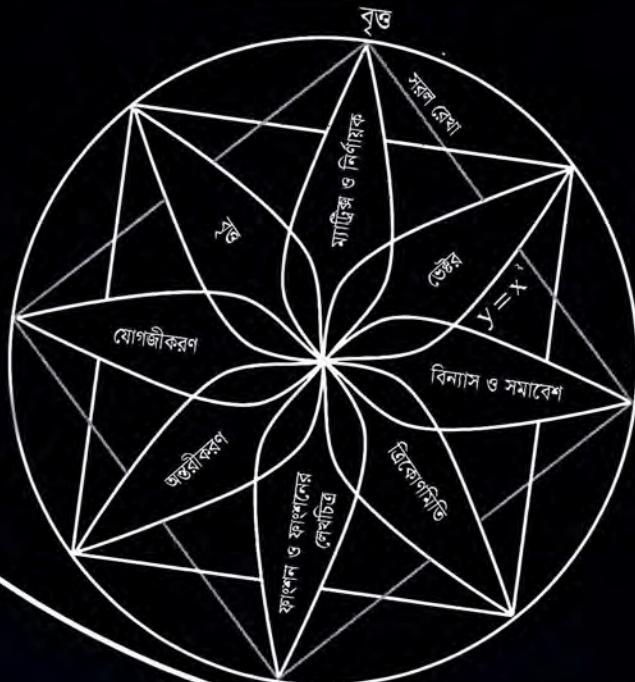


উচ্চতর গণিত

প্রথম পত্র

সমাধান

একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণি



মোঃ কেতাব উদ্দীন

উচ্চতর গণিত

প্রথম পত্র সমাধান

(লিখিত ও MCQ ভর্তি পরীক্ষার কৌশল সমৃদ্ধ)

মোঃ কেতাব উদ্দীন

বি.এসসি.(সম্মান) প্রথম শ্রেণি, এম.এসসি.(ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়)

সহকারী অধ্যাপক, রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর।

প্রাঙ্গন সহকারী অধ্যাপক, ফেনী গার্লস ক্যাডেট কলেজ, ফেনী।

প্রাঙ্গন প্রভাষক, মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, মির্জাপুর।

রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর।

প্রকাশনায় :

তারীফ-নাজিম, ঢাকা ।

মোবাইল : ০১৯১২৫৮৩৩৭৬

[এই পুস্তকের প্রচ্ছদ লেখক কর্তৃক সংরক্ষিত ।]

প্রথম প্রকাশ : জুন, ২০১৩

প্রথম সংস্করণ : ২০১৪

দ্বিতীয় সংস্করণ : মে, ২০১৫

মূল্য : ২৬০.০০ টাকা মাত্র ।

কম্পিউটার কম্পোজ ও কভার ডিজাইন :

লেখক, মোঃ কেতাব উদ্দীন ।

মোবাইল : ০১৫৫৮৩৬৬১০ , ০১৬২০২১৩০২৫

মুদ্রণে : সাজু প্রিণ্টিং প্রেস , ২৭ , সিরিশ দাস লেন, বাংলাবাজার , ঢাকা-১১০০

প্রাপ্তিহান : সাজু প্রিণ্টিং প্রেস ও পাবলিকেশন

পরিচালনায় মোঃ কেতাব উদ্দীন

৩৮, বাংলাবাজার (৩য় তলা), ঢাকা-১১০০ ।

মোবাইল : ০১৭১৮৮১৪০৪৮, ০১৬৮৯১৯৩৬৪৩

বিস্মিল্লাহির রাহমানির রাহিম

লেখকের কথা

“ উচ্চতর গণিত ১ম পত্রের সমাধান পুস্তকখানি মোঃ নজরুল ইসলাম ও মোঃ কেতাব উদ্দীন রচিত “ উচ্চতর গণিত ১ম পত্র পুস্তকখানির সম্পূর্ণ সমাধান। সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি ও ক্যালকুলেটর ব্যবহারের অপূর্ব সমষ্টিয়ে অতি দ্রুত প্রশ্ন সমাধানের কৌশলসহ পুস্তকখানির প্রতিটি অধ্যায়ে বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ে ভর্তি পরীক্ষার গণিত MCQ সংযোজন করা হয়েছে। এর মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা এইচ.এস.সি. পরীক্ষার প্রস্তুতির সাথে সাথে ভর্তি পরীক্ষার পূর্ব-প্রস্তুতি নেওয়ার সুযোগ পাবে। পুস্তকখানি সকল ইঞ্জিনিয়ারিং বিশ্ববিদ্যালয় এবং ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়সহ অন্যান্য বিশ্ববিদ্যালয়ে ভর্তি হতে ইচ্ছুক ছাত্র-ছাত্রীদের স্বপ্ন পূরণে সহায়ক ভূমিকা পালন করবে বলে আমার দৃঢ় বিশ্বাস।

এ বইয়ে একই ধরনের সমস্যা বিভিন্ন নিয়মে সমাধান করেছি যেন পুস্তকখানি একজন শিক্ষার্থীকে বিশ্ববিদ্যালয়ে ভর্তি পর্যন্ত যথাযথভাবে সাহায্য করতে পারে।

যাঁরা প্রত্যক্ষ ও পরোক্ষভাবে এ পুস্তকখানি প্রণয়নে সহযোগিতা করেছেন তাঁদের সকলের প্রতি কৃতজ্ঞতা প্রকাশ করছি। পরিশেষে যাদের প্রয়োজনের দিকে নজর রেখে মূলত এ পুস্তকখানি প্রণয়নে ব্রতী হয়েছি, পুস্তকখানি তাদের নিকট আদৃত হলেই আমার শ্রম সার্থক বলে মনে করব

নিবেদক

মোঃ কেতাব উদ্দীন।

সূচিপত্র		
বিষয়বস্তু	পঞ্চমালা	পৃষ্ঠা
প্রথম অধ্যায়	I A হতে I B অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ) ও ভর্তি পরীক্ষার MCQ	১ ২১
দ্বিতীয় অধ্যায়	ভেট্টের অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ) ও ভর্তি পরীক্ষার MCQ	২৯ ৫০
তৃতীয় অধ্যায় :	সরলরেখা অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ) ও ভর্তি পরীক্ষার MCQ	৫২ ৭১
	III A হতে III D III E	৭৭ ৮৮
	অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)	৯০
	III F হতে III G	১২০
	অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ) ও ভর্তি পরীক্ষার MCQ	১২৯
চতুর্থ-অধ্যায়	বৃত্ত অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)	১৪২ ১৪৫
	IV A	১৬৬
	অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ) ও ভর্তি পরীক্ষার MCQ	১৬৮
পঞ্চম অধ্যায়	বিন্যাস ও সমাবেশ অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ) ও ভর্তি পরীক্ষার MCQ	২০১
ষষ্ঠ অধ্যায়	ত্রিকোণমিতিক অনুপাত অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)	২০৭ ২১১
	VI A	২১৩
	VI B	২২৪
	অতিরিক্ত পরীক্ষার MCQ	২২৬
সপ্তম অধ্যায়	সংযুক্ত ও ঘোণিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	২৮৪
	VII A হতে VII G	২৯৪
অষ্টম অধ্যায় :	ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র VIII	৩১৯
	অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ) ও ভর্তি পরীক্ষার MCQ	৩২১
নবম অধ্যায়	অন্তরীকরণ অতিরিক্ষার MCQ	৩৩৪
	IX A	৩৩৬
	IX B হতে IX H	৩৭৫
	অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ) ও ভর্তি পরীক্ষার MCQ	৩৭৭
দশম অধ্যায়	IX I অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ) ও ভর্তি পরীক্ষার MCQ	৪০৭
	X A হতে X C	৪১৩
	অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ) ও ভর্তি পরীক্ষার MCQ	৪৪৩
	X D	৪৫৪
	অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)	৪৬৩
	X E	৪৬৮
	অতিরিক্ত পরীক্ষার MCQ	৪৮০

1. (a) $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্স দুটির সমষ্টি ও অল্পতর নির্ণয় কর। [ক্ষ.'০৫; সি.'১১]

$$\begin{aligned} & A + B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 8-4 & 4+6 & -1+2 \\ 0+1 & 1+3 & 3+7 \\ 5+5 & 4+4 & 8+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 \\ 10 & 8 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A - B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 8+4 & 4-6 & -1-2 \\ 0-1 & 1-3 & 3-7 \\ 5-5 & 4-4 & 8-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -7 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

হলে, $7A - 5B$ নির্ণয় কর। [ক্ষ.'০২]

সমাধান : $7A - 5B =$

$$\begin{aligned} & 7 \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -7 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 21 & 7 & -7 \\ 14 & 21 & 28 \\ -28 & 35 & 42 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -20 & 30 \\ 10 & 0 & -35 \\ 15 & 25 & 0 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 21-5 & 7+20 & -7-30 \\ 14-10 & 21-0 & 28+35 \\ -28-15 & 35-25 & 42-0 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 16 & 27 & -37 \\ 4 & 21 & 63 \\ -43 & 10 & 42 \end{bmatrix} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

2(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ হলে,

$AB \oplus BA$ নির্ণয় কর। [ষ.'০৯]

সমাধান $AB = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4+12 & 0-6 \\ -12+10 & 0-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \quad (\text{Ans.})$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+0 & 24+0 \\ 2+3 & 12-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 24 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad (\text{Ans.})$$

2(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ হলে

দেখাও যে, $AB = BA = I_3$

[ক্ষ.'০৮; সি.'০৫, '১০; ষ.'০৮; ছ.'১০; চ.'১২; মা.'১১]

প্রমাণ : $AB = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3-8+6 & 6-20+14 & -6+16-10 \\ -2+2+0 & -4+5+0 & 4-4+0 \\ -1-2+3 & -2-5+7 & 2+4-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-4+2 & -4+2+2 & 2+0-2 \\ 6-10+4 & -8+5+4 & 4+0-4 \\ 9-14+5 & -12+7+5 & 6+0-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$AB = BA = I_3$ (Showed)

$$2(c) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ এবং } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+8 & 0+10 & 0+12 \\ 1+8 & 2+10 & 3+12 \\ 0-4 & 0-5 & 0-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

হলে দেখাও যে, $AB = BA$ [জ.'০৫; চ.'০৮]

প্রমাণ : $AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6-0-5 & -2+0+2 & 2+0-2 \\ 15-15+0 & -5+6+0 & 5-5+0 \\ 0-15+15 & 0+6-6 & 0-5+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-5+0 & 0-1+1 & -3+0+3 \\ -30+30+0 & 0+6-5 & 15+0-15 \\ 10-10+0 & 0-2+2 & -5+0+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = BA \text{ (Showed)}$$

$$3(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ এবং } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ হলে,}$$

(i) AB ও BA নির্ণয় কর।

[জ.'০৮ ; সি.'১২, '১৪; চ.'১০; য.'১২সি.'১৩; মা.'১২]

(ii) দেখাও যে, $AB \neq BA$

[য.'০৭; ব.'০৭; জ.'০৮; সি.'১২]

(i) সমাধান : $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0+2+0 & 2+4-3 \\ 0+5+0 & 8+10-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$3(b) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ এবং } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix} \text{ হলে, } AB \text{ নির্ণয় কর।} [ব.'০৩]$$

সমাধান : $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

$$= [2+4 \quad -4+5 \quad 0-3] = [6 \quad 1 \quad -3]$$

(Ans.)

$$3(c) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ এবং } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ হলে,}$$

(i) AB এবং BC নির্ণয় কর। [ব. মা.'০৯; ব.'১৩]

(ii) দেখাও যে, $(AB)C = A(BC)$ [ব.'০৮]

(i) সমাধান : $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4+4 & 3+2 \\ 12+8 & 9+4 \\ 0+2 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+6 & 8+9 \\ 2+2 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

(ii) প্রমাণ : $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4+4 & 3+2 \\ 12+8 & 9+4 \\ 0+2 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+6 & 8+9 \\ 2+2 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

এখন $(AB)C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 8+10 & 16+15 \\ 20+26 & 40+39 \\ 2+2 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 31 \\ 46 & 79 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+8 & 17+14 \\ 30+16 & 51+28 \\ 0+4 & 0+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 31 \\ 46 & 79 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$\therefore (AB)C = A(BC)$ (Showed)

$$4(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ এবং } C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

হলে দেখাও যে, $(AB)C = A(BC)$ [গি. '০২; ষ. '০৬]

$$\text{প্রমাণ : } AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2 & 3+0 & 0+1 \\ 0+4 & 0+0 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+9+0 \\ 4+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{এখন, } (AB)C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6+9+1 \\ 8+0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11+5 \\ 0+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$(AB)C = A(BC)$ (Showed)

$$4(b) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ এবং } C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

হলে, (i) AB এবং AC নির্ণয় কর।

(ii) দেখাও যে, $AB + AC = A(B + C)$.

$$(i) \text{ সমাধান : } AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+2+0 & 2+4-3 \\ 0+5+0 & 8+10-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+0+9 & 2+8+18 \\ -4+0+18 & 8+20+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \text{ প্রমাণ : } AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+2+0 & 2+4-3 \\ 0+5+0 & 8+10-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+0+9 & 2+8+18 \\ -4+0+18 & 8+20+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix}$$

$$B+C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0-1 & 2+2 \\ 1+0 & 2+4 \\ 0+3 & -1+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{এখন, } AB + AC = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+8 & 3+28 \\ 5+14 & 12+64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 31 \\ 19 & 76 \end{bmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+2+9 & 4+12+15 \\ -4+5+18 & 16+30+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 31 \\ 19 & 76 \end{bmatrix}$$

$AB + AC = A(B + C)$ (Showed)

$$4. (c) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ হলে,}$$

(i) AB এবং BA নির্ণয় কর। [গি. '০৭]

(ii) দেখাও যে, $AB \neq BA$ [ষ. '০৭; ষ. '১১; গি. '০৩]

$$(i) \text{সমাধান : } AB = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (AB)C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 26 & 78 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+2+0 & 2+4 & 3 \\ 0+5+0 & 8 & 10-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{Ans}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A.$$

$$= \begin{bmatrix} 0+8 & 0+10 & 0 \\ 1+8 & 2+10 & 1 \\ 0-4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & -20 & 24 \\ 6 & 12 & -30 & 36 \\ -1 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 10 & 0 \\ 9 & 12 & 15 \\ -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \text{প্রমাণ : } AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 8 & 16 & 12 \\ 9 & 12 & 6 \\ -4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$AB \neq BA$ (Showed)

$$4(d) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ এ , }$$

$C = [1 \ 2 \ -5 \ 6]$ হলে, (i) দেখাও যে,

$$(AB)C = A(BC)$$

[ক্. '১২]

(ii) $(AB)C$ নির্ণয় কর।

[গা. '১১, '১৩; ব. য. '১০; জ. '১১, '১৩; পি. '১২]

$$(i) \text{প্রমাণ : } AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+12-3 \\ 16+30-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ -5 \ 6]$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 8 & -20 & 24 \\ 6 & 12 & -30 & 36 \\ -1 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 26 & 78 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & -20 & 24 \\ 6 & 12 & -30 & 36 \\ -1 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 24-6 & 60+15 & 24+72-18 \\ 13 & +60-12 & -80-150+30 & 96+180-36 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$$

$. (AB)C = A(BC)$ (Showed)

$$(ii) \text{সমাধান : } AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+12-3 \\ 16+30-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 13 \\ 40 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ -5 \ 6]$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix} \quad (\text{Ans.})$$

$$4(e) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ হলে,}$$

দেখাও যে, $AB \neq BA$.

[পি. '১০]

$$\text{সমাধান : } AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-3 & -4-4 & -10+0 \\ 1+0 & -2+0 & -5+0 \\ -3+12 & 6+16 & 15+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-2+15 & -1+0-20 \\ 6+4+0 & -3+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$$

$AB \neq BA$ (Showed)

5.(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ হলে A^2 এবং A^3 নির্ণয় কর
এবং দেশগুণ যে, $A^2 + 2A - 11I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স;
যথালে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ [ব.'০৮ ডা.'০৭, '১২; জ.'০৯;
চ.'০৯; পি.'০৯, '১৮; মা.'১৩]

$$\text{সমাধান : } A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1+8 & 2-6 \\ 4-12 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} \\ A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 9-16 & -4-34 \\ -4-16+51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix}$$

এখন, $A^2 + 2A - 11I$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 11 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 9-2+11 & -4+4+0 \\ -8+8+0 & 17-6-11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

অতএব $A^2 + 2A - 11I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স।

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ হলে, $A^2 - 5A + 6I$ নির্ণয় কর
; যথালে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ [জ.'০৭; সি. '০৯; ব.'১২]

$$\text{সমাধান : } A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9+10 & 6-2 \\ 15-5 & 10+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

এখন, $A^2 - 5A + 6I$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -10 \\ -25 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 19-15+6 & 4-10+0 \\ 10-25+0 & 11+5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -15 & 22 \end{bmatrix}$$

(Ans.)

5(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, $A^2 - 4A - 5I$ নির্ণয়

কর ; যথালে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

[ক.'০৭, '১৩; সি.'১১; চ.'১৩; মা.'১৪, পি.'০৫-০৬]

$$\text{সমাধান : } A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2 \\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2 \\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

এখন $A^2 - 4A - 5I$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -8 & -8 \\ -8 & -4 & -8 \\ -8 & -8 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-4-5 & 8-8+0 & 8-8+0 \\ 8-8+0 & 9-4-5 & 8-8+0 \\ 8-8+0 & 8 & 9-4-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ans.})$$

5(d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

হলে, $A^2 - B^2$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $A^2 = A \cdot A$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

উচ্চতর গণিত : ১ম পত্র সমাধান

বইয়ের কম

$$\left| \begin{array}{ccc} 1+3-5 & 1+5-5 \\ -3-9+25 & 3+9-25 \\ -5-15+25 & 5+15-25 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} -3-15+ & \\ -5 & 25 \end{array} \right| \quad P = \begin{bmatrix} 140 & 155 & 132 \\ 130 & 100 & 148 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1.50 \\ 2.00 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 13 & -13 & 7 \\ 5 & -5 & - \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -6 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+4-3 & 0-12-12 & 0-12+12 \\ 0-3+3 & 4+9-12 & 3+9-12 \\ 0+4-4 & -4-2+16 & 3-12-16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - B^2$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 13 & -13 & 7 \\ 5 & -5 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 13 & -14 & 7 \\ 5 & -5 & -6 \end{bmatrix} \quad (\text{Ans.})$$

6. (a) সমাধান : মনে করি, P ও Q যথাক্রমে বইয়ের সংখ্যার ম্যাট্রিক্স ও লাভ ম্যাট্রিক্স। তাহলে,

$$P = [100 \ 125 \ 110],$$

$$Q = \begin{bmatrix} 70.00-60.00 \\ 102.00-90.00 \\ 96.00-85.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.00 \\ 12.00 \\ 11.00 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{মোট লাভ} = P \times Q$$

$$= [100 \ 125 \ 110] \times \begin{bmatrix} 10.00 \\ 12.00 \\ 11.00 \end{bmatrix}$$

$$= [1000.00 + 1500.00 + 1210.00]$$

$$\therefore \text{মোট লাভ} = 3710.00 \text{ টাকা}$$

6(b) সমাধান : মনে করি, P ও Q যথাক্রমে বিক্রীত কলামের সংখ্যার ম্যাট্রিক্স ও লাভ ম্যাট্রিক্স। তাহলে,

$$\text{মোট লাভ} = P \times Q$$

$$\begin{bmatrix} 140 & 155 & 132 \\ 130 & 100 & 148 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1.50 \\ 2.00 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2.00 & 310.00 + 165.00 \\ 195.00 + 200.00 + 185.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 685.00 \\ 580.00 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{মোট লাভ} = (685.00 - 580.00) \text{ টাকা} \\ = 1265.00 \text{ টাকা}$$

নির্ণয়ক

প্রশ্নমালা -IB

(a) প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি কর্ণক্ষেত্রের ও অভেদক ম্যাট্রিক্স।

(b) B ম্যাট্রিক্সটির ত্রৈ 2×3 \therefore Ans. B

$$(c) 3B = \begin{bmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 3 & 3 \times 0 \\ 3 \times 2 & 3 \times 0 & 3 \times 1 \end{bmatrix} \quad \text{Ans. B}$$

$$(d) A - 2C = \begin{bmatrix} 1-2 & -1-0 \\ 0-0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(e) A এর ত্রৈ = A এর সারি সংখ্যা \times B এর কলাম সংখ্যা = 2×3 \quad Ans. B

$$(f) A^{-1} = \frac{1}{2-0} \begin{vmatrix} 2 & -(-1) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(g) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & z \\ y & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & z \\ y & -3 \end{bmatrix}$$

$$(x, y, z) = (3, 4, 3); \text{ Ans. B}$$

$$(h) \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \text{ নির্ণয়কের } 3 \text{য় সারি } 2 \text{য় সারির তিনগুণ} \\ \text{বলে নির্ণয়কের মান শূন্য।} \therefore \text{Ans. C.}$$

$$(i) (i) A^{-1} = \frac{1}{5+6} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(ii) AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -15 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} a-4 & 8 \\ 2 & a+2 \end{bmatrix} \text{ ম্যাট্রিজটি ব্যতিক্রমী বলে}$$

$$\begin{vmatrix} a-4 & 8 \\ 2 & a+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 8 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 16 = 0 \Rightarrow a \neq -4, -6$$

$$a = -4, -6$$

Ans. A

1.(i) প্রমাণ কর যে,

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = p(p-1)^2(p^2-1)$$

[জ.'০৭; '১২; সা.'১১; কু.', ষ.'০৯; চ.'১২; কম্পট'০৭-০৮]

$$\text{প্রমাণ : L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-p & p(1-p) & p^2 \\ 1-p^2 & p^2(1-p^2) & p^4 \end{vmatrix}$$

[$c_1 - c$ এবং $c_2 - c_3$]

$$= 1\{(1-p)p^2(1-p^2) - p(1-p)(1-p^2)\} \quad [1\text{ম সারি বরাবর বিস্তার করে]$$

$$= (1-p)(1-p^2)(p-p)$$

$$= (1-p)(1-p^2) p(p-1)$$

$$= p(p-1)^2(p^2-1) = \text{R.H.S.} \quad (\text{Proved})$$

$$1(i)(b) \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3 \quad [\text{জ.'০১; সি.'০৩}]$$

$$\text{প্রমাণ : L.H.S.} = \begin{vmatrix} a & ab & b \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a(a-b) & b(a-b) & b^2 \\ a-b & a & b^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & [c_1 - c_2 \text{ এবং } c_2 - c_3] \\ & = 1\{a(a-b)(a-b) - b(a-b)(a-b)\} \\ & \quad [শেষ সারি বরাবর বিস্তার করে] \\ & = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3 = \text{R.H.S.} \end{aligned} \quad (\text{Proved})$$

$$1(i)(c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 - bc & b^2 - ca & c^2 - ab \end{vmatrix} = 0$$

[ষ.'০৩; কম্পট'০৫-০৬]

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 - bc & b^2 - ca & c^2 - ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2 - b^2 + ca - bc & b^2 - c^2 + ab - ca & c^2 - ab \end{vmatrix}$$

[$c'_1 = c_1 - c_2$ এবং $c'_2 = c_2 - c_3$]

$$\begin{aligned} & = 1\{(a-b)(b^2 - c^2 + ab - ca) \\ & \quad - (b-c)(a^2 - b^2 + ca - bc)\} \\ & \quad [1\text{ম সারি বরাবর বিস্তার করে] \\ & = (a-b)\{(b-c)(b+c) + a(b-c)\} \\ & \quad - (b-c)\{(a-b)(a+c) + c(a-b)\} \\ & = (a-b)(b-c)(a+b+c) - (a-b)(b-c) \\ & \quad (a+b+c) = 0 = \text{R.H.S.} \quad (\text{Proved}) \end{aligned}$$

$$1(i)(d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy \quad [\text{ষ.'০১}]$$

$$\text{প্রমাণ : L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ 0 & y & 1+y \end{vmatrix}$$

[$c_1 - c$, $c_2 - c$]

$$= 1\{xy - 0\} = xy = \text{R.H.S.} \quad (\text{Proved})$$

$$1(i)(e) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b^3 & c^3 \\ a^3 & b & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a) \quad [\text{স.'০৫; ষ.'০৩}]$$

$$(a+b+c) \quad [\text{স.'০৫; ষ.'০৩}]$$

$$\text{প্রমাণ : L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{bmatrix} \\
 &\quad [c_1 - c_2 \text{ এবং } c_2 - c_3] \\
 &= 1 \{(a-b)(b^3-c^3) - (b-c)(a^3-b^3)\} \\
 &\quad [1\text{ম সারি বরাবর বিস্তার করে] \\
 &= (a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2) \\
 &\quad (b-c)(a-b)(a^2+ab+b^2) \\
 &\quad (a-b)(b-c)(b(c-a)+(c-a)(c+a)) \\
 &= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) = \text{R.H.S.} \\
 &\quad (\text{Proved})
 \end{aligned}$$

$$1(i)(f) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a) [\text{Ex. 1o}]$$

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \\
 \quad [r_1 - r_2, r_2 - r_3]$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \{(a-b)(b^2-c^2) - (a^2-b^2)(b-c)\} \\
 &\quad [1\text{ম কলাম বরাবর বিস্তার করে] \\
 &= (a-b)(b-c)(b+c) - (a-b)(a+b)(b-c) \\
 &= (a-b)(b-c)(b+c-a-b) \\
 &= (a-b)(b-c)(c-a)
 \end{aligned}$$

$$1(i)(g) \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} \\
 = -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\text{এমনি : L.H.S.} = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} (b+c)^2 - a^2 & 1 \\ (c+a)^2 - b^2 & 1 \\ (a+b)^2 - c^2 & 1 \end{vmatrix} \quad [c_1' = c_1 - c_2 \text{ এবং } c_2' = c_2 - c_3]$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} (b-a)(c+a-b) & a^2 & 1 \\ (c-a)(b+a-c) & b^2 & 1 \\ (a-a+b+c)(a+b-c) & c^2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (a+b+c) \begin{vmatrix} b+c-a & a^2 & 1 \\ c+a-b & b^2 & 1 \\ a+b-c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (a+b+c) \begin{vmatrix} -2(a-b) & a^2-b^2 & 0 \\ -2(b-c) & b^2-c^2 & 0 \\ a+c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &\quad [r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a+b+c)(a-b)(b-c) \\
 &\quad \begin{vmatrix} -2 & a+b & 0 \\ -2 & b+c & 0 \\ a+b-c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (a+b+c)(a-b)(b-c)\{1.(-2b-2c \\
 &\quad + 2a+2b)\} \\
 &= -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a) \\
 &= \text{R.H.S.} \quad (\text{Proved})
 \end{aligned}$$

$$1(i)(h) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} \\
 = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$$

$$\text{এমনি : L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \\ x^3-y^3 & y^3-z^3 & z^3 \end{vmatrix} \\
 \quad [c_1' = c_1 - c_2 \text{ এবং } c_2' = c_2 - c_3]$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \{(x-y)(x+y)(y-z)(y^2+yz+ \\
 &\quad - (y-z)(y+z)(x-y)(x^2+xy+y^2) \\
 &= (x-y)(y-z)(xy^2+xyz+xz^2+ \\
 &\quad y^2z+yz^2-x^2y-xy^2-y^3-zx^2-xy \\
 &\quad - y^2z) \\
 &= (x-y)(y-z)(xz^2+yz^2-x^2) \\
 &= (x-y)(y-z)(xz^2+yz^2-x^2) \\
 &= (x-y)(y-z)(xz^2+yz^2-x^2)
 \end{aligned}$$

নির্ণয়ক: অন্তর্মালা I B

বইয়ের কম

= R.H.S. (Proved)

2. কিন্তুর না করে প্রমাণ কর :

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = 0$$

[ঢ. '০৯; য. '১৩; কুয়েট'০৯-১০]

প্রমাণ : L.H.S. = $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a & abc & abc(b+c) \\ b & abc & abc(c+a) \\ c & abc & abc(a+b) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{abc \cdot abc}{abc} \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = \text{M.H.S.}$$

এখন, abc $\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$$= abc \begin{vmatrix} a & 1 & a+b+c \\ b & 1 & a+b+c \\ c & 1 & a+b+c \end{vmatrix} [c'_3 = c_3 + c_1]$$

$$= abc(a+b+c) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abc(a+b+c) \cdot 0 = 0 = \text{R.H.S.}$$

[দুইটি কলাম একই]

$$2(b) \begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

প্রমাণ : L.H.S. = $\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & y-b \\ 1 & x_1 & y_1-b \\ 1 & x_2 & y_2-b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & y-b \\ 1 & a & y_1-b \\ 1 & a & y_2-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x & b \\ 1 & x_1 & b \\ 1 & x_2 & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & y-b \\ 1 & 1 & y_1-b \\ 1 & 1 & y_2-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 \end{vmatrix} - a \cdot 0$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} - b \cdot 0 = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \text{R.H.S.}$$

(Proved)

$$2(c) \begin{vmatrix} 1 & x_1+a & y_1+b \\ 1 & x_2+a & y_2+b \\ 1 & x_3+a & y_3+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

[সি. '০৭; ফ. '১১]

প্রমাণ : L.H.S. = $\begin{vmatrix} 1 & x_1+a & y_1+b \\ 1 & x_2+a & y_2+b \\ 1 & x_3+a & y_3+b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1+b \\ 1 & x_2 & y_2+b \\ 1 & x_3 & y_3+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & y_1+b \\ 1 & a & y_2+b \\ 1 & a & y_3+b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & b \\ 1 & x_2 & b \\ 1 & x_3 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & y_1+b \\ 1 & 1 & y_2+b \\ 1 & 1 & y_3+b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 1 & x_2 & 1 \\ 1 & x_3 & 1 \end{vmatrix} + a \cdot 0$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + b \cdot 0 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{R.H.S.}$$

$$2(d) \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

প্রমাণ : L.H.S. = $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a+b \\ q & r & p+q \\ y & z & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a+b \\ q & p & p+q \\ y & x & x+y \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} c & c & a+b \\ r & r & p+q \\ z & z & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & b \\ q & r & q \\ y & z & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a \\ q & p & p \\ y & x & x \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b & a & b \\ q & p & q \\ y & x & y \end{vmatrix} + 0 + \begin{vmatrix} c & a & a \\ r & p & p \\ z & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} b & a & c \\ q & p & r \\ y & x & z \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0$$

$$+ (-) \begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ x & z & y \end{vmatrix}$$

$$= (-)(-) \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + (-)(-) \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = \text{R.H.S. (Proved)}$$

3. প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

[৮.'০০; ৯.'০৬; ৯.'০৭; পি.'০৯; '১১]

L.H.S.

$$= \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

www.boighar.com [$c'_1 = c_1 + (c_2 + c_3)$]

$$= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & -(a+b+c) & 0 \\ 0 & a+b+c & -(a+b+c) \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

[$r'_1 = r_1 - r_2, r'_2 = r_2 - r_3$]

$$= 2(a+b+c) 1 \{ -(a+b+c) \times -(a+b+c) \}$$

$$= 2(a+b+c)^3 = \text{R.H.S.}$$

3(b) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$

$$= 1+x_1+x_2+x_3$$

প্রমাণ : L.H.S. = $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1+x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3 \\ 1+x_1+x_2+x_3 & 1+x_2 & x_3 \\ 1+x_1+x_2+x_3 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$$

[$c'_1 = c_1 + (c_2 + c_3)$]

$$= (1+x_1+x_2+x_3) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1+x_2 & x_3 \\ 1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$$

$$= (1+x_1+x_2+x_3) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$$

[$r'_1 = r_1 - r_2, r'_2 = r_2 - r_3$]

$$= (1+x_1+x_2+x_3).1(1-0)$$

$$= 1+x_1+x_2+x_3$$

$$\Im(\mathbf{c}) \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(c-a)$$

[সি.'০৮; মা.বো.'০৯; ব.'১২]

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S.} &= \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{array} \right| = bc \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{array} \right| \\
 &= abc \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{array} \right| \\
 &= abc \cdot 1 \{(a-b)(b^2 - c^2) - (b-c)(a^2 - b^2)\} \\
 &= abc \{(a-b)(b-c)(b+c) - (a-b)(b-c)(a+b)\} \\
 &= abc \cdot (a-b)(b-c)(b+c-a-b) \\
 &= abc \cdot (a-b)(b-c)(c-a) \\
 &= \text{R.H.S.} \quad (\text{Proved})
 \end{aligned}$$

$$3(d) \begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(x-y) \quad [\text{Q. } 01; \text{ फर्मेट } 10-11]$$

$$\begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \end{vmatrix}$$

$$\text{প্রমাণ : L.H.S.} = \begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & b-c & c+x \\ a-b & b-c & c+y \\ a^2 - b^2 & b^2 - c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$[c'_1 = c_1 + (c_2 + c_3)]$

$$= (a - b)(b - c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & c + x \\ 1 & 1 & c + y \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a - b)(b - c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & x - y \\ 1 & 1 & c + y \\ a + b & b + c & c^2 \end{vmatrix} [r'_1 \equiv r_1 - r_2]$$

$$\begin{aligned}
 &= (a - b)(b - c)(x - y)(b + c - a - b) \\
 &= (a - b)(b - c)(c - a)(x - y) \\
 &= \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$3.(e) \begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix} = a^2(a-1)^2(a^2-1)$$

[੭.'੦੩ ; ਮਾ .੦੫]

$$\text{अभाग : L.H.S.} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-a & a(1-a) & a^2 \\ (1-a)(1+a) & a^2(1-a)(1+a) & a^4 \end{vmatrix}$$

$$[c'_1 = c_1 - c_2, c'_2 = c_2 - c_3]$$

$$= a^2(1-a)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1+a & a(1+a) & a^4 \end{vmatrix}$$

$$= a^2(1-a)^2 \{a(1+a) - (1+a)\}$$

$$= a^2(1-a)^2(a^2-1) \equiv \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$3(f) \begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 2 & b & c+a \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

अमाल : L.H.S. =
$$\begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 2 & b & c+a \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & b+c \\ 1 & a+b+c & c+a \\ 1 & a+b+c & a+b \end{vmatrix} [c'_2 = c_2 + c_3]$$

$$= 2(a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a + b + c), \quad 0 = 0 = \text{R.H.S.}$$

[∴ দুইটি কলাম একই ।]

$$3(g) \begin{vmatrix} 3 & a & b+c \\ 3 & b & c+a \\ 3 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

প্রমাণ : L.H.S. = $\begin{vmatrix} 3 & a & b+c \\ 3 & b & c+a \\ 3 & c & a+b \end{vmatrix}$

$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & b+c \\ 1 & a+b+c & c+a \\ 1 & a+b+c & a+b \end{vmatrix} [c'_2 = c_2 + c_3]$$

$$= 3(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= 3(a+b+c) \cdot 0 = 0 = \text{R.H.S.}$$

[∴ দুইটি কলাম একই।]

$$3(h) \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^3 \quad [\text{যা. '08; বৃংজেট' ১১-১২}]$$

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$[r'_1 = r_1 + (r_2 + r_3)]$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ (a+b+c) & -(a+b+c) & 2b \\ 0 & (a+b+c) & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$[c'_1 = c_1 - c_2, c'_2 = c_2 - c_3]$$

$$= (a+b+c) \cdot 1 \cdot (a+b+c)^2$$

$$= (a+b+c)^3 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$4.(a) \begin{vmatrix} \log x & \log y & \lg z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix} = 0$$

[ব.'১৩; কৃংজেট' ০৯-০৮; বৃংজেট' ০৯-১০; কৃংজেট' ১১-১২]

$$\text{প্রমাণ : L.H.S.} = \begin{vmatrix} \log x & \log y & \lg z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \log x - \log y & \log y - \log z & \lg z \\ \log 2x - \log 2y & \log 2y - \log 2z & \log 2z \\ \log 3x - \log 3y & \log 3y - \log 3z & \log 3z \end{vmatrix}$$

$$[c'_1 = c_1 - c_2, c'_2 = c_2 - c_3]$$

$$= \begin{vmatrix} \log \frac{x}{y} & \log \frac{y}{z} & \lg z \\ \log \frac{x}{y} & \log \frac{y}{z} & \log 2z \\ \log \frac{x}{y} & \log \frac{y}{z} & \log 3z \end{vmatrix}$$

$$= \log \frac{x}{y} \log \frac{y}{z} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lg z \\ 1 & 1 & \log 2z \\ 1 & 1 & \log 3z \end{vmatrix}$$

$$= \log \frac{x}{y} \log \frac{y}{z} \times 0 = 0 = \text{R.H.S.}$$

$$4(b) \begin{vmatrix} 1 & \cos 2\alpha & \sin \alpha \\ 1 & \cos 2\beta & \sin \beta \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin \gamma \end{vmatrix} = 2 (\sin \alpha - \sin \beta)$$

$$(\sin \beta - \sin \gamma) (\sin \gamma - \sin \alpha) \quad [\text{ব.'০৩}]$$

প্রমাণ : L.H.S. = $\begin{vmatrix} 1 & \cos 2\alpha & \sin \alpha \\ 1 & \cos 2\beta & \sin \beta \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin \gamma \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cos 2\alpha - \cos 2\beta & \sin \alpha - \sin \beta \\ 0 & \cos 2\beta - \cos 2\gamma & \sin \beta - \sin \gamma \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin \gamma \end{vmatrix}$$

$$[r'_1 = r_1 - r_2, r'_2 = r_2 - r_3]$$

$$= 1 \{ (\cos 2\alpha - \cos 2\beta)(\sin \beta - \sin \gamma) - (\sin \alpha - \sin \beta)(\cos 2\beta - \cos 2\gamma) \}$$

$$= (1 - 2\sin^2 \alpha - 1 + 2\sin^2 \beta)(\sin \beta - \sin \gamma) - (\sin \alpha - \sin \beta)(1 - 2\sin^2 \beta - 1 + 2\sin^2 \gamma)$$

$$= -2(\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta)(\sin \beta - \sin \gamma) + 2(\sin \alpha - \sin \beta)(\sin^2 \beta - \sin^2 \gamma)$$

$$= -2(\sin \alpha - \sin \beta)(\sin \alpha + \sin \beta)(\sin \beta - \sin \gamma) + 2(\sin \alpha - \sin \beta)(\sin \beta - \sin \gamma)(\sin \beta + \sin \gamma)$$

$$= 2(\sin \alpha - \sin \beta)(\sin \beta - \sin \gamma) (-\sin \alpha - \sin \beta + \sin \beta + \sin \gamma)$$

$$= 2(\sin \alpha - \sin \beta)(\sin \beta - \sin \gamma)(\sin \gamma - \sin \alpha) = \text{R.H.S. (Proved)}$$

৫. প্রমাণ কর যে,

$$(a) \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2 b^2 c^2$$

[৮.'০২, '০৮; সি.'০৬, '০৯; মা.'০৮]

প্রমাণ : L.H.S. = $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$

$$= abc \begin{vmatrix} -a & a & a \\ b & -b & b \\ c & c & -c \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 0 & 2a & a \\ 0 & 0 & b \\ 2c & 0 & -c \end{vmatrix}$$

$[c'_1 = c_1 - c_2, c'_2 = c_2 - c_3]$

$$= abc \{2c(2ab - 0)\} = abc \cdot 4abc$$

$$= 4a^2 b^2 c^2 = R.H.S. \quad (\text{Proved})$$

$$5(b) \begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ca \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ca & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix} = 4a^2 b^2 c^2$$

[৫.'০৮, '১২]

প্রমাণ : L.H.S. = $\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ca \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ca & bc & a + b^2 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} ab^2 + ac^2 & ab^2 & c^2 a \\ a^2 b & bc^2 + a^2 b & bc^2 \\ ca^2 & b^2 c & ca^2 + b^2 c \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc} abc \begin{vmatrix} b^2 + c^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & c^2 + a^2 & b^2 \\ a^2 & b^2 & a^2 + b^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & b^2 & c^2 \\ -2c^2 & c^2 + a^2 & c^2 \\ -2b^2 & b^2 & a^2 + b^2 \end{vmatrix}$$

$[c'_1 = c_1 - (c_2 + c_3)]$

$$= 2c^2 (a^2 b^2 + b^4 - b^2 c^2) - 2b^2 (b^2 c^2 - c^4 - c^2 a^2)$$

$$= 2b^2 c^2 (a^2 + b^2 - c^2) - b^2 c^2 (b^2 - c^2 - a^2)$$

$$= 2b^2 c^2 (a^2 + b^2 - c^2 - b^2 + c^2 + a^2)$$

$$= 2b^2 c^2 \cdot 2a^2 = 4a^2 b^2 c^2 = R.H.S. \quad (\text{Proved})$$

$$5.(c) \begin{vmatrix} x^2 & yz & zx + z^2 \\ x^2 + xy & y^2 & zx \\ xy & y^2 + yz & z^2 \end{vmatrix} = 4x^2 y^2 z^2$$

[য.'০৮, '০৮; মা.'১৩]

প্রমাণ : L.H.S. = $\begin{vmatrix} x^2 & yz & zx + z^2 \\ x^2 + xy & y^2 & zx \\ xy & y^2 + yz & z^2 \end{vmatrix}$

$$= xyz \begin{vmatrix} x & z & x + z \\ x + y & y & x \\ y & y + z & z \end{vmatrix}$$

$$= xyz \begin{vmatrix} -2z & z & x + z \\ 0 & y & x \\ -2z & y + z & z \end{vmatrix}$$

$$= xyz \begin{vmatrix} 0 & -y & x \\ 0 & y & x \\ -2z & y + z & z \end{vmatrix} \quad [r'_1 = r_1 - r_3]$$

$$= xyz (-2z) (-xy - xy) = -2xyz^2 (-2xy)$$

$$= 4x^2 y^2 z^2 = R.H.S. \quad (\text{Proved})$$

$$5(d) \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a^2+b^2)^3$$

[মা.'০৯; ষ.'০২; সি.'১০, '১৩; জুনে'০৩-০৮, ১১-১২]

L.H.S. = $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2+2b^2 & 2ab-2ab & -2b \\ 2ab-2ab & 1-a^2+b^2+2a^2 & 2a \\ 2b-b+a^2b+b^3 & -2a+a-a^3-ab^2 & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$[c'_1 = c_1 - bc_3, c'_2 = c_2 + ac_3]$

$$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & -2b \\ 0 & 1+a^2+b^2 & 2a \\ b(1+a^2+b^2) & -a(1+a^2+b^2) & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a^2+b^2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 & 2a \\ b & -a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 + a^2 + b^2)^2 \{ 1(1 - a^2 - b^2 + 2a^2) + b(0 + 2b) \} \\
 &= (1 + a^2 + b^2)^2 (1 + a^2 - b^2 + 2b^2) \\
 &= (1 + a^2 + b^2)^3 = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$5(e) \left| \begin{array}{ccc} a & b & ax + by \\ b & c & bx + cy \\ ax + by & bx + cy & 0 \end{array} \right| = (b^2 - ac)$$

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

[ষ., জ.'১০; দি., য., রা., সি.'১২; চ.'১৩]

$$\text{প্রমাণ : L.H.S.} = \left| \begin{array}{ccc} a & b & ax + by \\ b & c & bx + cy \\ ax + by & bx + cy & 0 \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{xy} \left| \begin{array}{ccc} ax & bx & ax^2 + bxy \\ by & cy & bxy + cy^2 \\ ax + by & bx + cy & 0 \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{xy} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & ax^2 + 2bxy + cy^2 \\ by & cy & bxy + cy^2 \\ ax + by & bx + cy & 0 \end{array} \right|$$

$$[r'_1 = r_1 + (r_2 - r_3)]$$

$$= \frac{1}{xy} (ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

$$(b^2xy + bcy^2 - acxy - bcy^2)$$

$$= \frac{1}{xy} (ax^2 + 2bxy + cy^2)(b^2 - ac)xy$$

$$= (b^2 - ac)(ax^2 + 2bxy + cy^2) = \text{R.H.S.}$$

$$5(f) \left| \begin{array}{ccc} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{array} \right| = (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$(a + b + c)(b - c)(c - a)(a - b) [চ.'০৬]$$

$$\text{প্রমাণ : L.H.S.} = \left| \begin{array}{ccc} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{array} \right|$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} (b+c)^2 - a^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 - b^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 - c^2 & c^2 & ab \end{array} \right| [c'_1 = c_1 - c_2]$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \begin{array}{ccc} (a+b+c)(b+c-a) & a^2 & bc \\ (a+b+c)(c+a-b) & b^2 & ca \\ (a+b+c)(a+b-c) & c^2 & ab \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a+b+c) \left| \begin{array}{ccc} b+c-a & a^2 & bc \\ c+a-b & b^2 & ca \\ a+b-c & c^2 & ab \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a+b+c) \left| \begin{array}{ccc} -2(a-b) & (a-b)(a+b) & -c(a-b) \\ -2(b-c) & (b-c)(b+c) & -a(b-c) \\ a+b-c & c^2 & ab \end{array} \right| \\
 &\quad [r'_1 = r_1 - r_2, r'_2 = r_2 - r_3]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a+b+c)(a-b)(b-c) \left| \begin{array}{ccc} -2 & a+b & -c \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a+b+c)(a-b)(b-c) \left| \begin{array}{ccc} 0 & -(c-a) & -(c-a) \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{array} \right| \\
 &\quad [r'_1 = r_1 + (r_2 - r_3)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a+b+c)(a-b)(b-c) \left| \begin{array}{ccc} 0 & -1 & -1 \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a+b+c)(a-b)(b-c) \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ -2 & a+b+c & -a \\ a+b-c & c^2 - ab & ab \end{array} \right| \\
 &\quad [c'_2 = c_2 - c_3]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).(-1) \\
 &\quad [-2c^2 + 2ab - \{(a+b)^2 - c^2\}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)(-1) \\
 &\quad (-2c^2 + 2ab - a^2 - b^2 - 2ab + c^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a) \\
 &\quad (-1)(-1)(a^2 + b^2 + c^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a^2 + b^2 + c^2) (a + b + c)(a-b)(b-c)(c-a) \\
 &= \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$6.(a) \left| \begin{array}{ccc} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{array} \right| [\text{ব.'১১}]$$

$$= 4(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\begin{aligned}
 \text{ପ୍ରମାଣ : L.H.S.} &= \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} \\
 &= -2a\{4bc - (b+c)^2\} - (a+b)\{-2c(b+a) \\
 &\quad -(b+c)(c+a)\} + (a+c)\{(a+b)(b+c) + \\
 &\quad 2b(c+a)\} \\
 &= -8abc + 2a(b+c)^2 + 2c(a+b)^2 + \\
 &\quad 2(a+b)(b+c)(c+a) + 2b(c+a)^2 \\
 &= -8abc + 2a(b^2 + 2bc + c^2) + \\
 &\quad 2c(a^2 + 2ab + b^2) + 2b(c^2 + 2ca + a^2) + \\
 &\quad 2(a+b)(b+c)(c+a) \\
 &= -8abc + 2ab^2 + 4abc + 2ac^2 + 2ca^2 + \\
 &\quad 4abc + 2b^2c + 2bc^2 + 4abc + 2a^2b + \\
 &\quad 2(a+b)(b+c)(c+a) \\
 &= 2\{ab^2 + 2abc + ac^2 + ca^2 + a^2b + b^2c \\
 &\quad + bc^2\} + 2(a+b)(b+c)(c+a) \\
 &= 2\{a(b+c)^2 + a^2(b+c) + bc(b+c)\} + \\
 &\quad 2(a+b)(b+c)(c+a) \\
 &= 2(b+c)(ab + ca + a^2 + bc) + \\
 &\quad 2(a+b)(b+c)(c+a) \\
 &= 2(b+c)\{a(c+a) + b(c+a)\} + \\
 &\quad 2(a+b)(b+c)(c+a) \\
 &= 2(b+c)(c+a)(a+b) + 2(a+b)(b+c)(c+a) \\
 &= 4(a+b)(b+c)(c+a) = R.H.S.
 \end{aligned}$$

ବିକଳ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତି : ମନେ କରି ,

$$D = \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$$

$a+b=0$ i.e. $b=-a$ ସିଯେ ଆମରା ପାଇ ,

$$D = \begin{vmatrix} -2a & 0 & a+c \\ 0 & 2a & -a+c \\ c+a & c-a & -2c \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2a(-4ac - (c-a)^2) + (c+a)\{0 - 2a(c+a)\} \\
 &= 2a(c+a)^2 - 2a(c+a)^2 = 0 \\
 \therefore (a+b), D \text{ ଏଇ ଏକଟି ଉତ୍ପାଦକ }
 \end{aligned}$$

ଅନ୍ତରୁ ପତାବେ ଦେଖାନ୍ତେ ଯାଇ, $(b+c)$ ଏବଂ $(c+a)$ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ D ଏଇ ଉତ୍ପାଦକ ।

ଯେହେତୁ D ଏକଟି ତୃତୀୟ କ୍ରମେର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ଏବଂ $(a+b)(b+c)(c+a)$ ଏକଟି ତୃତୀୟ କ୍ରମେର ଉତ୍ପାଦକ , ସୁତରାଏ D ଏଇ ଅପର ଏକଟି ଉତ୍ପାଦକ k ଥାକିଲେ ପାରେ ଯା ଶ୍ରୀବକ ।

$$\therefore \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = k(a+b)(b+c)(c+a)$$

ଏଥିନ୍ତ, ଉତ୍ତର ପକ୍ଷେ $a=b=c=1$ ସିଯେ ଆମରା ପାଇ ,

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = k.2.2.2$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8k \Rightarrow 32 = k = 4$$

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$6(b) \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\text{ପ୍ରମାଣ : L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a(\frac{1}{a}+1) & b(\frac{1}{b}) & c(\frac{1}{c}) \\ a(\frac{1}{a}) & b(\frac{1}{b}+1) & c(\frac{1}{c}) \\ a(\frac{1}{a}) & b(\frac{1}{b}) & c(\frac{1}{c}+1) \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & \frac{1}{b} & 1+\frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

$$[c'_1 = c_1 + (c_2 + c_3)]$$

$$\begin{aligned}
 &= abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ 1 & \frac{1}{b} + 1 & \frac{1}{c} \\ 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} + 1 \end{vmatrix} \\
 &= abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} + 1 \end{vmatrix} \\
 &\quad [r'_1 = r_1 - r_2, r'_2 = r_2 - r_3] \\
 &= abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) 1(1 - 0) \\
 &= abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

7. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ নির্ণয়কে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক

ব্যাখ্যামে A_1, B_1, C_1 হলে, প্রমাণ কর যে,
 $a_2 A_1 + b_2 B_1 + c_2 C_1 = 0$. [য.০১; ক্ল.০৮, ০৯]

সমাধান : $A_1 = a_1$ এর সহগুণক $= b_2 c_3 - b_3 c_2$

$B_1 = b_1$ এর সহগুণক $= -(a_2 c_3 - a_3 c_2)$

$C_1 = c_1$ এর সহগুণক $= a_2 b_3 - a_3 b_2$

L.H.S. $= a_2 A_1 + b_2 B_1 + c_2 C_1$

$$\begin{aligned}
 &= a_2(b_2 c_3 - b_3 c_2) + b_2(-(a_2 c_3 - a_3 c_2)) + \\
 &c_2(a_2 b_3 - a_3 b_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a_2 b_2 c_3 - a_2 b_3 c_2 - a_2 b_2 c_3 + a_3 b_2 c_2 + \\
 &a_2 b_3 c_2 - a_3 b_2 c_2 = 0 = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

8. মান নির্ণয় কর :

$$\begin{aligned}
 \text{(a) সমাধান : } & \begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix} \quad [\text{য.০৮}] \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -2z & x+z & z \\ -2z & z & y+z \end{vmatrix} [c'_1 = c_1 - (c_2 + c_3)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x & -y \\ -2z & z & y+z \end{vmatrix} [r'_1 = r_1 - r_2] \\
 &= -2z(-xy - xy) = -2z(-2xy) = 4xyz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{8(b) সমাধান : } & \begin{vmatrix} b+c & b-c & c-b \\ a-c & c+a & c-a \\ a-b & b-a & a+b \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 2b & 0 & c-b \\ 2a & 2c & c-a \\ 0 & 2b & a+b \end{vmatrix} [c'_1 = c_1 - c_2, c'_2 = c_2 - c_3] \\
 &= 2.2 \begin{vmatrix} b & 0 & c-b \\ a & c & c-a \\ 0 & b & a+b \end{vmatrix} \\
 &= 4\{b(ca + bc - bc + ab) + (c-b)(ab - 0)\} \\
 &= 4\{abc + ab^2 + abc - ab^2\} \\
 &= 4.2abc = 8abc \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

9. সমাধান কর :

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } & \begin{vmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0 \quad [\text{ক.০৭; ট.০৭}] \\
 & \Rightarrow \begin{vmatrix} x+9 & 4 & 2 \\ x+9 & 2+x & 3 \\ x+9 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0
 \end{aligned}$$

$$[c'_1 = c_1 + (c_2 + c_3)]$$

$$\Rightarrow (x+9) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x+9) \begin{vmatrix} 0 & 2-x & -1 \\ 0 & x-1 & -(x+1) \\ 1 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

$$[r'_1 = r_1 - r_2, r'_2 = r_2 - r_3]$$

$$\Rightarrow (x+9) 1.(-(2-x)(x+1) + x-1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+9) \{(x-2)(x+1) + x-1\} = 0$$

$$\Rightarrow (x+9)(x^2 - x - 2 + x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+9)(x^2 - 3) = 0$$

$$\therefore x+9=0 \Rightarrow x=-9.$$

$$\text{or, } x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3}$$

নির্ণয় সমাধান, $x = -9, \pm \sqrt{3}$

$$9(b) \begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ 1 & x-5 & 1 \\ -1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = 0 \quad [\text{কুয়েট'০৮-০৯}]$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ x-3 & x-5 & 1 \\ x-3 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$[c'_1 = c_1 + (c_2 + c_3)]$$

$$\Rightarrow (x-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & x-5 & 1 \\ 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-3) \begin{vmatrix} 0 & -x+6 & -2 \\ 0 & x-6 & -x+4 \\ 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$[r'_1 = r_1 - r_2, r'_2 = r_2 - r_3]$$

$$\Rightarrow (x-3)\{+(x-6)(x-4)+2(x-6)\} = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x^2-10x+24+2x-12) = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x^2-8x+12) = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x^2-6x-2x+8) = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)\{x(x-6)-2(x-6)\} = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-2)(x-6) = 0$$

$$x = 2, 3, 6 \text{ (Ans.)}$$

$$9(c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0 \quad [\text{প.ভ.প.'০৮}]$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-a & a-b & b \\ x^2-a^2 & a^2-b^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-a)(a-b)(a+b)-(x-a)(x+a)(a-b) = 0$$

$$\Rightarrow (x-a)(a-b)(a+b-x-a) = 0$$

$$\Rightarrow (x-a)(x-b) = 0 \quad [\text{এখানে } a-b \neq 0]$$

$$x = a, b \text{ (Ans.)}$$

$$10. \text{ যদি } x, y, z \text{ অসমান এবং } \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$$

হয়, তাহলে দেখাও যে $xyz + 1 = 0$ [প.ভ.প.'৯০]

$$\text{প্রমাণ : } \text{দেওয়া আছে, } \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$$

বইয়ের কম

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-y & (x-y)(x+y) & (x-y)(x^2+xy+y^2) \\ y-z & (y-z)(y+z) & (y-z)(y^2+yz+z^2) \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$[r'_1 = r_1 - r_2, r'_2 = r_2 - r_3]$$

$$\Rightarrow (x-y)(y-z) \begin{vmatrix} 1 & x+y & x^2+xy+y^2 \\ 1 & y+z & y^2+yz+z^2 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)(y-z) \begin{vmatrix} 0 & x-z & (x-z)(x+y+z) \\ 1 & y+z & y^2+yz+z^2 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$[r''_1 = r'_1 - r'_2]$$

$$\Rightarrow (x-y)(y-z) \begin{vmatrix} 0 & x-z & (x-z)(x+y+z) \\ 1 & y+z & y^2+yz+z^2 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)(y-z)(x-z) \begin{vmatrix} 0 & 1 & x+y+z \\ 1 & y+z & y^2+yz+z^2 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+y+z \\ 1 & y+z & y^2+yz+z^2 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$$

$[x, y, z]$ অসমান বলে $(x-y), (y-z), (x-z)$ এর কোনটি শূন্য হতে পারেনা।]

$$\Rightarrow -(1+z^3-z^2(x+y+z))+z\{y^2+yz+z^2-(y+z)(x+y+z)\}$$

$$\Rightarrow -(1+z^3-z^2x-yz^2-z^3)+z\{y^2+yz+z^2-xy-zx-y^2-2yz-z^2\}=0$$

$$\Rightarrow -1+z^2x+yz^2+z(-xy-zx-yz)=0$$

$$\Rightarrow -1+z^2x+yz^2-xyz-z^2x-yz^2=0$$

$$\Rightarrow -1-xyz=0$$

$\therefore xyz + 1 = 0$ (Showed)

11(a) $\begin{bmatrix} a+3 & 6 \\ 5 & a-4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে a
এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\begin{bmatrix} a+3 & 6 \\ 5 & a-4 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী বলে,

$$\begin{vmatrix} a+3 & 6 \\ 5 & a-4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a+3)(a-4) - 30 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 12 - 30 = 0 \Rightarrow a^2 - a - 42 = 0$$

$$\Rightarrow (a-7)(a+6) = 0 \Rightarrow a = -6, 7$$

(b) $\begin{bmatrix} a-2 & 6 \\ 2 & a-3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স ব্যক্তিকী হলে a এর
মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\begin{bmatrix} a-2 & 6 \\ 2 & a-3 \end{bmatrix}$ ব্যক্তিকী বলে,

$$\begin{vmatrix} a-2 & 6 \\ 2 & a-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-2)(a-3) - 12 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 5a + 6 - 12 = 0 \Rightarrow a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (a-6)(a+1) = 0 \Rightarrow a = -1, 6$$

12. বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর :

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

12.(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক

$$|A| = 4 - 6 = -2$$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = 4, A_{12} = -3$

$$A_{21} = -2, A_{22} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ans.})$$

12(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক

$$|A| = 6 - 5 = 1$$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = 3, A_{12} = -1$

$$A_{21} = -5, A_{22} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{Ans.})$$

12(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

$$|A| = 3(0 - 15) - 4(-4 - 6) - 1(5 - 0) \\ = -45 + 40 - 5 = -10$$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -15$,

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 10, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 11, A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -7, A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12,$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10, A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)$$

$$= \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -15 & 10 & 5 \\ 11 & -10 & -7 \\ 12 & -10 & -4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -15 & 11 & 12 \\ 10 & -10 & -10 \\ 5 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/2 & -11/10 & -6/5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 7/10 & 2/5 \end{bmatrix}$$

[ক্যালকুলেটরের সাহায্যে উভর যাচাই করা যায়।]

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$|A| = 2(-4 + 1) + 1(2 - 1) - 1(-1 + 2) \\ = -6 + 1 - 1 = -6$$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$,

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)$$

$$= \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/6 & -5/6 & 1/2 \\ -1/6 & -1/6 & 1/2 \end{bmatrix} \text{(Ans.)}$$

13. निर्णयकेरल साहाय्ये समाधान करा :

समाधान : (a) देवेंद्रा आहे, $2x + 3y = 4$ [५.'०१]

$$x - y = 7$$

क्रमारेल नियम व्यवहार करू आमरा पाई,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 21 = -25,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 4 = 10$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-25}{-5} = 5, y = \frac{D_y}{D} = \frac{10}{-5} = -2$$

13(b) देवेंद्रा आहे, $x + y + z = 1$

$$x + 2y + z = 2$$

$$x + y + 2z = 0$$

क्रमारेल नियम व्यवहार करू आमरा पाई,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$[c'_1 = c_1 - c_2, c'_2 = c_2 - c_3]$$

$$= 1(1 - 0) = 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$[c'_1 = c_1 - c_2, c'_2 = c_2 - c_3]$$

$$= 1(0 + 1) = 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$[c'_1 = c_1 - c_2, c'_2 = c_2 - c_3]$$

$$= 1(2 - 1) = 1$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$[c'_1 = c_1 - c_2, c'_2 = c_2 - c_3]$$

$$= 1(-1 - 0) = -1$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{1} = 1, y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-1}{1} = -1$$

13(c) देवेंद्रा आहे, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x + 2y - z \\ 3x - y + 3z \\ 2x + 3y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$x + 2y - z = 5$$

$$3x - y + 3z = 7$$

$$2x + 3y + z = 11$$

एथन, क्रमारेल नियम व्यवहार करू आमरा पाई,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1 - 9) - 2(3 - 6) - 1(9 + 2)$$

$$= -10 + 6 - 11 = -15$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 11 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5(-1 - 9) - 2(7 - 33) - 1(21 + 11)$$

$$= -50 + 52 - 32 = -30$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(7 - 33) - 5(3 - 6) - 1(33 - 14)$$

$$= -26 + 15 - 19 = -30$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-11 - 21) - 2(33 - 14) + 5(9 + 2)$$

$$= -32 - 38 + 55 = -15$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-30}{-15} = 2, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-30}{-15} = 2,$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-15}{-15} = 1$$

14. সমাধান : (a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11$

যেহেতু $|A|$ অশূন্য, সুতরাং A একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

(b) প্রশ্নালো IA এর 5(a) নং প্রশ্ন।

(c) A^{-1} নির্ণয় কর।

$$|A| \text{ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, } A_{11} = -3, A_{12} = -4,$$

$$A_{21} = -2, A_{22} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$= -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

15(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 + 20 + 24 \\ 14 + 30 + 40 \\ 14 + 50 + 96 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 58 \\ 84 \\ 160 \end{bmatrix}$$

মোট লাভ = $(58 + 84 + 160) = 302$ টাকা।

(b) $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+2+3 & 2+6+15 & 3+10+36 \\ 1+3+5 & 2+9+25 & 3+15+60 \\ 1+5+12 & 2+15+60 & 3+25+144 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 23 & 49 \\ 9 & 36 & 78 \\ 18 & 77 & 172 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

(c) A ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক

$$|A| = 1(36 - 25) - 2(12 - 5) + 3(5 - 3)$$

$$= 11 - 14 + 6 = 3$$

$$|A| \text{ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, } A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 11,$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = -7, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = -9, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 9,$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3, A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 11 & -7 & 2 \\ -9 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

16. সমাধান (a) A বর্গ ম্যাট্রিক্স এর নির্ণায়ক $|A|$ অশূন্য হলে A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} বিদ্যমান থাকবে।

আবার, A ম্যাট্রিক্স এর সারি সংখ্যা = 3. সুতরাং, B ম্যাট্রিক্স এর কলাম সংখ্যা 3 হলে AB বিদ্যমান থাকবে।

(b) প্রশ্নালো IB এর 1(a) নং প্রশ্ন।

$$(c) p = 2 \text{ হলে, } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 2^2 & 2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x + y + z \\ x + 2y + 4z \\ x + 4y + 16z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x + y + z = 5, x + 2y + 4z = 7$$

$$x + 4y + 16z = 11$$

এখন, ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -3 & -12 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= 12 - 6 = 6$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 4 \\ 11 & 4 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= 5(32 - 16) - 1(112 - 44) + 1(28 - 22)$$

$$= 80 - 68 + 6 = 18$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \\ 1 & 11 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -12 \\ 1 & 11 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= 24 - 12 = 12$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= 4 - 4 = 0$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{18}{6} = 3, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{12}{6} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{0}{6} = 0$$

নির্ণেয় সমাধান $x = 3, y = 2, z = 0$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

বিস্তার না করে প্রমাণ কর :

$$1(a) \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$\text{প্রমাণ : L.H.S.} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ abc & abc & abc \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (-)(-) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$1(b) \begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} + b & \frac{1}{b} + c & \frac{1}{c} + a \end{vmatrix} = 0 \quad [\text{প.ত.প. } ১৪]$$

$$\text{প্রমাণ : L.H.S.} = \begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} + b & \frac{1}{b} + c & \frac{1}{c} + a \end{vmatrix}$$

$$= \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} + b & \frac{1}{b} + c & \frac{1}{c} + a \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & abc & abc \\ a \cdot \frac{1}{a} & b \cdot \frac{1}{b} & c \cdot \frac{1}{c} \\ a(\frac{1}{a} + b) & b(\frac{1}{b} + c) & c(\frac{1}{c} + a) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 + ab & 1 + bc & 1 + ca \end{vmatrix}$$

$$= 0 = \text{R.H.S.} \quad [\text{দুইটি সারি একই।}]$$

$$2(a) \begin{vmatrix} x+a & a & a \\ b & x+b & b \\ c & c & x+c \end{vmatrix} = x^2(x+a+b+c)$$

$$\text{প্রমাণ : L.H.S.} = \begin{vmatrix} x+a & a & a \\ b & x+b & b \\ c & c & x+c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c \\ b & x+b & b \\ c & c & x+c \end{vmatrix} [r'_1 = r_1 + (r_2 + r_3)]$$

$$= (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & x+b & b \\ c & c & x+c \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -x & x & b \\ 0 & -x & x+c \end{vmatrix}$$

$$[c'_1 = c_1 - c_2, c'_2 = c_2 - c_3]$$

$$= (x+a+b+c)(x^2 - 0)$$

$$= x^2(x+a+b+c) = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$2(b) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = (a^3 - 1)^2$$

$$\text{প্রমাণ : L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a+a^2 & a & a^2 \\ 1+a+a^2 & 1 & a \\ 1+a+a^2 & a^2 & 1 \end{vmatrix} [c'_1 = c_1 + (c_2 + c_3)]$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2 + a + 1) \begin{vmatrix} 0 & a-1 & a(a-1) \\ 0 & 1-a^2 & a-1 \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$[r'_1 = r_1 - r_2, r'_2 = r_2 - r_3]$$

$$= (a^2 + a + 1) 1 \{(a-1)^2 - a(a-1)(1-a)(1+a)\}$$

$$= (a^2 + a + 1) (a-1)^2 (1+a+a^2)$$

$$= (a^2 + a + 1)^2 (a-1)^2 = (a^3 - 1)^2 = \text{R.H.S.}$$

(Proved)

$$3. \text{ প্রমাণ কর যে, } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin A & \sin B & \sin C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix}$$

$$= \sin(A-B) + \sin(B-C) + \sin(C-A)$$

$$= -4 \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{C-A}{2}$$

$$\text{প্রমাণ : L.H.S.} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin A & \sin B & \sin C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin A - \sin B & \sin B - \sin C & \sin C \\ \cos A - \cos B & \cos B - \cos C & \cos C \end{bmatrix} [c_1 - c_2, c_2 - c_3]$$

$$= (\sin A - \sin B)(\cos B - \cos C) - (\sin B - \sin C)(\cos A - \cos B)$$

$$= \sin A \cos B - \sin A \cos C - \sin B \cos B + \sin B \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos A - \sin C \cos B$$

$$= (\sin A \cos B - \cos A \sin B) + (\sin B \cos C - \sin C \cos B) + (\sin C \cos A - \sin A \cos C)$$

$$= \sin(A-B) + \sin(B-C) + \sin(C-A) = \text{M.H.S.}$$

$$\text{আবার, } (\sin A - \sin B)(\cos B - \cos C) - (\sin B - \sin C)(\cos A - \cos B)$$

$$= 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} 2 \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C-B}{2} - 2 \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2} 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B-A}{2}$$

$$= -4 \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{B-C}{2} [\cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{B+C}{2} - \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{A+B}{2}]$$

$$= -4 \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{B-C}{2} \cos(\frac{B+C}{2} - \frac{A+B}{2})$$

$$= -4 \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{C-A}{2} = \text{R.H.S.}$$

L.H.S. = M.H.S. = R.H.S. (Proved)

4. প্রমাণ কর যে,

$$(a) \begin{vmatrix} 0 & b-a & c-a \\ a-b & 0 & c-b \\ a-c & b-c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{প্রমাণ : L.H.S.} = \begin{vmatrix} 0 & b-a & c-a \\ a-b & 0 & c-b \\ a-c & b-c & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ a-b & b-c & c-b \\ a-b & b-c & 0 \end{vmatrix}$$

$$[c'_1 = c_1 - c_2, c'_2 = c_2 - c_3]$$

$$= (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & c-a \\ 1 & 1 & c-b \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c) \times 0 \quad [\because \text{দুইটি কলাম একই }]$$

$$= 0 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$4(b) \begin{vmatrix} -bc & bc+b^2 & bc+c^2 \\ ca+a^2 & -ca & ca+c^2 \\ ab+a^2 & ab+b^2 & -ab \end{vmatrix}$$

$$= (bc+ca+ab)^3$$

$$\text{প্রমাণ : L.H.S.} = \begin{vmatrix} -bc & bc+b^2 & bc+c^2 \\ ca+a^2 & -ca & ca+c^2 \\ ab+a^2 & ab+b^2 & -ab \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} -abc & abc+ab^2 & abc+ac^2 \\ abc+a^2b & -abc & abc+bc^2 \\ abc+a^2c & abc+b^2c & -abc \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} -bc & ca+ab & ab+ac \\ bc+ab & -ca & ab+bc \\ bc+ca & ca+bc & -ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ab+bc+ca & ab+bc+ca & ab+bc+ca \\ bc+ab & -ca & ab+bc \\ bc+ca & ca+bc & -ab \end{vmatrix}$$

$$[r'_1 = r_1 - r_2, r'_2 = r_2 - r_3]$$

$$= (ab+bc+ca) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc+ab & -ca & ab+bc \\ bc+ca & ca+bc & -ab \end{vmatrix}$$

$$= (ab+bc+ca)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ bc+ab+ca & -(ca+ab+ca) & ab+bc \\ 0 & ca+bc+ab & -ab \end{vmatrix}$$

$$[c'_1 = c_1 - c_2, c'_2 = c_2 - c_3]$$

$$= (ab+bc+ca).1\{(ab+bc+ca)(ab+bc+ca)-0\}$$

$$= (ab+bc+ca)^3 = 0 = \text{R.H.S.}$$

$$4(c) \begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$$

$$= (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2$$

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca & b^2-ca & c^2-ab \\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca & a^2-bc & b^2-ca \\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b^2-ca & c^2-ab \\ 1 & a^2-bc & b^2-ca \\ 1 & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} \quad (i)$$

$$\text{এখন, } \begin{vmatrix} 1 & b^2-ca & c^2-ab \\ 1 & a^2-bc & b^2-ca \\ 1 & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -(a-b)(a+b+c) & -(b-c)(a+b+c) \\ 0 & -(c-a)(c+a+b) & -(a-b)(a+b+c) \\ 1 & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$$

$$[r'_1 = r_1 - r_2, r'_2 = r_2 - r_3]$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -(a-b)(a+b+c) & -(b-c)(a+b+c) \\ 0 & -(c-a)(a+b+c) & -(a-b)(a+b+c) \\ 1 & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^3 \begin{vmatrix} 0 & -(a-b) & -(b-c) \\ 0 & -(c-a) & -(a-b) \\ 1 & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 1. \{(a-b)^2 - (b-c)(c-a)\}$$

$$= (a+b+c)^2 (a^2 + b^2 - 2ab - bc + c^2 + ab - ca)$$

$$= (a+b+c)^2 (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

(i) হতে আমরা পাই,

$$\begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^2 \\
 &= \{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\}^2 \\
 &= (a^3+b^3+c^3-3abc)^2 = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$4(d) \begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc(a+b+c)^3$$

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S.} &= \begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} c(a+b)^2 & c^2a & bc^2 \\ ca^2 & a(b+c)^2 & a^2b \\ b^2c & ab^2 & b(c+a)^2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

অতপৰ, উদাহরণ ৮ দ্রষ্টব্য।

$$4(e) \begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(b+c)(c+a)(a+b)$$

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} a+b & -(b+c) & -b \\ a+b & b+c & -a \\ -(a+b) & b+c & a+b+c \end{vmatrix} \\
 &\quad [c'_1 = c_1 - c_2, c'_2 = c_2 - c_3]
 \end{aligned}$$

$$= (a+b)(b+c) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -b \\ 1 & 1 & -a \\ -1 & 1 & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)(b+c) \begin{vmatrix} 0 & -1 & -b \\ 2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & a+b+c \end{vmatrix} [c'_1 = c_1 - c_2]$$

$$= (a+b)(b+c)\{-2(-a-b-c+b)\}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a+b)(b+c)(-2)(-1)(c+a) \\
 &= 2(a+b)(b+c)(c+a) = \text{R.H.S.}
 \end{aligned}$$

$$4(f) \begin{vmatrix} -1 & b & c \\ a & -1 & c \\ a & b & -1 \end{vmatrix} = (a+1)(b+1)(c+1)$$

$$\left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} - 1 \right)$$

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} -1 & b & c \\ a & -1 & c \\ a & b & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & b & c \\ a+1 & -(b+1) & 0 \\ a+1 & 0 & -(c+1) \end{vmatrix}$$

$$[r'_2 = r_2 - r_1, r'_3 = r_3 - r_1]$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{a+1} & \frac{b}{b+1} & \frac{c}{c+1} \\ \frac{a+1}{a+1} & -\frac{(b+1)}{b+1} & 0 \\ \frac{a+1}{a+1} & \frac{b+1}{b+1} & \frac{c+1}{c+1} \\ \frac{a+1}{a+1} & 0 & -\frac{(c+1)}{c+1} \end{vmatrix}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1) \begin{vmatrix} -\frac{1}{a+1} & \frac{b}{b+1} & \frac{c}{c+1} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)$$

$$\left\{ -\frac{1}{a+1}(1-0) - \frac{b}{b+1}(-1-0) + \frac{c}{c+1}(0+1) \right\}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1) \left\{ -\frac{1}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \right\}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1) \left\{ -\frac{a+1-a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \right\}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1)$$

$$\left\{ -\frac{a+1}{a+1} + \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \right\}$$

$$= (a+1)(b+1)(c+1) \left\{ \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} - 1 \right\}$$

$$= \text{R.H.S. (Proved)}$$

4(g) মান নির্ণয় কর: $\begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a^2 & 1 & -a \\ -a & a^2 & 1 \end{vmatrix}$ [ক্ষেত্র ১২-১৩]

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a^2 & 1 & -a \\ -a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a+a^2 & -a & a^2 \\ 1-a+a^2 & 1 & -a \\ 1-a+a^2 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-a+a^2) \begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-a+a^2) \begin{vmatrix} 0 & -a-1 & a^2+a \\ 0 & 1-a^2 & -a-1 \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-a+a^2) \begin{vmatrix} 0 & -(a+1) & a(a+1) \\ 0 & (1+a)(1-a) & -(a+1) \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-a+a^2)(a+1)^2 \begin{vmatrix} 0 & -1 & a \\ 0 & 1-a & -1 \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-a+a^2)(a+1)^2(1-a+a^2)$$

$$= (1-a+a^2)^2(a+1)^2$$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ হলে দেখাও যে, $A^3 = I$. এ

থেকে A^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

উ. গ. (১ম পত্র) সমাধান-৮

$A^2 A = I$ হতে সিদ্ধান্ত হয় যে, A^{-1} বিদ্যমান এবং এর

$$\text{মান } A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ হলে এখন একটি ম্যাট্রিক্স B

নির্ণয় কর যেন $AB = BA = I$ হয়।

সমাধান : $AB = BA = I$ বলে, $B = A^{-1}$

$$\text{এখানে, } |A| = 1(-1-30) - 3(3+6) + 4(15-1)$$

$$= -31 - 27 + 56 = -2$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 & 6 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -1 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & -3 & 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -31 & -9 & 14 \\ 17 & 5 & -8 \\ 22 & 6 & -10 \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -31 & 17 & 22 \\ -9 & 5 & 6 \\ 14 & -8 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 31/2 & -17/2 & -11 \\ 9/2 & -5/2 & -3 \\ -7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

7. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ও $AB = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ হলে B

ম্যাট্রিক্সের উপাদানসমূহ নির্ণয় কর। [ক্ষেত্র ০৯-১০]

সমাধান: এখানে, $A^{-1} = \frac{1}{4-6} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

এখন, $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = (I)B = B$

$$\Rightarrow B = A^{-1}(AB) = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5+6 & -\frac{17}{2} + \frac{21}{2} \\ 10-8 & 17-14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

8. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} B = I$ হলে, B ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর; যেখানে

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স।}$$

সমাধান: ধরি, $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\text{তাহলে, } A^{-1} = \frac{1}{4-6} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

এখন, যেহেতু $AB = I$, সুতরাং, $B = A^{-1}$

$$B = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ডর্জি পরীক্ষার MCQ :

ম্যাট্রিক্স :

1. যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ হয়,

তবে AB এর সমান - [DU 05-06; Jt.U 08-09, 09-10; JU.09-10; R.U.08-09]

$$Sol^n.: AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -15 & -3 \end{bmatrix}$$

[বিদ্রূপ: ক্যালকুলেটরের সাহায্যেও ম্যাট্রিক্সের সমাধান করা যায়।]

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ হলে, A^2 সমান- [DU 04-05; RU, '07-08; JU.09-10]

$$Sol^n.: A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-9 & -6-6 \\ 6+6 & -9+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -12 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}$$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ হলে AB কত?

