# Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza

# Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej

# SPRAWOZDANIE DO PROJEKTU ZALICZENIOWEGO Z LABORATORIUM RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

# \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

# ’’ RÓWNIANIE LOTKI-VOLTERRY ’’

# ­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Jakub Goleń

Amelia Jonarska

1. **Wstęp teoretyczny**

Równanie Lotki-Volterry, które zwane jest również równaniem predykcji i reakcji bądź równaniem pędzącego pola, jest złożonym modelem matematycznym opisującym zachowanie się drapieżników i ofiar w ekosystemie. Zostało opracowane przez matematyków Alfreda J. Lotki oraz Vito Volterry w 1925 roku. Na początku model ten został zaproponowany przez Volterrę w 1926 do opisu populacji ryb odławianych w Morzu Adriatyckim. Równoważnie równania do opisu oscylacji stężeń substancji w hipotetycznej reakcji chemicznej otrzymał Lotka w 1920 roku.

Równanie to jest nieliniowym układem równań różniczkowych pierwszego stopnia. Zastosowanie tego równania często znajduje swoje miejsce w modelowaniu różnych sytuacji, gdzie jedna grupa zależy od drugiej, bądź na odwrót. Jest często stosowanie w biologii ekologicznej, gdzie konieczne jest zrozumienie dynamiki złożonych systemów.

1. **Opis rozwiązania problemu**

Załóżmy istnienie populacji drapieżcy x i populacji ofiary y oraz przyjmijmy założenia:

* Przyrost populacji ofiary bez brania pod uwagę zjadanie przez drapieżcę jest wprost proporcjonalny do jej liczności. Stąd wynika, że jedynym problemem dla ofiary jest drapieżca.
* Drapieżca produkuje potomstwo przetwarzając biomasę zjadanych ofiar.
* Każde spotkanie drapieżcy z ofiarą kończy się zjedzeniem ofiary.
* Ubytek biomasy drapieżców spowodowany jest wyłącznie naturalną śmiertelnością i jest wprost proporcjonalny do jej liczności.

Otrzymujemy poniższy układ równań zakładając, że ilość spotkań drapieżcy z ofiarą jest wprost proporcjonalna do iloczynu ilości obu populacji:

gdzie:

x(t) – populacja, czyli liczba ofiar,

y(t) – liczba drapieżców,

t – rozwój populacji w czasie,

a – częstość narodzin ofiar,

b – częstość umierania ofiar na skutek drapieżnictwa,

c – częstość narodzin drapieżników,

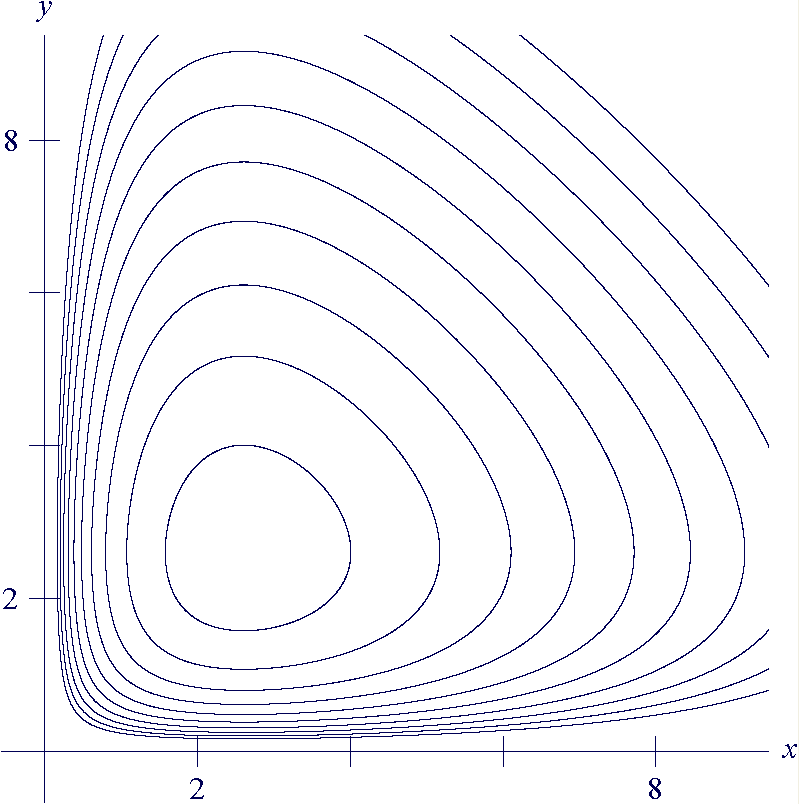
d – częstość umierania drapieżników,

Do dalszej analizy tych równań przeprowadza się ich ubezwymiarowienie za pomocą podstawień:

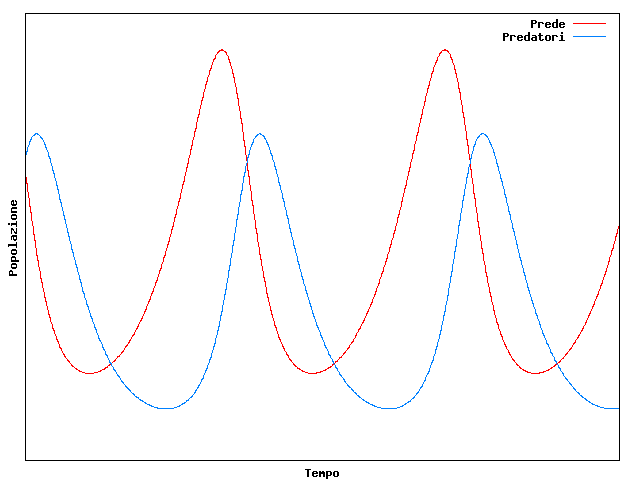
Powyższe podstawienie prowadzi do układu równań, który zależy już tylko od jednego parametru

Punkty krytyczne tego układu to (0,0) oraz (1,1). Dalsza analiza prowadzi do wniosku, że punkt (0,0) jest punktem siodłowym, natomiast (1,1) to centrum stabilne w sensie Lapunowa.

