Série 1 :

Exercice 1 : On note le cours d'une action pendant 5 jours de suite:

jours	15 mars	16 mars	17 mars	18 mars	19 mars
cours	135	143	140	154	152

Déterminer l'équation de la tendance (droite) et prévoir le cours du jour suivant. Faire un graphique.

Exercice 2 : Les ventes trimestrielles d'une entreprise (en milliers de DH) ont suivi l'évolution suivante pendant 4 ans:

Date t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Série Z_t	235	298	221	340	268	327	242	378	300	368	292	421	334	421	322	465

a) Représenter graphiquement l'évolution des ventes.

b) Déterminer la tendance (ajustement linéaire).

c) Calculer les coefficients saisonniers.

d) Etablir des prévisions sur 1 an.

e) Corriger la série des variations saisonnières.

f) Reporter tous les résultats de l'étude sur le même graphique et préciser la signification de chaque coefficient.

Exercice 3 : Un chanteur célèbre est innondé de courrier par ses admiratrices. Son Manager a établi la statistique du nombre de lettres reçues chaque trimestre pour la période des 4 dernières années:

		Année			
		1	2	3	4
Trimestre	1	1000	1200	1500	1400
	2	1500	1800	2000	1800
	3	1400	1700	1800	1600
	4	800	1200	1300	1100

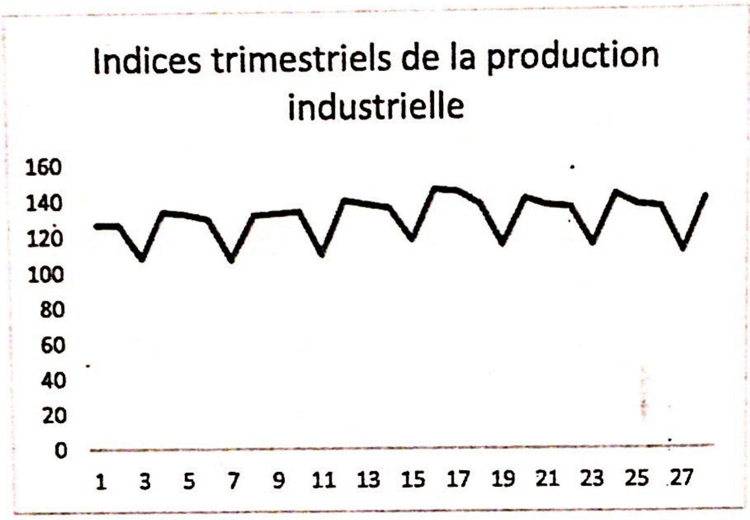
a) Faire un graphique de la série. Que remarque-t'on ?

b) Déterminer la tendance en utilisant la méthode des moyennes mobiles d'ordre 5. Reporter les valeurs sur le graphique.

c) Calculer les coefficients saisonniers. Expliquer ce qu'ils signifient.

d) Etablir la série C.V.S. Reporter les valeurs sur le graphique. Commenter les résultats.

Exercice 4 : Nous donnons au tableau la série Yt des indices trimestriels de la production industrielle du premier trimestre de l'année 1976 à 1982. Notre objectif est maintenant d'obtenir la tendance par une régression linéaire, puis d'en déduire à partir de la série corrigée les coefficients saisonniers.



1. On modélise l'indice trimestriel Y_t de la production industrielle par : $Y_t = a\,t + b$ pour $t = 1, \cdots 28$ correspondant à chacun des trimestres entre 1976 et 1982. On donne :

$$\sum_{t=1}^{28} t = 406, \quad \sum_{t=1}^{28} y_t = 3647, \quad \sum_{t=1}^{28} t^2 = 7714, \quad \sum_{t=1}^{28} y_t^2 = 478765, \quad \sum_{t=1}^{28} t y_t = 53500.$$

2. Calculer les estimations des moindres carrés $\hat{a}$ et $\hat{b}$ de a et b.
3. Comment calculer les coefficients saisonniers ?
4. Compléter les tableaux suivants :

T	Y	$\widehat{Y} = \widehat{a}T + \widehat{b}$	$\widehat{\varepsilon} = Y - \widehat{Y}$	Trimestre
1	127	125,680	1,320	1
2	127	126,018	0,982	2
3	108	126,357	-18,357	3
4	134	126,695	7,305	4
5	133		5,966	1
6	130		2,628	2
7	107		-20,711	3
8	132		3,950	4
9	133		4,612	1
10	134	128,727	5,273	2
11	110	129,065		3
12	140	129,404		4
13	138	129,742		1
14	136	130,081		2
15	118	130,419		3
16	146	130,758	15,242	4
17	145	131,096	13,904	1
18	138	131,435	6,565	2
19	115	131,773	-16,773	3
20	141	132,112	8,888	4
21	137	132,450	4,550	1
22	136	132,789	3,211	2
23	115	133,128	-18,128	3
24	143	133,466	9,534	4
25	137	133,805	3,195	1
26	136	134,143	1,857	2
27	111	134,482	-23,482	3
28	140	134,820	5,180	4

rcice

$$X_t = 0,4X_{t-1} - 0,2X_{t-2} + 40 + a_t \quad ; a_t \sim BB(0,5)$$

1) stationnarité

$X_t = 0,4X_{t-1} - 0,2X_{t-2} + 40 + a_t \Leftrightarrow (1-0,4B+0,2B^2)X_t = 40 + a_t$

