Simulation et ajustement de modèles de croissance de populations biologiques

Partie 1 :
Les modèles exponentiel et logistique

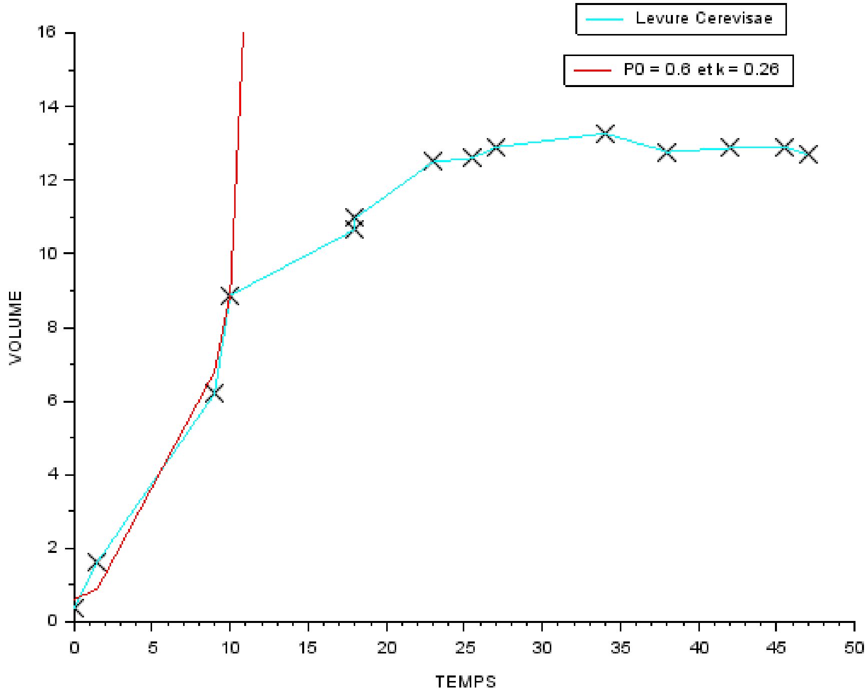
Partie 2 :
Extensions du modèle logistique : compétition, proie-prédateur, chasse …