[CU 07-08]

a. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$

Sol^n. : AB এর মাত্রা হবে $(3 \times 1) \cdot (1 \times 3) = 3 \times 3$

4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2i \\ 0 & 2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \end{bmatrix}$ হলে, $A^2 + 4I$ সমান-

[CU 06-07]

$$Sol^n.: A^2 + 4I = \begin{bmatrix} (2i)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (2i)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (2i)^2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ হলে $M^2 = ?$ [CU 02-03]

$$Sol^n.: M^2 = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

6. $\begin{bmatrix} x-y & 1 \\ 7 & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ হলে $(x, y) = ?$

[DU 02-03]

$$Sol^n.: x-y = 8, x+y = 2 \therefore (x, y) = (5, -3)$$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ হলে $(x, y) = ?$

[CU 05-06]

$$Sol^n.: 3x + 2y = 5, x - 2y = 7$$

$$\therefore (x, y) = (3, -2)$$

8. $\begin{bmatrix} p-4 & 8 \\ 2 & p+2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতীক্রমী হবে p

যদি এর মান - [DU 09-10, 07-08]

$$Sol^n.: (p-4)(p+2) - 16 = 0$$

$$\Rightarrow p^2 - 2p - 8 - 16 = 0 \Rightarrow p^2 - 2p - 24 = 0$$

$$p = -6, 4$$

9. $\begin{bmatrix} \alpha+3 & 6 \\ 5 & \alpha-4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিজটি ব্যতীক্রমী হবে যদি
α এর মান - [Jt.U 07-08]

Sol": $(\alpha + 3)(\alpha - 4) - 30 = 0$
 $\Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 42 = 0 \quad \alpha = 7, -6$

কোশল : 2×2 অব্যতীক্রমী ম্যাট্রিজ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

এর বিপরীত ম্যাট্রিজ $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

10. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ হয় তবে $A^{-1} = ?$ [DU 06-07; Jt.U 06-07]

Sol": $A^{-1} = \frac{1}{4-6} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

11. যদি $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ হয় তবে $A^{-1} = ?$ [Jt.U 07-08]

Sol": $A^{-1} = \frac{1}{5+6} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, B = [1 \ 2 \ 3]$ হলে AB কত? [BUET 08-09; NU 09-10; CU 07-08]

a. $[4 \ -29]$ b. $\begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$ d. $[11]$

Sol": AB ম্যাট্রিজের মাত্রা = A এর সারি $\times B$ এর কলাম = $3 \times 3 \therefore$ Ans. b.

13. যদি $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$ হয়, তবে XA^2 হবে- [BUET 11-12]

A. $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ D. কোনটি নয়।

Sol": XA^2 নির্ণয় যোগ্য নয়।

14. A, B, C ম্যাট্রিজগুলির মাত্রা যথাক্রমে $4 \times 5, 5 \times 4, 4 \times 2$ হলে $(A^T + B)C$ এর মাত্রা হবে- [BUET 10-11]

Sol": A^T এর মাত্রা = $5 \times 4, (A^T + B)$ এর
মাত্রা = $5 \times 4, (A^T + B)C = 5 \times 2$

ম্যাট্রিজে ক্যালকুলেটরের ব্যবহার

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$ হলে, AB
ও A^{-1} নির্ণয় কর।

Declaring Matrix A:

MODE SHIFT

3 times 2 (MAT) 4 1 1 (A)

3 = 3 = 1 = 1 = 1 = 2

= 3 = 4 = 3 = -2 =

SHIFT STO

3 RCL

এভাবে Matrix B Declare করি।

এভাবে Matrix B Declare করি।

SHIFT [MAT]

4 3 (MAT) 1 (A) ×

SHIFT [MAT]

4 3 (MAT) 2 (B) =

ধারাবাহিকভাবে এর ডান দিক চাপতে হবে।

SHIFT [MAT] AC 4 3 (MAT) 1 x^{-1} =

ধারাবাহিকভাবে এর ডান দিক চাপতে হবে।

নির্ণয়ক :

1. নির্ণয়ক $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ এর মান-

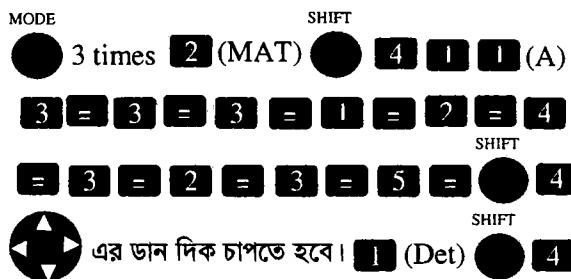
[DU 08-09, 05-06, Jt.U06-07; RU 05-06;
KUET 10-11, 08-09; BAU 08-09]

A. $4xyz$ B. $3xyz$ C. $2xyz$ D. xyz

Sol": $x = 1, y = 2, z = 3$ হলে

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 24 \quad (\text{ক্যালকুলেটরের সাহায্যে})$$

Option গুলোতে $x = 1, y = 2, z = 3$ বসালে
 $A = 24$ হয়। \therefore Ans. A.



$$3 \cdot 1 \text{ (A)} = 24$$

$$2. \text{ নির্ণয়ক } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \text{ এর মান কত? [RU 07-08]}$$

- A. $(a-b)(b-c)(c-a)$ B. $(a^2 - b^2)(b-c)(c-a)$
C. $(a-b)(b^2 - c^2)(c-a)$ D. $(a-b)(b-c)(c^2 - a^2)$

Sol^n .: $a = 1, b = 2, c = 3$ হলে, $\Delta = 2$

Option গুলোতে $a = 1, b = 2, c = 3$ বসালে
 $A = 2$ হয়। Ans. A.

অন্যভাবে বলা যায়- নির্ণয়কে a, b, c এর উপস্থিতি
সমভাবে বলে নির্ণয়কের মানেও a, b, c এর উপস্থিতি
সমভাবে হবে।

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ হলে } x = ?$$

[DU 03-04; CU 02-03]

Sol^n .: $x = a$ হলে $C_1 = C_2$ হয় $\therefore \Delta = 0$

$x = b$ হলে $C_1 = C_3$ হয়. $\Delta = 0$

$x = a$ or b

$$4. \begin{vmatrix} 50 & 60 & 70 \\ 10 & 20 & 30 \\ 30 & 60 & 90 \end{vmatrix} \text{ নির্ণয়কের মান} - [Jt.U 08-09]$$

Sol^n .: এখানে $r_3 = 3r_2 \quad \therefore \Delta = 0$

$$5. x \text{ এর মান কত হলে} \begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0 \text{ হবে-}$$

Sol^n .: $x = 0$ হলে $\Delta = 0$ হয়। [BUET 05-06]
 $x = 2$ হলে $\Delta = 2(4-4) = 0$ হয়।

$$6. \begin{vmatrix} a-3 & -1 \\ -8 & a+4 \end{vmatrix} \text{ নির্ণয়কটির মান শূন্য হলে } a \text{ এর মান কত হবে? [DU 07-08]}$$

Sol^n .: $a^2 + a - 12 - 8 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 20 = 0$
 $a = -5$ or 4

ভেক্টর (VECTOR)

প্রশ্নমালা II

প্রশ্নমালা - II A

1. (a) ABC একটি ত্রিভুজ। $\overrightarrow{BC} = \underline{a}$, $\overrightarrow{CA} = \underline{b}$
এবং $\overrightarrow{BA} = \underline{c}$ হলে, দেখাও যে, $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$

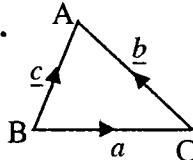
প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\triangle ABC$ এ,

$$\overrightarrow{BC} = \underline{a}, \overrightarrow{CA} = \underline{b} \text{ এবং } \overrightarrow{BA} = \underline{c}.$$

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$$

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{c} \quad (\text{Showed})$$



1. (b) ABC একটি ত্রিভুজ; D বিন্দু BC এর মধ্যবিন্দু। $\overrightarrow{AB} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{AC} = \underline{b}$ হলে, দেখাও যে,
 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

[ব.'11]

প্রমাণ : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

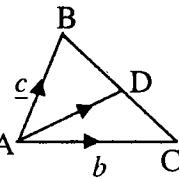
$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

[\because D, BC এর মধ্যবিন্দু।]

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \underline{c} + \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{c}) = \frac{1}{2}(2\underline{c} + \underline{b} - \underline{c})$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c}) \quad (\text{Showed})$$



1. (c) ABCDE একটি পঞ্চভুজ, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$,
 $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{DE} = \underline{d}$ হলে, দেখাও যে,
 $\overrightarrow{AE} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d}$

[ক.'01]

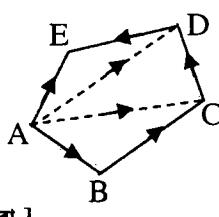
প্রমাণ : ABC, ACD ও ADE
ত্রিভুজ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র
হতে পাই,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$= \underline{a} + \underline{b} \dots (1)$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$$

$$= \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} \quad [\text{(1) দারা}]$$



$$\text{এবং } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d}$$

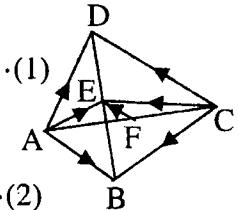
1. (d) E ও F বিন্দু দ্বারা ABCD চতুর্ভুজের BD ও
AC কর্ণ দ্বারা মধ্যবিন্দু। দেখাও যে,
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{FE}$

প্রমাণ : $\triangle ABD$ এ BD বাহুর
মধ্যবিন্দু E.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE} \dots (1)$$

$\triangle BCD$ এ BD বাহুর

মধ্যবিন্দু E.



$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CE} \dots (2)$$

আবার, $\triangle AEC$ এ AC বাহুর মধ্যবিন্দু F

$$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{EF}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{FE} \dots (3)$$

(1) ও (2) যোগ করে পাই,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2(2\overrightarrow{FE})$$

www.boighar.com [(3) দারা]

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{FE} \quad (\text{Showed})$$

1. (e) A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে \underline{a} ও \underline{b}
হলে, AB এর উপরিস্থিত C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয়
কর যেন $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ হয়।

সমাধান : মনে করি C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর \underline{c} .

$$\text{দেওয়া আছে, } \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} \Rightarrow \underline{c} - \underline{a} = 3(\underline{b} - \underline{a})$$

$$\Rightarrow \underline{c} = 3\underline{b} - 3\underline{a} + \underline{a} = 3\underline{b} - 2\underline{a}$$

C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $3\underline{b} - 2\underline{a}$ (Ans.)

1. (f) PQR ত্রিভুজের QR, RP ও PQ
বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে L, M ও N। প্রমাণ কর
যে, $\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{RN} = \underline{0}$ [সি.'০৭,'০৯,'১২;
ষ.'০১; দি.'০৯,'১৩; বা.'০৯,'১১,'১৩; ব.'১২,'১৪]

প্রমাণ : QR এর মধ্যবিন্দু L বলে,

$$\overrightarrow{PL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR})$$

বইয়র কম

অনুরূপভাবে,

$$\overrightarrow{QM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR}) \text{ এবং}$$

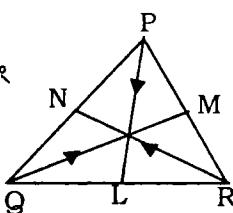
$$\overrightarrow{RN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ})$$

$$\text{L.H.S.} = \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{RN}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ})$$

$$= \frac{1}{2}\{(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP}) + (\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QR}) + (\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PR})\}$$

$$= \frac{1}{2}(0 + 0 + 0) = 0 = \text{R.H.S. (Proved)}$$



2. (a) ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F হলে \overrightarrow{BE} ও \overrightarrow{CF} তেষ্টের দুইটিকে \overrightarrow{AB} ও \overrightarrow{AC} তেষ্টের দুইটির যোগাপূর্ণী সমাবেশে প্রকাশ কর।

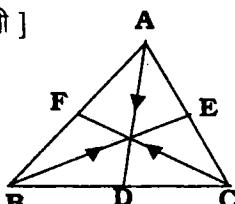
$$\text{সমাধান : } \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$$

[তেষ্টের যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী]

$$\Rightarrow \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

[E, AC এর মধ্যবিন্দু !]

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$



$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} \quad [\text{তেষ্টের যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী}]$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

[∵ E, AC এর মধ্যবিন্দু !]

$$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

2. (b) OAC ত্রিভুজে AC বাহুর মধ্যবিন্দু B ; যদি $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ হয়, তবে \overrightarrow{OC} তেষ্টেরকে \underline{a} ও \underline{b} এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [ঢ.: '০৯, '১৩; দি.: '১২]

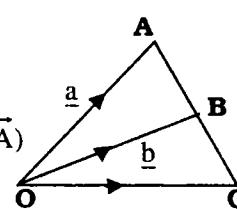
$$\text{সমাধান : } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

$$= \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AB}$$

[∵ B, AC এর মধ্যবিন্দু]

$$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$= \underline{a} + 2(\underline{b} - \underline{a})$$



$$[\quad \overrightarrow{OA} = \underline{a} \text{ এবং } \overrightarrow{OB} = \underline{b} \quad]$$

$$\overrightarrow{OC} = 2\underline{b} - \underline{a} \quad (\text{Ans.})$$

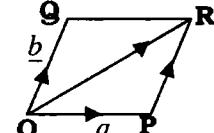
2. (c) $\overrightarrow{OP} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{OR} = \underline{a} + \underline{b}$ হলে OPRQ কি ধরনের চতুর্ভুজ তা নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$\overrightarrow{OP} = \underline{a}, \overrightarrow{OQ} = \underline{b} \text{ এবং}$$

$$\overrightarrow{OR} = \underline{a} + \underline{b}$$

$$\text{এখন, } \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \underline{a} + \underline{b} = \overrightarrow{OR}$$



$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$; যা তেষ্টের যোগের সামান্তরিক সূত্রের শর্ত। অতএব, OPRQ একটি সামান্তরিক।

3. যদি \underline{a} ও \underline{b} অসমরৈখিক তেষ্টের এবং $(x+1)\underline{a} + (y-2)\underline{b} = 2\underline{a} + \underline{b}$ হয় তবে x ও y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, \underline{a} ও \underline{b} অসমরৈখিক তেষ্টের এবং

$$(x+1)\underline{a} + (y-2)\underline{b} = 2\underline{a} + \underline{b}$$

$$x+1=2 \Rightarrow x=1, y-2=1 \Rightarrow y=3$$

প্রশ্নমালা – II B

1. (a) $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

হলে $2\vec{A} + \vec{B}$ ও $6\vec{A} - 3\vec{B}$ এর মান নির্ণয় কর।

[কৃ.: '০৭; চ.: '০৮]

$$\text{সমাধান : } 2\vec{A} + \vec{B} = 2(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$+ 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$= 2\hat{i} + 6\hat{j} - 4\hat{k} + 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$= 6\hat{i} + 4\hat{j} \quad (\text{Ans.})$$

$$6\vec{A} - 3\vec{B} = 6(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) - 3(4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$$

$$= 6\hat{i} + 18\hat{j} - 12\hat{k} - 12\hat{i} + 6\hat{j} - 12\hat{k}$$

$$= -6\hat{i} + 24\hat{j} - 24\hat{k} \quad (\text{Ans.})$$

1. (b) $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

হলে $|3\vec{A} + 2\vec{B}|$ এর মান নির্ণয় কর।

[কৃ.: '০৭; কুকুমেট.১১-১২]

সমাধান : $3\vec{A} + 2\vec{B} = 3(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 2(4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$
 $= 3\hat{i} + 9\hat{j} - 6\hat{k} + 8\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}$
 $= 11\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$
 $|3\vec{A} + 2\vec{B}| = \sqrt{11^2 + 5^2 + 2^2}$
 $= \sqrt{121 + 25 + 4} = \sqrt{150}$

1. (c) $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{B} = -\hat{i} + 5\hat{j}$, $\vec{C} = 8\hat{i} - 3\hat{j}$
হলে $\vec{A} - 3\vec{B}$ এবং $3\vec{A} - 7\vec{C}$ নির্ণয় কর। [চ.'০১]
সমাধান : $\vec{A} - 3\vec{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 3(-\hat{i} + 5\hat{j})$
 $= 3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{i} - 15\hat{j} = 6\hat{i} - 13\hat{j}$ (Ans.)
 $3\vec{A} - 7\vec{C} = 3(3\hat{i} + 2\hat{j}) - 7(8\hat{i} - 3\hat{j})$
 $= 9\hat{i} + 6\hat{j} - 56\hat{i} + 21\hat{j} = -47\hat{i} + 27\hat{j}$ (Ans.)
2. (a) $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$
হলে $(2\vec{A} - \vec{B})(6\vec{A} + 3\vec{B})$ এর মান নির্ণয় কর। [য.'০৩]

সমাধান : $2\vec{A} - \vec{B}$
 $= 2(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) - (4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$
 $= 2\hat{i} + 6\hat{j} - 4\hat{k} - 4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$
 $= -2\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}$
 $6\vec{A} + 3\vec{B} = 6(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 3(4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$
 $= 6\hat{i} + 18\hat{j} - 12\hat{k} + 12\hat{i} - 6\hat{j} + 12\hat{k}$
 $= 18\hat{i} + 12\hat{j}$

$(2\vec{A} - \vec{B})(6\vec{A} + 3\vec{B})$
 $= (-2\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k})(18\hat{i} + 12\hat{j})$
 $= -36 + 96 = 60$

2. (b) $\underline{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\underline{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$,
 $\underline{c} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ হলে $(\underline{a} \cdot \underline{b}) + (\underline{b} \cdot \underline{c}) + (\underline{c} \cdot \underline{a})$ এর
মান নির্ণয় কর। [রা.'০৩; য.'০৯]

সমাধান : $(\underline{a} \cdot \underline{b}) + (\underline{b} \cdot \underline{c}) + (\underline{c} \cdot \underline{a})$

$$\begin{aligned} &= (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + \\ &\quad (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + \\ &\quad (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \\ &= 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 = 1 \end{aligned}$$

2. (c) (2, 3, 1) এবং (3, 1, -2) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান
ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় কর। [চ.'০২]

সমাধান : (2, 3, 1) ও (3, 1, -2) বিন্দুদ্বয়ের
অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ও $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

এ ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল
 $= (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) \cdot (3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$
 $= 6 + 3 - 2 = 7$ (Ans.)

2. (d) $\vec{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$
হলে $|\vec{AB}|$ এর মান নির্ণয় কর। [রা.'১২; ব.'১০;
য.'১২, '১৪; চ.'১২; দি.'০৯, '১১, '১৪; চ.'১৩; শা.'০৯, '১৩]

সমাধান : $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$
 $= 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} - (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})$
 $= 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} - 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$
 $= 2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= |2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{76} = 2\sqrt{19} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

3. প্রতি জোড়া ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর :

(a) $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ও $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$
[য.'০৩; রা.'০৬]

সমাধান : $|\vec{A}| = |2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}|$
 $= \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

$$\begin{aligned} |\vec{B}| &= |2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}| = \sqrt{2^2 + 10^2 + 11^2} \\ &= \sqrt{4 + 100 + 121} = \sqrt{225} = 15 \text{ এবং} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}) \\ &= 2.2 + 2.10 + 1.(-11) \\ &= 4 + 20 - 11 = 13 \end{aligned}$$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{13}{3 \times 15} = \frac{13}{45}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{13}{45}$$

ডেষ্টের দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1} \frac{13}{45}$

(b) $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$
[জ. '০৩; রা. '০৮, '১১; য. '০৭, '১৩; সি. '০৮, '১৮; ব. '১১]

সমাধান : $|\vec{A}| = |2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$

$$|\vec{B}| = |\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 16 + 9} = \sqrt{26} \text{ এবং}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}) \cdot (\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}) = 2 - 12 - 3 = -13$$

ডেষ্টের দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{-13}{\sqrt{14} \times \sqrt{26}} = \frac{-13}{2\sqrt{7}\sqrt{13}} = \frac{-\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}$$

ডেষ্টের দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}} \right)$

3. (c) $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$
[য. '০১; চ. '০৮, '০৮; ব. '০৫]

সমাধান : $|\vec{A}| = |2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}|$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{B}| = |\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35} \text{ এবং}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \cdot (\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) = 2 - 6 - 5 = -9$$

ডেষ্টের দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{-9}{3 \times \sqrt{35}} = \frac{-3}{\sqrt{35}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-3}{\sqrt{35}}$$

ডেষ্টের দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1} \frac{-3}{\sqrt{35}}$

3. (d) $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$
এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [ক. '০৫, '১৩]

সমাধান : $|\vec{A}| = |\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}|$

$$= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{B}| = |\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{6} \text{ এবং}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 2 - 2 + 3 = 3$$

ডেষ্টের দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{3}{\sqrt{14} \times \sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{3}{2\sqrt{21}} \right)$$

ডেষ্টের দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1} \left(\frac{3}{2\sqrt{21}} \right)$

3. (e) $2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ডেষ্টের দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [ক. '০৬]

সমাধান : ধরি, $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$$\therefore |\vec{A}| = |2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{B}| = |\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 2 + 3 + 1 = 6$$

ডেষ্টের দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{6}{\sqrt{14} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{7} \times \sqrt{6}} = \sqrt{\frac{6}{7}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \sqrt{\frac{6}{7}}$$

তেষ্টের দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1} \sqrt{\frac{6}{7}}$

4. $\underline{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\underline{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে,
 $2\underline{a} + \underline{b}$ ও $\underline{a} + 2\underline{b}$ তেষ্টের দুইটির অন্তর্গত কোণ
নির্ণয় কর। [য.'08; ব.'08; ব.'06]

সমাধান :

$$\begin{aligned} 2\underline{a} + \underline{b} &= 2(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) + 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} \\ &= 2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k} + 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} \\ &= 5\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k} \\ \underline{a} + 2\underline{b} &= \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + 2(3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) \\ &= \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + 6\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} = 7\hat{i} + \hat{k} \\ |2\underline{a} + \underline{b}| &= \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50} \end{aligned}$$

$$|\underline{a} + 2\underline{b}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} \text{ এবং}$$

$$\begin{aligned} (\underline{a} + 2\underline{b}) \cdot (2\underline{a} + \underline{b}) &= (5\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) \cdot (7\hat{i} + \hat{k}) = 35 - 4 = 31 \\ \text{তেষ্টের দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ } \theta &\text{ হলে,} \\ \cos \theta &= \frac{(2\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} + 2\underline{b})}{|2\underline{a} + \underline{b}| |\underline{a} + 2\underline{b}|} = \frac{31}{\sqrt{50} \times \sqrt{50}} \\ \theta &= \cos^{-1} \frac{31}{50} \end{aligned}$$

তেষ্টের দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1} \frac{31}{50}$

5. নিচের তেষ্টেরগুলি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন
করে তা নির্ণয় করে :

- (a) $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

[চ., চ.'11; দি., রা., কু., য.'10; রা., দি., পি., চ.'13]

সমাধান : ধরি, x y ও z-অক্ষ প্রদত্ত তেষ্টের
 $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ এর সাথে যথাক্রমে α , β ও γ কোণ
উৎপন্ন করে।

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\hat{i} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \\ \alpha &= \cos^{-1}(2/3) \end{aligned}$$

উ. গ. (১ম পত্র) সমাধান-৫

$$\cos \beta = \frac{\hat{j} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{-1}{3}$$

$\beta = \cos^{-1}(-1/3)$ এবং

$$\cos \gamma = \frac{\hat{k} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}$$

$\gamma = \cos^{-1}(2/3)$

প্রদত্ত তেষ্টেরটি অক্ষত্রয়ের সাথে $\cos^{-1}(2/3)$,
 $\cos^{-1}(-1/3)$ ও $\cos^{-1}(2/3)$ কোণ উৎপন্ন করে।

5. (b) $\hat{j} + 2\hat{k}$ [রা.'08]

সমাধান : ধরি, x, y ও z-অক্ষ প্রদত্ত তেষ্টের $\hat{j} + 2\hat{k}$
এর সাথে যথাক্রমে α , β ও γ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\cos \alpha = \frac{\hat{i} \cdot (\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2} \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \beta = \frac{\hat{j} \cdot (\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2} \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\beta = \cos^{-1}(1/\sqrt{5})$ এবং

$$\cos \gamma = \frac{\hat{k} \cdot (\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2} \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\gamma = \cos^{-1}(2/\sqrt{5})$$

প্রদত্ত তেষ্টেরটি অক্ষত্রয়ের সাথে $\frac{\pi}{2}$, $\cos^{-1}(1/\sqrt{5})$

ও $\cos^{-1}(2/\sqrt{5})$ কোণ উৎপন্ন করে।

5. (c) $3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ [য.'08]

সমাধান : ধরি, x y ও z-অক্ষ প্রদত্ত তেষ্টের
 $3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ এর সাথে যথাক্রমে α , β ও γ কোণ
উৎপন্ন করে।

$$\cos \alpha = \frac{\hat{i} \cdot (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2} \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7}$$

$$\alpha = \cos^{-1}(3/7)$$

$$\cos \beta = \frac{\hat{j} \cdot (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2} \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{-6}{\sqrt{49}} = -\frac{6}{7}$$

$$\beta = \cos^{-1}(-6/7) \text{ এবং}$$

$$\cos \gamma = \frac{\hat{k} \cdot (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{49}} = \frac{2}{7}$$

$$\gamma = \cos^{-1}(2/7)$$

প্রদত্ত তেক্ষণটি অক্ষয়ের সাথে $\cos^{-1}(3/7)$
 $\cos^{-1}(-6/7)$ ও $\cos^{-1}(2/7)$ কোণ উৎপন্ন করে।

৬. (a) $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ তেক্ষণের উপর

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$
 তেক্ষণের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

[ক্ষ.'০৮, '১১; রা.'০৮, '১৩; চ.'০৫; ঘ.'১২; সি.'১২
ক্ষয়েট'০৫-০৬]

সমাধান : \vec{B} তেক্ষণের উপর \vec{A} তেক্ষণের অভিক্ষেপ

$$\begin{aligned} &= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})}{|6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}|} \\ &= \frac{6 \times 2 + (-3 \times 2) + 2 \times 1}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{12 - 6 + 2}{\sqrt{36 + 9 + 4}} \\ &= \frac{8}{\sqrt{49}} = \frac{8}{7} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

৬. (b) $\underline{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\underline{b} = \sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$; \underline{b} তেক্ষণের উপর \underline{a} তেক্ষণের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

[চ.'১২; ক্ষ.'১২; ঘ.'০৭; সি.'১১]

সমাধান : \underline{b} তেক্ষণের উপর \underline{a} তেক্ষণের অভিক্ষেপ

$$\begin{aligned} &= \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{b}|} = \frac{(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \cdot (\sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})}{|\sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}|} \\ &= \frac{1 \times \sqrt{3} + (1 \times 3) + 1 \times -2}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{3} + 3 - 2}{\sqrt{3 + 9 + 4}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{4} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

৬. (c) $\vec{P} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ তেক্ষণের উপর

$$\vec{Q} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$
 তেক্ষণের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

[ক্ষ.'০৮; ঘ.'০৭]

সমাধান : \vec{P} তেক্ষণের উপর \vec{Q} তেক্ষণের অভিক্ষেপ

$$\begin{aligned} &= \frac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{|\vec{P}|} = \frac{(5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})}{|5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}|} \\ &= \frac{5 \times 2 + (-3 \times 1) + 2 \times -2}{\sqrt{5^2 + 3^2 + 2^2}} \\ &= \frac{10 - 3 - 4}{\sqrt{25 + 9 + 4}} = \frac{3}{\sqrt{34}} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

৬. (d) $\underline{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ তেক্ষণের উপর
 $\underline{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ তেক্ষণের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।
[ঘ.'০৮]

সমাধান : \underline{b} তেক্ষণের উপর \underline{a} তেক্ষণের অভিক্ষেপ

$$\begin{aligned} &= \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{b}|} = \frac{(2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})}{|\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}|} \\ &= \frac{2 \times 1 + 3 \times 2 + 2 \times 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} \\ &= \frac{2 + 6 + 2}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{10}{\sqrt{6}} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

৬. (e) $A(2, 3, -1)$ ও $B(-2, -4, 3)$ বিন্দুয়ের
সংযোগ সরলরেখার উপর $4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ তেক্ষণের
অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

সমাধান : $A(2, 3, -1)$ ও $B(-2, -4, 3)$
বিন্দুয়ের অবস্থান তেক্ষণের যথাক্রমে $2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ ও
 $-2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$.

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (-2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}) - (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) \\ &= -4\hat{i} - 7\hat{j} + 4\hat{k} \end{aligned}$$

$$-4\hat{i} - 7\hat{j} + 4\hat{k}$$
 তেক্ষণের উপর $4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$

$$\text{এর অভিক্ষেপ} = \frac{(-4\hat{i} - 7\hat{j} + 4\hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})}{|-4\hat{i} - 7\hat{j} + 4\hat{k}|}$$

$$= \frac{-16 + 21 + 4}{\sqrt{16 + 49 + 16}} = \frac{9}{9} = 1 \quad (\text{Ans.})$$

৭. (a) $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ তেক্ষণের বরাবর

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$
 তেক্ষণের উপাঞ্চল নির্ণয় কর।

[ঘ.'০১, '০৯; রা.'০৫; সি.'০৭, '১১; ক্ষ., সি.'১০]

সমাধান : $|\vec{B}| = |2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}|$

$$= \sqrt{2^2 + 10^2 + 11^2} = \sqrt{4 + 100 + 121}$$

$$= \sqrt{225} = 15$$

\vec{B} ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর

$$= \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}}{15} = \hat{n} \text{ (ধরি)}$$

\vec{B} ভেক্টর বরাবর \vec{A} ভেক্টরের উপাংশ

$$= (\hat{n} \cdot \vec{A}) \hat{n}$$

$$= \left\{ \frac{1}{15} (2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \right\} \hat{n}$$

$$= \frac{4 + 20 - 11}{15} \cdot \frac{2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}}{15}$$

$$= \frac{13}{225} (2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}) \text{ (Ans.)}$$

7. (b) $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। \vec{A} ভেক্টর বরাবর \vec{B} ভেক্টরের উপাংশ এবং অভিক্ষেপ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে এদের সাংখ্যিক মান সমান। [য.'০৭; ঢ.'০৯; চ.'১০]

সমাধান ৪: $|\vec{A}| = |\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}|$

$$= \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{B}| = |6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}| = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= 6 - 6 - 4 = -4$$

প্রদত্ত ভেক্টর \vec{A} ও \vec{B} এর অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{-4}{3 \times 7} \therefore \theta = \cos^{-1} \left(-\frac{4}{21} \right)$$

\vec{A} ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর = $\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$$= \frac{1}{3} (\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) = \hat{a} \text{ (ধরি)}$$

$$\vec{A}$$
 ভেক্টর বরাবর \vec{B} ভেক্টরের উপাংশ = $\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}|} \hat{a}$

$$= \frac{-4}{3} \left\{ \frac{1}{3} (\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) \right\}$$

$$= \frac{-4}{9} \hat{i} + \frac{8}{9} \hat{j} + \frac{8}{9} \hat{k} \text{ (Ans.)}$$

\vec{A} ভেক্টর বরাবর \vec{B} ভেক্টরের উপাংশের মান

$$= \left| \frac{-4}{9} \hat{i} + \frac{8}{9} \hat{j} + \frac{8}{9} \hat{k} \right| = \sqrt{\frac{16}{91} + \frac{64}{91} + \frac{64}{91}}$$

$$= \sqrt{\frac{16 + 64 + 64}{91}} = \sqrt{\frac{144}{91}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\vec{A}$$
 ভেক্টর বরাবর \vec{B} ভেক্টরের অভিক্ষেপ = $\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}|} = \frac{-4}{3}$

$\therefore \vec{A}$ ভেক্টর বরাবর \vec{B} ভেক্টরের অভিক্ষেপ এবং উপাংশের সাংখ্যিক মান সমান।

8. (a) $2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ ভেক্টরটির সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [সি.'০৫, '০৯]

সমাধান ৪: ধরি, $\vec{A} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$

$$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 10^2 + 11^2}$$

$$= \sqrt{4 + 100 + 121} = \sqrt{225} = 15$$

$$\vec{A}$$
 ভেক্টরের সমান্তরালে একক ভেক্টর = $\pm \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$$= \pm \frac{1}{15} (2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}) \text{ (Ans.)}$$

8. (b) $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে ভেক্টর দুইটির লম্বির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [চ.'১০; সি.'১১]

সমাধান ৪: প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির লম্বি ভেক্টর = $\vec{A} + \vec{B}$

$$= 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k} + \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$= 3\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{9 + 36 + 64} = \sqrt{109}$$

$$\text{নির্ণয় একক ভেক্টর} = \pm \frac{\vec{A} + \vec{B}}{|\vec{A} + \vec{B}|}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{109}} (3\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k})$$

8. (c) $\vec{A} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = -\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$ হলে, (i) ভেক্টর দুইটির লম্বির সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [ব.'০৮]

(ii) ভেটের দুইটির লম্বির দিক বরাবর একক ভেটের নির্ণয় কর।

(iii) ভেটের দুইটির লম্বির বিসদৃশ সমান্তরাল একক ভেটের নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত ভেটের দুইটির লম্বি ভেটের $= \vec{A} + \vec{B}$

$$= 4\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k} + (-i - 5\hat{j} - \hat{k})$$

$$= 3\hat{i} - 4\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

(i) ভেটের দুইটির লম্বির সমান্তরালে একক ভেটের

$$= \pm \frac{\vec{A} + \vec{B}}{|\vec{A} + \vec{B}|} = \pm \frac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{k})$$

(ii) ভেটের দুইটির লম্বির দিক বরাবর একক ভেটের

$$= \frac{\vec{A} + \vec{B}}{|\vec{A} + \vec{B}|} = \frac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{k})$$

(iii) ভেটের দুইটির লম্বির বিসদৃশ সমান্তরাল একক

$$\text{ভেটের} = -\frac{\vec{A} + \vec{B}}{|\vec{A} + \vec{B}|} = -\frac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{k})$$

(d) (i) $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেটের দুইটির উপর লম্ব একক ভেটের নির্ণয় কর।

[ব.'০১; চ.'০৫, '১০; ঢা., কু.'১১; কম্যোট'১১-১২]

সমাধান : প্রদত্ত ভেটের দুইটির উপর লম্ব ভেটের,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+2)\hat{i} - (2-1)\hat{j} + (-4-1)\hat{k}$$

$$= 3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{9+1+25} = \sqrt{35}$$

(i) প্রদত্ত ভেটের দুইটির উপর লম্ব একক ভেটের

$$= \pm \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{35}}(3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k})$$

(ii) প্রদত্ত ভেটের দুইটির উপর লম্ব 5 একক মান বিশিষ্ট

$$\text{ভেটের} = \pm 5 \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

$$= \pm \frac{5}{\sqrt{35}}(3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}) \text{ (Ans.)}$$

8. (e) $\underline{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\underline{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ হলে, এমন একটি একক ভেটের \underline{c} নির্ণয় কর, যা \underline{a} এবং \underline{b} এর সাথে সমতলীয় হবে এবং \underline{a} এর লম্ব হবে।

সমাধান : ধরি, \underline{a} ও \underline{b} এর সাথে সমতলীয় যেকোন ভেটের $\lambda(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + \mu(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ অর্থাৎ $(\lambda + \mu)\hat{i} + (\lambda - \mu)\hat{j} + (-\lambda + \mu)\hat{k}$.

এ ভেটের \underline{a} -এর উপর লম্ব হলে,

$$(\lambda + \mu)(1) + (\lambda - \mu)(1) + (-\lambda + \mu)(-1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda + \mu + \lambda - \mu + \lambda - \mu = 0$$

$$\Rightarrow 3\lambda = \mu$$

\underline{a} -এর উপর লম্ব ভেটেরটি হচ্ছে,

$$4\lambda\hat{i} - 2\lambda\hat{j} + 2\lambda\hat{k}$$

$$\underline{c} = \pm \frac{4\lambda\hat{i} - 2\lambda\hat{j} + 2\lambda\hat{k}}{\sqrt{16\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2}}$$

$$= \pm \frac{2\lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{24\lambda^2}} = \pm \frac{2\lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})}{2\lambda\sqrt{6}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \text{ (Ans.)}$$

8. (f) $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ভেটের দুইটির উপর লম্ব একক ভেটের নির্ণয় কর। [বা.'০৮; কু.'০৮; য.'১০]

সমাধান : ধরি, $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

প্রদত্ত ভেটের দুইটির উপর লম্ব ভেটের,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-2)\hat{i} - (-1-1)\hat{j} + (2+1)\hat{k}$$

$$= -i - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

প্রদত্ত ভেটের দুইটির উপর লম্ব একক ভেটের

$$= \pm \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{14}}(-\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

୨. (a) $P(1, 1, 1)$ ଏবଂ $Q(3, 2, -1)$ ଶୁଣେ
ଅବସ୍ଥିତ ଦୁଇଟି କିମ୍ବୁ । \overrightarrow{PQ} ଡେଟର ନିର୍ଣ୍ୟ କର ଏବଂ ଏଇ
ସମାନ୍ତରାଳ ଏକଟି ଏକକ ଡେଟର ନିର୍ଣ୍ୟ କର ।

[ସ.'୦୯; ବୁଝେଟ'୦୩-୦୪]

ସମାଧାନ : $P(1, 1, 1)$ ଓ $Q(3, 2, -1)$ କିମ୍ବୁ ଦୁଇଟିର
ଅବସ୍ଥାନ ଡେଟର ଯଥାକ୍ରମେ $i + j + k$, ଓ $3i + 2j - k$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= (3i + 2j - k) - (i + j + k) \\ &= 2i + j - 2k \quad (\text{Ans.})\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

\overrightarrow{PQ} ଡେଟରେ ସମାନ୍ତରାଳ ଏକଟି ଏକକ ଡେଟର

$$= \pm \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \pm \frac{1}{3}(2i + j - 2k)$$

\overrightarrow{PQ} ଡେଟରେ ସମାନ୍ତରାଳ ଏକଟି ଏକକ ଡେଟର

$$\frac{1}{3}(2i + j - 2k) \text{ ବା, } -\frac{1}{3}(2i + j - 2k)$$

୨. (b) ମୂଳବିନ୍ଦୁ O ଏବଂ ସାପେକ୍ଷ $P(2, -1, 7)$

ଏବଂ $Q(-4, 5, 0)$ ହଲେ । \overrightarrow{PQ} ନିର୍ଣ୍ୟ କର । [ସି.'୦୯]

ସମାଧାନ : $\overrightarrow{OP} = 2i - j + 7k$, $\overrightarrow{OQ} = -4i + 5j$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= -4i + 5j - (2i - j + 7k) \\ &= -6i + 6j - 7k\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{36 + 36 + 49} = \sqrt{121} = 11$$

୧୦. (a) ଦେଖାଓ ଯେ, $\underline{a} = 9i + j - 6k$ ଏବଂ
 $\underline{b} = 4i - 6j + 5k$ ଡେଟର ଦୁଇଟି ପରମ୍ପରା ଲମ୍ବ ।

[ସ.'୦୮; ବୁଝେଟ'୦୭-୦୮]

ପ୍ରମାଣ : $\underline{a} = 9i + j - 6k$ ଓ $\underline{b} = 4i - 6j + 5k$
ଡେଟର ଦୁଇଟି ପରମ୍ପରା ଲମ୍ବ ହଲେ ଏଦେର କ୍ଷେତ୍ରାଳ୍ୟ ଗୁଣଫଳ ଶୂନ୍ୟ
ହବେ ।

$$\text{ଏଥନ, } \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = (9i + j - 6k) \cdot (4i - 6j + 5k)$$

$$= 36 - 6 - 30 = 36 - 36 = 0$$

ପ୍ରଦତ୍ତ ଡେଟର ଦୁଇଟି ପରମ୍ପରା ଲମ୍ବ ।

୧୦ (b) ଦେଖାଓ ଯେ, $\overrightarrow{A} = 8i + j - 6k$ ଏବଂ
 $\overrightarrow{B} = 4i - 2j + 5k$ ଡେଟର ଦୁଇଟି ପରମ୍ପରା ଲମ୍ବ ।

[ରା.'୦୭; '୦୭; ସ.'୧୨; ବୁଝେଟ'୦୫-୦୬; ୧୦-୧୧]

ପ୍ରମାଣ : $\underline{a} = 8i + j - 6k$ ଓ $\underline{b} = 4i - 2j + 5k$
ଡେଟର ଦୁଇଟି ପରମ୍ପରା ଲମ୍ବ ହଲେ ଏଦେର କ୍ଷେତ୍ରାଳ୍ୟ ଗୁଣଫଳ ଶୂନ୍ୟ
ହବେ ।

$$\text{ଏଥନ, } \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = (8i + j - 6k) \cdot (4i - 2j + 5k)$$

$$= 36 - 6 - 30 = 36 - 36 = 0$$

ପ୍ରଦତ୍ତ ଡେଟର ଦୁଇଟି ପରମ୍ପରା ଲମ୍ବ ।

୧୦(c) $\overrightarrow{A} = i + 2j - 3k$ ଏବଂ $\overrightarrow{B} = 3i - j + 2k$

ହଲେ ଦେଖାଓ ଯେ, $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ ଏବଂ $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$ ଡେଟର ଦୁଇଟି
ପରମ୍ପରା ଲମ୍ବ । [ରା.'୦୬; ଜ.'୦୮; ସ.'୦୭; ଚ.'୧୨, '୧୪;
ମା.ବୋ.'୦୮; ଦି.'୧୦; ବ.'୧୦, '୧୨; ମା.'୧୪; ବୁଝେଟ'୧୧-୧୨]

ପ୍ରମାଣ : $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (1+3)i + (2-1)j + (-3+2)k$

$$= 4i + j - k$$

$$\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = (1-3)i + (2+1)j + (-3-2)k$$

$$= -2i + 3j - 5k$$

ଏଥନ, $(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) \cdot (\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B})$

$$= (4i + j - k) \cdot (-2i + 3j - 5k)$$

$$= -8 + 3 + 5 = 0$$

ଡେଟର ଦୁଇଟିର କ୍ଷେତ୍ରାଳ୍ୟ ଗୁଣଫଳ ଶୂନ୍ୟ ବଲେ ତାରା ପରମ୍ପରା
ଲମ୍ବ ।

୧୦ (d) ଦେଖାଓ ଯେ, $\underline{a} = 3i + 2j - 6k$ ଏବଂ

$\underline{b} = 4i - 3j + k$ ଡେଟର ଦୁଇଟି ପରମ୍ପରା ଲମ୍ବ । ଏ ଡେଟର
ଦୁଇଟିର ଉପର ଲମ୍ବ ଏକକ ଡେଟର ନିର୍ଣ୍ୟ କର ।

[ଜ.'୦୨; କ୍ର.'୦୫]

ପ୍ରମାଣ : $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = (3i + 2j - 6k) \cdot (4i - 3j + k)$

$$= 12 - 6 - 6 = 12 - 12 = 0$$

ଡେଟର ଦୁଇଟିର କ୍ଷେତ୍ରାଳ୍ୟ ଗୁଣଫଳ ଶୂନ୍ୟ ବଲେ ତାରା ପରମ୍ପରା
ଲମ୍ବ ।

୨ୟ ଅଣ୍ଟେ : ପ୍ରଦତ୍ତ ଡେଟର ଦୁଇଟିର ଉପର ଲମ୍ବ ଡେଟର,

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -6 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2 - 18)\hat{i} - (3 + 24)\hat{j} + (-9 - 8)\hat{k}$$

$$= -16\hat{i} - 27\hat{j} - 17\hat{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{256 + 729 + 289} = \sqrt{1274}$$

প্রদত্ত তেষ্টের দুইটির উপর লম্ব একক তেষ্টের
 $= \pm \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{1274}} (-16\hat{i} - 27\hat{j} - 17\hat{k})$

10. (e) A ও B বিন্দু দুইটির অবস্থান তেষ্টের যথাক্রমে
 $(2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})$ ও $(4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ হলে \vec{AB} এর
 দৈর্ঘ্য এবং \vec{AB} বরাবর একটি একক তেষ্টের নির্ণয় কর।

[ক্ষয়েট'০৬-০৭]

সমাধানঃ $\vec{AB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} - (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})$

$$= 2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$\vec{AB} \text{ এর দৈর্ঘ্য } = |\vec{AB}| = |2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}|$$

$$= \sqrt{4 + 36 + 36} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19} \text{ এবং}$$

$$\vec{AB} \text{ বরাবর একটি একক তেষ্টের } = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$$

$$= \frac{2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}}{2\sqrt{19}} = \frac{1}{\sqrt{19}}\hat{i} - \frac{3}{\sqrt{19}}\hat{j} + \frac{3}{\sqrt{19}}\hat{k}$$

11. (a) $a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ তেষ্টের
 দুইটি পরস্পর লম্ব হলে a এর মান নির্ণয় কর। [গ্রা.'০৯,
 '১২; য.'০৫,'০৯,'১৩; জ.'০৬,'১০; সি.'০৮,'১২; চ.'০৯;
 কু.'১৩; পি.'১৪]

সমাধানঃ $a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ তেষ্টের
 দুইটি পরস্পর লম্ব বলে এদের স্কেলার গুণন শূন্য।

$$(a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}) = 0$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2a - 4 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \quad a = 1, -2$$

11(b) $2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ এবং $4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ তেষ্টের দুইটি
 পরস্পর লম্ব হলে a এর মান নির্ণয় কর। [জ.'০২; ব.'০৮]

সমাধানঃ $2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ এবং $4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ তেষ্টের
 দুইটি পরস্পর লম্ব বলে এদের স্কেলার গুণন শূন্য।

$$(2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 0$$

$$\Rightarrow 8 - 2a - 2 = 0 \Rightarrow 2a = 6 \therefore a = 3$$

11 (c) $\underline{a} = 2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\underline{b} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$
 তেষ্টের দুইটি পরস্পর লম্ব হলে y এর মান নির্ণয় কর।

[চ.'০২; রা.'০৫; কু.'০৫]

সমাধানঃ $\underline{a} = 2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\underline{b} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$
 তেষ্টের দুইটি পরস্পর লম্ব বলে এদের স্কেলার গুণন শূন্য।

$$(2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}) = 0$$

$$\Rightarrow 8 - 2y - 1 = 0 \Rightarrow 2y = 7 \quad a = \frac{7}{2}$$

12. (a) দেখাও যে, $\underline{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$,
 $\underline{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ ও $\underline{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ তেষ্টের তিনটি
 সমতলীয়। [জ.'০৬]

প্রমাণঃ ১ প্রদত্ত তেষ্টের তিনটি সমতলীয় হবে যদি এদের
 যেকোন দুইটির ক্ষেত্রে সাথে অপরটির ডট গুণন শূন্য
 হয়।

$$\text{এখন, } (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(12 - 5) + 2(-4 - 10) + 1(1 + 6)$$

$$= 21 - 28 + 7 = 28 - 28 = 0$$

প্রদত্ত তেষ্টের তিনটি সমতলীয়।

12. (b) $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\lambda\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$
 তেষ্টের তিনটি সমতলীয় হলে λ এর মান নির্ণয় কর।

[য.'০৮]

সমাধানঃ $i - j + k$, $2i + 2j - k$, $\lambda i - j + \lambda k$

$$\text{তেষ্টের তিনটি সমতলীয় বলে, } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ \lambda & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 1(2\lambda - 1) + 1(2\lambda + \lambda) + 1(-2 - 2\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow 2\lambda - 1 + 3\lambda - 2 - 2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow 3\lambda = 3 \quad \lambda = 1 \text{ (Ans.)}$$

13. (a) দেখাও যে, $\underline{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$,
 $\underline{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\underline{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ তেষ্টের
 তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

[ব.'০৩,'১২; জ.'০৮,'১৮; রা.'০৭,'১৮; ক্ষয়েট'০৩-০৮]

$$\text{প্রমাণ : } |\underline{a}| = |3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$|\underline{b}| = |\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$$

$$|\underline{c}| = |2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}| = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$$

$\sqrt{14}$, $\sqrt{35}$ ও $\sqrt{21}$ এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $|\underline{a}|^2 + |\underline{c}|^2 = 14 + 21 = 35 = |\underline{b}|^2$

প্রদত্ত তেষ্টের তিনটি একটি সমকেণ্টি ত্রিভুজ গঠন করে।

13. (b) তিনটি বিন্দুর অবস্থান তেষ্টের $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$, দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

[জ.'০৫,'১৩; সি.,চ.'১০,'১৩; কু.'১৮]

প্রমাণ : ধরি, A, B ও C বিন্দু তিনটির অবস্থান তেষ্টের যথাক্রমে $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= -\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k} - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) \\ &= -2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= -4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k} - (-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}) \\ &= -3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{9+25+4} = \sqrt{38}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} &= \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} - (-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}) \\ &= 5\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{25+4+9} = \sqrt{38}$$

$|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ ও $|\overrightarrow{CA}|$ এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{38}$

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

13. (c) তেষ্টের সাহায্যে দেখাও যে, A (1,-1,-1), B (3,3,1) এবং C(-1,4,4) বিন্দু তিনটি একটি গোলকের উপর অবস্থিত যার কেন্দ্র P(0,1,2)

প্রমাণ : $\overrightarrow{PA} = (1-0)\hat{i} + (-1-1)\hat{j} + (-1-2)\hat{k}$

$$= i - 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PB} &= (3-0)\hat{i} + (3-1)\hat{j} + (1-2)\hat{k} \\ &= 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PC} &= (-1-0)\hat{i} + (4-1)\hat{j} + (4-2)\hat{k} \\ &= -\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{PC}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

$$|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{14}$$

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি P(0,1,2) কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি গোলকের উপর অবস্থিত।

13.(d) A(0, 1, 2), B (-1,3, 0), C(1, -1, 1)

বিন্দু তিনটির অবস্থান তেষ্টের নির্ণয় কর এবং $|\overrightarrow{AB}|$ ।

এবং $|\overrightarrow{AC}|$ । নির্ণয় কর।

[জ.'০৩]

সমাধান: A(0,1,2) বিন্দুর অবস্থান তেষ্টের $= \hat{j} + 2\hat{k}$

B (-1,3, 0) বিন্দুর অবস্থান তেষ্টের $= -\hat{i} + 3\hat{j}$,

C(1, -1, 1) বিন্দুর অবস্থান তেষ্টের $= \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$$\overrightarrow{AB} = (-1-0)\hat{i} + (3-1)\hat{j} + (0-2)\hat{k}$$

$$= -\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{এবং } \overrightarrow{AC} = (1-0)\hat{i} + (-1-1)\hat{j} + (1-2)\hat{k}$$

$$= \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

14. (a) $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$

হলে, $\vec{A} \times \vec{B}$ হতে তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

[কু.'০৪]

সমাধান 8 $|\vec{A}| = |2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{4+4+1} = 3$

$|\vec{B}| = |\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$

$$\begin{array}{|ccc|}\hline & \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \vec{A} \times \vec{B} & 2 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 & \\ \hline \end{array}$$

$$= (4-3)\hat{i} - (4-1)\hat{j} + (6-2)\hat{k}$$

$$= \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}$$

ডেটের দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ Θ হলে,

$$\sin \Theta = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{14}} \therefore \Theta = \sin^{-1} \frac{\sqrt{13}}{3\sqrt{7}}$$

$$14(b) \quad \vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} \text{ এবং } \vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$$

হলে, $|\vec{A} \times \vec{B}|$ নির্ণয় কর। [বিজ্ঞপ্তি'০০-০১]

$$\text{সমাধানঃ } \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2-6)\hat{i} - (3+9)\hat{j} + (-2-6)\hat{k}$$

$$= 4\hat{i} + 10\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{16+100+64} = \sqrt{180}$$

$$= 6\sqrt{5}$$

$$14(c) \quad (a\hat{i} + b\hat{j} + \hat{k}) \times (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{i} - \hat{j}$$

হলে, a ও b এর মান নির্ণয় কর। [বিজ্ঞপ্তি'০১-০২]

সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$$(a\hat{i} + b\hat{j} + \hat{k}) \times (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{i} - \hat{j}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j}$$

$$\Rightarrow (3b-2)\hat{i} - (3a-2)\hat{j} + (2a-2b)\hat{k}$$

$$= \hat{i} - \hat{j}$$

$$3b-2=1 \Rightarrow 3b=3 \quad b=1$$

$$3a-2=1 \Rightarrow 3a=3 \quad a=1$$

$$14(d) \quad \vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} \quad \vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} \quad \text{এবং}$$

$$\vec{C} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k} \quad \text{হলে, } \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \text{ নির্ণয় কর।}$$

$$\text{সমাধানঃ } \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (2-3)\hat{i} - (-4-1)\hat{j} + (6+1)\hat{k}$$

$$= -\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (7+10)\hat{i} - (21-2)\hat{j} + (15+1)\hat{k}$$

$$= 17\hat{i} - 19\hat{j} + 16\hat{k} \quad (\text{Ans.})$$

$$14(e) \quad \underline{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}, \quad \underline{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}$$

হলে $5\underline{a} \times \underline{b}$ এবং $\frac{\underline{b}}{|\underline{a}|}$ নির্ণয় কর। [চ.'০২]

$$\text{সমাধানঃ } 5\underline{a} \times \underline{b} = 5 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \{ (21-10)\hat{i} - (-14+5)\hat{j} + (4-3)\hat{k} \}$$

$$= 5 \{ 11\hat{i} + 9\hat{j} + \hat{k} \} = 55\hat{i} + 45\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\frac{\underline{b}}{|\underline{a}|} = \frac{-\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}}{|2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}|} = \frac{-\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{4+9+25}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{38}}(-\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k})$$

$$14(f) \text{ যেকোন দুইটি ডেটের } \vec{A} \text{ ও } \vec{B} \text{ এর জন্য প্রমাণ কর যে, } \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \text{ এবং } \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}.$$

[চ.'০২]

প্রমাণঃ মনে করি, $\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$,

$$\vec{B} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \cdot (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$= b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3$$

$$= (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) \cdot (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})$$

$$= \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

প্রশ্নমালা II R

বইয়ের কম

$$\text{আবার, } \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = - \vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = - \vec{B} \times \vec{A}$$

$$14(g) \text{ প্রমাণ কর যে, } \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{যেখানে } \vec{A} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k},$$

$$\vec{B} = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k} \quad [\text{জ.}'০১; \text{ব.}'০২]$$

$$\text{প্রমাণঃ L.H.S.} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\begin{aligned} &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k) \\ &= a_1 b_1 (\hat{i} \times \hat{i}) + a_1 b_2 (\hat{i} \times \hat{j}) + a_1 b_3 (\hat{i} \times \hat{k}) \\ &\quad + a_2 b_1 (\hat{j} \times \hat{i}) + a_2 b_2 (\hat{j} \times \hat{j}) + a_2 b_3 (\hat{j} \times \hat{k}) \\ &\quad + a_3 b_1 (\hat{k} \times \hat{i}) + a_3 b_2 (\hat{k} \times \hat{j}) + a_3 b_3 (\hat{k} \times \hat{k}) \\ &= a_1 b_1 (0) + a_1 b_2 (\hat{k}) + a_1 b_3 (-\hat{j}) \\ &\quad + a_2 b_1 (-\hat{k}) + a_2 b_2 (0) + a_2 b_3 (\hat{i}) \\ &\quad + a_3 b_1 (\hat{j}) + a_3 b_2 (-\hat{i}) + a_3 b_3 (0) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \hat{j} \\ &\quad + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{k} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{R.H.S. (Proved)}$$

14(h) দুইটি তেক্ষের \vec{a} ও \vec{b} এর স্কেলার বা ডট গুণনের সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, $j = 0$, $i \cdot i = 1$:

যেখানে i ও j যথাক্রমে \hat{i} ও \hat{j} অক্ষ পরাবর একক তেক্ষের।

স্কেলার বা ডট গুণনের সংজ্ঞা: \vec{a} ও \vec{b} তেক্ষের দুইটির মধ্যবর্তী কোণ θ ($0 \leq \theta < \pi$) তেক্ষের দুইটির উ.গ. (যদি প্রয়োগ

স্কেলার গুণকে $a \cdot b$ দ্বারা সূচিত করা

$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। দুইটি তেক্ষের স্কেলার গুণন একটি স্কেলার রাশি

$$\text{এখন, } i \cdot j = |\hat{i}| |\hat{j}| \cos 90^\circ = 1 \times 1 \times 0 = 0$$

$$i^2 = |\hat{i}| |\hat{i}| \cos 0^\circ = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

15. (a) তেক্ষের সাহায্যে $A(1,3,2)$, $B(2,-1,1)$ ও $C(-1,2,3)$ শীর্ষ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[বৃহত্তে'০৪-০৫]

$$\text{সমাধান: } \vec{AB} = (1-2) \hat{i} + (3-1) \hat{j} + (2-1) \hat{k}$$

$$= -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{AC} = (1+1) \hat{i} + (2-3) \hat{k}$$

$$= 2\hat{i} - \hat{k}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-4-1)\hat{i} - (1-2)\hat{j} + (-1-8)\hat{k}$$

$$= -5\hat{i} + \hat{j} - 9\hat{k}$$

$$\text{ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$= \frac{1}{2} |-5\hat{i} + \hat{j} - 9\hat{k}| = \frac{1}{2} \sqrt{5^2 + 1^2 + 9^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{25 + 1 + 81} = \frac{1}{2} \sqrt{107} \text{ একক।}$$

15 (b) $\vec{P} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[বৃহত্তে'০৬-০৭]

$$\text{সমাধান: } \vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (4+2)\hat{i} - (-4-2)\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$6\hat{i} - 6\hat{j} - 8\hat{k}$$

সামান্তরিকের মিশ্রক্ষেত্রফল $\vec{P} \times$

$$= \sqrt{36 + 36} \text{ একক}$$

১৫(c) একটি ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটির অবস্থান তেওঁর
 $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $3\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$ ও $2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$;
 ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষ
 তিনটির অবস্থান তেওঁর যথাক্রমে $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$,
 $3\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$ ও $2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= 3\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k} - (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) \\&= 2\hat{i} + 7\hat{j} - 4\hat{k} \\ \overrightarrow{AC} &= 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k} - (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) \\&= \hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 7 & -4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&= (-49 + 20)\hat{i} - (-14 + 4)\hat{j} + (10 - 7)\hat{k} \\&= -29\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}\end{aligned}$$

$$\text{ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

$$= \frac{1}{2} |-29\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{29^2 + 10^2 + 3^2} \text{ বর্গ একক।}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{841 + 100 + 9} \text{ বর্গ একক।}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{950} \text{ বর্গ একক} = \frac{5}{2} \sqrt{38} \text{ বর্গ একক।}$$

১৫ (d) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$
 হলে, OAB ত্রিভুজটির কোণ তিনটি নির্ণয় কর।

সমাধান : দেখো আছে, OAB ত্রিভুজে,

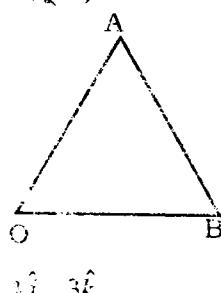
$$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$$

$$\overrightarrow{AO}$$

$$\text{এবং } \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AB} =$$

$$= -2\hat{i}$$



$$= \hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$= -\hat{i} + 7\hat{j} + 4\hat{k} \quad \overrightarrow{BA} = \hat{i} - 7\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\cos AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|}$$

$$= \frac{(2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}) \cdot (\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k})}{\sqrt{4+9+1} \sqrt{1+16+9}}$$

$$= \frac{2 - 12 - 3}{\sqrt{14} \sqrt{26}} = \frac{-13}{\sqrt{364}}$$

$$\angle AOB = \cos^{-1} \left(\frac{-13}{\sqrt{364}} \right)$$

$$\cos OAB = \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AO}| |\overrightarrow{AB}|}$$

$$= \frac{(-2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) \cdot (-\hat{i} + 7\hat{j} + 4\hat{k})}{\sqrt{4+9+1} \sqrt{1+49+16}}$$

$$= \frac{2 + 21 + 4}{\sqrt{14} \sqrt{66}} = \frac{27}{\sqrt{924}}$$

$$\angle OAB = \cos^{-1} \left(\frac{27}{\sqrt{924}} \right)$$

$$\cos OBA = \frac{\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BO}| |\overrightarrow{BA}|}$$

$$= \frac{(-i - 4\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 7\hat{j} - 4\hat{k})}{\sqrt{1+16+9} \sqrt{1+49+16}}$$

$$= \frac{-1 + 28 + 12}{\sqrt{26} \sqrt{66}} = \frac{39}{\sqrt{1716}}$$

$$\angle OBA = \cos^{-1} \left(\frac{39}{\sqrt{1716}} \right)$$

১৫. (e) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং

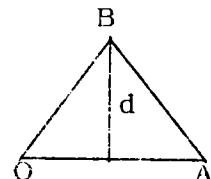
$\overrightarrow{OB} = 6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ হলে, B কিন্তু হতে OA এর
 লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, OAB ত্রিভুজে,

$$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = 6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$$
 এবং

B কিন্তু হতে OA এর লম্ব
 দূরত্ব d.



এখন, $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \end{vmatrix}$

$$= (-4-3)\hat{i} - (-4+6)\hat{j} + (-6-12)\hat{k}$$

$$= -7\hat{i} - 2\hat{j} - 18\hat{k}$$

$$\Delta OAB = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| \times d$$

$$\Rightarrow \sqrt{7^2 + 2^2 + 18^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} d$$

$$\Rightarrow d = \frac{\sqrt{377}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{377}}{3} \text{ একক। (Ans.)}$$

15(f) একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর ধারণগুলো
 $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$,
 $\vec{C} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ তেষ্টের ঘারা নির্দেশিত। ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান : আয়তাকার ঘনবস্তুটির আয়তন

$$= \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

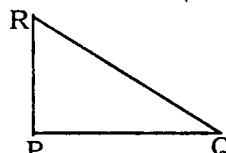
$$= 2(4-1) + 3(2+3) + 2(-1-6)$$

$$= 6 + 15 - 14 = 7 \text{ ঘন একক}$$

15(g) একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু $\vec{A} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$,
 $\vec{B} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ তেষ্টের ঘারা নির্দেশিত। ত্রিভুজটির কোণগুলো নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, PQR ত্রিভুজে PQ ও PR বাহু দুইটি যথাক্রমে

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k} \text{ ও } \vec{B} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k} \text{ ঘারা নির্দেশিত।}$$



$$\overrightarrow{PQ} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k} \text{ এবং } \overrightarrow{PR} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$$

$$= -3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k} + 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$

$$= \hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\cos QPR = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}|}$$

$$= \frac{(3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})}{\sqrt{9+36+4} \sqrt{16+1+9}}$$

$$= \frac{12-6-6}{\sqrt{49} \sqrt{26}} = \frac{0}{7 \sqrt{26}} = 0 = \cos 90^\circ$$

$$\angle QPR = 90^\circ$$

$$\cos PQR = \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QP}| |\overrightarrow{QR}|}$$

$$= \frac{(-3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k})}{\sqrt{9+36+4} \sqrt{1+49+25}}$$

$$= \frac{-3+42+10}{\sqrt{49} \sqrt{75}} = \frac{49}{7 \times 5\sqrt{3}} = \frac{7}{5\sqrt{3}}$$

$$\angle PQR = \cos^{-1}\left(\frac{7}{5\sqrt{3}}\right) \text{ এবং}$$

$$\cos PRQ = \frac{\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}}{|\overrightarrow{RP}| |\overrightarrow{RQ}|}$$

$$= \frac{(-4\hat{i} + j - 3\hat{k}) \cdot (-\hat{i} + 7\hat{j} - 5\hat{k})}{\sqrt{16+1+9} \sqrt{1+49+25}}$$

$$= \frac{4+7+15}{\sqrt{26} \sqrt{75}} = \frac{26}{\sqrt{26} 5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{26}}{5\sqrt{3}}$$

$$\angle PRQ = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{26}}{5\sqrt{3}}\right)$$

ত্রিভুজটির কোণগুলো 90° , $\cos^{-1}\left(\frac{7}{5\sqrt{3}}\right)$ এবং

$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{26}}{5\sqrt{3}}\right)$$

15(h) একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$
 এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ তেষ্টের ঘারা সূচিত। দেখাও যে,
 সামান্তরিকটি একটি রম্পস এবং এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

পরামর্শ : $\vec{A} \cdot \vec{B} = (3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k})$
 $= 6 - 12 + 6 = 0.$

সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব। অতএব,
 সামান্তরিকটি একটি রম্পস।

$$\text{এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} |\vec{A}| |\vec{B}|$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} \sqrt{2^2 - 3^2 - 4^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{9+16+1} \sqrt{4+9+36} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{1274} = 17.85 \text{ বর্গ একক (পায়)}
 \end{aligned}$$

16.(a) $2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ বিদ্যুগামী এবং $5\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}$ ভেট্টারের সমান্তরাল সরলরেখার ভেট্টার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $\underline{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং
 $\underline{b} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}$

\underline{a} বিদ্যুগামী এবং \underline{b} ভেট্টারের সমান্তরাল সরলরেখার
ভেট্টার সমীকরণ $= \underline{a} + t\underline{b}$ যেখানে t একটি
প্রয়ায়মিটার।

নির্ণেয় রেখার ভেট্টার সমীকরণ,

$$\underline{r} = \underline{a} + t(5\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k})$$

(b) \hat{i} ও \hat{j} বিদ্যুগামী সরলরেখার ভেট্টার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $\underline{a} = \hat{i}$ ও $\underline{b} = \hat{j}$.

\underline{a} ও \underline{b} বিদ্যুগামী সরলরেখার ভেট্টার সমীকরণ

$$\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}), \text{ যেখানে } t \text{ একটি প্রয়ায়মিটার।}$$

নির্ণেয় রেখার ভেট্টার সমীকরণ

$$\underline{r} = \hat{i} + t(\hat{j} - \hat{i}) \Rightarrow \underline{r} = \hat{i} + t$$

(c) দেখাও যে, $(2, -3, 4)$ এবং $(5, -1, -8)$ বিদ্যুগামী
সরলরেখার ভেট্টার সমীকরণ $\underline{r} = (2 + 3t)$
 $(-3 + 10t) + (4 - 12t)\hat{k}$ যেখানে t একটি
প্রয়ায়মিটার। এর সহজেই এর কার্ডিনেল সমীকরণ কিন্তু
কর।

প্রমাণ : মনে করি, $(-4, 4)$ বিদ্যুর অবস্থান ভেট্টার

$$\underline{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \quad \text{বিদ্যুর অবস্থান}$$

ভেট্টার $\underline{b} = 5\hat{i} +$

$$\underline{b} = 3\hat{i} + \quad \text{বর্ণনা}$$

$$\underline{r} = \underline{a}$$

$$t =$$

$$\begin{aligned}
 &+ 4t \\
 \Rightarrow \underline{r} &= 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k} + t(3\hat{i} + 10\hat{j} - 12\hat{k}) \\
 \underline{r} &= (2+3t)\hat{i} + (-3+10t)\hat{j} + (4-12t)\hat{k} \\
 \text{দ্বিতীয় অংশ: কার্ডিনেল সমীকরণের ফলে,} \\
 \underline{r} &= xi + y\hat{j} + z\hat{k} \\
 \text{আমরা পাই,} \\
 x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} &= (2+3t)\hat{i} + (-3+10t)\hat{j} \\
 &\quad + (4-12t)\hat{k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{উভয় পক্ষ হতে } \hat{i}, \hat{j}, \hat{k} \text{ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,} \\
 x = 2 + 3t, y = -3 + 10t, z = 4 - 12t \\
 \Rightarrow \frac{x-2}{3} = t, \frac{y+3}{10} = t, \frac{z-4}{-12} = t \\
 \text{নির্ণেয় কার্ডিনেল সমীকরণ,} \\
 \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{10} = \frac{z-4}{-12}
 \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা II C

- সরগুলি তথ্য সত্য। ∴ Ans. D
- ভেট্টারের বিয়োগ অনুযায়ী $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$
Ans. B.
- Soln.* সরগুলি তথ্য সত্য। Ans. D
- $2\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k} - (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$
 $= -2\hat{i} + 7\hat{j}$
 $|2\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}| = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$
- নির্ণেয় কোণ $= \cos^{-1} \frac{(2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}).\hat{j}}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{1}} = \cos^{-1} \frac{2}{3}$
 নির্ণেয় ভেট্টার $= \frac{6\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{36+9+1}} = \frac{-4\hat{i} + 2\hat{k}}{7}$

- Soln.* \overrightarrow{z} অক্ষের উপর \overrightarrow{A} ভেট্টারটির অংশক \hat{k}
x অক্ষ বরাবর \overrightarrow{B} ভেট্টারটির অভিক্ষেপ 6.
- ভেট্টার দুইটির জাদুর সমান্তরালে একক ভেট্টার
 $\pm \frac{1}{7}(8\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$
- $|\overrightarrow{A}| = \sqrt{9+4+36}$

$$\begin{aligned}
 & \text{(i)} \quad (\vec{a} + \vec{c}j + \vec{k}).(\vec{a}k) = 0 \\
 \Rightarrow & \vec{a} + 2\vec{a} + 2 = 0 \Rightarrow 2\vec{a} = -2 \Rightarrow \vec{a} = -1 \\
 & \text{(ii)} \quad (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) \\
 \Rightarrow & \vec{A}^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A}^2 - \vec{B}^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} \\
 \Rightarrow & 4 = 0 \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = \text{ক্ষেত্র} = 90^\circ
 \end{aligned}$$

জটিল পদ্ধতিতে দেখাও যে, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমান্তর। [জ. '১১, '১৪; রা. '১২; ব. '১০, '১৪; চ. '০৭;
ষ. '১০, '১২, '১৪; ম.বো. '০৯, '১২; দি. '১৪]

প্রমাণ : মনে করি, ABC ত্রিভুজের B কিন্দুর সাপেক্ষে A
ও C এর অক্ষাংশ তেষ্টের

যথাক্রমে a ও c এবং D,
E, F কিন্দু তিনটি যথাক্রমে BC,
CA, AB এর মধ্যবিন্দু।

D, E, F এর অক্ষাংশ

$$\text{তেষ্টের যথাক্রমে } \frac{c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a}{2}$$

ধরি, BE ও CF মধ্যমা দুইটি যথাক্রমে m-1 ও
n-1 অনুপাতে পরস্পরকে G কিন্দুতে ছেদ করে।

$$G \text{ এর অক্ষাংশ তেষ্টের } \frac{m \frac{c+a}{2}}{m+1} = \frac{mc+ma}{2(m+1)}$$

$$\text{এবং } \frac{n \frac{a}{2} + c}{n+1} = \frac{na+2c}{2(n+1)} \text{ অতিরিক্ত হবে।}$$

$$\frac{m}{2(m+1)} = \frac{n}{2(n+1)} \Rightarrow mn + m = mn +$$

$$\Rightarrow m = n \text{ এবং } \frac{m}{2(m+1)} = \frac{2}{2(n+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{m+1} = \frac{2}{m+1} \quad m = 2 = n$$

BE ও CF মধ্যমা দুইটি
অনুপাতে পরস্পরকে
G কিন্দুতে ছেদ করে।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, BE ও AD মধ্যমা দুইটি
2:1 অনুপাতে পরস্পরকে ছেদ করে। BE মধ্যমা একটি
ও কেবলমাত্র একটি কিন্দুতে 2:1 অনুপাতে অন্তর্ভুক্ত
হতে পারে। অতএব AD, BE ও CF মধ্যমা তিনটি
অনুপাতে পরস্পরকে G কিন্দুতে ছেদ করে।

অতএব, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমান্তর।

3. ABC ত্রিভুজে, D কিন্দু BC এর মধ্যবিন্দু হলে
দেখাও যে,

$$(a) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} \quad [\text{ব.}'11; \text{সি.}'14]$$

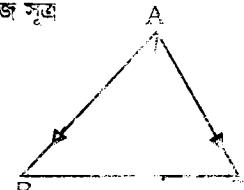
$$(b) \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = 2(\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BD}^2).$$

[ষ. '০৯, '১৩; কু. '১০; জ. '১২; সি. '১০; চ.দি. '১০;
ষ. '১১, '১৪; ব. '১৩]

প্রমাণ : (a) তেষ্টের যোগের ত্রিভুজ সূত্র
হতে পাই,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \quad (i)$$



$$(i) + (ii) \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$$

[এবং $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}$]

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$$

(b) ABD ত্রিভুজ তেষ্টের যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{DB}^2$$

$$+ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BD}^2 +$$

$$2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} \dots (1)$$

ত্রুটি ACD ত্রিভুজে,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{DC}^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} \quad (2)$$

1) ও 2) যোগ করে পাই,

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = 2(\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BD}^2) + 2\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$$

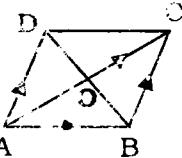
$$\therefore \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = 2(\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BD}^2)$$

$$[\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \underline{0}]$$

4. তেষ্টের পদ্ধতিতে দেখাও যে, রম্বসের কর্ণদ্বয়
পরস্পরকে সমত্বকৌণে সমষ্টিখণ্ডিত হবে। [সি. '০৭; ব. '০৭;
চ. '১১; ষ. '১১; রা., কু., সি. '১৩]

প্রমাণ : মনে করি, ABCD রম্পসের AC ও BD কর্ণদুয় পরস্পরকে O কিন্তুতে হেদ করে $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{AD} = \underline{b}$ হল,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \underline{a} + \underline{b} \\ \text{এবং } \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \\ &= -\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} - \underline{a}\end{aligned}$$



ধরি, $\overrightarrow{AO} = m \overrightarrow{AC} = m(\underline{a} + \underline{b})$ এবং

$$\overrightarrow{BO} = n \overrightarrow{BD} = n(\underline{b} - \underline{a})$$

এখন, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$

$$\Rightarrow m(\underline{a} + \underline{b}) = \underline{a} + n(\underline{b} - \underline{a})$$

$$\Rightarrow m\underline{a} + m\underline{b} = \underline{a} + n\underline{b} - n\underline{a}$$

$$\therefore \underline{b} + (m+n-1)\underline{a} = \underline{0}$$

অন্য অসমান্তরাল তেটের বলে,

$$= 0 \Rightarrow m = n \text{ এবং}$$

$$n-1=0 \Rightarrow m+n=1 \therefore m=\frac{1}{2}=n$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \text{ এবং } \overrightarrow{BO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BD}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AO}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}| \text{ এবং } |\overrightarrow{BO}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BD}|$$

$$\text{আবার, } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{b} - \underline{a})$$

$$= |\underline{b}|^2 - |\underline{a}|^2 = 0, \text{ কারণ রম্পসের চারটি বাহু পরস্পর সমান।}$$

অতএব, AC ও BD কর্ণ দুইটি পরস্পরকে O কিন্তুতে সমকোণে সমদিখভিত্তি করে।

5. তেটের পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কোন চতুর্ভুজের কর্ণদুয় পরস্পরকে সমদিখভিত্তি করলে তা একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।

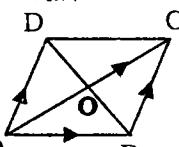
প্রমাণ : মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদুয় পরস্পরকে O কিন্তুতে সমদিখভিত্তি করে।

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} \text{ এবং } \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$$

$$\text{এখন, } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \dots (1)$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$$

$$= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} [\because \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} \text{ ও } \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}]$$



$$\Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \dots (2)$$

$$(1) \text{ ও } (2) \text{ হতে পাই, } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

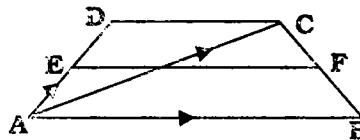
AB = DC এবং AB || DC [AB ও

DC একই রেখা হতে পারেন।]

ABCD একটি সামান্তরিক।

6. তেটের পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের অক্ষমান্তরাল কর্ণের মধ্যবিন্দু সম্বৰ্ধে সরলরেখা সমান্তরাল এবং তাদের যোগফলের অর্ধেক।

প্রমাণ :



মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AD ও BC অসমান্তরাল কর্ণের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F এবং A কিন্তুকে কৃতিত্ব ধরে মনে করি, B ও D এর অক্ষমান্তর তেষ্ঠের

$$\text{অক্ষ } \overrightarrow{AB} = \underline{a}, \overrightarrow{AD} = \underline{b}.$$

AB ও DC এলে যেকোন ক্ষেত্রের রাশি m এর জন্য $\overrightarrow{DC} = m \overrightarrow{AB} = m \underline{a}$,

$$\triangle ABC \text{ এ, } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \underline{b} + m \underline{a}$$

C কিন্তুর অক্ষমান্তর তেষ্ঠের $= \underline{b} + m \underline{a}$

AD এর মধ্যবিন্দু E এর অক্ষমান্তর তেষ্ঠের $= \frac{\underline{b}}{2}$

BC এর মধ্যবিন্দু F এর অক্ষমান্তর তেষ্ঠের

$$\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b} + m \underline{a})$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b} + m \underline{a}) - \frac{\underline{b}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(1+m) \underline{a} = \frac{1}{2}(1+m) \overrightarrow{AB}$$

EF বাহু AB এর সমান্তরাল অতএব, EF DC এরও সমান্তরাল।

$$\text{আবার, } |\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}(1+m) |\overrightarrow{AB}|$$

$$= \frac{1}{2} \{ |\overrightarrow{AB}| + m |\overrightarrow{AB}| \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}| \}$$

$$EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

ট্রিপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদহের মধ্যবিন্দু
সংযোগ সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদহের সমান্তরাল ও
তাদের যোগফলের অর্ধেক।

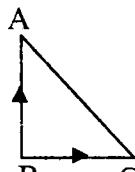
৭. ত্তেষ্ঠের পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের
অতিভুজের বর্গ অন্য দুই বাহুর বর্গের যোগফলের সমান।

প্রমাণ ৪ মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজে, AC
অতিভুজ এবং B বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে A ও C এর
অবস্থান ত্তেষ্ঠের যথাক্রমে \underline{a} ও \underline{c} ।

$$\angle ABC = 90^\circ$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ বা, } \underline{a} \cdot \underline{c} = 0$$

$$\text{এখন, } \overrightarrow{CA} = \underline{a} - \underline{c}$$



$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA} = (\underline{a} - \underline{c}) \cdot (\underline{a} - \underline{c})$$

$$\Rightarrow CA^2 = a^2 + c^2 - 2\underline{a} \cdot \underline{c} = a^2 + c^2$$

$$CA^2 = AB^2 + BC^2$$

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের বর্গ অন্য দুই বাহুর
বর্গের যোগফলের সমান।

৮. ত্তেষ্ঠের পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, একটি সমকোণী
ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলো
হতে সমদূরবর্তী।

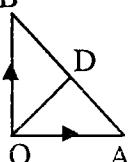
প্রমাণ ৪ মনে করি, OAB সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ
AB এর মধ্যবিন্দু D এবং O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে A ও
B এর অবস্থান ত্তেষ্ঠের যথাক্রমে \underline{a} ও \underline{b} . B

$$\angle ABC = 90^\circ$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ বা, } \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$$

AB এর মধ্যবিন্দু D এর অবস্থান

$$\text{ত্তেষ্ঠে} = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2} \therefore \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$$



$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} + \underline{b})$$

$$\Rightarrow OD^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2\underline{a} \cdot \underline{b}) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

$$OD = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\overrightarrow{DA} = \underline{a} - \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2} = \frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{b})$$

$$\overrightarrow{DB} = \underline{b} - \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2} = \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a})$$

$$DA^2 = DB^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 2\underline{a} \cdot \underline{b})$$

$$\Rightarrow DA^2 = DB^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

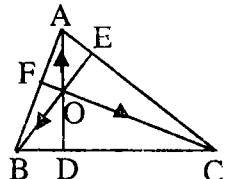
$$DA = DB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

∴ একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু
ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলো হতে সমদূরবর্তী।

৯. ত্তেষ্ঠের পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের শীর্ষ হতে
বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু।

প্রমাণ : মনে করি, ABC
ত্রিভুজের শীর্ষ A ও B হতে BC

ও CA বাহুর উপর যথাক্রমে AD
ও BE লম্ব দুইটি পরস্পরকে



O বিন্দুতে ছেদ করে এবং O
বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে A, B, C এর অবস্থান ত্তেষ্ঠের
যথাক্রমে \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} . C, O এর সংযোগ রেখাখনের
বর্ধিতাংশ AB কে F বিন্দুতে ছেদ করে।

$$AD \perp BC \quad AO \perp BC$$

$$\underline{a} \cdot (\underline{c} - \underline{b}) = 0 \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} \dots (1)$$

$$BE \perp AC \quad BO \perp AC$$

$$\underline{b} \cdot (\underline{c} - \underline{a}) = 0 \Rightarrow \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} \dots (2)$$

$$(1) \text{ ও } (2) \text{ হতে পাই, } \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c}$$

$$\Rightarrow \underline{c} \cdot (\underline{a} - \underline{b}) = 0$$

$$OC \perp AB \text{ অর্থাৎ } CF \perp AB$$

শীর্ষবিন্দুগুলি থেকে বিপরীত বাহুর লম্বত্রয় সমবিন্দু।

১০. ত্তেষ্ঠের পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের বাহুগুলোর
লম্ব সমদিখভক্ত্য সমবিন্দু।

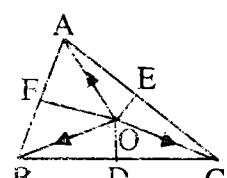
প্রমাণ মনে করি, ABC

ত্রিভুজের শীর্ষ D E F

যথাক্রমে BC, CA, AB এর

মধ্যবিন্দু এবং O বিন্দু BC

ও CA এর লম্ব-সমাদ্বিভ্যক্তের



ছেদবিন্দু। O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে A, B, C এর
অবস্থান ত্তেষ্ঠে সংযোগ

D, E ও F এর অবস্থান তেষ্টের যথাক্রমে :

$$\frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c}), \quad \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{a}) \text{ ও } \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}).$$

$OD \perp BC$ এবং $OE \perp AC$ বলে,

$$\frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c}) \cdot (\underline{c} - \underline{b}) = 0 \Rightarrow |\underline{c}|^2 - |\underline{b}|^2 = 0 \dots (1)$$

$$\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{a}) \cdot (\underline{a} - \underline{c}) = 0 \Rightarrow |\underline{a}|^2 - |\underline{c}|^2 = 0 \dots (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow |\underline{a}|^2 - |\underline{b}|^2 = 0$$

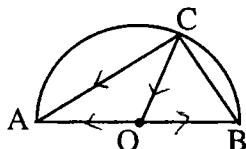
$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} - \underline{b}) = 0$$

$OF \perp AB$ অতএব, OF AB বাহুর লম্ব সমদ্বিভক্ত।

ত্রিভুজের বাহুগুলোর লম্ব সমদ্বিভক্তিয় সমবিকল্প।

11. তেষ্টের পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ। [জ.চ.'১৩; সি.'০৯,'১২; রা.'১০; কু.'১১]

প্রমাণ : ঘনে করি, O
কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের AB
ব্যাস এবং পরিধির উপর
C একটি বিকল্প।



$$OA = OB = OC = \text{ব্যাসার্ধ}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB})$$

$$= (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{BO})$$

$$= (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OA})$$

[কেন্দ্র O, AB ব্যাসের মধ্যবিকল্প।]

$$= \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$= |\overrightarrow{CO}|^2 + \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{OA} - |\overrightarrow{OA}|^2$$

$$= CO^2 - OA^2 = 0$$

$AC \perp BC$ অর্থাৎ $\angle ACB =$ এক সমকোণ

অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

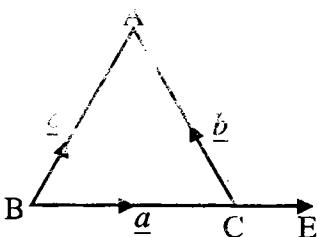
12. তেষ্টের পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজ ABC

$$\text{তে } (a) \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad [\text{জ.}'10, '18; \text{রা.}'10; \text{খ.}'10; \text{সি.}'10; \text{কু.}'1, চ. ১৩]$$

প্রমাণ : ধরি ABC ত্রিভুজ, $\overrightarrow{BC} = \underline{a}, \overrightarrow{CA} = \underline{b}$

B

সর্বাধিক করা হয়ে



তেষ্টের যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$$

$$\Rightarrow \underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$$

$$\underline{c} \cdot \underline{c} = (\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} + \underline{b})$$

$$= \underline{a} \cdot \underline{a} + \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{b} \cdot \underline{a} + \underline{b} \cdot \underline{b}$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 + 2 \underline{a} \cdot \underline{b}$$

$$[\underline{a} \cdot \underline{a} = a^2 \text{ এবং } \underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}]$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 + 2 |\underline{a}||\underline{b}| \cos ACE$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\pi - C)$$

$$[\angle ACE = \pi - \angle C]$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$(b) c = a \cos B + b \cos A \quad [\text{কু.}'08, '11; চ. '11]$$

প্রমাণ : ধরি ABC ত্রিভুজ, $\overrightarrow{BC} = \underline{a}, \overrightarrow{CA} = \underline{b}$

$$\overrightarrow{BA} = \underline{c}.$$

তেষ্টের যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$$

$$\Rightarrow \underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$$

$$\underline{c} \cdot \underline{c} = \underline{c} \cdot (\underline{a} + \underline{b})$$

$$\Rightarrow c^2 = \underline{c} \cdot \underline{a} + \underline{c} \cdot \underline{b}$$

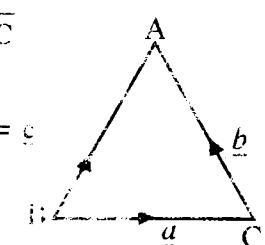
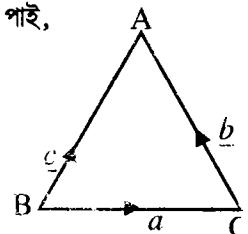
$$\Rightarrow c^2 = ca \cos B + cb \cos A$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

$$(c) \frac{\underline{a}}{\sin A} = \frac{\underline{b}}{\sin B} = \frac{\underline{c}}{\sin C}$$

প্রমাণ : ধরি ABC ত্রিভুজ,

$$\overrightarrow{BC} = \underline{a}, \overrightarrow{CA} = \underline{b}, \overrightarrow{BA} = \underline{c}$$



$$\Rightarrow \underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$$

$$\underline{c} \times \underline{c} = \underline{c} \times (\underline{a} + \underline{b})$$

$$\Rightarrow \underline{c} \times \underline{c} = \underline{c} \times \underline{a} + \underline{c} \times \underline{b}$$

$$\Rightarrow \underline{0} = -\underline{a} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{b}$$

$$\underline{a} \times \underline{c} = \underline{c} \times \underline{b} \dots \dots (1)$$

$$\text{আবার, } \underline{a} \times \underline{c} = \underline{a} \times (\underline{a} + \underline{b})$$

$$\Rightarrow \underline{a} \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{a} + \underline{a} \times \underline{b}$$

$$\Rightarrow \underline{a} \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} \dots \dots (2) [\quad \underline{a} \times \underline{a} = \underline{0}]$$

$$(1) \text{ ও } (2) \text{ হতে পাই, } \underline{a} \times \underline{c} = \underline{c} \times \underline{b} = \underline{a} \times \underline{b}$$

$$\Rightarrow ac \sin B \hat{n} = cb \sin A \hat{n}$$

$$= ab \sin(\pi - C) \hat{n} \quad \text{যখন } \hat{n} \text{ হল}$$

ΔABC সূতরাসের উপর লম্ব একক ভেক্টর।

$$\Rightarrow \frac{ac \sin B}{abc} = \frac{bc \sin A}{abc} = \frac{ab \sin C}{abc}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$13. \overline{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} \text{ এবং } \overline{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}.$$

(a) \overline{A} ভেক্টর বরাবর \overline{B} ভেক্টরের অংশক নির্ণয় কর।

(b) দেখাও যে, $\overline{A} + \overline{B}$ এবং $\overline{A} - \overline{B}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। [গ্র.'০৬; চা.'০৩, '০৮, '০৮; ঘ.'০৭; চ.'০৭, '১২, '১৮; মা.বো.'০৮; দি.'১০; ব.'১০, '১২; মা.'১৮; বৃহস্পতি'১১-১২]

(c) দেখাও যে, \overline{A} , $\overline{A} - \overline{B}$ এবং $4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর তিনিটি একটি সমকোণী সমধিবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

$$\text{সমাধান: (a) } |\overline{A}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$\overline{A} \text{ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর} = \frac{\overline{A}}{|\overline{A}|}$$

$$= \frac{\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{14}} = \hat{A}$$

\overline{A} ভেক্টর বরাবর \overline{B} ভেক্টরের অংশক নির্ণয় কর

$$= (\hat{A} \cdot \overline{B}) \hat{A} = \left(\frac{\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{14}} \cdot (3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) \right) \hat{A}$$

$$= \frac{3-2-6}{\sqrt{14}} \hat{A} = -\frac{5}{\sqrt{14}} \frac{\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{14}}$$

$$= -\frac{5}{14} (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$$

(b) প্রশ্নমালা II B এর 10(c).