(car $B^k X_t = X_{t-k}$ B: operateur)

X_t est stationnaire ssi le polynôme $A(z)$ a des racines de module > 1 avec $A(z) = 1 - 0,4z + 0,2z^2$

*strict

$A(z) = 0 \Leftrightarrow 0,2z^2 - 0,4z + 1 = 0$

$$\Delta = (0,4)^2 - 4 \times 0,2 = -0,64 = (0,8i)^2$$

$$z_1 = \frac{0,4 + 0,8i}{2 \times 0,2} = 1 + 2i \qquad z_2 = 1 - 2i$$

$|z_1| = |z_2| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} > 1$

d'où X_t est SSL et causal.

2)

$$E\{X_t\} = \frac{\mu}{1 - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j} = \frac{40}{1 - 0,4 + 0,2} = 50$$

3) equation de Yules walker

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \sum_{j=1}^{p} \phi_j \rho(j)} \qquad var(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - 0,4\rho_1 + 0,2\rho_2}$$

...rcice

$$X_t = 0{,}4X_{t-1} - 0{,}2X_{t-2} + 40 + a_t \quad ; a_t \sim BB(0,5)$$

1) stationnarité

$X_t = 0{,}4X_{t-1} - 0{,}2X_{t-2} + 40 + a_t \Leftrightarrow (1 - 0{,}4B + 0{,}2B^2)X_t = 40 + a_t$

(car $B^k X_t = X_{t-k}$ B: operateur)

X_t est stationnaire ssi le polynôme $A(z)$ a des racines de module > 1 (strict) avec $A(z) = 1 - 0{,}4z + 0{,}2z^2$

$A(z) = 0 \Leftrightarrow 0{,}2z^2 - 0{,}4z + 1 = 0$

$$\Delta = (0{,}4)^2 - 4 \times 0{,}2 = -0{,}64 = (0{,}8i)^2$$

$$z_1 = \frac{0{,}4 + 0{,}8i}{2 \times 0{,}2} = 1 + 2i \qquad z_2 = 1 - 2i$$

$|z_1| = |z_2| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} > 1$

d'où X_t est SSL et causal.

2)

$$E\{X_t\} = \frac{\mu}{1 - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j} = \frac{40}{1 - 0{,}4 + 0{,}2} = 50$$

3) equation de Yules walker

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \sum_{j=1}^{p} \phi_j \rho(j)} \qquad var(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - 0{,}4\rho_1 + 0{,}2\rho_2}$$

D

$$\rho(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} = \frac{0,4}{1-0,2} = \frac{1}{3} = \frac{25}{75}$$

$$\rho(2) = \phi_1 \rho(1) + \phi_2 = \frac{-1}{15} = \frac{5}{75}$$

$\sigma^2 = 5$ ($a_t \sim BB(0,$

$$var(X_t) = \gamma(0) = \frac{5}{1 - 0,4 \times \frac{1}{3} + 0,2 \times \frac{-1}{15}} = 5,859$$

← Calcul des coef de corrélat° partielle

<u>Exercice</u> ②

$$\cancel{X_t = 1,4 X_{t-1} + 0,2 X_{t-2} - 0,6 X_{t-3} + a_t}$$

Donnée

AR(2)

$C = 9,95$

$\phi_1 = 0,321434$

$\phi_2 = 0,484827$

$$\mu = C \times (1 - \phi_1 - \phi_2) = 1,9279$$

$$\hat{X}_{10} = 1,9280 + 0,32 X_9 + 0,48 X_8$$

$$= 2,57$$

$\hat{X}_{11} = 2,27$ et $\hat{X}_{12} = 3,20$.

~~cice~~ 1 $AR(p)$: la constante c donné par SPSS

n'est pas $= \mu$ $c = \frac{\mu}{1-(\phi_1+\phi_2)} = E\{X_t\}$.

$\rightarrow AR(2)$

$AR(1)$: $c = \frac{\mu}{1-\phi}$; $AR(p)$: $c = \frac{\mu}{1-\sum_{j=1}^{p}\phi_j}$.