kevin.caye@imag.fr

D1

Croissance de populations : rappels

- Une espèce, temps court

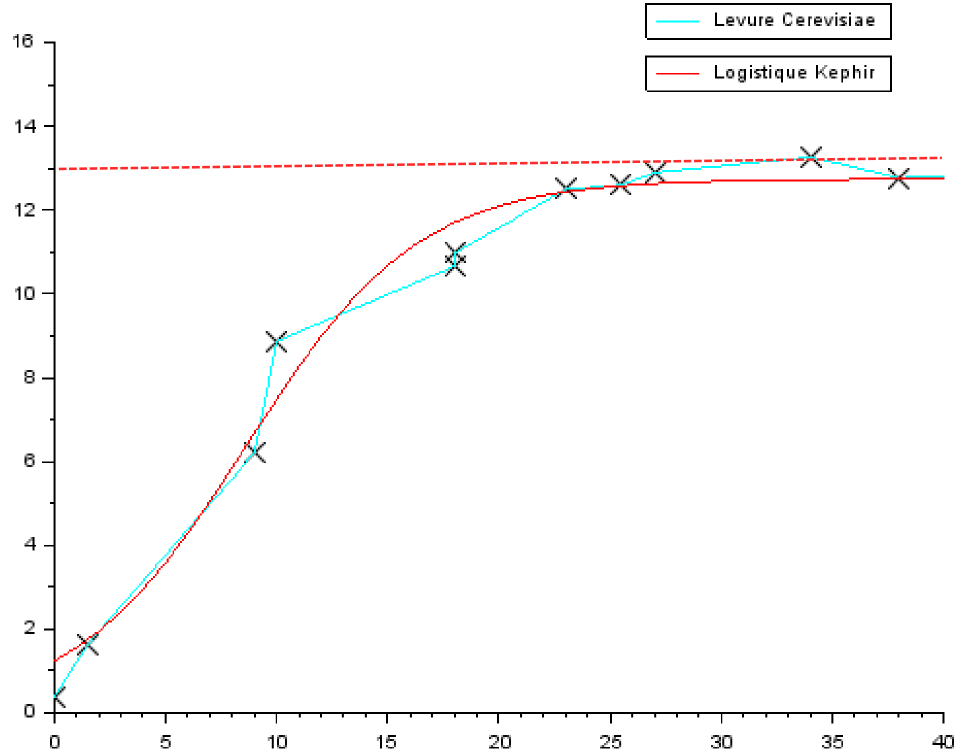


D2

Croissance de populations : rappels

- Une espèce, temps long

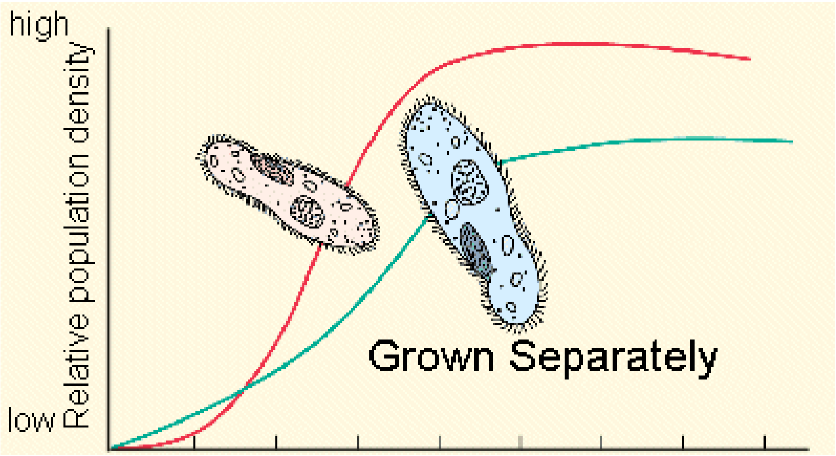
Limite environnement



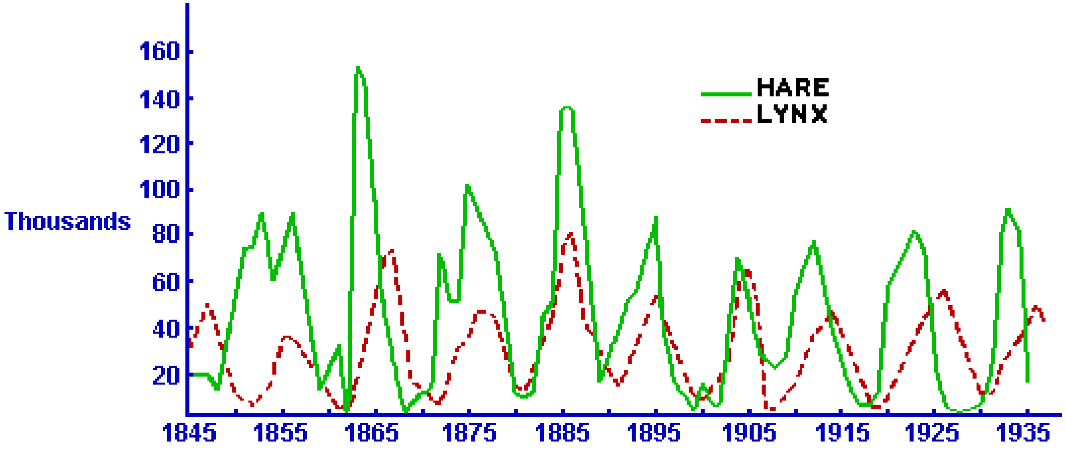
D3

Deux espèces ?

- Compétition



- Prédation



D4

Modélisation de la dynamique avec deux espèces

- Système dynamique avec 1 espèce

$$\frac{dP}{dt}(t) = f(t, P(t))$$

- Système dynamique avec 2 espèces

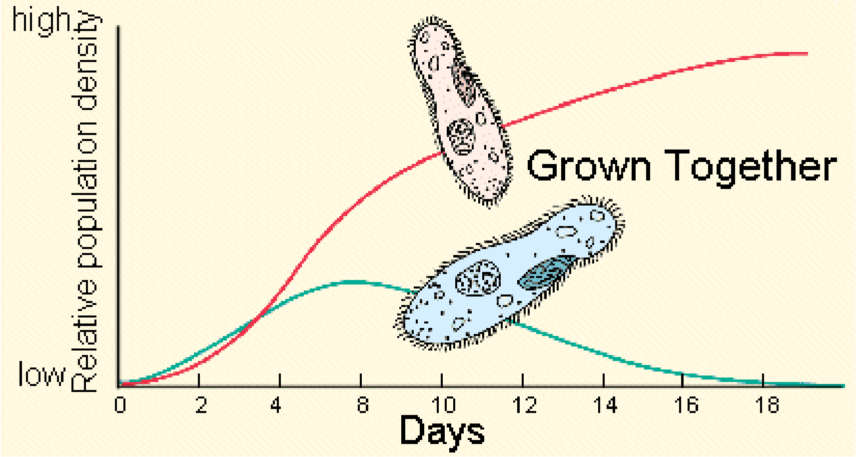
$$\frac{dP_1}{dt}(t) = f_1(t, P_1(t), P_2(t))$$

