正弦信号加窄带高斯噪声

的有限维概率分布求解

董开明 王秀程
海洋 柴智 曹思齐

4/11/2019

求解随机过程有限维概率分布的主要思想

为了得到**有限维概率分布**，从**特征函数**入手，根据正弦信号加窄带噪声的表达式及其之间**相互独立**的关系，发现特征函数可以拆分为包含正弦信号信息的特征函数与包含高斯噪声信息的**特征函数的乘积**，而后者即为有限维高斯分布的特征函数，故只须求解正弦信号的**特征函数**，即可得到正弦信号加窄带噪声概率分布的特征函数，再根据概率分布与特征函数满足类似傅里叶变换关系，即可得到概率分布的显式表达式。

为了求解**有限维概率分布**，我们以二维为例，通过**构造函数**的方法，将傅里叶变换的积分形式，转化为**级数求和形式**，从而求出最终表达式。

正弦信号加窄带噪声的一维特征函数及其概率分布

可知正弦信号加窄带噪声的表达式:

$$
\begin{aligned}
I(t) = I &= I_p(t) + I_N(t) \\
&= P\cos(\omega_p t - \varphi_p) + I_N(t)
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中 P, ω_p 为常数，φ 为在 $(0, 2\pi)$ 均匀分布的随机变量，$I_N(t)$ 的分布服从均值为 0，方差为 $R(0)$ 的高斯分布。

根据特征函数的定义及正弦信号与窄带高斯噪声的独立性可以得到 $I(t)$ 的特征函数为:

$$
\Phi(u) = E[e^{juI(t)}] = E[e^{ju(I_p(t)+I_N(t))}] = E[e^{juI_p(t)}]E[e^{juI_N(t)}] \tag{2}
$$

由于 φ 为在 $(0, 2\pi)$ 均匀分布的随机变量，所以

$$
E[e^{juI_p(t)}] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{juP\cos(\omega_p t - \varphi_p)}\, d\varphi_p = J_0(Pu)
$$

其中，$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\cos\varphi}\, d\varphi$ 为第一类零阶修正贝塞尔函数。

正弦信号加窄带噪声的一维特征函数及其概率分布

又因为 $I_N(t)$ 服从高斯分布，所以 $E[e^{juI_N(t)}]$ 为一维高斯分布的特征函数，即：

$$E[e^{juI_N(t)}] = \exp(-\frac{R(0)u^2}{2}) \tag{3}$$

所以一维正弦信号加窄带噪声的特征函数为

$$\Phi(u) = E[e^{juI(t)}] = J_0(Pu)\exp(-\frac{R(0)u^2}{2}) \tag{4}$$

从上式可以看出，一维正弦信号加窄带噪声的特征函数可以看成正弦信号的特征函数和高斯噪声的特征函数的乘积。

根据特征函数及概率分布的关系，一维正弦信号加窄带噪声的概率分布可以描述为

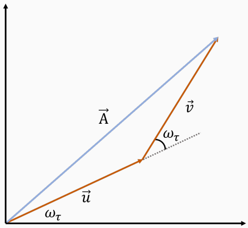
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(u)e^{-jux}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}J_0(Pu)\exp(-\frac{R(0)u^2}{2})e^{-jux}\,du$$

正弦信号加窄带噪声的二维特征函数及其概率分布

推广到二维的情况，二维正弦信号加窄带噪声的特征函数为

$$\begin{aligned}\Phi(u,v) &= E[e^{juI(t)+jvI(t+\tau)}] = E[e^{ju(I_p(t)+I_N(t))+jv(I_p(t+\tau)+I_N(t+\tau))}] \\ &= E[e^{j[uI_p(t)+vI_p(t+\tau)]}]E[e^{j[uI_N(t)+vI_N(t+\tau)]}]\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $E[e^{j[uI_p(t)+vI_p(t+\tau)]}]$ 为正弦信号的二维特征函数



$$\begin{aligned}&E[e^{j[uI_p(t)+vI_p(t+\tau)]}] \\ =&E[e^{jP[u\cos(\omega_p t-\varphi_p)+v\cos(\omega_p t-\varphi_p+\omega\tau)]}] \\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{jP\sqrt{u^2+v^2+2uv}\cos(\omega_p t-\varphi_p)}\, d\varphi_p \\ =&J_0(P\sqrt{u^2+v^2+2uvcos\omega_p\tau})\end{aligned} \tag{6}$$