Après analyse le modèle $AR(1)$ est jugé adéquat pour cette série

Calculer la meilleure prévision, la variance de l'erreur de prévision, et l'$IC_{95\%}$ pour chacune des $\hat{X}_{2012}$ $\hat{X}_{2013}$ $\hat{X}_{2014}$; $a_t \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

Année	2008	2009	2010	2011
X_t	11,2	13,5	11,2	10,4

variable	coef
c	7,12
AR(1)	0,29

$X_t \sim AR(1) \Leftrightarrow X_t = \mu + \phi X_{t-1} + a_t$; $a_t \sim \mathcal{N}(0,1)$

D'après le cours $E\{X_t\} = \frac{\mu}{1-\phi} = c \Leftrightarrow \mu = (1-\phi)\times c$

le tableau donne $\phi = 0,29 \Leftrightarrow \mu = 5,0552$

$\rightarrow$ $\boxed{X_t = 5,0552 + 0,29 X_{t-1} + a_t}$

. Les prévisions

. $\hat{X}_{2012} = 5{,}0552 + 0{,}29 \times 10{,}4 = 8{,}0712$

. $\hat{X}_{2013} = 7{,}3958$ et $\hat{X}_{2014} = 7{,}1999 \simeq 7{,}20$

. La variance de l'erreur $\Delta_i = y_{t+i} - \hat{y}_{t+i}$

. $X_{t+1} = \mu + \phi X_t + a_t \qquad \hat{X}_{t+1} = \mu + \phi X_t$

. $\Delta_1 = X_{t+1} - \hat{X}_{t+1} = \underline{\underline{\mu}} + \phi \underline{\underline{X_t}} + a_t - \underline{\underline{\mu}} - \underline{\underline{\phi X_t}}$

$= a_t$

d'où $\quad var(\Delta_1) = var(a_t) = \sigma^2 = 1$

. $\Delta_2 = X_{t+2} - \hat{X}_{t+2} = \underline{\underline{\mu}} + \phi X_{t+1} + a_t - \underline{\underline{\mu}} - \phi \hat{X}_{t+1}$

$= \phi \Delta_1 + a_t$

$var(\Delta_2) = \phi^2 \sigma^2 + \sigma^2 = (1+\phi^2)\sigma^2$

$var(\Delta_2) = (1 + 0{,}29^2) \times 1 = 1{,}0841$

. $\Delta_3 = X_{t+3} - \hat{X}_{t+3} = \underline{\underline{\mu}} + \phi X_{t+2} + a_t - \underline{\underline{\mu}} - \phi \hat{X}_{t+2}$

$= \phi (X_{t+2} - \hat{X}_{t+2}) + a_t$

$= \phi \Delta_2 + a_t$

$var(\Delta_3) = \phi^2 var(\Delta_2) + \sigma^2 = \phi^2 (1+\phi^2)\sigma^2 + \sigma^2$

$= (\phi^4 + \phi^2 + 1)\sigma^2$

$\ldots (1 + 0{,}29^2 + 0{,}29^4) = 1{,}0911$

as général

$$Var(\Delta k) = (1+\phi^2+ \dots + \phi^{2k-2})\sigma^2 = \sum_{j=0}^{k-1} \phi^{2j}\sigma^2$$

et

$$X_{n+k} - \hat{X}_{k+n} = \sum_{j=0}^{k-1} \phi^j a_{n+k-j}$$

. L'IC est de la forme

$$\left[\hat{X}_{n+k} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \, \sigma . \sqrt{\sum_{j=0}^{k-1} \phi^{2j}} \right]$$

. $E\{X_{n+k} - \hat{X}_{n+k}\} = E\left\{\sum_{j=0}^{k-1} \phi^j a_{n+k-j}\right\} = 0$ car $a_t \overset{iid}{\sim} BB(0,\sigma^2)$

. $Var\{X_{n+k} - \hat{X}_{n+k}\} = Var\left\{\sum_{j=0}^{k-1} \phi^j a_{n+k-j}\right\}$

$$\overset{iid}{=} \sigma^2 \sum_{j=0}^{k-1} \phi^{2j} \qquad a_t \overset{iid}{\sim} BB(0,\sigma^2)$$

donc $X_{n+k} - \hat{X}_{n+k} \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \sum_{j=0}^{k-1} \phi^{2j}\right)$.

↳ d'où la forme de l'IC de niveau α.

. $IC_{2012} = \left[\hat{X}_{2012} - \underbrace{1{,}96}_{z_{0{,}975}} \times \sqrt{\Delta_1} \, ; \, \hat{X}_{2012} + 1{,}96 \sqrt{\Delta_2} \right]$

$= [6{,}112 \, , \, 10{,}0312]$

$\cdot\ IC_{2013} = \left[\hat{X}_{2013} - 1{,}96\sqrt{\Delta_2}\ ;\ \hat{X}_{2013} + 1{,}96\sqrt{\Delta_3}\right]$

$= [5{,}355\ ;\ 9{,}436]$

$\cdot\ IC_{2014} = \left[\hat{X}_{2014} - 1{,}96\sqrt{\Delta_3}\ ;\ \hat{X}_{2014} + 1{,}96\sqrt{\Delta_3}\right]$

$= [5{,}152\ ;\ 9{,}247]$.