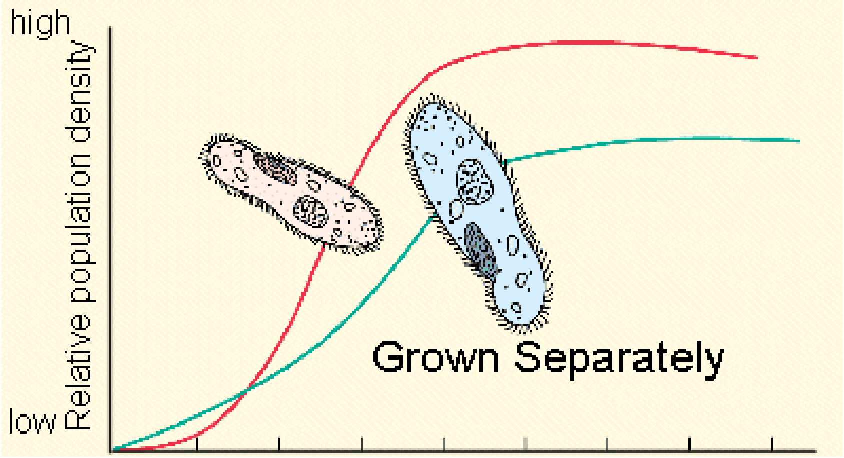
$$\frac{dP_2}{dt}(t) = f_2(t, P_1(t), P_2(t))$$

D5

Compétition

- Deux espèces ayant des besoins semblables se limitent





D6

Compétition

- Modèle logistique

$$\frac{dP}{dt}(t) = kP(t)\frac{M - P(t)}{M}$$

- 2 espèces en compétition

$$\frac{dP_1}{dt}(t) = kP_1(t)\frac{M_1 - P_1(t) - \alpha P_2(t)}{M_1}$$

$$\frac{dP_2}{dt}(t) = kP_2(t)\frac{M_2 - P_2(t) - \beta \mathrm{P}_1(t)}{M_2}$$

Simulation

- Pas de solution analytique

- On utilise les outils de résolution numérique, voir TP
  - Ode
  - Discrétisation numérique
  - ...

Etude du système dynamique

- On est a un point d'équilibre ssi :

$$\frac{dP_1}{dt} = 0$$

$$\frac{dP_2}{dt} = 0$$

Etude du système dynamique

- On cherche une configuration (P_1, P_2) tel que :

$$\frac{dP_1}{dt} = 0 = kP_1 \frac{M_1 - P_1 - \alpha P_2}{M_1}$$

$$\frac{dP_2}{dt} = 0 = kP_2 \frac{M_2 - P_2 - \beta \mathrm{P}_1}{M_2}$$

- Quand on est dans cette configuration, on y reste.

Etude du système dynamique

- Points d'équilibre ?

