Simulation et ajustement de modèles de croissance de populations biologiques

Partie 1 :
Les modèles exponentiel et logistique

Partie 2 :
Extensions du modèle logistique : compétition, proie-prédateur, chasse …

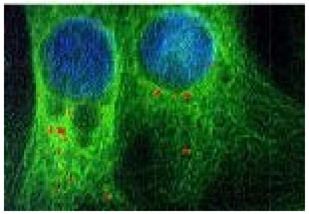
Kevin.caye@imag.fr

D1

Pourquoi modéliser

- Prédire :
  - Prédiction météo
  - Prédire la trajectoire d'un fusée
- Optimiser :
  - Trouver la meilleur forme pour une voiture de course
- Comprendre :
  - Comprendre comment croit une population

Les étapes de la modélisation

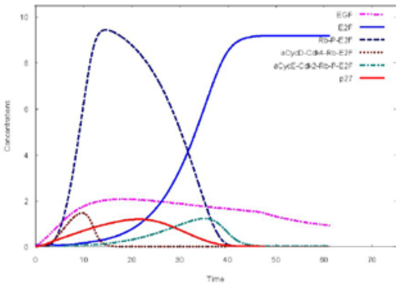


mesure

analyse

$$\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}=rP(t)$$

Simulation



prédiction

D3

Les étapes de la modélisation

- Modèle : équations

- Construction du modèle :
  - Analyse
  - Hypothèses
  - Equations…

- Simulation : ordinateur

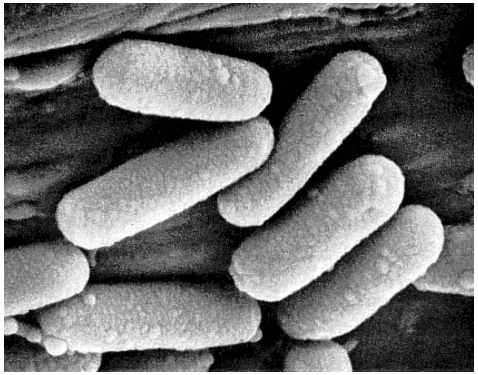
D4

Les étapes de la modélisation

- Ajustement : trouver les bons paramètres
- Validation : Calculer la pertinence par rapport à la réalité

Croissance de populations cellulaires ?

- Anticiper l’évolution
- Pouvoir la quantifier et comparer



D6

Avant de modéliser !

- Expériences :