<u>Exercice 2</u> ⇒ Exo3 examen 2018

Mois	06/2012	07/2012	08/2012	10/2012
X_t	1,2	3,5	4,2	6,4

variable	Coef
C	1,99
MA(1)	0,49

$X_t \sim MA(1) \Leftrightarrow X_t = \mu + \theta a_{t-1} + a_t\ ;\ a_t \overset{iid}{\sim} BB(0$
$a_t \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,$

Pour $MA(P)$ on a $E\{X_t\} = \mu = C$
la constante du tab

Soit B un opérateur on a :

$\cdot\ B^k X_t = X_{t-k}$ et $B^k \mu = \mu$ $\quad B^k K = K\ ;\ K =$

$\cdot\ X_t = \mu + \theta a_{t-1} + a_t \Rightarrow X_t - \mu = \theta a_{t-1} + a_t$

$\Rightarrow X_t - \mu = \theta B a_t + a_t$

$= (1 + \theta B) a_t$

donc $a_t = (1-(-\theta B))^{-1} \times (X_t - \mu)$.

Comme $[1-(-\theta B)]^{-1} = \sum_{j\geq 0}(-\theta B)^j = (-\theta B)^0 + \sum_{j\geq 1}(-\theta B)^j$

$= 1 + \sum_{j\geq 1}(-\theta B)^j$

donc $a_t = \left[1 + \sum_{j\geq 1}(-\theta B)^j\right] \times (X_t - \mu)$

$= X_t - \mu + \sum_{j\geq 1}(-\theta)^j B^j (X_t - \mu)$

- $B^j(X_t - \mu) = B^j X_t - B^j \mu = X_{t-j} - \mu$.

donc $a_t = X_t - \mu + \sum_{j\geq 1}(-\theta)^j (X_{t-j} - \mu)$

$\Rightarrow$ $\boxed{X_t = \mu - \sum_{j\geq 1}(-\theta)^j (X_{t-j} - \mu) + a_t \sim AR(\infty)}$

- Calculons $\hat{X}_{10}$; $\hat{X}_{11}$; $\hat{X}_{12}$

Mois /2012	06	07	08	09
$X_t - \mu$	-0,79	1,51	2,21	4,41

$\mu = 1,99$ $\quad (-\theta)^{2k} = 0,49$

$\theta = 0,49$ $\quad (-\theta)^{2k+1} = -0,49$

$\hat{X}_{10} = 1,99 - \{(-0,49) \times 4,41 + 0,49^2 \times 2,21 - 0,49^3 \times 1,51 - 0,49^4 \times 0,79\}$

$\hat{X}_{10/2012} = 3,8434$

D'après le cours $X_t \sim MA(q) \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{X}_{t+1} : \text{à calculer} \\ \hat{X}_{t+h} = \mu \quad \text{pour } h \geq 2 \end{cases}$ (1)

d'où $\hat{X}_{11} = \hat{X}_{12} = 1{,}99$.

L'IC pour 2010 de niveau 95% $\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975$

$\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

$$IC_{10/2012} = \left[\hat{X}_{10/2012} - z_{\frac{\alpha}{2}} \underbrace{\sqrt{\cdots}}_{\sqrt{var(\Delta_1)}} ; \hat{X}_{10/2012} + z_{\alpha/2} \underbrace{\sqrt{var(\Delta_1)}}_{\sqrt{var(\Delta_1)}}\right] \quad var(\Delta_1) = 1$$

$$IC_{2012}^{10/} = [3{,}84 - 1{,}96 ; 3{,}84 + 1{,}96]$$

$$= [1{,}88 ; 5{,}8].$$

. variance $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

. $\Delta_1 = X_{k+1} - \hat{X}_{k+1} = \mu + a_{t+1} + \theta a_t - \mu - \theta a_t = a_{t+1}$

$\Rightarrow var(\Delta_1) = \sigma^2 = 1$

. $\Delta_2 = X_{k+2} - \hat{X}_{k+2} = \mu + \theta a_{n+1} + a_{n+2} - \underset{k+2}{\mu}$

$= \theta a_{n+1} + a_{n+2}$

$\rightarrow var(\Delta_2) = (1+\theta^2)\sigma^2$

. $\Delta_3 = X_{k+3} - \hat{X}_{k+3} = \mu + \theta a_{k+2} + a_{k+3} - \mu$

$= \theta a_{k+2} + a_{k+3}$

$var(\Delta_3) = (1+\theta^2)\sigma^2 = var(\Delta_2)$ et $\hat{X}_{k+2} = \hat{X}_{k+3} = \cdot$

donc $IC_{11/2012} = IC_{12/2012} = \left[1{,}99 \pm 1{,}96\sqrt{var(\Delta_2)}\right]$