$$P_1 = 0 \text{ et } P_2 = 0$$

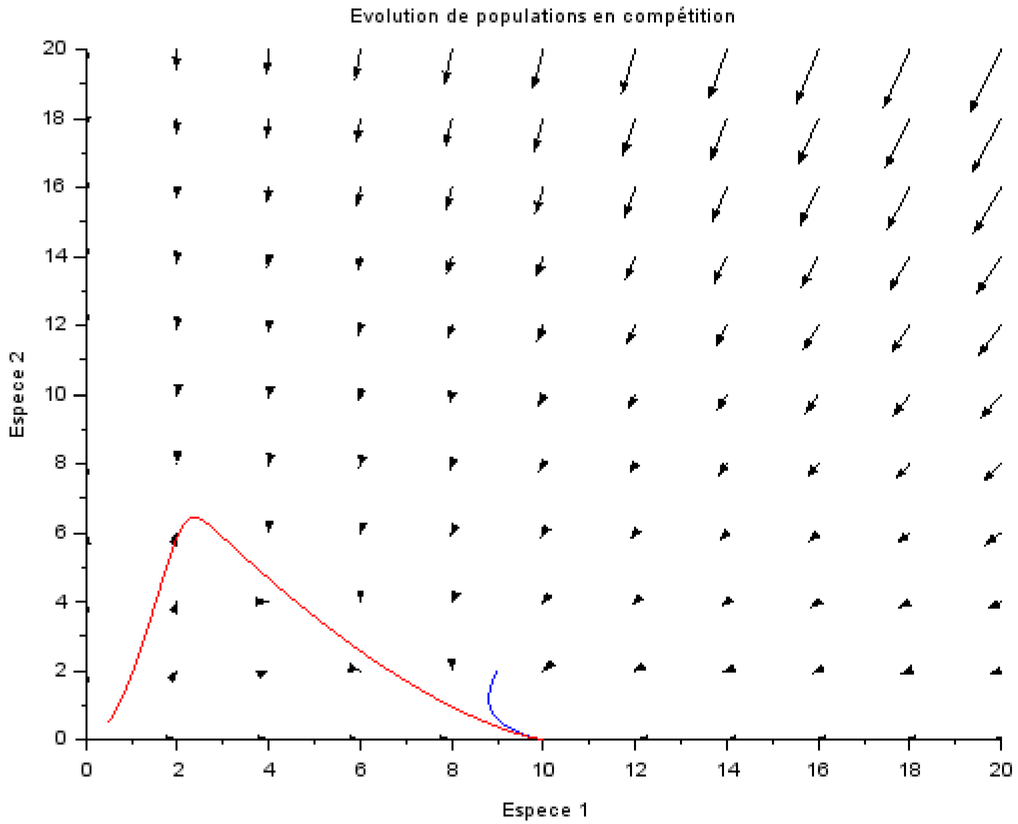
$$P_1 = M_1 \text{ et } P_2 = 0$$

$$P_1 = 0 \text{ et } P_2 = M_2$$

$$P_1 = \frac{1}{1-\alpha\beta}(M_1 - \alpha M_2) \text{ et } P_2 = \frac{1}{1-\alpha\beta}(M_2 - \beta M_1)$$

