随机信号通过非线性系统的分析

董开明 王秀程
海洋 柴智 曹思齐

11/11/2019

求解非线性系统输出信号概率密度函数的主要思想

为了求解高斯信号通过**非线性系统**概率密度，我们通过**泰勒级数展开**的方法，通过**隐函数求导**的方法，得到**雅克比行列式**，代入反函数的数值，即可将**关于 x 的概率密度**转化为**关于 y 的概率分布**。同理，可以推广到有限维分布的情况，即对函数 N 维泰勒级数展开，隐函数求导得雅克比行列式，最终得到高斯信号通过任意非线性系统的有限维概率密度。

在前面求解思想的基础下，我们以平方、三次方律系统为例，求解了**高斯过程**通过这些系统的概率密度。求解平方律系统时，由于**反函数**具有显式，通过随机变量求解函数的方法，得到高斯过程通过平方律系统的有限维概率密度。求解三次方系统时，由于反函数无显式，通过引入**特征函数**，但由于两个特征函数不独立，故进行变量代换把一维两个函数和的求解问题转化成求解**二维的联合概率密度**的问题，即只需求解一个特征函数，简化了计算量。

对于通过平方率和系统，仍沿用**特征函数法**，但此时 N 个函数**相互独立**，故可转化为 N 个**特征函数乘积**的问题，通过引入伽马分布及其特征函数，类比参数地得到高斯过程通过平方率和系统的概率密度函数。

求解非线性系统输出信号概率密度函数的主要思想

对于非线性输出的一般形式 $y = f(x), X \sim \mathcal{N}(0,1)$，可以对函数进行泰勒展开，转化为多项式函数：

$$y = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

式中 $R_n(x)$ 为 x 的 n 阶无穷小。再根据之前的求解思路，可以得到：

1. 一维概率密度函数求解：将上式多项式函数移项并将等式左边式子分别对 x 和 y 偏微分，可得

$$\frac{f(a)}{0!} + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) - y = 0$$

$$F_x = f^{(1)}(a) + \frac{f^{(2)}(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f^{(3)}(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{(n-1)} + \frac{dR_n(x)}{dx}$$

$$F_y = -1$$

由偏微分的性质可以得到：

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x} = \frac{1}{f^{(1)}(a) + \frac{f^{(2)}(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{dR_n(x)}{dx}}$$

求解非线性系统输出信号概率密度函数的主要思想

对于 $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x} = \frac{1}{f^{(1)}(a)+\frac{f^{(2)}(a)}{1!}(x-a)+...+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{dR_n(x)}{dx}}$，有:
$f^{(1)}(a), f^{(2)}(a), ..., f^{(n)}(a)$ 都是关于 a 的函数，而 x 服从正态分布的概率密度函数已知。

因此:

$$f_X(y,t) = |J_1| \cdot f_X(x_1,t) + |J_2| f_X(x_2,t) + ... + |J_M| f_X(x_{x_M})$$

$$|J_1| = |\frac{\partial x}{\partial y}|_{x=x_1}, |J_2| = |\frac{\partial x}{\partial y}|_{x=x_2}, ..., |J_M| = |\frac{\partial x}{\partial y}|_{x=x_M}$$

可得 $x = f^{(-1)}(y)$ 有 M 个解 $x_1, x_2, ..., x_M$。

$Y(t) = aX(t)^2$ 概率密度函数的求解

1. 由于无法直接得到 $Y(t)$ 的密度函数，因此考虑将分布函数求解转变为对分布函数的求解。
2. 只需求出随机变量函数的分布函数，即可得到其密度函数。对于已知 $Y(t) = aX(t)^2$ 可根据反函数法求得 $Y(t)$ 的概率分布函数为：

$$\begin{aligned} F_{Y_t}(y) &= P\{Y_t \leqslant y\} = P\{aX_t^2 \leqslant y\} = P\{-\sqrt{\frac{y}{a}} \leqslant X_t \leqslant \sqrt{\frac{y}{a}}\} \\ &= F_{X_t}(\sqrt{\frac{y}{a}}) - F_{X_t}(-\sqrt{\frac{y}{a}}) \end{aligned}$$

