ 的右边部分以看作矩阵行向量和列向量的线性组合，故想到可以用矩阵去描述转移概率。

用转移概率 $p_{ij}(m,n)$ 去产生**转移概率矩阵**$P(m,n)$，则有

$$P(m,n)=\begin{bmatrix} p_{11}(m,n) & p_{12}(m,n) & \cdots & p_{1j}(m,n) & \cdots \\ p_{21}(m,n) & p_{22}(m,n) & \cdots & & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i1}(m,n) & \cdots & \cdots & p_{ij}(m,n) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

故 C-K 方程可描述为矩阵形式：$P(m,n)=P(m,r)P(r,n)$

为了研究任何一次状态转移的关系，想到把时间间隔缩到最短，即用**一步转移概率矩阵**来表示，即得

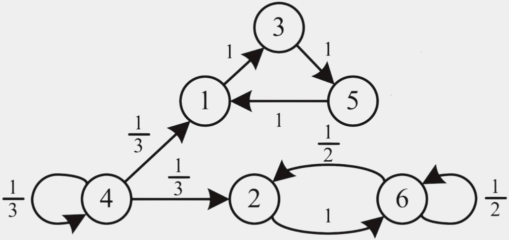
$$P(m,n)=P(m,m+1)P(m+1,m+2)\cdots P(n-1,n)$$

对于**齐次马尔可夫过程**，则可化简为：

$$P(m,n)=P^{m-n}$$

即任意从从 m 到 n 步的状态转移矩阵可以一步转移概率矩阵乘 $m-n$ 次得到。

1. 状态与状态之间的到达关系



我们以状态转移图为研究对象，分析如何研究状态和两个状态之间的转移关系。对于从状态 e_i 能否转移到状态 e_j 以及能否从 e_j 返回 e_i，我们可以得出两个状态间的可达性。

1. 到达（状态从一个状态指向另一个状态）
   对于状态 e_i 和 e_j，如果存在 n，使 $p_{ij}(n) > 0$，则称状态 e_i 可到达状态 e_j。
2. 相通（箭头在两个状态之间相互指向）
   状态 e_i 和 e_j 是彼此可达的。

从转移概率矩阵的角度分析状态可达性，可知若矩阵元素 $p_{ij}(m,n) \equiv 0, \forall m,n$，则从状态 e_i 无法到达 e_j。

如果在一个马尔可夫过程中，每一个状态都可以到达别的所有状态（转移的步数可不同），则称该马尔可夫链为互通链（不可约链）。

2. 到达概率

为了研究从某一状态出发，到达另一状态的概率，我们引入首达概率。
首达概率 $f_{ij}(n)$（系统从状态 e_i 经 n 步转移首次到达状态 e_j 的概率）

$$f_{ij}(n) = P\left[x_n = e_j, x_m \neq e_j, \forall m \in (0, n) \mid x_0 = e_i\right]$$

首达概率与转移概率的关系

从 e_i 出发，在第 r 步以概率 $f_{ij}(r)$ 首次到达 e_j，剩下的 $n-r$ 步再次以概率 $p_{jj}(n-r)$ 到达 e_j，再对彼此间不相容的概率求和，即可得到

$$p_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{n} f_{ij}(r) p_{jj}(n-r)$$

迟早到达概率 f_{ij}

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n)$$

可以看出，对于 $f_{ij} = 1$，那么从 e_i 出发，在经过有限长的时间后，必定会到达状态 e_j。

3. 状态的返回性质

对于两个相通的状态 e_i，e_j，有 $p_{ij} > 0$，$p_{ji} > 0$，根据

$$p_{ii} \geq p_{ij} \cdot p_{ji} > 0$$

可知从状态 e_i 出发，可能再次回到 e_i。

为了研究从某一状态出发，能否再次返回这一状态，可以得到状态的返回性质。

4. 常返类型

通过 n 步首次返回概率 $f_{ii}(n)$，可以计算状态 e_i 的迟早返回概率

$$f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}(n)$$

对于 f_{ii} 的不同取值，可以得到以下性质：

1. 如果 $f_{ii} = 1$
   表示从状态 e_i 出发，只要经过足够多步的转移，一定可以再次返回状态 e_i，称 e_i 为常返状态。
2. 如果 $f_{ii} < 1$
   表示从状态 e_i 出发，只能有限次地（瞬时地）回到状态 e_i，称 e_i 为非常返状态。

马尔可夫过程的求解

　　而对于常返状态 e_i，从状态 e_i 出发，可以经过 n 步返回状态 e_i，设随机变量 y_j 表示状态 e_i 返回的时间，则可定义

$$P\{y_i = n\} = f_{ii}(n)$$

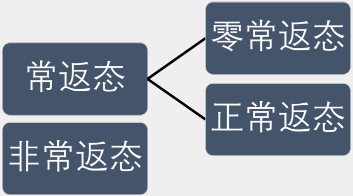
我们能够利用其**返回步长的期望**描述该状态的**平均返回时间**：

$$\mu_i = E\{y_i\} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}$$

对于不同的**平均返回时间**μ_i，可以得到常返状态的分类：

- 如果 $\mu_i = \infty$，那么状态 e_i 是**零常返**的。
- 如果 $\mu_i < \infty$，那么状态 e_i 是**正常返**的，从状态 e_i 出发，经过有限多步的转移，一定可以再次返回状态 e_i。

由以上分析结果，可以得出状态的返回性质分类如下所示：



5. 状态的周期性

对于状态 e_i，如果正整数集合 $\{n \mid n \geq 1, p_{ii}(n) > 0\}$ 非空，则称该集合的最大公约数 L 为状态 e_i 的**周期**。

即周期的实际意义为不同的返回路径中步长的最大公因数。

- 如果 $L > 1$，那么状态 e_i 是**周期的**
- 如果 $L = 1$，那么状态 e_i 是**非周期的**

6. 状态的遍历性

遍历状态

如果状态 e_i 是非周期且正常返状态，则状态 e_i 是遍历状态。

在一个马尔可夫过程中，如果状态空间中的每一个状态都具有遍历性，则该马尔可夫链是遍历链。

7. 马尔可夫过程的平稳分布

马尔可夫过程是一个随机过程，对于随机过程来说需要研究它的平稳性，故引入**稳态概率**。

稳态概率

若对齐次马氏链 $X(n), n \geq 0$，极限 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j \geq 0$ 存在，则称 p_j 为状态 e_j 的**稳态概率**。

平稳分布

在**遍历**的条件下，由初始分布 $p_i(0)$ 可得马氏链在第 n 步处于状态 e_j 的概率为

$$P\left\{x_n = e_j\right\} = \sum_i P\left\{x_n = e_j | x_0 = e_i\right\} P\left\{x_0 = e_i\right\} = \sum_i p_{ij}(n) p_i(0)$$

为了得到状态 e_j 的极限分布，两边同取极限可得

$$\lim_{n\to\infty} P\left(x_n = e_j\right) = \sum_i p_j p_i(0) = p_j \sum_i p_i(0) = p_j > 0$$

从长期看来，无论初始分布如何，经过无穷多步，马氏链的概率分布能到达一种极限分布，即对任意时刻，系统处于同一状态的概率相同。我们称这种极限分布为**平稳分布**，平稳分布的概率即为稳态概率，可看成马氏链具有**严平稳性**。

Thanks for listening!