- Erreurs => plusieurs mesures mieux qu'une

Modèles continues de la dynamique des population

- Effectif d'une population est représenté par une fonction réelle

$$P : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$

- Equation différentielle pour modéliser la dynamique

$$\frac{P(t+dt) - P(t)}{dt} = \frac{dP}{dt}(t) = f(t, P(t))$$

Simulation des modèles continues

- Soit on connait la solution analytique de l'équation différentielle

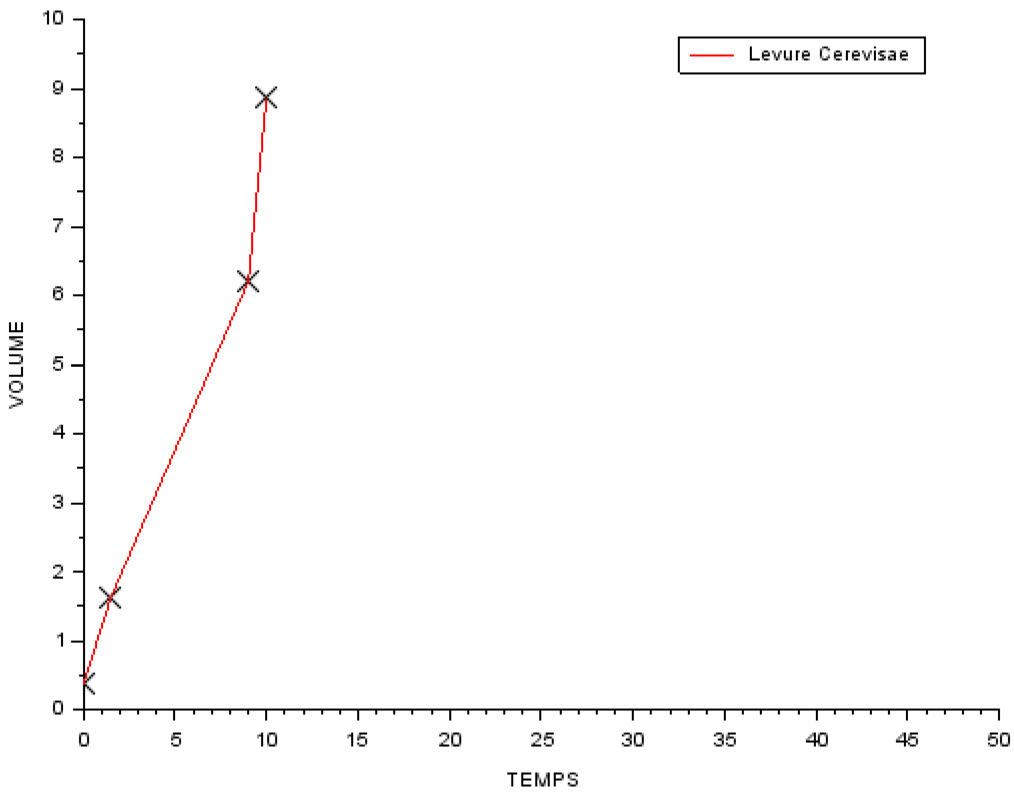
$$P(t) = \ \dots$$

- Méthodes numériques : méthode d'euler, …

$$P(t+dt) = p(t) + dt\, f(t, P(t))$$

Le modèle de croissance de Malthus

- Mesure de population de levure :



D10

Le modèle de croissance de Malthus

- Loi générale :

$$\frac{dP}{dt}(t) = taux\ instantané\ de[\ \boldsymbol{naissance} - \boldsymbol{décès}\ + \boldsymbol{migration}\ ]$$

D11

Le modèle de croissance de Malthus

- Hypothèse :
  - Le milieu contient seulement des levures
  - Toutes les levures sont identiques
  - Pas de migration
  - Les ressources et éléments vitaux sont illimités

Le modèle de croissance de Malthus

- On propose se modèle
  - Taux instantané de croissance proportionnel à l'effectif et ne dépend pas du temps
  - k = taux de natalité – taux de mortalité

$$\frac{dP}{dt}(t) = kP(t)$$

Le modèle de croissance de Malthus

- Solution analytique
  - P_0 : les conditions initiales

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

- C'est pour cela qu'on l'appel modèle exponentiel

D14

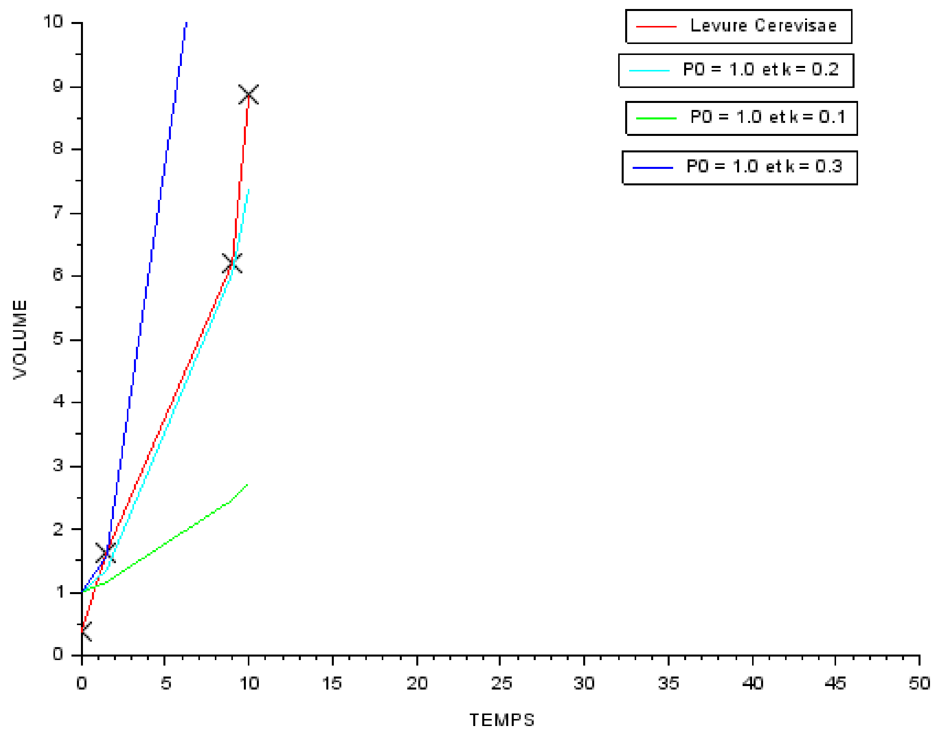
Simulations

- En utilisant directement la solution analytique
  – On sait exactement qui est P(t)

- En utilisant des outils de calcul numérique
  – Ex : fonction « ode » de scilab

Ajustement

- Comment trouver P_0 et k pour ajuster ?