$= [-0{,}19 ; 4{,}17].$

Équation de Yules Walker AR(P)

cas $p = 5$ $\qquad$ P_i : fonction d'autocorrelation

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_3 & \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_4 & \rho_3 & \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \end{pmatrix}$$

matrice symetrique donc ex cas ③ $k = 3$

$$\begin{array}{cccc} & ① & ② & ③ \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ * & 1 & \overset{①}{\rho_1} & \overset{②}{\rho_2} \\ * & * & 1 & \overset{①}{\rho_1} \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}$$

$P_1 = \rho_1$ $\qquad$ et $P_2, P_3, - - - \to$ calcul matriciel

. AR(1) : $P_k = 0$ si $k \geq 2$ $\quad P_1 = \rho_1 = \phi$

($\rho_k \searrow$ de façon oscillatoire ou asymptotique).

. Générale : pour AR(P)

$P_k = 0$ pour $k \geq p+1$

P_0 - di[illegible]

* Moyenne mobile de taille m

• $q = m-1/2$ $\qquad Y_j = \sum_{k=-q}^{q} x_{j+k}/m$

m pair : $q = m/2$; $Z_j = \sum_{k=-q+1}^{q} x_{j+k}/m$

$Y_j = (Z_{j-1} + Z_j)/2$

identique on excav… cour…

rejoindre les minima et maxi

⇒ droite //

sinon ←

* Modèle additif

$$\boxed{X_t = S_t + T_t + E_t}$$

* Modèle multiplicatif

$$\boxed{X_t = S_t * T_t * E_t}$$

• MA(1) MA(2) $\gamma(k)$ ind de k ⇒ MA(1) SSL
$E\{X_t\} = cste$ MA(2)

• $X_t \sim MA(q)$ $\quad \rho(k) \neq 0$ si $k \leq q$. $\rho(k) = 0$ si $k \geq q+1$

• AR(1) $\quad X_t = \mu + \phi X_{t-1} + a_t$ si $|\phi| < 1$

• $\rho(k) = \phi^k \searrow$ décroit géométriquement

(oscillatoire → ϕ négatif asymptotique ϕ → positif).

• AR(2) : $\quad \gamma(0) = \dfrac{\sigma^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2}$

$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2)$. $k \geq 1$ $\quad \rho(0) = \dfrac{\gamma(0)}{\gamma(0)}$

• FAP : Fonction d'autocorrélation partielle → ϕ

Scanned with CamScanner

Pour identifier si une serie est AR(P) ou MA(q) :

→ on examine les autocorrelations (ACF) ou les auto-correlations partielles (PACF).

	MA(q)	AR(P)
Correlogramme simple	$\rho_k = 0$ si $k \geq q+1$	$\rho_k \downarrow$ oscillatoirement ou asymptotiquement
Corre partiel	Décroissant	$\rho_k = 0$ pour $k \geq p+1$

$\phi \to$ AR $\qquad \theta \to$ MA

$ARMA(p,q) = AR(p) + MA(q)$

- $$\boxed{\begin{aligned} X_t = \mu + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \dots + \theta_q a_{t-q} \\ + \Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \dots + \Phi_q X_{t-} \end{aligned}}$$

- $$E\{X_t\} = \frac{\mu}{1-(\Phi_1 + \dots + \Phi_p)}$$

- Comme $ARMA(p,q) = AR(p) + MA(q)$

→ son correlogramme simple et partiels $\downarrow$ qd $k \uparrow$

* Prolongement ARMA

ARIMA $\xrightarrow{\text{adapté}}$ serie sans saisonnalité

SARIMA : générale

6

Institut National de Statistique et d'Économie Appliquée
INSEA, Rabat

Année Universitaire : 2015 - 2016
2ème année

Examen de Séries temporelles
(22 Janvier 2016, Durée. 1h 30mn)
Documents non autorisés

Questions de cours :

1. Rappeler la définition d'un processus stationnaire au second ordre et celle d'un bruit blanc.
2. Rappeler et expliquer brièvement les étapes principales de la méthodologie de Box-Jenkins pour la modélisation d'une série temporelle.
3. Caractériser un processus à moyenne mobile d'ordre q, $MA(q)$, par la fonction d'autocorrélation.

Exrecice 1 :

Soit $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$. Pour tous les processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ définis ci-dessous, dire, en justifiant votre réponse, s'il s'agit d'un processus centré et/ou stationnaire et/ou de type ARIMA :

1. $X_t - X_{t-1} = \epsilon_t$
2. $X_t - \frac{1}{2}X_{t-2} = \epsilon_t - \epsilon_{t-4}$
3. $X_t = 2t + \epsilon_t - \epsilon_{t-3}$

Exercice 2 :

Soit (X_t) une série temporelle vérifiant la représentation suivante :

$$X_t - a\,X_{t-1} + b\,\epsilon_{t-1} = \epsilon_t, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

où (ϵ_t) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$ et $|a| < 1$.