正弦信号加窄带噪声的二维特征函数及其概率分布

$E[e^{j[uI_N(t)+vI_N(t+\tau)]}]$ 为窄带高斯噪声的二维特征函数

$$E[e^{j[uI_N(t)+vI_N(t+\tau)]}] = \exp[-\frac{1}{2}[R(0)(u^2+v^2-2R(\tau)uv)]] \tag{7}$$

其中 $R(\tau)$ 是 I_N 的自相关函数。

所以正弦信号加窄带高斯噪声的二维特征函数为:

$$\Phi(u,v) = J_0(P\sqrt{u^2+v^2+2uvcos\omega_p\tau})\exp[-\frac{1}{2}[R(0)(u^2+v^2-2R(\tau)uv)]] \tag{8}$$

从上式可以看出，二维正弦信号加窄带噪声的特征函数可以看成正弦信号的特征函数和高斯噪声的特征函数的乘积。

正弦信号加窄带噪声的二维特征函数及其概率分布

根据特征函数及概率分布的关系，二维正弦信号加窄带噪声的概率分布可以描述为

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u, v) e^{-jux_1 - jvx_2} du dv \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(P\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\omega_p\tau}) \\
&\times \exp\{-\frac{1}{2}\left[R(0)\left(u^2 + v^2\right) + 2R(\tau)uv\right] - jx_1u - jx_2v\} du dv
\end{aligned} \tag{9}
$$

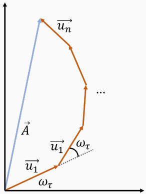
正弦信号加窄带噪声的 n 维特征函数及其概率分布

同理，推广到 n 维情况，正弦信号加窄带噪声的 n 维特征函数为

$$
\begin{aligned}
\Phi(u_1, u_2, ..., u_n) = & E[e^{j[u_1 l_p(t)]+u_2 l_p(t+\tau_1)+...+u_n lp(t+\tau_{n-1})}] \\
& \cdot E[e^{j[u_1 l_N(t)+u_2 l_N(t+\tau_1)+...+u_n l_N(t+\tau_{n-1})]}]
\end{aligned} \tag{10}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
& E[e^{j[u_1 l_p(t)]+u_2 l_p(t+\tau_1)+...+u_n lp(t+\tau_{n-1})}] \\
= & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ju_1 P\cos(\omega_p t-\varphi_p)+ju_2 P\cos(\omega_p t-\varphi_p+\omega_p\tau_1)+...+ju_n P\cos(\omega_p t-\varphi_p+\omega_p\tau_{n-1})} \\
= & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{jP[u_1\cos(\theta)+u_2\cos(\theta+\omega_p\tau_1)+...+u_n\cos(\theta+\omega_p t_{n-1})]}\, d\varphi_p \\
= & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{jP|\vec{A}|\cos(\omega_p t-\varphi_p)}\, d\varphi_p \\
= & J_0[P|\vec{A}|]
\end{aligned} \tag{11}
$$



其中 $|\vec{A}|$ 为 n 个同频不同相的正弦信号叠加的幅值大小。

正弦信号加窄带噪声的 n 维特征函数及其概率分布

$$E[e^{j[u_1 I_N(t)+u_2 I_N(t+\tau_1)+...+u_n I_N(t+\tau_{n-1})]}] = e^{-\frac{1}{2}\vec{\omega}^T \vec{K}\vec{\omega}} \tag{12}$$

其中，$\vec{\omega} = [\omega_1 \ \ \omega_2 \ ... \ \omega_n]^T$，K 为 n 维协方差矩阵

所以，正弦信号加窄带高斯噪声的 n 维特征函数为:

$$\Phi(u_1, u_2, ..., u_n) = J_0[P|\vec{A}|]e^{-\frac{1}{2}\vec{\omega}^T \vec{K}\vec{\omega}} \tag{13}$$

n 维正弦信号加窄带噪声的概率分布可以描述为:

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, ..., x_n) \\ = & \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(u_1, u_2, ..., u_n)e^{-ju_1x_1-ju_2x_2-...-ju_nx_n}\,du_1du_2...du_n \\ = & \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}J_0[P|\vec{A}|]e^{-\frac{1}{2}\vec{\omega}^T \vec{K}\vec{\omega}}\,du_1du_2...du_n \end{aligned} \tag{14}$$

正弦信号加窄带噪声的 n 维概率分布的求解

以二维特征函数为例，

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} J_0(P\sqrt{u^2+v^2+2uv\cos\omega_p\tau}) \\
\times \exp\{-\frac{1}{2}\left[R(0)\left(u^2+v^2\right)+2R(\tau)uv\right]-jx_1u-jx_2v\}dudv
\end{aligned}
\tag{15}
$$