D16

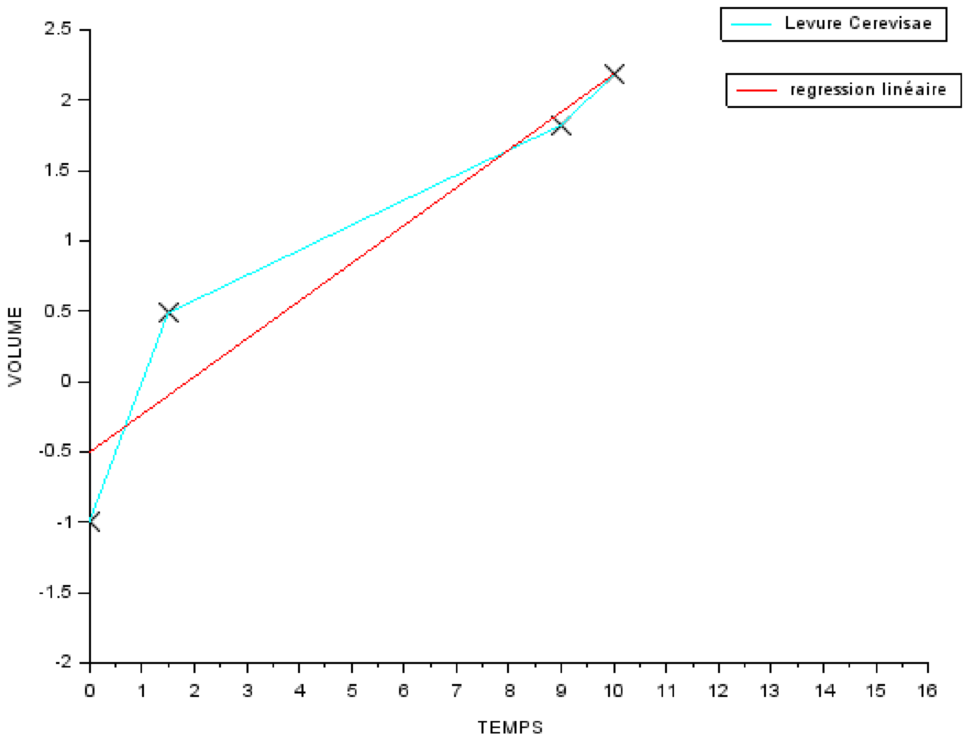
Ajustement

- Méthode graphique (voir tp)

- ICI on peut faire une transformation logarithmique PK?