(c) প্রমাণ : $\overline{A} - \overline{B} =$

দেখাও যে, \overline{A} , $\overline{A} - \overline{B}$ এবং $4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর তিনিটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

$$\text{প্রমাণ : } |\overline{A}| = |\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$|\overline{A} - \overline{B}| = |-2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$$

$$|4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}| = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24}$$

$$\sqrt{14}, \sqrt{38} \text{ ও } \sqrt{24} \text{ এর যেকোনো দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং } (\sqrt{14})^2 + (\sqrt{24})^2 = 14 + 24 = 38 = (\sqrt{38})^2$$

প্রদত্ত ভেক্টর তিনিটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

14. ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুগুলির

মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F।

(a) প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$

$$[\text{ঢ. } '07; \text{ ঘ. } '06, '11; \text{ চ. } '06; \text{ গ্র. } '11, '13; \text{ সি. } '09, '12; \text{ ব. } '07, '12; \text{ দি. } '13]$$

(b) ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, AD, BE ও CF সমবিন্দু।

$$[\text{ঢ. } '11, '18; \text{ গ্র. } '12; \text{ ব. } '10, '18; \text{ চ. } '07; \text{ ঘ. } '10; \text{ কু. } '10, '12, '18; \text{ মা.বো. } '09, '12; \text{ দি. } '18]$$

(c) B, C ও D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, -3, 0)$, $(4, -4, 1)$ ও $(1, 2, -6)$ হলে DE এর ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(a) প্রশ্নমালা II A এর উদাহরণ 1(c)

(b) প্রশ্নমালা II C এর 2 নং প্রশ্ন।

(c) প্রশ্নমালা II B এর উদাহরণ 9

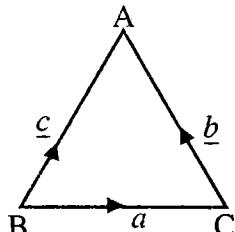
15. মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ ও $\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ ।

(a) \overline{OA} ভেক্টরের উপর \overline{OB} ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

(b) A বিন্দুগামী এবং \overrightarrow{AB} ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(c) OAB ত্রিভুজটির কোণ তিনটি নির্ণয় কর।

সমাধান:



(a) \overrightarrow{OA} ভেক্টরের উপর \overrightarrow{OB} ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{(2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}) \cdot (\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k})}{|2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}|}$$

$$= \frac{2 - 12 - 3}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{-13}{\sqrt{14}}$$

$$(b) \overrightarrow{AB} = (\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}) - (2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}) \\ = -\hat{i} + 7\hat{j} + 4\hat{k}$$

A(a) বিন্দুগামী এবং $\overrightarrow{AB} = \underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

$$\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b} \\ \Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k} + t(-\hat{i} + 7\hat{j} + 4\hat{k}) ; \text{ যেখানে } t \text{ একটি প্যারামিটার।}$$

(c) দেওয়া আছে, OAB ত্রিভুজে,

$$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$$

$$\overrightarrow{AO} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

$$\text{এবং } \overrightarrow{OB} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$$

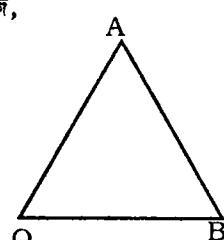
$$\overrightarrow{BO} = -\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\text{এখন, } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

$$= -2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k} + \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$= -\hat{i} + 7\hat{j} + 4\hat{k} \quad \overrightarrow{BA} = \hat{i} - 7\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\cos AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|}$$



$$= \frac{(2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}) \cdot (\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k})}{\sqrt{4+9+1} \sqrt{1+16+9}}$$

$$= \frac{2 - 12 - 3}{\sqrt{14} \sqrt{26}} = \frac{-13}{\sqrt{364}}$$

$$\angle AOB = \cos^{-1}\left(\frac{-13}{\sqrt{364}}\right)$$

$$\cos OAB = \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AO}| |\overrightarrow{AB}|}$$

$$= \frac{(-2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) \cdot (-\hat{i} + 7\hat{j} + 4\hat{k})}{\sqrt{4+9+1} \sqrt{1+49+16}}$$

$$= \frac{2 + 21 + 4}{\sqrt{14} \sqrt{66}} = \frac{27}{\sqrt{924}}$$

$$\angle OAB = \cos^{-1}\left(\frac{27}{\sqrt{924}}\right)$$

$$\cos OBA = \frac{\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BO}| |\overrightarrow{BA}|}$$

$$= \frac{(-\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 7\hat{j} - 4\hat{k})}{\sqrt{1+16+9} \sqrt{1+49+16}}$$

$$= \frac{-1 + 28 + 12}{\sqrt{26} \sqrt{66}} = \frac{39}{\sqrt{1716}}$$

* একটি বস্তুর উপর \bar{F} বলের ক্রিয়ার ফলে বস্তুটির সরণ \bar{r} হলে, কাজ $= \bar{F} \cdot \bar{r}$

* O এর সাপেক্ষে \bar{F} বলের ক্রিয়ারেখার উপরস্থ কোণ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর \bar{r} হলে, O এর চতুর্দিকে \bar{F} বলের মোমেন্ট $= |\bar{r} \times \bar{F}|$

* $\bar{r} = 3\hat{i} + 8\hat{j} - 2\hat{k} + t(2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$ ও $\bar{r} = 7\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k} + s(2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})$ সরলরেখাদ্বয় ছেদ করে কিনা পরীক্ষা কর এবং যদি ছেদ করে তবে ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: $\bar{r} = (3 + 2t)\hat{i} + (8 - t)\hat{j} + (-2 + 3t)\hat{k}$

এবং $\vec{r} = (7+2s)\hat{i} + (4+s)\hat{j} + (3+4s)\hat{k}$
রেখাদ্বয় ছেদ করলে, $3+2t=7+2s \quad \dots \text{(i)}$,

$$8-t=4+s \quad \dots \text{(ii) এবং}$$

$$-2+3t=3+4s \quad \dots \dots \text{(iii) সত্য হবে।}$$

$$\text{(i)} + \text{(ii)} \times 2 \Rightarrow 3+16=7+8+4s$$

$$\Rightarrow 4s=4 \Rightarrow s=1$$

$$\text{(ii) হতে পাই, } 8-t=4+1 \Rightarrow t=3$$

$s=1, t=3$ এর জন্য (iii) এর

$$\text{বামপক্ষ} = -2+3 \times 3 = 7 \text{ এবং}$$

$$\text{ডানপক্ষ} = 3+4 \times 1 = 7 \text{ সমান।}$$

সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করে।

$$\text{ছেদবিন্দুর অবস্থান ডেটা} = 9\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}$$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. $4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ও $\lambda\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ডেটারহয় পরস্পর শম্ভু হলে λ এর মান – [DU 02-03, 06-07; NU 08-09, 05-06; RU 12-13,09-10]

$$Sol^n. 4\lambda - 6 - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$$

2. $\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ ও $m\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ডেটারহয় পরস্পর শম্ভু হলে m এর মান – [BUET 07-08]

$$Sol^n. m + 6 - 24 = 0 \Rightarrow m = 18$$

3. $\vec{F}_1 = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ ও \vec{F}_2 বল দুইটির শর্ত
 $\vec{F}_3 = 5\hat{i} + 4\hat{j}$ হলে $\vec{F}_2 = ?$ [DU 06-07]

$$Sol^n. \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_3 \Rightarrow \vec{F}_2 = \vec{F}_3 - \vec{F}_1$$

$$\Rightarrow \vec{F}_2 = (5\hat{i} + 4\hat{j}) - (2\hat{i} - 3\hat{j}) = 3\hat{i} + 7\hat{j}$$

4. $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$
হলে $\vec{A} \cdot \vec{B} = ?$ [DU 01-02]

$$Sol^n. \vec{A} \cdot \vec{B} = 2 - 2 - 3 = -3$$

5. $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ ডেটার বরাবর

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$
 ডেটারের উপাংশের মান –

[CU 07-08]

$$Sol^n. \text{মান} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{4+20-11}{\sqrt{4+100+121}} = \frac{13}{15}$$

6. $\vec{Y} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ ডেটার উপর
 $\vec{X} = -\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ এর অভিক্ষেপ – [CU 07-08]

$$Sol^n. \text{অভিক্ষেপ} = \frac{\vec{X} \cdot \vec{Y}}{|\vec{Y}|} = \frac{-2-3-20}{\sqrt{4+9+25}} = \frac{-25}{\sqrt{38}}$$

7. $\vec{X} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{Y} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$
ডেটারহয়ের অন্তর্জুক্ত কোণ – [CU 07-08]

$$Sol^n. \cos \theta = \frac{\vec{X} \cdot \vec{Y}}{|\vec{X}| |\vec{Y}|}$$

$$= \frac{12-2-10}{\sqrt{16+4+25} \sqrt{9+1+4}} = 0 \therefore \theta = 90^\circ$$

8. $2\hat{i} - 3\hat{k}$ এবং $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ডেটারহয়ের অন্তর্জুক্ত কোণ – [BUET 07-08]

$$Sol^n. \cos \theta = \frac{2+0-3}{\sqrt{4+9} \sqrt{1+1+1}} = \frac{-1}{\sqrt{13} \sqrt{3}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{39}}\right)$$

9. a এর মান কত হলে, $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 15\hat{i} + a\hat{j} + 9\hat{k}$ ডেটারহয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।
[IU 07-08]

$$Sol^n. \vec{A} \text{ ও } \vec{B} \text{ সমান্তরাল বলে, } \frac{5}{15} = \frac{2}{a} = \frac{3}{9}$$

$$a = 6$$

10. দুইটি ডেটার $\vec{A} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি
একক শম্ভু ডেটার – [SU 06-07]

$$Sol^n. \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (6+9)\hat{i} - (-2+12)\hat{j} + (6+24)\hat{k}$$

$$\hat{\eta} = \pm \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \pm \frac{15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}}{\sqrt{225 + 100 + 900}}$$

$$= \pm \frac{1}{7} (3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})$$

11. $|\vec{A} \times \vec{B}|^2 + |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2$ এর মান-

$$\begin{aligned} Sol'' . & |\vec{A} \times \vec{B}|^2 + |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 \\ & = (AB \sin \theta)^2 + (AB \cos \theta)^2 \\ & = A^2 B^2 \end{aligned}$$

12. $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ একক ভেট্টের হলে $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) = ?$

$$Sol'' . \hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) = \hat{i} \cdot \hat{i} = 1$$

13. m তলের একটি ক্ষতর উপর প্রযুক্ত $\vec{F} = 5\vec{x} + 4\vec{y}$ বলের কারণে ক্ষতটি একটি নির্দিষ্ট দিকে গতিশীল ক্ষতটি উপর যে বল প্রয়োগ করলে ক্ষতটির গতিগতের সাথে 45° কোণ তৈরী করবে সে বলের মান কত? [RU 07-08]

$$Sol'' . (5\vec{x} + 4\vec{y}) \cos 45^\circ$$

14. যদি বল $\vec{F} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ এর সরণ $\vec{S} = \hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$ হয় হবে কাজ W = ?

[RU 06-07]

$$Sol'' . W = \vec{F} \cdot \vec{S} = 2 + 6 + 5 = 13$$

15. যদি প্রযুক্ত বল $\vec{F} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এর সূর্ণায়মান কণার অঙ্কের সাপেক্ষে অবস্থান ভেট্টের $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ হয় তবে বলের মোমেন্ট T এর মান কত? [RU 06-07]

$$Sol'' . : \vec{T} = \vec{F} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (6 - 1)\hat{i} - (9 + 2)\hat{j} + (-3 - 4)\hat{k}$$

$$= 5\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$T = | \vec{T} | = \sqrt{25 + 121 + 49} = \sqrt{195}$$

16. XOZ তলের সমান্তরাল এবং $3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ ভেট্টের সাথে লম্ব একক ভেট্টের হবে-

$Sol'' .$: XOZ তলের সমান্তরাল বলে \hat{i} ও \hat{k} উপাংশ থাকবে। XOZ তলের সমান্তরাল এবং $3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ ভেট্টের সাথে লম্ব ভেট্টের $4\hat{i} - 3\hat{k}$. [BUET 10-11]

$$\text{নির্ণয় একক ভেট্টের} = \frac{4\hat{i} - 3\hat{k}}{\sqrt{16+9}} = \frac{4\hat{i} - 3\hat{k}}{5}$$

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী :

- $x = r\cos \theta, y = r\sin \theta$ হলে, $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$
- (i) $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব x -অক্ষ হতে $= |y|$ এবং y -অক্ষ হতে $= |x|$
(ii) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
(iii) $P(r_1, \theta_1)$ এবং $Q(r_2, \theta_2)$ বিন্দুয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$
- (i) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাখনকে $R(x, y)$ বিন্দু $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্ভিত্ত করলে, $R \equiv \left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right), \frac{m_1}{m_2} = \frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{y_1 - y}{y_2 - y}$
বর্তিবিভক্ত করলে, $R \equiv \left(\frac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2} \right), \frac{m_1}{m_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x} = \frac{y_1 - y_2}{y_2 - y}$
(ii) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$
(iii) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাকে $k:1$ অনুপাতে অন্তর্ভিত্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1} \right)$
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ এবং (x_3, y_3) শীর্ষ বিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$
- ABC ত্রিভুজের শীর্ষগুলি $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ হলে, বিন্দুয়ের নিচায়ক,

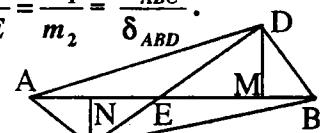
$$\delta_{ABC} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} = (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (y_1 x_2 + y_2 x_3 + y_3 x_1)$$

$$= (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)$$
 এবং $\Delta ABC = \frac{1}{2} |\delta_{ABC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \right|$ কো একটি
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ বিন্দুগুলি সমরেখ হলে, $(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3) = 0$.
- $ABCD$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} |(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_1) - (y_1 x_2 + y_2 x_3 + y_3 x_4 + y_4 x_1)|$
- C ও D বিন্দুয়ে AB রেখার একই পার্শ্বে হলে, $\delta_{ABC} \times \delta_{ABD} > 0$ এবং বিপরীত পার্শ্বে হলে, $\delta_{ABC} \times \delta_{ABD} < 0$
- AB রেখাটি CD রেখাখনকে E বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে বিভক্ত করলে $\frac{CE}{DE} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABD}}$.

প্রমাণ : AB এর উপর CN ও DM লম্ব হলে, $\triangle CNE$ ও $\triangle DME$ সদৃশ।

$$\frac{CN}{DM} = \frac{CE}{DE} = \frac{m_1}{m_2} \quad \frac{\Delta ABC}{\Delta ABD} = \frac{\frac{1}{2} \delta_{ABC}}{\frac{1}{2} \delta_{ABD}} = \frac{\frac{1}{2} AB \times CN}{\frac{1}{2} AB \times DM} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABD}}$$

ক্ষয় ভিন্ন বলে অনুপাত ঝণাঝক হবে। অতএব, অনুপাত (+) হলে বর্তিবিভক্ত করবে এবং (-) হলে অন্তর্বিভক্ত করবে।



MCQ এর জন্য, ১. $A \equiv (x_2 + x_3 - x_1, y_2 + y_3 - y_1)$

$$B \equiv (x_1 + x_3 - x_2, y_1 + y_3 - y_2)$$

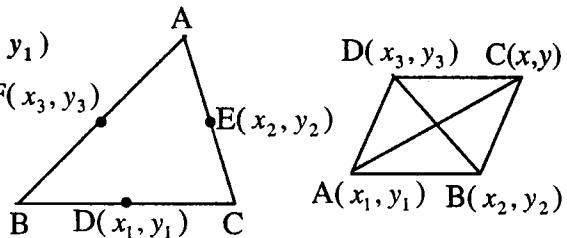
$$C \equiv (x_1 + x_2 - x_3, y_1 + y_2 - y_3)$$

২. ABCD সামান্তরিকের চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক

$$(x, y) = (x_2 + x_3 - x_1, y_2 + y_3 - y_1)$$

৩. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষিকদু হলে তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \sqrt{3}(y_1 - y_2)}{2}, \frac{y_1 + y_2 - \sqrt{3}(x_1 - x_2)}{2} \right) \text{ বা, } \left(\frac{x_1 + x_2 - \sqrt{3}(y_1 - y_2)}{2}, \frac{y_1 + y_2 + \sqrt{3}(x_1 - x_2)}{2} \right)$$



প্রশ্নমালা III A

১. x - অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব y -অক্ষ হতে এর দূরত্বের দ্বিগুণ। x - অক্ষ হতে এর দূরত্ব 4 একক হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β) .

$$x\text{- অক্ষ হতে } P \text{ বিন্দুর দূরত্ব} = |\beta| \text{ এবং}$$

$$y\text{-অক্ষ হতে } P \text{ বিন্দুর দূরত্ব} = |\alpha|$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } |\beta| = 4 \Rightarrow \beta = \pm 4 \text{ এবং}$$

$$|\beta| = 2|\alpha| \Rightarrow 2|\alpha| = 4$$

$$\Rightarrow |\alpha| = 2 \Rightarrow \alpha = \pm 2$$

$$P \text{ বিন্দুর স্থানাঙ্ক } (2, 4), (2, -4), (-2, 4)$$

অথবা, $(-2, -4)$

২(i) কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর,
যখন $r \geq 0$ এবং $\theta \in [0, 2\pi]$ অথবা, $\theta \in]-\pi, \pi]$

$$(a) (-1, -\sqrt{3}) \quad (b) (1, -\sqrt{3})$$

সমাধান : (a) ধরি, $(-1, -\sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) .

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \text{ এবং}$$

$$\theta \in [0, 2\pi] \text{ হলে, } \theta = \tan^{-1} \frac{-\sqrt{3}}{-1}$$

$$= \pi + \tan^{-1} \sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\theta \in]-\pi, \pi] \text{ হলে, } \theta = \tan^{-1} \frac{-\sqrt{3}}{-1}$$

$$= -\pi + \tan^{-1} \sqrt{3} = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$$

$$(-\sqrt{3}, 1) \text{ এর পোলার স্থানাঙ্ক } (2, \frac{4\pi}{3}) \text{ অথবা,}$$

$$(2, -\frac{2\pi}{3}).$$

(b) ধরি, $(1, -\sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) .

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \text{ এবং}$$

$$\theta \in]-\pi, \pi] \text{ হলে, } \theta = \tan^{-1} \frac{-\sqrt{3}}{1}$$

$$= -\tan^{-1} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\theta \in]-\pi, \pi] \text{ হলে, } \theta = \tan^{-1} \frac{-\sqrt{3}}{1}$$

$$= 2\pi - \tan^{-1} \sqrt{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$(1, -\sqrt{3}) \text{ এর পোলার স্থানাঙ্ক } (2, -\frac{\pi}{3}). \text{ বা, } (2, \frac{5\pi}{3})$$

(ii) পোলার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর :

$$(a) (\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}) \quad (b) (-2, 120^\circ) \quad (c) (\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$$

৫৩ (খ)

প্রশ্নমালা - III A
ষষ্ঠিঘর কর্ম

2(ii) সমাধান : (a) $(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$$= (\sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{4}, \sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{4})$$

$$= (\sqrt{2} \cos(\pi + \frac{\pi}{4}), \sqrt{2} \sin(\pi + \frac{\pi}{4}))$$

$$= (\sqrt{2} \cos(\pi + \frac{\pi}{4}), \sqrt{2} \sin(\pi + \frac{\pi}{4}))$$

$$= (-\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}, -\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4})$$

$$= (-\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) = (-1, -1)$$

(b) $(-2, 120^\circ)$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$$= (-2 \cos 120^\circ, -2 \sin 120^\circ)$$

$$= (-2 \cos(90^\circ + 30^\circ), -2 \sin(90^\circ + 30^\circ))$$

$$= (2 \sin 30^\circ, -2 \cos 30^\circ)$$

$$= (2 \cdot \frac{1}{2}, -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = (1, -\sqrt{3})$$

(c) $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$$= (\sqrt{2} \cos(-\frac{\pi}{4}), \sqrt{2} \sin(-\frac{\pi}{4}))$$

$$= (\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}, -\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4})$$

$$= (\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) = (1, -1)$$

3. পোলার সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে এবং কার্তেসীয় সমীকরণকে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর :

(a) $y = x \cot \alpha$ (b) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

সমাধান : (a) $y = x \cot \alpha$

$$\Rightarrow r \sin \theta = r \cos \theta \cot \alpha$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ (Ans.)}$$

(b) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$

$$\Rightarrow r^2 = a^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\Rightarrow r^2 = a^2 \left(\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} \right)$$

$$[\because x = r \cos \theta, y = r \sin \theta]$$

$$\Rightarrow (r^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$$

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2) \text{ (Ans.)}$$

4(a) দেখাও যে, $(2\sqrt{3}, 90^\circ), (2, 120^\circ)$ এবং $(2, 60^\circ)$ বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ : ধরি, প্রদত্ত বিন্দুগুলি $A(2\sqrt{3}, 90^\circ)$, $B(2, 120^\circ)$ ও $C(2, 60^\circ)$

$$\therefore AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cos(90^\circ - 120^\circ)}$$

$$= \sqrt{12 + 4 - 8\sqrt{3} \cos 30^\circ} = \sqrt{16 - 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \sqrt{16 - 12} = 2$$

$$BC = \sqrt{4 + 4 - 8 \cos 60^\circ} = \sqrt{8 - 8 \cdot \frac{1}{2}} = 2$$

$$CA = \sqrt{4 + 12 - 8\sqrt{3} \cos 30^\circ}$$

$$= \sqrt{16 - 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{16 - 12} = 2$$

AB, BC, CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $AB = CA = CA = 2$.

প্রদত্ত বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

4(b) $P(4, 0)$ এবং $Q(0, 4)$ বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজের তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $R(x, y)$. $\therefore PQ^2 = QR^2 = RP^2$

এখন, $QR^2 = RP^2$ হতে পাই,

$$\Rightarrow (0 - x)^2 + (4 - y)^2 = (x - 4)^2 + (y - 0)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 16 - 8y + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2$$

$$\Rightarrow -8y = -8x \Rightarrow y = x \quad (1)$$

$PQ^2 = QR^2$ হতে পাই,

$$\Rightarrow 4^2 + 4^2 = x^2 + 16 - 8y + y^2$$

$$\Rightarrow 32 = x^2 + 16 - 8x + x^2 \quad [\quad y = x \quad]$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16 - (-32)}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

$$y = 2 + 2\sqrt{3}, \text{ যখন } x = 2 + 2\sqrt{3} \text{ এবং}$$

$$y = 2 - 2\sqrt{3}, \text{ যখন } x = 2 - 2\sqrt{3}$$

তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(2 + 2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3})$

বা, $(2 - 2\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3})$

[বি.দ্র.: MCQ এর ক্ষেত্রে, তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক = $\left(\frac{4+0+\sqrt{3}(0-4)}{2}, \frac{0+4-\sqrt{3}(4-0)}{2} \right)$ বা,

$\left(\frac{4+0-\sqrt{3}(0-4)}{2}, \frac{0+4+\sqrt{3}(4-0)}{2} \right)$ অর্থাৎ

$(2-2\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3})$ বা, $(2+2\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3})]$

4(c) A ও B দুইটি স্থির বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 4)$ ও $(3, 6)$ । AB বাহুর উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর C বিন্দুটি AB রেখার সাপেক্ষে মূলবিন্দুর বিপরীত পাশে অবস্থিত হলে, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজের তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $C(x, y)$. $\therefore AB^2 = BC^2 = CA^2$

এখন, $BC^2 = CA^2$ হতে পাই,

$$\Rightarrow (3-x)^2 + (6-y)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$$

$$\Rightarrow (6-y)^2 - (y-4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (6-y+y-4)(6-y-y+4) = 0$$

$$\Rightarrow 2(-2y+10) = 0 \Rightarrow y = 5 \dots \dots (1)$$

$AB^2 = BC^2$ হতে পাই,

$$\Rightarrow |4-6|^2 = (3-x)^2 + (6-y)^2$$

$$\Rightarrow 4 = 9 - 6x + x^2 + (6-5)^2 \quad [\because y = 5]$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36 - 24}}{2.1} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$$

A ও B বিন্দুর ভুজ 3 এবং C বিন্দুটি AB রেখার

সাপেক্ষে মূলবিন্দুর বিপরীত পাশে অবস্থিত হলে, C এর ভুজ 3 অপেক্ষা বেশী হবে।

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3 + \sqrt{3}, 5)$

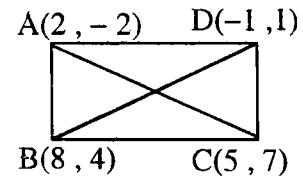
[বি.দ্র. MCQ এর ক্ষেত্রে, তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক

$$= \left(\frac{3+3-\sqrt{3}(4-6)}{2}, \frac{4+6+\sqrt{3}(3-3)}{2} \right)$$

$$= (3 + \sqrt{3}, 5)]$$

5(a) দেখাও যে, $(2, -2), (8, 4), (5, 7)$ এবং $(-1, 1)$ বিন্দুগুলি একটি আয়তের কৌনিক বিন্দু।

প্রমাণ : ধরি, প্রদত্ত বিন্দু চারটি $A(2, -2), B(8, 4), C(5, 7), D(-1, 1)$.



$$AB = \sqrt{(2-8)^2 + (4+2)^2}$$

$$= \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-5)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$$CD = \sqrt{(5+1)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$$

$$DA = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(2-5)^2 + (-2-7)^2} = \sqrt{9+81} = 3\sqrt{10}$$

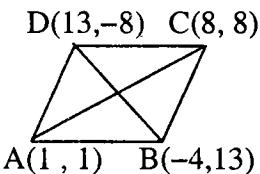
$$BD = \sqrt{(8+1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{81+9} = 3\sqrt{10}$$

ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় পারস্পর সমান অর্থাৎ

$AB = CD = 6\sqrt{2}$, $BC = DA = 3\sqrt{2}$ এবং কর্ণদ্বয় পারস্পর সমান অর্থাৎ $AC = BD = 3\sqrt{10}$

প্রদত্ত বিন্দুগুলি একটি আয়তের কৌনিক বিন্দু।

5(b) দেখাও যে, $(1, 1), (-4, 13), (8, 8)$ এবং $(13, -4)$ বিন্দুগুলি একটি রম্পসের কৌনিক বিন্দু। [পি.'১১]



প্রমাণ : ধরি, প্রদত্ত বিন্দু চারটি $A(1, 1)$, $B(-4, 13)$, $C(8, 8)$ ও $D(13, -8)$.

$$\therefore AB = \sqrt{(1+4)^2 + (1-13)^2} \\ = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

$$BC = \sqrt{(-4-8)^2 + (13-8)^2} \\ = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$$

$$CD = \sqrt{(8-13)^2 + (8+4)^2} \\ = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

$$DA = \sqrt{(13-1)^2 + (-4-1)^2} \\ = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$$

$$AC = \sqrt{(1-8)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{2 \times 49} = 7\sqrt{2}$$

$$BD = \sqrt{(-4-13)^2 + (13+4)^2} = 17\sqrt{2}$$

$ABCD$ চতুর্ভুজের চারটি বাহু পারস্পর সমান অর্থাৎ $AB = BC = CD = DA = 13$ এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর অসমান অর্থাৎ $AC \neq BD$

প্রদত্ত বিন্দুগুলি একটি রম্পসের কৌনিক বিন্দু।

5(c) দেখাও যে, $A(a, b)$, $B(a+\alpha, b+\beta)$, $C(a+\alpha+p, b+\beta+q)$ এবং $D(a+p, b+q)$ বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। কি শর্তে $ABCD$ (i) একটি আয়তক্ষেত্র (ii) একটি রম্পস তা নির্ণয় কর।

$$\text{প্রমাণ : } AB = \sqrt{(a-a-\alpha)^2 + (b-b-\beta)^2} \\ = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$BC = \sqrt{(-p)^2 + (-q)^2} = \sqrt{p^2 + q^2}$$

$$CD = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$DA = \sqrt{p^2 + q^2}$$

$$AC = \sqrt{(\alpha+p)^2 + (\beta+q)^2}$$

$$BD = \sqrt{(\alpha-p)^2 + (\beta-q)^2}$$

$ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় পারস্পর সমান অর্থাৎ $AB = CD$ এবং $BC = DA$ ।

বিন্দু চারটি একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে।

(i) $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র হলে, কর্ণ দুইটি পরস্পর সমান হবে। $AC = BD \Rightarrow AC^2 = BD^2$

$$\Rightarrow (\alpha+p)^2 + (\beta+q)^2 = (\alpha-p)^2 + (\beta-q)^2$$

$$\Rightarrow (\alpha+p)^2 - (\alpha-p)^2 = (\beta-q)^2 - (\beta+q)^2$$

$$\Rightarrow 4\alpha p = -4\beta q \quad \alpha p + \beta q = 0 \quad \text{ইহাই নির্ণয় শর্ত।}$$

(ii) $ABCD$ একটি রম্পস হলে, বাহু চারটি সমান হবে।

$$AB = BC \Rightarrow AB^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = p^2 + q^2; \text{ ইহাই নির্ণয় শর্ত।}$$

6(a) একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার কোটি তুজের দিগ্নুণ এবং তা $(4, 3)$ বিন্দু হতে $\sqrt{10}$ একক দূরত্বে অবস্থিত। [গ্রা.'০৭; মা.'০৮, '১২, '১৪; ছা.'১১; দি.'১৩]

সমাধান : ধরি, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(\alpha, 2\alpha)$.

$$(4, 3) \text{ বিন্দু হতে } (\alpha, 2\alpha) \text{ বিন্দুর দূরত্ব} \\ = \sqrt{(\alpha-4)^2 + (2\alpha-3)^2}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \sqrt{(\alpha-4)^2 + (2\alpha-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 16 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 = 10$$

$$\Rightarrow 5\alpha^2 - 20\alpha + 15 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Rightarrow (\alpha-3)(\alpha-1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \text{ অথবা, } \alpha = 3$$

বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(1, 2)$ বা, $(3, 6)$ (Ans.)

6(b) $(a+b, b-a)$ এবং $(a-b, a+b)$ বিন্দু থেকে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে, দেখাও যে, $bx - ay = 0$.

প্রমাণ : ধরি, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি $A(x-y)$, $B(a+b, b-a)$, $C(a-b, a+b)$

$$\text{প্রশ্নমতে, } AB = AC \Rightarrow AB^2 = AC^2$$

$$\Rightarrow (x-a-b)^2 + (y-b+a)^2 =$$

$$(x-a+b)^2 + (y-a-b)^2$$

বইয়ের কম

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow (x-a-b)^2 - (x-a+b)^2 \\
 & \quad = (y-a-b)^2 - (y-b+a)^2 \\
 & \Rightarrow (x-a-b-x+a-b)(x-a-b+x-a+b) \\
 & \quad = (y-a-b-y+b-a)(y-a-b+y-b+a) \\
 & \Rightarrow -2b \cdot 2(x-a) = -2a \cdot 2(y-b) \\
 & \Rightarrow bx-ab = ay-ab \\
 & \quad bx-ay = 0 \quad (\text{Showed})
 \end{aligned}$$

6(c) কোন বিদ্যুত কোটি 6 এবং (5, 6) হতে বিদ্যুটির দূরত্ব
4 একক হলে, বিদ্যুটির স্থান নির্ণয় কর। [ব.'০৩; কু.'১১]

সমাধান : ধরি, বিদ্যুটির স্থানাঙ্ক $(\alpha, 6)$.

$$(5, 6) \text{ হতে } \text{বিদ্যুটির দূরত্ব} = |\alpha - 5|$$

$$\text{প্রশ্নমতে}, |\alpha - 5| = 4 \Rightarrow \alpha - 5 = \pm 4$$

$$\Rightarrow \alpha = 9 \text{ অথবা, } \alpha = 1$$

বিদ্যুটির ভজ 9 অথবা 1.

6(d) দেখাও যে, a এর যেকোন মানের জন্য
 $B(\sqrt{3}+1, 3\sqrt{3})$ এবং $C(3\sqrt{3}+1, \sqrt{3})$ বিদ্যু
থেকে $A(a+1, a)$ বিদ্যুত স্থান সমান। ABC
সমকোণী ত্রিভুজ হলে a এর মান নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}
 \text{প্রমাণ : } AB &= \sqrt{(a-\sqrt{3})^2 + (a-3\sqrt{3})^2} \\
 &= \sqrt{a^2 - 2\sqrt{3}a + 3 + a^2 - 2a \cdot 3\sqrt{3} + 27} \\
 &= \sqrt{2a^2 - 8\sqrt{3}a + 30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{এবং } AC &= \sqrt{(a-3\sqrt{3})^2 + (a-\sqrt{3})^2} \\
 &= \sqrt{2a^2 - 8\sqrt{3}a + 30}
 \end{aligned}$$

a এর যেকোন মানের জন্য $AB = AC$.

২য় অংশ :

$$\begin{aligned}
 BC &= \sqrt{(\sqrt{3}+1-3\sqrt{3}-1)^2 + (3\sqrt{3}-\sqrt{3})^2} \\
 &= \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{24}
 \end{aligned}$$

এখন ABC সমবাহু ত্রিভুজ হলে,

$$\sqrt{2a^2 - 8\sqrt{3}a + 30} = \sqrt{24}$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 8\sqrt{3}a + 30 = 24$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 8\sqrt{3}a + 6 = 0 \Rightarrow a^2 - 4\sqrt{3}a + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 2\sqrt{3})^2 = -3 + 12 = 3^2$$

$$\Rightarrow a - 2\sqrt{3} = \pm 3 \therefore a = 2\sqrt{3} \pm 3 \quad (\text{Ans.})$$

6(e) y -অক্ষ এবং (7, 2) বিদ্যু থেকে $(a, 5)$
বিদ্যুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান নির্ণয় কর।

[গ্র.'১০; য.'০৬, '১০; কু.'০৭; চ.'১০; ঢ.'১৩]

সমাধান : y -অক্ষ থেকে $(a, 5)$ বিদ্যুর দূরত্ব $= |a|$
এবং (7, 2) বিদ্যু থেকে $(a, 5)$ বিদ্যুর দূরত্ব
 $= \sqrt{(a-7)^2 + (5-2)^2}$

$$\text{প্রশ্নমতে, } |a| = \sqrt{(a-7)^2 + (5-2)^2}$$

$$\Rightarrow a^2 = a^2 - 14a + 49 + 9$$

$$\Rightarrow 14a = 58 \Rightarrow a = \frac{58}{14} = \frac{29}{7} \quad (\text{Ans.})$$

6(f). x -অক্ষ এবং (-5, -7) বিদ্যু থেকে (4, k)
বিদ্যুটির দূরত্ব সমান হলে, k এর মান নির্ণয় কর।

[কু.'০৯; মা.বো.'১৩]

সমাধান : x -অক্ষ থেকে (4, k) বিদ্যুটির দূরত্ব $= |k|$

এবং (-5, -7) বিদ্যু থেকে (4, k) বিদ্যুটির দূরত্ব

$$= \sqrt{(-5-4)^2 + (-7-k)^2}$$

$$= \sqrt{81 + 49 + 14k + k^2} = \sqrt{130 + 14k + k^2}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } |k| = \sqrt{130 + 14k + k^2}$$

$$\Rightarrow k^2 = 130 + 14k + k^2 \therefore k = -\frac{130}{14} = -\frac{65}{7}$$

7.(a) (5,7), (-1, -1) ও (-2, 6) বিদ্যুতের একটি
বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত। এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক
নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, বৃত্তের কেন্দ্র $O(x, y)$ এবং এর পরিধির
বিদ্যু তিনটি $A(5,7)$, $B(-1, -1)$ ও $C(-2, 6)$ ।

$$OA = OB = OC, [\because \text{একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ}]$$

$$OA = OB \text{ অর্থাৎ } OA^2 = OB^2 \text{ হতে পাই,}$$

$$(x-5)^2 + (y-7)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 14y + 49 =$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1$$

$$\Rightarrow 12x + 16y = 72 \Rightarrow 3x + 4y - 18 = 0 \dots(i)$$

$$OB = OC \text{ অর্থাৎ } OB^2 = OC^2 \text{ হতে পাই,}$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = (x+2)^2 + (y-6)^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 &= \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 - 12y + 36 & \\ \Rightarrow 2x - 14y + 38 = 0 \Rightarrow x - 7y + 19 = 0 \dots \text{(ii)} & \\ (\text{i}) - 3 \times (\text{ii}) \Rightarrow 4y + 21y - 18 - 57 = 0 & \\ \Rightarrow 25y = 75 \Rightarrow y = 3 & \\ (\text{ii}) \text{ হতে } \text{পাই}, x = 21 - 19 = 2 & \\ \text{বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক } (2, 3)। & \end{aligned}$$

7(b) কোন বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দুয়ের স্থানাঙ্ক $(5, 2)$ ও $(-3, -4)$ হলে, এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, বৃত্তের ব্যাসটির প্রান্ত বিন্দুয় $A(5, 2)$ ও $B(-3, -4)$. তাহলে,

$$\begin{aligned} \text{বৃত্তটির ব্যাস} = AB &= \sqrt{(5+3)^2 + (2+4)^2} \\ &= \sqrt{64+36} = 10 \text{ একক।} \end{aligned}$$

$$\text{বৃত্তটির ব্যাসার্ধ} = \frac{10}{2} = 5 \text{ একক।}$$

7(c) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 , কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(5, 3)$; এর যে জ্যা $(3, 2)$ বিন্দুতে সমদিখভিত্তি হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ৰ. '১০; চ. '১৩]

সমাধানঃ ধরি, $O(5, 3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু $C(3, 2)$ । তাহলে,

$$OC \perp AB, \text{ ব্যাসার্ধ } OA = 5 \text{ এবং}$$

$$OC^2 = (5-3)^2 + (3-2)^2 = 5$$

OAC সমকোণী ত্রিভুজ হতে

$$\text{পাই, } OA^2 = AC^2 + OC^2$$

$$\Rightarrow 5^2 = AC^2 + 5$$

$$\Rightarrow AC^2 = 25 - 5 = 20 \Rightarrow AC = 2\sqrt{5}$$

$$AB = 2 \times AC = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

জ্যা এর দৈর্ঘ্য $4\sqrt{5}$ একক।

7(d) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 , কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(11, 2)$; এর যে জ্যা $(2, -1)$ বিন্দুতে সমদিখভিত্তি হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ৰ. '১১]

সমাধানঃ ধরি, $O(11, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু $C(2, -1)$ । তাহলে, $OC \perp AB$,

ব্যাসার্ধ $OA = 10$ এবং

$$OC^2 = (11-2)^2$$

$$+ (2+1)^2 = 81+9 = 90$$

OAC সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই, A

$$OA^2 = AC^2 + OC^2$$

$$\Rightarrow 10^2 = AC^2 + 90$$

$$\Rightarrow AC^2 = 100 - 90 = 10 \Rightarrow AC = \sqrt{10}$$

$$AB = 2 \times AC = 2 \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

জ্যা এর দৈর্ঘ্য $2\sqrt{10}$ একক।

8. $A(4, 3)$, $B(11, 2)$ ও $C(2, -1)$ বিন্দুজ ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

(a) মূলবিন্দু এবং অক্ষাখর হতে C বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

(b) A বিন্দু হতে $\sqrt{10}$ একক দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার কেটি ভূজের হিতে।

[ৱ. '০৭; মা. '০৮, '১২, '১৪; চ. '১১; পি. '১৩]

(c) B কেন্দ্র ও 10 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের যে জ্যা C বিন্দুতে সমদিখভিত্তি হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ৰ. '১১]

সমাধানঃ (a) মূলবিন্দু হতে $C(2, -1)$ বিন্দুর দূরত্ব

$$= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ একক।}$$

x-অক্ষ হতে $C(2, -1)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |-1| = 1$ একক।

এবং y-অক্ষ হতে $C(2, -1)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |2| = 2$ একক।

(b) 6(a) প্রটো।

(c) 7(d) প্রটো।

কাজ

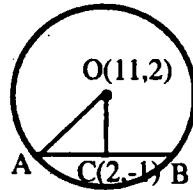
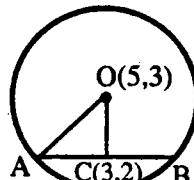
1. P বিন্দুর কেটি -6 । x - অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব y -অক্ষ হতে এর দূরত্বের অর্ধেক হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, -6)$.

x - অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $= |-6| = 6$ এবং

y -অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $= |x|$

প্রশ্নমতে, $6 = \frac{1}{2} |x| \Rightarrow |x| = 12 \Rightarrow x = \pm 12$



P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(12, -6)$ বা, $(-12, -6)$

২. $(1, 1)$ ও $(-\sqrt{3}, 1)$ কে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর, যখন $r \geq 0$ এবং $\theta \in [0, 2\pi]$ অথবা, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

সমাধান: মনে করি, $(1, 1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) .

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ এবং}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{1}{1} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$(1, 1) \text{ এর পোলার স্থানাঙ্ক } (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$$

ধরি, $(-\sqrt{3}, 1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) .

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \text{ এবং}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{1}{-\sqrt{3}} = \pi - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$(-\sqrt{3}, 1) \text{ এর পোলার স্থানাঙ্ক } (2, \frac{5\pi}{6})$$

৩. $(4, \frac{\pi}{3})$ ও $(\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4})$ কে কার্ডিনেয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

$(4, \frac{\pi}{3})$ এর কার্ডিনেয় স্থানাঙ্ক $= (4 \cos \frac{\pi}{3}, 4 \sin \frac{\pi}{3})$

$[\because (r, \theta)$ এর কার্ডিনেয় স্থানাঙ্ক $(r \cos \theta, r \sin \theta)]$

$$= (4 \times \frac{1}{2}, 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}) = (2, 2\sqrt{3})$$

এবং $(\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4})$ এর কার্ডিনেয় স্থানাঙ্ক

$$= (\sqrt{2} \cos(-\frac{3\pi}{4}), \sqrt{2} \sin(-\frac{3\pi}{4}))$$

$$= (\sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4}, -\sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{4})$$

$$= (\sqrt{2} \cos(\pi - \frac{\pi}{4}), -\sqrt{2} \sin(\pi - \frac{\pi}{4}))$$

$$= (-\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}, -\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4})$$

$$= (-\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) = (-1, -1)$$

৪. $x^2 - y^2 = a^2$ কে পোলার সমীকরণে এবং $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$ কে কার্ডিনেয় সমীকরণে প্রকাশ কর।

সমাধান : $x^2 - y^2 = a^2$

$$\Rightarrow (r \cos \theta)^2 - (r \sin \theta)^2 = a^2$$

[$\because x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$]

$$\Rightarrow r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = a^2$$

$$\Rightarrow r^2 \cos 2\theta = a^2 \quad (\text{Ans.})$$

এবং $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$

$$\Rightarrow r^2 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta = 2a^2$$

$$\Rightarrow 2(r \cos \theta)(r \sin \theta) = 2a^2$$

$$\Rightarrow 2xy = 2a^2 \quad xy = a^2 \quad (\text{Ans.})$$

৫. দেখাও যে, $(3, 8), (8, 3)$ এবং $(-2, 3)$ বিন্দুগুলি একটি সমদিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ : মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুত্বয় $A(3, 8)$, $B(8, 3)$ ও $C(-2, 3)$.

$$AB = \sqrt{(3-8)^2 + (8-3)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8+2)^2 + (3-3)^2} = 10$$

$$CA = \sqrt{(-2-3)^2 + (3-8)^2} = 5\sqrt{2}$$

AB, BC, CA এর মেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $AB = CA = 5\sqrt{2}$

প্রদত্ত বিন্দুত্বয় একটি সমদিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

৬. দেখাও যে, $(4, 4), (5, 2)$ এবং $(1, 0)$ বিন্দুগুলি একটি সমকেণ্টি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

প্রমাণ : ধরি, প্রদত্ত বিন্দুত্বয় $A(4, 4), B(5, 2)$ ও $C(1, 0)$.

$$AB = \sqrt{(4-5)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$

$$CA = \sqrt{(1-4)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

AB, BC, CA এর মেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর বলে বিন্দুগ্রাম একটি ত্রিভুজ গঠন করে।

$$\text{আবার, } AB^2 + BC^2 = 5 + 20 = 25 = CA^2$$

অতএব, প্রদত্ত বিন্দুগ্রাম একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু যার $\angle B = 90^\circ$.

২য় অংশ :

$$\begin{aligned}\text{ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল} &= \frac{1}{2}(AB \times BC) \quad [\because \angle B = 90^\circ] \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}) = 5 \text{ বর্গ একক।}\end{aligned}$$

৭. দেখাও যে, A (-3, 2), B (-7, -5), C(5, 4) এবং D(9, 11) বিন্দুগুলি একটি সামান্যতরিকের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ : ABCD চতুর্ভুজে,

$$AB = \sqrt{(-3+7)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$$

$$\begin{aligned}BC &= \sqrt{(-7-5)^2 + (-5-4)^2} = \sqrt{144+81} \\ &= \sqrt{225} = 15\end{aligned}$$

$$CD = \sqrt{(5-9)^2 + (4-11)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$$

$$DA = \sqrt{(9+3)^2 + (11-2)^2} = \sqrt{144+81} = 15$$

এখানে AB = CD এবং BC = DA অর্থাৎ ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় পারস্পর সমান।

বিন্দু চারটি একটি সামান্যতরিকের শীর্ষবিন্দু।

[বিদ্রূপ : বর্গক্ষেত্র, আয়তক্ষেত্র ও রম্বস প্রত্যেকে সামান্যতরিক। সুতরাং, সামান্যতরিকের কর্ণদ্বয় সমান ও অসমান উভয়েই হতে পারে।]

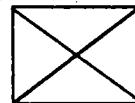
৮. দেখাও যে, (0, 7), (4, 9), (6, 5) এবং (2, 3) বিন্দুগুলি একটি বর্গের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ : ধরি, প্রদত্ত বিন্দু চারটি A(0, 7), B(4, 9), C(6, 5) ও D(2, 3).

$$AB = \sqrt{(0-4)^2 + (7-9)^2}$$

$$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$A(0, 7) \quad D(2, 3)$$



$$B(4, 9) \quad C(6, 5)$$

$$BC = \sqrt{(4-6)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$$

$$CD = \sqrt{(6-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$

$$DA = \sqrt{(2-0)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(0-6)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$$

$$BD = \sqrt{(4-2)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$$

ABCD চতুর্ভুজের চারটি বাহু পারস্পর সমান অর্থাৎ

AB = BC = CD = DA = $2\sqrt{5}$ এবং কর্ণদ্বয় পারস্পর সমান অর্থাৎ AC = BD = $2\sqrt{10}$.

প্রদত্ত বিন্দুগুলি একটি বর্গের কৌণিক বিন্দু।

৯. x-অক্ষের উপর অবস্থিত P বিন্দু থেকে (0, 2) এবং (6, 4) এর দূরত্ব সমান। P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
সমাধান : ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 0)$.

$$\begin{aligned}P \text{ বিন্দু থেকে } (0, 2) \text{ এর দূরত্ব} &= \sqrt{\alpha^2 + 4} \text{ এবং} \\ P \text{ বিন্দু থেকে } (6, 4) \text{ এর দূরত্ব} &= \sqrt{(\alpha-6)^2 + 16}\end{aligned}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \sqrt{\alpha^2 + 4} = \sqrt{(\alpha-6)^2 + 16}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 4 = \alpha^2 - 12\alpha + 36 + 16$$

$$\Rightarrow 12\alpha = 48 \Rightarrow \alpha = 4$$

$$P \text{ বিন্দুর স্থানাঙ্ক } (4, 0). \text{ (Ans.)}$$

1.(a) দেখাও যে, (2, -2) এবং (-1, 4) বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাখণ্ড অক্ষদ্বয় দ্বারা সমান তিন ভাগে বিভক্ত হয়।

[সি.'০৫, '১৩; ব.'০৭ ; মা'০৫]

প্রমাণ : ধরি, প্রদত্ত বিন্দু চারটি A(2, -2) ও B(-1, 4) এবং x-অক্ষ AB রেখাখণ্ডকে P($\alpha, 0$) বিন্দুতে m - 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$0 = \frac{4m+1 \times -2}{m+1} \Rightarrow 4m = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

অর্থাৎ x -অক্ষ AB রেখাখনকে 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্ভিত্ত করে।

আবার, ধরি y -অক্ষ AB রেখাখনকে Q(0, β) বিন্দুতে n : 1 অনুপাতে অন্তর্ভিত্ত করে।

$$0 = \frac{n \times -1 + 1 \times 2}{n+1} \Rightarrow n = 2 \Rightarrow n : 1 = 2 : 1$$

অর্থাৎ y -অক্ষ AB রেখাখনকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্ভিত্ত করে।

\therefore AB রেখাখন অক্ষদ্যন দ্বারা সমান তিনভাগে বিভক্ত হয়।

বিকল্প পদ্ধতি ধরি, প্রদত্ত বিন্দুয় A(2, -2) ও B(-1, 4) এবং x -অক্ষ ও y -অক্ষ AB রেখাখনকে যথাক্রমে P(α , 0) ও Q(0, β) বিন্দুতে অন্তর্ভিত্ত করে।

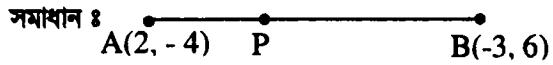
$$\frac{AP}{PB} = \frac{2-\alpha}{\alpha+1} = \frac{-2-0}{0-4} = \frac{1}{2}$$

B(-1, 4)

$$Q \equiv \left(\frac{2 \times -2 + 1 \times 7}{2+1}, \frac{2 \times -1 + 1 \times 5}{2+1} \right) = (1, 1)$$

সমত্রিখতক বিন্দুয়ের স্থানাঙ্ক (4, 3) ও (1, 1)

1.(c) (2, -4) ও (-3, 6) বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাখনকে x -অক্ষ এবং y -অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [ট. '০৯; মা. '০৮, '০৮; য. '০২]

সমাধান : 

ধরি, প্রদত্ত বিন্দুয় A(2, -4) ও B(-3, 6) এবং AB রেখাখনকে P বিন্দু $k:1$ অনুপাতে অন্তর্ভিত্ত করে।

$$P \equiv \left(\frac{k \times -3 + 1 \times 2}{k+1}, \frac{k \times 6 + 1 \times -4}{k+1} \right)$$

এ বিন্দুটি x -অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি

$$\frac{6k-4}{k+1} = 0 \Rightarrow 6k-4=0 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

অর্থাৎ $k : 1 = 2 : 3$

আবার, এ বিন্দুটি y -অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর ভূজ

$$\frac{-3k+2}{k+1} = 0 \Rightarrow -3k+2=0 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

অর্থাৎ $k : 1 = 2 : 3$

x ও y -অক্ষের প্রদত্ত বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাখনকে

2 : 3 এবং 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্ভিত্ত করে।

1.(d) (-2, 3) ও (4, -7) বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাখনকে x -অক্ষ এবং y -অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [চ. '০৭; মা. '০৭]

সমাধান : প্রদত্ত (-2, 3) ও (4, -7) বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাখনকে $k:1$ অনুপাতে অন্তর্ভিত্তকারী বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{k \times 4 + 1 \times -2}{k+1}, \frac{k \times -7 + 1 \times 3}{k+1} \right)$

এ বিন্দুটি x -অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি

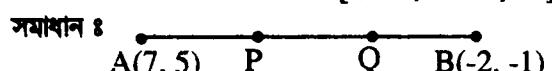
$$\frac{-7k+3}{k+1} = 0 \Rightarrow -7k+4=0 \Rightarrow k = \frac{3}{7}$$

অর্থাৎ $k : 1 = 3 : 7$

আবার, এ বিন্দুটি y -অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর ভূজ

$$\frac{4k-2}{k+1} = 0 \Rightarrow 4k-2=0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

অর্থাৎ $k : 1 = 1 : 2$

সমাধান : 

ধরি, প্রদত্ত বিন্দুয় A(7, 5) ও B(-2, -1) এবং P ও Q সমত্রিখতক বিন্দুয় AB রেখাখনকে যথাক্রমে 1 : 2 ও 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্ভিত্ত করে।

$$P \equiv \left(\frac{1 \times -2 + 2 \times 7}{1+2}, \frac{1 \times -1 + 2 \times 5}{1+2} \right) = (4, 3)$$

x ও y -অক্ষের প্রদত্ত বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাখণ্ডকে যথাক্রমে $3 : 7$ এবং $1 : 2$ অনুপাতে অল্পবিভক্ত করে।

1(e) $(2, -5)$ ও $(2, 3)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাখণ্ডকে x -অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। হেবিন্দুর স্থানাঙ্কও নির্ণয় কর। [য. '০০]

সমাধান : প্রদত্ত $(2, -5)$ ও $(2, 3)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাখণ্ডকে $k : 1$ অনুপাতে অল্পবিভক্তকারী বিন্দুটির স্থানাঙ্ক

$$= \left(\frac{k \times 2 + 1 \times 2}{k+1}, \frac{k \times 3 + 1 \times -5}{k+1} \right)$$

এ বিন্দুটি x -অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি

$$\frac{3k-5}{k+1} = 0 \Rightarrow 3k-5=0 \Rightarrow k=\frac{5}{3}$$

$$\text{অর্থাৎ } k : 1 = 5 : 3$$

x -অক্ষের প্রদত্ত বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাখণ্ডকে $5 : 3$ অনুপাতে অল্পবিভক্ত করে এবং বিন্দুটির স্থানাঙ্ক

$$= \left(\frac{2 \cdot \frac{5}{3} + 2}{\frac{5}{3} + 1}, 0 \right) = \left(\frac{10+6}{5+3}, 0 \right) = (2, 0)$$

[MCQ এর ক্ষেত্রে, বিন্দু দুইটির সাধারণ ভূজ 2 বলে বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাখণ্ডকে x -অক্ষের $(2, 0)$ বিন্দুতে এবং $\frac{-5-0}{0-3} = \frac{5}{3}$ অনুপাতে অল্পবিভক্ত করে।]

1.(f) দেখাও যে, মূলবিন্দু $(-3, -2)$ এবং $(6, 4)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাখণ্ডের একটি সমত্ত্বিখণ্ডক বিন্দু। অপর সমত্ত্বিখণ্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[সি. '০২; '০৮; কু. '০৩; ঢা. '০৬; চ. '০৮; য. '০৯, '১৩]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি $A(-3, -2)$ ও $B(6, 4)$ এবং P ও Q সমত্ত্বিখণ্ডক বিন্দু দুইটি AB রেখাখণ্ডকে যথাক্রমে $1 : 2$ ও $2 : 1$ অনুপাতে অল্পবিভক্ত করে।

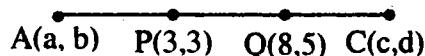
$$P \equiv \left(\frac{1 \times 6 + 2 \times -3}{1+2}, \frac{1 \times 4 + 2 \times -2}{1+2} \right) \\ = \left(\frac{6-6}{3}, \frac{4-4}{3} \right) = (0, 0)$$

$$\text{এবং } Q \equiv \left(\frac{2 \times 6 + 1 \times -3}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times -2}{2+1} \right) \\ = \left(\frac{12-3}{3}, \frac{8-2}{3} \right) = (3, 2)$$

অতএব, মূলবিন্দু প্রদত্ত বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাখণ্ডের একটি সমত্ত্বিখণ্ডক বিন্দু এবং অপর সমত্ত্বিখণ্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, 2)$ ।

1(g) AB সরলরেখাটি $P(3, 3)$ এবং $Q(8, 5)$ বিন্দু দুটি দ্বারা সমত্ত্বিখণ্ডিত করা হয়, A, B এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব. '১১]

সমাধান :



ধরি, A ও B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (a,b) ও (c, d) তাহলে, P, AQ এর মধ্যবিন্দু।

$$\frac{a+8}{2} = 3 \Rightarrow a = 6 - 8 = -2 \text{ এবং}$$

$$\frac{b+5}{2} = 3 \Rightarrow b = 6 - 5 = 1$$

আবার, Q, PC এর মধ্যবিন্দু।

$$\frac{3+c}{2} = 8 \Rightarrow c = 16 - 3 = 13 \text{ এবং}$$

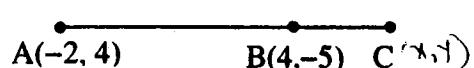
$$\frac{3+d}{2} = 5 \Rightarrow d = 10 - 3 = 7$$

A ও B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 1)$ ও $(13, 7)$

2.(a) A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 4)$ ও $(4, -5)$. AB রেখাখণ্ডকে C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন $AB = 3BC$ হয়। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[কু. '০৯; চ. '১১; পি. '১২; সি. '১০; মা. '১৩; ঢা. '১৪]

সমাধান :



ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) .

$$\text{দেওয়া আছে, } AB = 3BC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{3}{1}$$

B বিন্দু AC রেখাখণ্ডকে $3 : 1$ অনুপাতে অল্পবিভক্ত

$$\text{করে। } B \text{ বিন্দুর স্থানাঙ্ক } = \left(\frac{3x-2}{3+1}, \frac{3y+4}{3+1} \right)$$

$$\text{প্রমাণতে, } \frac{3x-2}{4} = 4 \Rightarrow 3x-2 = 16$$

$$\Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$$

$$\text{এবং } \frac{3y+4}{4} = -5 \Rightarrow 3y+4 = -20$$

$$\Rightarrow 3y = -24 \Rightarrow y = -8$$

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (6 , -8) (Ans.)

বিকল্প পদ্ধতি :

$$\text{দেওয়া আছে, } AB = 3BC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = 3$$

ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x , y).

$$\frac{AB}{BC} = \frac{-2-4}{4-x} = \frac{4+5}{-5-y} = 3$$

$$\frac{-6}{4-x} = 3 \Rightarrow -6 = 12 - 3x \Rightarrow x = 6 \text{ এবং}$$

$$\frac{9}{-5-y} = 3 \Rightarrow 9 = -15 - 3y \Rightarrow y = -8$$

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (6 , -8) (Ans.)

2(b) A(8 , 10) ও B(18, 20) বিন্দুর সংযোগ
রেখাখকে Q ও R বিন্দুয় 2 : 3 অনুপাতে যথাক্রমে
অঙ্গতর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে এবং P বিন্দু AB এর
মধ্যবিন্দু। Q ও R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং প্রমাণ
কর যে, $PQ \times PR = PB^2$ [গ্র.'০০]

$$\text{সমাধান : } P \equiv \left(\frac{8+18}{2}, \frac{10+20}{2} \right) = (13, 15)$$

$$Q \equiv \left(\frac{36+24}{2+3}, \frac{40+30}{2+3} \right) = \left(\frac{60}{5}, \frac{70}{5} \right) = (12, 14)$$

$$R \equiv \left(\frac{36-24}{2-3}, \frac{40-30}{2-3} \right) = (-12, -10)$$

Q ও R বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (12, 14) ও
(-12 , -10)

$$\text{এখন, } PQ = \sqrt{(13-12)^2 + (15-14)^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} PR &= \sqrt{(13+12)^2 + (15+10)^2} = \sqrt{2 \times 25^2} \\ &= 25\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$PB^2 = (13-18)^2 + (15-20)^2 = 50$$

$$PQ \times PR = \sqrt{2} \times 25\sqrt{2} = 50 = PB^2$$

3. (a) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু (2 , 7) ও
(6 , 1) এবং এর ভরকেন্দ্র (6 , 4) ; তৃতীয় শীর্ষ নির্ণয়
কর। [সি.'০৮,'১২; মা.বো.'০৭; ব.'১০,'১২; চ.'১২]

সমাধান : ধরি, তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক (x , y).

(2 , 7) , (6 , 1) ও (x , y) শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের
ভরকেন্দ্র $\left(\frac{2+6+x}{3}, \frac{7+1+y}{3} \right)$.

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{2+6+x}{3} = 6 \Rightarrow x+8 = 18 \Rightarrow x = 10$$

$$\text{এবং } \frac{7+1+y}{3} = 4 \Rightarrow y+8 = 12 \Rightarrow y = 4$$

তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক (10 , 4).

3(b) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষ (3 , 5) ও (7 , -1)

এবং এর ভরকেন্দ্র (7 , 2) তৃতীয় শীর্ষ নির্ণয় কর।

[ব.'০৬]

সমাধান : ধরি, তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক (x , y).

(3 , 5) , (7 , -1) ও (x , y) শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের
ভরকেন্দ্র $\left(\frac{3+7+x}{3}, \frac{5-1+y}{3} \right)$.

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{3+7+x}{3} = 7 \Rightarrow x+10 = 21 \Rightarrow x = 11$$

$$\text{এবং } \frac{5-1+y}{3} = 2 \Rightarrow y+4 = 6 \Rightarrow y = 2$$

তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক (11 , 2).

3(c) একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক
(at_1^2 , $2at_1$), (at_1^2 , $2at_2$) এবং (at_3^2 , $2at_3$)

যদি এর ভরকেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত হয়, তাহলে
দেখাও যে, $t_1+t_2+t_3 = 0$ [সি.'০৫; ক.'০৬;
ষ.'০৯; মা.'০৯]

সমাধান : ত্রিভুজটির ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$$= \left(\frac{at_1^2 + at_2^2 + at_3^2}{3}, \frac{2a(t_1 + t_2 + t_3)}{3} \right)$$

এ বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত বলে এর কোটি শূন্য।

$$\frac{2a(t_1 + t_2 + t_3)}{3} = 0$$

$$\Rightarrow t_1 + t_2 + t_3 = 0 \text{ (Showed)}$$

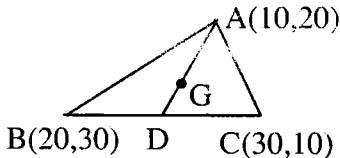
3(d) ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(10 20) ,

B(20 , 30) এবং C(30 , 10). ABC ত্রিভুজের

ভরকেন্দ্র G হলে GBC ত্রিভুজের GD মধ্যমার দৈর্ঘ্য

নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.(প্রকৌশল ভর্তি পরীক্ষা)'০৮]

সমাধান :



ABC ত্রিভুজের কেন্দ্র গুরুত্বের স্থানাঙ্ক

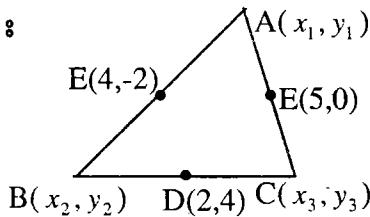
$$= \left(\frac{10+20+30}{3}, \frac{20+30+10}{3} \right) = (20, 20)$$

BC এর মধ্যবিন্দু D(25, 20)

$$\begin{aligned} GD &= \sqrt{(20-25)^2 + (20-20)^2} \text{ একক} \\ &= 5 \text{ একক } (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

3(e) ABC ত্রিভুজের BC, CA এবং AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে (2, 4), (5, 0) এবং (4, -2) হলে A, B এবং C শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান :



মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(x_1, y_1) B(x_2, y_2) ও C(x_3, y_3) এবং BC, CA ও AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D(2, 4), E(5, 0) ও F(4, -2)

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 = 8 \quad (1)$$

$$y_1 + y_2 = -4 \quad (2), x_2 + x_3 = 4 \cdots (3)$$

$$y_2 + y_3 = 8 \quad (4), x_3 + x_1 = 10 \cdots (5)$$

∴

$$(1) + (3) - (5) \Rightarrow 2x_2 = -2 \Rightarrow x_2 =$$

এ

$$(1) \text{ হতে পাই, } x_1 = 7 \text{ এবং } (3) \text{ হতে পাই } x_3 = 3$$

এ

$$\text{আবার, } (2) + (4) - (6) \Rightarrow 2y_2 = 4 \Rightarrow y_2 = 2$$

এ

$$\therefore (2) \text{ হতে পাই, } y_1 = -6 \text{ এবং } (4) \text{ হতে পাই } y_3 = 6$$

এ

$$\begin{array}{rcccl} & B(1) & & 3 & \\ & 0 & & 0 & \\ \hline & -1 & & -4 & \\ & & & & \end{array}$$

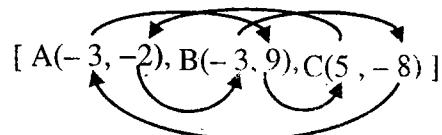
$$C \equiv (2+5-4, 4+0+2) = (3, 6)]$$

1. (a) ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(-3, -2), B(-3, 9) এবং C(5, -8); ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে B হতে CA এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু. '০৮; ব. '০৮, '১৩; চ. '০৮]

সমাধান : A(-3, -2), B(-3, 9) এবং C(5, -8) বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} | (-3)9 + (-3)(-8) + 5(-2) - (-2)(-3) - 9(5) - (-8)(-3) |$$

$$[\frac{1}{2} | x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_4 - y_4x_1 | \text{ সূত্র দ্বারা}]$$



$$= \frac{1}{2} | -27 + 24 - 10 - 6 - 45 - 24 |$$

$$= \frac{1}{2} | -88 | = 44 \text{ বর্গ একক।}$$

বিকল্প পদ্ধতি:

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -3 & -3 & 5 & 3 \\ -2 & 9 & -8 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} | -27 + 24 - 10 - (6 + 45 + 24) |$$

$$= \frac{1}{2} | -13 - 75 | = \frac{1}{2} | -88 | = 44$$

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

ব্যবহৃত

৫ ধর্ম

দৈর্ঘ্য দ্বারা একক।

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times C \times d$$

৫৪

$$\Rightarrow 88 = \sqrt{64 + 36} \times d \Rightarrow d = \frac{88}{10} = 8\frac{4}{5}$$

B হতে CA এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য $8\frac{4}{5}$ একক।

1(b) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A(5, 6), B(-9, 1) এবং C(-3, -1); ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে A হতে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ঢ. '০৮; চ. '১০; য. '০৭; দি. ০৯, '১০]

$$\text{সমাধান : } \Delta ABC = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & -9 & -3 & 5 \\ 6 & 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} | 5 + 9 - 18 - (-54 - 3 - 5) |$$

$$= \frac{1}{2} | -4 + 62 | = \frac{1}{2} | -4 + 62 | = \frac{1}{2} (58)$$

$$= 29$$

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল = 29 বর্গ একক।

২য় অংশ : ধরি, A হতে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য d একক।

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times d$$

$$\Rightarrow 29 = \frac{1}{2} \times \sqrt{(-9+3)^2 + (1+1)^2} \times d$$

$$\Rightarrow 58 = \sqrt{36+4} \times d$$

$$\Rightarrow d = \frac{58}{2\sqrt{10}} = \frac{29\sqrt{10}}{10}$$

∴ A হতে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{29\sqrt{10}}{10}$ একক।

1(c) দেখাও যে, (3, 5), (3, 8) এবং মূলবিন্দু একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু. '০২]

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি A(3, 5) ও B(3, 8) এবং মূলবিন্দু O(0, 0)।

$$OA = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$OB = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{9 + 64} = \sqrt{73}$$

$$AB = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{এখানে, } OA + AB = \sqrt{34} + 3 > \sqrt{73} = OB$$

∴ প্রদত্ত বিন্দু দুইটি এবং মূলবিন্দু একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

$$\text{এখন, } \Delta ABO = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} | 24 + 0 + 0 - (15 + 0 + 0) |$$

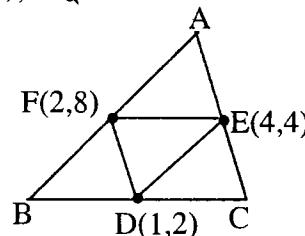
$$= \frac{1}{2} | 24 - 15 | = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $4\frac{1}{2}$ বর্গ একক।

1(d) ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু (1, 2), (4, 4)

এবং (2, 8); ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প. '০১]

সমাধান :



ধরি, ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু D(1, 2), E(4, 4) এবং F(2, 8)।

$$\therefore \delta_{DEF} = (1-4)(4-8) - (2-4)(4-2)$$

$$= 12 + 4 = 16$$

$$\Delta DEF = \frac{1}{2} | 16 | = 8$$

$$\Delta ABC = 4 \times \Delta DEF = 4 \times 8 = 32$$

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 32 বর্গ একক।

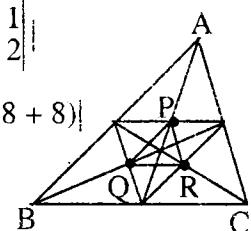
1(e) ABC ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির মধ্যবিন্দু (1, 2), (4, 4) এবং (2, 8); ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, ABC ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির মধ্যবিন্দু P(1, 2), Q(4, 4) এবং R(2, 8)।

$$\Delta PQR = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} | 4 + 32 + 4 - (8 + 8 + 8) |$$

$$= \frac{1}{2} | 40 - 24 |$$



$$= \frac{1}{2} | 32 | = 16$$

$$\Delta ABC = 16 \times \Delta DEF = 16 \times 8 = 128$$

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 128 বর্গ একক।

2. (a) কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক $(t+1, 1)$, $(2t+1, 3)$, $(2t+2, 2t)$ । ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

নির্ণয় কর। দেখাও যে, $t = 2$ অথবা $t = -1/2$ হলে, বিন্দুগুলো সমরেখ হবে। [ক. '১০; রা. '১০; ব. '১০]

সমাধান : বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} t+1 & 2t+1 & 2t+2 & t+1 \\ 1 & 3 & 2t & 1 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| 3t + 3 + 4t^2 + 2t + 2t + 2 - (2t + 1 + 6t + 6 + 2t^2 + 2t) \right|$$

$$= \frac{1}{2} | 4t^2 + 7t + 5 - 2t^2 - 10t - 7 |$$

$$= \frac{1}{2} | 2t^2 - 3t - 2 | \text{ বর্গ একক।}$$

$t = 2$ হলে,

$$2t^2 - 3t - 2 = 8 - 6 - 2 = 8 - 8 = 0$$

এবং $t = -\frac{1}{2}$ হলে,

$$2t^2 - 3t - 2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 = \frac{1+3-4}{2} = 0$$

$t = 2$ বা $-\frac{1}{2}$ হলে বিন্দুগুলো সমরেখ হবে।

- 2(b) $(a, b), (b, a)$ এবং $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ তিনি বিন্দুত্রয়

সমরেখ হলে, দেখাও যে, $a + b = 0$. [চ. '০২]

সমাধান : যেহেতু বিন্দুগুলি সমরেখ,

$$\left| \begin{vmatrix} a & b & 1/a & a \\ b & a & 1/b & b \end{vmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 1 + \frac{b}{a} - (b^2 + 1 + \frac{a}{b}) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 + \frac{b}{a} - \frac{a}{b} = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 + \frac{b^2 - a^2}{ab} = 0$$

$$\Rightarrow (a^2 - b^2)(1 - \frac{1}{ab}) = 0$$

$$\Rightarrow (a - b)(a + b)(ab - 1) = 0$$

এখানে $a - b = 0$ অর্থাৎ $a = b$ হলে অথবা $ab = 1$ হলে বিন্দু তিনটি তিন্ন হয় না।

$a + b = 0$ (Showed).