Etude du système dynamique

- Stabilité et instabilité

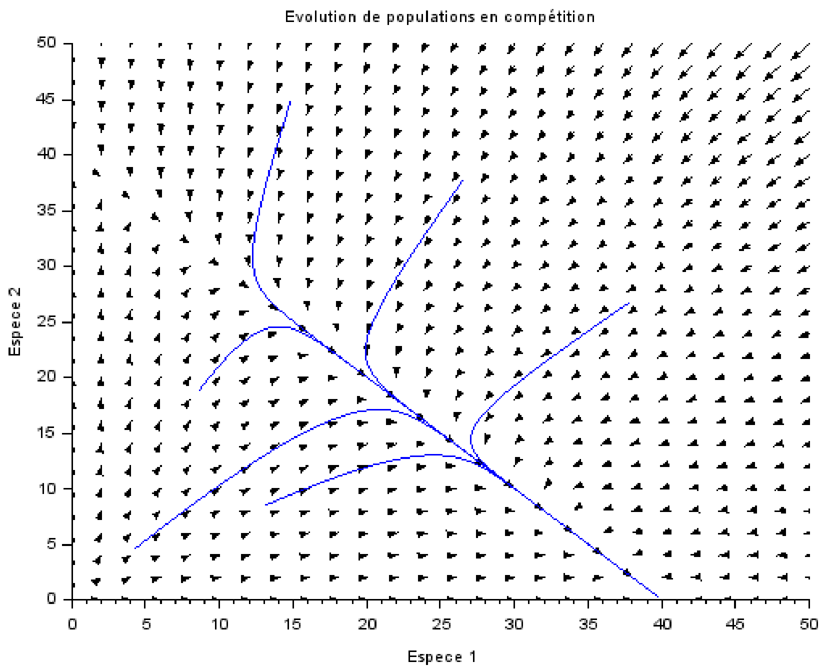


D12

Etude du système dynamique

- Stabilité? Cas 1

$$\beta M_1 > M_2 \text{ et } \alpha M_2 < M_1$$

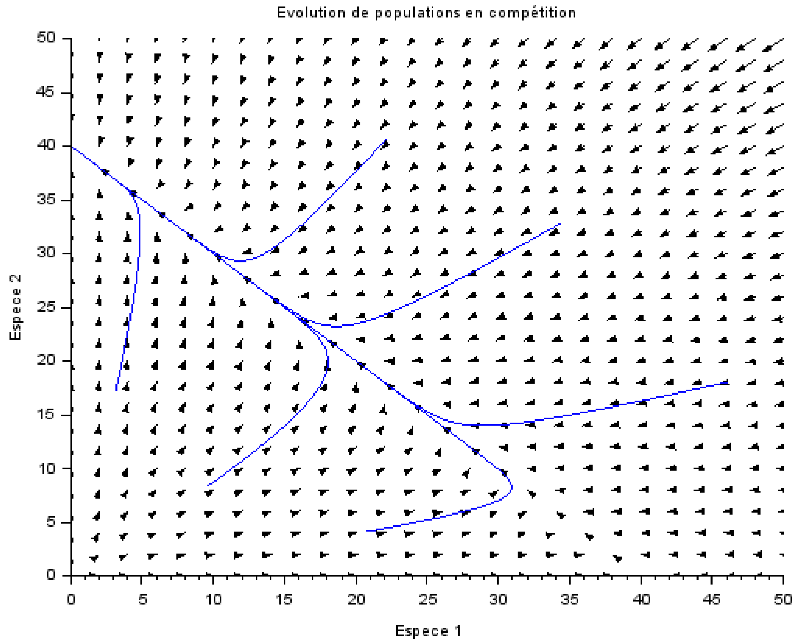


D13

Etude du système dynamique

- Stabilité? Cas 2

$$\beta M_1 < M_2 \text{ et } \alpha M_2 > M_1$$

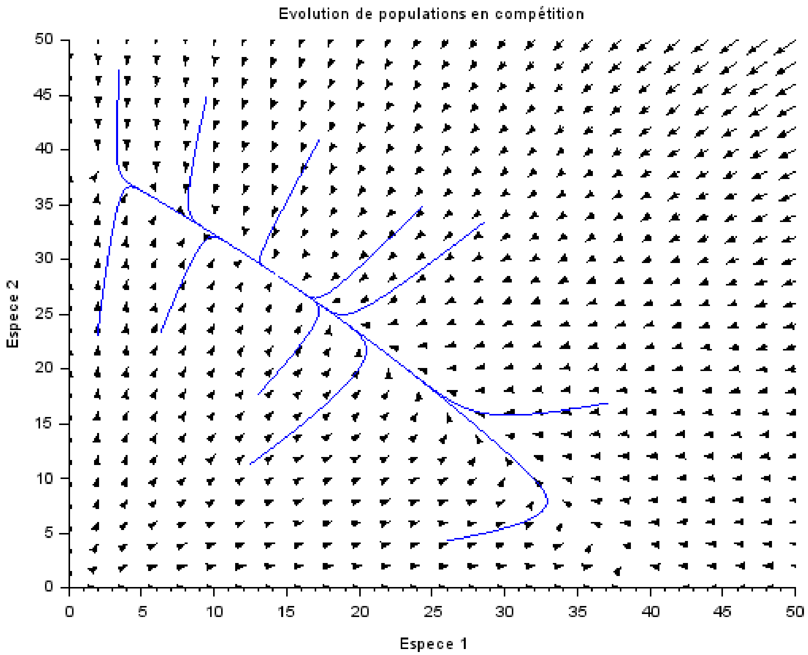


D14

Etude du système dynamique