1. Reconnaître le processus (X_t). Est-ce un processus causal ? (Justifier)
2. Dans le cas où $a = 0$, calculer la fonction d'autocovariance de (X_t) en fonction de b et σ^2, puis déduire sa fonction d'autocorrélation.
3. Donner l'expression du processus (X_t) en fonction du bruit blanc (ϵ_t) lorsque a et b sont non nuls.
4. Si les variables aléatoires (ϵ_t) sont indépendantes et identiquement distribuées et ayant une loi normale, que peut-on dire du processus (X_t) ?
5. Calculer la fonction d'autocovariance de (X_t) en fonction de a, b et σ^2 lorsque a et b sont non nuls.
6. Supposons que $b = 1/a$ $(a \neq 0)$, la représentation (1) est-elle inversible et causale ? vérifier si le processus (X_t) est un bruit blanc..
7. Dans la suite, on suppose que $b = 0$ et $0 < |a| < 1$ et que nous disposons d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$, où n est assez grand, généré par le processus (X_t).
   (a) Donner l'expression de l'estimateur de la fonction d'autocovariance de (X_t).
   (b) Écrire l'equation de Yule-Walker associée au modèle en question.
   (c) Déduire un estimateur du paramètre a.
   (d) Que peut-on dire de cet estimateur si on suppose que $(\epsilon_t) \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$?

Bon courage.

Institut National de Statistique et d'Économie Appliquée
INSEA, Rabat

Année Universitaire : 2015...
2ème an...

Examen de Séries temporelles

(16 Février 2016, Durée. 1h 30mn)

Documents non autorisés

Questions de cours :

1. Sous quelle condition un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ strictement stationnaire peut-on affirmer qu'il est stationnaire au second ordre ?
2. Que permet d'identifier un corrélogramme ?
3. Caractériser un processus autorégressif d'ordre p, $AR(p)$, par la fonction d'autocorrélation partielle.
4. Rappeler et expliquer brièvement deux tests statistiques pour la validation d'un modèle ARMA(p,q) gaussien.

Exrecice 1 :
Soit $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$. Pour tous les processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ définis ci-dessous, dire, en justifiant votre réponse, s'il s'agit d'un processus centré et/ou stationnaire et/ou de type ARIMA :
1) $X_t = \epsilon_t - \epsilon_{t-3}$; **2)** $X_t + \epsilon_t^2 = \sigma^2$; **3)** $X_t - X_{t-2} = \epsilon_t$; **4)** $X_t = 2t + \epsilon_t - \epsilon_{t-2}$.

Exercice 2 :
Soit (X_t) une série temporelle vérifiant la représentation suivante :

$$X_t - a\,X_{t-1} = \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

où (ϵ_t) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$ et $0 < |a| < 1$.

1. Reconnaître le processus (X_t). Est-ce un processus causal ? (Justifier)
2. Calculer la fonction d'autocovariance de (X_t) en fonction de a et σ^2, puis déduire sa fonction d'autocorrélation.
3. Donner l'expression du processus (X_t) en fonction du bruit blanc (ϵ_t).
4. Si les variables aléatoires (ϵ_t) sont indépendantes et identiquement distribuées et ayant une loi normale, que peut-on dire du processus (X_t) ?
5. Dans la suite, on suppose que nous disposons d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$, où n est assez grand, généré par le processus (X_t).
   (a) Donner l'expression de l'estimateur de la fonction d'autocovariance de (X_t).
   (b) Écrire l'equation de Yule-Walker associée au modèle en question.
   (c) Déduire un estimateur du paramètre a.
   (d) Que peut-on dire de cet estimateur si on suppose que $(\epsilon_t) \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$?
6. Soit $a = 1/2$. Quelles sont les meilleures prédictions possibles pour X_{t+1}, X_{t+2}, etc, connaissant le passé linéaire de X jusqu'à l'instant t ?

Bon courage.

Corrigé de l'Examen de Séries temporelles Ir. El ghini | 22/01/2016

[...]stions de cours :

Déf. d'un processus stationnaire au 2nd ordre :

Un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire au second ordre si pour tout t

on a :
- $E(X_t) = m = C^{te}$ } stables dans le temps
- $V(X_t) = \sigma^2 < \infty$ }
- $Cov(X_t, X_{t+k}) = \gamma_k$ ne dépend que de délai k et non du temps t.

• **Déf d'un bruit blanc :**

Le processus $\varepsilon = (\varepsilon_t)$ est dit bruit blanc faible s'il vérifie

i - $E(\varepsilon_t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$

ii - $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$

iii - $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0 \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}$ avec $h \neq 0$

et on note $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$ et on a,

bruit blanc est un processus stationnaire au second ordre et

$$\rho(K) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \mathbb{1}_{\{k=0\}}$$

si on remplace l'hypothèse iii) par l'hypothèse plus forte : iii')

iii') les variables ε_t et ε_{t-h} sont indépendantes

on parle de bruit blanc fort.