- 2(c) কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক $(2, -1)$, $(a+1, a-3)$, $(a+2, a)$ হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং a এর মান কত হলে বিন্দুগুলি সমরেখ হবে ? [রা.'১২; ব.'১২; দি.'১৪]

সমাধান : বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2 & a+1 & a+2 & 2 \\ -1 & a-3 & a & -1 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} | 2a - 6 + a^2 + a - a - 2 - (-a - 1 + a^2 - a - 6 + 2a) |$$

$$= \frac{1}{2} | a^2 + 2a - 8 - a^2 - 7 |$$

$$= \frac{1}{2} | 2a - 1 | \text{ বর্গ একক। (Ans.)}$$

এখন বিন্দুগুলো সমরেখ হলে, $2a - 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

- 3(a) যদি $A(3, 4), B(2t, 5)$ এবং $C(6, t)$

বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $19\frac{1}{2}$ বর্গ একক

হয়, তবে t এর মান নির্ণয় কর। 15/2

[য. '০৩; '১৮; ঢ. '০৮; সি. '০৮; ব. '১৩; মা. '১৪]

সমাধান : প্রদত্ত বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$$\frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 3 & 2t & 6 & 3 \\ 4 & 5 & t & 4 \end{vmatrix} \right| = 19\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} | 15 + 2t^2 + 24 - (8t + 30 + 3t) | = \frac{39}{2}$$

$$\Rightarrow | 2t^2 - 11t + 9 | = 39$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 11t + 9 = \pm 39$$

$$+' চিহ্ন নিয়ে পাই, $2t^2 - 11t + 9 - 39 = 0$$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 11t - 30 = 0$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 15t + 4t - 30 = 0$$

$$\Rightarrow t(2t - 15) + 2(2t - 15) = 0$$

$$\Rightarrow (t+2)(2t-15) = 0$$

$$t = -2 \text{ অথবা, } t = 15/2$$

$$'-' \text{ চিহ্ন নিয়ে পাই, } 2t^2 - 11t + 48 = 0$$

$(-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 48 < 0$ বলে, t এর কোন বাস্তব মানের জন্য সমীকরণটি সিদ্ধ হবেন।

$$t \text{ এর মান } -2 \text{ বা, } 15/2.$$

3(b) দেখাও যে, $(p, p-2), (p+3, p)$ এবং $(p+2, p+2)$ বিন্দুগুলি দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল p বর্জিত হবে। [ক্ষ. '০৮; মা.বো.'০৮]

প্রমাণ : প্রদত্ত বিন্দুগুলির দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$$= \frac{1}{2} |(p-p-3)(p-p-2) - (p-2-p)(p+3-p-2)|$$

$$= \frac{1}{2} |(-3)(-2) - (-2).1|$$

$$= \frac{1}{2} |6 + 2| = 4 \text{ একক, যা } p \text{ বর্জিত।}$$

বিন্দুগুলি দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল p বর্জিত।

3(c) OPQ ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু $(0, 0), (A \cos\beta, -A \sin\beta)$ এবং $(A \sin\alpha, A \cos\alpha)$; দেখাও যে, $\alpha = \beta$ হলে, ত্রিভুজটি ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হবে। বৃহত্তম মানটি নির্ণয় কর। [ব.'০৮; চ.'১২]

প্রমাণ প্রদত্ত বিন্দুগুলির দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ A \cos\beta & -A \sin\beta & 1 \\ A \sin\alpha & A \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(A^2 \cos\alpha \cos\beta + A^2 \sin\alpha \sin\beta)$$

$$= \frac{1}{2} A^2 \cos(\alpha - \beta); \text{ ইহা বৃহত্তম হবে যদি}$$

$\cos(\alpha - \beta)$ বৃহত্তম হয় অর্থাৎ,

$$\cos(\alpha - \beta) = 1 \text{ হয়।}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos 0 \Rightarrow \alpha - \beta = 0$$

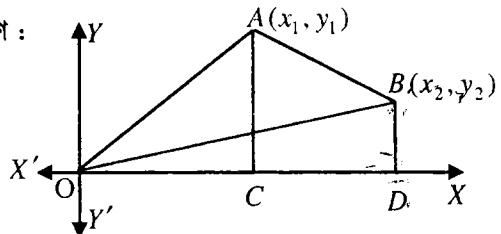
$$\alpha = \beta \quad (\text{Showed})$$

$$\text{বৃহত্তম মানটি} = \frac{1}{2} A^2 \text{ একক}$$

3(d) দুটি অক্ষরেখা পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে। A এবং B এর ধনাত্মক স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) । মূল নিয়মে প্রমাণ কর যে,

OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2} |x_1y_2 - x_2y_1|$ একক। [য.'০৫; ঢা.'০৯; দি.'১২]

প্রমাণ :



A ও B বিন্দু হতে x -অক্ষের উপর যথাক্রমে AC ও BD লম্ব আঁকি। তাহলে, $OC = x_1$, $OD = x_2$, $AC = y_1$, $BD = y_2$ এবং $CD = x_2 - x_1$, যখন $x_2 > x_1$. OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ΔOAB হলে,

$\Delta OAB = OAC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল + ট্রাপিজিয়াম $ACDB$ এর ক্ষেত্রফল - OBD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}(OC \times AC) + \frac{1}{2}(AC + BD) \times CD -$$

$$\frac{1}{2}(OD \times BD)$$

$$= \frac{1}{2} \{ x_1 y_1 + (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) - x_2 y_2 \}$$

$$= \frac{1}{2} (x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_2)$$

$$\Delta OAB = \frac{1}{2} (x_2 y_1 - x_1 y_2)$$

এখন, ΔOAB ধনাত্মক হবে যখন $x_2 y_1 > x_1 y_2$ এবং ঋণাত্মক হবে যখন $x_2 y_1 < x_1 y_2$. কিন্তু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হতে পারে না।

OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2} |x_2 y_1 - x_1 y_2|$ একক।

4. (a) একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু $A(x, y), B(2, 4)$

এবং $C(-3, 3)$ এবং এর ক্ষেত্রফল 9 একক হলে,

দেখাও যে, $x - 5y = 0$ অথবা, $x - 5y + 36 = 0$.
[রা. '১৩]

প্রমাণ: ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} |(x-2)(4-3) - (y-4)(2+3)| \\ &= \frac{1}{2} |x-2 - 5y + 20| \\ &= \frac{1}{2} |x-y+18| \text{ বর্গ একক} \end{aligned}$$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2} |x-y+18| = 9$

$$\Rightarrow x-5y+18 = \pm 18$$

$x-5y = 0$ অথবা, $x-5y+36 = 0$ (Showed)

4(b) একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A(x, y), B(2, -4) ও C(-3, 3) এবং এর ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে, দেখাও যে, $7x + 5y + 24 = 0$ অথবা, $7x + 5y - 12 = 0$. [ব. '০৬]

প্রমাণ: ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} |(x-2)(-4-3) - (y+4)(2+3)| \\ &= \frac{1}{2} |-7x+14 - 5y - 20| \\ &= \frac{1}{2} |-7x - 5y - 6| \text{ বর্গ একক} \end{aligned}$$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2} |-7x - 5y - 6| = 9$

$$\Rightarrow 7x + 5y + 6 = \pm 18$$

$7x + 5y + 24 = 0$ অথবা, $7x + 5y - 12 = 0$

5.(a) ΔABC এর A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 5), (-3, 3), (-1, -1)$ এবং BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু D, E, F হলে, ত্রিভুজ ABC এবং DEF এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। দেখাও যে, $\Delta ABC = 4 \cdot \Delta DEF$. [ব. '০৫]

সমাধান: ΔABC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} |(3+3)(3+1) - (5-3)(-3+1)|$$

$$= \frac{1}{2} |24 + 4| = \frac{1}{2} (28) = 14 \text{ বর্গ একক।}$$

$$BC \text{ এর মধ্যবিন্দু } D \equiv \left(\frac{-3-1}{2}, \frac{3-1}{2} \right) = (-2, 1)$$

$$CA \text{ এর মধ্যবিন্দু } E \equiv \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-1+5}{2} \right) = (1, 2)$$

$$AB \text{ এর মধ্যবিন্দু } F \equiv \left(\frac{3-3}{2}, \frac{5+3}{2} \right) = (0, 4)$$

ΔDEF এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} |(-2-1)(2-4) - (1-2)(1-0)|$$

$$= \frac{1}{2} |6+1| = \frac{7}{2} \text{ বর্গ একক।}$$

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{14}{7/2} = 4.$$

$$\Delta ABC = 4 \cdot \Delta DEF$$

5(b) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4, -3), (13, 0), (-2, 9)$ এবং D, E, F বিন্দু তিনটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর উপর এমনভাবে অবস্থিত যেন, $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = 2$. ABC এবং DEF ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, এদের আনুপাত 3 : 1. [রা. '০২]

সমাধান: প্রদত্ত বিন্দু A(4, -3), B(13, 0) এবং C(-2, 9) এর নিচায়ক,

$$\begin{aligned} \delta_{ABC} &= (4-13)(0-9) - (-3-0)(13+2) \\ &= 81 + 45 = 126 \end{aligned}$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} |126| \text{ বর্গ একক} = 63 \text{ বর্গ একক}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{BD}{DC} = \frac{2}{1} \Rightarrow BD:DC = 2:1$$

$$\text{তদুপ CE : EA} = 2:1, AF : FB = 2:1$$

$$D \equiv \left(\frac{2 \times -2 + 1 \times 13}{2+1}, \frac{2 \times 9 + 1 \times 0}{2+1} \right)$$

$$= \left(\frac{-4+13}{3}, \frac{18}{3} \right) = (3, 6)$$

$$E \equiv \left(\frac{2 \times 4 + 1 \times -2}{2+1}, \frac{2 \times -3 + 1 \times 9}{2+1} \right)$$

$$= \left(\frac{8-2}{3}, \frac{-6+9}{3} \right) = (2, 1)$$

$$F \equiv \left(\frac{2 \times 13 + 1 \times 4}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times -3}{2+1} \right)$$

$$= \left(\frac{26+4}{3}, \frac{-3}{3} \right) = (10, -1)$$

$$\delta_{DEF} = (3-2)(1+1) - (6-1)(2-10) \\ = 2 + 40 = 42$$

$$\Delta DEF = \frac{1}{2} |42| \text{ বর্গ একক} = 21 \text{ বর্গ একক}$$

থিতীয় অংশ : $\Delta ABC : \Delta DEF = 63 : 21 = 3 : 1$

৫(c) ABC ত্রিভুজে A, B, C শীর্ষ তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (-1, 2), (2, 3) ও (3, -4);

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, দেখাও যে,
 $\frac{\Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{|x - 3y + 7|}{22}$ [কু. '০৭]

$$\text{প্রমাণ: } \delta_{PAB} = (x+1)(2-3) - (y-2)(-1-2) \\ = -x - 1 + 3y - 6 = -x + 3y - 7$$

$$\Delta PAB = \frac{1}{2} |-x + 3y - 7| \text{ বর্গ একক} \\ = \frac{1}{2} |x - 3y + 7| \text{ বর্গ একক}$$

$$\delta_{ABC} = (-1-2)(3+4) - (2-3)(2-3) \\ = -21 - 1 = -22$$

$$\Delta PAB = \frac{1}{2} |-22| \text{ বর্গ একক} = 11 \text{ বর্গ একক}$$

$$\frac{\Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{|x - 3y + 7|}{22}$$

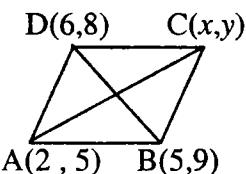
৬.(a) ABCD রেখসের তিনটি শীর্ষবিন্দু A(2, 5), B(5, 9) এবং D(6, 8).

I. ABD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

II. চতুর্থ শীর্ষ C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। রেখসটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢ.'০৫; '১০; সি.'০৯; ব.'০৯]

III. প্রমাণ কর যে, রেখসটির বহু চারটি সমান।

সমাধান : I.



$$ABD \text{ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} |(2-5)(9-8) -$$

$$(5-9)(5-6)| = \frac{1}{2} \{(-3)(1) - (-4)(-1)\}$$

$$= \frac{1}{2} |-3-4| = \frac{1}{2} |-7| = \frac{7}{2} \text{ বর্গ একক।}$$

II. ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) . ABCD একটি

রেখস বলে AC কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{x+2}{2}, \frac{y+5}{2})$ এবং

BD কর্ণের মধ্যবিন্দু $(\frac{11}{2}, \frac{17}{2})$ অভিন্ন।

$$\frac{x+2}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow x+2 = 11 \Rightarrow x = 9$$

$$\text{এবং } \frac{y+5}{2} = \frac{17}{2} \Rightarrow y+5 = 17 \Rightarrow y = 12$$

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(9, 12)$.

$$2য় অংশ : AC = \sqrt{(2-9)^2 + (5-12)^2} = 7\sqrt{2}$$

$$BD = \sqrt{(5-6)^2 + (9-8)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{রেখসটির ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} (AC \times BD) \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2} (7\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \text{ বর্গ একক} = 7 \text{ বর্গ একক।}$$

[বি.প্র. : C $\equiv (6+5-2, 9+8-5) = (9, 12)$]

$$\text{III. } AB = \sqrt{(2-5)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$BC = \sqrt{(5-9)^2 + (9-12)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$CD = \sqrt{(9-6)^2 + (12-8)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$DA = \sqrt{(6-2)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

রেখসটির বহু চারটি সমান।

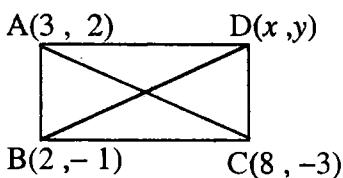
6(b) ABCD আয়তের তিনটি শীর্ষবিন্দু A(3, 2), B(2, -1), C(8, -3) হলে, চতুর্থ শীর্ষ D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। আয়তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[ব.'০২; ঢ.'০৩; চ.'০৬]

সমাধান ধরি, D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) . ABCD একটি আয়তক্ষেত্র বলে BD কর্ণের মধ্যবিন্দু

$\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y-1}{2}\right)$ এবং AC কর্ণের মধ্যবিন্দু

$\left(\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ অতিম।



$$\frac{x+2}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow x+2 = 11 \Rightarrow x = 9$$

$$\text{এবং } \frac{y-1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y-1 = -1 \Rightarrow y = 0$$

D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(9, 0)$ (Ans.)

$$\text{ঘন অংশ : } AB = \sqrt{(3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(2-8)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

আয়তটির ক্ষেত্রফল $= AB \times BC$ বর্গ একক

$$= \sqrt{10} \times 2\sqrt{10} \text{ বর্গ একক} = 20 \text{ বর্গ একক।}$$

[বি.স্র. : $D \equiv (8+3-2, -3+2+1) = (9,0)$]

6(c) A, B, C এবং D বিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0, -1), (15, 2), (-1, 2)$ এবং $(4, -5)$ ।

I. $AB : CD$ নির্ণয় কর।

II. ত্রিভুজ ABC ও ABD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

III. প্রমাণ কর যে, CD কে AB রেখাটি 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্ভুক্ত করে। [ব.'০৭; কু.'১১; দি.'১৩]

$$\text{I. সমাধান : } AB = \sqrt{(0-15)^2 + (-1-2)^2} \\ = \sqrt{225+9} = 3\sqrt{26}$$

$$CD = \sqrt{(-1-4)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

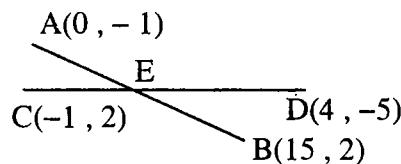
$$AB : CD = 3\sqrt{26} : \sqrt{74} = 3\sqrt{13} : \sqrt{37}$$

$$\text{II. ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} |(0+30+1) \\ - (-15-2-0)|$$

$$= \frac{1}{2} |31+17| = 24 \text{ বর্গ একক}$$

$$\text{ত্রিভুজ ABD এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} |(0-75-4) \\ - (-15+8+0)| \\ = \frac{1}{2} |-79+7| = 36 \text{ বর্গ একক।}$$

III. প্রমাণ:



ধরি, CD রেখাখণ্ডকে AB রেখাটি k : 1 অনুপাতে E বিন্দুতে অন্তর্ভুক্ত করে।

$$E \text{ বিন্দুর স্থানাঙ্ক} = \left(\frac{4k-1}{k+1}, \frac{-5k+2}{k+1} \right)$$

এখন A, E, B বিন্দু তিনটি সমরেখ বলে তাদের নিপায়ক, $\delta_{AEB} = 0$

$$\therefore 0 \times \frac{-5k+2}{k+1} + \frac{4k-1}{k+1} \times 2 + 15 \times -1 - \\ (-1 \times \frac{4k-1}{k+1} + \frac{-5k+2}{k+1} \times 15 + 2 \times 0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8k-2}{k+1} - 15 - \frac{-4k+1-75k+30}{k+1} = 0$$

$$\Rightarrow 8k-2-15k-15+79k-31=0$$

$$\Rightarrow 72k-48=0 \Rightarrow k=\frac{2}{3} \text{ অর্থাৎ } k:1=2:3$$

CD রেখাখণ্ডকে AB রেখাটি 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্ভুক্ত করে।

বিকল্প পদ্ধতি :

$$\delta_{ABC} = (0-15)(2-2) - (-1-2)(15+1) \\ = 0+48=48$$

$$\delta_{ABD} = (0-15)(2+5) - (-1-2)(15-4) \\ = -105+33=-72$$

$$\frac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABD}} = \frac{48}{-72} = -\frac{2}{3} < 0$$

C ও D, AB এর বিপরীত পাশে অবস্থিত। অতএব CD কে AB রেখাটি 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্ভুক্ত করে।

৬(d) A, B, C এবং D কিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 1), (1, 0), (5, 1) এবং (-10, -4)

CD সরলরেখা AB রেখাখনকে বিহিন্নভাবে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [চ. '০২]

সমাধান :

$$\delta_{CDA} = (5+10)(-4-1) - (1+4)(-10-3) \\ = -75 + 65 = -10$$

$$\delta_{CDB} = (5+10)(-4-0) - (1+4)(-10-1) \\ = -60 + 55 = -5$$

$$\frac{\delta_{CDA}}{\delta_{CDB}} = \frac{-10}{-5} = \frac{2}{1} > 0$$

C ও D, AB এর একই পাশে অবস্থিত এবং AB কে CD রেখাটি 2 : 1 অনুপাতে বিহিন্নভক্ত করে।

৬(e) ABCD চতুর্ভুজের A, B, C, D শীর্ষ চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 2), (-5, 6), (7, -4) এবং (k, -2); এর ক্ষেত্রফল শূন্য হলে k এর মান নির্ণয় কর। [য. '০২; সি. '০৮]

সমাধান : ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 7 & k & 1 \\ 2 & 6 & -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} \text{ বর্গ একক} \\ = \frac{1}{2} |(6+20-14+2k) - (-10+42-4k-2)|$$

বর্গ একক

$$= \frac{1}{2} |12+2k - 30+4k| \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2} |6k - 18| \text{ বর্গ একক}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{1}{2} |6k - 18| = 0 \Rightarrow 6k - 18 = 0$$

$$k = 3 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্নমালা III D

১. (a) A(2, 3) এবং B(-1, 4) দুইটি স্থির কিন্দু। A এবং B কিন্দু হতে একটি সেটের যেকোন কিন্দুর দ্রুতের অনুপাত 2 : 3 হলে সঞ্চার পথটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[চ. '১১; রা. '০৭; দি. '১১; ব. '১২; ঢা. '১০; য. '১৮]

সমাধান : মনে করি, P(x, y) কিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোন একটি কিন্দু।

$$PA = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$$

$$PB = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } PA : PB = 2 : 3 \Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 9PA^2 = 4PB^2$$

$$\Rightarrow 9\{(x-2)^2 + (y-3)^2\} \\ = 4(x+1)^2 + (y-4)^2$$

$$\Rightarrow 9(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9) \\ = 4(x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16)$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 36x + 9y^2 - 54y + 117 \\ = 4x^2 + 4y^2 + 8x - 32y + 68$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 44x - 22y + 49 = 0, \text{ ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণয় সমীকরণ।}$$

১(b) একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(x, y), B(-6, -3) এবং C(6, 3). A কিন্দুটি একটি সেটের সদস্য যে সেটটির যেকোন কিন্দু হতে BC এর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য 5 একক। দেখাও যে, A কিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $x^2 + y^2 = 25$ [চ. '০২]

সমাধান : BC এর মধ্যকিন্দু D (ধরি) এর স্থানাঙ্ক = $(\frac{-6+6}{2}, \frac{-3+3}{2}) = (0, 0)$

AD মধ্যমার দৈর্ঘ্য = $\sqrt{x^2 + y^2}$ একক

প্রশ্নমতে, AD মধ্যমার দৈর্ঘ্য 5 একক।

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 25 \text{ (Showed)}$$

১(c) A(0, 4) ও B(0, 6) দুইটি স্থির কিন্দু কর্তৃসীমা সমূহ পু-সেটের যেকোন উপাদানের সাথে AB রেখাখন এক সমকেশ উৎপন্ন করে। ঐ সেটটি ঘৰা সূচী সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. '০৩ ; ঢা. '১০; রা. '১৮]

সমাধান : যনে করি, P(x, y) কিন্দুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোন একটি কিন্দু।

$$PA^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2$$

$$= x^2 - 8y - 16$$

$$PB = (x-0)$$

$$= x^2 + y^2 - 12y + 36$$

$$AB^2 = (0 - 0)^2 + (4 - 6)^2 = 4$$

প্রশ্নমতে, P এর সাথে AB রেখাংশ এক সমকোণ উৎপন্ন করে।

$$PA^2 + PB^2 = AB^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8y + 16 + x^2 + y^2 - 12y + 36 = 4$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + y^2) - 20y + 48 = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 10y + 24 = 0, \text{ ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণয় সমীকরণ।}$$

1(d) A(a, b) ও B(0, b) কিন্তু দুইটির সাথে একটি কিন্তু-সেটের যেকোন উপাদান একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। এই সেটটি দ্বারা সৃষ্টি সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. '০৮, '১০; রা. '১২]

সমাধান ৪ মনে করি, P(x, y) কিন্তুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোন একটি কিন্তু

$$PA^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

$$= x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2$$

$$PB^2 = (x - 0)^2 + (y - b)^2$$

$$= x^2 + y^2 - 2bx + b^2$$

$$AB^2 = |a - 0|^2 = a^2$$

প্রশ্নমতে, P এর সাথে AB রেখাংশ এক সমকোণ উৎপন্ন করে। $PA^2 + PB^2 = AB^2$

$$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 + x^2 + y^2 - 2bx + b^2 = a^2$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + y^2) - 2ax - 4by + 2b^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - 2by + b^2 = 0, \text{ ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণয় সমীকরণ।}$$

1(e) একটি কিন্তু-সেটের যেকোন উপাদান $(2, -1)$ কিন্তু থেকে সর্বদা 4 একক দূরত্বে অবস্থান করে। এই সেটটি দ্বারা সৃষ্টি সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '১২] সমাধান ৪ ধরি, প্রদত্ত কিন্তুটি $A(2, -1)$ এবং $P(x, y)$ কিন্তুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোন একটি কিন্তু।

$$PA = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = 4$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16, \text{ ইহাই সঞ্চার পথের}$$

নির্ণয় সমীকরণ।

2. (a) y -অক্ষ হতে একটি কিন্তু-সেটের যেকোন উপাদানের দূরত্ব মূলকিন্তু হতে তার দূরত্বের অর্ধেক। এই সেটটি দ্বারা সৃষ্টি সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[প্র.ভ.প. '০৮; কু. '১২]

সমাধান ৪ মনে করি, $P(x, y)$ কিন্তুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোন একটি কিন্তু।

y -অক্ষ হতে $P(x, y)$ কিন্তুর দূরত্ব $= |x|$ একক এবং মূলকিন্তু $(0,0)$ হতে $P(x, y)$ কিন্তুর দূরত্ব $= \sqrt{x^2 + y^2}$ একক

$$\text{প্রশ্নমতে, } |x| = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow 4|x|^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 = x^2 + y^2 \quad y^2 = 3x \quad \text{ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণয় সমীকরণ}$$

2(b) (2, 0) কিন্তু হতে একটি কিন্তু-সেটের যেকোন উপাদানের দূরত্ব $x = 0$ রেখা হতে তার দূরত্বের তিনগুণ। এই সেটটি দ্বারা সৃষ্টি সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. '০৯]

সমাধান ৪ মনে করি, $P(x, y)$ কিন্তুটি সঞ্চার পথের উপর যেকোন একটি কিন্তু।

$x = 0$ রেখা অর্থাৎ y -অক্ষ হতে $P(x, y)$ কিন্তুর দূরত্ব $= |x|$ একক এবং $(2,0)$ কিন্তু হতে $P(x, v)$

কিন্তুর দূরত্ব $= \sqrt{(x - 2)^2 + y^2}$ একক

$$\text{প্রশ্নমতে, } 3|x| = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2}$$

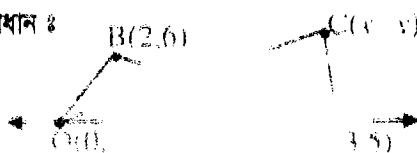
$$\Rightarrow 9|x|^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2$$

$$\Rightarrow 9x^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2$$

$$y^2 - 8x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \text{ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণয় সমীকরণ।}$$

2(c) B(2, 6) ও C(x, y) কিন্তু দুইটি O(0, 0) ও A(3, 5) কিন্তুবয়ের সংযোগ সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত। C(x, y) কিন্তুটি এমন একটি কিন্তু-সেটের সদস্য যার প্রতিটি কিন্তুর জন্য $\Delta OAC = 2\Delta OAB$. এই সেটটি দ্বারা সৃষ্টি সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ৪



$$\delta_{OAB} = (0 - 3)(5 - 6) - (0 - 5)(3 - 2) \\ = 3 + 5 = 8$$

$$\delta_{OAC} = (0 - 3)(5 - y) - (0 - 5)(3 - x) \\ = -15 + 3y + 15 - 5x = 3y - 5x$$

প্রশ্নমতে, $\Delta OAC = 2 \Delta OAB$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} |\delta_{OAC}| = 2 \cdot \frac{1}{2} |\delta_{OAB}|$$

$$\Rightarrow |\delta_{OAC}| = 2 \cdot |\delta_{OAB}|$$

B ও C কিন্তু দুইটি O ও A কিন্তুয়ের সংযোগ সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত বলে δ_{OAB} ও δ_{OAC} একই চিহ্নযুক্ত হবে।

$$\delta_{OAC} = 2 \cdot \delta_{OAB} \Rightarrow 3y - 5x = 2 \times 8$$

$\therefore 5x - 3y + 16 = 0$, ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণয় সমীকরণ।

2(d) C(2, -1) ও D(x, y) কিন্তু দুইটি A(1, 1) ও B(4, -2) কিন্তুয়ের সংযোগ সরলরেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। D(x, y) কিন্তুটি এমন একটি কিন্তু-সেটের সদস্য যার প্রতিটি কিন্তুর জন্য $\Delta ABD = 3 \cdot \Delta ABC$. এ সেটটি ঘারা সৃষ্টি সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান : } \delta_{ABC} = (1 - 4)(-2 + 1) - (1 + 2)(4 - 2) \\ = 3 - 6 = -3$$

$$\delta_{ABD} = (1 - 4)(-2 - y) - (1 + 2)(4 - x) \\ = 6 + 3y - 12 + 3x = 3x + 3y - 6$$

প্রশ্নমতে, $\Delta ABD = 3 \cdot \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} |\delta_{ABD}| = 3 \cdot \frac{1}{2} |\delta_{ABC}|$$

$$\Rightarrow |\delta_{ABD}| = 3 \cdot |\delta_{ABC}|$$

C ও D কিন্তু দুইটি A ও B কিন্তুয়ের সংযোগ সরলরেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত বলে δ_{ABD} ও δ_{ABC} বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে।

$$\delta_{ABD} = -3 \cdot \delta_{ABC}$$

$$\Rightarrow 3x + 3y - 6 = -3(-3) = 9$$

$$\Rightarrow 3x + 3y = 15$$

$$x + y = 5 \quad \text{ইহাই সঞ্চার পথের নির্ণয় সমীকরণ।}$$

3(a) k এর যেকোন মানের জন্য P কিন্তুর স্থানাঙ্ক $(2ak, ak^2)$. P কিন্তুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, P কিন্তুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) .

$$2ak = x \Rightarrow k = \frac{x}{2a} \text{ এবং}$$

$$ak^2 = y \Rightarrow a\left(\frac{x}{2a}\right)^2 = y \quad [k = \frac{x}{2a}]$$

$$\Rightarrow a\frac{x^2}{4a^2} = y$$

$$x^2 = 4ay, \text{ যা নির্ণয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।}$$

3(b) θ পরিবর্তনশীল হলে, $P(1 + 2 \cos \theta, -2 + 2 \sin \theta)$ কিন্তুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, P কিন্তুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) .

$$1 + 2 \cos \theta = x \Rightarrow 2 \cos \theta = x - 1 \text{ এবং}$$

$$-2 + 2 \sin \theta = y \Rightarrow 2 \sin \theta = y + 2$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4, \text{ যা নির্ণয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।}$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. দেখাও যে, $(a, a) (-a, -a)$ এবং $(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ কিন্তুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকিন্তু।

প্রমাণ 8 মনে করি, প্রদত্ত কিন্তুত্রয় $A(a, a)$

$B(-a, -a)$ এবং $C(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$

$$AB = \sqrt{(a - a)^2 + (a + a)^2} = \sqrt{8a^2}$$

$$BC = \sqrt{(-a + a\sqrt{3})^2 + (-a - a\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{2\{(-a)^2 + (a\sqrt{3})^2\}}$$

$$= \sqrt{2(a^2 + 3a^2)} = \sqrt{8a^2}$$

$$CA = \sqrt{(-a\sqrt{3} - a)^2 + (\sqrt{3}a - a)^2}$$

$$= \sqrt{2\{(-a)^2 + (a\sqrt{3})^2\}}$$

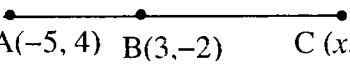
$$= \sqrt{2(a^2 + 3a^2)} = \sqrt{8a^2}$$

AB, BC, CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি

অপেক্ষা বহুত্তর এবং $AB = CA = CA = \sqrt{8a^2}$

প্রদত্ত কিন্তুত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকিন্তু।

২. A ও B বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে (-5, 4) ও (3, -2). AB কে C পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন
 $3AB = 2BC$ হয়। C বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।

সমাধান : 

$$\text{দেওয়া আছে, } 3AB = 2BC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$$

ধরি, C বিন্দুর স্থানাংক (x, y) .

$$\frac{AB}{BC} = \frac{-5-3}{3-x} = \frac{4+2}{-2-y} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{-8}{3-x} = \frac{2}{3} \Rightarrow -24 = 6 - 2x$$

$$\Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = 15 \text{ এবং}$$

$$\frac{6}{-2-y} = \frac{2}{3} \Rightarrow 18 = -4 - 2y$$

$$\Rightarrow 2y = -22 \Rightarrow y = -11$$

C বিন্দুর স্থানাংক (15, -11) (Ans.)

৩. যদি A(-4, 6), B(-1, -2) এবং C(a, -2) বিন্দুগুলি ঘোরা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 16 বর্গ একক
 হয়, তবে 'a' এর মান এবং A হতে BC এর লম্ব
 দূরত্ব নির্ণয় কর। [প.ভ.প. '৯৫]

সমাধান : $\delta_{ABC} = (-4+1)(-2+2) - (6+2)(-1-a) = 8(a+1)$

$$\Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} |\delta_{ABC}| \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2} |8(a+1)| \text{ বর্গ একক}$$

$$\text{প্রশ্নমতে } \frac{1}{2} |8(a+1)| = 16 \Rightarrow |a+1| = 4$$

$$\Rightarrow a+1 = \pm 4 \Rightarrow a = 3 \text{ অথবা, } a = -5$$

a এর মান 3 বা, -5

২য় অংশ: A হতে BC এর লম্ব দূরত্ব d একক হলে

$$\Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} (BC \times d) = 16$$

$$\Rightarrow |-1-a| \times d = 32$$

$$\Rightarrow 4d = 32 \quad [a = 3 \text{ বা, } -5 \text{ বসিয়ে]$$

A হতে BC এর লম্ব দূরত্ব 8 একক।

- 4(a) দেখাও যে, $(3, 90^\circ)$ ও $(3, 30^\circ)$ বিন্দু দুইটি মূলবিন্দুর সাথে একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : $(3, 90^\circ)$ ও $(3, 30^\circ)$ এর কার্তেসীয় স্থানাংক যথাক্রমে $(3 \cos 90^\circ, 3 \sin 90^\circ) = (0, 3)$
 $\text{ও } (3 \cos 30^\circ, 3 \sin 30^\circ) = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$.

ধরি, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি A(0,1) ও B($\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}$) এবং
 মূলবিন্দু O(0,0).

$$OA = \sqrt{0+3^2} = 3,$$

$$OB = \sqrt{(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{27+9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(0-\frac{3\sqrt{3}}{2})^2 + (3-\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{36}{4}} = 3 \end{aligned}$$

OA, OB, AB এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি
 অপেক্ষা বহুল এবং $OA = OB = AB = 3$.

∴ প্রদত্ত বিন্দু দুইটি মূলবিন্দুর সাথে একটি সমবাহু
 ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

$$\begin{aligned} \text{এখন, } \text{সমবাহু ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল} &= \frac{\sqrt{3}}{4} (3)^2 \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ বর্গ একক} \end{aligned}$$

- 4(b) দেখাও যে, C(-2, -1) এবং D(5, -4)
 বিন্দু দুইটি A(-3, 1) এবং B(1, -1) বিন্দুয়ের
 সংযোগ রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত। AB রেখার কোন
 পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত?

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } \delta_{ABC} &= (-3-1)(-1+1)-(1+1)(1+2) \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{ABD} &= (-3-1)(-1+4)-(1+1)(1-5) \\ &= -12+8=-4 \end{aligned}$$

এখন, $\delta_{ABC} \times \delta_{ABD} = -6 \times -4 > 0$ বলে C এবং D বিন্দুয় AB এর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

দ্বিতীয় অংশ : O(0, 0) মূলবিন্দু হলে,

$$\begin{aligned}\delta_{AB0} &= (-3 - 1)(-1 - 0) - (1 + 1)(1 - 0) \\ &= 4 - 2 = 2\end{aligned}$$

$\delta_{AB0} \times \delta_{ABC} = -6 \times 2 < 0$ বলে AB রেখার যে পার্শ্বে C ও D অবস্থিত তার বিপরীত পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত।

৫. $(-2, 3), (-3, -4), (5, -1)$ ও $(2, 2)$ বিন্দু চারটি ক্রমান্বয়ে নিয়ে যে চতুর্ভুজ গঠিত হয় তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত বিন্দু চারটি ক্রমান্বয়ে নিয়ে যে চতুর্ভুজ গঠিত হয় তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} |8 + 3 + 10 + 6 - (-9 - 20 - 2 - 4)| \\ &= \frac{1}{2} |27 + 35| = 31 \text{ বর্গ একক } (\text{Ans.})\end{aligned}$$

৬(a) t এর মান কত হলে $(2t + 1, t + 2), (2 - t, 2 - 5t)$ এবং $(5t, 7t)$ বিন্দুগুলি ধনাত্মক ক্রমে অবস্থান করে একটি ত্রিভুজ গঠন করবে ?

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } &\text{প্রদত্ত বিন্দুগুলির নিকায়ক } = (2t + 1 - 2 + t) \\ &(2 - 5t - 7t) - (t + 2 - 2 + 5t)(2 - t - 5t) \\ &= (3t - 1)(2 - 12t) + 6t(2 - 6t) \\ &= (3t - 1)(2 - 12t + 12t) = 2(3t - 1)\end{aligned}$$

প্রদত্ত বিন্দুগুলি ধনাত্মক ক্রমে অবস্থান করে একটি ত্রিভুজ গঠন করলে, $2(3t - 1) > 0 \Rightarrow t > \frac{1}{3}$

৬(b) দেখাও যে, $(t, 3t - 2), (1 - 2t, 2 - 3t)$ এবং $(-t, -t)$ বিন্দুগুলি ধনাত্মক ক্রমে থাকবে, যদি $t > 1$ হয়।

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } &\text{প্রদত্ত বিন্দুগুলির নিকায়ক } = (t - 1 + 2t) \\ &(2 - 3t + t) - (3t - 2 - 2 + 3t)(1 - 2t + t) \\ &= (3t - 1)(2 - 2t) - (6t - 4)(1 - t) \\ &= (1 - t)(6t - 2 - 6t + 4) = 2(1 - t)\end{aligned}$$

প্রদত্ত বিন্দুগুলি ধনাত্মক ক্রমে অবস্থান করে একটি ত্রিভুজ গঠন করলে, $2(1 - t) < 0$

$t > 1$ (Showed)

৭. t পরিবর্তনশীল হলে দেখাও যে, $P(t + 2, 3t)$ বিন্দুর সম্বরণপথের সমীকরণ $3x - y = 6$.
প্রমাণ : ধরি, P বিন্দুর কার্ডেসীয় স্থানাংক (x, y) .

$$t + 2 = x \Rightarrow t = x - 2 \text{ এবং}$$

$$3t = y \Rightarrow 3(x - 2) = y \quad [\because t = x - 2]$$

$$3x - y = 6, \text{ যা নির্ণেয় সম্বরণপথের সমীকরণ।}$$

৮. একটি ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলি A(x, y), B(1, 3) ও C(3, 1) হলে এবং $x + y = 1$ হলে ত্রিভুজটির ত্রেফল নির্ণয় কর। [KUET 07-08]

সমাধান : প্রদত্ত বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ত্রেফল

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} |(x - 1)(3 - 1) - (y - 3)(1 - 3)| \\ &= \frac{1}{2} |2x - 2 + 2y - 6| = \frac{1}{2} |2x + 2y - 8| \\ &= |x + y - 4| = |1 - 4| = 3 \text{ বর্গ একক।}\end{aligned}$$

www.boighar.com

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

১. কোন বিন্দুর কার্ডেসীয় স্থানাংক $(-1, \sqrt{3})$ হলে বিন্দুটির পোলার স্থানাংক – [JH, IU 07-08; CU 05-06; KU 03-04]

$$\begin{aligned}Sol'': &r = \sqrt{1+3} = 2, \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{-1} \\ &= 180^\circ - \tan^{-1} \sqrt{3} = 180^\circ - 30^\circ \therefore (2, 120^\circ)\end{aligned}$$

২. (1, 4) এবং (9, -12) বিন্দুগুলির সংযোগকারী রেখাখণ্ড অন্তঃস্পতীয়ে যে বিন্দুতে $5 : 3$ অনুপাতে বিভক্ত হয় তার স্থানাংক – [DU, Jt.U 06-07, RU 07-08, 06-07; KUET 05-06]

$$Sol'': \text{স্থানাংক } = \left(\frac{3+45}{8}, \frac{12-60}{8} \right) = (6, -6)$$

৩. (2, -4), (-3, 6) বিন্দুগুলির সংযোগ রেখাখণ্ডকে y-অক্ষের যে অনুপাতে বিভক্ত করে – [RU 07-08]

$$Sol'': \text{অনুপাত } = \frac{-4 - 0}{0 - 6} = \frac{2}{3}$$

৪. ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুর স্থানাংক (2, 2), (3, 4) ও (5, 6) হলে উক্ত ত্রিভুজটির ভরক্ষেত্র – [RU 07-08]

$$Sol'': G = \left(\frac{2+3+5}{3}, \frac{2+4+6}{3} \right) = \left(\frac{10}{3}, 4 \right)$$

৫. (x,y) , $(2,3)$ এবং $(5,1)$ একই সরলরেখায় অবস্থিত হলে— [DU 05-06]

$$Sol^n. (x-2)(3-1) - (y-3)(2-5) = 0 \\ \Rightarrow 2x - 4 + 3y - 9 = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 13 = 0$$

৬. $(2, 2-2x), (1,2)$ এবং $(2,b-2x)$ বিন্দুগুলো সমরেখ হলে, এর মান— [DU 06-07]

$$Sol^n. : (2-1)(2-b+2x) - (2-2x-2)(1-2) = 0 \\ \Rightarrow 2-b+2x-2x=0 \Rightarrow b=2$$

৭. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু সমূহ $(-1, -2)$, $(2,5)$, $(3,10)$ হলে, তার ক্ষেত্রফল— [DU 03-04]

$$Sol^n. : \frac{1}{2} |(-3)(-5) - (-7)(-1)| = \frac{1}{2}(8) = 4$$

৮. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু সমূহ $(-4, 3)$, $(-1, -2)$, $(3, -2)$ হলে, তার ক্ষেত্রফল— [Jt.U 08-09]

$$Sol^n. : \frac{1}{2} |(-3).0 - 5(-4)| = \frac{1}{2}.20 = 10$$

৯. ABCD সামান্তরিকের A, B, C বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1,2)$, $(3,4)$, $(1,0)$ হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল— [RU07-08]

$$Sol^n. : \text{সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল} = 2. \frac{1}{2} | \{(-2).4 - (-2).2 \} = |-8 + 4| = 4 \text{ বর্গ একক।}$$

১০. A(2,4), B(2,8) এবং C বিন্দুয় সমবান্ধ ত্রিভুজ গঠন কর। AB এর যে পার্শ্বে মূলবিন্দু, C তার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হলে C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[RU 06-07]

Sol^n. : দুইটি শীর্ষের ভুজ সমান বলে C এর কোটি $= \frac{4+8}{2} = 6$ এবং ভুজ $= 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} |4-8| = 2 \pm 2\sqrt{3}$ আবার, $2 > 0$ এবং বিন্দুটি মূলবিন্দুর বিপরীত পার্শ্বে বিধায় C এর স্থানাঙ্ক $(2 + \sqrt{3}, 6)$.

১১. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমীকরণ $2x + y = 12$, $x - 2y = 1$ এবং $4x - 3y = 4$. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [RU 05-06; KU 03-04]

Sol^n. : ক্যালকুলেটরের সাহায্যে শীর্ষত্রয় $(5,2), (1,0), (4,4)$. $\therefore \Delta = \frac{1}{2} | 4.(-4) - 2.(-3) | = 5$ বর্গ একক।

MODE

 $2 = 1 = x = 5 =$
 $y = 2$

১২. a এর কোন মানের জন্য $(a^2, 2), (a, 1)$ এবং $(0,0)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে? [BUET 05-06]

$$Sol^n. : (a^2 - a)(1 - 0) - (2 - 1)(a - 0) = 0 \\ \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 0, 2$$

এক নজরে প্রযোজনীয় সূত্রাবলী

(a) ঢাল (m) : 1. একটি সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে তার ঢাল, $m = \tan \theta$

2. একটি সরলরেখা (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী হলে তার ঢাল, $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

3. একটি সরলরেখা মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে তার ঢাল, $m = \frac{y_1}{x_1}$.

(b) একটি রেখার সমীকরণ :

1. y -অক্ষের, $x = 0$. 2. x -অক্ষের, $y = 0$

3. y -অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ x -অক্ষের উপর অস্বীকৃত রেখার সমীকরণ, $x = a$.

4. x -অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ y -অক্ষের উপর অস্বীকৃত রেখার সমীকরণ, $y = b$.

5. m ঢাল বিশিষ্ট এবং মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $y = mx$.

6. একটি সরলরেখার ঢাল m এবং y -অক্ষের ছেদক অংশ c হলে তার সমীকরণ হবে $y = mx + c$

7. একটি রেখার ঢাল m এবং রেখাটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে, রেখাটির সমীকরণ,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

8. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$

$$\Rightarrow (x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2) = 0.$$

$$\Rightarrow (y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y = (y_1 - y_2)x_1 - (x_1 - x_2)y_1$$

9. x -অক্ষ এবং y -অক্ষ হতে যথাক্রমে a এবং b অংশ ছেদকারী রেখার সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

10. মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$$y = \frac{y_1}{x_1}x \Rightarrow xy_1 - yx_1 = 0$$

11. মূলবিন্দু হতে কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং দলিলটি x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের

সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে, রেখাটির সমীকরণ হবে $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$.

x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে

এমন সরলরেখার সমীকরণ $\frac{x - x_1}{\cos \theta} = \frac{y - y_1}{\sin \theta} = r$,
যেখানে (x, y) বিন্দু হতে (x_1, y_1) বিন্দুর দূরত্ব r .

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র :

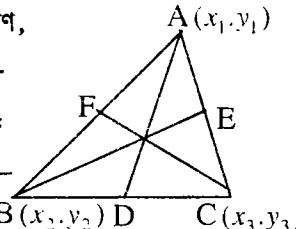
1. AD মধ্যমার সমীকরণ,

$$(2y_1 - y_2 - y_3)x -$$

$$(2x_1 - x_2 - x_3)y =$$

$$(2y_1 - y_2 - y_3)x_1 -$$

$$(2x_1 - x_2 - x_3)y_1$$



2. $ax + by + c = 0$ দ্বারা x -অক্ষের ছেদাংশ $= -c/a$, y -অক্ষের ছেদাংশ $= -c/b$; অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ $= \sqrt{(c/a)^2 + (c/b)^2}$;

অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{c^2}{2|ab|}$.

3. একটি রেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশ (α, β) বিন্দুতে সমদিখন্ডিত হলে তার সমীকরণ,

$$\frac{x}{2\alpha} + \frac{y}{2\beta} = 1$$

4. মূলবিন্দু হতে কোন রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে

তার সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, যেখানে $\tan \theta = \frac{a}{b}$

$$5. a_1x + b_1y + c_1 = 0 \dots (1),$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \dots (2) \text{ এবং }$$

$a_3x + b_3y + c_3 = 0 \dots (3)$ রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত
ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল =

$$\frac{\{c_1(a_2b_3 - a_3b_2) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)\}^2}{2|(a_2b_3 - a_3b_2)(a_1b_3 - a_3b_1)(a_1b_2 - a_2b_1)|}$$

6. (1) ও (2) রেখার ছেদবিন্দুগামী এবং

(3) এর সমান্তরাল ও সম্পর্ক এরূপ রেখার সমীকরণ

$$\text{যথাক্রমে } \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_2b_3 - a_3b_2}$$

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = \frac{a_1a_3 + b_1b_3}{a_2a_3 + b_2b_3}$$

প্রশ্নমালা – III E

1(i) (a) x অরে ধনাত্মক দিকের সাথে 30^0 কোণ
উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান: নির্ণেয় ঢাল} = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(b) $(3, -4)$ ও $(4, -5)$ বিন্দুগামী সরলরেখার
ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় দিয়ে অতিক্রমকারী সরললেখার

$$\text{ঢাল} = \frac{-4 - (-5)}{3 - 4} = \frac{1}{-1} = -1$$

(c) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা
 x -অরে সমান্তরাল এবং নিচে 4 একক দূরে
অবস্থিত

সমাধান: x -অরে সমান্তরাল এবং তার নিচে 4 একক
দূরে অবস্থিত এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $y = -4$

(d) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা
 y -অরে সমান্তরাল এবং তার ডানে 5 একক দূরে
অবস্থিত।

সমাধান: y -অরে সমান্তরাল এবং তার ডানে 5 একক
দূরে অবস্থিত এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $x = 5$

(e) x –অরে সমান্তরাল $(3, -4)$ বিন্দুগামী
সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, x –অরে সমান্তরাল সরলরেখার
সমীকরণ $y = k$ যেখানে k একটি প্রকৃতক

$y = k$ রেখাটি $(3, -4)$ বিন্দুগামী।

$$-4 = k \Rightarrow k = -4.$$

k এর মান বসিয়ে পাই, $y = -4$ (Ans.)

1(ii) নিম্নের দুইটি বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর :

(a) (a, b) এবং $(-a, -b)$

(b) (a, b) এবং $(a+b, a-b)$

সমাধান : (a) (a, b) এবং $(-a, -b)$ বিন্দুগামী

রেখার সমীকরণ, $\frac{x-a}{a+a} = \frac{y-b}{b+b} \Rightarrow \frac{x-a}{2a} = \frac{y-b}{2b}$

$$\Rightarrow bx - ab = ay - ab \Rightarrow bx - ay = 0$$

(b) (a, b) এবং $(a+b, a-b)$ বিন্দুগামী
রেখার সমীকরণ, $(b-a+b)x - (a-a-b)y$

$$= (b-a+b).a - (a-a-b)b$$

$$[(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y =$$

$$(y_1 - y_2)x_1 - (x_1 - x_2)y_1 \text{ সুত্রের সাহায্যে}]$$

$$\Rightarrow (2b-a)x + by = 2ab - a^2 + b^2$$

$$(2b-a)x + by + a^2 - 2ab - b^2 = 0$$

2. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x -
অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\sin^{-1}(5/13)$ কোণ
উৎপন্ন করে এবং y -অক্ষের ধনাত্মক দিকের ছেদাংশ 5
একক।

সমাধান: ধরি, $\theta = \sin^{-1}(5/13) \Rightarrow \sin \theta = \frac{5}{13}$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{5/13}{\sqrt{1 - 25/169}} = \frac{5}{13} \times \frac{13}{12} = \frac{5}{12}$$

নির্ণেয় রেখার ঢাল, $m = \frac{5}{12}$ এবং $-$ -অক্ষের

ছেদাংশ, $c = 5$ একক

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $y = mx + c$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{12}x + 5 \Rightarrow 12y = 5x + 60. \quad (\text{Ans.})$$

3. (a) A(1, 1), B(3, 4) এবং C(5, -2)
বিন্দু তিনটি ABC ত্রিভুজের শীর্ষকিন্তু | AB ও AC
এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[কু.'০৬; চা.'১৮; জা.'১১; কু.'১৪; মা.বো.'০৭; ঘ.'০৯]

সমাধান : ধরি, AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E। তাহলে, $D \equiv \left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = (2, \frac{5}{2})$ এবং $E \equiv \left(\frac{1+5}{2}, \frac{1-2}{2}\right) = (3, -\frac{1}{2})$.

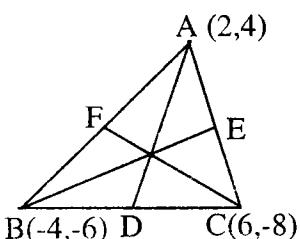
$$\text{DE রেখার সমীকরণ, } \frac{x-2}{2-3} = \frac{y-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{2y-5}{6} \Rightarrow 6x-12 = -2y+5$$

$$6x+2y-17=0 \text{ (Ans.)}$$

3(b) $(2, 4), (-4, -6)$ এবং $(6, -8)$ বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। ত্রিভুজটির মধ্যমাণ্ডলের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৭]

সমাধান :



ধরি, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু $A(2, 4)$, $B(-4, -6)$ ও $C(6, -8)$ এবং BC , CA , AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D , E , F .

$$D \equiv \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{-6-8}{2}\right) = (1, -7)$$

$$E \equiv \left(\frac{6+2}{2}, \frac{-8+4}{2}\right) = (4, -2)$$

$$F \equiv \left(\frac{2-4}{2}, \frac{4-6}{2}\right) = (-1, -1)$$

$$AD \text{ মধ্যমার সমীকরণ, } \frac{y-2}{2-1} = \frac{y-4}{4+7}$$

$$11x-22 = -4 \Rightarrow 11x-y-18=0$$

$$BE \text{ মধ্যমার সমীকরণ } \frac{y+4}{4-4} = \frac{y+6}{-6+2}$$

$$4x-16 = 8y-48$$

$$4x+4=8y+40 \Rightarrow x-2y-8=0 \Rightarrow$$

$$CF \text{ মধ্যমার সমীকরণ, } \frac{y-6}{6+1} = \frac{y+8}{8-1}$$

$$\Rightarrow -x+6=y+8 \Rightarrow x+y+2=0$$

$$[\text{MCQ এর জন্য, } AD \text{ মধ্যমার সমীকরণ, } (8+6+8)x-(4+4-6)y=22 \times 2-2 \times 4=36]$$

$$\Rightarrow 11x-y-18=0]$$

3(c) $A(h, k)$ বিন্দুটি $6x-y=1$ রেখার উপর এবং $B(k, h)$ বিন্দুটি $2x-5y=5$ রেখার উপর অবস্থিত। AB সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি.'০৯; ঢা., চ.'১২, '১৮; ব.'১০; রা., য.'১১; সি., য.'১৮]

সমাধান : $A(h, k)$ বিন্দুটি $6x-y=1$ রেখার উপর অবস্থিত। $6h-k=1 \quad (1)$

আবার, $B(k, h)$ বিন্দুটি $2x-5y=5$ রেখার উপর অবস্থিত। $2k-5h=5 \quad (2)$

$$(1) \times 2 + (2) \Rightarrow 12h-5h=7 \Rightarrow h=1$$

$$(1) \text{ হতে } 6.1-k=1 \Rightarrow k=5$$

$$A \equiv (1, 5) \text{ এবং } B \equiv (5, 1)$$

$$AB \text{ রেখার সমীকরণ, } \frac{x-1}{1-5} = \frac{y-5}{5-1}$$

$$\Rightarrow 4x-4=-4y+20 \Rightarrow 4x+4y=24$$

$$x+y-6=0 \text{ (Ans.)}$$

3(d) যদি $(a, b), (a', b')$, $(a-a', b-b')$ বিন্দুত্বয় সমরেখ হয়, তবে দেখাও যে, তাদের সংযোগ রেখাটি মূলকিন্তু দিয়ে যায় এবং $ab'=a'b$. [কৃ.'০৯]

প্রমাণ : ধরি, প্রদত্ত বিন্দুত্বয় $A(a, b)$, $B(a', b')$, $C(a-a', b-b')$. বিন্দু তিনটি সমরেখ বলে,

AB রেখার ঢাল = AC রেখার ঢাল

$$\Rightarrow \frac{b-b'}{a-a'} = \frac{b-b+b'}{a-a+a'} \Rightarrow \frac{b-b'}{a-a'} = \frac{b'}{a'}$$

$$\Rightarrow a'b-a'b'=ab'-a'b' \quad a'b'=ab'$$

এখন, $A(a, b)$, $B(a', b')$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$$\frac{x-a}{a-a'} = \frac{y-b}{b-b'} \Rightarrow (b-b')x-ab+ab' \\ = (a-a')y-ab+a'b'$$

$$(b-b')(a-a')y=0 \quad [\because a'b'=ab']$$

যেহেতু সমাকরণটি প্রদত্ত মুক্ত, সূতরাং বিন্দুত্বয়ের সংযোগ রেখাটি মূলকিন্তু দিয়ে যায়।

$$3(i) (ii) x-4=0, y-5=0 \quad x=4, y=5$$

এবং $y+2=0$ রেখাগুলো ধারা

কর্ণদয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢ.'১২; চ.'০৫; কু.'০৯
; ব.'১৮]

সমাধান :

ধরি, $AB \equiv x = 4$

$$DC \equiv x = -3 \quad X' \leftarrow O \rightarrow X$$

$$BC \equiv y = 5 \text{ এবং}$$

$$DA \equiv y = -2 \text{ রেখা}$$

চারটি $ABCD$ চতুর্ভুজের বাহু।

AB ও AD বাহুদয় $A(4, -2)$ কিন্তুতে, AB ও BC বাহুদয় $B(4, 5)$ কিন্তুতে, BC ও CD বাহুদয় $C(-3, 5)$ কিন্তুতে, CD ও DA বাহুদয় $D(-3, -2)$ কিন্তুতে হেদ করে।

$$\cdot AC \text{ কর্ণের সমীকরণ}, \frac{x-4}{4+3} = \frac{y+2}{-2-5}$$

$$\Rightarrow -x + 4 = y + 2 \Rightarrow x + y - 2 = 0$$

$$BD \text{ কর্ণের সমীকরণ}, \frac{x-4}{4+3} = \frac{y-5}{5+2}$$

$$\Rightarrow x - 4 = y - 5 \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

কর্ণদয়ের সমীকরণ, $x - y + 1 = 0, x + y - 2 = 0$

3(i) (b) $x = 4, x = 8, y = 6$ এবং $y = 10$

রেখাগুলো দ্বারা উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের কর্ণদয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

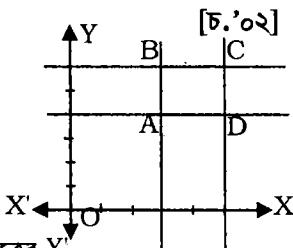
সমাধান ধরি,

$$AB \equiv x = 4$$

$$D \equiv x = 8$$

$$BC \equiv y = 10 \text{ এবং}$$

$$AD \equiv y = 6 \text{ রেখা}$$



চারটি $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের Y

বাহু।

AB ও AD বাহুদয় $A(4, 6)$ কিন্তুতে, AB ও BC বাহুদয় $B(4, 10)$ কিন্তুতে, BC ও CD বাহুদয় $C(8, 10)$ কিন্তুতে, CD ও DA বাহুদয় $D(8, 6)$ কিন্তুতে হেদ করে।

$$AC \text{ কর্ণের সমীকরণ} \frac{x-4}{4-8} = \frac{y-6}{6-10}$$

$$\Rightarrow x - 4 = y - 6 \Rightarrow x - y + 2 = 0$$

$$BD \text{ কর্ণের সমীকরণ}, \frac{x-4}{4-8} = \frac{y-10}{10-6}$$

$$\Rightarrow x - 4 = -y + 10 \Rightarrow x + y - 14 = 0$$

কর্ণদয়ের সমীকরণ, $x - y + 2 = 0, x + y - 14 = 0$

4. (a) $3x + \sqrt{3}y + 2 = 0$ এবং $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৫]

সমাধান: দেওয়া আছে, $3x + \sqrt{3}y + 2 = 0$ এবং $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করে।

$$\frac{\cos\alpha}{3} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{-p}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-3p}{2} \text{ এবং } \sin\alpha = \frac{-\sqrt{3}p}{2}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{-\sqrt{3}p}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3p}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{3p^2}{4} + \frac{9p^2}{4} \Rightarrow 12p^2 = 4$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{1}{3} \quad p = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{Ans.})$$

(b) $3x - 4y = 12$ এবং $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এবং α এর মান নির্ণয় কর। [প.ভ.প.'০৪]

সমাধান: দেওয়া আছে, $3x - 4y = 12$ এবং $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করে।

$$\frac{\cos\alpha}{3} = \frac{\sin\alpha}{-4} = \frac{p}{12}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{3p}{12} = \frac{p}{4} \text{ এবং } \sin\alpha = \frac{-p}{3}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{p}{4}\right)^2 + \left(\frac{-p}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{p^2}{16} + \frac{p^2}{9} \Rightarrow \frac{p^2(9+16)}{16 \cdot 9} = 1$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{144}{25} \quad p = \pm \frac{12}{5} \quad (\text{Ans.})$$

$$\text{আবার, } \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-p/3}{p/4} = -\frac{4}{3}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(-\frac{4}{3}) \quad (\text{Ans.})$$

৫. (a) একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় হতে সমান সমান অংশ কর্তন করে এবং (α, β) কিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০৮; দি.'১১]

সমাধান: ধরি, অক্ষদ্বয় হতে সমান সমান অংশ কর্তন করে এবং α, β রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow x \pm y = a \Rightarrow x + y = a \text{ অথবা, } x - y = a$$

রেখাটি (α, β) কিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে,

$$a = \alpha + \beta \text{ অথবা, } a = \alpha - \beta$$

$$\text{নির্ণয় রেখার সমীকরণ, } x + y = \alpha + \beta$$

$$\text{অথবা, } x - y = \alpha - \beta$$

৫(b) একটি সরলরেখা $(2, 6)$ কিন্দু দিয়ে যায় এবং যার দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিত অংশের সমষ্টি 15 তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৮,'০৮]

সমাধান: ধরি, $(2, 6)$ কিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$$y - 6 = m(x - 2)$$

$$\Rightarrow mx - y = 2m - 6 \quad \dots (1)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(2m-6)/m} + \frac{y}{-(2m-6)} = 1$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{2m-6}{m} + \{-(2m-6)\} = 15$$

$$\Rightarrow 2m - 6 - 2m^2 + 6m = 15m$$

$$\Rightarrow 2m^2 + 7m + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 + 4m + 3m + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 2m(m+2) + 3(m+2) = 0$$

$$\Rightarrow (m+2)(2m+3) = 0$$

$$m = -2 \text{ অথবা, } m = -\frac{3}{2}$$

(1) এ m এর মান বসিয়ে পাই,

$$-2x - y = 2(-2) - 6 \Rightarrow 2x + y = 10$$

$$\text{অথবা, } -\frac{3}{2}x - y = 2\left(-\frac{3}{2}\right) - 6$$

$$\Rightarrow 3x + 2y = 6 + 12 \Rightarrow 3x + 2y = 18$$

$$\text{উভয় : } 2x + y = 10 \text{ বা, } 3x + 2y = 18$$

৫. (c) একটি সরলরেখা $(1, 4)$ কিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয়ের সাথে প্রথম চতুর্ভুগে 8 কর্ণ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৬; চ.'১১; কু.'১২]

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \dots (1)$

(1) রেখাটি $(1, 4)$ কিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{4}{b} &= 1 \Rightarrow \frac{1}{a} = 1 - \frac{4}{b} = \frac{b-4}{b} \\ \Rightarrow a &= \frac{b}{b-4} \end{aligned} \quad (2)$$

(1) রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}ab$.

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{1}{2}ab = 8 \Rightarrow \frac{b}{b-4} \cdot b = 16$$

$$\Rightarrow b^2 = 16b - 64 \Rightarrow b^2 - 16b + 64 = 0$$

$$\Rightarrow (b-8)^2 = 0 \Rightarrow b = 8$$

$$(2) \text{ হতে পাই, } a = \frac{8}{8-4} = 2$$

$$\text{রেখাটির সমীকরণ } \frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1 \Rightarrow 4x + y = 8$$

৫(d) একটি সরলরেখা $(3, 7)$ কিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় হতে বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ

করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০১]

সমাধান: ধরি, অক্ষদ্বয় হতে বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে এবং $\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1 \Rightarrow x - y = a$ (1)

(1) রেখাটির $(3, 7)$ কিন্দু দিয়ে যায়।

$$3 - 7 = a \Rightarrow a = -4$$

$$\text{রেখাটির সমীকরণ } x - y = -4 \Rightarrow x - y + 4 = 0$$

৬. (a) $x + 2y + 7 = 0$ রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উপরি উক্ত খণ্ডিতাংশ কোন বর্ণের বাহু হলে, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢ.'০৭; চ.'০৮; মা.'১০; ব.'০৫,'১২; ঘ.'১৩; দি.'১০; সি.'১৪; মা.'১২]

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ, $x + 2y + 7 = 0$

$$\Rightarrow x + 2y = -7 \Rightarrow \frac{x}{-7} + \frac{y}{-7/2} = 1$$

রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (ধরি) $A(-7, 0)$ এবং $B(0, -7/2)$ কিন্তুতে ছেদ করে।

$$\begin{aligned} \text{AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাংক} &= \left(\frac{-7}{2}, \frac{-7/2}{2} \right) \\ &= \left(\frac{-7}{2}, \frac{-7}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{এবং } AB^2 = (-7)^2 + (-7/2)^2 = 49 + \frac{49}{4} = 61 \frac{1}{4}$$

রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খতিতাংশ AB কোন বর্গের বাহু হলে, তার ক্ষেত্রফল = $61 \frac{1}{4}$ বর্গ একক।

6(b) যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খতিত-অংশ (6, 2) বিন্দুতে 2 : 3 অনুপাতে অস্তর্ভিত্ত হয় তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৮, '০৭; রা.'০৮; দি.'১১]

$$\text{সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \dots (1)$$

(1) রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (ধরি) A(a, 0) এবং B(0, b) বিন্দুতে ছেদ করে।

AB রেখাংশ (6, 2) বিন্দুতে 2 : 3 অনুপাতে অন্ত বিভক্ত হয়।

$$\frac{2.0 + 3a}{2+3} = 6 \Rightarrow 3a = 30 \Rightarrow a = 10 \text{ এবং}$$

$$\frac{2b + 3.0}{2+3} = 2 \Rightarrow 2b = 10 \Rightarrow b = 5$$

$$\text{রেখাটির সমীকরণ } \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow x + 2y = 10$$

6(c) যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খতিত অংশ (-4, 3) বিন্দুতে 5 : 3 অনুপাতে অস্তর্ভিত্ত হয় তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ক.'০৬; সি.'১১; ব.'১৩]

$$\text{সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \dots (1)$$

(1) রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (ধরি) A(a, 0) এবং B(0, b) বিন্দুতে ছেদ করে।

AB রেখাংশ (-4, 3) বিন্দুতে 5 : 3 অনুপাতে অন্ত বিভক্ত হয়।

$$\frac{5.0 + 3a}{5+3} = -4 \Rightarrow 3a = -32 \Rightarrow a = -\frac{32}{3}$$

$$\text{এবং } \frac{5b + 3.0}{5+3} = 3 \Rightarrow 5b = 24 \Rightarrow b = \frac{24}{5}$$

$$\text{নির্ণেয় রেখার সমীকরণ } \frac{x}{-32/3} + \frac{y}{24/5} = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{3x}{-32} + \frac{5y}{24} &= 1 \Rightarrow \frac{-9x + 20y}{96} = 1 \\ -9x + 20y + 96 &= 0 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

6(d) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয়ের সাথে 16 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে একই মূলবিন্দু থেকে যার উপর অঙ্কিত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। [সি.'০৫; য.'১০]

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ

$$\begin{aligned} x \cos 45^\circ + y \sin 45^\circ &= p \\ \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} &= p \\ \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}p} + \frac{y}{\sqrt{2}p} &= 1 \dots (1) \end{aligned}$$

(1) রেখাটির x-অক্ষকে A($\sqrt{2}p, 0$) এবং y-অক্ষকে B(0, $\sqrt{2}p$) বিন্দুতে ছেদ করে।

$$\text{প্রশ্নমতে, } \Delta OAB = \frac{1}{2}(OA \times OB) = 16$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{2}p \times \sqrt{2}p) = 16$$

$$\Rightarrow p^2 = 16 \Rightarrow p = \pm 4$$

রেখাটির সমীকরণ, $x + y + 4\sqrt{2} = 0$

অথবা, $x + y - 4\sqrt{2} = 0$

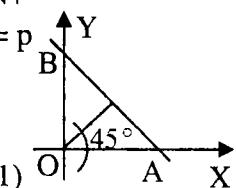
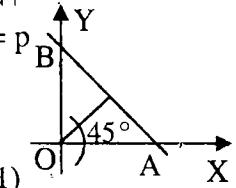
www.boighar.com

$$\left[\frac{a}{b} = \tan 45^\circ \Rightarrow a = b \therefore a^2 = 32 \right]$$

6(e) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয়ের সাথে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে একই মূলবিন্দু থেকে যার উপর অঙ্কিত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। [চ.'০৬, '১৩; দি.'১৩; রা.'কু.'১৪; য.'১০]

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ

$$\begin{aligned} x \cos 45^\circ + y \sin 45^\circ &= p \\ \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} &= p \\ \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}p} + \frac{y}{\sqrt{2}p} &= 1 \dots (1) \end{aligned}$$



(1) রেখাটির x -অক্ষকে $A(\sqrt{2}p, 0)$ এবং y -অক্ষকে $B(0, \sqrt{2}p)$ বিদ্যুতে ছেদ করে।

$$\text{প্রশ্নমতে, } \Delta OAB = \frac{1}{2}(OA \times OB) = 8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{2}p \times \sqrt{2}p) = 8$$

$$\Rightarrow p^2 = 8 \Rightarrow p = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\text{রেখাটির সমীকরণ, } x + y + 4 = 0$$

$$\text{অথবা, } x + y - 4 = 0$$

7. (a) P ও Q বিদ্যুত x -অক্ষের উপর এবং R ও S বিদ্যুত y -অক্ষের উপর অবস্থিত। PR ও QS এর সমীকরণ যথাক্রমে $4x + 3y + 6 = 0$ ও $x + 2y - 1 = 0$ হলে, দেখাও যে, $PQ = RS$. [ঢ. '০৮]

প্রমাণ : PR রেখার সমীকরণ, $4x + 3y + 6 = 0$

$$\Rightarrow 4x + 3y = -6 \Rightarrow \frac{x}{-3/2} + \frac{y}{-2} = 1 \text{ এবং}$$

QS রেখার সমীকরণ, $x + 2y - 1 = 0$

$$\Rightarrow x + 2y = 1 \Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{1/2} = 1$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } P \equiv (-3/2, 0), R \equiv (0, 2)$$

$$Q \equiv (1, 0), S \equiv (0, 1/2)$$

$$PQ = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} - 1\right)^2 + (0 - 0)^2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{এবং } RS = \sqrt{(0 - 0)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$PQ = \frac{5}{2} = RS \text{ (Showed)}$$

7.(b) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(-2, -5)$ বিদ্যুতে দিয়ে যায় এবং x ও y -অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিদ্যুতে ছেদ করে যেন $OA + 2.OB = 0$ হয়, যখন O মূলবিদ্যু। [ঢ. '০৬, '১৩; য. '০৬, '১২; চ. '০৬; সি. '০৭; ব. '০৮, '১০]

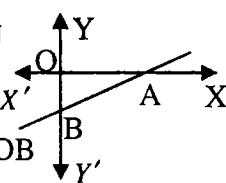
সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \dots \dots (1)$$

এখানে, $a = OA$ এবং $b = OB$

$$\text{প্রশ্নমতে, } OA + 2.OB = 0$$

$$\Rightarrow a + 2b = 0 \Rightarrow a = -2b$$



(1) রেখাটি $(-2, -5)$ বিদ্যুগামী।

$$\therefore \frac{-2}{a} + \frac{-5}{b} = 1 \Rightarrow \frac{-2}{-2b} + \frac{-5}{b} = 1 [\because a = -2b]$$

$$\Rightarrow \frac{1-5}{b} = 1 \Rightarrow b = -4 \text{ এবং } a = -2 \times -4 = 8$$

$$\text{নির্ণেয় রেখার সমীকরণ } \frac{x}{8} + \frac{y}{-4} = 1$$

$$\Rightarrow x - 2y = 8 \text{ (Ans.)}$$

(c) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা

(3, 2) বিদ্যু দিয়ে যায় এবং x ও y -অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিদ্যুতে ছেদ করে যেন $OA - OB = 2$ হয় যখন O মূলবিদ্যু। [ক. '০২; য. '০৮, '১২; ব. '০৫; রা., চ., দি. '১০]

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \dots \dots (1)$

এখানে, $a = OA$ এবং $b = OB$

$$\text{প্রশ্নমতে, } OA - OB = 2 \Rightarrow a - b = 2$$

$$\Rightarrow a = b + 2 \quad (2)$$

(1) রেখাটি $(3, 2)$ বিদ্যুগামী।

$$\frac{3}{a} + \frac{2}{b} = 1 \Rightarrow \frac{3}{b+2} + \frac{2}{b} = 1 [\because a = b+2]$$

$$\Rightarrow \frac{3b + 2b + 4}{(b+2)b} = 1 \Rightarrow b^2 + 2b = 5b + 4$$

$$\Rightarrow b^2 - 3b - 4 = 0 \Rightarrow (b-4)(b+1) = 0$$

$$b = 4 \text{ অথবা, } b = -1$$

$$(2) \Rightarrow a = 4 + 2 = 6, \text{ যখন } b = 4$$

$$\text{অথবা, } a = -1 + 2 = 1, \text{ যখন } b = -1$$

$$\text{রেখাটির সমীকরণ } \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow 2x + 3y = 12$$

$$\text{অথবা, } \frac{x}{1} + \frac{y}{-1} = 1 \Rightarrow x - y = 1$$

7(d) $x + ay = a$ রেখাটি x ও y -অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিদ্যুতে ছেদ করে যেন $OA = 3.OB$ হয়, যখন O মূলবিদ্যু। P এর স্থানাঙ্ক $(0, -9)$ হলে, AP এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত রেখার সমীকরণ, $x + ay = a$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{1} = 1 \quad (1)$$

(1) রেখাটি x ও y -অক্ষকে যথাক্রমে $A(a, 0)$ এবং $B(0, 1)$ বিন্দুতে ছেদ করে এবং $OA = a$ ও $OB = 1$.

$$\text{প্রস্তুতে}, OA = 3 \cdot OB \Rightarrow a = 3 \cdot 1 = 3$$

A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, 0)$

$$AP \text{ এর সমীকরণ } \frac{x-3}{3-0} = \frac{y-0}{0+9}$$

$$\Rightarrow 9x - 27 = 3y \therefore 3x - y = 9 \text{ (Ans.)}$$

7(e) $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ সরলরেখাটি x ও y -অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। α কে পরিবর্তনশীল ধরে দেখাও যে, AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানপথের সমীকরণ $p^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$.