- Stabilité? Cas 3

$$\beta M_1 < M_2 \text{ et } \alpha M_2 < M_1$$

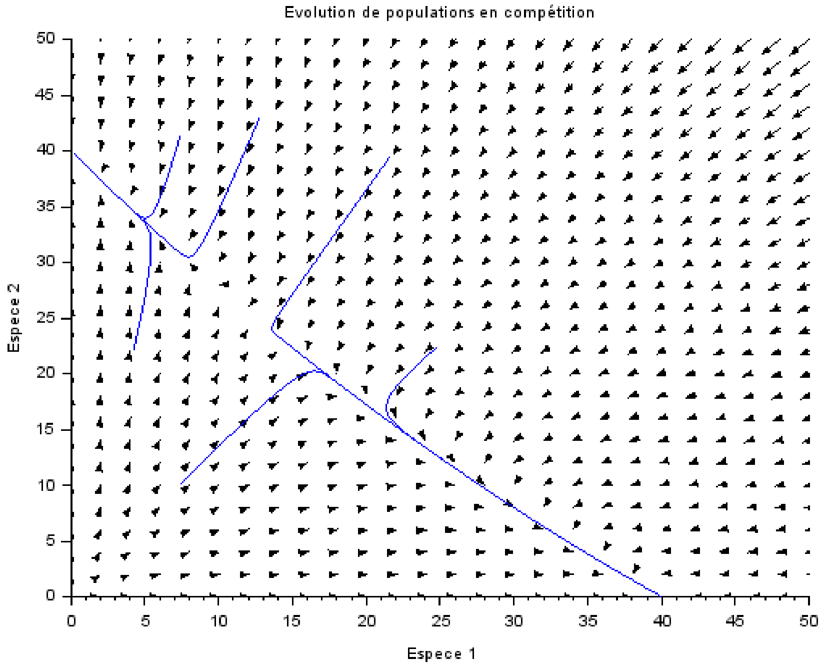


D15

Etude du système dynamique

- Stabilité? Cas 4

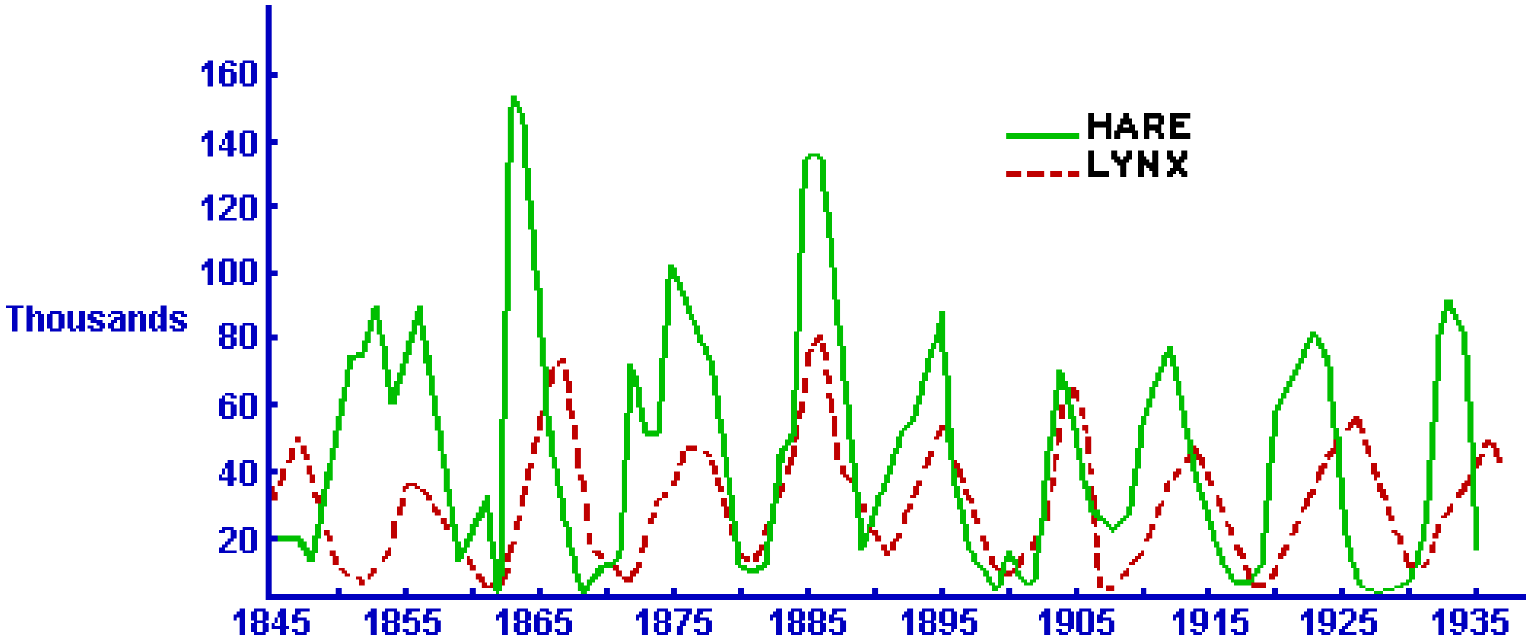
$$\beta M_1 > M_2 \text{ et } \alpha M_2 > M_1$$



D16

Prédation

- Système : une proie et un prédateur



Prédation

- Hypothèses :
  - Pas de contrainte du milieu pour la proie
  - Le prédateur ne mange que cette proie