3. 因为 $X(t)$ 为高斯过程，可得 $f_{X_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{X_t^2}{2\sigma^2}}$，所以

$$\begin{aligned} f_{Y_t}(y) &= f_{X_t}(\sqrt{\frac{y}{a}})\frac{1}{2\sqrt{ya}} + f_{X_t}(-\sqrt{\frac{y}{a}})\frac{1}{2\sqrt{ya}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{ya}} \cdot 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y}{2a\sigma^2}} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{2\pi y}\sigma} e^{-\frac{y}{2a\sigma^2}}, & y \geqslant 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$Y(t) = aX(t)^2$ 有限维概率密度函数的求解

对于 $Y(t) = aX(t)^2$，要求解其有限维概率密度函数，同样考虑由有限维概率分布函数进行求解。

1. 由雅可比变换可得 $Y(t)$ 的有限维概率分布：

$$F(y_1, y_2, .., y_n) = P\{Y_1 \leqslant y_1, Y_2 \leqslant y_2, \dots, Y_n \leqslant y_n\} = P\{aX_1^2 \leqslant y_1, aX_2^2 \leqslant y_2, \dots, aX_n^2 \leqslant y_n\}$$
$$= P\left\{-\frac{\sqrt{y_1}}{a} \leqslant X_1 \leqslant \frac{\sqrt{y_1}}{a}, -\frac{\sqrt{y_2}}{a} \leqslant X_2 \leqslant \frac{\sqrt{y_2}}{a}, \dots, -\frac{\sqrt{y_2}}{a} \leqslant X_2 \leqslant \frac{\sqrt{y_2}}{a}\right\}$$

   又因为 $X(t)$ 的有限维密度函数已知，因此可以得到：

$$F(y_1, y_2, .., y_n) = \int_{-\frac{\sqrt{y_n}}{a}}^{\frac{\sqrt{y_n}}{a}} \dots \int_{-\frac{\sqrt{y_2}}{a}}^{\frac{\sqrt{y_2}}{a}} \int_{-\frac{\sqrt{y_1}}{a}}^{\frac{\sqrt{y_1}}{a}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |K|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{\vec{X}^T K^{-1} \vec{X}}{2}\right\} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

   其中 K 为 $X(t)$ 的 n 维协方差矩阵，$\vec{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]$。

2. 由有限维概率分布函数，微分即得到 $Y(t)$ 的有限维概率密度函数：

$$f_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{\partial^n F_Y(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_n} = \frac{1}{a^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{y_1}\sqrt{y_2} \dots \sqrt{y_n}} \exp\left[-\frac{\vec{Y}^T K^{-1} \vec{Y}}{2}\right]$$

   其中，K 为 $X(t)$ 的 n 维协方差矩阵，$\vec{Y} = [\sqrt{\frac{y_1}{a}}, \sqrt{\frac{y_2}{a}}, \dots, \sqrt{\frac{y_n}{a}}]$

$Z=\sum_{i=1}^{N} Y(t_i)$ 概率密度函数的求解

对于此类函数形式，反函数法不再适用，故从特征函数角度进行分析。发现各 $Y(t_i)$ 之间存在相互独立的关系，故可将特征函数表示成各 $Y(t_i)$ 特征函数的乘积的形式，只要分别确定 $Y(t_i)$ 的特征函数，即可求得 Z 的特征函数。

1. Z 的特征函数为：

$$\begin{aligned}\Phi_Z(u) &= E[e^{uZ}] = E[e^{u\sum_{i=1}^{N} aX(t_i)^2}] = E[e^{ua(X(t_1)^2+X(t_2)^2+\ldots+X(t_N)^2)}] \\ &= e^a E[e^{uX(t_1)^2+uX(t_2)^2+\ldots+uX(t_N)^2}]\end{aligned}$$