[য. '০২; ব. '০২; সি. '০৩; কু. '০৭; ঢ. '১১]

সমাধান: প্রদত্ত রেখার সমীকরণ,

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$$

$$\Rightarrow \frac{x}{p/\cos \alpha} + \frac{y}{p/\sin \alpha} = 1 \quad \dots (1)$$

(1) রেখাটি x ও y -অক্ষকে যথাক্রমে $A(p/\cos \alpha, 0)$ এবং $B(0, p/\sin \alpha)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{p}{2\cos \alpha}, \frac{p}{2\sin \alpha})$

ধরি AB এর মধ্যবিন্দুর সেটের যেকোন একটি উপাদান (x, y) .

$$x = \frac{p}{2\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{p}{2x} \text{ এবং}$$

$$y = \frac{p}{2\sin \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{p}{2y}$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = (\frac{p}{2x})^2 + (\frac{p}{2y})^2$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{p^2}{4x^2} + \frac{p^2}{4y^2} \Rightarrow \frac{p^2(y^2 + x^2)}{4x^2y^2} = 1$$

$$p^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2 \text{ (Showed)}$$

8. (a) $x + 3y - 12 = 0$ রেখার অক্ষদ্রয়ের মধ্যবর্তী অভিভাবকের অভিভক্ত বিন্দুদ্রয়ের সাথে মূলবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '০৩, '০৭; ব. '০৭; য. '০৮; ঢা. '১০]

সমাধান: প্রদত্ত রেখা $x + 3y - 12 = 0$

$$\Rightarrow x + 3y = 12$$

$$\Rightarrow \frac{x}{12} + \frac{y}{4} = 1 \dots (1)$$

(1) রেখাটি x ও y -অক্ষকে যথাক্রমে (ধরি)

$A(12, 0)$ ও $B(0, 4)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, AB রেখাখণ্ডের সমত্বিক্ষেত্র বিন্দু P ও Q এবং O মূলবিন্দু।

$$P = \left(\frac{1 \times 0 + 2 \times 12}{1+2}, \frac{1 \times 4 + 2 \times 0}{1+2} \right) = \left(8, \frac{4}{3} \right)$$

$$Q = \left(\frac{2 \times 0 + 1 \times 12}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 0}{2+1} \right) = \left(4, \frac{8}{3} \right)$$

$$OP \text{ রেখার সমীকরণ}, y = \frac{4/3}{8} x$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{6}x \Rightarrow x = 6y \text{ এবং}$$

$$OQ \text{ রেখার সমীকরণ}, y = \frac{8/3}{4} x$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x \Rightarrow 2x = 3y$$

নির্ণেয় রেখাদ্রয়ের সমীকরণ, $x = 6y$ ও $2x = 3y$

8 (b) $5x + 4y - 20 = 0$ রেখাটি x ও y -অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

I. AB এর দৈর্ঘ্য ও OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যেখানে O মূলবিন্দু।

II. P ও Q বিন্দুয় AB রেখাকে সমান তিন ভাগে বিভক্ত করলে OP ও OQ এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ঢ. '০৫; সি. '০৯; ঢ. '১৩]

III. দেখাও যে, OAP , OPQ ও OQB ত্রিভুজ তিনটির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

সমাধান: I. প্রদত্ত রেখার সমীকরণ, $5x + 4y - 20 = 0$

$\Rightarrow 5x + 4y = 20 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$, যা x ও y -অক্ষে যথাক্রমে $A(4, 0)$ ও $B(0, 5)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$$AB = \sqrt{(4-0)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{16+25}$$

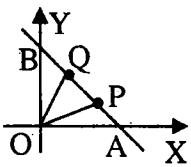
$$= \sqrt{41} \text{ একক।}$$

এবং OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$ বর্গ

একক।

II. P বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{1 \times 0 + 2 \times 4}{1+2}, \frac{1 \times 5 + 2 \times 0}{1+2} \right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3} \right)$$



$$Q \text{ বিন্দুর স্থানাঙ্ক } \left(\frac{2 \times 0 + 1 \times 4}{2+1}, \frac{2 \times 5 + 1 \times 0}{2+1} \right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3} \right)$$

$$OP \text{ রেখার সমীকরণ, } y = \frac{5/3}{8/3}x$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{8}x \Rightarrow 5x = 8y \text{ এবং}$$

$$OQ \text{ রেখার সমীকরণ, } y = \frac{10/3}{4/3}x$$

$$\Rightarrow y = \frac{10}{4}x \Rightarrow 5x = 2y$$

$$\text{নির্ণেয় রেখাদৰ্শের সমীকরণ, } 5x = 8y \text{ ও } 5x = 2y$$

III. x -অ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $\frac{5}{3}$ এবং y -অ হতে Q

বিন্দুর দূরত্ব $\frac{4}{3}$.

$$OAP \text{ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} (OA \times \frac{5}{3})$$

$$= \frac{1}{2} (4 \times \frac{5}{3}) = \frac{10}{3} \text{ বর্গ একক।}$$

$$OBQ \text{ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} (OB \times \frac{4}{3})$$

$$= \frac{1}{2} (5 \times \frac{4}{3}) = \frac{10}{3} \text{ বর্গ একক।}$$

$$OPQ \text{ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \left| \frac{8}{3} \times \frac{10}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{5}{3} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{80}{9} - \frac{20}{9} \right| = \frac{1}{2} \times \frac{60}{9} = \frac{10}{3} \text{ বর্গ}$$

একক।

OAP , OPQ ও OQB ত্রিভুজ তিনটির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

9. (a) $2y + x - 5 = 0$, $y + 2x - 7 = 0$ এবং $x - y + 1 = 0$ ক্ষেত্রখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য.'০৩]

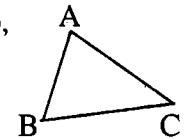
সমাধান: মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

$$AB \equiv x + 2y - 5 = 0 \cdots (1),$$

$$BC \equiv 2x + y - 7 = 0 \cdots (2),$$

$$CA \equiv x - y + 1 = 0 \cdots (3)$$

(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু,



$$A \equiv \left(\frac{2-5}{-1-2}, \frac{-5-1}{-2-1} \right) = (1, 2)$$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু,

$$B \equiv \left(\frac{-14+5}{1-4}, \frac{-10+7}{1-4} \right) = (3, 1)$$

(2) ও (3) এর ছেদবিন্দু,

$$C \equiv \left(\frac{1-7}{-2-1}, \frac{-7-2}{-2-1} \right) = (2, 3).$$

$$\delta_{ABC} = (1-3)(1-3) - (2-1)(3-2) \\ = 4-1 = 3$$

$$\therefore \Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} |\delta_{ABC}| = \frac{3}{2} \text{ বর্গ একক}$$

\therefore রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{3}{2}$ বর্গ একক।

$$[\Delta = \frac{1 \ 2 \ -5}{2 \ 1 \ -7} \left| \begin{array}{|ccc|} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right|] = \frac{9^2}{2 \times 27} = \frac{3}{2}]$$

9(b) দেখাও যে, $x = a$, $y = b$ এবং $y = mx$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2|m|}(b - ma)^2$ বর্গ একক। [য.'০৫; রা.'০৮; কু.'১২; ব.'১৩]

প্রমাণ ৪ ধরি, ABC

ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

$$AB \equiv x = a \dots (1),$$

$$BC \equiv y = b \dots (2),$$

$$AC \equiv y = mx \dots (3)$$

$$(1) \text{ ও } (3) \text{ এর ছেদবিন্দু }, A \equiv (a, ma)$$

$$(1) \text{ ও } (2) \text{ এর ছেদবিন্দু }, B \equiv (a, b)$$

$$(2) \text{ ও } (3) \text{ এর ছেদবিন্দু }, C \equiv \left(\frac{b}{m}, b \right)$$

$$\delta_{ABC} = (a - a)(b - b) - (ma - b)(a - \frac{b}{m})$$

$$= -(ma - b) \frac{ma - b}{m} = - \frac{(b - ma)^2}{m}$$

প্রদত্ত রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \left| -\frac{(b - ma)^2}{m} \right| \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2|m|} (b - ma)^2 \text{ বর্গ একক। Showed)$$

10. (a) t এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য P বিন্দুর স্থানাংক $(t+5, 2t-4)$ হলে, এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। সঞ্চারপথটি অক্ষদ্বয় হতে যে অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাংক (x, y)

$$t+5 = x \Rightarrow t = x - 5 \dots (1) \text{ এবং}$$

$$2t-4 = y \Rightarrow 2(x-5) - 4 = y \quad [(1) \text{ দ্বারা}]$$

$$2x - y = 14; \text{ যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।}$$

$$\text{২য় অংশ: } 2x - y = 14 \Rightarrow \frac{x}{7} + \frac{y}{-14} = 1$$

সঞ্চারপথটির x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ = 7 এবং y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ = -14.

(b) দেখাও যে, $(-3, 6)$ বিন্দু হতে $x - 2y - 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত যেকোন রেখাংশকে $x - 2y + 5 = 0$ রেখাটি সমন্বিত করে।

[সি.'০১; য.'০৫; ঢা.'০৯; চ.'১১; দি.'১২]

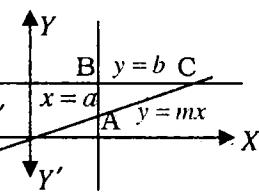
প্রমাণ : প্রদত্ত রেখাঘয়,

$$x - 2y - 5 = 0 \quad (1) \text{ ও}$$

$$x - 2y + 5 = 0 \dots (2)$$

এবং বিন্দুটি P(-3, 6)

(2) রেখার উপর Q(α, β) (1)



যেকোন একটি বিন্দু নেই। তাহলে, $\alpha - 2\beta - 5 = 0$
... (3)

এখন ইহা প্রমাণ করা যথেষ্ট যে, PQ এর মধ্যবিন্দু $(\frac{-3+\alpha}{2}, \frac{6+\beta}{2})$, $x - 2y + 5 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত। (3) হতে পাই, $y = b$.

(1) এর বামপক্ষ $= x - 2y + 5$

$$= \frac{-3+\alpha}{2} - 2 \frac{6+\beta}{2} + 5$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha - 3 - 12 - 2\beta + 10)$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha - 2\beta - 5) = \frac{1}{2} \times 0 = 0 \quad [(3) \text{ দ্বারা}]$$

PQ এর মধ্যবিন্দু $x - 2y + 5 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

10(c) মূলবিন্দু হতে কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 5 একক এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 120° কোণ উৎপন্ন করে ; রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৮]

সমাধান: নির্ণেয় রেখার সমীকরণ

$$x \cos 120^\circ + y \sin 120^\circ = 5$$

$$\Rightarrow x\left(-\frac{1}{2}\right) + y\frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \Rightarrow -x + \sqrt{3}y = 10$$

$$x - \sqrt{3}y + 10 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

11. (a) $(2, -1)$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $-\frac{3}{4}$. এ রেখার উপর $(2, -1)$ বিন্দু হতে 15

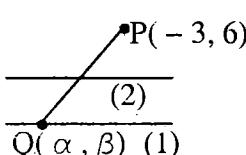
একক দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, রেখাটি x-অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

$$\tan \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ এবং } \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\text{অথবা, } \sin \alpha = -\frac{3}{5} \text{ এবং } \cos \alpha = \frac{4}{5}$$



(2, -1) কিন্তু হতে 15 একক দূরে অবস্থিত কিন্তুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, $\frac{x-2}{\cos \alpha} = \frac{y+1}{\sin \alpha} = 15$

$$x-2 = 15 \cos \alpha \Rightarrow x = 15 \cos \alpha + 2$$

$$\text{এবং } y+1 = 15 \sin \alpha \Rightarrow y = 15 \sin \alpha - 1$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ এবং } \cos \alpha = -\frac{4}{5} \text{ এর জন্য,}$$

$$x = 15 \times -\frac{4}{5} + 2 = -12 + 2 = -10 \text{ এবং}$$

$$y = 15 \times \frac{3}{5} - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$\sin \alpha = -\frac{3}{5} \text{ এবং } \cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ এর জন্য,}$$

$$x = 12 + 2 = 14 \text{ এবং } y = -9 - 1 = -10$$

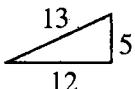
কিন্তু দুইটির স্থানাঙ্ক $(-10, 8)$ ও $(14, -10)$

11(b) $(-1, 1)$ কিন্তুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{5}{12}$. এ রেখার উপর $(-1, 1)$ কিন্তু হতে 26

একক দূরে অবস্থিত দুইটি কিন্তুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, রেখাটি x -অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

$$\tan \alpha = \frac{5}{12}$$



$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{13} \text{ এবং } \cos \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\text{অথবা, } \sin \alpha = -\frac{5}{13} \text{ এবং } \cos \alpha = -\frac{12}{13}$$

$(-1, 1)$ কিন্তু হতে 26 একক দূরে অবস্থিত

কিন্তুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, $\frac{x+1}{\cos \alpha} = \frac{y-1}{\sin \alpha} = 26$

$$x+1 = 26 \cos \alpha \Rightarrow x = 26 \cos \alpha - 1$$

$$\text{এবং } y-1 = 26 \sin \alpha \Rightarrow y = 26 \sin \alpha + 1$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{13} \text{ এবং } \cos \alpha = \frac{12}{13} \text{ এর জন্য,}$$

$$x = 26 \times \frac{12}{13} - 1 = 24 - 1 = 23 \text{ এবং}$$

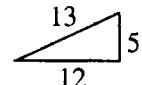
$$y = 26 \times \frac{5}{13} + 1 = 10 + 1 = 11$$

$\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ এবং $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ এর জন্য,
 $x = -24 - 1 = -25$ এবং $y = -10 + 1 = -9$
 দুইটি কিন্তুর স্থানাঙ্ক $(23, 11)$ ও $(-25, -9)$

(c) A $(3, -\frac{7}{2})$ কিন্তুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{5}{12}$. রেখাটির উপরস্থি P কিন্তুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর
 যেন $AP = \frac{13}{2}$ হয়।

সমাধান : মনে করি, রেখাটি x -অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

$$\tan \alpha = \frac{5}{12}$$



$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{13} \text{ এবং } \cos \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\text{অথবা, } \sin \alpha = -\frac{5}{13} \text{ এবং } \cos \alpha = -\frac{12}{13}$$

$$A(3, -\frac{7}{2}) \text{ কিন্তু হতে } AP = \frac{13}{2} \text{ একক}$$

দূরে অবস্থিত P কিন্তুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে,

$$\frac{x-3}{\cos \alpha} = \frac{y+7/2}{\sin \alpha} = \frac{13}{2}$$

$$x-3 = \frac{13}{2} \cos \alpha \Rightarrow x = \frac{13}{2} \cos \alpha + 3$$

$$\text{এবং } y + \frac{7}{2} = \frac{13}{2} \sin \alpha \Rightarrow y = \frac{13}{2} \sin \alpha - \frac{7}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{13} \text{ এবং } \cos \alpha = \frac{12}{13} \text{ এর জন্য,}$$

$$x = \frac{13}{2} \times \frac{12}{13} + 3 = 6 + 3 = 9 \text{ এবং}$$

$$y = \frac{13}{2} \times \frac{5}{13} - \frac{7}{2} = \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -1$$

$$\sin \alpha = -\frac{5}{13} \text{ এবং } \cos \alpha = -\frac{12}{13} \text{ এর জন্য, } x =$$

$$-6 + 3 = -3 \text{ এবং } y = -\frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -6$$

কিন্তু দুইটির স্থানাঙ্ক $(9, -1)$ ও $(-3, -6)$

কাজ:

১. মূলবিদ্যুগামী একটি রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 135° কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধান : নির্ণেয় রেখার ঢাল, $m = \tan 135^{\circ}$

$$= \tan (180^{\circ} - 45^{\circ}) = -\tan 45^{\circ} = -1$$

$$\text{নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, } y = m x \Rightarrow y = -x \\ x + y = 0 \text{ (Ans.)}$$

২. সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা y -অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে এবং y -অক্ষের ধনাত্মক দিক হতে ৫ একক অংশ ছেদ করে।

সমাধান: নির্ণেয় রেখার ঢাল, $m = \cot(\pm 30^{\circ})$

$$= \pm \cot 30^{\circ} = \pm \sqrt{3} \text{ এবং } y\text{-অক্ষের ছেদক অংশ, } c = 5 \text{ একক।}$$

$$\text{নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, } y = mx + c$$

$$\Rightarrow y = \pm \sqrt{3}x + 5 \text{ (Ans.)}$$

৩. একটি সরলরেখা $(6, -1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিত অংশের গুণফল ১ তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \dots (1)$

$$\text{প্রশ্নমতে, } ab = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a} \dots (2)$$

(1) রেখাটি $(6, -1)$ বিন্দুগামী।

$$\frac{6}{a} + \frac{-1}{b} = 1 \Rightarrow \frac{6}{a} - a = 1 \quad [\frac{1}{b} = a]$$

$$\Rightarrow 6 - a^2 = a \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (a+3)(a-2) = 0 \therefore a = 2 \text{ অথবা, } a = -3$$

$$b = \frac{1}{2} \text{ অথবা, } b = -\frac{1}{3}$$

$$\text{রেখাটির সমীকরণ, } \frac{x}{2} + 2y = 1 \Rightarrow x + 4y = 2$$

$$\text{অথবা, } \frac{x}{-3} - 3y = 1 \Rightarrow x + 9y + 3 = 0$$

৪. একটি সরলরেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিত অংশের সমষ্টি ও অন্তরফল যথাক্রমে ৯ ও ৫ তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \dots (1)$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } a + b = 9 \Rightarrow b = 9 - a \quad (2)$$

$$\text{এবং } |a - b| = 5 \Rightarrow a - b = \pm 5$$

$$\Rightarrow a - 9 + a = \pm 5 \quad [(2) \text{ দ্বারা }]$$

$$\Rightarrow 2a = 12 \text{ বা, } 4 \therefore a = 6 \text{ বা, } 2$$

$$(2) \text{ হতে পাই, } b = 9 - 6 = 3, \text{ যখন } a = 6$$

$$b = 9 - 2 = 7, \text{ যখন } a = 2$$

$$\text{রেখাটির সমীকরণ } \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow x + 2y = 6$$

$$\text{অথবা, } \frac{x}{2} + \frac{y}{7} = 1 \Rightarrow 7x + 2y = 14$$

৫. যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ $(2, 3)$ বিন্দুতে সমিহিত্বিত হয় তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ক্.০০]

$$\text{সমাধান: ধরি, রেখাটির সমীকরণ } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (1)$$

(1) রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$.

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4 \text{ এবং } \frac{b}{2} = 3 \Rightarrow b = 6$$

$$\therefore \text{রেখাটির সমীকরণ, } \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow 3x + 2y = 12$$

$$[\text{MCQ এর জন্য, রেখাটির সমীকরণ } \frac{x}{2 \times 2} + \frac{y}{2 \times 3} = 1]$$

৬. (b) $2x + y = 3$ ও $3x - 5y = -4$ রেখাদ্বয় x -অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: x -অক্ষের সমীকরণ, $y = 0$

মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

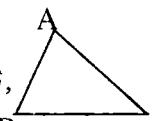
$$AB \equiv 2x + y - 3 = 0 \dots (1), \quad B$$

$$AC \equiv 3x - 5y + 4 = 0 \dots (2)$$

$$BC \equiv y = 0 \dots (3),$$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু,

$$A \equiv \left(\frac{4-15}{-10-3}, \frac{-9-8}{-10-3} \right) = \left(\frac{11}{13}, \frac{17}{13} \right)$$



$$(1) \text{ ও } (3) \text{ এর হেদবিদ্যু , } B \equiv \left(\frac{3}{2}, 0 \right)$$

$$(2) \text{ ও } (3) \text{ এর হেদবিদ্যু , } C \equiv \left(-\frac{4}{3}, 0 \right)$$

$$\begin{aligned} \delta_{ABC} &= \begin{vmatrix} 11/13 & 17/13 & 1 \\ 3/2 & 0 & 1 \\ -4/3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{17}{13} \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = -\frac{17}{13} \times \frac{17}{6} = -\frac{289}{78} \\ \therefore \Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} &= \frac{1}{2} \left| -\frac{289}{78} \right| \text{ কর্ণ একক} \\ &= \frac{289}{156} \text{ কর্ণ একক } \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

7. একটি ত্রিভুজের বাহুগামের সমীকরণ $x + 2y = 4$, $2x - y = 3$ ও $x - y + 2 = 0$. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমকোণী এবং এর ক্ষেত্রফল $7\frac{1}{2}$ কর্ণ একক।

সমাধান: মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,
 $AB \equiv x + 2y - 4 = 0 \dots (1)$,
 $BC \equiv 2x - y - 3 = 0 \dots (2)$,
 $CA \equiv x - y + 2 = 0 \dots (3)$

(1) ও (3) এর হেদবিদ্যু,

$$A \equiv \left(\frac{4-4}{-1-2}, \frac{-4-2}{-1-2} \right) = (0, 2)$$

(1) ও (2) এর হেদবিদ্যু,

$$B \equiv \left(\frac{-6-4}{-1-4}, \frac{-8+3}{-1-4} \right) = (2, 1)$$

(2) ও (3) এর হেদবিদ্যু,

$$C \equiv \left(\frac{-2-3}{-2+1}, \frac{-3-4}{-2+1} \right) = (5, 7)$$

$$\text{এখন, } AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}$$

$$CA = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$$

AB , BC , CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি ত্রুটীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $BC = \sqrt{53} = CA$
 $AB^2 + BC^2 = 5 + 45 = 50$

$= CA^2$ অতএব, ABC ত্রিভুজটি সমকোণী যার $\angle B = 90^\circ$.

$$2\text{য় অংশ : } \text{ত্রিভুজটি ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}(AB \times BC)$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}) \text{ কর্ণ একক} = 7\frac{1}{2} \text{ কর্ণ একক}$$

$$[\Delta = \frac{\{ -4(-2+1) + 3(-1-2) + 2(-1-4) \}^2}{2(-2+1)(-1-2)(-1-4)}]$$

$$= \left| \frac{(4-9-10)^2}{2(-1)(-3)(-5)} \right| = \frac{15}{2}$$

8. দেখাও যে, $2x + 7y = 14$ ও $2x - 7y = 14$

রেখাগাম y -অক্ষের সাথে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

সমাধান: y -অক্ষের সমীকরণ, $x = 0$

মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি,

$$AC \equiv 2x + 7y - 14 = 0 \dots (1),$$

$$BC \equiv 2x - 7y - 14 = 0 \dots (2)$$

$$AB \equiv x = 0 \dots (3),$$

$$(1) \text{ ও } (3) \text{ এর হেদবিদ্যু , } A \equiv (0, 2)$$

$$(2) \text{ ও } (3) \text{ এর হেদবিদ্যু , } B \equiv (0, -2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 4x = 28 \Rightarrow x = 7 \quad B$$

$$(1) \Rightarrow 14 + 7y - 14 = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\therefore (1) \text{ ও } (2) \text{ এর হেদবিদ্যু , } C \equiv (7, 0)$$

$$\text{এখন, } AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

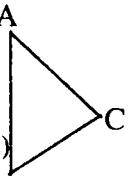
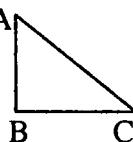
$$BC = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$$

$$CA = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$$

AB , BC , CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি ত্রুটীয়টি

অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $BC = \sqrt{53} = CA$

প্রদত্ত রেখাগাম y -অক্ষের সাথে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।



প্রশ্নমালা III F

বহুবিকল্প কর্ম

১. k এর যেকোন অশূন্য মানের জন্য $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$.

২. (α, β) এবং $f(x, y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $g(x, y) = a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখার ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $\frac{f(x, y)}{f(\alpha, \beta)} = \frac{g(x, y)}{g(\alpha, \beta)}$

$$\text{i.e., } \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_1\alpha + b_1\beta + c_1} = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_2\alpha + b_2\beta + c_2}$$

৩. $y = m_1x + c_1$ ও $y = m_2x + c_2$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, $\varphi = \pm \tan^{-1} \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$.

৪. $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে, $m_1 = m_2$ এবং $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

$ax + by + c = 0$ রেখার সমান্তরাল যেকোণ রেখার সমীকরণ $ax + by + k = 0$; যেখানে k একটি ধ্রুবক

৫. $ax + by + c = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং (α, β) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $ax + by = a\alpha + b\beta$.

৬. $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ রেখাদ্বয় অস্থ হলে, $m_1 m_2 = -1$ এবং $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয় অস্থ হলে, $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$. $ax + by + c = 0$ রেখার অস্থ যেকোন রেখার সমীকরণ $bx - ay + k = 0$; যেখানে k একটি ধ্রুবক।

৭. $ax + by + c = 0$ রেখার অস্থ এবং (α, β) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $bx - ay = b\alpha - a\beta$.

৮. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ও $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ রেখাদ্বয়ের সমবিন্দু হলে,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

৯.(a) $P(x_1, y_1)$ বিন্দুর সাপেক্ষে $A(h, k)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $(2x_1 - h, 2y_1 - k)$.

(b) (x, y) বিন্দুর প্রতিবিম্ব x -অক্ষের সাপেক্ষে $(x, -y)$ এবং y -অক্ষের সাপেক্ষে $(-x, y)$.

(c) $y = mx + c$ রেখার সাপেক্ষে $y = m_1x + c_1$ রেখার প্রতিবিম্ব $y = m_2x + c_2$ হবে, যদি $\frac{m_1 - m}{1 + m_1 m} = \frac{m - m_2}{1 + mm_2}$ হয়।

$$\begin{array}{l} y = m_2x + c_2 \\ y = mx + c \\ y = m_1x + c_1 \end{array}$$

(d) x এবং y -অক্ষের সাপেক্ষে $ax + by + c = 0$ রেখার প্রতিবিম্ব যথাক্রমে $ax - by + c = 0$ এবং $-ax + by + c = 0$.

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র :

1. (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y = (y_1 - y_2)x_1 - (x_1 - x_2)y_1$

2. (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী রেখার সমান্তরাল এবং (x_3, y_3) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y = (y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3$

3. (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী রেখার অস্থ এবং (x_3, y_3) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y = (x_1 - x_2)x_3 + (y_1 - y_2)y_3$

4. (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী রেখার অস্থ সমান্তরালের সমীকরণ $(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2)$

5. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং m ঢাল বিশিষ্ট রেখার সমীকরণ, $(a_2 + mb_2)(a_1x + b_1y + c_1) -$

$$(a_1 + mb_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

$$6. x\text{-অক্ষের সমান্তরাল ও } f(x) \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$\text{ও } g(x) \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ রেখাদ্বয়ের}$$

$$\text{ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, } a_2f(x) - a_1g(x) = 0$$

$$y\text{-অক্ষের সমান্তরাল ও } f(x) \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$\text{ও } g(x) \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ রেখাদ্বয়ের}$$

$$\text{ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, } b_2f(x) - b_1g(x) = 0$$

7. অক্ষদ্বয় হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করে
এবং $f(x) \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $g(x) \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী
রেখার সমীকরণ $(a_2 - b_2)f(x) - (a_1 - b_1)g(x) = 0$
এবং $(a_2 + b_2)f(x) - (a_1 + b_1)g(x) = 0$.

8. (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং m_1 ঢাল বিশিষ্ট রেখার
সাথে θ ($m_2 = \tan \theta$) কোণ উৎপন্ন করলে রেখা
দুইটির সমীকরণ, $(m_1 - m_2)x - (1 + m_1m_2)y$
 $= (m_1 - m_2)x_1 - (1 + m_1m_2)y_1$ এবং
 $(m_1 + m_2)x - (1 - m_1m_2)y =$
 $(m_1 + m_2)x_1 - (1 - m_1m_2)y_1$

9. $ax + by + c = 0$ রেখার সাপেক্ষে (x_1, y_1)

$$\text{বিন্দুর প্রতিবিস্ত } (x_1 - \frac{2a(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2},$$

$$y_1 - \frac{2b(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2})$$

10. $f(x) \equiv ax + by + c = 0$ রেখার সাপেক্ষে
 $g(x) \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ রেখার প্রতিবিস্ত

$$(a^2 + b^2)g(x) - 2(aa_1 + bb_1)f(x) = 0$$

প্রশ্নমালা - III F

1.(a) মূলবিন্দু এবং $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ও $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$
রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়
কর। [চ. '০৫, '০৭]

সমাধান: ধরি, প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখাটির

$$\text{সমীকরণ } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 + k(\frac{x}{b} + \frac{y}{a} - 1) = 0, k \neq 0$$

রেখাটি মূলবিন্দু $(0, 0)$ দিয়ে অতিক্রম করলে,

$$\frac{0}{a} + \frac{0}{b} - 1 + k(\frac{0}{b} + \frac{0}{a} - 1) = 0 \Rightarrow k = -1$$

\therefore নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 - \frac{x}{b} - \frac{y}{a} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow bx + ay - ax - by = 0$$

$$\Rightarrow (b-a)x - (b-a)y = 0$$

$$x - y = 0 \text{ (Ans.)}$$

1(b) দেখাও যে, k এর সব মানের জন্য একগুচ্ছ
সরলরেখা $(3 + 2k)x + 5ky - 3 = 0$ একটি
নির্দিষ্ট বিন্দুগামী। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[রা. '০৩]

$$\text{প্রমাণ : } (3 + 2k)x + 5ky - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3x + 2kx + 5ky - 3 = 0$$

$\Rightarrow 3x - 3 + k(2x + 5y) = 0$. এ রেখাটি k এর
বিভিন্ন মানের জন্য একগুচ্ছ সরলরেখা সূচিত করে যারা
সকলেই $3x - 3 = 0 \dots (1)$ এবং $2x + 5y \dots (2)$
রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী।

(1) হতে পাই, $3x = 3 \Rightarrow x = 1$. আবার, $x = 1$

হলে, (2) হতে পাই, $2 + 5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}$.

নির্ণেয় নির্দিষ্ট বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(1, -\frac{2}{5})$

$$2(a) x - 2y - 1 = 0 \text{ ও } 2x + 3y + 2 = 0$$

রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $\tan 45^\circ$ ঢাল বিশিষ্ট
সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '০৮, '০৯]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখাটির
সমীকরণ $x - 2y - 1 + k(2x + 3y + 2) = 0$

$$\Rightarrow (1+2k)x + (3k-2)y + 2k-1 = 0 \dots (1)$$

$$(1) \text{ রেখাটির ঢাল} = -\frac{1+2k}{3k-2}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } -\frac{1+2k}{3k-2} = \tan 45^\circ = 1$$

$$\Rightarrow 3k-2 = -1-2k \Rightarrow 5k=1 \Rightarrow k=\frac{1}{5}$$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ

$$x - 2y - 1 + \frac{1}{5}(2x + 3y + 2) = 0$$

$$\Rightarrow 5x - 10y - 5 + 2x + 3y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 7x - 7y - 3 = 0 \text{ (Ans.)}$$

$$\text{বিকল্প পদ্ধতি : } x - 2y - 1 = 0 \text{ ও}$$

$$2x + 3y + 2 = 0 \text{ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু } \left(\frac{-4+3}{3+4}, \frac{-2-2}{3+4} \right) \text{ অর্থাৎ } \left(-\frac{1}{7}, -\frac{4}{7} \right)$$

$$\left(-\frac{1}{7}, -\frac{4}{7} \right) \text{ বিন্দুগামী এবং } \tan 45^\circ = 1 \text{ ঢাল}$$

$$\text{বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ } y + \frac{4}{7} = 1.(x + \frac{1}{7})$$

$$\Rightarrow 7y + 4 = 7x + 1 \therefore 7x - 7y - 3 = 0$$

$$[\text{MCQ এর জন্য, } (2+1.3)(x-2y-1) - (1+1\times-2)(2x+3y+2) = 0 \Rightarrow 5x - 10y - 5 + 2x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow 7x - 7y - 3 = 0]$$

$$2(b) 5x - 9y + 13 = 0 \text{ ও } 9x - 5y + 11 = 0 \text{ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং } x\text{-অক্ষের সঙ্গে } 45^\circ \text{ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।}$$

[মা.বো.'০৮; ঢা.'১২]

সমাধান : নিশ্চয় রেখার ঢাল = $\tan(\pm 45^\circ) = \pm 1$

$$5x - 9y + 13 = 0 \text{ ও}$$

$$9x - 5y + 11 = 0 \text{ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুর$$

$$\text{স্থানাঙ্ক} = \left(\frac{-99+65}{-25+81}, \frac{117-55}{-25+81} \right)$$

$$= \left(-\frac{34}{56}, \frac{62}{56} \right) = \left(-\frac{17}{28}, \frac{31}{28} \right)$$

$$\left(-\frac{17}{28}, \frac{31}{28} \right) \text{ বিন্দুগামী এবং } \pm 1 \text{ ঢাল বিশিষ্ট}$$

$$\text{সরলরেখার সমীকরণ } y - \frac{31}{28} = \pm 1.(x + \frac{17}{28})$$

$$\Rightarrow 28y - 31 = \pm(28x + 17)$$

$$'+' \text{ নিয়ে পাই, } 28x - 28y + 48 = 0$$

$$7x - 7y + 12 = 0$$

$$\text{আবার, } '-' \text{ নিয়ে পাই, } 28x + 28y - 14 = 0$$

$$\therefore 2x + 2y - 1 = 0$$

$$\text{উভয় : } 7x - 7y + 12 = 0 \text{ বা, } 2x + 2y - 1 = 0$$

$$2(c) \text{ মূলবিন্দু এবং } 4x + 3y - 8 = 0 \text{ ও } x + y = 1 \text{ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।$$

সমাধান ধরি, প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখাটির সমীকরণ $4x + 3y - 8 + k(x+y-1) = 0$

$$\Rightarrow (4+k)x + (3+k)y - 8 - k = 0 \dots (i)$$

(i) রেখাটি মূলবিন্দু $(0, 0)$ দিয়ে অতিক্রম করে।

$$(4+k)\times 0 + (3+k)\times 0 - 8 - k = 0$$

$$\Rightarrow k = -8$$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$$(4-8)x + (3-8)y - 8 + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 4x + 5y = 0 \text{ (Ans.)}$$

3. (a) দুইটি সরলরেখা $(6, 7)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $3x + 4y = 11$ রেখার সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[রা.'১১,'১৩; দি'০৯; চ.'১১; ব.'১৩]

সমাধান : ধরি, $(6, 7)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $y - 7 = m(x - 6) \dots (1)$

$$3x + 4y = 11 \text{ রেখার ঢাল} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \tan 45^\circ = \pm \frac{\frac{m+3}{4}}{1-\frac{3}{4}m}$$

$$\Rightarrow 1 = \pm \frac{4m+3}{4-3m} \Rightarrow 4-3m = \pm (4m+3)$$

$$'+' \text{ নিয়ে, } 4-3m = 4m+3 \Rightarrow m = \frac{1}{7}$$

$$'-' \text{ নিয়ে } 4-3m = -4m-3 \Rightarrow m = -7$$

$$\text{রেখা দুইটির সমীকরণ, } y - 7 = \frac{1}{7}(x - 6)$$

$$\Rightarrow 7y - 49 = x - 6 \Rightarrow x - 7y + 43 = 0$$

$$\text{এবং } y - 7 = -7(x - 6) \Rightarrow y - 7 = -7x + 42$$

$$\Rightarrow 7x + y - 49 = 0$$

[MCQ এর জন্য,

$$\left(-\frac{3}{4}-1 \right)x - \left(1 - \frac{3}{4} \right)y = -\frac{7}{4}.6 - \frac{1}{4}.7,$$

$$\left(-\frac{3}{4}+1 \right)x - \left(1 + \frac{3}{4} \right)y = \frac{1}{4}.6 - \frac{7}{4}.7]$$

3.(b) দুইটি সরলরেখা $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $x - 2y = 3$ রেখার সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[য.'০৮]

সমাধান : ধরি, $(3, 2)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$$y - 2 = m(x - 3) \cdots (1)$$

$$x - 2y = 3 \text{ রেখার ঢাল} = \frac{1}{2}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \tan 45^\circ = \pm \frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}$$

$$\Rightarrow 1 = \pm \frac{2m - 1}{2 + m} \Rightarrow 2 + m = \pm(2m - 1)$$

$$+' \text{ নিয়ে, } 2 + m = 2m - 1 \Rightarrow m = 3$$

$$'-' \text{ নিয়ে } 2 + m = -2m + 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

$$\text{রেখা দুইটির সমীকরণ, } y - 2 = 3(x - 3)$$

$$\Rightarrow y - 2 = 3x - 9 \Rightarrow 3x - y = 7$$

$$\text{এবং } y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow 3y - 6 = -x + 3$$

$$\Rightarrow x + 3y = 9$$

৩ (c) দুইটি সরলরেখা $(-1, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $3x - y + 7 = 0$ রেখার সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং তাদের সমীকরণ হতে দেখাও যে, তারা পরস্পর লম্বভাবে অবস্থান করে। [গ.'১০; ব.'১১; পি.'০৭, '১২, '১৪; মা.'০৯; ঘ.'১১, '১৪; ঘ., দি.'১৩]

সমাধান : ধরি, $(-1, 2)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$$y - 2 = m(x + 1) \cdots (1)$$

$$3x - y + 7 = 0 \text{ রেখার ঢাল} = 3$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \tan 45^\circ = \pm \frac{m - 3}{1 + 3m}$$

$$\Rightarrow 1 = \pm \frac{m - 3}{1 + 3m} \Rightarrow 1 + 3m = \pm(m - 3)$$

$$+' \text{ নিয়ে, } 2m = -4 \Rightarrow m = -2$$

$$'-' \text{ নিয়ে } 4m = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\text{রেখা দুইটির সমীকরণ, } y - 2 = -2(x + 1)$$

$$\Rightarrow y - 2 = -2x - 2 \Rightarrow 2x + y = 0 \text{ (Ans.)}$$

$$\text{এবং } y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow 2y - 4 = x + 1$$

$$\Rightarrow x - 2y + 5 = 0 \text{ (Ans.)}$$

$$\text{এখন, রেখা দুইটির ঢালদ্বয়ের গুণফল} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

রেখা দুইটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থান করে।

৩(d) দুইটি সরলরেখা $(6, -7)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $y + \sqrt{3}x = 1$ রেখার সঙ্গে 60° কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ঢ.'০৫; দি.'০৯; কু.'১১]

সমাধান : ধরি, $(6, -7)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$$y + 7 = m(x - 6) \cdots (1)$$

$$y + \sqrt{3}x = 1 \text{ রেখার ঢাল} = -\sqrt{3}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \tan 60^\circ = \pm \frac{m + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}m}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \pm \frac{m + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}m}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} - 3m = \pm(m + \sqrt{3})$$

$$+' \text{ নিয়ে, } \sqrt{3} - 3m = m + \sqrt{3} \Rightarrow m = 0$$

$$'-' \text{ নিয়ে } \sqrt{3} - 3m = -m - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2m = 2\sqrt{3} \Rightarrow m = \sqrt{3}$$

$$\text{রেখা দুইটির সমীকরণ, } y + 7 = 0(x - 6)$$

$$\Rightarrow y + 7 = 0 \text{ (Ans.)}$$

$$\text{এবং } y + 7 = \sqrt{3}(x - 6) \text{ (Ans.)}$$

৩(e) দুইটি সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা

$$3y = 2x \text{ রেখার সঙ্গে } \tan^{-1} \frac{1}{2} \text{ কোণ উৎপন্ন করে।}$$

রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'১১]

সমাধান : ধরি, মূলবিন্দু $(0, 0)$ দিয়ে যায় এবং রেখার সমীকরণ $y = mx \cdots (1)$

$$3y = 2x \text{ রেখার ঢাল} = \frac{2}{3}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \tan \tan^{-1} \frac{1}{2} = \pm \frac{m - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}m}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \pm \frac{3m - 2}{3 + 2m}$$

$$\Rightarrow 3 + 2m = \pm(6m - 4)$$

$$+' \text{ নিয়ে, } 3 + 2m = 6m - 4$$

$$\Rightarrow 4m = 7 \Rightarrow m = \frac{7}{4}$$

'-' নিয়ে, $3 + 2m = -6m + 4$

$$\Rightarrow 8m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{8}$$

$$\text{রেখা দুইটির সমীকরণ, } y = \frac{7}{4}x \Rightarrow 7x = 4y$$

$$\text{এবং } y = \frac{1}{8}x \Rightarrow x = 8y$$

4(a) (4, -3) বিন্দুগামী এবং $2x + 11y - 2 = 0$

রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[সি.'০৬; মা.'০৮, '০৬]

সমাধান : ধরি, $2x + 11y - 2 = 0$ এর সমান্তরাল নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $2x + 11y + k = 0 \dots (1)$

প্রশ্নমতে (1) রেখাটি (4, -3) বিন্দুগামী।

$$2 \times 4 + 11 \times -3 + k = 0 \Rightarrow k = 25$$

$$\text{নির্ণেয় রেখার সমীকরণ } 2x + 11y + 25 = 0$$

[MCQ এর জন্য, $2x + 11y = 2 \times 4 + 11 \times -3 = -25$]

4(b) (1, 2) বিন্দুগামী এবং $3x - 4y + 8 = 0$

রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ক্ষ.'০৮]

$$\text{সমাধান : } 3x - 4y + 8 = 0 \text{ রেখার ঢাল} = \frac{3}{4}$$

(1, 2) বিন্দুগামী এবং $3x - 4y + 8 = 0$

রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ,

$$y - 2 = \frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow 4y - 8 = 3x - 3$$

$$3x - 4y + 5 = 0$$

4(c) y -অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 3y + 4 = 0$

ও $3x + 3y - 5 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[চ.'০৮; ব.'০৮; মা.বো.'০৭; ব.'১০; দি.'১৮]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $2x - 3y + 4 + k(3x + 3y - 5) = 0$

$$\Rightarrow (2 + 3k)x + (-3 + 3k)y + 4 - 5k = 0$$

এ রেখাটি y -অক্ষের সমান্তরাল বলে, y -এর

$$\text{সহগ} - 3 + 3k = 0 \Rightarrow k = 1$$

$$\text{নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, } (2 + 3)x + 4 - 5 = 0$$

$$5x - 1 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

$$[\text{MCQ এর জন্য, } 3(2x - 3y + 4) - (-3)(3x + 3y - 5) = 0]$$

$$4 \text{ (d)} x\text{- অক্ষের সমান্তরাল এবং } x - 3y + 2 = 0$$

ও $x + y - 2 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. '০১; ক্ষ. '০৭]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $x - 3y + 2 + k(x + y - 2) = 0$

$$\Rightarrow (1 + k)x + (-3 + k)y + 2 - 2k = 0$$

এ রেখাটি x -অক্ষের সমান্তরাল বলে, x -এর সহগ $1 + k = 0 \Rightarrow k = -1$

$$\text{নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, } -4y + 2 + 2 = 0$$

$$y - 1 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

$$[\text{MCQ এর জন্য, } 1(x - 3y + 2) - 1(x + y - 2) = 0]$$

5. (a) দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যাই $7x + 13y - 87 = 0$ ও $5x - 8y + 7 = 0$ রেখাদৰের ছেদবিন্দুগামী এবং অক্ষ দুইটি হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করে। [চ.'০৬; সি.'০৬; ব.'১৮]

সমাধান ধরি, প্রদত্ত রেখাদৰের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $7x + 13y - 87 + k(5x - 8y + 7) = 0$

$$\Rightarrow (7 + 5k)x + (13 - 8k)y + 7k - 87 = 0$$

ইহা অক্ষ দুইটি হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করলে x ও y এর সহগের সংখ্যামান সমান হবে।

$$7 + 5k = \pm(13 - 8k)$$

$$+ \text{ নিয়ে, } 13k = 6 \Rightarrow k = \frac{6}{13}$$

$$+ \text{ নিয়ে, } 3k = 20 \Rightarrow k = \frac{20}{3}$$

রেখা দুইটির সমীকরণ,

$$7x + 13y - 87 + \frac{6}{13}(5x - 8y + 7) = 0$$

$$\Rightarrow 91x + 169y - 1131 + 30x - 48y + 42 = 0$$

$$\Rightarrow 121x + 121y - 1089 = 0 \Rightarrow x + y - 9 = 0$$

$$\text{এবং } 7x + 13y - 87 + \frac{20}{3}(5x - 8y + 7) = 0$$

$$\Rightarrow 21x + 39y - 261 + 100x - 160y + 140 = 0$$

$$\Rightarrow 121x - 121y - 121 = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0$$

[MCQ এর জন্য, $(5+8)(7x+13y-87) - (7-13)(5x-8y+7) = 0$ এবং $(5-8)(7x+13y-87) - (7+13)(5x-8y+7) = 0$]

(b) যদি $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখাটি $2x - y = 1$ ও $3x - 4y + 6 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী হয় এবং $4x + 3y - 6 = 0$ রেখাটির সমান্তরাল হয়, তাহলে a ও b এর মান নির্ণয় কর। [ঢ.'১২; রা.'১৩]

সমাধান : $2x - y - 1 = 0$ ও

$3x - 4y + 6 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুর

$$\text{স্থানাঙ্ক} = \left(\frac{-6-4}{-8+3}, \frac{-3-12}{-8+3} \right) = \left(2, \frac{15}{-5} \right) = (2, 3)$$

প্রশ্নমতে, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ রেখাটি $4x + 3y - 6 = 0$

রেখাটির সমান্তরাল এবং $(2, 3)$ বিন্দুগামী

$$\frac{1/a}{4} = \frac{1/b}{3} \Rightarrow 4a = 3b \Rightarrow a = \frac{3b}{4}$$

$$\text{এবং } \frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1 \Rightarrow \frac{8}{3b} + \frac{3}{b} = 1 \Rightarrow \frac{8+9}{3b} = 1$$

$$\Rightarrow b = \frac{17}{3} \quad a = \frac{3}{4} \times \frac{17}{3} = \frac{17}{4}$$

$$\text{উত্তর : } a = \frac{17}{4}, b = \frac{17}{3}$$

5(c) $3x - 4y + 1 = 0$ ও $5x + y - 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমান সমান অংশ ছেদ করে এবং সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা.'০২]

সমাধান ধরি, প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $3x - 4y + 1 + k(5x + y - 1) = 0$

$$\Rightarrow (3+5k)x + (-4+k)y + 1 - k = 0$$

ইহা অক্ষ দুইটি হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমান সমান অংশ ছেদ করলে x ও y এর সহগ সমান হবে।

$$3 + 5k = -4 + k \Rightarrow 4k = -7 \Rightarrow k = -\frac{7}{4}$$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$$3x - 4y + 1 - \frac{7}{4}(5x + y - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 12x - 16y + 4 - 35x - 7y + 7 = 0$$

$$\Rightarrow -23x - 23y + 11 = 0$$

$$23x + 23y = 11 \text{ (Ans.)}$$

[MCQ এর জন্য,

$$(5-1)(3x-4y+1) - (3+4)(5x+y-1) = 0]$$

5(d) A(1, 1), B(3, 4) ও C(5, -2) বিন্দুগৃহে ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। এবং দেখাও যে, সরলরেখাটি BC এর সমান্তরাল।

[চ.'১০; ঢ.'১১]

সমাধান ধরি, AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

$$D \equiv \left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+4}{2} \right) = \left(2, \frac{5}{2} \right) \text{ এবং}$$

$$E \equiv \left(\frac{5+1}{2}, \frac{-2+4}{2} \right) = \left(3, -\frac{1}{2} \right)$$

DE রেখা অর্থাৎ AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর

$$\text{সংযোগ রেখার সমীকরণ } \frac{x-2}{2-3} = \frac{\frac{y-5}{2}}{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{2y-5}{6} \Rightarrow 6x - 12 = -2y + 5$$

$$6x + 2y = 17 \text{ (Ans.)}$$

$$2য় অংশ : 6x + 2y = 17 \text{ রেখার ঢাল} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$\text{এবং } BC \text{ রেখার ঢাল} = \frac{4+2}{3-5} = \frac{6}{-2} = -3 \text{ প্রস্রূত সমান। অতএব, রেখাটি BC এর সমান্তরাল।}$$

6(a) (4, -3) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + 11y - 2 = 0$

রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব.'১২; কু.'১৮; মা.'১২, '১৪]

সমাধান : ধরি, $2x + 11y - 2 = 0$ এর উপর লম্ব নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $11x - 2y + k = 0$ (1)

প্রশ্নমতে (1) রেখাটি (4, -3) বিন্দুগামী।

$$11 \times 4 - 2 \times -3 + k = 0 \Rightarrow k = -50$$

$$\text{নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, } 11x - 2y - 50 = 0$$

[MCQ এর জন্য, $11x - 2y = 11 \times 4 - 2 \times -3 = 50$]

(b) (2, -3) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x - 3y = 7$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[কু.'০১; য.'০৭; মা.'০৩]

সমাধান : ধরি, $2x - 3y = 7$ এর উপর লম্ব নির্ণয় রেখার সমীকরণ $3x + 2y + k = 0 \dots (1)$

প্রশ্নমতে (1) রেখাটি $(2, -3)$ বিন্দুগামী ।

$$3 \times 2 + 2 \times -3 + k = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$\text{নির্ণয় রেখার সমীকরণ}, 3x + 2y = 0$$

6(c) $(2, 5)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $3x + 12y = 3$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[কু.'০৫; চ.'১৪]

সমাধান ধরি, $3x + 12y = 3$ এর উপর লম্ব নির্ণয় রেখার সমীকরণ $12x - 3y + k = 0 \dots (1)$

প্রশ্নমতে (1) রেখাটি $(2, 5)$ বিন্দুগামী ।

$$12 \times 2 - 3 \times 5 + k = 0 \Rightarrow k = -9$$

$$\text{নির্ণয় রেখার সমীকরণ}, 12x - 3y - 9 = 0$$

7.(a) মূলবিন্দু ও (x_1, y_1) বিন্দুর সংযোগ রেখা এবং $(b, 0)$ ও (x_2, y_2) বিন্দুয়ের সংযোগ রেখা পরস্পর লম্ব হলে প্রমাণ কর যে, $x_1 x_2 + y_1 y_2 = b x_1$.

[চ.'০৩; রা.'০৪,'১৩; ব.'০৬; ঢা.'১৩]

প্রমাণ: ধরি, মূলবিন্দু ও (x_1, y_1) বিন্দুর সংযোগ রেখার ঢাল m_1 এবং $(b, 0)$ ও (x_2, y_2) বিন্দুয়ের সংযোগ রেখার ঢাল m_2

$$m_1 = \frac{y_1}{x_1} \text{ এবং } m_2 = \frac{y_2 - 0}{x_2 - b} = \frac{y_2}{x_2 - b}$$

প্রশ্নমতে, রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব ।

$$m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \frac{y_1}{x_1} \times \frac{y_2}{x_2 - b} = -1$$

$$\Rightarrow y_1 y_2 = x_1 x_2 + b x_1$$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = b x_1 \quad (\text{Proved})$$

7.(b) $(2, 3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার উপর (x, y) যেকোন একটি বিন্দু এবং রেখাটি $(-1, 2)$ ও $(-5, 4)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখার উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, $2x - y - 1 = 0$.

প্রমাণ: ধরি, $(-, 3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল m_1 এবং $(-1, 2)$ ও $(-5, 4)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখার ঢাল m_2 .

$m_1 = \frac{y - 3}{x - 2} [(2, 3) \text{ বিন্দুগামী সরলরেখার উপর } (x, y) \text{ যেকোন একটি বিন্দু }]$

$$\text{এবং } m_2 = \frac{2 - 4}{-1 + 5} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

প্রশ্নমতে, রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব ।

$$\frac{y - 3}{x - 2} \times -\frac{1}{2} = -1 \Rightarrow -y + 3 = -2x + 4$$

$$2x - y - 1 = 0 \quad (\text{Proved})$$

7(c) $A(1, 1)$, $B(3, 4)$ ও $C(5, -2)$ বিন্দুগৃহে ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু । A বিন্দুগামী এবং BC রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[প্র.ভ.প.'০৮]

সমাধান A বিন্দুগামী এবং BC রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ $y - 1 = -\frac{3-5}{4+2}(x-1)$

$$\Rightarrow y - 1 = -\frac{2}{6}(x-1)$$

$$\Rightarrow 3y - 3 = x - 1 \therefore x - 3y + 2 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

8.(a) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা

$$\frac{x-y}{a-b} = 1 \text{ রেখার উপর লম্ব এবং প্রদত্ত রেখা } \frac{x-a}{b-a}$$

x -অক্ষের ছেদ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [চ.'০২;

ব.'০৫; কু.'০৮,'১০]

সমাধান : প্রদত্ত রেখা $\frac{x-y}{a-b} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{-b} = 1$

$\Rightarrow bx - ay = ab$, x -অক্ষকে $(a, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$$ax + by = k \quad (1)$$

প্রশ্নমতে, (1) রেখাটি $(a, 0)$ বিন্দুগামী ।

$$a.a + b.0 = k \Rightarrow k = a^2$$

$$\text{নির্ণয় রেখার সমীকরণ } ax + by = a^2.$$

8(b) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা

$3x + 2y = 9$ ও $2x + 3y = 11$ রেখাদ্বয়ের ছেদ

বিন্দু দিয়ে যায় এবং প্রথম রেখার উপর লম্ব হয়।

$$\text{সমাধান: } 3x + 2y - 9 = 0 \dots (1) \text{ ও}$$

$2x + 3y - 11 = 0 \dots (2)$ রেখাদুয়ের ছেদবিন্দুর

$$\text{স্থানাংক} = \left(\frac{-22+27}{9-4}, \frac{-18+33}{9-4} \right) = (1, 3).$$

(1, 3) বিন্দু দিয়ে যায় এবং (1) রেখার উপর লম্ব
এরূপ রেখার সমীকরণ $2x - 3y = 2 \times 1 - 3 \times 3$

$$\Rightarrow 2x - 3y = 2 - 9 \quad 2x - 3y + 7 = 0$$

9. (a) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর
যা (1, 2) ও (4, 5) বিন্দুদুয়ের সংযোগ রেখাখনকে
3:1 অনুপাতে অন্তর্ভিত্ত করে এবং ঐ রেখার উপর
লম্ব হয়।

সমাধান: (1, 2) ও (4, 5) বিন্দুদুয়ের সংযোগ রেখাখনকে
3 : 1 অনুপাতে অন্তর্ভিত্ত করুন বিন্দুর স্থানাংক

$$= \left(\frac{3 \times 4 + 1 \times 1}{3+1}, \frac{3 \times 5 + 1 \times 2}{3+1} \right) = \left(\frac{13}{4}, \frac{17}{4} \right)$$

এখন, (1, 2) ও (4, 5) বিন্দুদুয়ের সংযোগ

রেখাখনের উপর লম্ব এবং $\left(\frac{13}{4}, \frac{17}{4} \right)$ বিন্দুগামী রেখার

$$\text{সমীকরণ } (y - \frac{17}{4}) = -\frac{1-4}{2-5}(x - \frac{13}{4})$$

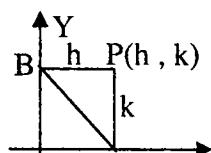
$$\Rightarrow (y - \frac{17}{4}) = -1(x - \frac{13}{4})$$

$$\Rightarrow 4y - 17 = -4x + 13 \Rightarrow 4x + 4y = 30$$

$$2x + 2y = 15 \text{ (Ans.)}$$

9(b) P(h, k) বিন্দু হতে x ও y-অক্ষের উপর
যথাক্রমে PA ও PB লম্ব। P বিন্দুগামী এবং AB
রেখার উপর লম্ব এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: P(h, k) বিন্দু হতে
x ও y-অক্ষের উপর যথাক্রমে
PA ও PB লম্ব বলে A ও B
বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে (h, 0)
ও (0, k).



P বিন্দুগামী এবং AB রেখার উপর লম্ব এরূপ
রেখার সমীকরণ $y - k = -\frac{h-0}{0-k}(x - h)$

$$\Rightarrow y - k = \frac{h}{k}(x - h)$$

$$\Rightarrow ky - k^2 = hx - h^2$$

$$hx - ky = h^2 - k^2 \text{ (Ans.)}$$

9 (c) এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা
 $4x + 7y = 11$ রেখার উপর লম্ব এবং y-অক্ষ হতে 2
একক দৈর্ঘ্য কর্তৃণ করে।

[প্র.ভ.প.'৯০]

$$\text{সমাধান: } 4x + 7y = 11 \text{ রেখার ঢাল} = -\frac{4}{7}$$

$$4x + 7y = 11 \text{ এর উপর লম্ব রেখার ঢাল} = \frac{7}{4}$$

$$y\text{-অক্ষ হতে 2 একক দৈর্ঘ্য কর্তৃণকারী এবং} \frac{7}{4}$$

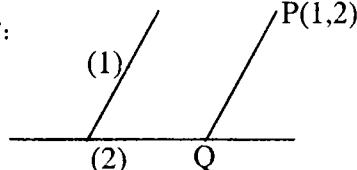
$$\text{ঢাল বিশিষ্ট রেখার সমীকরণ } y = \frac{7}{4}x \pm 2$$

$$\Rightarrow 7x - 4y \pm 8 = 0 \text{ (Ans.)}$$

10. (a) $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল
দিকে $3x + y + 4 = 0$ রেখা হতে (1, 2) বিন্দুর
দূরত্ব নির্ণয় কর।

[রা. '০২; য. '০৮]

সমাধান:



ধরি, $3x - 4y + 8 = 0$ (1) রেখার
সমান্তরাল এবং P(1, 2) বিন্দুগামী সরলরেখা
 $3x + y + 4 = 0$ (2) রেখাকে Q বিন্দুতে হোল
করে।

$$PQ \text{ রেখার সমীকরণ } 3x - 4y = 3 \times 1 - 4 \times 2$$

$$\Rightarrow 3x - 4y = -5 \Rightarrow 3x - 4y + 5 = 0 \dots (3)$$

$$(2) - (3) \Rightarrow 5y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{5}.$$

$$(2) \text{ হতে পাই, } 3x + \frac{1}{5} + 4 = 0 \Rightarrow 3x = -\frac{21}{5}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{7}{5} \therefore Q \text{ বিন্দুর স্থানাংক } \left(-\frac{7}{5}, \frac{1}{5} \right)$$

$$\text{নির্ণেয় দূরত্ব, } PQ = \sqrt{\left(1 + \frac{7}{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{144+81}{25}} = \sqrt{\frac{225}{25}} = \sqrt{9} = 3 \text{ একক।}$$

10(b) যে সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে
 $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ কোণ উৎপন্ন করে তার সমান্তরাল বরাবর

$3x + 5y - 11 = 0$ রেখা হতে $(-1, 1)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: যে সরলরেখা x -অক্ষের ধনাত্ত্ব দিকের সাথে $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$ কোণ উৎপন্ন করে তার সমান্তরাল এবং $P(-1, 1)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$$y - 1 = (x + 1) \tan \tan^{-1}(\frac{3}{4})$$

$$\Rightarrow y - 1 = \frac{3}{4}(x + 1) \Rightarrow 4y - 4 = 3x + 3$$

$$\Rightarrow 3x - 4y + 7 = 0 \dots \dots (1)$$

ধরি, (1) রেখা $3x + 5y - 11 = 0$ (2)
রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

$$\text{এখন}, (1) - (2) \Rightarrow -9y + 18 = 0 \Rightarrow y = 2$$

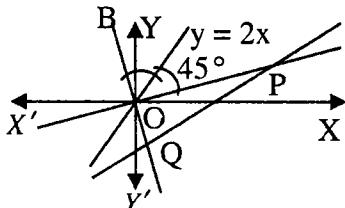
$$(1) \Rightarrow 3x - 8 + 7 = 0 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{1}{3}, 2)$.

$$\begin{aligned} \text{নির্ণেয় দূরত্ব}, PQ &= \sqrt{(-1 - \frac{1}{3})^2 + (1 - 2)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{9} + 1} = \sqrt{\frac{16+9}{9}} = \frac{5}{3} \text{ একক।} \end{aligned}$$

10(c) যে সরলরেখা $y = 2x$ রেখার সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করে তার সমান্তরাল বরাবর $3x - 4y = 15$ রেখা হতে মূলবিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান:



$y = 2x$ রেখার ঢাল (ধরি) $m_1 = 2$.

ধরি, যে সরলরেখা $y = 2x$ রেখার সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করে তার ঢাল m_2

$$\tan 45^\circ = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow 1 = \pm \frac{2 - m_2}{1 + 2m_2}$$

$$\Rightarrow 1 + 2m_2 = \pm(2 - m_2)$$

$$+' \text{ নিয়ে}, 1 + 2m_2 = 2 - m_2 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{3} \text{ এবং}$$

'-' নিয়ে, $1 + 2m_2 = -2 + m_2 \Rightarrow m_2 = -3$

ধরি, মূলবিন্দু O(0,0) দিয়ে অতিক্রমকারী এবং $\frac{1}{3}$ ঢাল

$$\text{বিশিষ্ট রেখা } y = \frac{1}{3}x \Rightarrow x = 3y \dots (1), 3x - 4y = 15 \dots (2) \text{ রেখাকে P বিন্দুতে ছেদ করে।}$$

$$(2) \text{ হতে পাই}, 9y - 4y = 15 [\because x = 3y]$$

$$\Rightarrow 5y = 15 \Rightarrow y = 5 \text{ এবং } x = 15.$$

$$P \equiv (15, 5) \text{ এবং } OP = \sqrt{5^2 + 15^2}$$

$$= \sqrt{5^2(1+3^2)} = 5\sqrt{10} \text{ একক।}$$

আবার, ধরি মূলবিন্দু O(0,0) দিয়ে অতিক্রমকারী এবং -3 ঢাল বিশিষ্ট রেখা $y = -3x \dots (3)$, $3x - 4y = 15 \dots (2)$ রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

$$(2) \text{ হতে পাই}, 3x + 12x = 15 [\because y = -3x]$$

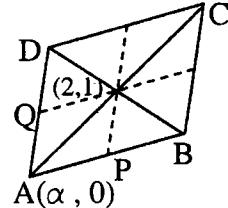
$$\Rightarrow 15x = 15 \Rightarrow x = 1 \text{ এবং } y = -3.$$

$$Q \equiv (1, -3) \text{ এবং } OP = \sqrt{1^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{10} \text{ একক।}$$

10(d) ABCD রম্পসের দুইটি বাহু $x - y = 5$ ও $7x - y = 3$ এর সমান্তরাল, কর্ণদ্বয় $(2, 1)$ বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু x -অক্ষের উপর অবস্থিত হলে A এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান:



ধরি, A এর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 0)$.

$x - y = 5$ এর সমান্তরাল $(2, 1)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $x - y = 2 - 1 = 1 \dots (i)$ এবং

$A(\alpha, 0)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $x - y = \alpha \dots (ii)$

আবার, $7x - y = 3$ এর সমান্তরাল $(2, 1)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $7x - y = 7 \times 2 - 1$

$\Rightarrow 7x - y = 13 \dots (iii)$ এবং $A(\alpha, 0)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $7x - y = 7\alpha \dots (iv)$.

(i) ও (iv) এর ছেদবিন্দু P($\frac{7\alpha - 1}{6}, \frac{7\alpha - 7}{6}$)

(ii) ও (iii) এর হেদবিন্দু $Q\left(\frac{13-\alpha}{6}, \frac{13-7\alpha}{6}\right)$

$AP = AQ$, [:: ABCD একটি রম্বস]

$$\Rightarrow AP^2 = AQ^2$$

$$\Rightarrow \left(\alpha - \frac{7\alpha - 1}{6}\right)^2 + \left(\frac{7\alpha - 7}{6}\right)^2 =$$

$$\left(\alpha - \frac{13 - \alpha}{6}\right)^2 + \left(\frac{13 - 7\alpha}{6}\right)^2$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha)^2 + 49(1 - \alpha)^2 = 2(7\alpha - 13)^2$$

$$\Rightarrow 25(1 - \alpha)^2 = (7\alpha - 13)^2$$

$$\Rightarrow 5(1 - \alpha) = \pm (7\alpha - 13)$$

‘+’ চিহ্ন নিয়ে, $5 - 5\alpha = 7\alpha - 13 \Rightarrow \alpha = 3/2$

‘-’ চিহ্ন নিয়ে, $5 - 5\alpha = -7\alpha + 13 \Rightarrow \alpha = 4$

A এর স্থানাঙ্ক $(4, 0)$ বা, $(3/2, 0)$.

11. (a) $(8, 5)$ ও $(-4, -3)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাশের লম্ব সমন্বিতক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [গ্র.'১২; ঢা.'০৬; কু.'০৬; পি.'০৯, '১৩; চ.'১২]

সমাধান: প্রদত্ত বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{8-4}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = (2, 1)$

$(8, 5)$ ও $(-4, -3)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখার ঢাল $= \frac{5+3}{8+4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

লম্ব সমন্বিতক রেখার ঢাল $= -\frac{3}{2}$

নির্ণেয় লম্ব সমন্বিতক রেখার সমীকরণ,

$$y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 2)$$

$$\Rightarrow 2y - 2 = -3x + 6$$

$$3x + 2y - 8 = 0 \text{ (Ans.)}$$

[MCQ এর জন্য, $(8+4)x + (5+3)y$

$$= \frac{1}{2}(64 - 16 + 25 - 9) = 32]$$

11(b) $(2, 1)$ ও $(6, 3)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাশের লম্ব সমন্বিতক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঘ.'০৬]

সমাধান: প্রদত্ত বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (4, 2)$

$(2, 1)$ ও $(6, 3)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাশের লম্ব সমন্বিতক সরলরেখার ঢাল $= -\frac{2-6}{1-3} = -2$

নির্ণেয় লম্ব সমন্বিতক রেখার সমীকরণ,

$$y - 2 = -2(x - 4) \Rightarrow y - 2 = -2x + 8 \\ 2x + y - 10 = 0 \text{ (Ans.)}$$

11(c) $P(4, 11)$ ও $Q(-2, 2)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাশের লম্ব সমন্বিতক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [প্র.ত.প. '০৮]

সমাধান: PQ এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, \frac{13}{2})$

P ও Q বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাশের লম্ব

সমন্বিতক রেখার ঢাল $= -\frac{4+2}{11-2} = -\frac{2}{3}$

নির্ণেয় লম্ব সমন্বিতক রেখার সমীকরণ,

$$y - \frac{13}{2} = -\frac{2}{3}(x - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{2y - 13}{2} = -\frac{2}{3}(x - 1)$$

$$\Rightarrow 6y - 39 = -4x + 4$$

$$4x + 6y - 43 = 0 \text{ (Ans.)}$$

11(d) দেখাও যে, (a, b) ও (c, d) বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাশের লম্ব সমন্বিতক সরলরেখার সমীকরণ $(a - c)x + (b - d)y = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)$. [ব.'০১]

প্রমাণ: প্রদত্ত বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$

(a, b) ও (c, d) বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাশের

লম্ব সমন্বিতক সরলরেখার ঢাল $= -\frac{a-c}{b-d}$

নির্ণেয় লম্ব সমন্বিতক রেখার সমীকরণ,

$$y - \frac{b+d}{2} = -\frac{a-c}{b-d}\left(x - \frac{a+c}{2}\right)$$

বইয়র কম

$$\Rightarrow (b-d)y - \frac{b^2 - d^2}{2}$$

$$= -(a-c)x + \frac{a^2 - c^2}{2}$$

$$(a-c)x + (b-d)y = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)$$

12. (a) (2, 3) বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ সরলরেখা উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে বিন্দুটি হতে সরলরেখার লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় কর।

[য.'০৯; রা., সি., ব.'০৯; ঢা.'১০; মা.'১৩]

সমাধান: (2, 3) বিন্দুগামী এবং $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ,

$$3x - 4y = 3 \times 2 - 4 \times 3 = 6 - 12$$

$$3x - 4y + 6 = 0$$

$$4x + 3y - 7 = 0$$

$3x - 4y + 6 = 0$ রেখায়ের ছেদবিন্দুর

$$\text{স্থানাঙ্ক} = \left(\frac{18-28}{-16-9}, \frac{-21-24}{-16-9} \right)$$

$$= \left(\frac{-10}{-25}, \frac{-45}{-25} \right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5} \right)$$

অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5} \right)$

২য় অংশ (2, 3) বিন্দুটি হতে প্রদত্ত রেখার

$$\text{লম্ব-দূরত্ব} = \sqrt{\left(2 - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(3 - \frac{9}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{100}{25}} = \frac{10}{5} = 2 \text{ একক।}$$

12(b) (2, -1) বিন্দু হতে $3x - 4y + 5 = 0$

সরলরেখা উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

নির্ণয় কর। [য.'১২; সি.'০৭, '১২; ঢা.'০৮, '১৮; কু.'০৮;

চ.'০৭, '১০; মা.বো.'০৮, '০৯; রা.'১২; দি.'১২]

সমাধান: (2, -1) বিন্দুগামী এবং $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ,

$$4x + 3y = 4 \times 2 + 3 \times -1 = 8 - 3$$

$$4x + 3y - 5 = 0$$

$$4x + 3y - 5 = 0$$

$$3x - 4y + 5 = 0 \text{ রেখায়ের ছেদবিন্দুর}$$

$$\text{স্থানাঙ্ক} = \left(\frac{15-20}{-16-9}, \frac{-15-20}{-16-9} \right)$$

$$= \left(\frac{-5}{-25}, \frac{-35}{-25} \right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5} \right)$$

অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5} \right)$

12(c) (3, 1) বিন্দু হতে $2x + y - 3 = 0$ সরলরেখা উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব.'০৫]

সমাধান: (3, 1) বিন্দুগামী এবং $2x + y - 3 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ,

$$x - 2y = 1 \times 3 - 2 \times 1 = 3 - 2$$

$$x - 2y - 1 = 0$$

$$x - 2y - 1 = 0$$

$2x + y - 3 = 0$ রেখায়ের ছেদবিন্দুর

$$\text{স্থানাঙ্ক} = \left(\frac{6+1}{1+4}, \frac{-2+3}{1+4} \right) = \left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5} \right)$$

অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(1, \frac{1}{5} \right)$

12(d) P(h, k) বিন্দু হতে মূলবিন্দুগামী সরলরেখার উপর লম্বের পাদবিন্দুর সংগ্রহপথ নির্ণয় কর। [ব.'০৫]

সমাধান: ধরি, মূলবিন্দু (0, 0) দিয়ে অতিক্রমকারী রেখার সমীকরণ $y = mx$ অর্থাৎ $mx - y = 0 \dots (1)$

P(h, k) বিন্দুগামী এবং (1) রেখার অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ, $x + my = h + mk \dots (2)$

$$(1) \text{ হতে } P(h, k) \text{ পাই, } m = \frac{y}{x}$$

(2) নং সমীকরণে m -এর মান বসিয়ে পাই,

$$x + \frac{y}{x} y = h + \frac{y}{x} \cdot k$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = hx + ky; \text{ যা নির্ণেয় সংগ্রহপথের সমীকরণ।}$$

13(a) এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x -অক্ষের সমান্তরাল এবং $4x + 3y = 6$ ও $x - 2y = 7$ সরলরেখা দুইটির সঙ্গে সমবিন্দু। [চ.'০১; য.'০২; কু.'০৫; ঢা.'০৭; ব.'০৮]

সমাধান: $4x + 3y - 6 = 0$ ও

$$x - 2y - 7 = 0 \text{ রেখায়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক}$$

$$= \left(\frac{-21-12}{-8-3}, \frac{-6+28}{-8-3} \right) = \left(\frac{-33}{-11}, \frac{22}{-11} \right)$$

$$= (3, -2)$$

x -অক্ষের সমান্তরাল এবং প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের সঙ্গে
সমিক্ষ্ণ নির্ণয় রেখার সমীকরণ $y = -2 \Rightarrow y + 2 = 0$

13(b) $2x + by + 4 = 0$, $4x - y - 26 = 0$,
 $3x + y - 1 = 0$ রেখাত্রয় সমিক্ষ্ণ হলে b এর মান
নির্ণয় কর। [প.ত.গ.'০১]

সমাধান: প্রদত্ত রেখাত্রয় সমিক্ষ্ণ বলে,

$$\begin{vmatrix} 2 & b & 4 \\ 4 & -1 & -26 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2(1+26) - b(-4+78) + 4(4+3) = 0$$

$$\Rightarrow 54 - 74b + 28 = 0 \Rightarrow 74b = 82$$

$$b = \frac{82}{74} = \frac{41}{37} \text{ (Ans.)}$$

13(c) $ax + by + c = 0$, $bx + cy + a = 0$,
 $cx + ay + b = 0$ রেখাত্রয় সমিক্ষ্ণ হলে, দেখাও
যে, $a + b + c = 0$. [সি.'০১, চ.'১৮]]

প্রমাণ : প্রদত্ত রেখাত্রয় সমিক্ষ্ণ হলে,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(ab-ca-b^2+bc-c^2+2ca-a^2) = 0$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca) = 0 \quad [-2 \text{ দ্বারা গুণ করে।}]$$

$$\Rightarrow (a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} = 0$$

এখানে, $a \neq b \neq c$, $\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} = 0 \therefore a+b+c = 0$ (Showed)

13(d) $3x + 5y - 2 = 0$, $2x + 3y = 0$, $ax + by + 1 = 0$ রেখাত্রয় সমিক্ষ্ণ হলে, a ও b এর
মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। [য.'০৯,'১৩; দি.'১১; চ.'১২]

প্রমাণ : প্রদত্ত রেখাত্রয় সমিক্ষ্ণ হলে,

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -2(2b-3a) + 1(9-10) = 0$$

$$\Rightarrow -4b + 6a - 1 = 0 \Rightarrow 6a - 4b = 1$$

14. (a) দেখাও যে, $x = t$, $y = 2t + 1$ এবং
 $x = 2t$, $y = -t - 4$ রেখা দুইটি পরস্পরকে
(-2, -3) বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। [ব.'১১]
প্রমাণ : $x = t$, $y = 2t + 1$ রেখাটিকে লেখা যায়-

$$y = 2x + 1 \dots (1); \text{ যার ঢাল} = 2$$

আবার, $x = 2t$, $y = -t - 4$ রেখাটিকে লেখা যায়-

$$y = -\frac{x}{2} - 4 \dots (2); \text{ যার ঢাল} = -\frac{1}{2}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 0 = (2 + \frac{1}{2})x + 5$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}x = -5 \Rightarrow x = -2 \quad \therefore y = -4 + 1 = -3$$

রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু (-2, -3).

আবার, রেখাদ্বয়ের ঢালদ্বয়ের গুণফল $= 2(-\frac{1}{2}) = -1$

রেখা দুইটি পরস্পরকে (-2, -3) বিন্দুতে
সমকোণে ছেদ করে। (Showed)

14(b) দেখাও যে, $2x = 1 - 4t$, $y = 1 + t$ এবং
 $x = -2t$, $y = t - 1$ রেখা দুইটি সমান্তরাল।

প্রমাণ $2x = 1 - 4t$, $y = 1 + t$ রেখাটিকে লেখা
যায়, $2x = 1 - 4(y-1) \Rightarrow 2x + 4y = 5 \dots (1)$
আবার, $x = -2t$, $y = t - 1$ রেখাটিকে লেখা যায়-

$$x = -2(y+1) \Rightarrow x + 2y + 2 = 0 \dots (2)$$

$$(1) \text{ রেখাটির ঢাল} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ এবং}$$

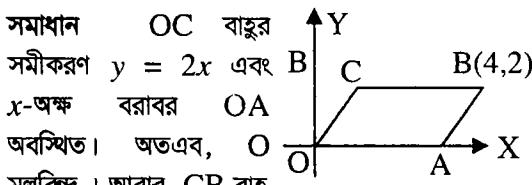
$$(2) \text{ রেখাটির ঢাল} = -\frac{1}{2}$$

রেখা দুইটির ঢাল পরস্পর সমান বলে তারা
সমান্তরাল। (Showed)

14(c) OABC একটি সামান্তরিক। x -অক্ষ বরাবর
OA অবস্থিত। OC বাহুর সমীকরণ $y = 2x$ এবং B
বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 2). A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক
এবং AC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা.'০৯,'১৩;

প্রশ্নমূলা III F
বিহার কর্ম

ষ.'০৭; ঢ.'০৮; সি.'০৮; চ.'১১; দি.'১৪; ব.'১৮]



ধরি, C শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(\alpha, 2)$ যা $y = 2x$
রেখার উপর অবস্থিত।

$$2 = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 1.$$

C শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(1, 2)$.

$$\text{এখন, } OA = CB = |1 - 4| = 3$$

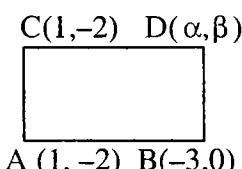
A শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(3, 0)$

$$AC \text{ কর্ণের সমীকরণ } \frac{x-3}{3-1} = \frac{y-0}{0-2}$$

$$\Rightarrow x - 3 = -y \therefore x + y - 3 = 0$$

14(d) A , B ও C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, -2)$,
 $(-3, 0)$ ও $(5, 6)$ । দ্রুমাণ কর যে, AB ও
 AC রেখাদ্য পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে। কিন্তুগুলি
একটি আয়তক্ষেত্রের তিনটি শীর্ষবিন্দু হলে চতুর্থ শীর্ষের
স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ষ.'০৮]

প্রমাণ :



$$AB \text{ রেখার ঢাল} = \frac{-2 - 0}{1 + 3} = -\frac{1}{2}$$

$$AC \text{ রেখার ঢাল} = \frac{-2 - 6}{1 - 5} = 2$$

$$AB \text{ ও } AC \text{ এর ঢালদ্যয়ের গুণফল} = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$$

AB ও AC রেখাদ্য পরস্পরকে সমকোণে ছেদ
করে।

ধরি, আয়তক্ষেত্রের চতুর্থ শীর্ষের $D(\alpha, \beta)$.

আয়তক্ষেত্রের BC কর্ণের মধ্যবিন্দু

$$\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{0+6}{2} \right) = (1, 3) \text{ এবং } AD \text{ কর্ণের}$$

$$\text{মধ্যবিন্দু } \left(\frac{1+\alpha}{2}, \frac{-2+\beta}{2} \right) \text{ একই হবে।}$$

$$\frac{1+\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = 2 - 1 = 1 \text{ এবং}$$

$$\frac{-2+\beta}{2} = 3 \Rightarrow \beta = 6 + 2 = 8$$

চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(1, 8)$.