- On part donc du modèle exponentiel.

$$\frac{dP}{dt}(t) = kP(t)$$

Prédation, modèle de Lotka-Volterra

- Modèle exponentiel

$$\frac{dP}{dt}(t) = kP(t)$$

- P_1 la proie, P_2 le prédateur

$$\frac{dP_1}{dt}(t) = k_1 P_1(t) - \alpha P_2(t) P_1(t)$$

$$\frac{dP_2}{dt}(t) = -k_2 P_2(t) + \beta P_1(t) P_2(t)$$

α : mesure l'habileté des proies à échapper aux prédateurs

β : mesure l'habileté des prédateurs à attraper des proies

Simulation

- Pas de solution analytique

- On utilise les outils de résolution numérique, voir TP
  - Ode
  - Discrétisation numérique
  - ...

Etude du système

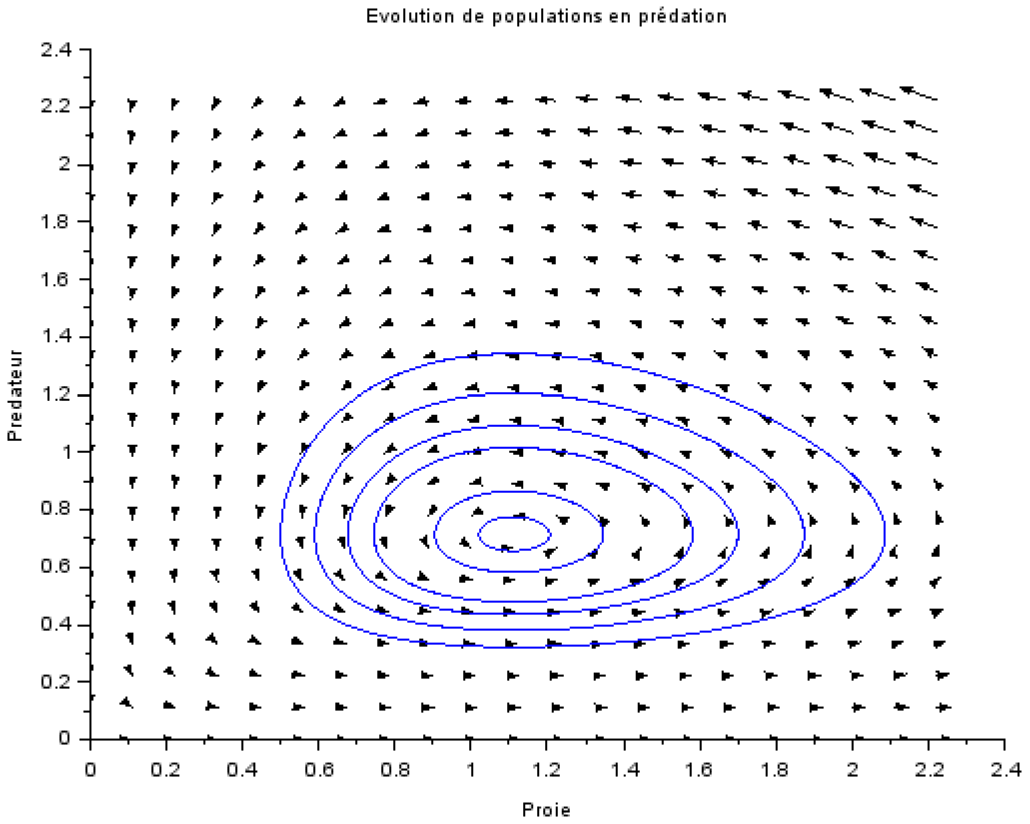
- Point d'équilibre?