由于变量 u, v 的各次幂混合不易把积分形式拆开，所以使用分离变量法，令

$$
u=\frac{v_1+u_1}{\sqrt{2}},\quad v=\frac{v_1-u_1}{\sqrt{2}} \tag{16}
$$

代入上式可以得到

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} J_0\left(P\sqrt{u_1^2(1-\cos\omega_p\tau)+v_1^2(1+\cos\omega_p\tau)}\right) \\
\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[u_1^2(R(0)-R(\tau))+v_1^2(R(0)+R(\tau))\right]\right. \\
\left.-ju_1\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)-jv_1\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)\right\}du_1dv_1
\end{aligned}
\tag{17}
$$

正弦信号加窄带噪声的 n 维概率分布的求解

由 Neumann's Addition Theorem

$$J_0(\sqrt{z_1^2+z_2^2-2z_1z_2\cos\theta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z_1) J_m(z_2)\cos(m\theta) \tag{18}$$

令 $\theta = \frac{\pi}{2}, z_1^2 = u_1^2(1-\cos\omega_p\tau), z_2^2 = v_1^2(1+\cos\omega_p\tau)$，得

$$\begin{aligned} & J_0(P\sqrt{u_1^2(1-\cos\omega_p\tau)+v_1^2(1+\cos\omega_p\tau)} \\ = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m\left(P\sqrt{2}\sin(\frac{\omega_p\tau}{2})u_1\right) J_{2m}\left(P\sqrt{2}\cos(-\frac{\omega_p\tau}{2})v_1\right) \end{aligned} \tag{19}$$

从上式可以看出，

u_1 的各次幂前的系数为 $P\sqrt{2}\sin(\frac{\omega_p\tau}{2}), \frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}, R(0)-R(\tau)$

v_1 的各次幂前的系数为 $P\sqrt{2}\cos(-\frac{\omega_p\tau}{2}), \frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}, R(0)+R(\tau)$

正弦信号加窄带噪声的 n 维概率分布的求解

故我们可以想到，构造两个 $G_n\left(a,b,\sigma^2\right)$ 将积分形式拆成两个函数的乘积。令

$$F_n\left(a,b,\sigma^2;z\right)=J_n(a\,z)\exp\left(-\frac{\sigma^2z^2}{2}-jbz\right) \tag{20}$$

$$G_n\left(a,b,\sigma^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}F_n\left(a,b,\sigma^2,t\right)\,dt \tag{21}$$

令 $z=t-\frac{jb_1}{\sigma^2}$，可得

$$\begin{aligned}F_n\left(a,b,\sigma^2;t+jc\right)=J_n&\left[a\left(t-\frac{b_2}{\sigma^2}\right)+\frac{a}{\sigma^2}\left(b_2-jb_1\right)\right]\\&\times\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}\left(t-\frac{b_2}{\sigma^2}\right)^2+\frac{\left(b_2-jb_1\right)^2}{2\sigma^2}\right]\end{aligned} \tag{22}$$

再用 t 替换 $z=t-\frac{jb_1}{\sigma^2}$

$$G_n\left(a,b,\sigma^2\right)=\exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}J_n\left(at-\frac{jba}{\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)dt$$

正弦信号加窄带噪声的 n 维概率分布的求解

由

$$J_n\left(at - \frac{jba}{\sigma^2}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(at) J_{n-m}\left(-\frac{jab}{\sigma^2}\right)$$

和 Weber Formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_m(at) \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dt = \begin{cases} (\frac{2\pi}{\sigma^2})^{\frac{1}{2}} \exp(-\frac{\alpha^2}{4\sigma^2}) J_{\frac{m}{2}}(\frac{\alpha^2}{4\sigma^2}) & , m \text{ even} \\ 0 & , m \text{ odd} \end{cases} \tag{23}$$

得

$$G_n\left(a, b, \sigma^2\right) = \left(\frac{2\pi}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma^2} - \frac{a^2}{4\sigma^2}\right) \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{n-2q}\left(-\frac{jab}{\sigma^2}\right) J_q\left(\frac{a^2}{4\sigma^2}\right) \tag{24}$$

正弦信号加窄带噪声的 n 维概率分布的求解

故令

$$n = 2m, a_{(1)} = P\sqrt{2}\sin(\frac{\omega_p \tau}{2}), b_{(1)} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \sigma^2_{(1)} = R(0) - R(\tau)$$
$$a_{(2)} P\sqrt{2}\cos(-\frac{\omega_p \tau}{2}), b_{(2)} \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \sigma^2_{(2)} = R(0) + R(\tau)$$