14(e) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে
 $A(6, 1)$ ও $B(1, 6)$ এবং এর লম্ববিন্দু $P(3, 2)$;
অবশিষ্ট শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢ.'০৮]

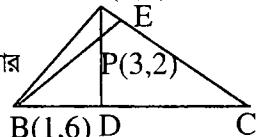
সমাধান : ধরি, ABC ত্রিভুজের

AD , BE লম্বদ্য $P(3, 2)$ $A(6, 1)$

বিন্দুতে ছেদ করে।

AP অর্ধাং AD রেখার

$$\text{ঢাল} = \frac{1-2}{6-3} = -\frac{1}{3}$$



AD এর উপর লম্ব BC রেখার ঢাল = 3

$$BC \text{ বাহুর সমীকরণ } y - 6 = 3(x - 1)$$

$$\Rightarrow y - 6 = 3x - 3 \Rightarrow y = 3x + 3 \dots (1)$$

BP অর্ধাং BE এর উপর লম্ব AC বাহুর

$$\text{ঢাল} = -\frac{3-1}{2-6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$AC \text{ বাহুর সমীকরণ } y - 1 = \frac{1}{2}(x - 6)$$

$$\Rightarrow 2y - 2 = x - 6$$

$$\Rightarrow 2(3x + 3) - 2 = x - 6 \quad [(1) \text{ দ্বারা}]$$

$$\Rightarrow 6x + 6 - x = -4 \Rightarrow 5x = -10 \Rightarrow x = -2$$

$$(1) \text{ হতে পাই, } y = 3(-2) + 3 = -3$$

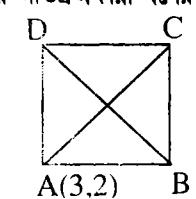
অবশিষ্ট শীর্ষ C এর স্থানাঙ্ক $(-2, -3)$

15. (a) $4x + 7y - 12 = 0$ রেখাটি একটি বর্গের
কর্ণ নির্দেশ করে এবং বর্গের একটি শীর্ষ $(3, 2)$
বিন্দুতে অবস্থিত। এ বিন্দুটি দিয়ে অতিক্রমকারী বর্গের
বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, ABCD বর্গের

$$4x + 7y - 12 = 0 \dots \dots (1)$$

হৃৎপটি BD কর্ণ নির্দেশ করে এবং



A(3, 2) শীর্ষ দিয়ে অতিক্রমকারী
বাহুর ঢাল m.

$$BD \text{ কর্ণের ঢাল} = -\frac{4}{7}$$

$$AC \text{ কর্ণের ঢাল} = \frac{7}{4} [\because \text{বর্ণের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব}]$$

AC কর্ণ AD ও AB বাহুর সঙ্গে 45° কোণ
উৎপন্ন করে।

$$\tan 45^\circ = \pm \frac{m - \frac{7}{4}}{1 + m \cdot \frac{7}{4}} \Rightarrow 1 = \pm \frac{4m - 7}{4 + 7m}$$

$$\Rightarrow 4 + 7m = \pm (4m - 7)$$

$$'+' \text{ নিয়ে, } 3m = -11 \Rightarrow m = -\frac{11}{3}$$

$$'-' \text{ নিয়ে, } 11m = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{11}$$

(3, 2) শীর্ষ দিয়ে অতিক্রমকারী বাহুর সমীকরণ,

$$y - 2 = -\frac{11}{3}(x - 3) \Rightarrow 3y - 6 = -11x + 33$$

$$\Rightarrow 11x + 3y - 39 = 0 \text{ এবং}$$

$$y - 2 = \frac{3}{11}(x - 3) \Rightarrow 11y - 22 = 3x - 9$$

$$\Rightarrow 3x - 11y + 13 = 0$$

15(b) দেখাও যে, $2x + y + 5 = 0$ ও $x - 2y - 3 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব। রেখা দুইটিকে কোন আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু ধরলে এবং অপর বাহু দুইটি (3, 4) কিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করলে অবশিষ্ট বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রমাণ : $2x + y + 5 = 0 \dots (1)$ রেখার ঢাল = -2

$$\text{এবং } x - 2y - 3 = 0 \dots (2) \text{ রেখার ঢাল} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ঢাল দুইটির গুণফল} = -2 \times \frac{1}{2} = -1 \text{ বলে প্রদত্ত}$$

রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব।

২য় অংশ রেখা দুইটিকে কোন আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু ধরলে অপর বাহু দুইটির একটি (1) রেখার সমান্তরাল এবং অপরটি (2) রেখার সমান্তরাল হবে।

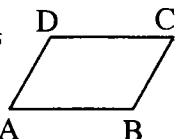
(3, 4) কিন্দুগামী এবং (1) রেখার সমান্তরাল
বাহুটির সমীকরণ $2x + y = 2 \times 3 + 4$

$$\Rightarrow 2x + y = 10$$

এবং (3, 4) কিন্দুগামী এবং (2) রেখার
সমান্তরাল বাহুটির সমীকরণ $x - 2y = 3 - 2 \times 4$
 $\Rightarrow x - 2y + 5 = 0$

15(c) ABCD সামান্তরিকের AB, BC বাহু
দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $2x + y - 8 = 0$, $x - y + 2 = 0$ এবং D কিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, -4) হলে AD
ও DC এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ABCD সামান্তরিক
বলে, $BC \parallel AD$ এবং $AB \parallel DC$



D(2, -4) কিন্দুগামী

AD এর সমীকরণ $x - y = 2 - (-4)$

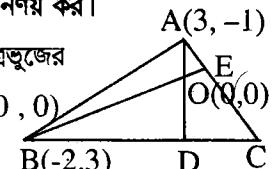
$$\Rightarrow x - y = 6 \text{ এবং}$$

DC এর সমীকরণ $2x + y = 2 \times 2 + (-4)$

$$\Rightarrow 2x + y = 0$$

15(d) A(3, -1), B(-2, 3) কিন্দু দুইটি একটি
ত্রিভুজের শীর্ষকিন্দু এবং তার লম্ব কিন্দুটি মূলকিন্দুতে।
অবশিষ্ট শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, ABC ত্রিভুজের
AD, BE লম্বদ্বয় O(0, 0)
কিন্দুতে ছেদ করে।



$$\text{AO অর্থাৎ } AD \text{ রেখার ঢাল} = \frac{-1 - 0}{3 - 0} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{AD এর উপর লম্ব BC রেখার ঢাল} = 3$$

$$\text{BC বাহুর সমীকরণ } y - 3 = 3(x + 2)$$

$$\Rightarrow y - 3 = 3x + 6 \Rightarrow y = 3x + 9 \dots (1)$$

$$\text{BO অর্থাৎ BE এর উপর লম্ব AC বাহুর
ঢাল} = -\frac{-2 - 0}{3 - 0} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{AC বাহুর সমীকরণ } y + 1 = \frac{2}{3}(x - 3)$$

$$\Rightarrow 3y + 3 = 2x - 6$$

$$\Rightarrow 3(3x + 9) + 3 = 2x - 6 \quad [(1) \text{ দ্বারা}]$$

$$\Rightarrow 9x + 27 - 2x = -9 \Rightarrow 7x = -36$$

$$\Rightarrow x = -\frac{36}{7} \quad y = 3\left(-\frac{36}{7}\right) + 9 = -\frac{45}{7}$$

$$\text{অবশিষ্ট শীর্ষ C এর স্থানাঙ্ক} \left(-\frac{36}{7}, -\frac{45}{7}\right)$$

[MCQ এর জন্য, BC বাহুর সমীকরণ,

$$(3-0)x + (-1-0)y = 3x - 2 + (-1) \times 3]$$

কাজ

১. $4x - 3y - 1 = 0$ ও $2x - 5y + 3 = 0$ রেখাদৰের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষ দুইটির সঙ্গে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে এবং সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : অক্ষ দুইটির সঙ্গে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে এবং সরলরেখার ঢাল $= \tan(\pm 45^\circ) = \pm 1$
এখন, $4x - 3y - 1 = 0$ ও

$$2x - 5y + 3 = 0 \text{ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক} = \left(\frac{-9-5}{-20+6}, \frac{-2-12}{-20+6} \right) = (1, 1)$$

(1, 1) বিন্দুগামী এবং ± 1 ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ $y - 1 = \pm 1 \cdot (x - 1)$

$$'+' \text{ নিয়ে পাই, } y - 1 = x - 1 \Rightarrow x - y = 0$$

$$'-' \text{ নিয়ে পাই, } y - 1 = -x + 1 \Rightarrow x + y = 2$$

$$\text{উভয় : } x + y = 2, x - y = 0.$$

২. $2x + 3y - 1 = 0$ ও $x - 2y + 3 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় কর। [প.ড.গ.'০৮]

সমাধান: ধরি, প্রদত্ত রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ φ

$$\text{আমরা জানি, } a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ ও}$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ } \varphi$$

$$\text{হলে, } \tan \varphi = \pm \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}.$$

$$\tan \varphi = \pm \frac{1.3 - 2(-2)}{2.1 + 3(-2)} = \pm \frac{3+4}{2-6} = \pm \frac{7}{4}.$$

$$'+' \text{ চিহ্ন নিয়ে পাই, } \varphi = \tan^{-1} \frac{7}{4}$$

$$\text{নির্ণয় সূক্ষ্মকোণের মান } \tan^{-1} \frac{7}{4}$$

৩. k -এর মান কত হলে $5x + 4y - 6 = 0$ ও $2x + ky + 9 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হবে?

সমাধান : $5x + 4y - 6 = 0$ ও $2x + ky + 9 = 0$

$$\text{রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হলে, } \frac{5}{2} = \frac{4}{k}$$

$$\Rightarrow k = \frac{8}{5} \text{ (Ans.)}$$

৪. $5x - 3y - 7 = 0$ ও $4x + y - 9 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $13x - y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $(5x - 3y - 7) + k(4x + y - 9) = 0$

$$\Rightarrow (5+4k)x + (-3+k)y - 7-9k = 0 \cdots (1)$$

$$(1) \text{ রেখাটি } 13x - y - 1 = 0 \text{ এর সমান্তরাল :}$$

$$\frac{5+4k}{13} = \frac{-3+k}{-1} \quad \left[\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ সূত্র দ্বারা} \right]$$

$$\Rightarrow -39 + 13k = -5 - 4k \Rightarrow 17k = 34$$

$$\Rightarrow k = 2$$

নির্ণয় রেখার সমীকরণ,

$$(5+8)x + (-3+2)y - 7 - 18 = 0$$

$$\Rightarrow 13x - y - 25 = 0 \text{ (Ans.)}$$

[MCQ এর জন্য, $\therefore 2x + 2y - 1 = 0$

$$\frac{5x - 3y - 7}{4x + y - 9} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 13 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 13 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-5 + 39}{-4 - 13} = -2]$$

৫. k এর মান কত হলে $2x - y + 7 = 0$ ও $3x + ky - 5 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবে?

সমাধান : $2x - y + 7 = 0$ ও $3x + ky - 5 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হলে,

$$2 \times 3 + (-1) \times k = 0 \quad [a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \text{ সূত্র দ্বারা}]$$

$$\Rightarrow k = 6 \text{ (Ans.)}$$

৬. $(2, -3)$ বিন্দুগামী এবং $(5, 7)$ ও $(-6, 3)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখার উপর লম্ব এবং সরলরেখার সীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $(2, -3)$ বিন্দুগামী এবং $(5, 7)$ ও $(-6, 3)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখার লম্ব এবং সরলরেখার

$$\text{সমীকরণ } y + 3 = -\frac{5+6}{7-3}(x - 2)$$

$$\Rightarrow y + 3 = -\frac{11}{4}(x - 2)$$

$$\Rightarrow 4y + 12 = -11x + 22$$

$$11x + 4y = 10 \text{ (Ans.)}$$

$$\Rightarrow [(5 + 6)x + (7-3) y = 11 \times 2 + 4 \times -3 = 10]$$

৭. এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $2x + 3y + 4 = 0$ ও $3x + 4y - 5 = 0$ রেখা দুইটির ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $6x - 7y + 8 = 0$ রেখার উপর লম্ব হয়।

সমাধান: $2x + 3y + 4 = 0$ ও

$$3x + 4y - 5 = 0 \text{ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর}$$

$$\text{স্থানাঙ্ক} = \left(\frac{-15-16}{8-9}, \frac{12+10}{8-9} \right) = (31, -22).$$

(31, -22) বিন্দুগামী এবং $6x - 7y + 8 = 0$ রেখার উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ,

$$7x + 6y = 7 \times 31 + 6 \times -22$$

$$\Rightarrow 7x + 6y = 217 - 132$$

$$7x + 6y - 85 = 0 \text{ (Ans.)}$$

$$[\text{MCQ এর জন্য}, \frac{2x + 3y + 4}{3x + 4y - 5} = \frac{2 \times 6 + 3 \times -7}{3 \times 6 + 4 \times -7}]$$

৮. (2, 5) ও (5, 6) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, তা (-4, 5) ও (-3, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার উপর লম্ব।

সমাধান: (2, 5) ও (5, 6) বিন্দুগামী সরলরেখার

$$\text{সমীকরণ } \frac{x-2}{2-5} = \frac{y-5}{5-6} \Rightarrow \frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{-1}$$

$$\Rightarrow x - 2 = 3y - 9 \therefore x - 3y + 13 = 0 \cdots (1)$$

$$\text{২য় অংশ: (1) রেখার ঢাল} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$$

(-4, 5) ও (-3, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ

$$\text{রেখার ঢাল} = \frac{5-2}{-4+3} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$\text{ঢাল দুইটির গুণফল} = \frac{1}{3} \times -3 = -1$$

(2, 5) ও (5, 6) বিন্দুগামী রেখাটি (-4, 5) ও (-3, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার উপর লম্ব।

৯. (-3, -2) বিন্দুগামী এবং $2x + 3y = 3$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। মূলবিন্দুগামী এবং এই দুইটি রেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখারও সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: (-3, -2) বিন্দুগামী এবং $2x + 3y = 3$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ

$$3x - 2y = 3 \times -3 - 2 \times -2$$

$$\Rightarrow 3x - 2y = -9 + 4 \therefore 3x - 2y + 5 = 0$$

২য় অংশ: ধরি, $2x + 3y - 3 = 0$ ও $3x - 2y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$$2x + 3y - 3 + k(3x - 2y + 5) = 0$$

$$\Rightarrow (2 + 3k)x + (3 - 2k)y - 3 + 5k = 0$$

এ রেখাটি মূলবিন্দুগামী বলে, ধ্রব্যপদ - 3 + 5k = 0

$$\Rightarrow k = \frac{3}{5}. \text{ অতএব, নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,}$$

$$2x + 3y - 3 + \frac{3}{5}(3x - 2y + 5) = 0$$

$$\Rightarrow 10x + 15y - 15 + 9x - 6y + 15 = 0$$

$$\Rightarrow 19x + 9y = 0 \text{ (Ans.)}$$

১০. (1, 2), (4, 4), (2, 8) বিন্দুগুলো একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু। বাহুগুলোর সমীকরণ নির্ণয় কর।

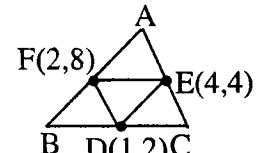
সমাধান ধরি, ABC

ত্রিভুজে BC, CA, AB

বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে

D(1, 2), E(4, 4),

F(2, 8).



[ব.'০২]

$BC \parallel FE$, $CA \parallel DF$ এবং $AB \parallel ED$.

$$BC \text{ রেখার ঢাল} = FE \text{ রেখার ঢাল} = \frac{8-4}{2-4} = -2$$

$$AC \text{ রেখার ঢাল} = FD \text{ রেখার ঢাল} = \frac{8-2}{2-1} = 6$$

$$AB \text{ রেখার ঢাল} = ED \text{ রেখার ঢাল} = \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}$$

$$D(1, 2) \text{ বিন্দুগামী } BC \text{ বাহুর সমীকরণ} y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow 2x + y - 4 = 0$$

$$E(4, 4) \text{ বিন্দুগামী } CA \text{ বাহুর সমীকরণ} y - 4 = 6(x - 4) \Rightarrow 6x - y - 20 = 0$$

$$\text{এবং } F(2, 8) \text{ বিন্দুগামী } AB \text{ বাহুর সমীকরণ} y - 8 = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y - 24 = 2x - 4$$

$$2x - 3y + 20 = 0$$

[MCQ এর জন্য, BC বাহুর সমীকরণ,

$$\Rightarrow (4-8)x - (4-2)y = -4 \times 1 - 2 \times 2]$$

১১. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $2x + 3y = 1$ ও $x - 2y + 3 = 0$ সরলরেখা দুইটির সঙ্গে

সমবিন্দু এবং অক্ষদ্বয় হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করে।

সমাধান: ধরি, প্রদত্ত রেখাদৰ্শের সঙ্গে সমবিন্দু এবং
রেখার সমীকরণ $2x + 3y - 1 + k(x-2y+3) = 0$
 $\Rightarrow (2+k)x + (3-2k)y - 1 + 3k = 0$ এ
রেখাটি অক্ষদ্বয় হতে সমান সংখ্যামানের অংশ ছেদ করে
বলে x ও y এর সহগের সংখ্যামান সমান।

$$2+k = \pm(3-2k)$$

$$2+k = 3-2k \Rightarrow 3k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

অথবা, $2+k = -3+2k \Rightarrow k = 5$

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ,

$$2x + 3y - 1 + \frac{1}{3}(x-2y+3) = 0$$

$$\Rightarrow 6x + 9y - 3 + x - 2y + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 7x + 7y = 0 \Rightarrow x + y = 0$$

$$\text{অথবা, } 2x + 3y - 1 + 5x - 10y + 15 = 0$$

$$\Rightarrow 7x - 7y + 14 = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0$$

প্রশ্নমালা III G

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী :

1. $P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে $ax + by + c = 0$

$$\text{সরলরেখার অন্তর্ভুক্তি দূরত্ব} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2.(i) $ax + by + c_1 = 0$ ও $ax + by + c_2 = 0$

$$\text{সমাপ্তরাশ সরলরেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব} = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(ii) $ax + by + c = 0$ হতে d একক দূরবর্তী রেখার
সমীকরণ $ax + by + c \pm d\sqrt{a^2 + b^2} = 0$

3. $f(x, y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও

$g(x, y) = a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখা দুইটির
অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমবিখ্যনকদ্বয়ের সমীকরণ

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

(i) $P(\alpha, \beta)$ বিন্দু ধারণকারী কোণটির সমবিখ্যনকের
সমীকরণ ‘+’ হবে যখন $f(\alpha, \beta) \times g(\alpha, \beta) > 0$

‘-’ হবে যখন $f(\alpha, \beta) \times g(\alpha, \beta) < 0$

(ii) মূলবিন্দু ধারণকারী কোণটির সমবিখ্যনকের
সমীকরণ ‘+’ অথবা ‘-’ হবে যখন যথাক্রমে
 $c_1 \times c_2 > 0$ বা, < 0

(iii) $P(x', y')$ বিন্দুটি রেখাদৰ্শের অন্তর্ভুক্ত
স্থূলকোণে অথবা সূচকোণে অবস্থিত হবে যখন
যথাক্রমে $f(x', y') \times g(x' + y')$

$$\times (a_1a_2 + b_1b_2) > 0 \text{ বা, } < 0$$

(iv) $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$ হলে, ‘+’ স্থূলকোণের ও
‘-’ সূচকোণের সমবিখ্যনকের সমীকরণ।

$a_1a_2 + b_1b_2 < 0$ হলে, ‘+’ সূচকোণের ও
‘-’ স্থূলকোণের সমবিখ্যনকের সমীকরণ।

4. ABC ত্রিভুজের $AB \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$,
 $AC \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $BC \equiv px + qy + r = 0$ হলে, $\angle A$ স্থূলকোণ অথবা সূচকোণ হবে
যদি যথাক্রমে $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ p & q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (a_1a_2 + b_1b_2)$

> 0 , অথবা < 0 হয়।

5. ABC ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি $A(x_1, y_1)$,
 $B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$ হলে, $\angle A$ সূচকোণ
বা স্থূলকোণ হবে যদি যথাক্রমে $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) > 0$, অথবা < 0 হয়।

6. ABC ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি $A(x_1, y_1)$,
 $B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$ হলে, অন্তঃব্যাসার্ধ,
 $r = \frac{1}{a+b+c} |\delta_{ABC}|$ এবং অন্তঃকেন্দ্র =

$$\left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c} \right); \text{ যখন } AB = c, BC = a, CA = b \text{ এবং } \delta_{ABC} = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)$$

‘অর্থাৎ অন্তঃকেন্দ্রের

$$\text{ভূজ} = \frac{\sum x_1 \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}{\sum \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \text{ এবং}$$

$$\text{কোণ} = \frac{\sum y_1 \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}{\sum \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}$$

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র :

$$1. a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ ও } a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব =

$$\frac{|c_1\sqrt{a_2^2 + b_2^2} - c_2\sqrt{a_1^2 + b_1^2}|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

2. $f(x) \equiv ax + by + c = 0$ রেখা
 $g(x) \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও AB রেখাদ্বয়ের
 অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর একটি সমাধিক্ষিণক হলে AB এর
 সমীকরণ $(a^2 + b^2)g(x) - 2(aa_1 + bb_1)f(x) = 0$
3. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ
 রেখাখণ্ডকে $ax + by + c = 0$ সরলরেখাটি
 $|ax_1 + by_1 + c| = |ax_2 + by_2 + c|$ অনুপাতে
 বিভক্ত করে।

প্রশ্নমালা III G

- 1(a) Solⁿ.: সরগুলি তথ্য সত্য। Ans. D
- (b) Solⁿ. $(2, 3)$ ও $(6, 7)$ বিন্দুগামী
 সরলরেখার ঢাল = $\frac{3-7}{2-6} = \frac{-4}{-4} = 1$ Ans. A
- (c) Solⁿ.: y - অক্ষের সমীকরণ $x = 0$
 নির্ণয় অনুপাত = $|7| : |-5| = 7 : 5$
- (d) Solⁿ.: অভিজটির ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} |x_1y_2 - x_2y_1|$
 $= \frac{1}{2} |24 - 15| = 4.5$

$$(e) \text{ Sol}^n.: \text{নির্ণয় কোণ} = \tan^{-1}(\frac{4}{-4})$$

$$= 180^\circ - \tan^{-1} 1 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$(f) \text{ Sol}^n.: \text{রেখাটির সমীকরণ}, x = (3, -6) \text{ বিন্দুর}$$

$$x\text{-স্থানাঙ্ক} \Rightarrow x = 3$$

$$(g) \text{ Sol}^n.: \text{Ans.D}$$

$$(h) \text{ Sol}^n.: \text{সরগুলি তথ্য সত্য।} \quad \text{Ans. D}$$

$$(i) \text{ Sol}^n.: \text{রেখাটির সমীকরণ}, 3x + 4y = 3 \times 5 +$$

$$4 \times (-3) \Rightarrow 3x + 4y = 3$$

$$(j) \text{ Sol}^n.: \text{রেখাটির সমীকরণ}, 4x - 3y = 4 \times 4 -$$

$$3 \times 0 \Rightarrow 4x - 3y = 16$$

$$(k) \text{ Sol}^n.: \text{লম্বদূরত্ব} = \frac{|-12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5}$$

$$(l) \text{ Sol}^n.: 3x + 4y = 12 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

$$\text{অভিজটির ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} |ab| = \frac{1}{2} |12| = 6;$$

[এখানে, $a = 4, b = 3$]

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ একক।}$$

$$\text{রেখার সমীকরণ}, y = \frac{b}{a}x \Rightarrow y = \frac{3}{4}x \Rightarrow 3x = 4y$$

$$(m) \text{ Sol}^n.: r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{3+3} = \sqrt{6} \quad \therefore \text{Ans. C}$$

(n) Solⁿ : রেখার সমীকরণ

$$7x - 3y = 7.2 - 3.1 = 11$$

$$\Rightarrow 7x - 3y - 11 = 0 \quad \text{Ans. B}$$

(o) Solⁿ : $y = 6$ ও $x = 5$ এর ছেদকিন্দু $A(5, 6)$
 $y^2 = a(x - 7)$ এ $y = 6$ বসিয়ে পাই,

$$36 = a(x - 7) \Rightarrow x = \frac{36}{a} + 7$$

$$B\left(\frac{36}{a} + 7, 6\right)$$

$$AB = \left|\frac{36}{a} + 7 - 5\right| = 7 \Rightarrow \frac{36}{a} + 2 = \pm 7$$

$$\Rightarrow \frac{36}{a} = 5, -9 \Rightarrow a = -\frac{36}{9} = -4, \quad a < 0$$

∴ Ans. A

1(i) (a) $(1, 2)$ বিন্দু হতে $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$
 রেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কিত হল। মূলকিন্দু থেকে এ
 লম্বের লম্বদূরত্ব নির্ণয় কর। [প.ড.প. '০৫]

সমাধান : $(1, 2)$ বিন্দু হতে $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$
 রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ,

$$\sqrt{3}x + y = \sqrt{3} \times 1 + 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x + y - 2 - \sqrt{3} = 0 \dots \dots (1)$$

$$\therefore \text{মূলকিন্দুর থেকে (1) এর লম্ব দূরত্ব} = \frac{|-2 - \sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \text{ (Ans.)}$$

(b) $4x + 3y = c$ এবং $12x - 5y = 2(c + 3)$
রেখা দুইটি হতে মূলবিন্দু সমদূরবর্তী। c এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর। [ৱা.'০৮,'১২; চ.'০৬; য.'১০,'১৮; ঢ.'০৯]

সমাধান : $4x + 3y = c$ অর্থাৎ $4x + 3y - c = 0$

$$\text{হতে মূলবিন্দু দূরত্ব} = \frac{|-c|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|c|}{5}$$

আবার, $12x - 5y = 2(c + 3)$ অর্থাৎ
 $12x - 5y - 2(c + 3) = 0$ হতে মূলবিন্দুর দূরত্ব
= $\frac{|-2(c + 3)|}{\sqrt{144+25}} = \frac{|2(c + 3)|}{13}$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{|2(c + 3)|}{13} = \frac{|c|}{5} \Rightarrow \frac{2(c + 3)}{13} = \pm \frac{c}{5}$$

'+' নিয়ে, $10c + 30 = 13c \Rightarrow 3c = 30 \therefore c = 10$
'-' নিয়ে, $10c + 30 = -13c \Rightarrow 23c = -30$
 $\Rightarrow c = -30/23$

c এর ধনাত্মক মান 10. (Ans.)

(c) (a, b) বিন্দুটি $3x - 4y + 1 = 0$ এবং
 $4x + 3y + 1 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হলে,
দেখাও যে, $a + 7b = 0$ অথবা $7a - b + 2 = 0$

[ৱা.'০১,'১০; সি.'০১; মা.'০৮; চ.'১৩]

প্রমাণ : $3x - 4y + 1 = 0$ রেখা হতে (a, b) বিন্দুর
দূরত্ব = $\frac{|3a - 4b + 1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3a - 4b + 1|}{5}$

আবার, $4x + 3y + 1 = 0$ রেখা হতে (a, b) বিন্দুর
দূরত্ব = $\frac{|4a + 3b + 1|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|4a + 3b + 1|}{5}$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{|3a - 4b + 1|}{5} = \frac{|4a + 3b + 1|}{5}$$

$$\Rightarrow 3a - 4b + 1 = \pm(4a + 3b + 1)$$

$$'+' \text{ নিয়ে, } 3a - 4b + 1 - 4a - 3b - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -a - 7b = 0 \Rightarrow a + 7b = 0$$

$$'-' \text{ নিয়ে, } 3a - 4b + 1 + 4a + 3b + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 7a - b + 2 = 0$$

$$a + 7b = 0 \text{ অথবা } 7a - b + 2 = 0$$

(d) মূলবিন্দু থেকে $x \sec \theta - y \operatorname{cosec} \theta = k$
ও $x \cos \theta - y \sin \theta = k \cos 2\theta$ রেখা দুইটির
সম্বন্ধ দূরত্ব যথাক্রমে p ও p' হলে, প্রমাণ কর যে,
 $4p^2 + p'^2 = k^2$ [চ.'০৩,'১১; রা.'০৮; য.'০৯]

প্রমাণ : মূলবিন্দু থেকে $x \sec \theta - y \operatorname{cosec} \theta - k = 0$
এর দূরত্ব $p = \left| \frac{-k}{\sqrt{\sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta}} \right|$

মূলবিন্দু $(0, 0)$ থেকে $x \cos \theta - y \sin \theta - k \cos 2\theta = 0$ এর দূরত্ব,

$$p' = \left| \frac{-k \cos 2\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} \right|$$

$$\text{L.H.S.} = 4p^2 + p'^2$$

$$= 4 \frac{k^2}{\sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta} + \frac{k \cos^2 2\theta}{1}$$

$$= \frac{4k^2}{1/\cos^2 \theta + 1/\sin^2 \theta} + k^2 \cos^2 2\theta$$

$$= \frac{4k^2 (\sin^2 \theta \cos^2 \theta)}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} + k^2 \cos^2 2\theta$$

$$= \frac{k^2 (2 \sin \theta \cos \theta)^2}{1} + k^2 \cos^2 2\theta$$

$$= k^2 (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta)$$

$$= k^2 \cdot 1 = k^2 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

(e) দেখাও যে, $(\pm 4, 0)$ বিন্দু দুইটি থেকে
 $3x \cos \theta + 5y \sin \theta = 15$ এর উপর অঙ্গীকৃত
সম্বন্ধ দুইটির গুণফল θ মুক্ত হবে।

[য.'০৩; ঢ.'০৬; ব.'০৮; কু.'১৩]

প্রমাণ : $(4, 0)$ বিন্দু থেকে $3x \cos \theta + 5y \sin \theta - 15 = 0$ এর সম্বন্ধ

$$= \left| \frac{12 \cos \theta - 15}{\sqrt{9 \cos^2 \theta + 25 \sin^2 \theta}} \right| = d_1 \text{ (ধরি)}$$

$(-4, 0)$ বিন্দু থেকে $3x \cos \theta + 5y \sin \theta - 15 = 0$ এর সম্বন্ধ

$$= \left| \frac{-12 \cos \theta - 15}{\sqrt{9 \cos^2 \theta + 25 \sin^2 \theta}} \right| = d_2 \text{ (ধরি)}$$

সম্বন্ধ দূরত্ব দুইটির গুণফল,

$$\begin{aligned}
 d_1 d_2 &= \left| \frac{12 \cos \theta - 15}{\sqrt{9 \cos^2 \theta + 25 \sin^2 \theta}} \right| \\
 &\quad \left| \frac{-12 \cos \theta - 15}{\sqrt{9 \cos^2 \theta + 25 \sin^2 \theta}} \right| \\
 &= \left| \frac{225 - 144 \cos^2 \theta}{9 \cos^2 \theta + 25(1 - \cos^2 \theta)} \right| \\
 &= \left| \frac{9(25 - 16 \cos^2 \theta)}{(25 - 16 \cos^2 \theta)} \right| = 9; \text{ যা } \theta \text{ মুক্ত।} \\
 &\text{লম্ব দূরত্ব দুইটির গুণফল মুক্ত।} \\
 1(f) & (\sqrt{3}, 1) \text{ কিন্তু থেকে } \sqrt{3}x - y + 8 = 0 \\
 &\text{এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এই লম্ব } x \\
 &\text{-অক্ষের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।} \\
 &\quad [\text{কু. } '09]
 \end{aligned}$$

সমাধান : $(\sqrt{3}, 1)$ কিন্তু থেকে $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$

এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য = $\frac{|3 - 1 + 8|}{\sqrt{3 + 1}}$

$$= \frac{10}{2} = 5$$

২য় অংশ : প্রদত্ত রেখার ঢাল = $\sqrt{3}$

প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল = $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

লম্বরেখা x -অক্ষের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে

তার পরিমাণ = $\tan^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = 180^\circ - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$= 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

(g) $(2, 3)$ কিন্তু এবং $4x + 37 - 7 = 0$ রেখার সাপেক্ষে উক্ত কিন্তুর প্রতিবিস্তরের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

[প্র.ভ.প. '০৫; কু. '১১]

সমাধান : $(2, 3)$ কিন্তু হতে $4x + 3y - 7 = 0$

রেখার দূরত্ব = $\frac{|4 \times 2 + 3 \times 3 - 7|}{\sqrt{16 + 9}}$

$$= \frac{|8 + 9 - 7|}{5} = \frac{10}{5} = 2 \text{ একক}$$

$\therefore (2, 3)$ কিন্তু এবং প্রদত্ত রেখার সাপেক্ষে উক্ত কিন্তুর প্রতিবিস্তরের মধ্যবর্তী দূরত্ব = $2 \times 2 = 4$ একক

(h) প্রমাণ কর যে, $(\pm c, 0)$ কিন্তু দূটি হতে $bx \cos \theta + ay \sin \theta = ab$ এর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের গুণফল b^2 হয় যখন $a^2 = b^2 + c^2$

[কু. '০১]

প্রমাণ : $(c, 0)$ কিন্তু হতে প্রদত্ত রেখার উপর অঙ্কিত

$$\text{লম্ব} = \left| \frac{bc \cos \theta - ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \right| = d_1 \text{ (ধরি)}$$

এবং $(-c, 0)$ কিন্তু হতে প্রদত্ত রেখার উপর অঙ্কিত

$$\text{লম্ব} = \left| \frac{-bc \cos \theta - ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \right| = d_2 \text{ (ধরি)}$$

$$d_1 d_2 = \left| \frac{-(b^2 c^2 \cos^2 \theta - a^2 b^2)}{b^2 \cos^2 \theta + a^2 - a^2 \cos^2 \theta} \right|$$

$$= \left| \frac{-b^2(c^2 \cos^2 \theta - a^2)}{(b^2 - a^2) \cos^2 \theta + a^2} \right|$$

$$= \left| \frac{b^2(a^2 - c^2 \cos^2 \theta)}{-c^2 \cos^2 \theta + a^2} \right| \quad [\because a^2 = b^2 + c^2]$$

লম্বদ্বয়ের গুণফল = b^2

2(a) $3x - 2y = 1$ এবং $6x - 4y + 9 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। [মা. '০৪, '০৬]

সমাধান : প্রদত্ত রেখাদ্বয়,

$$3x - 2y = 1 \Rightarrow 3x - 2y - 1 = 0 \dots (1) \text{ এবং}$$

$$6x - 4y + 9 = 0 \Rightarrow 3x - 2y + \frac{9}{2} = 0 \dots (2)$$

(1) ও (2) সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$= \frac{\left| -1 - \frac{9}{2} \right|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{\left| -\frac{11}{2} \right|}{\sqrt{13}} = \frac{11}{2\sqrt{13}} \text{ একক।}$$

2(b) দেখাও যে, $4x + 7y - 26 = 0$ রেখার উপরিস্থিত যেকোন কিন্তু $3x + 4y - 12 = 0$ ও $5x + 12y - 52 = 0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী।

প্রমাণ : ধরি, $4x + 7y - 26 = 0$ রেখার উপর $P(\alpha, \beta)$ যেকোন একটি কিন্তু।

$$4\alpha + 7\beta - 26 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{26 - 7\beta}{4}$$

$3x + 4y - 12 = 0$ রেখা হতে $P(\alpha, \beta)$ এর দূরত্ব

$$\begin{aligned}
 &= \frac{|3\alpha + 4\beta - 12|}{\sqrt{9+16}} = \frac{\left|3\frac{26-7\beta}{4} + 4\beta - 12\right|}{5} \\
 &= \frac{|78 - 21\beta + 16\beta - 48|}{5 \times 4} = \frac{|30 - 5\beta|}{5 \times 4} \\
 &= \frac{|6 - \beta|}{4} \\
 5x + 12y - 52 &= 0 \text{ রেখা হতে } P(\alpha, \beta) \text{ এর দূরত্ব} \\
 &= \frac{|5\alpha + 12\beta - 52|}{\sqrt{25+144}} = \frac{\left|5\frac{26-7\beta}{4} + 12\beta - 52\right|}{13} \\
 &= \frac{|130 - 35\beta + 48\beta - 208|}{13 \times 4} = \frac{|-78 + 13\beta|}{5 \times 4} \\
 &= \frac{13|6 - \beta|}{13 \times 4} = \frac{|6 - \beta|}{4}
 \end{aligned}$$

$\therefore 4x + 7y - 26 = 0$ রেখার উপরিস্থিত যেকোন
বিন্দু $3x + 4y - 12 = 0$ ও $5x + 12y - 52 = 0$
রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী।

বিকল্প পদ্ধতি প্রশ্নমতে এটাই প্রমাণ করা যথেষ্ট যে,
 $3x + 4y - 12 = 0 \dots (1)$ ও

$5x + 12y - 52 = 0 \dots (2)$ রেখাদুয়োর অন্তর্ভুক্ত
কোণগুলোর সমদ্বিভক্তদুয়োর একটি $4x + 7y - 26 = 0$
এখন, (1) ও (2) রেখাদুয়োর অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর
সমদ্বিভক্তকের সমীকরণ,

$$\begin{aligned}
 &\frac{3x + 4y - 12}{\sqrt{9+16}} = \pm \frac{5x + 12y - 52}{\sqrt{25+144}} \\
 \Rightarrow \frac{3x + 4y - 12}{5} &= \pm \frac{5x + 12y - 52}{13} \\
 \Rightarrow 39x + 52y - 156 &= \pm (25x + 60y - 260) \\
 ‘-’ \text{ নিয়ে, } 64x + 112y - 416 &= 0 \\
 \Rightarrow 4x + 7y - 26 &= 0, \text{ যা একটি সমদ্বিভক্তকের} \\
 &\text{সমীকরণ।}
 \end{aligned}$$

3.(a) $12x - 5y + 26 = 0$ রেখা থেকে 2 একক
দূরে এবং $x + 5y = 13$ রেখার উপর অবস্থিত
বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $x + 5y = 13 \dots (1)$ রেখাস্থ বিন্দু
(α, β), $12x - 5y + 26 = 0 \dots (2)$ রেখা থেকে
2 একক দূরে অবস্থিত।

$$\begin{aligned}
 \alpha + 5\beta &= 13 \Rightarrow \alpha = 13 - 5\beta \quad (3) \\
 \text{এবং } \frac{|12\alpha - 5\beta + 26|}{\sqrt{144+25}} &= 2 \\
 \Rightarrow 12\alpha - 5\beta + 26 &= \pm 26 \\
 ‘+’ \text{ নিয়ে, } 12\alpha - 5\beta &= 0 \\
 \Rightarrow 12(13 - 5\beta) - 5\beta &= 0 \quad [(3) \text{ থারা }] \\
 \Rightarrow 156 - 60\beta - 5\beta &= 0 \Rightarrow 65\beta = 156 \\
 \Rightarrow \beta &= \frac{156}{65} = \frac{12}{5} \therefore \alpha = 13 - 5 \cdot \frac{12}{5} = 1 \\
 \text{আবার, ‘-’ নিয়ে, } 12\alpha - 5\beta + 26 &= 0 \\
 \Rightarrow 12(13 - 5\beta) - 5\beta + 26 &= 0 \quad [(3) \text{ থারা}] \\
 \Rightarrow 156 - 60\beta - 5\beta + 26 &= 0 \Rightarrow 65\beta = 208 \\
 \Rightarrow \beta &= \frac{208}{65} = \frac{16}{5} \therefore \alpha = 13 - 5 \cdot \frac{16}{5} = -3
 \end{aligned}$$

বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক $(1, \frac{12}{5}), (-3, \frac{16}{5})$

3(b) (x, y) বিন্দুটি $3x - 4y + 1 = 0$ ও
 $4x + 3y + 1 = 0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী হলে
দেখাও যে, $x + 7y = 0$ অথবা, $7x - y + 2 = 0$.
[চ.'০২; সি.'০৮]

সমাধান : $3x - 4y + 1 = 0$ রেখা হতে (x, y)

$$\text{বিন্দুর দূরত্ব} = \frac{|3x - 4y + 1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3x - 4y + 1|}{5} \text{ এবং}$$

$$\begin{aligned}
 4x + 3y + 1 &= 0 \text{ রেখা হতে } (x, y) \text{ বিন্দুর দূরত্ব} \\
 &= \frac{|4x + 3y + 1|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|4x + 3y + 1|}{5}
 \end{aligned}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{|3x - 4y + 1|}{5} = \frac{|4x + 3y + 1|}{5}$$

$$3x - 4y + 1 = \pm (4x + 3y + 1)$$

$$‘+’ \text{ নিয়ে পাই, } 3x - 4y + 1 = 4x + 3y + 1$$

$$\Rightarrow x + 7y = 0$$

$$‘-’ \text{ নিয়ে পাই, } 3x - 4y + 1 = -4x - 3y - 1$$

$$\Rightarrow 7x - y + 2 = 0$$

4.(a) $12x - 5y = 7$ রেখার 2 একক দূরবর্তী

সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'১০
কু.'০৮; য.'১০,'১২; রা.'১৩; চ.'১৮]

সমাধান ৪ ধরি, $12x - 5y = 7$ অর্থাৎ $12x - 5y - 7 = 0$
রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $12x - 5y + k = 0$

$$\text{এ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব} = \frac{|k+7|}{\sqrt{144+25}}$$

$$\text{প্রশ্নমতে}, \frac{|k+7|}{\sqrt{144+25}} = 2 \Rightarrow \frac{k+7}{13} = \pm 2$$

$$\Rightarrow k = \pm 26 - 7$$

$$\text{ক }= 19 \text{ অথবা, } k = -33$$

$$\text{নির্ণয় রেখার সমীকরণ } 12x - 5y + 19 = 0$$

$$\text{অথবা, } 12x - 5y - 33 = 0$$

4(b) (1, -2) কিন্তু থেকে $7\frac{1}{2}$ একক দূরবর্তী
এবং $3x + 4y = 7$ রেখাটির সমান্তরাল রেখাসমূহের
সমীকরণ নির্ণয় কর।

[সি.'১০; চ.'১২; য.'১৩; ঢা.'১৪; সি.'১৩; ব.'১৪]

সমাধান ৪ ধরি, প্রদত্ত রেখার সমান্তরাল রেখার
সমীকরণ $3x + 4y + k = 0 \dots \dots (1)$

$$(1) \text{ রেখা হতে } (1, -2) \text{ কিন্তুর দূরত্ব} = \frac{|3-8+k|}{\sqrt{9+16}}$$

$$\text{প্রশ্নমতে}, \frac{|3-8+k|}{\sqrt{9+16}} = 7\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{k-5}{5} = \pm \frac{15}{2}$$

$$2k - 10 = 75 \Rightarrow k = 85/2 \text{ এবং}$$

$$2k - 10 = -75 \Rightarrow k = -65/2$$

$$\text{নির্ণয় রেখাসমূহের সমীকরণ } 3x + 4y + \frac{85}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 6x + 8y + 85 = 0$$

$$\text{এবং } 3x + 4y - \frac{65}{2} = 0 \Rightarrow 6x + 8y = 65$$

4(c) $4x - 3y = 8$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং
তা থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত রেখাসমূহের সমীকরণ
নির্ণয় কর। [সি.'০৭, '১৩; ঢা.'১০, '১৩; য.'০৮;
মা.'০৫; চ.'০৯; ব.'১৩; সি.'১৪]

সমাধান ৪ ধরি, $4x - 3y = 8$ অর্থাৎ $4x - 3y - 8 = 0$
রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $4x - 3y + k = 0$

$$\text{এ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব} = \frac{|k+8|}{\sqrt{16+9}}$$

$$\text{প্রশ্নমতে}, \frac{|k+8|}{\sqrt{16+9}} = 2 \Rightarrow \frac{k+8}{5} = \pm 2$$

$$\Rightarrow k = \pm 10 - 8$$

$$\text{ক }= 10 - 8 = 2 \text{ এবং, } k = -10 - 8 = -18$$

$$\text{নির্ণয় রেখাসমূহের সমীকরণ } 4x - 3y + 2 = 0$$

$$\text{এবং } 4x - 3y - 18 = 0$$

4(d) (7, 17) কিন্তু দিয়ে যায় এবং (1, 9) কিন্তু
থেকে 6 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ
নির্ণয় কর।

সমাধান ৪ ধরি, (7, 17) কিন্তু দিয়ে যায় এবং প্রেরণ
সমীকরণ, $y - 17 = m(x - 7)$

$$\Rightarrow mx - y - 7m + 17 = 0 \dots \dots (1)$$

(1) রেখাটি থেকে (1, 9) কিন্তুর দূরত্ব

$$= \left| \frac{m-9-7m+17}{\sqrt{m^2+1}} \right| = \left| \frac{8-6m}{\sqrt{m^2+1}} \right|$$

$$\text{প্রশ্নমতে}, \left| \frac{8-6m}{\sqrt{m^2+1}} \right| = 6 \Rightarrow \left| \frac{4-3m}{\sqrt{m^2+1}} \right| = 3$$

$$\Rightarrow (4-3m)^2 = 9(m^2+1)$$

$$\Rightarrow 16 - 24m + 9m^2 = 9m^2 + 9$$

$$\Rightarrow 24m = 7 \Rightarrow m = 7/24$$

$$\text{নির্ণয় রেখার সমীকরণ } y - 17 = \frac{7}{24}(x - 7)$$

$$\Rightarrow 24y - 408 = 7x - 49$$

$$\Rightarrow 7x - 24y + 359 = 0$$

5. (a) এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যার ঢাল
-1 এবং মূলকিন্তু থেকে যার দূরত্ব 4 একক।

[কু.'০৬; সি.'০৯]

সমাধান ৪ ধরি, -1 ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ,
 $y = -1x + c \Rightarrow x + y - c = 0 \dots \dots (1)$

$$\text{মূলকিন্তু } (0,0) \text{ থেকে (1) এর দূরত্ব} = \frac{|-c|}{\sqrt{2}}$$

$$\text{প্রশ্নমতে}, \frac{|-c|}{\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow |c| = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow c = \pm 4\sqrt{2}$$

$$\text{নির্ণয় রেখার সমীকরণ, } x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$$

5. (b) মূলকিন্তু থেকে 7 একক দূরত্বে এবং $3x - 4y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[চ.'০৫; সি.'০৬,'১১; রা.' ০৯; দি.'০৯, '১১,'১২; ব.'১১; মা.'১৪]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ
 $4x + 3y + k = 0 \dots \quad (1)$

$$\text{মূলবিন্দু } (0,0) \text{ থেকে (1) এর দূরত্ব} = \frac{|k|}{\sqrt{16+9}}$$

$$\begin{aligned} \text{প্রশ্নমতে}, \frac{|k|}{\sqrt{16+9}} &= 7 \Rightarrow \frac{k}{5} = \pm 7 \\ &= \pm 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{নির্ণেয় রেখাসমূহের সমীকরণ } 4x + 3y + 35 &= 0 \\ \text{এবং } 4x + 3y - 35 &= 0 \end{aligned}$$

5(c) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x -অক্ষের ধনাওক দিকের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে এবং মূলবিন্দু থেকে 4 একক দূরে অবস্থিত। [চ.'১৩]

সমাধান : ধরি, রেখাটির সমীকরণ,

$$y = x \tan 60^\circ + c \Rightarrow y = \sqrt{3}x + c$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x - y + c = 0 \quad \dots(1)$$

$$\text{মূলবিন্দু } (0,0) \text{ থেকে (1) এর দূরত্ব} = \frac{|c|}{\sqrt{3+1}} = \frac{|c|}{2}$$

$$\text{প্রশ্নমতে}, \frac{|c|}{2} = 4 \Rightarrow \frac{c}{2} = \pm 4 \Rightarrow c = \pm 8$$

$$\text{রেখাটির সমীকরণ } \sqrt{3}x - y + 8 = 0$$

$$\text{অথবা, } \sqrt{3}x - y - 8 = 0$$

5(d) একটি সরলরেখা অক্ষ দুইটি থেকে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে। মূল বিন্দু থেকে তার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 4 একক। তার সমীকরণ বের কর। [ব.'১১; কু.'১১; সি.'১৩]

সমাধান : ধরি, অক্ষ দুইটি থেকে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে এবং সরলরেখার সমীকরণ,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow x + y = a \dots(i), \text{ যেখানে } a > 0.$$

মূল বিন্দু থেকে (i) এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

$$\frac{|0+0-a|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \Rightarrow |-a| = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a = 4 \quad [\because a > 0.]$$

$$\text{নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ, } x + y = 4\sqrt{2}$$

6(a) $y = 2x + 1$ ও $2y - x = 4$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমন্বিতক য-অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

[রা.'১১,'১৮; সি.'০৫; ব.'১২; কু.'১৮; চুয়েট'০৮-'০৯]

সমাধান : প্রদত্ত $y = 2x + 1$ অর্থাৎ $2x - y + 1 = 0$ ও $2y - x = 4$ অর্থাৎ $x - 2y + 4 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সমন্বিতকের সমীকরণ,

$$\frac{2x-y+1}{\sqrt{4+1}} = \pm \frac{x-2y+4}{\sqrt{1+4}}$$

$$\Rightarrow 2x - y + 1 = \pm (x - 2y + 4)$$

$$+' \text{ নিয়ে, } x + y = 3 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1, \text{ যা}$$

y -অক্ষকে P(0, 3) বিন্দুতে ছেদ করে।

$$'- \text{ নিয়ে, } 2x - y + 1 = -x + 2y - 4$$

$$\Rightarrow 3x - 3y = -5 \Rightarrow \frac{x}{-5/3} + \frac{y}{5/3} = 1, \text{ যা}$$

y -অক্ষকে Q(0, $\frac{5}{3}$) বিন্দুতে ছেদ করে।

$$PQ \text{ এর দূরত্ব} = |3 - \frac{5}{3}| = |\frac{4}{3}| = 1\frac{1}{3}$$

6(b) দেখাও যে, (0,1) বিন্দুটি $12x - 5y + 1 = 0$ ও $5x + 12y - 16 = 0$ রেখাদৰ্যের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর একটি সমন্বিতকের উপর অবস্থিত।

[রা.'০৬; সি.'০৮,'১৮; কু.'১১,'১৩; চ.'০৮; য.'১১; দি.'১৩]

প্রমাণ প্রশ্নমতে এটাই প্রমাণ করা যথেষ্ট যে, $12x - 5y + 1 = 0$ ও $5x + 12y - 16 = 0$ রেখাদৰ্য হতে (0,1) বিন্দুটি সমদূরবর্তী।

$$(1) \text{ থেকে } (0,1) \text{ বিন্দুর দূরত্ব} = \frac{|0-5+1|}{\sqrt{144+25}}$$

$$= \frac{|-4|}{13} = \frac{4}{13}$$

$$(2) \text{ থেকে } (0,1) \text{ বিন্দুর দূরত্ব} = \frac{|0+12-16|}{\sqrt{25+144}}$$

$$= \frac{|-4|}{13} = \frac{4}{13}$$

প্রদত্ত রেখাদৰ্য হতে (0,1) বিন্দুটি সমদূরবর্তী।

(0,1) বিন্দুটি প্রদত্ত রেখাদৰ্যের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর একটি সমন্বিতকের উপর অবস্থিত।

বিকল্প পদ্ধতি : পদ্ধতি রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমন্বিতকরের সমীকরণ,

$$\frac{12x - 5y + 1}{\sqrt{144 + 25}} = \pm \frac{5x + 12y - 16}{\sqrt{25 + 144}}$$

$$\Rightarrow 12x - 5y + 1 = \pm (5x + 12y - 16)$$

$$+' নিয়ে, 12x - 5y + 1 = 5x + 12y - 16$$

$$\Rightarrow 7x - 17y + 17 = 0 \dots(1)$$

$$\text{ধরি, } f(x, y) \equiv 7x - 17y + 17 = 0$$

$$'-' নিয়ে, 12x - 5y + 1 = -5x - 12y + 16$$

$$\Rightarrow 17x + 7y - 15 = 0 \dots(2)$$

$$\text{ধরি, } g(x, y) \equiv 17x + 7y - 15 = 0$$

$$\text{এখন, } f(0, 1) = 7.0 - 17.1 + 17 = 0 \text{ এবং}$$

$$g(0, 1) = 17.0 + 7.1 - 15 = -8$$

(0,1) বিন্দুটি (1) কে সিদ্ধ করে অর্থাৎ (0,1)

বিন্দুটি (1) দ্বারা সূচিত সমন্বিতকরের উপর অবস্থিত।

6(c) $4y - 3x = 3$ এবং $3y - 4x = 5$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব.'০২; দি.'০৯]

$$\text{সমাধান : } 4y - 3x = 3 \Rightarrow 3x - 4y + 3 = 0$$

$$\text{কে } a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ এর সাথে এবং } 3y - 4x = 5$$

$$\Rightarrow 4x - 3y + 5 = 0 \text{ কে } a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

এর সাথে তুলনা করে পাই,

$$\begin{aligned} a_1a_2 + b_1b_2 &= 3 \times 4 + (-4) \times (-3) \\ &= 12 + 12 = 24 > 0 \end{aligned}$$

রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণের সমন্বিতকরের

$$\text{সমীকরণ, } \frac{3x - 4y + 3}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{4x - 3y + 5}{\sqrt{16 + 9}}$$

$$\Rightarrow 3x - 4y + 3 = 4x - 3y + 5$$

$$\Rightarrow -x - y - 2 = 0 \therefore x + y + 2 = 0 \text{ (Ans.)}$$

6(d) $3x + 4y = 11$ এবং $12x - 5y - 2 = 0$

রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূচকোণের সমন্বিতকরের

সমীকরণ নির্ণয় কর।

[প্র.ভ.প.'০৬; ব.'০৯]

$$\text{সমাধান : } 3x + 4y = 11 \Rightarrow 3x + 4y - 11 = 0 \text{ কে}$$

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ এর সাথে এবং } 12x - 5y - 2 = 0$$

$$\text{কে } a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ এর সাথে তুলনা করে হ'ল :$$

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 3 \times 12 + 4 \times (-5)$$

$$= 36 - 20 = > 0$$

রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূচকোণের সমন্বিতকরে

$$\text{সমীকরণ, } \frac{3x + 4y - 11}{\sqrt{9 + 16}} = -\frac{12x - 5y - 2}{\sqrt{144 + 25}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x + 4y - 11}{5} = -\frac{12x - 5y - 2}{13}$$

$$\Rightarrow 39x + 52y - 143 = -60x + 25y + 10$$

$$\Rightarrow 99x + 27y - 153 = 0$$

$$11x + 3y - 17 = 0 \text{ (Ans.)}$$

7(a) $4x - 4y + 3 = 0$ এবং $x + 7y - 2 = 0$

রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমন্বিতকরের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, সমন্বিতকরের পরস্পর লম্ব। এদের কোনটি মূলবিন্দু ধারণকারী কোণের সমন্বিতক।

[য.'০২, '০৭, '১২]

সমাধান: প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমন্বিতকরের সমীকরণ

$$\frac{4x - 4y + 3}{\sqrt{16 + 16}} = \pm \frac{x + 7y - 2}{\sqrt{1 + 49}}$$

$$\Rightarrow \frac{4x - 4y + 3}{4\sqrt{2}} = \pm \frac{x + 7y - 2}{5\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 20x - 20y + 15 = \pm (4x + 28y - 8)$$

$$+' নিয়ে, 20x - 20y + 15 = 4x + 28y - 8$$

$$\Rightarrow 16x - 48y + 23 = 0 \quad (1)$$

$$'-' নিয়ে, 20x - 20y + 15 = -4x - 28y + 8$$

$$\Rightarrow 24x + 8y + 7 = 0 \dots (2)$$

$$\text{২য় অংশ : (1) রেখার ঢাল} = -\frac{16}{-48} = \frac{1}{3}$$

$$(2) \text{ রেখার ঢাল} = -\frac{24}{8} = -3$$

$$\text{এ ঢাল দুইটির গুণফল} = \frac{1}{3} \times -3 = -1$$

সমন্বিতকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

৩য় অংশ : প্রদত্ত রেখা দুইটির শ্রবণ পদ 3 ও -2 বিপরীত চিহ্নযুক্ত বলে '-' চিহ্ন নিয়ে প্রাপ্ত সমন্বিতক সমীকরণ অর্থাৎ $24x + 8y + 7 = 0$ মূলবিন্দু ধারণকারী কোণের সমন্বিতক।

7(b) $4x + 3y + 2 = 0$ এবং $12x + 5y + 13 = 0$

রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত যে কোণটি মূলবিন্দু ধারণ কারে তার সমন্বিতকরের সমীকরণ নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৭]

সমাধান প্রদত্ত রেখা দুইটির ধূব পদ 2 ও 13
সমচিহ্নযুক্ত।

মূলবিন্দু ধারণকারী কোণের সমন্বিতভক্তের
সমীকরণ $\frac{4x + 3y + 2}{\sqrt{16+9}} = \frac{12x + 5y + 13}{\sqrt{144+25}}$
 $\Rightarrow \frac{4x + 3y + 2}{5} = \frac{12x + 5y + 13}{13}$
 $\Rightarrow 60x + 25y + 65 = 52x + 39y + 26$
 $8x - 14y + 39 = 0$ (Ans.)

7(c) $x + y + 1 = 0$ রেখাটি $3x - 4y + 3 = 0$ ও AB রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর একটির সমন্বিতভক্ত। AB রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, AB রেখার ঢাল m_2 , $x + y + 1 = 0$
... (1) রেখার ঢাল, $m = -1$ এবং $3x - 4y + 3 = 0$

... (2) রেখার ঢাল, $m_1 = \frac{3}{4}$.

(1), (2) ও AB রেখাত্রয়ের

ছেদবিন্দু $= \left(\frac{3+4}{-4-3}, \frac{3-3}{-4-3} \right) = (-1, 0)$

(2) ও (1) এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1} \frac{m_1 - m}{1 + m_1 m}$ এবং

(1) ও AB এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1} \frac{m - m_2}{1 + mm_2}$

পরস্পর সমান।

$$\frac{m_1 - m}{1 + m_1 m} = \frac{m - m_2}{1 + mm_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{4} + 1}{1 + (-1)\frac{3}{4}} = \frac{-1 - m_2}{1 - m_2}$$

$$\Rightarrow \frac{4+3}{4-3} = \frac{-1 - m_2}{1 - m_2} \Rightarrow 7 = \frac{-1 - m_2}{1 - m_2}$$

$$\Rightarrow 7 - 7m_2 = -1 - m_2 \Rightarrow 6m_2 = 8$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{4}{3}$$

AB রেখার সমীকরণ $y - 0 = \frac{4}{3}(x + 1)$

$$\Rightarrow 3y = 4x + 4 \therefore 4x - 3y + 4 = 0$$
 (Ans.)

[MCQ এর জন্য, $(1^2 + 1^2)(3x - 4y + 3) -$

$$2(1 \times 3 + 1 \times -4)(x + y + 1) = 0]$$

8(a) (0, 0), (0, 3) ও (4, 0) বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তর্দিখভক্ত নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তারা সমবিন্দু। [ঢ.'০৮; কু.'১০; সি.'১১]
সমাধান : মনে করি, ABC
A(0,0)

ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি A(0,0),

B(0, 3) ও C(4, 0) এবং AD,

BE ও CF ত্রিভুজটির কোণগুলির

অন্তর্দিখভক্ত BC, CA ও AB

বাহুকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে ছেদ করে।

$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, AC = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$$

$$AB = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$$

$\angle A$ এর অন্তর্দিখভক্ত AD বলে, D বিন্দু BC কে

$$AB : AC = 3 : 4$$
 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করবে।
 $D = \left(\frac{3.4 + 4.0}{3+4}, \frac{3.0 + 4.3}{3+4} \right) = \left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7} \right)$

$$E = \left(\frac{3.4 + 5.0}{3+5}, \frac{3.0 + 5.0}{3+5} \right) = \left(\frac{3}{2}, 0 \right)$$

$$F = \left(\frac{4.0 + 5.0}{4+5}, \frac{4.3 + 5.0}{4+5} \right) = \left(0, \frac{4}{3} \right)$$

AD অন্তর্দিখভক্তের সমীকরণ,

$$y = \frac{12/7}{12/7} x \quad y = x \quad \dots (1)$$

BE অন্তর্দিখভক্তের সমীকরণ,

$$(x - 0)(0 - 0) - (y - 3)(0 - \frac{3}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow 3x + \frac{3}{2}y - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow 6x + 3y - 9 = 0$$

$$2x + y - 3 = 0 \quad \dots (2)$$

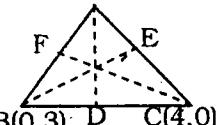
CF অন্তর্দিখভক্তের সমীকরণ,

$$(x - 4)(0 - \frac{4}{3}) - (y - 0)(4 - 0) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{3}x + \frac{16}{3} - 4y = 0 \Rightarrow -4x - 12y + 16 = 0$$

$$x + 3y - 4 = 0 \quad \dots (3)$$

বিকল্প পদ্ধতি : ধরি, OAB ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি O(0,0), A(4, 0) ও B(0, 3).



ସଫଟଟଃ OA ଓ OB ବାହୁ ଯଥାକ୍ରମେ x ଓ y ଅକ୍ଷ ବରାବର ।

OA ବାହୁର ସମୀକରଣ $y = 0$

OB ବାହୁର ସମୀକରଣ $x = 0$

$$\text{ଏବଂ AB ବାହୁର ସମୀକରଣ } \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \\ \Rightarrow 3x + 4y - 12 = 0$$

OAB ତ୍ରିଭୁଜଟିର $\angle AOB = 90^\circ$

$\angle OAB$ ଓ $\angle OBA$ ସୂଚକୋଣ ।

ସଫଟଟଃ $\angle AOB$ ଏର ସମଦିଖିତକେର ଢଳ ଧନାଅକ ।

ଅତଏବ, $\angle AOB$ ଏର ସମଦିଖିତକେର ସମୀକରଣ

$$\frac{y}{\sqrt{1^2}} = \frac{x}{\sqrt{1^2}} \quad \therefore y = x \dots (1)$$

BO ଓ BA ବାହୁର ଜନ୍ୟ,

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 1 \cdot 3 + 0.4 > 0$$

$\angle OBA$ ଏର ସମଦିଖିତକେର ସମୀକରଣ

$$\frac{3x + 4y - 12}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1^2}}$$

$$\Rightarrow 3x + 4y - 12 = -5x$$

$$\Rightarrow 8x + 4y - 12 = 0$$

$$2x + y - 3 = 0 \quad (2)$$

ଆବାର, ଏଥିମ, AO ଓ AB ବାହୁର ଜନ୍ୟ,

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0.3 + 1.4 > 0$$

$\angle OAB$ ଏର ସମଦିଖିତକେର ସମୀକରଣ

$$\frac{3x + 4y - 12}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{y}{\sqrt{1^2}}$$

$$\Rightarrow 3x + 4y - 12 = -5y$$

$$\Rightarrow 3x + 9y - 12 = 0$$

$$\therefore x + 3y - 4 = 0 \quad (3)$$

ଦିତୀୟ ଅଂଶ ୪ ସମୀକରଣ (1) ଓ (2) ସମାଧାନ କରେ ପାଇ,

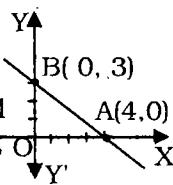
$x = 1, y = 1$ ଯା ସମୀକରଣ (3) କେବେ ସିଦ୍ଧ କରେ ।

ΔABC ଏର କୋଣଗୁଲିର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଵିଖିତକାତ୍ରୟ ସମବିଦୁ ।

8(b) ଯେ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁଗୁଲୋର ସମୀକରଣ $4x + 3y - 12 = 0, 3x - 4y + 16 = 0$ ଏବଂ $4x - 3y - 12 = 0$ ତାର ଅନ୍ତଃକେନ୍ଦ୍ର ନିର୍ଣ୍ୟ କର ।

[ସି.'୦୩]

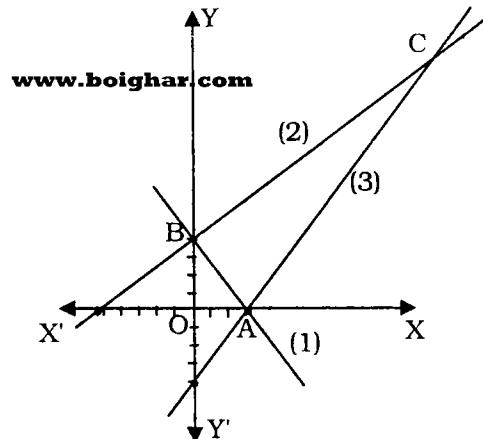
ସମାଧାନ: ଧରି, ABC ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ ତିନଟି



$$AB \equiv 4x + 3y - 12 = 0 \dots (1) \text{ i.e., } \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$$

$$BC \equiv 3x - 4y + 16 = 0 \dots (2) \text{ i.e., } \frac{x}{-\frac{16}{3}} + \frac{y}{4} = 1$$

$$CA \equiv 4x - 3y - 12 = 0 \dots (3) \text{ i.e., } \frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1$$



ଚିତ୍ରେ ABC ତ୍ରିଭୁଜଟି ଦେଖାନ୍ତେ ହୁଏଛେ ।

ସମୀକରଣ ତିନଟିର ଧ୍ରୁପଦ ‘-’ କରେ ପାଇ,

$$4x + 3y - 12 = 0, -3x + 4y - 16 = 0,$$

$$4x - 3y - 12 = 0$$

$\angle ABC$ ଏବଂ $\angle BAC$ କୋଣ ଦୁଇଟିର ମଧ୍ୟେ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ନାଇ । ଅତଏବ, $\angle ABC$ ଏର ସମଦିଖିତକ

$$\frac{4x + 3y - 12}{\sqrt{16+9}} = -\frac{-3x + 4y - 16}{\sqrt{9+16}}$$

$$\Rightarrow 4x + 3y - 12 = 3x - 4y + 16$$

$$\Rightarrow x + 7y - 28 = 0 \dots (4) \text{ ଏବଂ }$$

$\angle BAC$ ଏର ସମଦିଖିତକ

$$\frac{4x + 3y - 12}{\sqrt{16+9}} = -\frac{4x - 3y - 12}{\sqrt{16+9}}$$

$$\Rightarrow 4x + 3y - 12 = -4x + 3y + 12$$

$$\Rightarrow 8x = 24 \Rightarrow x = 3$$

$$(4) \Rightarrow 3 + 7y - 28 = 0 \Rightarrow y = \frac{25}{7}$$

ପ୍ରଦତ୍ତ ରେଖା ତିନଟି ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ତ୍ରିଭୁଜର

$$\text{ଅନ୍ତଃକେନ୍ଦ୍ର } (3, \frac{25}{7})$$

8(c) যে ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমীকরণ $x = 3, y = 4$ এবং $4x + 3y = 12$ তার কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, ABC ত্রিভুজের AB, BC ও CA বাহু তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে $x = 3 \dots (1)$

$$y = 4 \quad (2) \text{ ও } 4x + 3y = 12 \dots (3) \text{ অর্থাৎ}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$$

চিত্রে ABC ত্রিভুজটি দেখানো

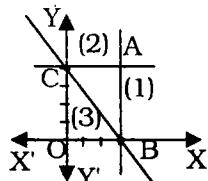
হয়েছে। সমীকরণ তিনটির ধ্রুবপদ

'-' করে পাই,

$$x - 3 = 0 \dots (1), y - 4 = 0 \dots (2) \text{ এবং}$$

$$4x + 3y - 12 = 0 \dots (3)$$

চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে, ত্রিভুজটির $\angle BAC$ কোণ মূলবিন্দু ধারণ করে কিন্তু $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ কোণ দুইটি মূলবিন্দু ধারণ করে না।



$$\angle BAC \text{ এর সমদ্বিখণ্ডক } \frac{x-3}{\sqrt{1}} = \frac{y-4}{\sqrt{1}}$$

$$\Rightarrow x - 3 = y - 4 \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

$$\angle ABC \text{ এর সমদ্বিখণ্ডক } \frac{x-3}{\sqrt{1}} = -\frac{4x+3y-12}{\sqrt{16+9}}$$

$$\Rightarrow 5(x-3) = -4x - 3y + 12$$

$$\Rightarrow 9x + 3y - 15 - 12 = 0 \Rightarrow 9x + 3y - 27 = 0$$

$$\Rightarrow 3x + y - 9 = 0$$

$$\angle ACB \text{ এর সমদ্বিখণ্ডক } \frac{y-4}{\sqrt{1}} = -\frac{4x+3y-12}{\sqrt{16+9}}$$

$$\Rightarrow 5(y-4) = -4x - 3y + 12$$

$$\Rightarrow 5y - 20 + 4x + 3y - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 4x + 8y - 32 = 0 \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$$

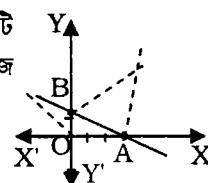
ত্রিভুজের কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

$$x - y + 1 = 0, 3x + y - 9 = 0 \text{ এবং } x + 2y - 8 = 0$$

8(d) $5x + 12y = 15$ এবং অক্ষ দুইটি সমন্বয়ে গঠিত ত্রিভুজের কোণ তিনটির বর্হিদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, প্রদত্ত রেখাটি OA অক্ষদুইটি সমন্বয়ে OAB ত্রিভুজ গঠন করে যার বাহু তিনটি

$$OA = y = 0 \dots (1)$$



$$OB = x = 0 \dots (2) \text{ এবং}$$

$$AB = 5x + 12y = 15 \dots (3)$$

$$\text{i.e., } \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$$

চিত্রে OAB ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে। চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে, ত্রিভুজটির $\angle AOB = 90^\circ$

অতএব, $\angle OAB$ ও $\angle OBA$ এর বহিঃস্থ কোণ দুইটি স্থূলকোণ এবং $\angle AOB$ এর বহির্দ্বিখণ্ডকের ঢাল শূণ্যাঙ্ক।

(1) ও (2) এর অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB$ কোণের বহির্দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ, $\frac{x}{\sqrt{1}} = -\frac{y}{\sqrt{1}} \Rightarrow x + y = 0$

(1) ও (3) সমীকরণে x-এর সহগদ্বয়ের গুণফল + y-এর সহগদ্বয়ের গুণফল $= 0 \times 5 + 1 \times 12 = 12 > 0$

(1) ও (3) এর অন্তর্ভুক্ত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডকের

$$\text{সমীকরণ, } \frac{5x + 12y - 15}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{y}{\sqrt{1}}$$

$$\Rightarrow 5x + 12y - 15 = 13y$$

$$\Rightarrow 5x - y - 15 = 0$$

আবার, (2) ও (3) সমীকরণে, x-এর সহগদ্বয়ের গুণফল + y-এর সহগদ্বয়ের গুণফল $= 1 \times 5 + 0 \times 12 = 5 > 0$

(2) ও (3) এর অন্তর্ভুক্ত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডকের

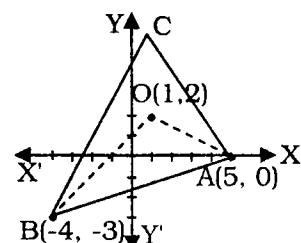
$$\text{সমীকরণ, } \frac{5x + 12y - 15}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{x}{\sqrt{1}}$$

$$\Rightarrow 5x + 12y - 15 = 13x$$

$$\Rightarrow 8x - 12y + 15 = 0$$

8(e) ΔABC এর শীর্ষ দুইটি $A(5, 0)$, $B(-4, -3)$ এবং অন্তঃকেন্দ্র $(1, 2)$ হলে, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান :



ধরি, ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র $O(1, 2)$.

$$AB \text{ এর ঢাল} = \frac{0+3}{5+4} = \frac{1}{3}$$

$$AO \text{ এর ঢাল} = \frac{0-2}{5-1} = -\frac{1}{2}$$

$$BO \text{ এর ঢাল} = \frac{2+3}{1+4} = 1$$

AC রেখার ঢাল m_1 হলে,

$$\begin{aligned} \frac{m_1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}m_1} &= \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 + (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{3}{4}} \Rightarrow \frac{2m_1 + 1}{2 - m_1} = \frac{-3 - 2}{8 - 3} \\ \Rightarrow \frac{2m_1 + 1}{2 - m_1} &= -1 \Rightarrow 2m_1 + 1 = -2 + m_1 \\ \Rightarrow m_1 &= -3 \end{aligned}$$

AC রেখার সমীকরণ, $y - 0 = -3(x - 5)$

$$\Rightarrow y = -3x + 15 \quad \dots(1)$$

আবার, BC রেখার ঢাল m_2 হলে,

$$\begin{aligned} \frac{m_2 - 1}{1 + 1 \cdot m_2} &= \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow 2m_2 - 2 &= 1 + m_2 \Rightarrow m_2 = 3 \\ BC \text{ রেখার সমীকরণ}, & y + 3 = 3(x + 4) \\ \Rightarrow y + 3 &= 3x + 12 \\ \Rightarrow -3x + 15 + 3 &= 3x + 12 \quad [(1) \text{ দ্বারা}] \\ \Rightarrow 6x &= 6 \Rightarrow x = 1 \\ (1) \text{ হতে পাই}, & y = -3 \cdot 1 + 15 = 12 \\ (1) \text{ ও } (2) \text{ এর ছেদবিন্দু}, & C \equiv (1, 12) \end{aligned}$$

বিকল্প পদ্ধতি : ধরি, ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র $O(1, 2)$.

$$\begin{aligned} AB \text{ রেখার সমীকরণ}, & \frac{x-5}{5+4} = \frac{y-0}{0+3} \\ \Rightarrow x-5 &= 3y \Rightarrow x-3y-5=0 \\ AO \text{ রেখার সমীকরণ}, & \frac{x-5}{5-1} = \frac{y-0}{0-2} \\ \Rightarrow -2x+10 &= 4y \Rightarrow x+2y-5=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BO \text{ রেখার সমীকরণ}, & \frac{x-1}{1+4} = \frac{y-2}{2+3} \\ \Rightarrow x-1 &= y-2 \Rightarrow x-y+1=0 \\ \text{এখন, } AC \text{ ও } AB \text{ এর অন্তর্ভুক্ত কোণের সমন্বিতক} \\ AO. \text{ অতএব, } AC \text{ রেখার সমীকরণ}, & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1^2 + 2^2)(x - 3y - 5) - 2\{1 \cdot 1 + (-3)(2)\} \\ (x + 2y - 5) &= 0 \\ \Rightarrow 5(x - 3y - 5) + 10(x + 2y - 5) &= 0 \\ \Rightarrow x - 3y - 5 + 2x + 4y - 10 &= 0 \\ \Rightarrow 3x + y - 15 &= 0 \Rightarrow y = -3x + 15 \dots(1) \end{aligned}$$

আবার, BA ও BC এর অন্তর্ভুক্ত কোণের সমন্বিতক

$$\begin{aligned} BO. \text{ অতএব, } BC \text{ রেখার সমীকরণ}, \\ (1^2 + 1^2)(x - 3y - 5) - 2\{1 \cdot 1 + (-3)(-1)\} \\ (x - y + 1) &= 0 \\ \Rightarrow x - 3y - 5 - 4(x - y + 1) &= 0 \\ \Rightarrow x - 3y - 5 - 4x + 4y - 4 &= 0 \\ \Rightarrow -3x + -3x + 15 - 9 &= 0 \quad [(1) \text{ দ্বারা}] \\ \Rightarrow -6x &= -6 \Rightarrow x = 1 \\ (1) \text{ হতে পাই}, & y = -3 \cdot 1 + 15 = 12 \\ AC \text{ ও } BC \text{ এর ছেদবিন্দু } C &\equiv (1, 12) \end{aligned}$$

9. $y = 2x + 1$ ও $2y - x = 4$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

(a) মূলবিন্দু ও প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(b) রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের সমন্বিতক $y -$ অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে PQ এর দূরত্ব নির্ণয় কর। [ঝ.'১১,'১৮; সি.'০৫; ব.'১২; কু.'১৮; চুয়েট'০৮-০৯]

(c) মূলবিন্দু থেকে $\sqrt{5}$ একক দূরত্বে এবং $2y - x = 4$ রেখার উপর লম্ব রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : (a) ধরি, প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $2x - y + 1 + k(x - 2y + 4) = 0$ (i) ; যা মূলবিন্দু $(0, 0)$ দিয়ে অতিক্রম করে।

$$2 \times 0 - 0 + 1 + k(0 - 2 \times 0 + 4) = 0$$

$$\Rightarrow 4k = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore (i) \text{ হতে পাই}, 2x - y + 1 - \frac{1}{4}(x - 2y + 4) = 0$$

$$\Rightarrow 8x - 4y + 4 - x + 2y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 7x - 2y = 0 \text{ (Ans.)}$$

(b) প্রশ্নমালা III G এর 6(a) দ্রষ্টব্য।

(c) ধরি, $2y - x = 4 \Rightarrow x - 2y + 4 = 0$
রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ, $2x + y + k = 0 \dots \dots (i)$

$$\text{মূলবিন্দু } (0,0) \text{ হতে (i) এর লম্ব দূরত্ব} = \frac{|k|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{|k|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow k = \pm 5$$

রেখাসমূহের সমীকরণ, $2x + y \pm 5 = 0$

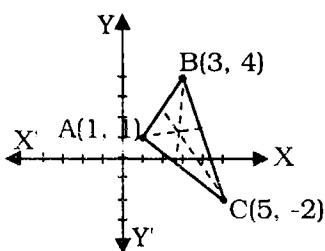
10. $A(1, 1)$, $B(3, 4)$ এবং $C(5, -2)$ বিন্দু
তিনটি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

- (a) ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
 (b) AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার
সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০৬,'০৮; ঢা.'১১;
কু.'১৮; মা.বো.'০৭; ঘ.'০৯]
 (c) ABC ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তর্দ্রিখভক নির্ণয়
কর।

$$\text{সমাধান: (a) } ABC \text{ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} |4 - 6 + 5 - (3 + 20 - 2)| = \frac{1}{2} |3 - 21| = 9 \text{ বর্গ একক।}$$

(b) প্রশ্নমালা III E এর 3(a) দ্রষ্টব্য।

(c) সমাধান:



$$AB, BC \text{ ও } CA \text{ বাহু তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে,
(}x-1)(1-4)-(y-1)(1-3)=0\\= \quad + \quad 2y \quad 0$$

$$\Rightarrow 3x - 2y - 1 = 0 \quad (1)$$

$$(x-3)(4+2)-(y-4)(3-5)=0$$

$$\Rightarrow 6x - 18 + 2y - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 3x + y - 13 = 0 \dots \dots (2) \text{ এবং}$$

$$(x-1)(1+2)-(y-1)(1-5)=0$$

$$\Rightarrow 3x - 3 + 4y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 3x + 4y - 7 = 0 \dots \dots (3)$$

চিত্রে ABC ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে।

চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে, ত্রিভুজটির $\angle BAC$ কোণ
মূলবিন্দু ধারণ করে কিন্তু $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ কোণ
দুইটি মূলবিন্দু ধারণ করে না।

$$AB = 3x - 2y - 1 = 0 \quad (1)$$

$$BC = 3x + y - 13 = 0$$

$$CA = 3x + 4y - 7 = 0$$

$\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক

$$\frac{3x - 2y - 1}{\sqrt{9+4}} = \frac{3x + 4y - 7}{\sqrt{9+16}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x - 2y - 1}{\sqrt{13}} = \frac{3x + 4y - 7}{5}$$

$$\Rightarrow 15x - 10y - 5 = 3\sqrt{13}x + 4\sqrt{13}y - 7\sqrt{13}$$

$$\Rightarrow (15 - 3\sqrt{13})x - (10 + 4\sqrt{13})y - 5 + 7\sqrt{13} = 0$$

$\angle ABC$ এর সমদ্বিখণ্ডক

$$\frac{3x - 2y - 1}{\sqrt{9+4}} = - \frac{3x + y - 13}{\sqrt{9+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x - 2y - 1}{\sqrt{13}} = - \frac{3x + y - 13}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{13}x + \sqrt{13}y - 13\sqrt{13} = - 3\sqrt{10}x + 2\sqrt{10} + \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow (3\sqrt{13} + 3\sqrt{10})x + (\sqrt{13} - 2\sqrt{10})y - 13\sqrt{13} - \sqrt{10} = 0$$

$\angle ACB$ এর সমদ্বিখণ্ডক

$$\frac{3x + 4y - 7}{\sqrt{9+16}} = - \frac{3x + y - 13}{\sqrt{9+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x + 4y - 7}{5} = - \frac{3x + y - 13}{\sqrt{10}}$$

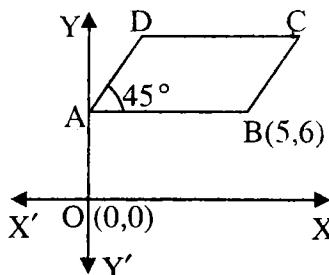
$$\Rightarrow 15x + 5y - 65 = - 3\sqrt{10}x - 4\sqrt{10}y + 7\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow (15 + 3\sqrt{10})x + (5 + 4\sqrt{10})y - 65 - 7\sqrt{10} = 0$$

ত্রিভুজের কোণগুলির সমন্বিতভক্তের সমীকরণ,
 $(15 - 3\sqrt{13})x - (10 + 4\sqrt{13})y - 5 + 7\sqrt{13} = 0,$
 $(3\sqrt{13} + 3\sqrt{10})x + (\sqrt{13} - 2\sqrt{10})y - 13\sqrt{13} - \sqrt{10} = 0$ এবং

$$(15 + 3\sqrt{10})x + (5 + 4\sqrt{10})y - 65 - 7\sqrt{10} = 0$$

11.