2. 而其中 $X(t_1), X(t_2), ..., X(t_N)$ 是独立同分布于 $\mathcal{N}(0,1)$，故 Z 的特征函数可化为独立随机变量特征函数乘积的形式：

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= e^a E[e^{uX(t_1)^2}\cdot e^{uX(t_2)^2}\cdot\ldots\cdot e^{uX(t_N)^2}] = e^a E[e^{uX(t_1)^2}]E[e^{uX(t_2)^2}]\ldots E[e^{uX(t_N)^2}] \\ &= e^a\prod_{i=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{X(t_i)^2}{2}}e^{uX(t_i)^2}dX(t_i)\right) \\ &= e^a(1-2u)^{-\frac{N}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{\sqrt{1-2u}}}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2\cdot\frac{1}{1-2u}}\right)dx\right]^N \\ &= e^a(1-2u)^{-\frac{N}{2}}\end{aligned}$$

$Z = \sum_{i=1}^{N} Y(t_i)$ 概率密度函数的求解

1. 对于求解特征函数，引入一个特定形式的概率分布模型用于辅助求解其特征函数。
   由特征函数定义，对于概率密度为 $f(x)$ 的随机变量 X，其特征函数定义为
   $$m(u) = E[e^{uX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} f(x) dx$$
2. 若已知 X 为服从参数为 α 和 β 的伽马分布，其概率密度函数为：
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leqslant 0 \end{cases}$$
3. 可求其特征函数为：
   $$m(u) = \int_0^{\infty} e^{uX} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx$$
   $$\xlongequal{令 y=\beta x} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{\frac{uy}{\beta}} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

$Z=\sum_{i=1}^{N} Y(t_i)$ 概率密度函数的求解

4. 若 $u<\beta$，有

$$
\begin{aligned}
m(u) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} y^{\alpha-1}e^{-y(1-\frac{u}{\beta})}dy \\
&= \frac{1}{(1-\frac{u}{\beta})^{\alpha}}\int_0^{\infty}\frac{(1-\frac{u}{\beta})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-(1-\frac{u}{\beta})}dy \\
&= \frac{1}{(1-\frac{u}{\beta})^{\alpha}} = \left(\frac{\beta}{\beta-u}\right)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

5. 由之前结论

$$
\Phi_Z(u) = e^{a}(1-2t)^{-\frac{N}{2}} = e^{a}\left[\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-u}\right]^{\frac{N}{2}}, u<\frac{1}{2}
$$

可以看出后一项恰好是以参数为 $\alpha=\frac{N}{2},\beta=\frac{1}{2}$ 的伽马分布的特征函数，因此，可知 Z 的伽马分布，其概率密度函数为：

$$
f(Z) = \begin{cases} e^{a}\frac{1}{2^{\frac{N}{2}}\Gamma(\frac{N}{2})}x^{\frac{N}{2}-1}e^{-\frac{Z}{2}} & ,x>0 \\ 0 & ,x\leqslant 0 \end{cases}
$$

$Y(t) = aX(t)^2 + bX(t)^3$ 概率密度函数的求解

对于 $Y(t) = aX(t)^2 + bX(t)^3$ 的概率密度函数，继续从特征函数入手：

1. 有 $Y(t)$ 的特征函数为：

$$\Phi_Y(\omega) = E[e^{j\omega Y(t)}] = E[e^{j[\omega aX(t)^2 + \omega bX(t)^3]}]$$

2. 由于 $X(t)^2$ 与 $X(t)^3$ 之间没有相互独立的关系，故之前的求解方法不再适用。因此想到令 $\omega_1 = a\omega, \omega_2 = b\omega$ 来消除无关变量，在令 $X_1 = X(t)^2, X_2 = X(t)^3$，将其看为两个不独立的随机变量，有

$$\Phi_Y(\omega) = E[e^{j[\omega_1 X_1]}] = E[e^{j\omega_1 X_1} e^{j\omega_2 X_2}]$$