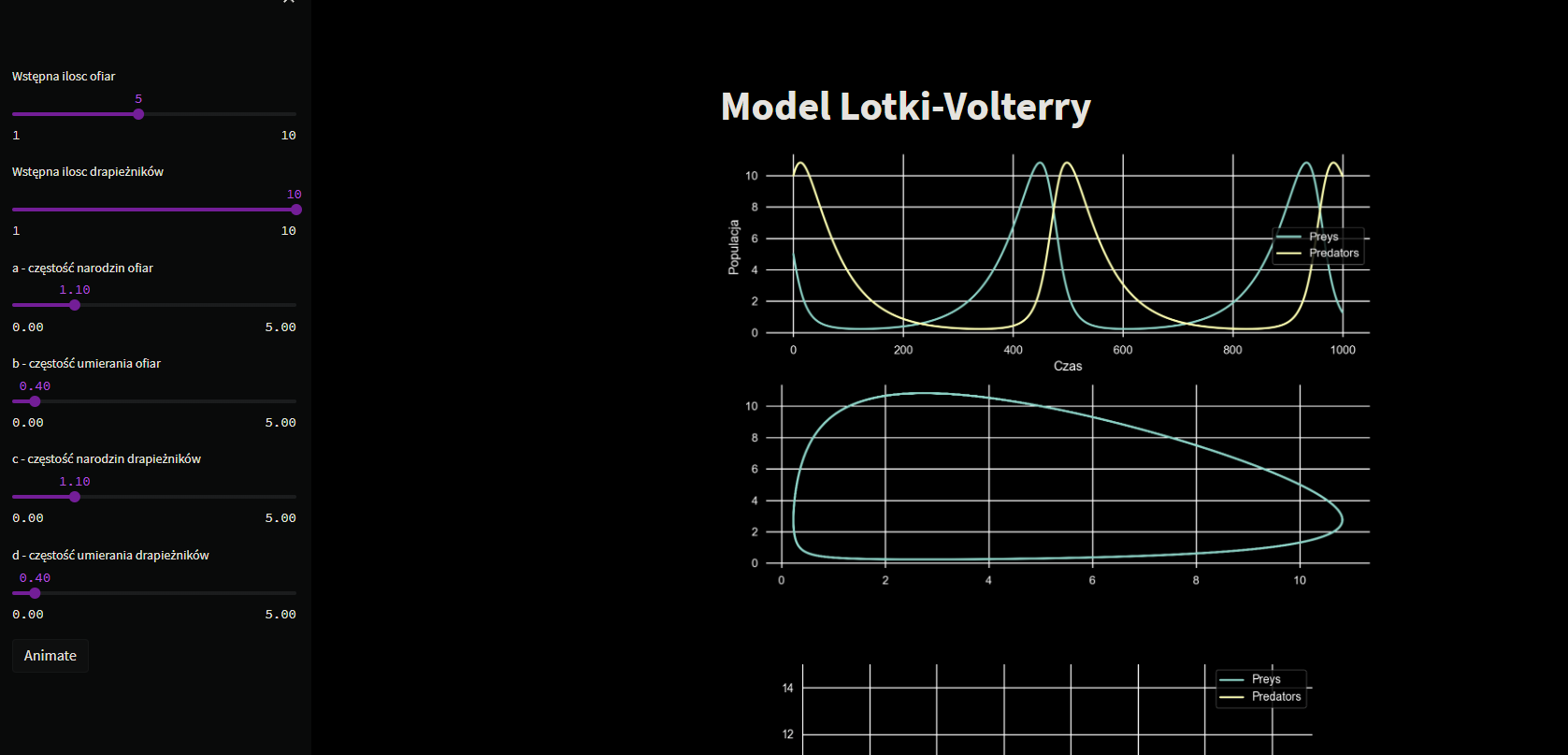
Równanie jest równaniem krzywej dyffeomorficznej z okręgiem, inaczej mówiąc jest to obraz przestrzeni fazowej, czyli trajektoria fazowa rozwiązań.



Można łatwo ustalić kierunek ruchu punktu oraz wyznaczyć przebieg krzywych całkowych równania:



Na podstawie wyżej wymienionego modelu stworzyliśmy symulację, która przedstawia się następująco:



Bibliografia:

Wikipedia, Równanie Lotki-Volterry <https://pl.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3wnanie_Lotki-Volterry#Podstawowy_model>

Równania różniczkowe w biologii i medycynie

<https://ruj.uj.edu.pl/xmlui/bitstream/handle/item/277366/dawidowicz_rownania_rozniczkowe_w_biologii_i_medycynie_2005.pdf?sequence=1&isAllowed=y>