(a) AD বাহুর ঢাল $m = \tan 45^\circ = 1$, y অক্ষের দ্বারা c = B বিন্দুর y স্থানাঙ্ক = 6.

AD বাহুর সমীকরণ $y = mx + c$

$$\Rightarrow y = x + 6 = x + 6 \Rightarrow x - y + 6 = 0$$

(b) x অক্ষের সমান্তরাল এবং B(5, 6) কিন্দুগামী AB বাহুর সমীকরণ $y = 6$

B(5, 6) কিন্দুগামী এবং AD এর সমান্তরাল BC বাহুর সমীকরণ $x - y = 5 - 6 \Rightarrow x - y + 1 = 0$
 এখানে $a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \times 1 + 1 \times -1 = -1 < 0$
 এবং $\angle ABC$ একটি স্থূলকোণ।

ABC কোণের সমন্বিতভক্তের সমীকরণ,

$$\frac{x - y + 1}{\sqrt{1+1}} = -\frac{y + 6}{\sqrt{1}}$$

$$\Rightarrow x - y + 1 = -\sqrt{2}y - 6\sqrt{2}$$

$$x + (\sqrt{2} - 1)y + 1 + 6\sqrt{2} = 0$$

(c) এখানে A এর স্থানাঙ্ক $(0, 6)$

ধরি, $AB \equiv y = 6$ বাহুর সমান্তরাল DC বাহুর সমীকরণ $y = k$

$y = k$ এবং $x - y + 6 = 0 \Rightarrow x = y - 6$ এর ছেদ বিন্দু D $(k - 6, k)$.

$y = k$ এবং $x - y + 1 = 0 \Rightarrow x = y - 1$ এর ছেদ বিন্দু C $(k - 1, k)$

এখন, $AD = BC$

$$\Rightarrow \sqrt{(k - 6 - 0)^2 + (k - 6)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2(k - 6)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(k - 6) = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow k - 6 = 3 \Rightarrow k = 9$$

C কিন্দুর স্থানাঙ্ক $(8, 9)$ এবং D কিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, 9)$.

কাজ

১. দেখাও যে, $(-\frac{1}{2}, -2)$ কিন্দুটি $2x - 3y + 4 = 0$

ও $6x + 4y - 7 = 0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী।
 [য.'০৬]

প্রমাণ: $2x - 3y + 4 = 0$ রেখা হতে $(-\frac{1}{2}, -2)$ এর

$$\text{দূরত্ব} = \frac{|2 \times -\frac{1}{2} - 3 \times -2 + 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|-1 + 6 + 4|}{\sqrt{13}} \\ = \frac{|9|}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

$6x + 4y - 7 = 0$ রেখা হতে $(-\frac{1}{2}, -2)$ এর লম্ব

$$\text{দূরত্ব} = \frac{|6 \times -\frac{1}{2} + 4 \times -2 - 7|}{\sqrt{6^2 + 4^2}} = \frac{|-3 - 8 - 7|}{\sqrt{36 + 16}} \\ = \frac{|-18|}{\sqrt{52}} = \frac{18}{2\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

প্রদত্ত বিন্দু হতে রেখা দুইটি সমদূরবর্তী।

২. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলকিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + 3y - 5 = 0$ এবং $3x + 2y - 7 = 0$ রেখা দুইটির সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধান ধরি, মূলকিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $y = mx$

অর্থাৎ $mx - y = 0 \dots (1)$

$$2x + 3y - 5 = 0 \text{ এবং } 3x + 2y - 7 = 0$$

$$\text{রেখার ঢাল যথাক্রমে } m_1 = -\frac{2}{3} \text{ এবং } m_2 = -\frac{3}{2}$$

প্রদত্ত রেখাদ্বয় (1) রেখার সঙ্গে সমান সমান কোণ উৎপন্ন

$$\text{করে বলে, } \frac{m - m_1}{1 + mm_1} = \pm \frac{m - m_2}{1 + mm_2}$$

$$\Rightarrow \frac{m + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}m} = \pm \frac{m + \frac{3}{2}}{1 - \frac{3}{2}m}$$

$$\Rightarrow \frac{3m + 2}{3 - 2m} = \pm \frac{2m + 3}{2 - 3m}$$

$$\Rightarrow '+' \text{ নিয়ে, } 4 - 9m^2 = 9 - 4m^2$$

$$\Rightarrow 5m^2 = -5, \text{ যা সম্ভব নয়।}$$

$$'-' \text{ নিয়ে, } 4 - 9m^2 = -9 + 4m^2$$

$$\Rightarrow 13m^2 = 13 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

রেখাটির সমীকরণ, $x - y = 0$ বা, $x + y = 0$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

১ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\sin^{-1}(5/13)$ কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধান: দেওয়া আছে, রেখার ঢাল,

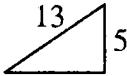
$$m = \tan \sin^{-1}(5/13)$$

$$= \tan \tan^{-1} \frac{5}{12} = \frac{5}{12} \text{ এবং } y\text{-অক্ষের ছেদক}$$

অংশ, $c = 5$ একক।

নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $y = mx + c$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{12}x + 5 \Rightarrow 12y = 5x + 60 \text{ (Ans.)}$$



২(a) (3,2) ও (7,3) বিন্দু দুইটি $2x - 5y + 3 = 0$ রেখার একই অথবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত কিনা নির্ণয় কর। বিন্দু দুইটির কোনটি রেখাটির যে পার্শ্বে মূল কিন্তু, ঠিক সে পার্শ্বে অবস্থিত?

সমাধান: ধরি, $(x - v) \equiv 2x - 5y + 3 = 0$

$$f(3, 2) = 2 \times 3 - 5 \times 2 + 3 = -1,$$

$$f(7, 3) = 14 - 15 + 3 = 2,$$

$$f(0, 0) = -5 \times 0 + 3 = 3$$

f(3, 2) ও f(7, 3) বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট বলে, কিন্তু দুইটি রেখাটির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

আবার, f(7, 3) ও f(0, 0) একই চিহ্নবিশিষ্ট বলে, মূলকিন্তু ও (7, 3) বিন্দু রেখাটির একই পার্শ্বে অবস্থিত।

২(b) দেখাও যে, মূলকিন্তু ও (1,6) বিন্দুটি $x - y + 4 = 0$ এবং $x + 2y - 4 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত বিপ্রতীপ কোণে অবস্থিত।

প্রমাণ : ধরি, $f(x, y) \equiv x - y + 4 = 0 \dots (1)$

$$\text{এবং } g(x, y) \equiv x + 2y - 4 = 0 \quad (2)$$

$$f(0,0) = 0 - 0 + 4 = 4$$

$$f(1, 6) = 1 - 6 + 4 = -1$$

$$f(0,0) \times f(1, 6) = 4 \times -1 < 0$$

মূলকিন্তু ও (1,6) বিন্দু (1) রেখার বিপরীত পাশে অবস্থিত।

আবার, $g(0,0) = 0 + 0 - 4 = -4$ (0,0) ~~(1,6)~~

$$g(1, 6) = 1 + 12 - 4 = 9$$

$$g(0,0) \times g(1, 6) = -4 \times 9 < 0$$

মূলকিন্তু ও (1,6) বিন্দু (2) রেখার বিপরীত পাশে অবস্থিত।

মূলকিন্তু ও (1,6) বিন্দুটি $x - y + 4 = 0$ এবং $x + 2y - 4 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত বিপ্রতীপ কোণে অবস্থিত।

২(c) দেখাও যে, মূলকিন্তু এবং (2, -1) বিন্দুটি যথাক্রমে $2x - y - 4 = 0$ এবং $4x + 2y - 9 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণে এবং সূম্পকোণে অবস্থিত।

প্রমাণ : ধরি, $f(x, y) \equiv 2x - y - 4 = 0 \dots (1)$

$$\text{এবং } g(x, y) \equiv 4x + 2y - 9 = 0 \quad (2)$$

$$f(0,0) = -4, g(0,0) = -9$$

$$f(2, -1) = 4 + 1 - 4 = 1$$

$$g(2, -1) = 8 - 2 - 9 = -3$$

$$\text{এবং } a_1a_2 + b_1b_2 = 2 \times 4 + (-1) \times 2 = 6$$

$$\text{এখন, } f(0,0) \times g(0,0) (a_1a_2 + b_1b_2) = 216 > 0$$

মূলকিন্তু প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণে অবস্থিত।

এবং $f(2, -1) \times g(2, -1)(a_1a_2 + b_1b_2) = -18 < 0$
 $(2, -1)$ বিন্দুটি প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত
সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত।

৩. $2x + 3y + 5 = 0$ এবং $4x - 6y - 7 = 0$
 রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত যে কোণটি $(1, 2)$ বিন্দু ধারণ
করে তার সমদিখভঙ্গের সমীকরণ নির্ণয় কর।
 সমাধান : ধরি, $f(x, y) \equiv 2x + 3y + 5 = 0$
 এবং $g(x, y) \equiv 4x - 6y - 7 = 0$
 $f(1, 2) \times g(1, 2) = (2+6+5)(4-12-7)$

$$= 12 \cdot (-15) < 0$$

(1,2) বিন্দু ধারণকারী সমদিখভঙ্গের সমীকরণ,

$$\frac{2x+3y+5}{\sqrt{4+9}} = -\frac{4x-6y-7}{\sqrt{16+36}}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+5}{\sqrt{13}} = -\frac{4x-6y-7}{\sqrt{52}}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+5}{\sqrt{13}} = -\frac{4x-6y-7}{2\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow 4x + 6y + 10 = -4x + 6y + 7$$

$$\Rightarrow 8x + 3 = 0 \text{ (Ans.)}$$

৪(a) $4x + 3y = 12$, $3x - 4y + 16 = 0$ ও $4x - 3y + 4 = 0$ রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের
লম্বকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি

$$AB \equiv 4x + 3y - 12 = 0 \cdots (1)$$

$$BC \equiv 3x - 4y + 16 = 0 \cdots (2)$$

$$CA \equiv 4x - 3y + 4 = 0 \cdots (3)$$

(1) ও (3) এর ছেদবিন্দু,

$$A \equiv \left(\frac{12-36}{-12-12}, \frac{-48-16}{-12-12} \right) = \left(1, \frac{8}{3} \right)$$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু,

$$B \equiv \left(\frac{48-48}{-16-9}, \frac{-36-64}{-16-9} \right) = (0, 4)$$

$A(1, \frac{8}{3})$ বিন্দুগামী এবং BC এর উপর

$$\text{লম্বরেখার সমীকরণ } 4x + 3y = 4.1 + 3 \cdot \frac{8}{3}$$

$$\rightarrow \quad \quad \quad = 0 \quad \quad (4)$$

আবার, B(0, 4) বিন্দুগামী এবং AC এর উপর
লম্বরেখার সমীকরণ $3x + 4y = 3.0 + 4.4$

$$\Rightarrow 3x + 4y - 16 = 0 \cdots (5)$$

(4) ও (5) এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$= \left(\frac{-48+48}{16-9}, \frac{-36+64}{16-9} \right) = (0, 4)$$

৫(b) A(-3, 0), B(3, 0) ও C(6, 6)
 বিন্দু তিনটি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। ত্রিভুজটির
লম্বকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র নির্ণয় কর।

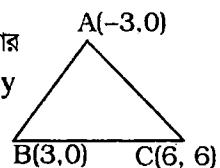
সমাধান : A(-3, 0) বিন্দুগামী

এবং BC রেখার উপর লম্ব রেখার

$$\text{সমীকরণ, } (3-6)x + (0-6)y = -3x - 6y = -3 \times -3 - 6 \times 0$$

$$\Rightarrow -3x - 6y = 0$$

$$\Rightarrow x + 2y + 3 = 0 \cdots (1)$$



B(3, 0) বিন্দুগামী এবং AC রেখার উপর লম্ব রেখার
সমীকরণ, $(-3-6)x + (0-6)y = -9x + (-6)0$

$$\Rightarrow -9x - 6y + 27 = 0$$

$$\Rightarrow 3x + 2y - 9 = 0 \cdots \cdots (2)$$

$$(1) \text{ ও } (2) \text{ এর ছেদবিন্দু } \left(\frac{-18-6}{2-6}, \frac{9+9}{2-6} \right)$$

$$= \left(\frac{-24}{-4}, \frac{18}{-4} \right) = (6, -\frac{9}{2}), \text{ যা ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র।}$$

এবং AC এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{3}{2}, 3 \right)$.

এখন, BC এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{9}{2}, 3 \right)$ দিয়ে যায় এবং BC
এর উপর লম্ব এবৃপ্ত রেখার সমীকরণ,

$$(3-6)x + (0-6)y = -3 \cdot \frac{9}{2} + (-6)3$$

$$\Rightarrow -3x - 6y = \frac{-27-36}{2} = \frac{-63}{2}$$

$$\Rightarrow -6x - 12y + 63 = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 4y - 21 = 0 \cdots (3)$$

আবার, AC এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{3}{2}, 3 \right)$ দিয়ে যায় এবং AC

এর উপর লম্ব এবৃপ্ত রেখার সমীকরণ,

$$(-3-6)x + (0-6)y = -9 \cdot \frac{3}{2} - 6 \cdot 3$$

$$\Rightarrow 9x - 6y = \frac{-27 - 36}{2} = \frac{-63}{2}$$

$$\Rightarrow -18x - 12y + 63 = 0$$

$$\Rightarrow 6x + 4y - 21 = 0 \dots (4)$$

$$(3) \text{ ও } (4) \text{ এর হেদবিন্দু } \left(\frac{-84+84}{8-24}, \frac{-126+42}{8-24} \right)$$

$$= \left(\frac{0}{-16}, \frac{-84}{-16} \right) = \left(0, \frac{21}{4} \right), \text{ যা ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র।}$$

5(c) সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ ABC এর শীর্ষ তিনটি A(4, 0), B(0, 2) ও C(3, 5) হলে, ΔABC এর পাদত্রিভুজের অন্তকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, ΔABC এ

AD, BE, CF যথাক্রমে

BC, CA, AB এর উপর

লম্ব। অতএব, ΔABC

এর পাদত্রিভুজ ΔDEF .

BC এর উপর লম্ব AD এর সমীকরণ,

$$(3-0)x + (5-2)y = 3 \times 4 + 3 \times 0$$

$$\Rightarrow 3x + 3y - 12 = 0$$

$$\Rightarrow x + y - 4 = 0 \quad (1)$$

আবার, CA এর উপর লম্ব BE এর সমীকরণ,

$$(4-3)x + (0-5)y = 1 \times 0 - 5 \times 2$$

$$\Rightarrow x - 5y + 10 = 0 \dots (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 6y - 14 = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{3}$$

$$(1) \text{ হতে } x + \frac{7}{3} - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x + \frac{7-12}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\Delta ABC \text{ এর লম্বকেন্দ্র } = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3} \right).$$

পাদত্রিভুজ ΔDEF পরিকেন্দ্র $= \Delta ABC$ এর

$$\text{লম্বকেন্দ্র } = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3} \right) \text{ (Ans.)}$$

6(a) ΔABC এর AB, BC, CA বালু তিনটির সমীকরণ যথাক্রমে $4x + 3y - 12 = 0$, $x - 4y + 4 = 0$, $6x + 5y - 15 = 0$. দেখাও যে, $\angle ABC$ একটি স্থূলকোণ।

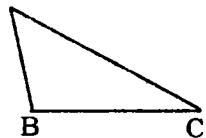
সমাধান : AB, BC, CA বালু তিনটির সমীকরণকে

যথাক্রমে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ A

, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$,

$px + qy + r = 0$ এর সাথে

তুলনা করে পাই,



$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ p & q \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p & q \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (a_1a_2 + b_1b_2)$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \{4.1 + 3.(-4)\}$$

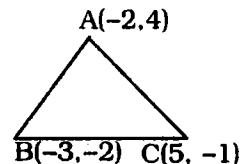
$$= (20 - 16)(-24 - 5)(4 - 12)$$

$$= 4(-29)(-8) > 0$$

$\angle ABC$ একটি স্থূলকোণ। (Showed)

6(b) প্রমাণ কর যে, A(-2, 4), B(-3, -2) ও C(5, -1) বিন্দু তিনটি একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ।

প্রমাণ :



$$AB = \sqrt{(-2+3)^2 + (4+2)^2}$$

$$= \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

$$BC = \sqrt{(-3-5)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{64+1}$$

$$= \sqrt{65}$$

$$CA = \sqrt{(5+2)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{49+25}$$

$$= \sqrt{74}$$

AB, BC, CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর। অতএব, A, B, C বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজ গঠন করে।

$$\text{এখন, } \angle A \text{ এর ক্ষেত্রে, } (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) = (-2+3)(-2-5) + (4+2)(4+1) = -7 + 30 = 23 > 0$$

$\angle A$ সূক্ষ্মকোণ।

$$\angle B \text{ এর ক্ষেত্রে, } (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) = (-3+2)(-3-5) + (-2-4)(-2+1) = 8+6 = 14 > 0$$

$\angle B$ সূক্ষ্মকোণ।

$$\angle C \text{ এর ক্ষেত্রে, } (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) = (5 + 2)(5 + 3) + (-1 - 4)(-1 + 2) = 56 - 5 = 53 > 1$$

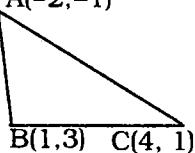
$\angle C$ সূক্ষ্মকোণ।

পদস্থ কিন্দু তিনটি একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ।

6(c) প্রমাণ কর যে, $(-2, -1)$, $(1, 3)$ ও $(4, 1)$ বিন্দু তিনটি একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ।

প্রমাণ : ধরি, পদস্থ কিন্দু তিনটি

$$A(-2, -1), B(1, 3) \text{ ও } (4, 1). A(-2, -1)$$



$$\therefore AB = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (-1 - 3)^2} \\ = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$BC = \sqrt{(1 - 4)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$CA = \sqrt{(4 + 2)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$

AB, BC, CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর। অতএব, A, B, C কিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজ গঠন করে যার CA বৃহত্তম বহু।

CA বৃহত্তম বহুর বিপরীত কোণ $\angle B$ এর ক্ষেত্রে,

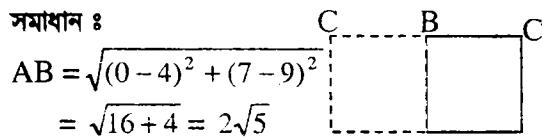
$$(1 - 4)(1 + 2) + (3 - 1)(3 + 1) \\ = -9 + 8 = -1 < 0$$

$\angle B$ সূক্ষ্মকোণ।

পদস্থ কিন্দু তিনটি একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ।

7(a) A(0, 7) এবং B(4, 9) বিন্দুয়ে ABCD বর্গের শীর্ষকিন্দু হলে C ও D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান :



AB বাহুর সমীকরণ

$$AB = \sqrt{(0 - 4)^2 + (7 - 9)^2} \\ = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$$

AB বাহুর সমীকরণ

$$(x - 0)(7 - 9) - (y - 7)(0 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow -2x + 4y - 28 = 0 \Rightarrow x - 2y + 14 = 0$$

A(0, 7) বিন্দুগামী AB বাহুর উপর লম্ব AD বাহুর সমীকরণ, $2x + y = 2 \times 0 + 7$

$$\Rightarrow 2x + y - 7 = 0 \quad (1)$$

B(4, 9) বিন্দুগামী AB বাহুর উপর লম্ব BC বাহুর সমীকরণ, $2x + y = 2 \times 4 + 9$

$$\Rightarrow 2x + y - 17 = 0 \quad (2)$$

AB এর সমান্তরাল $2\sqrt{5}$ একক দূরবর্তী CD বাহুর সমীকরণ $x - 2y + 14 \pm 2\sqrt{5}\sqrt{1^2 + 2^2} = 0$

$$\Rightarrow x - 2y + 14 \pm 10 = 0$$

$$x - 2y + 24 = 0 \dots\dots (3)$$

$$x - 2y + 4 = 0 \dots \quad (4)$$

$$(1) \text{ ও } (3) \text{ ছেদকিন্দু } D \text{ এর স্থানাঙ্ক } (-2, 11)$$

$$(2) \text{ ও } (3) \text{ ছেদকিন্দু } C \text{ এর স্থানাঙ্ক } (2, 13)$$

আবার, (1) ও (4) ছেদকিন্দু D এর স্থানাঙ্ক (2, 3)

$$(2) \text{ ও } (4) \text{ ছেদকিন্দু } C \text{ এর স্থানাঙ্ক } (6, 5)$$

$$C(2, 13) \text{ ও } D(-2, 11) \text{ অথবা, } C(6, 5)$$

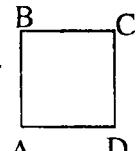
$$\text{ও } D(2, 3)$$

7(b) (0, 7) ও (6, 5) বিন্দুয়ে একটি বর্গের কর্ণের শীর্ষকিন্দু হলে অপর শীর্ষকিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, ABCD বর্গের AC কর্ণেও শীর্ষকিন্দু A(0, 7) ও C(6, 5).

$$\therefore AC = \sqrt{36 + 4} = 2\sqrt{10}$$

AC কর্ণের লম্বসমন্বিতক BD



$$\text{কর্ণের সমীকরণ } (0 - 6)x + (7 - 5)y = \frac{1}{2}(0 + 49 - 36 - 25) \Rightarrow -6x + 2y + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 3x - y - 3 = 0 \quad (1)$$

$$AC \text{ কর্ণের সমীকরণ } x + 3y = 0 + 3 \times 7$$

$$\Rightarrow x + 3y - 21 = 0$$

AC কর্ণের সমান্তরাল $2\sqrt{10}$ একক দূরবর্তী রেখার সমীকরণ সরলরেখার সমীকরণ,

$$x + 3y - 21 \pm \sqrt{10}\sqrt{1^2 + 3^2} = 0$$

$$\Rightarrow x + 3y - 21 \pm 10 = 0$$

$$x + 3y - 11 = 0 \quad (2) \text{ এবং}$$

$$x + 3y - 31 = 0 \dots \quad (3)$$

$$(1) \text{ ও } (2) \text{ এর ছেদকিন্দুর স্থানাঙ্ক } (2, 3)$$

$$(1) \text{ ও } (3) \text{ এর ছেদকিন্দুর স্থানাঙ্ক } (4, 9)$$

অপর শীর্ষকিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (2, 3) ও (4, 9)

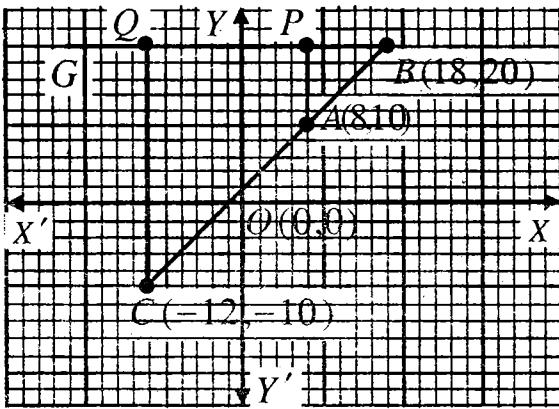
ব্যবহারিক অনুশীলন

- পরীক্ষণের নাম : A(8, 10) ও B(18, 20) বিন্দুর সংযোগ রেখাখনকে 2 3 অনুপাতে বহির্ভূতকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়।

মূলতন্ত্র : $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ বিন্দুসময়ের সংযোগ রেখাংশকে m_1 m_2 অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2} \right)$$

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেসিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেসিল কম্পাস।



(i) একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

(ii) x - অক্ষ v - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য $= 1$ একক ধরে $A(8, 10)$ ও $B(18, 20)$ বিন্দুসময়কে গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেসিল দিয়ে সংযোগ করে AB রেখাংশ লেখিতে উপস্থাপন করি।

(iii) B বিন্দু দিয়ে x অক্ষের সমান্তরাল BG রেখার উপর যেকোন দুইটি বিন্দু P ও Q নেই যেন $PQ : BQ = 2 : 3$ হয়। (এখানে, B থেকে 15 বর্গ দূরে Q এবং P থেকে 10 বর্গ দূরে Q বিন্দু অবস্থিত।)

(iv) P , A যোগ করি এবং PA এর সমান্তরাল QC রেখা অঙ্কন করি যা BA এর বর্ধিতাংশকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

ফল সংকলন :

C এর স্থানাঙ্ক

গ্রাফ হতে
প্রাপ্ত
মান

সূত্র হতে প্রাপ্ত মান

$$\begin{aligned} (-12, -10) &= \left(\frac{2 \times 18 - 3 \times 8}{2 - 3}, \frac{2 \times 20 - 3 \times 10}{2 - 3} \right) \\ &= \left(\frac{36 - 24}{-1}, \frac{40 - 30}{-1} \right) \\ &= (-12, -10) \end{aligned}$$

ফলাফল : প্রদত্ত বিন্দুসময়ের সংযোগ রেখাংশকে 2 : 3 অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-12, -10)$ ।

২. পরীক্ষণের নাম : ABC ত্রিভুজের শীর্ষকিন্তু $A(5, 6)$, $B(-9, 1)$ এবং $C(-3, -1)$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয়।

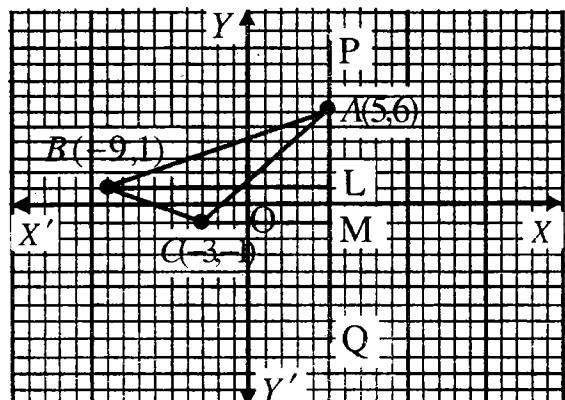
মূলতন্ত্র ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ হলে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \right| \text{ কর্ণ একক।}$$

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেসিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি :

(i) একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।



(ii) x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1

বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে A(5, 6), B(-9, 1) এবং C(-3, -1) কিন্দুগুলি গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেশিল দিয়ে A,B; B, C ; C, A সংযোগ করে ABC ত্রিভুজটি অঙ্কন করি।

(iii) A কিন্দু দিয়ে y অক্ষের সমান্তরাল PQ রেখা আঁকি।

(iv) B ও C হতে PQ এর উপর যথাক্রমে BL ও CM লম্ব আঁকি।

হিসাব : $BL = |-9 - (5)| = 14$,

$CM = |-3 - (-5)| = 8$, $AL = |6 - 1| = 5$,

$LM = |1 - (-1)| = 2$, $AM = 5 + 2 = 7$

ফল সংকলন :

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

গ্রাফ হতে প্রাপ্ত মান: $\Delta ABC = \text{ট্রিপিজিয়াম } BLMC$ এর ক্ষেত্রফল + ত্রিভুজ BLA এর ক্ষেত্রফল
– ত্রিভুজ AMC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \times (BL + CM) \times LM + \frac{1}{2} \times BL \times AL$$

$$- \frac{1}{2} \times CM \times AM$$

$$= \frac{1}{2} \times (14 + 8) \times 2 + \frac{1}{2} \times 14 \times 5 - \frac{1}{2} \times 8 \times 7.$$

$$= 22 + 35 - 28 = 29 \text{ বর্গ একক।}$$

সূত্র হতে প্রাপ্ত মান

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & -9 & -3 & 5 \\ 6 & 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} |5 + 9 - 18 - (-54 - 3 - 5)|$$

$$= \frac{1}{2} |-4 + 62| = \frac{1}{2} |58| = 29 \text{ বর্গ একক।}$$

ক্ষেত্রফল : ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 29 বর্গ একক।

৩. পরীক্ষণের নাম : $3x - 5y = -11$ সরলরেখার লেখচিত্র অঙ্কন

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেশিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি :

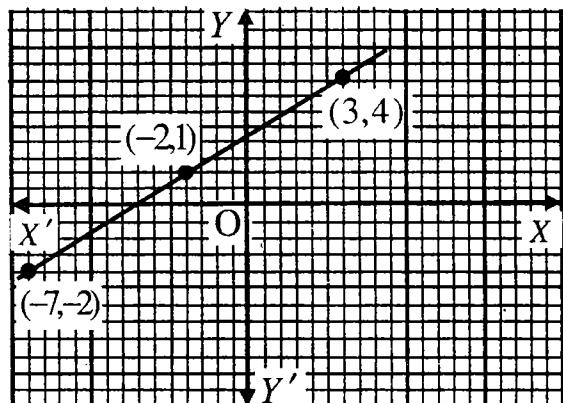
(i) প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ হতে পাই,

$$-5y = -3x - 11 \Rightarrow y = \frac{3x + 11}{5}$$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছকটি তৈরি করি :

x	-2	3	-7
y	1	4	-2

(ii) একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।



(iv) x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে $(-2, 1)$, $(3, 4)$ ও $(-7, -2)$ কিন্দু তিনটি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেশিল দিয়ে সংযোগ করে $3x - 5y = -11$ সরলরেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য :

(i) প্রদত্ত সরলরেখার ঢাল-ছেদ আকৃতি

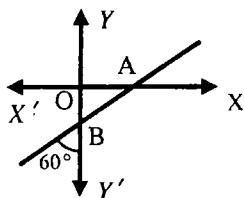
$$y = \frac{3}{5}x + \frac{11}{5} \text{ এ } c = \frac{11}{5} > 0 \text{ বলে রেখাটি } y$$

অক্ষকে ধনাত্মক দিকে $\frac{11}{5}$ একক দূরে ছেদ করবে।

(ii) $m = \frac{3}{5} > 0$ বলে রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে।

৪. সংযুক্ত চিত্রের সাহায্যে AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, যেখানে (6, 5) বিন্দুটি AB এর উপর অবস্থিত।

পরীক্ষণের নাম : প্রদত্ত চিত্র ও তথ্য হতে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়।



মূলতন্ত্র : a (x অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ) ও b (y অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ) নির্ণয় করে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

সূত্র দ্বারা, c (y অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ) ও ঢাল m (x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে প্রদত্ত রেখার উৎপন্ন কোণের tangent) নির্ণয় করে $y = mx + c$ সূত্র দ্বারা সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করা যায়।

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেঙ্গিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) কম্পাস, (vii) টাঁদা ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি :

প্রদত্ত রেখা দ্বারা x অক্ষের ধনাত্মক দিকে সাথে উৎপন্ন কোণের পরিমাণ টাঁদা দিয়ে পরিমাপ করি। উৎপন্ন কোণের পরিমাণ 30° ।

হিসাব :

$$\text{রেখাটির ঢাল} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}. y \text{ অক্ষের ছেদাংশ}$$

C হলে রেখাটির সমীকরণ হবে $y = mx + c$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + c$$

তথ্য অনুসারে, রেখাটি $(6, 5)$ বিন্দুগামী।

$$5 = \frac{6}{\sqrt{3}} + c \Rightarrow c = \frac{5\sqrt{3} - 6}{\sqrt{3}}$$

রেখাটির নির্ণেয় সমীকরণ

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{5\sqrt{3} - 6}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}y = x + 5\sqrt{3} - 6$$

৫. y -অক্ষের সাপেক্ষে $A(-5, 5)$ বিন্দুর এবং $B(7, 2)$ ও $C(5, -4)$ বিন্দুগুলির সংযোগ রেখাখণ্ডের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম : y -অক্ষের সাপেক্ষে $A(-5, 5)$ বিন্দুর এবং $B(7, 2)$ ও $C(5, -4)$ বিন্দুগুলির সংযোগ রেখাখণ্ডের প্রতিচ্ছবি নির্ণয়।

মূলতন্ত্র : x -অক্ষ ও y -অক্ষের সাপেক্ষে (x, y) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি যথাক্রমে $(x, -y)$ ও $(-x, y)$ ।

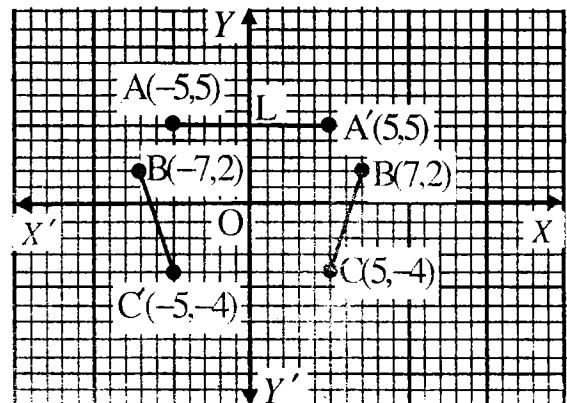
প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেঙ্গিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি :

(i) একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

(ii) x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর স্থুতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে $A(-5, 5)$, $B(7, 2)$ এবং $C(5, -4)$ বিন্দুগুলি গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেঙ্গিল দিয়ে B, C সংযোগ করে BC রেখাখণ্ড অঙ্কন করি।

(iii) $A(-5, 5)$ বিন্দু হতে y অক্ষের উপর AL লম্ব অঙ্কন করি এবং AL কে A' পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $AL = LA'$ হয়। তাহলে, y অক্ষের সাপেক্ষে A বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $A'(5, 5)$ ।



বইয়র কম

(iv) তদুপ y অক্ষের সাপেক্ষে $B(7, 2)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $B'(-7, 2)$ এবং $C(5, -4)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $C'(-5, -4)$ নির্ণয় করি।

(v) সরু পেসিল দিয়ে B' , C' সংযোগ করি এবং y অক্ষের সাপেক্ষে BC রেখাখণ্ডের প্রতিচ্ছবি $B'C'$ অঙ্কন করি, যা $(-7, 2)$ ও $(-5, -4)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাখণ্ড।

বৈশিষ্ট্য :

(i) y অক্ষের সাপেক্ষে $A(-5, 5)$ ও $A'(5, 5)$ পরস্পর পরস্পরের প্রতিচ্ছবি এবং এদের y স্থানাঙ্ক অভিন্ন ও একটির x স্থানাঙ্ক অপরাটির বিপরীত ঝণাঝক মানের সমান।

(ii) y অক্ষের সাপেক্ষে BC রেখাখণ্ড ও $B'C'$ রেখাখণ্ড পরস্পর পরস্পরের প্রতিচ্ছবি ও দৈর্ঘ্যে সমান এবং y অক্ষ থেকে এদের যেকোন একটির উপরস্থ যেকোন বিন্দুর সমদ্বৰ্তী বিন্দু অপরাটির উপর অবস্থিত হবে।

6. $y = x$ সরলরেখার সাপেক্ষে $A(5, 6)$ বিন্দুর এবং $B(-3, 5)$ ও $C(4, -8)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাখণ্ডের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম : $y = x$ সরলরেখার সাপেক্ষে $A(5, 6)$ বিন্দুর এবং $B(-3, 5)$ ও $C(4, -8)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাখণ্ডের প্রতিচ্ছবি নির্ণয়।

মূলতন্ত্র : $y = x$ রেখার সাপেক্ষে (h, k) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি (k, h) .

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেসিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি :

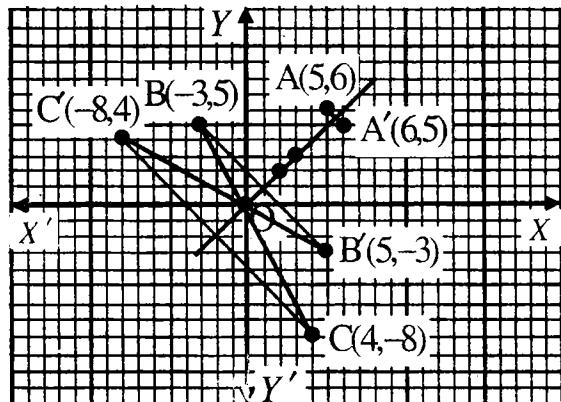
(i) একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' জাঁকি।

(ii) প্রদত্ত সমীকরণ $y = x$ (i) এ x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছকটি তৈরি করি।

x	0	2	3
y	0	2	3

(iii) x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের।
বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে।

(2, 2) ও (3, 3) বিন্দুগুলি গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেসিল দিয়ে সংযোগ করে প্রদত্ত রেখা (i) এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।



(iv) একই স্কেলে $A(5, 6)$, $B(-3, 5)$ ও $C(4, -8)$ বিন্দুগুলি গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেসিল দিয়ে B , C সংযোগ করে BC রেখাখণ্ড অঙ্কন করি।

(v) A বিন্দু থেকে (i) নং রেখার উপর অঙ্কিত লম্বকে A' পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন A ও A' বিন্দুয় প্রদত্ত রেখা থেকে সমদ্বৰ্তী হয়। তাহলে, (i) নং রেখার সাপেক্ষে A বিন্দুর প্রতিচ্ছবি A'

6. তদুপ (i) নং রেখার সাপেক্ষে B বিন্দুর প্রতিচ্ছবি B' এবং C বিন্দুর প্রতিচ্ছবি C' নির্ণয় করি।

7. সরু পেসিল দিয়ে B' C' সংযোগ করে (i) নং রেখার সাপেক্ষে BC রেখাখণ্ডের প্রতিচ্ছবি $B'C'$ অঙ্কন করি।

হিসাব : $y = x$ (i) রেখার ঢাল = 1 এবং এর উপর লম্ব রেখার ঢাল = -1.

ধরি, (i) এর সাপেক্ষে $A(5, 6)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $A'(h, k)$ ।

AA' এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{h+5}{2}, \frac{k+6}{2}\right)$ (i) এর

উপর অবস্থিত এবং AA' ঢাল $= \frac{k-6}{h-5} = -1$

$$(i) \text{ হতে পাই, } \frac{k+6}{2} = \frac{h-5}{2}$$

$$\Rightarrow h-5 = k+6$$

$$\text{এবং } -h + 5 = k - 6$$

$$\Rightarrow h + k - 11 = 0 \dots (\text{iii})$$

$$(\text{ii}) + (\text{iii}) \Rightarrow 2h - 12 = 0 \Rightarrow h = 6$$

$$(\text{ii}) \text{ হতে } 6 - k - 1 = 0 \Rightarrow k = 5$$

$y = x$ রেখার সাপেক্ষে $A(5, 6)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $(6, 5)$ ।

সুত্রের সাহায্যে : $A(5, 6)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $(6, 5)$.

$B(-3, 5)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $(5, -3)$.

$C(4, -8)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $(-8, 4)$

ফলাফল : $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $A(5, 6)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $(6, 5)$ এবং $B(-3, 5)$ ও $C(4, -8)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাংশের প্রতিচ্ছবি $(5, -3)$ ও $(-8, 4)$ বিন্দুয়ের সংযোগ রেখাংশ।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. $y = 3x + 7$ এবং $3y - x = 8$ সরলরেখাদের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ - [DU 08-09]

$$\text{Sol}^n : \text{এখানে } m_1 = 3, m_2 = \frac{1}{3}$$

$$\tan \theta = \left| \frac{\frac{3-1}{3}}{1+3 \cdot \frac{1}{3}} \right| = \frac{8}{6} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{4}{3}$$

2. $2x - 3y + 6 = 0$ রেখার উপর লম্ব এবং $(1, -1)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ-[DU, 02-03, 97-98; RU 06-07]

$$\text{Sol}^n : \text{রেখার সমীকরণ } 3x + 2y = 3 - 2 = 1$$

3. $5x - 2y + 4 = 0$ এবং $4x - 3y + 5 = 0$ রেখাদের ছেদবিন্দু এবং মূলবিন্দু দিয়ে গমনকারী রেখার সমীকরণ - [DU 05-07; Jt.U 07-08]

$$\text{Sol}^n : \text{সমীকরণ } 5(5x - 2y) - 4(4x - 3y) = 0$$

$$\Rightarrow 25x - 10y - 16x + 12y = 0$$

$$\Rightarrow 9x + 2y = 0$$

4. একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশ $(2, 3)$ বিন্দুতে সমন্বিত হয়। রেখাটির সমীকরণ-

[DU04-05]

$$\text{Sol}^n : \text{রেখার সমীকরণ } \frac{x}{2 \times 2} + \frac{y}{2 \times 3} = 1$$

$$\Rightarrow 3x + 2y = 12$$

5. সরলরেখা $3x + 4y - 12 = 0$ দ্বারা অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য- [DU 03-04]

$$\text{Sol}^n : \text{দৈর্ঘ্য} = \sqrt{(12/3)^2 + (12/4)^2}$$

$$= \sqrt{16+9} = 5$$

6. $2x - 5y + 10 = 0$ দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখা এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা বেষ্টিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল- [DU 99-00]

$$\text{Sol}^n : \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2}{2 \times 5} = 5$$

7. একটি সরলরেখা $(3, 5)$ বিন্দু দিয়ে যায় অক্ষদ্বয় হতে বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট অংশ হৈস করে। সরলরেখাটির সমীকরণ কি? [DU 98-99]

$$\text{Sol}^n : \text{সমীকরণ}, x - y = 3 - 5 \Rightarrow x - y + 2 = 0$$

8. α এর কোন মানের জন্য $(\alpha-1)x + (\alpha+1)y = 7$ রেখাটি $3x + 5y + 7 = 0$ রেখার সমান্তরাল হবে? [DU 01-02]

$$\text{Sol}^n : \frac{\alpha-1}{3} = \frac{\alpha+1}{5} \Rightarrow 2\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 4$$

9. $5x - 5\sqrt{3}y + 2 = 0$ এবং $3\sqrt{3}x + 3y = 4$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ হবে? [BUET 06-07]

$$\text{Sol}^n : \text{এখানে}, m_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, m_2 = -\sqrt{3}$$

$$m_1 m_2 = -1 \quad \text{অন্তর্ভুক্ত কোণ} = 90^\circ$$

10. $(2, 3)$ বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব বিন্দুর দূরত্ব - [BUET 06-07]

$$\text{Sol}^n : \text{দূরত্ব} = 2 \frac{|8+9-7|}{\sqrt{16+9}} = \frac{2 \cdot 10}{5} = 4$$

11. মূলবিন্দু হতে $3x + 4y = 10$ রেখাটির লম্বদূরত্ব [DU 07-08, Jt.U 07-08]

$$\text{Sol}^n : \text{লম্বদূরত্ব} = \frac{|-10|}{\sqrt{9+16}} = 2$$

12. $(4, -2)$ বিন্দু হতে $5x + 12y = 3$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য - [DU 06-07, 04-05; RU 06-07, 05-06; CU 02-03]

$$\text{Sol}^n : \text{লম্বদূরত্ব} = \frac{|20-24-3|}{\sqrt{25+144}} = \frac{7}{13}$$

13. α সূক্ষ্মকোণ হলে $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 4$ এবং
 $4x + 3y = 5$ সমান্তরাল রেখাগুলির দূরত্ব-

[DU 06-07]

Solⁿ : সমান্তরাল রেখাগুলির দূরত্ব =

$$\left| \frac{-4}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} - \frac{-5}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \right| \\ = 4 - 1 = 3$$

14. $(1, -1)$ এবং $(2, 4)$ বিন্দুগুলির সংযোগ রেখাশের
 সম্পর্কিতকরণ সমীকরণ- [DU 04-05]

Solⁿ : সম্পর্কিতকরণ সমীকরণ

$$(1-2)x + (-1-4)y = \frac{1}{2}(1^2 + 1^2 - 2^2 - 4^2) \\ \Rightarrow -x - 5y + 10 = 0 \Rightarrow x + 5y - 10 = 0$$

15. $(-5, 7)$ ও $(3, -1)$ বিন্দুগুলির সংযোগ রেখাশের
 সম্পর্কিতকরণ সমীকরণ-[DU 00-01; RU 06-07]

$$\text{Sol}^n : -8x + 8y = \frac{1}{2}(25 + 49 - 9 - 1) = 32 \\ \Rightarrow x - y + 4 = 0$$

16. $y = 1 + \frac{1}{2+x}$ বর্তরেখা x - অক্ষকে A বিন্দুতে
 এবং y - অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করলে AB রেখার
 সমীকরণ - [DU 07-08, Jt.U 08-09]

Solⁿ : $2y + xy = 2 + x + 1$

$$\Rightarrow x - 2y + 3 = 0 \quad [\because \text{সরলরেখায় } xy \text{ থাকেনা}]$$

17. x এর কোন মানের জন্য $(1, -x), (1, x)$ এবং
 $(x^2, -1)$ বিন্দু তিনটি একই রেখায় অবস্থান করবে?

[BUET 12-13]

$$\text{Sol}^n : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x^2 & 1 \\ -x & x & -1 & -x \end{vmatrix} = 0 \\ \Rightarrow x - 1 - x^3 - (-x + x^3 - 1) = 0 \\ \Rightarrow x - 1 - x^3 + x - x^3 + 1 = 0 \\ \Rightarrow -2x^2 + 2x = 0 \\ \Rightarrow x(x - 1)(x + 1) = 0 \\ \Rightarrow x = 0, 1, -1$$

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

1.(a) $(0, 0)$ কেন্দ্র এবং ' r ' ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = r^2$.

(b) (h, k) কেন্দ্র এবং ' r ' ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

(h, k) কেন্দ্র এবং (α, β) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = (\alpha - h)^2 + (\beta - k)^2$

(c) $(-g, -f)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, যেখানে ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

(d) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুসমূহের সংযোগ রেখাখনকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$$

(e) একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, $b + k(sরলরেখা) = 0$; ধ্রুবক $k \neq 0$

(f) দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবুপ বৃত্তের সমীকরণ, প্রথম বৃত্ত + k (দ্বিতীয় বৃত্ত) = 0 ; ধ্রুবক $k \neq 0$.

(g) $f(x, y) = 0$ বৃত্ত ও $g(x, y) = 0$ সরলরেখার (অথবা, $f(x, y) = 0$ ও $g(x, y) = 0$ বৃত্তসমূহের) ছেদবিন্দু এবং (α, β) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $\frac{f(x, y)}{f(\alpha, \beta)} = \frac{g(x, y)}{g(\alpha, \beta)}$; $f(\alpha, \beta) \neq 0$, $g(\alpha, \beta) \neq 0$

(h) খলিফার পদ্ধতিঃ যেকোন দুইটি বিন্দু (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) দিয়ে অতিক্রম করে এবুপ বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + k\{(x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2)\} = 0$; ধ্রুবক $k \neq 0$

2. (a) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্ত ধারা x -অক্ষের অভিভাব = $2\sqrt{g^2 - c}$ এবং y -অক্ষের অভিভাব = $2\sqrt{f^2 - c}$.

(b) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ বৃত্ত ধারা x -অক্ষের অভিভাব = $2\sqrt{r^2 - k^2}$ এবং y -অক্ষের অভিভাব = $2\sqrt{r^2 - h^2}$

3. (a) (r_1, θ_1) কেন্দ্র ও a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সমীকরণ, $a^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1)$

(b) পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $r^2 + 2r(g \cos \theta + fsin \theta) + c = 0$, যার কেন্দ্র $(\sqrt{g^2 + f^2}, \tan^{-1} \frac{f}{g})$,

$$\text{ব্যাসার্ধ} = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র :

1. $f(x, y) = 0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $f(x, y) = f(x_1, y_1)$

2. x -অক্ষকে মুণ্ডবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2 + y^2}{y} = \frac{x_1^2 + y_1^2}{y_1}$.

3. কেন্দ্র (h, k) এবং x -অক্ষকে স্পর্শ করে এবুপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 = 0$

4. কেন্দ্র (h, k) এবং y -অক্ষকে স্পর্শ করে এবুপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 = 0$

প্রশ্নমালা – IV A

1. $ax^2 + 2bxy - 2y^2 + 8x + 12y + 6 = 0$ একটি বৃত্ত নির্দেশ করলে, ' a ' ও ' b ' এর মান নির্ণয় কর। অতপর বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান : $ax^2 + 2bxy - 2y^2 + 8x + 12y + 6 = 0$ একটি বৃত্ত নির্দেশ করলে, xy এর সহগ, $2b = 0$

$\Rightarrow b = 0$ এবং x^2 ও y^2 এর সহগ দুইটি সমান অর্থাত $a = -2$.

বৃত্তটির সমীকরণ হবে,

$$-2x^2 - 2y^2 + 8x + 12y + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2(-2)x + 2(-3)y - 3 = 0$$

বৃত্তটির কেন্দ্র $(-2, -3)$ এবং

$$\text{ব্যাসার্ধ} = \sqrt{2^2 + 3^2 - (-3)} = \sqrt{4 + 9 + 3} = 4$$

২. (a, b) কেন্দ্র এবং $\sqrt{a^2 + b^2}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট
বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : (a, b) কেন্দ্র এবং $\sqrt{a^2 + b^2}$ ব্যাসার্ধ
বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = a^2 + b^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0 \quad (\text{Ans.})$$

৩. (a) এবুপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 9 = 0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং $(2, -1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

[কু.'০৫; য.'১০; দি.'১৩]

সমাধান : $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 9 = 0$ বৃত্তটির
কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (-\frac{-4}{2}, -\frac{5}{2}) = (2, -\frac{5}{2})$, যা
নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র।

$$\text{এখন নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ} = \text{কেন্দ্র } (2, -\frac{5}{2})$$

$$\text{হতে } (2, -1) \text{ বিন্দুর দূরত্ব} = \left| -\frac{5}{2} + 1 \right| = \frac{3}{2}$$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - 2)^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = (\frac{3}{2})^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 5y + \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 5y + \frac{25 - 9}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 5y + 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 5y + 8 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

[MCQ এর জন্য, $x^2 + y^2 - 4x + 5y = 2^2 + 1^2 - 4.2 + 5(-1) = 4 + 1 - 8 - 5$]

৩.(b) এবুপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং $(3, -1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [সি.'০১]

সমাধান : $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ বৃত্তের কেন্দ্রের
স্থানাঙ্ক $= (3, -4)$, যা নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র।

এখন নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=$ কেন্দ্র $(3, -4)$ হতে $(3, -1)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |-4 + 1| = 3$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

৩(c) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4, -5)$ এবং এটি মূলবিন্দু
দিয়ে যায়। তার সমীকরণ এবং অক্ষ দুটি থেকে তা কি
পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

[সি.'০৬; য.'০৮; কু.'১৪]

সমাধান : কেন্দ্র $(4, -5)$ এবং মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবুপ
বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2(-4)x + 2(5)y = 0$
 $x^2 + y^2 - 8x + 10y = 0 \dots (1)$

(1) বৃত্তটিকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর
সাথে ভুলনা করে পাই, $g = -4$, $f = 5$, $c = 0$

বৃত্তটি দ্বারা x -অক্ষের খত্তিতাংশের পরিমাণ
 $2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{4^2 - 0} = 8$ এবং

বৃত্তটি দ্বারা y -অক্ষের খত্তিতাংশের পরিমাণ
 $2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{5^2 - 0} = 10$

4.(a) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4, -8)$ এবং তা y -
অক্ষকে স্পর্শ করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব.'০১; ঢা.'০২]

সমাধান : $(4, -8)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি y -অক্ষকে স্পর্শ
করে।

$$\text{বৃত্তটির ব্যাসার্ধ} = |\text{কেন্দ্রের ভুজ}| = |4| = 4$$

$$\text{বৃত্তের সমীকরণ, } (x-4)^2 + (y+8)^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 16y + 64 = 16$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 16y + 64 = 0$$

[MCQ এর জন্য, $x^2 + y^2 - 8x + 16y + 64 = 0$]

4(b) $(-5, 7)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং x -অক্ষকে স্পর্শ
করে এবুপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [মা.'০৭]

সমাধান : $(-5, 7)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি x -অক্ষকে স্পর্শ
করে।

$$\text{বৃত্তটির ব্যাসার্ধ} = |\text{কেন্দ্রের } y\text{-স্থানাঙ্ক}| = |7| = 7$$

$$\text{বৃত্তের সমীকরণ, } (x+5)^2 + (y-7)^2 = 7^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 - 14y + 49 = 49$$

$$x^2 + y^2 + 10x - 14y + 25 = 0$$

4(c) $(2, 3)$ বিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং x -অক্ষকে
স্পর্শ করে এবুপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি y -
অক্ষ হতে যে পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

[রা.'০১; কু.'০৯]

সমাধান : (2, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি x -অক্ষকে স্পর্শ করে।

$$\text{বৃত্তটির ব্যাসার্ধ} = |\text{কেন্দ্রের কোটি}| = |3| = 3$$

$$\text{বৃত্তের সমীকরণ}, (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$$

$$\text{এখন বৃত্তটিকে } x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

এর সাথে তুলনা করে পাই, $g = -2$, $f = -3$, $c = 4$

বৃত্তটি দ্বারা y -অক্ষের স্পর্শিতাংশের পরিমাণ

$$2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{9 - 4} = 2\sqrt{5}$$

৫. একটি বৃত্ত $(-6, 5)$, $(-3, -4)$ এবং $(2, 1)$

বিন্দু তিনটি দ্বারা অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [ব.'০২; পি.'০৯]

সমাধান : খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(-6, 5)$ ও $(-3, -4)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x + 6)(x + 3) + (y - 5)(y + 4) + k\{(x + 6)(5 + 4) - (y - 5)(-6 + 3)\} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 9x + 18 + y^2 - y - 20 + k(9x + 54 + 3y - 15) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 9x - y - 2 + k(9x + 3y + 39) = 0 \quad (1)$$

(1) বৃত্তটি $(2, 1)$ বিন্দুগামী বলে,

$$4 + 1 + 18 - 1 - 2 + k(18 + 3 + 39) = 0$$

$$\Rightarrow 60k = -20 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

(1) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 + 9x - y - 2 - 3x - y - 13 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0 \dots (1)$$

$$(1) \text{ বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক } (-\frac{6}{2}, -\frac{-2}{2})$$

$$= (-3, 1) \text{ এবং ব্যাসার্ধ} = \sqrt{9+1-(-15)} = 5$$

$$[\text{MCQ}: \frac{(x+6)(x+3)+(y-5)(y+4)}{9(x+6)-(-3)(y-5)}$$

$$= \frac{(2+6)(2+3)+(1-5)(1+4)}{9(2+6)-(-3)(1-5)}]$$

৬. (a) $2x - y = 3$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(3, -2)$ ও $(-2, 0)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম

করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৮; ব.'১০, '১২; পি.'০৬; য.'০৭; কু.'০৭; রা.'১০, '১৩]

সমাধান : খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(3, -2)$ ও $(-2, 0)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - 3)(x + 2) + (y + 2)(y - 0) +$$

$$k\{(x - 3)(-2 - 0) - (y + 2)(3 + 2)\} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 + y^2 + 2y +$$

$$k(-2x + 6 - 5y - 10) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-1 - 2k)x + (2 - 5k)y - 6 - 4k = 0 \quad (1)$$

$$\text{বৃত্তটির কেন্দ্র } (\frac{1+2k}{2}, -\frac{2-5k}{2}), 2x-y = 3$$

রেখার উপর অবস্থিত।

$$2\frac{1+2k}{2} - (-\frac{2-5k}{2}) = 3$$

$$\Rightarrow 2 + 4k + 2 - 5k = 6$$

$$\Rightarrow -k = 2 \Rightarrow k = -2$$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 + (-1 + 4)x + (2 + 10)y - 6 + 8 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 3x + 12y + 2 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

6(b) $x + 2y - 10 = 0$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[চ.'০২; রা.'০৮; য.'১২]

সমাধান : খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - 3)(x - 6) + (y - 5)(y - 4) +$$

$$k\{(x - 3)(5 - 4) - (y - 5)(3 - 6)\} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 18 + y^2 - 9y + 20 + k(x - 3 + 3y - 15) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-9 + k)x + (-9 + 3k)y + 38 - 18k = 0 \dots (1)$$

$$(1) \text{ বৃত্তটির কেন্দ্র } (\frac{9-k}{2}, \frac{9-3k}{2}), x + 2y - 10 = 0$$

রেখার উপর অবস্থিত।

$$\frac{9-k}{2} + 2 \cdot \frac{9-3k}{2} = 10$$

$$\Rightarrow 9 - k + 18 - 6k = 20$$

$$\Rightarrow -7k = -7 \Rightarrow k = 1$$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 38 - 18 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

6(c) $x + 2 = 0$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(-7, 1)$ ও $(-1, 3)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৭; ম.'০৫]

সমাধান ৪ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(-7, 1)$ ও $(-1, 3)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x + 7)(x + 1) + (y - 1)(y - 3) +$$

$$k\{(x + 7)(1 - 3) - (y - 1)(-7 + 1)\} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x + 7 + y^2 - 4y + 3 +$$

$$k(-2x - 14 + 6y - 6) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (8 - 2k)x + (-4 + 6k)y$$

$$+ 10 - 20k = 0 \quad \dots (1)$$

$$(1) \text{ বৃত্তটির কেন্দ্র } \left(-\frac{8-2k}{2}, -\frac{-4+6k}{2} \right) =$$

$(k - 4, 2 - 3k)$, $x + 2 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$$k - 4 + 2 = 0 \Rightarrow k = 2$$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$$x^2 + y^2 + (8 - 4)x + (-4 + 12)y + 10 - 40 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 8y - 30 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

6.(d) $x + 2y + 3 = 0$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(-1, -1)$ ও $(3, 2)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'১৩; সি.'১০]

সমাধান ৪ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(-1, -1)$ ও $(3, 2)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x + 1)(x - 3) + (y + 1)(y - 2) +$$

$$k\{(x + 1)(-1 - 2) - (y + 1)(-1 - 3)\} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 + y^2 - y - 2 +$$

$$k(-3x - 3 + 4y + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-2 - 3k)x + (-1 + 4k)y$$

$$- 5 + k = 0 \quad \dots (1)$$

$$(1) \text{ বৃত্তটির কেন্দ্র } \left(\frac{2+3k}{2}, \frac{1-4k}{2} \right),$$

$x + 2y + 3 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$$\frac{2+3k}{2} + 2 \cdot \frac{1-4k}{2} + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2 + 3k + 2 - 8k + 6 = 0$$

$$\Rightarrow -5k = -10 \Rightarrow k = 2$$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$$x^2 + y^2 + (-2 - 6)x + (-1 + 8)y - 5 + 2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 7y - 3 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

7.(a) x -অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(3, 5)$

ও $(6, 4)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০৩; বা.'০৩; দি.'১০; সি.'১৮]

সমাধান ৪ খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - 3)(x - 6) + (y - 5)(y - 4) +$$

$$k\{(x - 3)(5 - 4) - (y - 5)(3 - 6)\} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 18 + y^2 - 9y + 20 +$$

$$k(x - 3 + 3y - 15) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-9 + k)x + (-9 + 3k)y$$

$$+ 38 - 18k = 0 \quad \dots (1)$$

$$(1) \text{ বৃত্তটির কেন্দ্র } \left(\frac{k-9}{2}, \frac{9-3k}{2} \right), x\text{-অক্ষের উপর}$$

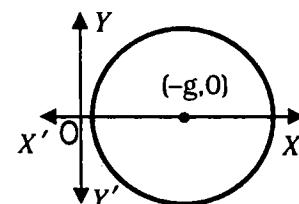
$$\text{অবস্থিত।} \therefore \frac{9-3k}{2} = 0 \Rightarrow k = 3$$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$$x^2 + y^2 + (-9 + 3)x + 38 - 54 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

বিকল্প পদ্ধতি :



ধরি, কেন্দ্র x -অক্ষের উপর অবস্থিত এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0 \dots \dots (1)$

(1) বৃত্তটি $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$$9 + 25 + 6g + c = 0$$

$$\Rightarrow 34 + 6g + c = 0 \quad \dots (2) \text{ এবং}$$

$$36 + 16 + 12g + c = 0 \dots \dots (3)$$

$$\Rightarrow 52 + 12g + c = 0 \dots \dots (3)$$

$$(3) - (2) \Rightarrow 18 + 6g = 0 \Rightarrow g = -3$$

$$(2) \text{ হতে পাই, } 34 - 18 + c = 0 \Rightarrow c = -16$$

(1) এ g ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \text{ (Ans.)}$$

- 7(b) y -অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(3, 0)$ ও $(-4, 1)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করে। [চ.'০৫]

সমাধান : ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots (1)$$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র y -অক্ষের উপর অবস্থিত।

$$g = 0$$

বৃত্তটি $(3, 0)$ ও $(-4, 1)$ বিন্দুগামী।

$$9 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = -9 \text{ এবং}$$

$$16 + 1 + 2f + c = 0$$

$$\Rightarrow 17 + 2f - 9 = 0 \Rightarrow 2f = -8 \Rightarrow f = -4$$

(1) এ g , f ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$$

7. (c) y -অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত মূলবিন্দু এবং (p, q) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[রা. '০২; সি. '০৮; য. '০৫; ঢা. '১২; রা., চ. '১৩]

সমাধান : ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots (1)$$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র y -অক্ষের উপর অবস্থিত।

$$g = 0$$

বৃত্তটি মূলবিন্দু $(0, 0)$ ও (p, q) বিন্দুগামী।

$$0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ এবং}$$

$$p^2 + q^2 + 2qf + 0 = 0$$

$$\Rightarrow f = -\frac{p^2 + q^2}{2q}$$

(1) এ g , f ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{p^2 + q^2}{2q}\right)y = 0$$

$$q(x^2 + y^2) = (p^2 + q^2)y \text{ (Ans.)}$$

- 7(d) $(3, 0)$ ও $(7, 0)$ বিন্দুগামী এবং y -অক্ষকে স্পর্শ করে এবং বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. '০২, '০৬; ব. '০২, '১১]

সমাধান : খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(3, 0)$ ও $(7, 0)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - 3)(x - 7) + (y - 0)(y - 0) +$$

$$k\{(x-3)(0-0) - (y-0)(3-7)\} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 21 + y^2 + k(4y) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x + 4ky + 21 = 0 \dots (1)$$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(5, -2k)$ এবং ব্যাসার্ধ

$$= \sqrt{5^2 + (-2k)^2 - 21} = \sqrt{4 + 4k^2}$$

(1) বৃত্তটি y -অক্ষকে স্পর্শ করে।

$$\sqrt{4 + 4k^2} = |5|$$

$$\Rightarrow 4 + 4k^2 = 25 \Rightarrow 4k^2 = 21$$

$$\Rightarrow k = \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 - 10x + 4\left(\pm \frac{\sqrt{21}}{2}\right)y + 21 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x \pm 2\sqrt{21}y + 21 = 0$$

বিকল্প পদ্ধতি : ধরি, y -অক্ষকে স্পর্শ করে এবং বৃত্তের সমীকরণ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = h^2$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + k^2 = 0 \dots (1)$$

(1) বৃত্তটি $(3, 0)$ ও $(7, 0)$ বিন্দুগামী।

$$9 - 6h + k^2 = 0 \dots \dots (2) \text{ এবং}$$

$$49 - 14h + k^2 = 0 \dots \dots (3)$$

$$(2) - (3) \Rightarrow -40 + 8h = 0 \Rightarrow h = 5$$

$$(2) \text{ এ } h = 5 \text{ বসিয়ে পাই, } 9 - 30 + k^2 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 = 21 \Rightarrow k = \pm \sqrt{21}$$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 - 10x \pm 2\sqrt{21}y + 21 = 0$$

- 7(e) $(1,1)$ ও $(2,2)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্তের ব্যাসার্ধ 1; বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, এবং দুইটি বৃত্ত পাওয়া যাবে। [য. '০৩]

সমাধান : খলিফার নিয়মানুসারে ধরি, $(1, 1)$ ও $(2, 2)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - 1)(x - 2) + (y - 1)(y - 2) + k\{(x-1)(1-2) - (y-1)(1-2)\} = 0$$

$$k(-x + 1 + y - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-3-k)x + (-3+k)y$$

$$+ 4 = 0 \dots (1)$$

- (1) বৃত্তটির কেন্দ্র $\left(\frac{k+3}{2}, \frac{3-k}{2}\right)$ এবং

$$\begin{aligned} \text{ব্যাসার্ধ} &= \sqrt{\left(\frac{k+3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-k}{2}\right)^2 - 4} \\ &= \sqrt{\frac{k^2 + 6k + 9 + k^2 - 6k + 9 - 16}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{2(k^2 + 1)}{4}} = \sqrt{\frac{k^2 + 1}{2}} \end{aligned}$$

প্রমতে, $\sqrt{\frac{k^2 + 1}{2}} = 1 \Rightarrow k^2 + 1 = 2$

$$\Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$$

∴ নির্ণয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0, \text{ যখন } k = 1$$

$$\text{এবং } x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0, \text{ যখন } k = -1$$

8.(a) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু থেকে 2 একক দূরে x -অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং যার ব্যাসার্ধ 5 একক। [য.'০৫; ব.'১১]

সমাধান নির্ণয় বৃত্তটি মূলবিন্দু থেকে 2 একক দূরে x -অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে বলে তা $(2, 0)$ ও $(-2, 0)$ দিয়ে অতিক্রম করে।

খলিফার নিয়মানুসারে ধরি, $(2, 0)$ ও $(-2, 0)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$\begin{aligned} (x-2)(x+2) + (y-0)(y-0) + \\ k\{(x-2)(0-0) - (y-0)(2+2)\} &= 0 \\ \Rightarrow x^2 - 4 + y^2 + k(-4y) &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 4ky - 4 &= 0 \dots (1) \end{aligned}$$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(0, 2k)$ এবং

$$\text{ব্যাসার্ধ} = \sqrt{0^2 + (2k)^2 + 4} = \sqrt{4k^2 + 4}$$

প্রমতে, $\sqrt{4k^2 + 4} = 5 \Rightarrow 4k^2 + 4 = 25$

$$\Rightarrow 4k^2 = 21 \Rightarrow k = \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পই,

$$x^2 + y^2 - 4\left(\pm \frac{\sqrt{21}}{2}\right)y - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 \pm 2\sqrt{21}y - 4 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

8(b) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা y -অক্ষকে $(0, \sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(-1, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

[জ.'০৬; য.'১০]

সমাধান ৪ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad (1)$$

(1) বৃত্তটি y -অক্ষকে $(0, \sqrt{3})$

বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$$f^2 = c \text{ এবং}$$

$$-f = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow f = -\sqrt{3}$$

$$c = (-\sqrt{3})^2 = 3$$

আবার, (1) বৃত্তটি $(-1, 0)$ বিন্দুগামী।

$$1 + 0 - 2g + 0 + c = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2g + 3 = 0 \Rightarrow g = 2$$

নির্ণয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + 4x - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$$

২য় অংশ : বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f) = (-2, \sqrt{3})$

$$\text{এবং ব্যাসার্ধ } \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4 + 3 - 3} = 2$$

8(c) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x -অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(-1, 9)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [য.'০০; চ.'০৩]

সমাধান: ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots (1)$$

(1) বৃত্তটি x -অক্ষকে $(2, 0)$

বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$$g^2 = c \text{ এবং } -g = 2$$

$$\Rightarrow g = -2$$

$$c = (2)^2 = 4$$

আবার, (1) বৃত্তটি

$(-1, 9)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$$1 + 81 - 2g + 18f + c = 0$$

$$\Rightarrow 82 + 4 + 18f + 4 = 0$$

[c ও g এর মান বসিয়ে।]

$$\Rightarrow 18f = -90 \Rightarrow f = -5$$

নির্ণয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

[MCQ এর জন্য,

$$\frac{(x-2)^2 + (y-0)^2}{y} = \frac{(-1-2)^2 + (9-0)^2}{9}$$

[

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

]

বইয়ের কম

আবার, (1) বৃত্তটি y -অক্ষ
থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা
কর্তন করে।

$$\begin{aligned} 2\sqrt{f^2 - c} &= 6 \Rightarrow \sqrt{f^2 - 16} = 3 \\ \Rightarrow f^2 - 16 &= 9 \Rightarrow f^2 = 25 \Rightarrow f = \pm 5 \\ \text{নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,} \\ x^2 + y^2 - 8x \pm 10y + 16 &= 0 \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

9.(c) $(-4, 3)$ ও $(12, -1)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ
রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
বৃত্তটি দ্বারা y -অক্ষের ছেদাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[জা.'০০; ব.'০৮; কু.'০৮; দি.'১০]

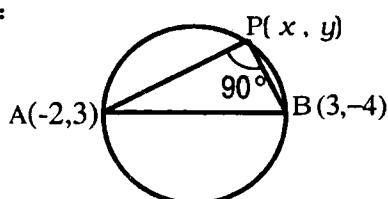
সমাধান : $(-4, 3)$ ও $(12, -1)$ বিন্দু দুইটির
সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$$\begin{aligned} (x+4)(x-12) + (y-3)(y+1) &= 0 \\ \Rightarrow x^2 - 8x - 48 + y^2 - 2y - 3 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y - 51 &= 0 \quad (\text{Ans.}) \\ \text{যদি অল্প } x^2 + y^2 - 8x - 2y - 51 = 0 \text{ কে} \\ x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ এর সঙ্গে তুলনা} \\ \text{করে পাই, } g = -4, f = -1 \text{ এবং } c = -51 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y\text{-অক্ষের ছেদাংশের দৈর্ঘ্য} &= 2\sqrt{f^2 - c} \\ &= 2\sqrt{1^2 - (-51)} = 2\sqrt{52} = 4\sqrt{13} \end{aligned}$$

9(d) প্রমাণ কর যে, $(-2, 3)$ ও $(3, -4)$ বিন্দু
দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের
সমীকরণ $(x+2)(x-3) + (y-3)(y+4) = 0$

প্রমাণ:



ধরি, ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু দুইটি $A(-2, 3)$ ও $B(3, -4)$ এবং $P(x, y)$ পরিধির উপর যেকোন একটি
বিন্দু।

PA এবং PB যোগ করি। যেহেতু AB ব্যাস,
 $\angle APB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। $\therefore \angle APB = 90^\circ$
(AP রেখার ঢাল) \times (BP রেখার ঢাল) $= -1$

$$\Rightarrow \frac{y-3}{x+2} \times \frac{y+4}{x-3} = -1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (y-3)(y+4) &= -(x+2)(x-3) \\ (x+2)(x-3) + (y-3)(y+4) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Proved})$$

10. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উভয় অক্ষকে
স্পর্শ করে এবং $(1, 8)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

[চ.'০১, '০৭; য.'০৩; মা.বো.'০৬; সি.'০৯; কু.'১২]

সমাধান : ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ
 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \dots (1)$

(1) বৃত্তটি উভয় অক্ষকে
স্পর্শ করে।

$$k = h \text{ এবং } r = |h|$$

(1) হতে পাই,

$$\begin{aligned} (x-h)^2 + (y-h)^2 &= |h|^2 \\ \Rightarrow x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2hy + h^2 &= h^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 2hx - 2hy + h^2 &= 0 \dots (2) \end{aligned}$$

যা $(1, 8)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$$1 + 64 - 2h - 16h + h^2 = 0$$

$$\Rightarrow h^2 - 18h + 65 = 0$$

$$\Rightarrow (h-5)(h-13) = 0 \therefore h = 5, 13$$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0 \text{ এবং}$$

$$x^2 + y^2 - 26x - 26y + 169 = 0$$

11.(a) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র
 $(6, 0)$ এবং যা $x^2 + y^2 - 4x = 0$ বৃত্ত ও $x = 3$
রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায়। [জা.'০৭; রা.'০৭, '১৪; মা.'০৮, '১২; চ.'০৮; মা.'০৯, '১৪; য.'১৩; দি.'১৪]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত ও রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায়
এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 4x + k(x-3) = 0$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 + (-4+k)x - 3k = 0 \dots (1)$

$$(1) \text{ বৃত্তের কেন্দ্র } \left(-\frac{k-4}{2}, 0\right).$$

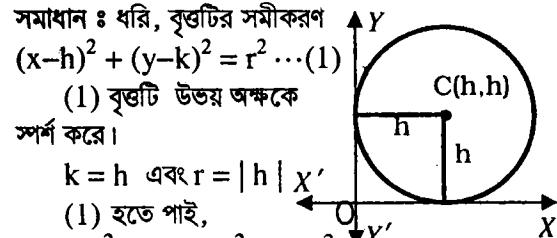
প্রশ্নমতে, বৃত্তের কেন্দ্র $(6, 0)$.

$$-\frac{k-4}{2} = 6 \Rightarrow k-4 = -12 \therefore k = -8$$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + (-4-8)x - 3(-8) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 24 = 0 \quad (\text{Ans.})$$



11(b) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু
এবং $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্ত ও
 $2x + 3y + 1 = 0$ রেখার ছেদ বিন্দু দিয়ে যায়।
[য.'০২; সি.'০২; ব.'০৭; চ.'১১]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত এবং রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে
যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 + k(2x + 3y + 1) = 0 \dots \dots (1)$

(1) বৃত্তটি মূলবিন্দু $(0, 0)$ দিয়ে অতিক্রম করে।

$$-4 + k = 0 \Rightarrow k = 4$$

(1) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 + 8x + 12y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0 \text{ (Ans.)}$$

11.(c) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র
 $(0,3)$ এবং যা $x^2 + y^2 - 4y = 0$ বৃত্ত ও $y - 2 = 0$
রেখার ছেদ বিন্দু দিয়ে যায়। [চ.'০২]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত ও রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায়
এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 4y + k(y - 2) = 0$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 + (-4 + k)y - 2k = 0 \dots (1)$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র $(0, -\frac{k-4}{2})$.