② **Rappel et explication des étapes principales de la méthodologie de Box-Jenkins pour la modélisation d'une série temporelle.**

La méthodologie de Box-Jenkins est une méthode qui permet de trouver en plusieurs étapes un modèle ARMA représentant la série statistique étudiée suivant le schéma ci-dessous:

...rrigé de l'examen de serie temporelles de 22/01/2016

...e 2 : Soit (X_t) une serie temporelle vérifiant la représentation suivante :

$$X_t - a X_{t-1} + b \varepsilon_{t-1} = \varepsilon_t \quad , t \in \mathbb{Z} \qquad (1)$$

ou $(\varepsilon_t) \sim BB(0, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$ et $|a| < 1$

1) Reconnaissance du processus (X_t), Est-il est causal ?

Discussion suivant les valeurs de a et b de $\mathbb{R}$

1er cas : si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors : $X_t - a X_{t-1} = \varepsilon_t - b \varepsilon_{t-1}$

$$(1 - aL) X_t = (1 - bL) \varepsilon_t$$

$\Rightarrow$ Le processus (X_t) est un ARMA(1,1), pour qu'il soit causal il faut que la racine du polynôme $(1 - az) = 0$ soit en dehors du cercle unité $\Rightarrow$: $z = \frac{1}{a}$ avec $|z| = |\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|} > 1$ car $|a| < 1$

Donc (X_t) est causal et on a : $X_t = (1 - aL)^{-1}(1 - bL) \varepsilon_t$.

2ème cas : si : $a = 0$ et $b \neq 0$ alors $X_t = \varepsilon_t - b \varepsilon_{t-1}$

Donc $(X_t) \sim MA(1)$ qui est toujours causal

3ème cas : si $a \neq 0$ et $b = 0$ alors $X_t = a X_{t-1} + \varepsilon_t$

Donc $(X_t) \sim AR(1)$ et on a : $(1 - aL) X_t = \varepsilon_t$

$$A(L) X_t = \varepsilon_t$$

on a : $1 - az = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{a}$ avec $|z| = \frac{1}{|a|} > 1$

Donc (X_t) est causal.

4ème cas : si $a = b = 0$ alors $X_t = \varepsilon_t$

Donc $(X_t) \sim$ Bruit blanc $(0, \sigma^2)$ qui est toujours causal.

② Calcul de la fct d'autocovariance de (X_t) en fct de b et σ^2 et ... d'autocorrélation dans le cas où $a=0$

si $a=0$ le processus (X_t) devient : $X_t = \varepsilon_t - b\varepsilon_{t-1} \Rightarrow (X_t) \sim$

* La fct d'autocovariance $\gamma(k)$:

$$\gamma(k) = cov(X_t, X_{t+k}) = cov(\varepsilon_t - b\varepsilon_{t-1} ; \varepsilon_{t+k} - b\varepsilon_{t+k-1})$$

$$\gamma(k) = cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) - b\, cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k-1}) - b\, cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+k}) + b^2 cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+k}$$

si $k=0 \Rightarrow \gamma(0) = cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t) + b^2 cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) = var(\varepsilon_t) + b^2 var(\varepsilon_{t-1})$

$= \sigma^2 + b^2\sigma^2$ or $var(\varepsilon_t) = var(\varepsilon_{t-1}) = \sigma^2$

$$\boxed{\gamma(0) = (1+b^2)\sigma^2}$$

si $k=1 \Rightarrow \gamma(1) = -b\, cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t) = -b\, var(\varepsilon_t) = -b\sigma^2$

$$\boxed{\gamma(1) = -b\sigma^2}$$

si $k=2 \Rightarrow \gamma(2) = \underbrace{cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+2})}_{=0} - b\,\underbrace{cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1})}_{=0} - b\,\underbrace{cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+2})}_{=0} + b^2 \underbrace{cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+}}_{=0}$

$$\boxed{\gamma(2) = 0}$$

si $k \geq 2 \Rightarrow \boxed{\gamma(k) = 0}$

Donc, $\gamma(k) = \begin{cases} (1+b^2)\sigma^2 & \text{si } k=0 \\ -b\sigma^2 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$

* La fct d'autocorrélation $\rho(k)$: $\rho(k) = \dfrac{cov(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{Var(X_t) \cdot Var(X_{t+k})}} = \dfrac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$

Donc $\rho(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ \dfrac{-b}{1+b^2} & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$

③ L'expression de X_t en fct du BB, ε_t lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 0$

D'après la question ① on a $(X_t) \sim ARMA(1,1)$: $(1-aL)X_t = (1-bL)\varepsilon_t$

$A(L)X_t = B(L)\varepsilon_t$

Donc $X_t = A^{-1}(L) \cdot B(L)\varepsilon_t$

$= (1-aL)^{-1} \cdot (1-bL)\varepsilon_t$

Séries Chronologiques

Analyse de la SC :