Ajustement

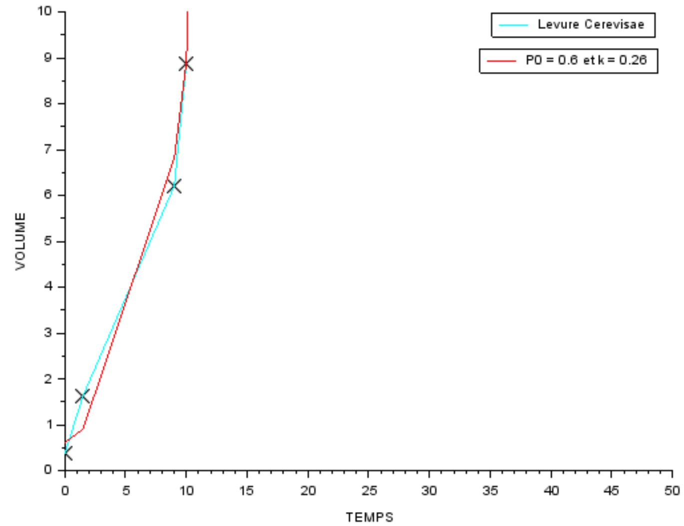
- Transformation logarithmique



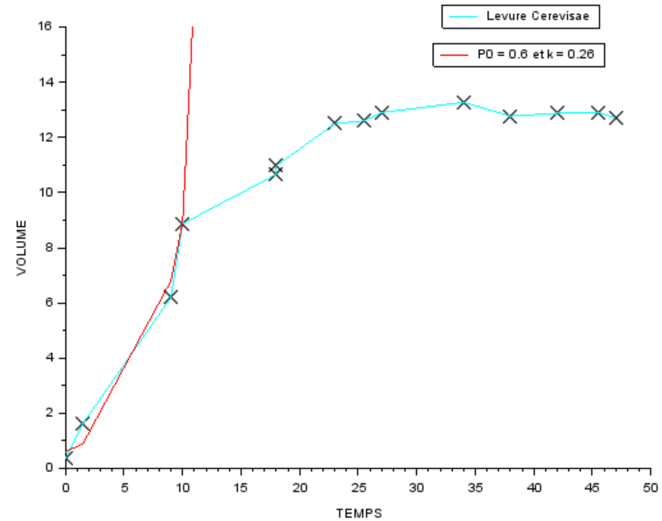
D18

Validation

- Pour temps court



- Pour temps long

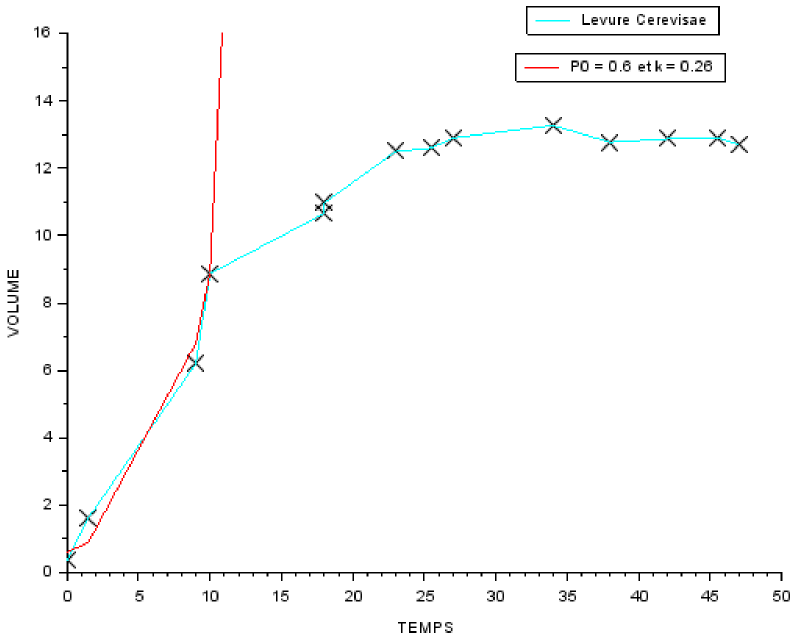


Le modèle logistique de Vershulst

- l'environnement limite son potentiel biotique

  – Pas de nourriture

  – Pas de place



Le modèle logistique de Vershulst

- Comment modéliser cela ?
  - M est la capacité biotique

$$\frac{P(t+dt)-P(t)}{dt} = kP(t)\frac{M-P(t)}{M}$$

- Pourquoi ?
  - Que se passe-t-il si $P(t) = M$?
  - Si $P(t) > M$

Le modèle logistique de Vershulst

- Solution analytique

$$P(t) = M \frac{1}{1 + \left(\frac{M}{P_0} - 1\right) e^{-kt}}$$

– $t \to \infty$?