$$P_1 = 0 \text{ et } P_2 = 0$$

$$P_1 = \frac{k_1}{\alpha} \text{ et } P_2 = \frac{k_2}{\beta}$$

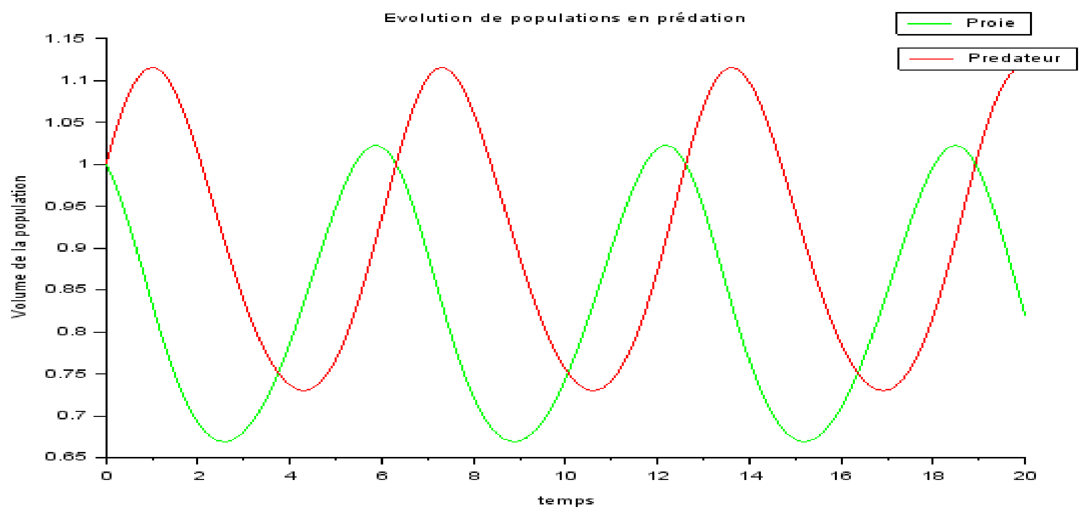
Etude du système

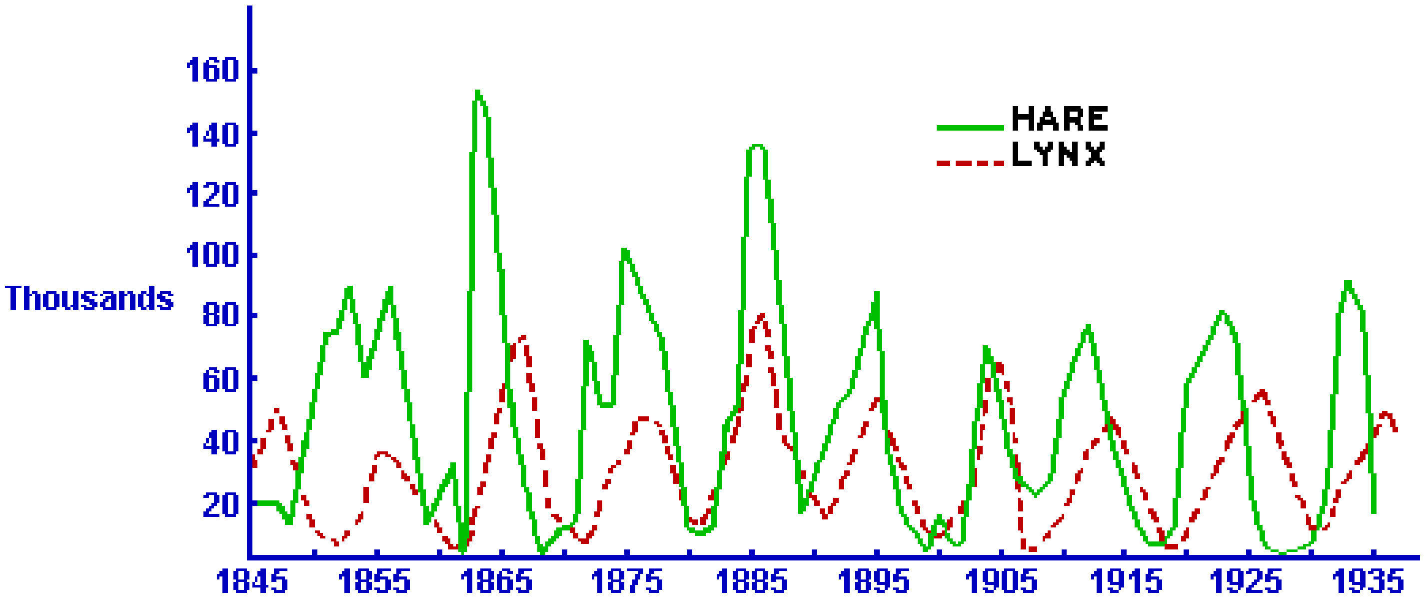
- Stabilité?



D22

Etude du système





Modélisation de la croissance de populations biologiques

Partie 2 :
Extensions du modèle logistique :
compétition, proie-prédateur, chasse …

Illustration ⇔ TP2

D24

Illustration ⇔ TP2