3. 令 $Y_1 = e^{j\omega_1 X_1}, Y_2 = e^{j\omega_2 X_2}$，得

$$\begin{aligned}\Phi_Y(\omega) = E[Y_1 Y_2] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Y_1 Y_2 f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_1 X_1} e^{j\omega_2 X_2} f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) dx_1 dx_2\end{aligned}$$

由上式知，为了求得 $\Phi_Y(\omega)$，只要求 Y_1 与 Y_2 的联合概率密度函数，即可由积分得到 $E[Y_1 Y_2]$，求得特征函数。

$Y(t) = aX(t)^2 + bX(t)^3$ 概率密度函数的求解

1. 为了得到 Y_1 与 Y_2 的联合密度函数，可以先求得它们的联合分布函数，由关系 $Y_1 = e^{j\omega_1 X_1}, Y_2 = e^{j\omega_2 X_2}$ 得:

$$\begin{aligned} F_{Y_1;Y_2}(y_1, y_2) &= P\{Y_1 \leqslant y_1; Y_2 \leqslant y_2\} \\ &= P\{e^{j\omega_1 X_1} \leqslant y_1; e^{j\omega_2 X_2} \leqslant y_2\} \\ &= P\{X_1 \leqslant \frac{\ln y_1}{j\omega_1}; X_2 \leqslant \frac{\ln y_2}{j\omega_2}\} \\ &= F_{X_1;X_2}(\frac{\ln y_1}{j\omega_1}, \frac{\ln y_2}{j\omega_2}) \end{aligned}$$

   由上式可知，$F_{Y_1;Y_2}(y_1, y_2)$ 与 $F_{X_1;X_2}(x_1, x_2)$ 之间存在对应关系。

2. 由上想到对等式两边同时微分，有

$$\frac{\partial^2 F_{Y_1;Y_2}(y_1, y_2)}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{\partial^2 F_{X_1;X_2}(\frac{\ln y_1}{j\omega_1}, \frac{\ln y_2}{j\omega_2})}{\partial y_1 \partial y_2}$$

   即

$$f_{Y_1;Y_2}(y_1, y_2) = \frac{\partial^2 F_{X_1;X_2}(\frac{\ln y_1}{j\omega_1}, \frac{\ln y_2}{j\omega_2})}{\partial y_1 \partial y_2}$$

   因此，Y_1 与 Y_2 的联合密度函数可以通过求解偏导数得出。

$Y(t) = aX(t)^2 + bX(t)^3$ 概率密度函数的求解

3. 令 $u = \frac{\ln y_1}{j\omega_1}, v = \frac{\ln y_2}{j\omega_2}$，记 $F_{X_1;X_2}(u,v)$ 为 $F(u,v)$ 可得:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(u,v)}{\partial y_1} &= \frac{\partial F(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y_1} + \frac{\partial F(u,v)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y_1}\\ &= \frac{\partial F(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{1}{j\omega_1 y_1} + \frac{\partial F(u,v)}{\partial v}\cdot 0\\ &\xlongequal{\text{令}\frac{\partial F(u,v)}{\partial u}=F_1(u,v)} \frac{1}{j\omega_1 y_1}F_1(u,v)\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}f_{Y_1;Y_2}(y_1,y_2) &= \frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial y_1\partial y_2} = \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{1}{j\omega_1 y_1}F_1(u,v)\right) = 0\cdot F_1 + \frac{1}{j\omega_1 y_1}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\\ &= \frac{1}{j\omega_1 y_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y_2} + \frac{\partial F_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y_2}\right) = \frac{1}{j\omega_1 y_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}\cdot 0 + \frac{\partial F_1}{\partial v}\cdot\frac{1}{j\omega_2 y_2}\right.\\ &= \frac{1}{j\omega_1 y_1}\frac{1}{j\omega_2 y_2}\frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial u\partial v}\\ &= -\frac{1}{\omega_1 y_1}\frac{1}{\omega_2 y_2}f_{X_1;X_2}(u,v)\end{aligned}$$