则二维概率可改写为

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m G_{2m}\left(P\sqrt{2}\sin(\frac{\omega_p \tau}{2}), \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, R(0) - R(\tau)\right) \times G_{2m}\left(P\sqrt{2}\cos(-\frac{\omega_p \tau}{2}), \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, R(0) + R(\tau)\right) \tag{25}$$

正弦信号加窄带噪声的 n 维概率分布的求解

将三阶级数化简为一阶级数，最终可以得到

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) = & \frac{1}{2\pi\left(R^2(0) - R^2(\tau)\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{R(0)}{2}\frac{\left(x_1^2 + x_2^2\right) - 2R(\tau)x_1x_2}{2\left(R^2(0) - R^2(\tau)\right)}\right) \\
& \times \exp\left(-\frac{P^2(R(0) - R(\tau)\cos\omega_p\tau)}{2\left(R^2(0) - R^2(\tau)\right)}\right) \\
& \times \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n\left(\frac{P(R(0) - R(\tau)\cos\omega_p\tau)}{2\left(R(0) - R^2(\tau)\right)}\right) \\
& \times \cos\left[2n\tan^{-1}\left(\frac{(x_1 - x_2)(R(0) + R(\tau))}{(x_1 + x_2)(R(0) - R(\tau))}\tan\frac{\omega_p\tau}{2}\right)\right] \\
& \times J_{2n}\left(P\sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^2\sin^2\frac{\omega_p\tau}{2}}{(R(0) - R(\tau))^2} + \frac{(x_1 + x_2)^2\cos^3-\frac{\omega_p\tau}{2}}{(R(0) + R(\tau))^2}}\right)
\end{aligned} \tag{26}
$$

正弦信号加窄带噪声的 n 维概率分布的求解

为了检验上式，令 $P=0$，即只有高斯噪声存在，上式可简化为：

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\left(R^2(0) - R^2(\tau)\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\frac{R(0)\left(x_1^2 + x_2^2\right) - 2R(\tau)x_1x_2}{2\left(R^2(0) - R^2(\tau)\right)}\right) \tag{27}$$

即为高斯噪声的二维概率分布。

混合高斯模型逼近概率分布的思想及问题描述

对于一个高斯随机过程，其 n 维概率分布可以表示为

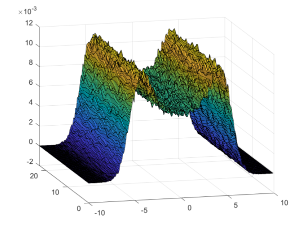
$$f(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |K|^{\frac{1}{2}}} \exp[-\frac{(x - m_x)^T K^{-1} (x - m_x)}{2}] \quad (28)$$

那么对于 M 阶混合高斯过程，可以得到其 n 维概率分布

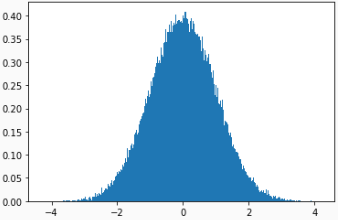
$$f(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = \sum_{i=1}^{M} \varepsilon_i f_i(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) \quad (29)$$

其中 $f_i(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n)$ 为以 $\vec{m}_i$ 为均值向量，以 K_i 为协方差矩阵的高斯过程的 n 维概率分布，ε_i 为混合参数且满足 $\sum_{i=1}^{M} \varepsilon_i = 1$

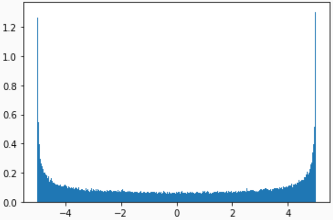
由此可知，混合高斯模型逼近概率分布的问题就可以描述为：给定样本数据 $\vec{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$，确定混合高斯模型中的参数组 $\theta = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_M; K_1, K_2, ..., K_M; m_1, m_2, ..., m_M\}$ 来逼近观测数据概率分布的参数估计问题。



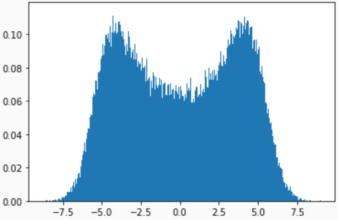
原始概率分布



窄带高斯噪声



信号概率分布



信号叠加窄带高斯噪声

Thanks For Listening.