1. Représentation graphique
2. Traitement des valeurs manquantes (en utilisant la moyenne des valeurs voisines)
3. Décomposition / Modèle < Additif / Soustractif

$X = f(T, S, E)$

Pour déterminer le modèle de décomposit° : On trace la droite qui passe par les minima / Maxima : // → Additif ; / → Multiplicatif

→ Lissage de la série par MM ;
→ Série lissée = Composante tendance)
→ Suppression de la composante tendance par division / Soustraction
→ Isolement de la saisonnalité par une médiane mobile

Processus SSL :

X_t SSL $\Leftrightarrow$
$E(X_t) = cte$
$E(X_t^2) < \infty$
$\gamma(k) = cov(X_t, X_{t-k})$ ⫫ t.
$\gamma(0) = var(X_t)$.

$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$

$\rho(k)$: Periodicité : $\rho_k = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})}$

$X_t \sim BB(0, \sigma^2) \Rightarrow$ $E(X_t) = 0$, $var(X_t) = \sigma^2$, $\gamma(k) = 0, \forall k \neq 0$.

BB $\Rightarrow$ SSL

$X_t + Y_t$ SSL si X_t SSL et Y_t SSL et $cov(X_t, Y_t) = 0$ $\forall (t,s) \in \mathbb{Z}^2$.

Non stationnarité :

→ Déterministe : TS : $X_t = f(t) + Z_t$ (stationnaire)

→ Stochastique : DS si $(1-B)X_t$ stationnaire

Processus integré d'ordre d si $(1-B)^d X_t = \underset{stat}{Z_t}$

ARMA : $X_t = f(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}, a_t, a_{t-1}, \dots, a_{t-q})$

$ARMA(p,q) = AR(p) + MA(q)$

AR(p) ↓ Par des valeurs antérieures ; MA(q) ↓ déterminé par des chocs aléatoires

1 Perturbation aléatoire

- $MA(q) \Rightarrow$ SSL
- $AR(1)$: $X_t = \mu + \phi X_{t-1} + a_t$ SSL si $\phi \neq 1$.

→ Processus causal : $\exists\, \psi_j$ tq $\sum \psi_j^2 < \infty$ et $X_t = \mu + \sum \psi_j a_{t-j}$ avec $a_t \sim BB(0, \sigma^2)$, $\psi_0 = 1$.

$X_t \sim AR(1) \Leftrightarrow$ [X_t SSL et $X_t = \frac{\mu}{1-\phi} + \sum \phi^j a_{t-j}$ ssi $|\phi| < 1$]

BB G = BB ...

Scanned with CamScanner

On a $|\phi| < 1 \Rightarrow E(X_t) = \frac{\mu}{1-\phi}$

$Var(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$

$\gamma(k) = \sigma^2 \cdot \frac{\phi^k}{1-\phi^2}$

$\rho(k) = \phi^k$

- $X_t \sim AR(2)$ SSL et causal.

$\Rightarrow$ les racines du polynôme : $A(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$ sont de module > 1.

$X_t \sim AR(p)$ SSL et causal ssi les racines du poly $A(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$ de module > 1

$E(X_t) = \frac{\mu}{1-\phi_1-\phi_2\dots}$ $\quad Var(X_t) = \sigma^2 + \phi_1 \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_p$

Tests de stationnarité et d'inversibilités

AR tjs inversible / + Stationnaire :

$\phi_p(B) = 0$ $\in$ Cercle unité du plan complexe.

$\Updownarrow$

$|\underbrace{\mu_j}_{\text{racine}}| < 1, \ \forall j$

MA tjs stationnaire / + Inversible

$R(\phi_p(B) = 0) \notin$ Cercle unité du plan complexe.

$X_t = a_t$: Inversibilité

$X_t = \pi \, a_t$: Stationnarité

ρ : $\pm \alpha$.

Équations de Yule Walker :

$\rho_i \longrightarrow \phi_i$: paramètre du modèle

estimations de la fct d'autocorrélation

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{pmatrix}$$

On vérifie :

$\phi_p = \rho_p$: Coeff d'autocorrélat° partiel de rg P.

$\Rightarrow$ FAP du procès SSL est :

$$P_k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & & & \rho_{k-1} & \\ \vdots & & & & & \\ \rho_{k-2} & \dots & & & 1 & \rho_{k-1} \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \rho_{k-1} & & & & & 1 \end{vmatrix}}$$

$X_t \sim AR(p)$:

pour $k > p$: $\begin{cases} P_k = 0. \\ P_p = \phi_p. \end{cases}$

Corrélogramme :

	MA(q)	AR(p)
Corrélogramme simple	$k > q$: 0	$\searrow$
Corr. partiel	$\searrow$	$k > p$: 0

- Tests de Stationnarité / Saisonnalité

D.F $\quad$ Décompositio Buys Ballot.

- Méthode de Box & Jenkins.