由上式知，只需求 $f_{X_1;X_2}(u,v)$，就可求 $f_{Y_1;Y_2}(y_1,y_2)$

5. 下面讨论 X_1 与 X_2 联合密度函数的求解，记 $X(t)$ 为 x，由关系 $X_1 = x^2, X_2 = x^3$ 可以得到：

$$F_{X_1,X_2}(u,v) = P\{X_1 \leqslant u, X_2 \leqslant v\} = P\left\{x^2 \leqslant u, x^3 \leqslant v\right\}$$
$$= P\left\{\left(-\sqrt{u} \leqslant x \leqslant \sqrt{u}\right) \cap x \leqslant v^{\frac{1}{3}}\right\}$$

即

$$F_{X_1;X_2}(u,v) = P(-\sqrt{u} \leqslant x \leqslant \sqrt{u}) = F_X(\sqrt{u}) - F_X(-\sqrt{u})$$
$$f_{X_1,X_2}(u,v) = f_X(\sqrt{u})\frac{1}{2\sqrt{u}} + f_X(-\sqrt{u})\frac{1}{2\sqrt{u}}$$

6. 由于已知 x 的密度函数为 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$，接下来对 u 和 v 进行分类讨论来求解 $f_{X_1;X_2}(u,v)$

$Y(t) = aX(t)^2 + bX(t)^3$ 概率密度函数的求解

对 u 和 v 进行分类讨论

i

$$v^{\frac{1}{3}} \geqslant u^{\frac{1}{2}}\ ,\ \ f_{X_1,X_2}(u,v) = f_X(\sqrt{u})\frac{1}{2\sqrt{u}} + f_X(-\sqrt{u})\frac{1}{2\sqrt{u}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{u}}\left(f_X(\sqrt{u}) + f_X(-\sqrt{u})\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi u}\sigma}e^{-\frac{u}{2}}$$

ii

$$-u^{\frac{1}{2}} < v^{\frac{1}{3}} < u^{\frac{1}{2}}\ ,\ \ f_{X_1,X_2}(u,v) = f_X(\sqrt[3]{v})\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{v^2}} + f_X(-\sqrt{u})\frac{1}{2\sqrt{u}}$$
$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{v^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{v^{\frac{2}{3}}}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{u}{2}}$$
$$= \frac{1}{3x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

iii

$$v^{\frac{1}{3}} \leqslant -u^{\frac{1}{2}}\ ,\ \ f_{X_1,X_2}(u,v) = 0$$

$Y(t) = aX(t)^2 + bX(t)^3$ 概率密度函数的求解

将以上结果代入 $f_{Y_1;Y_2}(y_1, y_2) = -\frac{1}{\omega_1 y_1}\frac{1}{\omega_2 y_2} f_{X_1;X_2}(u, v)$，即可得到：

$$f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_1\omega_2 y_1 y_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi u}\sigma} e^{-\frac{u}{2}} & , v^{\frac{1}{3}} \geqslant u^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{\omega_1\omega_2 y_1 y_2}\left(\frac{1}{3x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{2x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}}\right) & , -u^{\frac{1}{2}} < v^{\frac{1}{3}} < u^{\frac{1}{2}} \\ 0 & , v^{\frac{1}{3}} \leqslant u^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

再通过积分即可得出 $Y(t)$ 的特征函数为：

$$\Phi_Y(\omega) = E[Y_1 Y_2] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1Y_2}\left(\frac{\ln y_1}{j\omega_1}, \frac{\ln y_2}{j\omega_2}\right) dy_1 dy_2$$

Thanks For Listening.