D22

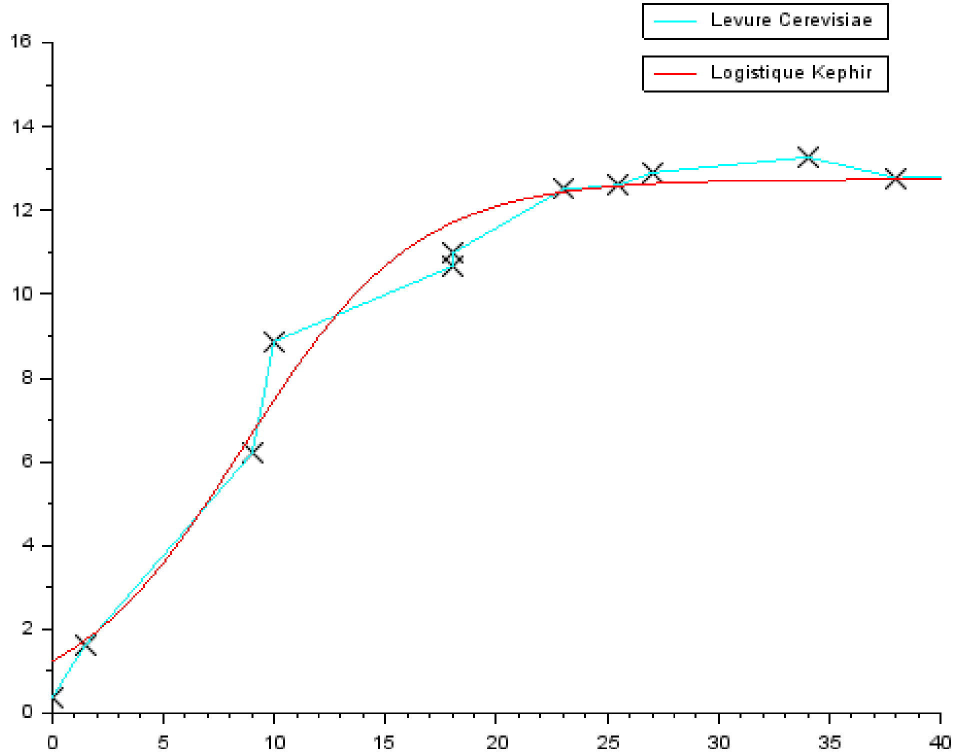
Simulation

- En utilisant directement la solution analytique
  - On sait exactement qui est P(t)

- En utilisant des outils de calcul numérique
  - Ex : fonction « ode » de scilab

Ajustement

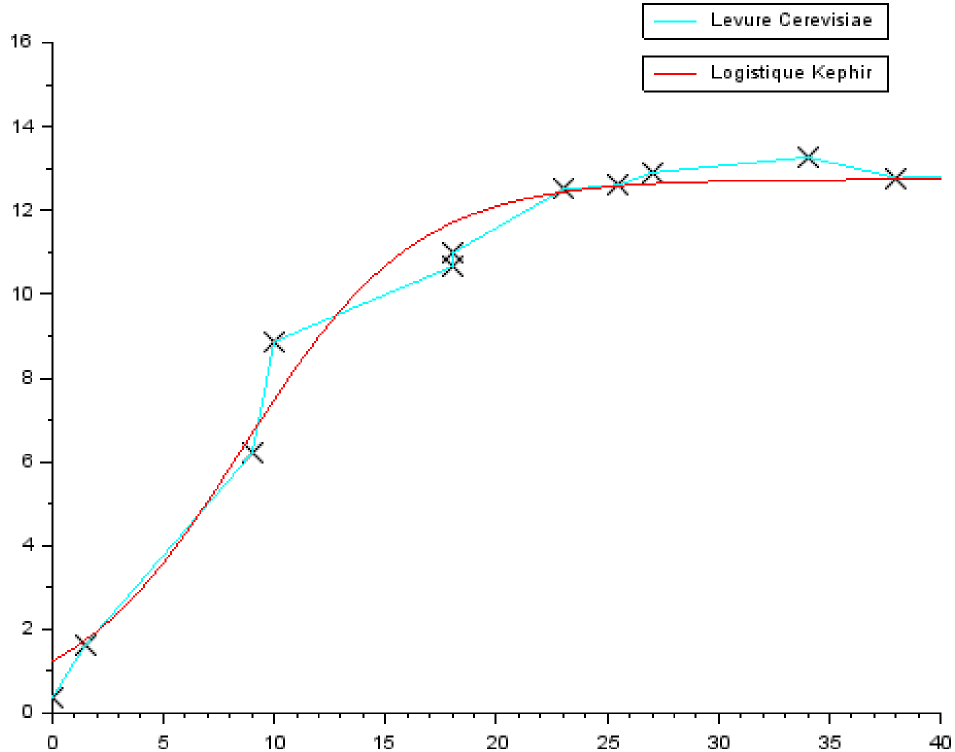
- Graphiquement M, P_0, k ?



D24

Ajustement

- Existe outils mathématique voir TP



D25

Modélisation de la croissance de populations biologiques

Partie 1 :
Les modèles exponentiel et logistique

Illustration ⇔ TP1