প্রশ্নমতে, বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 3)$.

$$-\frac{k-4}{2} = 3 \Rightarrow k - 4 = -6 \therefore k = -2$$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + (-4 - 2)y - 2 \cdot (-2) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0 \text{ (Ans.)}$$

12. (a) দেখাও যে, $A(1, 1)$ বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের উপর অবস্থিত। A বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ.'১০; য.'০৭; কু.রা.,'১৯; দি.'১২; ব.'১৩; চ.'১৪]

প্রমাণ : ধরি, $f(x,y) \equiv x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$
 $f(1, 1) = 1^2 + 1^2 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 - 12$
 $= 1 + 1 + 4 + 6 - 12 = 0$

$A(1, 1)$ বিন্দুটি প্রদত্ত বৃত্তের উপর অবস্থিত।

২য় অংশ: প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $= (-\frac{4}{2}, -\frac{6}{2}) = (-2, -3)$

ধরি, $A(1, 1)$ বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর
 $B(\alpha, \beta)$.

$$\frac{1+\alpha}{2} = -2 \Rightarrow 1 + \alpha = -4 \Rightarrow \alpha = -5$$

$$\text{এবং } \frac{1+\beta}{2} = -3 \Rightarrow 1 + \beta = -6 \Rightarrow \beta = -7$$

ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-5, -7)$

12 (b) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ বৃত্তের
বর্ধিত যে ব্যাসটি $(2, 5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার
সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০১]

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$

$$\text{এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক} = \left(-\frac{-8}{2}, -\frac{6}{2}\right) = (4, -3)$$

$(2, 5)$ বিন্দু ও কেন্দ্র $(4, -3)$ দিয়ে অতিক্রম করে
এরূপ ব্যাসের সমীকরণ, $\frac{x-2}{2-4} = \frac{y-5}{5+3}$

$$\Rightarrow 8x - 16 = -2y + 10 \Rightarrow 8x + 2y = 26$$

$$4x + y = 13 \text{ (Ans.)}$$

12 (c) $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$ বৃত্তের বর্ধিত যে
ব্যাসটি মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয়
কর। [প.ভ.প.' ৮৯, '০৮]

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 5bx + 12by = 0 \dots (1)$$

$$(1) \text{ বৃত্তের কেন্দ্র } \left(-\frac{-5b}{2}, -\frac{12b}{2}\right) = \left(\frac{5b}{2}, 6b\right)$$

(1) বৃত্তের বর্ধিত যে ব্যাসটি মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম
করে তার সমীকরণ $y = \frac{6b}{5b/2} x \Rightarrow y = \frac{12}{5} x$

$$12x + 5y = 0 \text{ (Ans.)}$$

12 (d) $(1,1)$ বিন্দুগামী একটি বৃত্তের সমীকরণ
নির্ণয় কর যা x -অক্ষকে স্পর্শ করে এবং যার কেন্দ্র
 $x + y = 3$ রেখার উপর প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

[কু.'০৮]

সমাধান : ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots (1)$$

(1) বৃত্তটি x -অক্ষকে স্পর্শ করে।
 $c = g^2 \dots (2)$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f)$, $x + y = 3$ রেখার
উপর প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$$-g - f = 3 \Rightarrow f = -g - 3 \dots (3)$$

আবার, বৃত্তটি $(1, 1)$ বিন্দুগামী।

$$\begin{aligned}
 1 + 1 + 2g + 2f + c &= 0 \\
 \Rightarrow 2 + 2g + 2(-g - 3) + g^2 &= 0 \\
 &\quad [(2) \text{ ও } (3) \text{ দ্বারা }] \\
 \Rightarrow 2 + 2g - 2g - 6 + g^2 &= 0 \\
 \Rightarrow g^2 = 4 \Rightarrow g &= -2 \\
 &\quad [\text{প্রথম চতুর্ভুগে } g \text{ ও } f \text{ খণ্ডাত্মক }] \\
 \text{এখন } (2) \text{ হতে পাই, } c &= (-2)^2 = 4 \text{ এবং} \\
 (3) \text{ হতে পাই, } f &= 2 - 3 = -1 \\
 \therefore \text{নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,} \\
 x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 &= 0
 \end{aligned}$$

12(e) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(1,1)$ বিন্দু
দিয়ে অতিক্রম করে এবং বৃত্তটির কেন্দ্র $y = 3x - 7$
রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
[সি. '০৮; গ্র. '০৮; কু. '০৭; য. '০৬; চ. '০৯; জ. '১১]

সমাধান : ধরি, $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$$\begin{aligned}
 (x - h)^2 + (y - k)^2 &= (\frac{1}{2}\sqrt{10})^2 = \frac{5}{2} \\
 \Rightarrow 2(x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2) &= 5 \dots (1) \\
 y &= 3x - 7 \text{ রেখার উপর (1) বৃত্তের কেন্দ্র} \\
 (h, k) \text{ অবস্থিত। } \therefore k &= 3h - 7 \dots (2) \\
 (1) \text{ বৃত্ত } (1, 1) \text{ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।} \\
 2(1 - 2h + h^2 + 1 - 2k + k^2) &= 5 \\
 \Rightarrow 2h^2 + 2k^2 - 4h - 4k &= 1 \\
 \Rightarrow 2h^2 + 2(3h - 7)^2 - 4h - 4(3h - 7) &= 1
 \end{aligned}$$

[(2) দ্বারা]

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 2h^2 + 2(9h^2 - 42h + 49) - 4h - 12h + 28 - 1 &= 0 \\
 \Rightarrow 2h^2 + 18h^2 - 84h + 98 - 4h - 12h + 28 - 1 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 20h^2 - 100h + 125 = 0$$

$$\Rightarrow 4h^2 - 20h + 25 = 0 \Rightarrow (2h - 5)^2 = 0$$

$$\Rightarrow h = \frac{5}{2} . (2) \text{ হতে পাই, } k = 3 \frac{5}{2} - 7 = \frac{1}{2}$$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned}
 2x^2 - 4 \cdot \frac{5}{2}x + 2 \cdot \frac{25}{4} + 2y^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}y + 2 \cdot \frac{1}{4} &= 5 \\
 \Rightarrow 8x^2 - 40x + 50 + 8y^2 - 8y + 2 &= 20 \\
 \Rightarrow 8x^2 + 8y^2 - 40x - 8y + 32 &= 0
 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

13.(a) $4\sqrt{2}$ বাহুবিশিষ্ট বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দুতে
অবস্থিত এবং এর বিপরীত শীর্ষটি x -অক্ষের উপর
অবস্থিত। এ বর্গের কর্ণকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের
সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. '০৮]

সমাধান ধরি, OABC বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দু $O(0,0)$ এবং x -অক্ষের উপর এর বিপরীত শীর্ষ B
অবস্থিত।

$$\begin{aligned}
 \text{OAB সমকোণী ত্রিভুজে,} \\
 OB^2 &= OA^2 + AB^2 \\
 &= (4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 \\
 [\because \text{বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য}] \quad &= 4\sqrt{2} \\
 &= 32 + 32 = 64 \\
 OB &= \pm 8 = B \text{ বিন্দুর ভূজ।}
 \end{aligned}$$

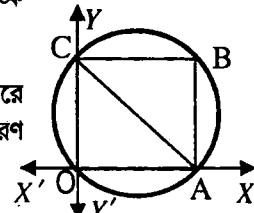
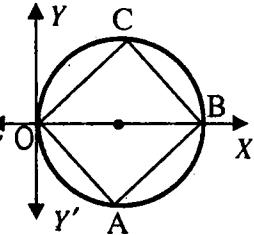
$$\begin{aligned}
 B \text{ বিন্দুর স্থানাঙ্ক } (\pm 8, 0) \\
 OB \text{ কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ} \\
 (x - 0)(x \pm 8) + (y - 0)(y - 0) &= 0 \\
 \Rightarrow x^2 \pm 8x + y^2 &= 0 \\
 x^2 + y^2 \pm 8x &= 0 \quad (\text{Ans.})
 \end{aligned}$$

13(b) b বাহুবিশিষ্ট OABC একটি কর্ণ। OA
ও OC কে অক্ষ ধরে দেখাও যে, কর্ণটির পরিবৃত্তের
সমীকরণ হবে $x^2 + y^2 = b(x + y)$.
[জ. '০৫; গ্র. '১০; ব. '১৩]

প্রমাণ : b বাহুবিশিষ্ট OABC বর্গের x ও
y- অক্ষ বরাবর যথাক্রমে OA ও OC অবস্থিত হলে
A ও C এর স্থানাঙ্ক
যথাক্রমে $(b, 0)$ ও $(0, b)$.

$$\begin{aligned}
 \text{বর্গের কর্ণ AC কে ব্যাস ধরে} \\
 \text{অঙ্কিত পরিবৃত্তের সমীকরণ} \\
 (x - b)(x - 0) + & \\
 (y - 0)(y - b) &= 0 \\
 \Rightarrow x^2 - bx + y^2 - by &= 0 \\
 x^2 + y^2 &= b(x + y) \quad (\text{Provsd})
 \end{aligned}$$

14 (a) এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাদের
প্রত্যেকটির কেন্দ্র $(3, 4)$ এবং যারা $x^2 + y^2 = 9$
বৃত্তকে স্পর্শ করে। [য. '১০]



সমাধান : প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 9 \dots (i)$ এর কেন্দ্র $A(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1 = 3$

ধরি, নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র $B(3,4)$ এবং ব্যাসার্ধ r_2
বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে বিহিঁস্থভাবে স্পর্শ করলে,

$$r_1 + r_2 = AB \Rightarrow 3 + r_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\Rightarrow r_2 = 2$$

আবার, বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে বিহিঁস্থভাবে স্পর্শ করলে,

$$r_2 - r_1 = AB \Rightarrow r_2 - 3 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$r_2 = 8$$

নির্ণেয় বৃত্ত দুইটির সমীকরণ,

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 + 16 - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 \text{ এবং}$$

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 8^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 + 16 - 64 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y - 39 = 0$$

$$14.(b) \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2} \text{ হলে দেখাও যে, } x^2 + y^2 + 2ax + c = 0 \text{ ও } x^2 + y^2 + 2by + c = 0 \text{ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করবে।} \quad [\text{মা. } '07]$$

গ্রামাণ : $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র

$$A(-a, 0) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } r_1 = \sqrt{a^2 - c}$$

$$x^2 + y^2 + 2by + c = 0 \text{ বৃত্তের কেন্দ্র}$$

$$B(0, -b) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } r_2 = \sqrt{b^2 - c}$$

বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করলে,

$$AB = |r_1 \pm r_2|$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = |\sqrt{a^2 - c} \pm \sqrt{b^2 - c}|$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = a^2 - c + b^2 - c$$

$$\pm 2\sqrt{(a^2 - c)(b^2 - c)} \quad [\text{বর্গ করে।}]$$

$$2c = \pm 2\sqrt{(a^2 - c)(b^2 - c)}$$

$$\Rightarrow c^2 = (a^2 - c)(b^2 - c) \quad [\text{বর্গ করে।}]$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 b^2 - b^2 c - a^2 c + c^2$$

$$\Rightarrow b^2 c + a^2 c = a^2 b^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$$

$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$ হলে, প্রদত্ত রেখা দুইটি স্পর্শ করবে।

15. $x = a(\cos \theta - 1)$ এবং $y = a(\sin \theta + 1)$
হলে, বৃত্তের কার্ডিনাল সমীকরণ, ব্যাসার্ধ ও কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: $x = a(\cos \theta - 1) = a \cos \theta - a$

$$\Rightarrow a \cos \theta = x + a$$

$$\text{আবার, } y = a(\sin \theta + 1) = a \sin \theta + a$$

$$\Rightarrow a \sin \theta = y - a$$

$$\text{এখন, } a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta = (x-a)^2 + (y-a)^2$$

$\therefore (x-a)^2 + (y-a)^2$, যা বৃত্তের কার্ডিনাল সমীকরণ। বৃত্তের ব্যাসার্ধ a এবং কেন্দ্র $(a, -a)$

16. প্রদত্ত শর্ত সিদ্ধ করে একপ বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর:

সমাধান: (a) $(4, 30^0)$ কেন্দ্র ও 5 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পোলার সমীকরণ,

$$5^2 = r^2 + 4^2 - 2r \cdot 4 \cos(30^0)$$

$$\Rightarrow 25 = r^2 + 16 - 8r \cos(\theta - \frac{\pi}{6})$$

$$r^2 - 8r \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) - 9 = 0$$

(b) $(3, \frac{3\pi}{2})$ কেন্দ্র ও 2 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পোলার সমীকরণ,

$$2^2 = r^2 + 3^2 - 2r \cdot 3 \cos(\theta - \frac{3\pi}{2})$$

$$\Rightarrow 4 = r^2 + 9 - 6r \cos(\frac{3\pi}{2} - \theta)$$

$$\Rightarrow r^2 + 5 + 6r \cos \theta = 0$$

(c) মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ a . তাহলে বৃত্তের পোলার সমীকরণ, $a^2 = r^2 + 3^2 - 2r \cdot 3 \cos(0^0)$

$$\Rightarrow a^2 = r^2 + 9 - 6r \cos \theta \dots \dots (1)$$

$$(1) \text{ বৃত্তি পোল } (0, 0^0) \text{ বিন্দুগামী বলে, } a^2 = 0^2 + 9 - 6 \cdot 0 \cdot \cos 0^0 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3.$$

$$\text{নির্ণেয় সমীকরণ, } 9 = r^2 + 9 - 6r \cos \theta$$

$$\Rightarrow r^2 = 6r \cos \theta \Rightarrow r = 6 \cos \theta$$

(d) মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ p . তাহলে বৃত্তের পোলার সমীকরণ, $p^2 = r^2 + r_1^2 - 2r r_1 \cos(\theta - \theta_1) \dots (1)$

(1) বৃত্তটি পোল $(0, 0^0)$, $(a, 0^0)$, $(b, 90^0)$ বিন্দুগামী।

$$p^2 = 0^2 + r_1^2 - 2.0 \cdot r_1 \cos(0^0 - \theta_1)$$

$$\Rightarrow p^2 = r_1^2 \Rightarrow p = r_1 \dots \dots (2)$$

$$p^2 = a^2 + r_1^2 - 2.a \cdot r_1 \cos(0^0 - \theta_1)$$

$$\Rightarrow a^2 = 2a r_1 \cos \theta_1, [\because p = r_1]$$

$$\Rightarrow a = 2 r_1 \cos \theta_1 \dots \dots (3)$$

$$\text{এবং } p^2 = b^2 + r_1^2 - 2.b \cdot r_1 \cos(90^0 - \theta_1)$$

$$\Rightarrow b^2 = 2b r_1 \sin \theta_1, [\because p = r_1]$$

$$\Rightarrow b = 2 r_1 \sin \theta_1$$

$$(1) \text{ হতে পাই, } r_1^2 = r^2 + r_1^2$$

$$-2r r_1 (\cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1)$$

$$r^2 = r (\cos \theta \cdot 2 r_1 \cos \theta_1 + \sin \theta \cdot 2 r_1 \sin \theta_1)$$

$$r = a \cos \theta + b \sin \theta$$

17. বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর:

(a) সমাধান: প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ $r^2 - 4\sqrt{3}r \cos \theta - 4r \sin \theta + 15 = 0$ কে পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $r^2 + 2r(g \cos \theta + f \sin \theta) + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g = -2\sqrt{3}$, $f = -2$, $c = 15$.

$$\sqrt{g^2 + f^2} = \sqrt{12 + 4} = 4, \tan^{-1} \frac{-f}{-g} =$$

$$\tan^{-1} \frac{2}{2\sqrt{3}} = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{নির্ণেয় কেন্দ্র } (4, \frac{\pi}{6}) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } =$$

$$\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{12 + 4 - 15} = 1$$

(b) $r = 2a \cos \theta \Rightarrow r^2 - 2ra \cos \theta = 0$ কে পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $r^2 + 2r(g \cos \theta + f \sin \theta) + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g = -a$, $f = 0$, $c = 0$.

$$\sqrt{g^2 + f^2} = \sqrt{a^2 + 0} = a, \tan^{-1} \frac{-f}{-g} =$$

$$\tan^{-1} \frac{0}{a} = \tan^{-1} 0 = 0^0$$

$$\text{নির্ণেয় কেন্দ্র } (a, 0^0) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } = \sqrt{a^2 + 0^2 - 0} = a$$

18. (a) একটি বৃত্তের কেন্দ্র x -অক্ষের উপর, যা মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 7 একক দূরে অবস্থিত। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 4 একক হলে, বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র $(7, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= 4$.

বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

$$4^2 = r^2 + 7^2 - 2r \cdot 7 \cos(\theta - 0)$$

$$\Rightarrow 16 = r^2 + 49 - 14r \cos \theta$$

$$r^2 - 14r \cos \theta + 33 = 0 \text{ (Ans.)}$$

(b) একটি বৃত্তের কেন্দ্র y -অক্ষের উপর, যা মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 8 একক দূরে অবস্থিত। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 5 একক হলে, বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র $(8, \frac{\pi}{2})$ এবং ব্যাসার্ধ $= 5$.

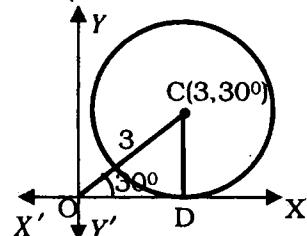
বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

$$5^2 = r^2 + 8^2 - 2r \cdot 8 \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow 25 = r^2 + 64 - 16r \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

$$r^2 - 16r \sin \theta + 39 = 0.$$

(c) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(3, 30^0)$ এবং বৃত্তটি x -অক্ষকে স্পর্শ করে; বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধান: প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র $(3, 30^0)$ এবং
ব্যাসার্ধ $= CD = 3 \sin 30^0 = \frac{3}{2}$

বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

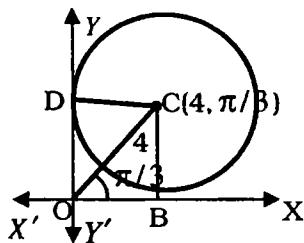
$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = r^2 + 3^2 - 2r \cdot 3 \cos(\theta - 30^0)$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} = r^2 + 9 - 6r \cos(\theta - 30^0)$$

$$\Rightarrow 9 = 4r^2 + 36 - 24r \cos(\theta - 30^0)
4r^2 - 24r \cos(\theta - 30^0) + 27 = 0$$

(d) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4, \frac{\pi}{3})$ এবং বৃত্তটি y-

অক্ষকে স্পর্শ করে; বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধান: প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র $(4, \frac{\pi}{3})$ এবং

$$\text{ব্যাসার্ধ} = OB = 4 \cos \frac{\pi}{3} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

$$(2)^2 = r^2 + 4^2 - 2r \cdot 4 \cos(\theta - \frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow 4 = r^2 + 16 - 8r \cos(\theta - \frac{\pi}{3})$$

$$r^2 - 8r \cos(\theta - \frac{\pi}{3}) + 12 = 0$$

19. যদি বৃত্তের উপরস্থি (4,1) বিন্দুটি $(1 + 5 \cos \theta, -3 + 5 \sin \theta)$ ঘারা প্রকাশিত হয়, তবে এ বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমতে

$$4 = 1 + 5 \cos \theta, 1 = -3 + 5 \sin \theta$$

$$\Rightarrow 5 \cos \theta = 3, 5 \sin \theta = 4$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{5}, \sin \theta = \frac{4}{5}$$

আমরা জানি, প্রদত্ত বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের জন্য θ এর মান 180^0 বৃদ্ধি পায়।

অপর প্রান্তের জন্য,

$$\cos(180^0 + \theta) = -\cos \theta = -\frac{3}{5} \text{ এবং}$$

$$\sin(180^0 + \theta) = -\sin \theta = -\frac{4}{5}$$

(4,1) বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক

$$(1 + 5 \times (-\frac{3}{5}), -3 + 5 \times (-\frac{4}{5}))$$

$$= (1 - 3, -3 - 4) = (-2, -7) \text{ (Ans.)}$$

16(a) $r^2 - 4\sqrt{3}r \cos \theta - 4r \sin \theta + 15 = 0$
বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান: পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ
 $r^2 + 2r(g \cos \theta + f \sin \theta) + c = 0$ ও প্রদত্ত
সমীকরণ $r^2 - 4\sqrt{3}r \cos \theta - 4r \sin \theta + 15 = 0$
তুলনা করে পাই, $g = -2\sqrt{3}, f = -2, c = 15$

$$\sqrt{g^2 + f^2} = \sqrt{12 + 4} = 4,$$

$$\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{12 + 4 - 15} = 1$$

$$\tan^{-1} \frac{f}{g} = \tan^{-1} \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \pi + \tan^{-1} \sqrt{3}$$

$$= \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$\therefore \text{বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক} = (\sqrt{g^2 + f^2}, \tan^{-1} \frac{f}{g})$$

$$= (4, \frac{7\pi}{6}) \text{ এবং ব্যাসার্ধ} = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = 1$$

16(b) $(4, 30^0)$ কেন্দ্র ও 5 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের
পোলার সমীকরণ,

$$5^2 = r^2 + 4^2 - 2r \times 4 \times \cos(\theta - 30^0)$$

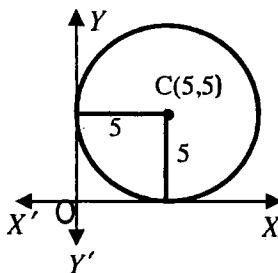
$$\Rightarrow r^2 - 8r \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) - 9 = 0$$

কাজ

১। এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা প্রত্যেক অক্ষের থাকে মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 5 একক

দূরত্বে স্পর্শ করে।

সমাধানঃ নির্ণয় বৃত্তটি প্রত্যেক অক্ষের থাকে মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 5 একক দূরত্বে স্পর্শ করে।



$$\text{বৃত্তটির কেন্দ্র } (5, 5) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } = |5| = 5.$$

$$\begin{aligned} \text{বৃত্তটির সমীকরণ } & (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 5^2 \\ \Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 &= 25 \\ x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 &= 0 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

২। দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 14 = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে $(3, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$$\text{প্রমাণ : } x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0 \text{ বৃত্তের কেন্দ্র } C_1(2, -3) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } r_1 = \sqrt{4+9-8} = \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 10x - 6y + 14 &= 0 \text{ বৃত্তের কেন্দ্র } C_2(5, 3) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } r_2 = \sqrt{25+9-14} = \sqrt{20} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

ধরি, প্রদত্ত বিন্দু $P(3, -1)$.

$$\text{এখন } C_1P = \sqrt{(2-3)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{5} = r_1$$

$$\begin{aligned} \text{এবং } C_2P &= \sqrt{(5-3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{20} \\ &= 2\sqrt{5} = r_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1C_2 &= \sqrt{(2-5)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{9+36} \\ &= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = C_1P + C_2P \end{aligned}$$

বৃত্তের কেন্দ্র দুইটি এবং $(3, -1)$ বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত।

অতএব, প্রদত্ত বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে $(3, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে। (প্রমাণিত)

৩। দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 18 = 0$ ও $x^2 + y^2 - 2y = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অল্পস্থিতাবে স্পর্শ করে।

$$\begin{aligned} \text{প্রমাণ } & x^2 + y^2 - 6x + 6y - 18 = 0 \text{ বৃত্তের} \\ & \text{কেন্দ্র } A(3, -3) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } r_1 = \sqrt{9+9+18} \\ & = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2y = 0 \text{ বৃত্তের কেন্দ্র } A(0, 1) \text{ এবং} \\ \text{ব্যাসার্ধ } r_2 = \sqrt{0+1+0} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{এখন, } AB = \sqrt{(3-0)^2 + (-3-1)^2} = 5$$

$$\text{এবং } r_1 - r_2 = 6 - 1 = 5 = AB$$

বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অল্পস্থিতাবে স্পর্শ করে।

৪। বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র

$$(6, \frac{\pi}{4}) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } 5$$

৫। দেখাও যে, $r = a \cos \theta$ একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র $(\frac{a}{2}, 0)$ ও ব্যাসার্ধ $\frac{a}{2}$.

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

১. ABCD বর্গের পরিবৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 39 = 0$. A (-1, 3) হলে B, C ও D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ABCD বর্গের পরিবৃত্ত $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 39 = 0$ এর কেন্দ্র $(\frac{5}{2}, -4)$ হবে ABCD বর্গের AC ও BD কর্ণদুয়োর ছেদবিন্দু O.

ধরি, C এর স্থানাঙ্ক (α, β)

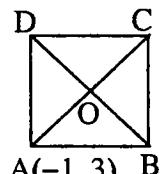
$$\text{AC এর মধ্যবিন্দু } (\frac{5}{2}, -4)।$$

$$\therefore \frac{\alpha - 1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \alpha = 5 + 1 = 6$$

$$\text{এবং } \frac{\beta + 3}{2} = -4 \Rightarrow \beta = -8 - 3 = -11$$

C এর স্থানাঙ্ক $(6, -11)$.

ধরি, AB বাহুর ঢাল m এবং AB বাহু AC কর্ণের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে।



$$\frac{m+2}{1-2m} = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow m+2 = 1-2m$$

$$\Rightarrow 3m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

AB ও DC বাহুর ঢাল $\frac{1}{3}$.

A(-1, 3) বিদ্যুগামী AB রেখার সমীকরণ

$$y-3 = -\frac{1}{3}(x+1) \Rightarrow 3y-9 = -x-1$$

$$\Rightarrow x+3y-8=0 \dots \dots (1)$$

C(6, -11) বিদ্যুগামী (1) এর উপর অস্থি BC এর সমীকরণ $3x-y=18+11$

$$\Rightarrow 3x-y-29=0 \dots \dots (2)$$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু B এর স্থানাঙ্ক

$$= \left(\frac{-87-8}{-1-9}, \frac{-24+29}{-1-9} \right) = \left(\frac{19}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

A(-1, 3) বিদ্যুগামী AB এর অস্থি AD এর সমীকরণ $3x-y=-3-3$

$$\Rightarrow 3x-y+6=0 \dots (3)$$

C(6, -11) বিদ্যুগামী (3) এর উপর অস্থি CD এর সমীকরণ $x+3y=6-33=-27$

$$\Rightarrow x+3y+27=0 \dots (4)$$

(3) ও (4) এর ছেদবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক

$$= \left(\frac{-27-18}{9+1}, \frac{6-81}{9+1} \right) = \left(-\frac{9}{2}, -\frac{15}{2} \right)$$

2.(a) ABC সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু A(0, 0) ও B(6, 0)। ABC ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, C শীর্ষের স্থানাঙ্ক (α, β) . ABC সমবাহু ত্রিভুজ বলে $AC^2 = BC^2 = AB^2$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - 6)^2 + \beta^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 - 12\alpha + 36 + \beta^2$$

$$\Rightarrow 12\alpha = 36 \Rightarrow \alpha = 3$$

আবার, $AC^2 = AB^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 6^2$

$$\Rightarrow 9 + \beta^2 = 36 \Rightarrow \beta^2 = 27 \Rightarrow \beta = \pm 3\sqrt{3}$$

C শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(3, \pm 3\sqrt{3})$.

ধরি, A(0,0) দিয়ে যায় এবূপ পরিবৃত্তের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0 \dots (1)$$

(1) বৃত্ত B(6,0) এবং C(3, $\pm 3\sqrt{3}$) বিদ্যুগামী।

$$36 + 12g = 0 \Rightarrow g = -3 \text{ এবং}$$

$$9 + 27 + 6g \pm 6\sqrt{3}f = 0$$

$$36 - 18 \pm 6\sqrt{3}f = 0 \Rightarrow \pm 6\sqrt{3}f = 18$$

$$\Rightarrow f = \pm \sqrt{3}$$

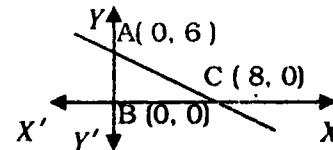
(1) এ g ও f এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 - 6x \pm 2\sqrt{3}y = 0 \text{ (Ans.)}$$

2 (b) $3x + 4y = 24$ সরলরেখা এবং অক্ষ দুইটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তঃবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $3x + 4y = 24 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$

সরলরেখা এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A(0, 6), B(0, 0) ও C(8, 0).



পরিবৃত্ত : ABC ত্রিভুজে, $\angle ABC = 90^\circ$ বলে, A ও C বিদ্যুয় ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের একটি ব্যাসের অন্তিবিন্দু।

নির্ণয় পরিবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-0)(x-8) + (y-6)(y-0) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \text{ (Ans.)}$$

অন্তঃবৃত্ত : এখানে, $a = BC = |0-8| = 8$,

$$b = AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$$c = AB = |6-0| = 6$$

$$\delta_{ABC} = 0(0-0) - 6(0-8) = 48$$

$$\text{এবং } a+b+c = 8+10+6 = 24 \text{ এবং } \frac{6}{AC} = \frac{24}{BC^2}$$

অন্তঃবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$$= \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c} \right)$$

$$= \left(\frac{8 \times 0 + 10 \times 0 + 6 \times 8}{24}, \frac{8 \times 6 + 10 \times 0 + 6 \times 0}{24} \right)$$

$$= (2, 2)$$

$$\text{অন্তঃব্যাসার্ধ} = \frac{|\delta_{ABC}|}{a+b+c} = \frac{48}{24} = 2$$

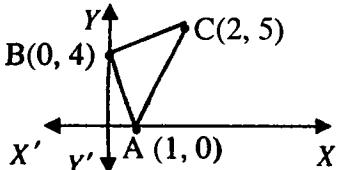
নির্ণয় অন্তঃবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 4 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

2(c) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি A(1, 0), B(0, 4) ও C(2, 5)। ABC ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্বকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান :



পরিকেন্দ্র: A(1, 0) ও B(0, 4) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $(x - 1)(x - 0) + (y - 0)(y - 4) = k\{(x - 1)(0 - 4) - (y - 0)(1 - 0)\}$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 - x - 4y = k(-4x + 4 - y)$, যা C(2, 5) বিন্দুগামী।

$$2^2 + 5^2 - 2 - 4 \times 5 = k(-4 \times 2 + 4 - 5) \\ \Rightarrow 4 + 25 - 2 - 20 = k(-8 + 4 - 5) \\ \Rightarrow -9k = 7 \Rightarrow k = -7/9$$

প্রদত্ত বিন্দুগামী ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 - x - 4y = -\frac{7}{9}(-4x + 4 - y) \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - (1 + \frac{28}{9})x - (4 + \frac{7}{9})y + \frac{28}{9} = 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{37}{9}x - \frac{43}{9}y + \frac{28}{9} = 0$$

ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্রের স্থানাংক $(\frac{37}{18}, \frac{43}{18})$

ভরকেন্দ্র : AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাংক $(\frac{1}{2}, 2)$ এবং

C(2, 5) শীর্ষগামী মধ্যমার সমীকরণ,

$$(x - 2)(5 - 2) - (y - 5)(2 - \frac{1}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 6 - \frac{3}{2}y + \frac{15}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 6x - 12 - 3y + 15 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - y + 1 = 0 \dots \quad (\text{i})$$

আবার, BC এর মধ্যবিন্দুর স্থানাংক $(1, \frac{9}{2})$ এবং

A(1, 0) শীর্ষগামী মধ্যমার সমীকরণ,

$$(x - 1)(0 - \frac{9}{2}) - (y - 0)(1 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1; \quad (\text{i}) \text{ হতে পাই, } y = 2 + 1 = 3$$

ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র $(1, 3)$.

লম্বকেন্দ্র : AB বাহুর সমীকরণ

$$(x - 1)(0 - 4) - (y - 0)(1 - 0) = 0$$

$$\Rightarrow -4x + 4 - y = 0 \Rightarrow 4x + y - 4 = 0$$

AB বাহুর উপর লম্ব এবং C(2, 5) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $x - 4y = 2 - 20$

$$\Rightarrow x = 4y - 18 \quad (\text{ii})$$

আবার, BC বাহুর সমীকরণ

$$(x - 0)(4 - 5) - (y - 4)(0 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow -x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow x - 2y + 8 = 0$$

BC বাহুর উপর লম্ব এবং A(1, 0) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $2x + y = 2$

$$\Rightarrow 2(4y - 18) + y = 2, [(\text{ii}) \text{ দ্বারা}]$$

$$\Rightarrow 8y - 36 + y = 2$$

$$\Rightarrow 9y = 38 \Rightarrow y = 38/9$$

$$(\text{ii}) \text{ হতে পাই, } x = 4 \times \frac{38}{9} - 18 = -\frac{10}{9}$$

$$\text{ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র } (-\frac{10}{9}, \frac{38}{9})$$

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

www.boighar.com

$$1. \ x^2 + y^2 = r^2 \text{ বৃত্তে } y = mx + c \text{ রেখাটি}$$

$$\text{সর্বক হওয়ার শর্ত}, c = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ},$$

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1} \text{ এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক}$$

$$\left(\frac{-mr}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{r}{\sqrt{1+m^2}} \right)$$

$$2. \ x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ বৃত্তের উপর}$$

$P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0$$

$$3. \text{ বহিঃস্থ যেকোন বিন্দু } (x_1, y_1) \text{ হতে } x^2 + y^2$$

$$+ 2gx + 2fy + c = 0 \text{ বৃত্তের অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ}, (xx_1 + yy_1 + gx + gy_1 + fx_1 + fy_1 + c)^2 = (x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c)$$

$$(x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c)$$

$$4. \ x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ বৃত্তের}$$

উপর $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত সমীকরণ,

$$(y_1 + f)x - (x_1 + g)y + gy_1 - fx_1 = 0.$$

$$5. \ (x_1, y_1) \text{ বিন্দু হতে } x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য},$$

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$$

$$6. \ (x_1, y_1) \text{ বিন্দু হতে } x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শ জ্যা এর সমীকরণ},$$

$$xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0$$

$$7. \ x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ বৃত্তের কোন জ্যা এর মধ্যবিন্দু } (x_1, y_1) \text{ হলে তার সমীকরণ},$$

$$xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

$$8. \ S_1 = 0 \text{ এ } S_2 = 0 \text{ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ}, S_1 - S_2 = 0.$$

$$9. \ x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ এর প্রতিবিম্ব}$$

$$(a) x \text{ অক্ষের সাপেক্ষে } x^2 + y^2 + 2gx - 2fy + c = 0$$

$$(b) y \text{ অক্ষের সাপেক্ষে } x^2 + y^2 - 2gx + 2fy + c = 0$$

$$(c) ax + by + c = 0 \text{ রেখার সাপেক্ষে : এ রেখার সাপেক্ষে প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র } (-g, -f) \text{ এর প্রতিবিম্ব}$$

(g', f') কে কেন্দ্র এবং প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধকে ব্যাসার্ধ ধরে অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণয় প্রতিবিম্ব।

প্রশ্নমালা IV B

$$1. \ (a) x^2 + y^2 + 4x + 6y + c = 0 \text{ বৃত্তের ব্যাসার্ধ } 3 \text{ হলে, } c \text{ এর মান নিচের কোনটি?$$

$$\text{Sol}^n : \sqrt{2^2 + 3^2 - c} = 3 \Rightarrow c = 13 - 9 = 4$$

(b) $\text{Sol}^n :$

(i) সংশোধন : x-অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ 6

$$2\sqrt{r^2 - k^2} = 2\sqrt{5^2 - 4^2} = 6$$

$$(ii) \sqrt{2^2 + 3^2 - c} > 0 \Rightarrow c < 13$$

$$(iii) \text{ সংশোধন : } (1, 1) \text{ বিন্দুটি } x^2 + y^2 + 3x + 5y - c = 0 \text{ বৃত্তের ভিতরে অবস্থান করলে } c > 10 \text{ হবে।}$$

$$1^2 + 1^2 + 3.1 + 5.1 - c < 0 \Rightarrow c > 10.$$

$$(c) \text{ Sol}^n : r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$(d) \text{ Sol}^n : (x-h)^2 + (y-k)^2 = k^2$$

$$(e) \text{ Sol}^n : \text{উভয় অক্ষ কে স্পর্শ করার শর্ত } g^2 = f^2 = c \\ k = \pm 4, c = 16$$

$$(f) \text{ Sol}^n : \text{বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী বলে, } c = 0 \text{ এবং } y-\text{অক্ষকে স্পর্শ করে বলে, } f^2 = c = 0.$$

$$(g) \text{ Sol}^n : (0,1) \text{ ও } (1,0) \text{ বিন্দুয়ের সংযোগ$$

$$\text{রেখাংশের মধ্যবিন্দু স্থানাঙ্ক } \left(\frac{0+1}{2}, \frac{1+0}{2} \right).$$

$$(h) \text{ Sol}^n : (i) AB = 5 - 3 = 2$$

$$(ii) \text{ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2 - 6 + 11} = 3$$

$$(iii) \text{ জ্যা এর সমীকরণ, } x:2 + y:3 = 2^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 13.$$

$$(i) \text{ Sol}^n : r = \cos \theta \Rightarrow r^2 = a \cdot r \cos \theta$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - ax = 0 \therefore \text{কেন্দ্র } \left(\frac{a}{2}, 0 \right)$$

(j) Solⁿ: সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 - (x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2) = 0$
 $\Rightarrow 2x + 1 = 0$

$x - 3y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। পরবর্তী তিনটি প্রশ্নের উভয় দাও:

(k) Solⁿ: ব্যাসার্ধ $= \sqrt{3^2 + 4^2 - 15} = \sqrt{10}$,

y -অক্ষের খন্ডিতাংশ $= 2\sqrt{4^2 - 15} = 2$.

(l) Solⁿ: $\frac{|3 - 3(-4) - k|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow |15 - k| = 10 \Rightarrow k - 15 = \pm 10 \Rightarrow k = 5, 25$

(m) Solⁿ: $x - 3y = 5$ বৃত্তের অপর স্পর্শকের সমীকরণ, $x - 3y = 25$.

(n) Solⁿ: $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 1/3 = 0$
 কেন্দ্র $= (-2/2, -4/2) = (-1, -2)$ ∴ Ans. D

(o) Solⁿ: বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

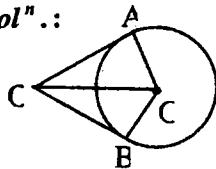
(4, 3) ও (-1, 3) এর দূরত্ব $= |4 + 1| = 5$

(4, 3) ও (9, 3) এর দূরত্ব $= |4 - 9| = 5$

(4, 3) ও (0, 3) এর দূরত্ব $= |4 - 0| = 4$

(0, 3) বৃত্তের উপর অবস্থিত নয়। Ans. C

(p) Solⁿ:



বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$OA = OB = \sqrt{0 + c} = \sqrt{c}$

OABC চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$= 2 \times OAC$ সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= 2 \times \frac{1}{2} (OA \times AC)$

$= \sqrt{c} \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{c(g^2 + f^2 - c)}$

Ans. B

2(a) (3, 7) ও (9, 1) বিন্দুগুলির সংযোগ রেখাখনকে ব্যাস ধরে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হয়েছে।
 দেখাও যে, $x + y = 4$ রেখাটি এই বৃত্তের একটি স্পর্শক। সর্ববিন্দুটি নির্ণয় কর। [চ.০৫]

প্রমাণ : (3, 7) ও (9, 1) বিন্দুগুলির সংযোগ রেখাখনকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - 3)(x - 9) + (y - 7)(y - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 27 + y^2 - 8y + 7 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0 \quad (1)$$

$$\text{প্রদত্ত রেখা } x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x \dots(2)$$

(1) এ y এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + (4 - x)^2 - 12x - 8(4 - x) + 34 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 16 - 8x + x^2 - 12x - 32 + 8x + 34 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 \Rightarrow x = 3$$

$$(2) \Rightarrow y = 4 - 3 = 1$$

∴ (2) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের সাথে শূধুমাত্র (3, 1) বিন্দুতে মিলিত হয়।

$x + y = 4$ রেখাটি বৃত্তটির একটি স্পর্শক এবং সর্ববিন্দু (3, 1)

বিকল্প পদ্ধতি : (3, 7) ও (9, 1) বিন্দুগুলির সংযোগ রেখাখনকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - 3)(x - 9) + (y - 7)(y - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 27 + y^2 - 8y + 7 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0 \quad (1)$$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র (6, 4) এবং

$$\text{ব্যাসার্ধ} = \sqrt{36 + 16 - 34} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

বৃত্তের কেন্দ্র (6, 4) থেকে প্রদত্ত রেখা $x + y = 4$

অর্থাৎ $x + y - 4 = 0$ (2) এর লম্ব দূরত্ব

$$= \frac{|6+4-4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} = \text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ} \quad ।$$

প্রদত্ত রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।

২য় অংশ : (2) রেখার উপর লম্ব এবং বৃত্তের কেন্দ্র (6, 4) দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ রেখার সমীকরণ,

$$x - y = 6 - 4 \Rightarrow x - y = 2 \quad (3)$$

$$(2) + (3) \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

$$(3) \text{ হতে পাই, } 3 - y = 2 \Rightarrow y = 1.$$

(2) ও (3) রেখার ছেদবিন্দু (3, 1) যা নির্ণেয় সর্ববিন্দু।

২(b) দেখাও যে, $y - 3x = 10$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10$ বৃত্তকে সমাপ্তিত কিন্তুতে ছেদ করে। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব.'০১]

প্রমাণ প্রদত্ত রেখা $y - 3x = 10$ হতে
 $y = 3x + 10 \dots(1)$ এর মান প্রদত্ত বৃত্তে বসিয়ে
 পাই, $x^2 + (3x + 10)^2 = 10$
 $\Rightarrow x^2 + 9x^2 + 60x + 100 = 10$
 $\Rightarrow 10x^2 + 60x + 90 = 0$
 $\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 = 0$
 $\Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$$(1) \Rightarrow y = 3(-3) + 10 = -9 + 10 = 1$$

∴ প্রদত্ত রেখাটি বৃত্তের সাথে শূধুমাত্র $(-3, 1)$ কিন্তুতে মিলিত হয়।

প্রদত্ত রেখাটি বৃত্তকে সমাপ্তিত কিন্তুতে ছেদ করে এবং বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(-3, 1)$.

২(c) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি x -অক্ষকে স্পর্শ করে। c এর মান ও স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব.'০৮; ঢ.'০৮, '০৭'১১; রা.'০৫, '১২; য.'০৫, '০৮, '১১; চ.'০৫, '০৮; মা.বো.'০৫;]

সমাধান : $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তের
 কেন্দ্র $(2, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{4+9-c} = \sqrt{13-c}$

x -অক্ষ থেকে বৃত্তের কেন্দ্র
 $(2, 3)$ এর দূরত্ব $= |3| = 3$
 বৃত্তটি x -অক্ষকে স্পর্শ করে।

$$\sqrt{13-c} = 3$$

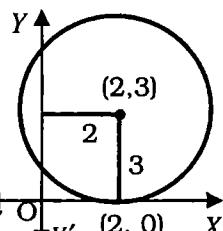
$$\Rightarrow 13-c = 9 \quad c = 4$$

আবার, বৃত্তটি x -অক্ষকে
 স্পর্শ করে এবং বৃত্তটির কেন্দ্রের ভুজ 2.

$$\text{স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক } (2, 0).$$

২(d) দেখাও যে, $x - 3y = 5$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দু দিয়ে যায় এবং ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৭; মা.'০৩]

প্রমাণ : $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0 \dots(1)$
 বৃত্তের কেন্দ্র $(3, -4)$ এবং
 $\text{ব্যাসার্ধ} = \sqrt{9+16-15} = \sqrt{10}$



$$\begin{aligned} \text{বৃত্তের কেন্দ্র } (3, -4) \text{ থেকে } x - 3y = 5 \text{ অর্থাৎ } x \\ - 3y - 5 = 0 & \quad (2) \text{ রেখার লম্ব দূরত্ব} = \\ \frac{|3 - 3 \times (-4) - 5|}{\sqrt{1+9}} &= \frac{|3 + 12 - 5|}{\sqrt{1+9}} \end{aligned}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} = \text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}.$$

প্রদত্ত রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।

২য় অংশ : $x - 3y - 5 = 0$ স্পর্শকের উপর লম্ব
 এবং বৃত্তের কেন্দ্র $(3, -4)$ দিয়ে অতিক্রমকারী নির্ণয় ব্যাসের সমীকরণ $3x + y = 3 \times 3 - 4 = 9 - 4$

$$3x + y = 5 \text{ (Ans.)}$$

3.(a) $3x + 4y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে k এর মান নির্ণয় কর।

[য.'০১; ব.'০৩, '০৭; রা.'০৬; সি.'১২]
 প্রমাণ : $x^2 + y^2 = 10x$ অর্থাৎ $x^2 + y^2 - 10x = 0$

$$\text{বৃত্তের কেন্দ্র } (5, 0) \text{ এবং ব্যাসার্ধ} = \sqrt{5^2} = 5$$

$$\begin{aligned} \text{বৃত্তের কেন্দ্র } (5, 0) \text{ থেকে } 3x + 4y = k &= \text{ অর্থাৎ } 3x \\ + 4y - k = 0 \text{ রেখার লম্ব দূরত্ব} &= \frac{|15-k|}{\sqrt{9+16}} \end{aligned}$$

$$= \frac{|15-k|}{5}$$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\frac{|15-k|}{5} = 5 \Rightarrow |k - 15| = 25$$

$$\Rightarrow k - 15 = \pm 25 \quad \therefore k = 40 \text{ বা, } -10$$

3(b) দেখাও যে, $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2 m^2 + 2al = 1$ হয়। [কু.'০৬, '০৮; ঢ.'০৮; রা.'১১; সি.'০৮; ব.'০৫, '০৯; চ.'০৮, '১০; মা.'০৩; দি.'০৯; য.'১১]

প্রমাণ : $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(a, 0)$

$$\text{এবং ব্যাসার্ধ} = \sqrt{a^2} = a$$

বৃত্তের কেন্দ্র $(a, 0)$ থেকে $lx + my = 1$ অর্থাৎ

$$lx + my - 1 = 0 \text{ রেখার লম্ব দূরত্ব} = \frac{|la-1|}{\sqrt{l^2+m^2}}$$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\frac{|la - 1|}{\sqrt{l^2 + m^2}} = a$$

$$\Rightarrow |la - 1|^2 = a^2(l^2 + m^2) \quad [\text{বর্ণ করে}]$$

$$\Rightarrow (la - 1)^2 = a^2 l^2 + a^2 m^2$$

$$\Rightarrow l^2 a^2 - 2la + 1 = a^2 l^2 + a^2 m^2$$

$$a^2 m^2 + 2al = 1 \quad (\text{Showed})$$

3. (c) $px + qy = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। দেখাও যে, (p, q) বিন্দুটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত। [য.'০৬, '১২; কু. '০৮, '০৫, '১৩; রা. '০৫, '১৩; চ. '০৬; য. '০৬; ব. '০৮].

প্রমাণ : $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= a$

বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 0)$ থেকে $px + qy = 1$ অর্থাৎ

$$px + qy - 1 = 0 \text{ রেখার লম্ব দূরত্ব} = \frac{|-1|}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\left| \frac{-1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right| = a \Rightarrow p^2 + q^2 = \frac{1}{a^2} \text{ এ}$$

থেকে স্পর্শ যে, (p, q) বিন্দুটি $x^2 + y^2 = \frac{1}{a^2}$ বৃত্তের

সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

(p, q) বিন্দুটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত।

3(d) $ax + 2y - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে a এর মান নির্ণয় কর। [রা. '০৮]

প্রমাণ : $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র

$$(4, 1) \text{ এবং ব্যাসার্ধ} = \sqrt{4^2 + 1^2 - 4} = \sqrt{13}$$

বৃত্তের কেন্দ্র $(4, 1)$ থেকে $ax + 2y - 1 = 0$ রেখার

$$\text{লম্ব দূরত্ব} = \left| \frac{4a + 2 - 1}{\sqrt{a^2 + 4}} \right| = \left| \frac{4a + 1}{\sqrt{a^2 + 4}} \right|$$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\left| \frac{4a + 1}{\sqrt{a^2 + 4}} \right| = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow (4a + 1)^2 = 13(a^2 + 4) \quad [\text{বর্ণ করে}]$$

$$\Rightarrow 16a^2 + 8a + 1 = 13a^2 + 52$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 8a - 51 = 0$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 17a - 9a - 51 = 0$$

$$\Rightarrow a(3a + 17) - 3(3a + 17) = 0$$

$$\Rightarrow (3a + 17)(a - 3) = 0$$

$$a = 3 \text{ বা, } -17/3$$

3(e) $3x + by - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। b এর মান নির্ণয় কর। [রা. '০৮, '১২; কু. '০৮, '০৫; সি. '০৮; মা. '০৫, য. '১১; চ. '১১; ব. '১২; ঢ. '১৩]

প্রমাণ : $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র

$$(4, 1) \text{ এবং ব্যাসার্ধ} = \sqrt{4^2 + 1^2 - 4} = \sqrt{13}$$

বৃত্তের কেন্দ্র $(4, 1)$ থেকে $3x + by - 1 = 0$

$$\text{রেখার লম্ব দূরত্ব} = \left| \frac{12 + b - 1}{\sqrt{9 + b^2}} \right| = \left| \frac{11 + b}{\sqrt{9 + b^2}} \right|$$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\left| \frac{11 + b}{\sqrt{9 + b^2}} \right| = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow (11 + b)^2 = 13(9 + b^2) \quad [\text{বর্ণ করে}]$$

$$\Rightarrow 121 + 22b + b^2 = 117 + 13b^2$$

$$\Rightarrow 12b^2 - 22b - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 6b^2 - 11b - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 6b^2 - 12b + b - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 6b(b - 2) + 1(b - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (b - 2)(6b + 1) = 0$$

$$b = 2 \text{ বা, } -1/6$$

3(f) $(4, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্ত $3x + 4y - 1 = 0$ ও $x - 3 = 0$ রেখা দুইটিকে স্পর্শ করে। r বৃত্তটির ব্যাসার্ধ হলে দেখাও যে, $r^2 - 20r + 40 = 0$.

প্রমাণ : ধরি, r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \dots (1)$$

(1) বৃত্ত $(4, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$$(4 - h)^2 + (1 - k)^2 = r^2 \dots (2)$$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) হতে $3x + 4y - 1 = 0$ ও

$x - 3 = 0$ রেখা দুইটির লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে

$$\frac{|3h + 4k - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|3h + 4k - 1|}{5} \text{ ও } \frac{|h - 3|}{\sqrt{1}}$$

(1) বৃত্তটি প্রদত্ত রেখার দুইটিকে স্পর্শ করলে ,

$$|h - 3| = r \Rightarrow h - 3 = \pm r \Rightarrow h = \pm r + 3$$

$$\text{এবং } \frac{|3h + 4k - 1|}{5} = r \Rightarrow 3h + 4k - 1 = \pm 5r$$

$$\Rightarrow 3(\pm r + 3) + 4k - 1 = \pm 5r \quad [\because h = \pm r + 3]$$

$$\Rightarrow \pm 3r + 9 + 4k - 1 = \pm 5r$$

$$\Rightarrow 4k + 8 = \pm 2r \Rightarrow 2k = \pm r - 4$$

$$\Rightarrow k = \frac{\pm r - 4}{2}$$

(2) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$$(4 \mp r - 3)^2 + \left(1 - \frac{\pm r - 4}{2}\right)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow (1 \mp r)^2 + \frac{(2 \mp r + 4)^2}{4} = r^2$$

$$\Rightarrow 4(1 \mp 2r + r^2) + (36 \mp 12r + r^2) = 4r^2$$

$$\Rightarrow 4 \mp 8r + 4r^2 + 36 \mp 12r + r^2 = 4r^2$$

$$\Rightarrow r^2 \mp 20r + 40 = 0$$

কিন্তু বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $r > 0$ বলে r এর কোন ধনাত্মক বাস্তব মান $r^2 - 20r + 40 = 0$ কে সিদ্ধ করে না।

$$r^2 - 20r + 40 = 0 \quad (\text{Showed}).$$

4.(a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. '০৫; রা. '০৭; ঢা. '১০]

সমাধান : $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(1, 2)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1^2 + 2^2 + 4} = 3$

ধরি, $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব স্পর্শকের সমীকরণ $4x + 3y + k = 0 \dots (1)$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(1, 2)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\frac{|4.1 + 3.2 + k|}{\sqrt{16+9}} = 3 \Rightarrow |4 + 6 + k| = 15$$

$$\Rightarrow k + 10 = \pm 15 \quad \therefore k = 5, -25$$

$$\text{নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ } 4x + 3y - 25 = 0,$$

$$4x + 3y + 5 = 0$$

4(b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত

স্পর্শক $3x - 4y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল। স্পর্শকের

সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. '০১]

$$\text{সমাধান : } x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \text{ বৃত্তের}$$

$$\text{কেন্দ্র } (1, 2) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4} = 3$$

ধরি, $3x - 4y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল স্পর্শকের সমীকরণ $3x - 4y + k = 0 \dots (1)$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(1, 2)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\frac{|3.1 - 4.2 + k|}{\sqrt{9+16}} = 3 \Rightarrow |3 - 8 + k| = 15$$

$$\Rightarrow k - 5 = \pm 15 \quad \therefore k = 20, -10$$

$$\text{নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ } 3x - 4y + 20 = 0, \\ 3x - 4y - 10 = 0$$

5.(a) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ বৃত্তের স্পর্শক অঙ্ক দুইটি হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. '০১, '০৯; রা. '০৮; য. '০৭; কু. '১১]

$$\text{সমাধান : } x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0 \text{ বৃত্তের} \\ \text{কেন্দ্র } (-2, 4) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } \sqrt{2^2 + 4^2 - 2} \\ = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

ধরি, অঙ্ক দুইটি হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে এবং স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$ অর্থাৎ $x + y - a = 0 \dots (1)$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(-2, 4)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $3\sqrt{2}$ এর সমান হবে।

$$\frac{|-2 + 4 - a|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow |2 - a| = 6$$

$$\Rightarrow a - 2 = \pm 6 \quad a = 8, -4$$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $x + y + 4 = 0$, $x + y - 8 = 0$

5(b) $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$$[\text{চ. '১০; ব. '১১; কু. য. '১২}]$$

সমাধান : $x^2 + y^2 = 4^2$ বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= 4$

ধরি, x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ

$$y = \tan 30^\circ \times x + c = \frac{1}{\sqrt{3}} \times x + c$$

$$\Rightarrow x - \sqrt{3}y + \sqrt{3}c = 0 \dots (1)$$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(0, 0)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ 4 এর সমান হবে।

$$\frac{|\sqrt{3}c|}{\sqrt{1+3}} = 4 \Rightarrow |\sqrt{3}c| = 8 \Rightarrow c = \pm \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$\text{নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ } x - \sqrt{3}y \pm 8 = 0$$

6.(a) $x^2 + y^2 = b$ ($5x - 12y$) বৃত্তের এটি ব্যাস মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। ব্যাসটির সমীকরণ এবং মূলবিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [জা.'০৮]
সমাধান : $x^2 + y^2 = b$ ($5x - 12y$) অর্থাৎ $x^2 + y^2 - 5b x + 12by = 0 \dots (1)$ বৃত্তের কেন্দ্র

$$\left(\frac{5b}{2}, -6b\right) \text{ এবং ব্যাসার্ধ} = \sqrt{\frac{25b^2}{4} + 36b^2}$$

$$= \sqrt{\frac{25b^2 + 144b^2}{4}} = \sqrt{\frac{169b^2}{4}} = \frac{13b}{2}$$

মূলবিন্দু $(0, 0)$ এবং কেন্দ্র $\left(\frac{5b}{2}, -6b\right)$ দিয়ে

$$\text{অতিক্রমকারী নির্ণেয় ব্যাসের সমীকরণ } y = \frac{-6b}{5b/2} x$$

$$\Rightarrow 5y = -12x \quad 12x + 5y = 0$$

২য় অংশ : মূলবিন্দুগামী স্পর্শক মূলবিন্দুগামী ব্যাসের উপর লম্ব। অতএব, মূলবিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ $5x - 12y = 0$

6(b) দেখাও যে, $x + 2y = 17$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 10$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। এ বৃত্তের যে ব্যাসটি স্পর্শ কিন্তু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [জা.'০২]

প্রমাণ : $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 10$ অর্থাৎ $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 10 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র

$$(1, 3) \text{ এবং ব্যাসার্ধ} = \sqrt{1+9+10} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

বৃত্তের কেন্দ্র $(1, 3)$ থেকে $x + 2y = 17$ অর্থাৎ $x +$

$$2y - 17 = 0$$
 রেখার লম্বদূরত্ব $= \frac{|1+6-17|}{\sqrt{1+4}}$

$$= \frac{|-10|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} = \text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}.$$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের একটি স্পর্শক।

২য় অংশ : স্পর্শকিন্দুগামী ব্যাস স্পর্শকের উপর লম্ব এবং কেন্দ্র দিয়ে অতিক্রম করে। অতএব, $x + 2y = 17$ স্পর্শকের উপর লম্ব এবং কেন্দ্র $(1, 3)$ দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ ব্যাসের সমীকরণ $2x - y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

$$2x - y + 1 = 0$$

7(a) $x^2 + y^2 - 3x + 10y - 15 = 0$ বৃত্তের $(4, -11)$ কিন্তু স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[সি.'০২; জা.'০৯]

সমাধান : $x^2 + y^2 - 3x + 10y - 15 = 0$ বৃত্তের $(4, -11)$ কিন্তু স্পর্শকের সমীকরণ,

$$x \cdot 4 + y \cdot (-11) - \frac{3}{2}(x + 4) + 5(y - 11) - 15 = 0$$

$$[xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0 \\ \text{সূত্র দ্বারা}]$$

$$\Rightarrow 8x - 22y - 3x - 12 + 10y - 110 - 30 = 0 \\ 5x - 12y - 152 = 0 \text{ (Ans.)}$$

7(b) $x^2 + y^2 = 45$ বৃত্তের $(6, -3)$ কিন্তু অঙ্কিত স্পর্শক $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 35 = 0$ বৃত্তকে A ও B কিন্তু ছেদ করে। দেখাও যে, A ও B কিন্তু অঙ্কিত স্পর্শক পরস্পর লম্ব। [প্র.ভ.প.'০০]
প্রমাণ : $x^2 + y^2 = 45$ বৃত্তের $(6, -3)$ কিন্তু স্পর্শকের সমীকরণ, $x \cdot 6 + y \cdot (-3) = 45$

$$\Rightarrow 2x - y = 15 \Rightarrow y = 2x - 15 \dots (1)$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 35 = 0 \dots (2)$$

বৃত্তে $y = 2x - 15$ বসিয়ে পাই,

$$x^2 + (2x - 15)^2 - 4x + 2(2x - 15) - 35 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x^2 - 60x + 225 - 4x + 4x - 30 - 35 = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 60x + 160 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 32 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 8) = 0$$

$$\Rightarrow x = 4, 8$$

$$(1) \text{ হতে পাই, } y = 2 \cdot 4 - 15 = 8 - 15 = -7$$

$$\text{এবং } y = 2 \cdot 8 - 15 = 16 - 15 = 1$$

\therefore (1) রেখাটি (2) বৃত্তকে A($4, -7$) ও B($8, 1$) কিন্তু ছেদ করে।

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 35 = 0$$

(2) বৃত্তের A(4, -7) কিন্তুতে অঙ্কিত সর্পকের
সমীকরণ, $x \cdot 4 + y \cdot (-7) - 2(x + 4) + (y - 7)$
 $-35 = 0$

$$\Rightarrow 4x - 7y - 2x - 8 + y - 7 - 35 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 6y - 50 = 0 \Rightarrow x - 3y - 25 = 0, \text{ যার}$$

$$\text{ঢাল} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$$

আবার (2) বৃত্তের B(8, 1) কিন্তুতে অঙ্কিত সর্পকের
সমীকরণ,

$$x \cdot 8 + y \cdot 1 - 2(x + 8) + (y + 1) - 35 = 0$$

$$\Rightarrow 8x + y - 2x - 16 + y + 1 - 35 = 0$$

$$\Rightarrow 6x + 2y - 50 = 0 \Rightarrow 3x + y - 25 = 0, \text{ যার}$$

$$\text{ঢাল} = -\frac{3}{1} = -3$$

এ ঢালদ্বয়ের গুণফল $= \frac{1}{3} \times -3 = -1$

A ও B কিন্তুতে অঙ্কিত সর্পক পরস্পর সম্ম।

8.(a) $x^2 + y^2 = 20$ বৃত্তের 2 ভূজবিশিষ্ট কিন্তুতে
সর্পকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব. '০৫; সি. '০৯; রা. '১০; দি. '১১]

সমাধান : ধরি, 2 ভূজবিশিষ্ট কিন্তুর স্থানাঙ্ক $(2, \beta)$,
যা প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 20$ এর উপর অবস্থিত।

$$4 + \beta^2 = 20 \Rightarrow \beta^2 = 16 \Rightarrow \beta = 4, -4$$

2 ভূজবিশিষ্ট কিন্তুর স্থানাঙ্ক $(2, 4)$ এবং $(2, -4)$
প্রদত্ত বৃত্তের $(2, 4)$ এবং $(2, -4)$ কিন্তুতে সর্পকের
সমীকরণ $x \cdot 2 + y \cdot 4 = 20 \Rightarrow x + 2y = 10$ এবং
 $x \cdot 2 + y \cdot (-4) = 20 \Rightarrow x - 2y = 10$

8(b) $x^2 + y^2 = 13$ বৃত্তের 2 কোটিবিশিষ্ট
কিন্তুতে সর্পকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. '০৮]

সমাধান : ধরি, 2 কোটিবিশিষ্ট কিন্তুর স্থানাঙ্ক
($\alpha, 2$), যা প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 13$ এর উপর
অবস্থিত।

$$\alpha^2 + 4 = 13 \Rightarrow \alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3, -3$$

2 ভূজবিশিষ্ট কিন্তুর স্থানাঙ্ক $(3, 2)$ এবং $(-3, 2)$

প্রদত্ত বৃত্তের $(3, 2)$ এবং $(-3, 2)$ কিন্তুতে সর্পকের
সমীকরণ $x \cdot 3 + y \cdot 2 = 13 \Rightarrow 3x + 2y = 13$ এবং
 $x \cdot (-3) + y \cdot 2 = 13 \Rightarrow 3x - 2y + 13 = 0$

9.(a) $(1, -1)$ কিন্তু থেকে $2x^2 + 2y^2 - x +$
 $3y + 1 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত সর্পকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
[য. '০২; কু. '১৩; চ. '১১]

সমাধান : $(1, -1)$ কিন্তু থেকে $2x^2 + 2y^2 - x +$
 $3y + 1 = 0$ অর্থাৎ $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = 0$

বৃত্তে অঙ্কিত সর্পকের দৈর্ঘ্য

$$= \sqrt{1^2 + (-1)^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{2}(-1) + \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4-3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ একক।}$$

9. (b) $(3, -3)$ কিন্তু থেকে $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত সর্পকের সমীকরণ এবং দৈর্ঘ্য
নির্ণয় কর। [য. '০১]

সমাধান : $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$ বৃত্তের
কেন্দ্র $(-4, -2)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{16+4+5} = 5$

ধরি, $(3, -3)$ কিন্তুগামী সর্পকের সমীকরণ
 $y + 3 = m(x - 3)$ অর্থাৎ $mx - y - 3m - 3 = 0$
এ রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে সর্প করলে কেন্দ্র $(-4, -2)$
থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{17}$ এর সমান হবে।

$$\left| \frac{-4m + 2 - 3m - 3}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| = 5$$

$$\Rightarrow (-7m - 1)^2 = 25(m^2 + 1) \quad [\text{কর্ণ করে}]$$

$$\Rightarrow 49m^2 + 14m + 1 = 25m^2 + 25$$

$$\Rightarrow 24m^2 + 14m - 24 = 0$$

$$\Rightarrow 12m^2 + 7m - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 12m^2 + 16m - 9m - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 4m(3m + 4) - 3(3m + 4) = 0$$

$$\Rightarrow (3m + 4)(4m - 3) = 0$$

$$m = -\frac{4}{3}, \frac{3}{4}$$

সর্পকের সমীকরণ $y + 3 = \frac{3}{4}(x - 3)$

$$\Rightarrow 4y + 12 = 3x - 9 \therefore 3x - 4y = 21 \text{ এবং}$$

$$y + 3 = -\frac{4}{3}(x - 3) \Rightarrow 3y + 9 = -4x + 12$$

$$4x + 3y = 3$$

২য় অংশ : $(3, -3)$ বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(3)^2 + (-3)^2 + 8.3 + 4.(-3) - 5} \\ &= \sqrt{9 + 9 + 24 - 12 - 5} = \sqrt{25} = 5 \text{ একক।} \end{aligned}$$

10.(a) $(1, -3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $2x - y - 4 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব.'০৩; সি.'০৯; দি.'১০; য.'১২]

সমাধান : বৃত্তের ব্যাসার্ধ = কেন্দ্র $(1, -3)$ হতে $2x - y - 4 = 0$ স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব

$$= \frac{|2.1 + 3 - 4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$(1, -3)$ কেন্দ্র ও $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট নির্ণেয়

বৃত্তের সমীকরণ $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = (\frac{1}{\sqrt{5}})^2$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 5(x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9) = 1 \\ &\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 10x + 30y + 50 - 1 = 0 \\ &\quad 5x^2 + 5y^2 - 10x + 30y + 49 = 0 \end{aligned}$$

10(b) $\sqrt{2}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $x + y + 1 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে এবং যাদের কেন্দ্র x -অক্ষের উপর অবস্থিত। [সি.'০৩, '১১]

সমাধান : ধরি, x -অক্ষের উপর অবস্থিত বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\alpha, 0)$.

$x + y + 1 = 0$ রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(\alpha, 0)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{2}$ এর সমান হবে।

$$\frac{|\alpha + 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |\alpha + 1| = 2$$

$$\Rightarrow \alpha + 1 = \pm 2 \therefore \alpha = 1, -3$$

বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র $(1, 0)$ এবং $(-3, 0)$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 1 = 2$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \text{ (Ans.) এবং}$$

$$(x + 3)^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 = 2$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 7 = 0 \text{ (Ans.)}$$

10(c) (p, q) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, মূলবিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণ হবে $px + qy = 0$. [কু.'০৩; য.'০৭]

সমাধান : নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ = কেন্দ্র (p, q)

$$\text{হতে } \text{মূলবিন্দুর দূরত্ব} = \sqrt{p^2 + q^2}$$

$$\begin{aligned} (p, q) \text{ কেন্দ্র ও } \sqrt{p^2 + q^2} \text{ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট} \\ \text{বৃত্তের সমীকরণ } (x - p)^2 + (y - q)^2 = p^2 + q^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 = p^2 + q^2 \\ x^2 + y^2 - px - qx = 0 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

$$2\text{য় অংশ : } x^2 + y^2 - px - qx = 0 \text{ বৃত্তে} \\ \text{মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,}$$

$$x.0 + y.0 - \frac{1}{2}p(x+0) - \frac{1}{2}q(y+0) = 0$$

$$\Rightarrow -px - qy = 0 \therefore px + qy = 0 \text{ (Proved)}$$

11.(a) $y = 2x$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তের একটি জ্যা। উক্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০৮; চ.'০৩; দি.'০৯; য.'১০]

সমাধান : ধরি, $y = 2x$ অর্থাৎ $2x - y = 0 \dots (1)$

রেখা এবং $x^2 + y^2 - 10x = 0$ বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 - 10x + k(2x - y) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-10 + 2k)x - ky = 0 \dots (2)$$

$$(2) \text{ বৃত্তের কেন্দ্র } \left(-\frac{-10 + 2k}{2}, -\frac{-k}{2}\right)$$

$$= (5 - k, \frac{k}{2})$$

প্রদত্ত রেখাটি (2) বৃত্তের ব্যাস বলে এর কেন্দ্র $2x - y = 0$ রেখার উপর অবস্থিত হবে।

$$2(5 - k) - \frac{k}{2} = 0 \Rightarrow 20 - 4k - k = 0$$

$$\Rightarrow 5k = 20 \Rightarrow k = 4$$

(2) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 + (-10 + 8)x - 4y = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \text{ (Ans.)}$$

বিকল্প পদ্ধতি : $y = 2x \dots (1)$ হতে y এর মান প্রদত্ত

$$\text{বৃত্তের সমীকরণে বসিয়ে পাই, } x^2 + (2x)^2 = 10x$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x^2 - 10x = 0 \Rightarrow 5x^2 - 10x = 0$$

$$\Rightarrow 5x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

(1) হতে পাই, $y = 2.0 = 0$ এবং $y = 2.2 = 4$
প্রদত্ত বৃত্তের (1) জ্যা এর প্রান্তবিন্দু দুইটি $(0,0)$
এবং $(2,4)$.

$(0,0)$ এবং $(2,4)$ কিন্তু দুইটির সংযোগ রেখাখনকে
ব্যাস ধরে অঙ্কিত নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,
 $(x - 0)(x - 2) + (y - 0)(y - 4) = 0$
 $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ (Ans.)

11. (b) $(3, 7)$ ও $(9, 1)$ কিন্তু দুইটিকে একটি
ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়
কর এবং দেখাও যে, বৃত্তটি $x - y + 4 = 0$ রেখাকে
স্পর্শ করে। [চ.'০৫; কু.'০৯; ঢা.'১২]

সমাধান : $(3, 7)$ ও $(9, 1)$ কিন্তু দুইটিকে একটি
ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - 3)(x - 9) + (y - 7)(y - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 27 + y^2 - 8y + 7 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0 \dots (1)$$

২য় অংশ : (1) বৃত্তের কেন্দ্র $(6, 4)$ এবং ব্যাসার্ধ
 $= \sqrt{36+16-34} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

এখন কেন্দ্র $(6, 4)$ থেকে $x - y + 4 = 0$ রেখার
লম্ব দূরত্ব $= \frac{6 - 4 + 4}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} =$ বৃত্তের
ব্যাসার্ধ।

বৃত্তটি প্রদত্ত রেখাকে স্পর্শ করে।

12.(a) $(3, -1)$ কিন্তুগামী একটি বৃত্ত x -অক্ষকে
 $(2, 0)$ কিন্তুতে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয়
কর। মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকটির
সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৫; কু.'১২]

সমাধান : ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,
 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ (1)

$$(1) \text{ বৃত্তটি } x\text{-অক্ষকে স্পর্শ করে।}$$

$$c = g^2 \quad (2)$$

$$(1) \text{ বৃত্তটি } (2, 0) \text{ কিন্তু দিয়ে অতিক্রম করে।}$$

$$4 + 0 + 4g + 0 + c = 0$$

$$\Rightarrow 4 + 4g + g^2 = 0 \quad [\because c = g^2]$$

$$\Rightarrow (g + 2)^2 = 0 \Rightarrow g + 2 = 0 \Rightarrow g = -2$$

$$(2) \text{ হতে পাই, } c = (-2)^2 = 4$$

$$\text{আবার } (1) \text{ বৃত্তটি } (3, -1) \text{ কিন্তু দিয়ে অতিক্রম করে}$$

$$\text{বলে, } 9 + 1 + 6g - 2f + c = 0$$

$$\Rightarrow 10 + 6(-2) - 2f + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 14 - 12 - 2f = 0 \Rightarrow 2 - 2f = 0 \Rightarrow f = 1$$

$$(1) \text{ এ } g, f \text{ ও } c \text{ এর মান বসিয়ে পাই,}$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$$

২য় অংশ : ধরি, মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর
স্পর্শকটির সমীকরণ $y = mx$ অর্থাৎ $mx - y = 0$,
 $m \neq 0$.
এ রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(2, -1)$
থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{4+1-4} = 1$ এর সমান
হবে।

$$\left| \frac{2m+1}{\sqrt{m^2+1}} \right| = 1 \Rightarrow (2m+1)^2 = m^2 + 1$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 4m + 1 = m^2 + 1$$

$$\Rightarrow 3m^2 + 4m = 0 \Rightarrow 3m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow m = -\frac{4}{3}$$

মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকটির
সমীকরণ $y = -\frac{4}{3}x \quad \therefore 4x + 3y = 0$ (Ans.)

12 (b) b ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত যার কেন্দ্রের ভূজ
ও কোটি উভয়ই ধনাত্মক, x -অক্ষ এবং $3y = 4x$
সরলরেখাকে স্পর্শ করে ; তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, b ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ
 $(x - h)^2 + (y - k)^2 = b^2 \dots (1)$; এখানে h, k
উভয়ই ধনাত্মক।

(1) বৃত্ত x -অক্ষকে স্পর্শ করে।

বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $b = |\text{কেন্দ্রের কোটি}| = |k| = k$
আবার, (1) বৃত্ত $3y = 4x$ অর্থাৎ $4x - 3y = 0$
রেখাকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (h, k) থেকে এর দূরত্ব
ব্যাসার্ধ b এর সমান হবে।

$$\frac{|4h - 3k|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = b \Rightarrow |4h - 3b| = 5b$$

$$\Rightarrow 4h - 3b = \pm 5b$$

$$4h = 8b \text{ অথবা, } 4h = -2b$$

$$\Rightarrow h = 2b \text{ অথবা, } h = -\frac{b}{2}; \text{ কিন্তু } h > 0.$$

$$h = 2b$$

$$(1) \text{ এ } h \text{ ও } k \text{ এর মান বসিয়ে পাই,}$$

$$(x - 2b)^2 + (y - b)^2 = b^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4bx + 4b^2 + y^2 - 2by + b^2 = b^2$$

$$x^2 + y^2 - 4bx - 2by + 4b^2 = 0 \text{ (Ans.)}$$

12. (c) $2x + 3y - 5 = 0$ রেখাটি (3, 4)

কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের স্পর্শক। বৃত্তটি y -অক্ষের যে অংশ ছেদ করে তার পরিমাণ নির্ণয় কর। [য. '০৮; ক. '০৭]

সমাধান : বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r =$ কেন্দ্র (3, 4) হতে

$$\text{প্রদত্ত স্পর্শকের লম্বদূরত্ব} = \frac{|6+12-5|}{\sqrt{4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$$

$$= \sqrt{13}$$

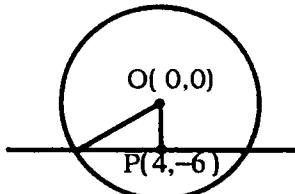
বৃত্তটি y -অক্ষের যে অংশ ছেদ করে তার পরিমাণ

$$= 2\sqrt{r^2 - h^2}, \text{ এখানে } h = \text{কেন্দ্রের ভূজ} = 3$$

$$= 2\sqrt{(\sqrt{13})^2 - 3^2} = 2\sqrt{13-9} = 2.2 = 4$$

13.(a) $x^2 + y^2 = 144$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু (4, -6) কিন্তু অবস্থিত। [চ. '০৯; পি. '০৯, '১১; রা. '০৫; য. '০৬; ঢ. '০৭; মা. '০৮; ক. '১০; সি. '১১]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 144$ এর কেন্দ্র $O(0, 0)$ এবং জ্যা এর মধ্যবিন্দু $P(4, -6)$.



$$OP \text{ রেখার সমীকরণ } y = \frac{-6}{4}x \Rightarrow 2y = -3x$$

$$\Rightarrow 3x + 2y = 0$$

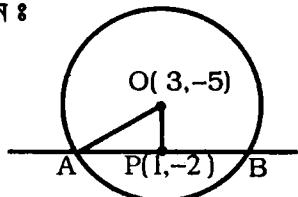
$P(4, -6)$ কিন্দুগামী এবং $3x + 2y = 0$ রেখার উপর লম্ব নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ,

$$2x - 3y = 2.4 - 3.(-6) = 8 + 18 = 26$$

$$2x - 3y = 26 \text{ (Ans.)}$$

13.(b) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 21 = 0$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু (1, -2) কিন্তু অবস্থিত।

সমাধান :



$$\text{ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত } x^2 + y^2 - 6x + 10y - 21 = 0$$

এর কেন্দ্র $O(3, -5)$ এবং AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু $P(1, -2)$.

$$OP \text{ রেখার ঢাল} = \frac{-5+2}{3-1} = \frac{-3}{2}$$

$$OP \perp AB \text{ বলে, } AB \text{ এর ঢাল} = \frac{2}{3}$$

$$P(1, -2) \text{ কিন্দুগামী } \frac{2}{3} \text{ ঢাল বিশিষ্ট নির্ণেয় জ্যা}$$

$$AB \text{ এর সমীকরণ, } y + 2 = \frac{2}{3}(x - 1)$$

$$\Rightarrow 3y + 6 = 2x - 2 \\ 2x - 3y - 8 = 0 \text{ (Ans.)}$$

$$\begin{aligned} \text{২য় অংশ : } OP &= \sqrt{(3-1)^2 + (-2+5)^2} \\ &= \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OA &= \text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ} = \sqrt{3^2 + 5^2 + 21} \\ &= \sqrt{9+25+21} = \sqrt{55} \end{aligned}$$

OAP সমকোণী ত্রিভুজে OA অতিভুজ।

$$AP^2 = OA^2 - OP^2 = 55 - 13 = 42$$

$$\Rightarrow AP = \sqrt{42}$$

$$\text{নির্ণেয় জ্যা এর দৈর্ঘ্য } AB = 2 AP = 2\sqrt{42}$$

$$\text{বিকল্প পদ্ধতি : } x^2 + y^2 - 6x + 10y - 21 = 0$$

$$\text{বৃত্তের যে জ্যাটি } (1, -2) \text{ কিন্তু সমিখ্যভিত্তি হয় তার সমীকরণ, } x \cdot 1 + y \cdot (-2) - 3(x + 1) + 5(y - 2) - 21 = 1^2 + (-2)^2 - 6 \cdot 1 + 10 \cdot (-2) - 21 \quad [T = S_1 \text{ সূত্রের সাহায্যে }] \\ \Rightarrow x - 2y - 3x - 3 + 5y - 10 = 1 + 4 - 6 - 20$$

$$\Rightarrow -2x + 3y - 13 + 21 = 0$$

$$2x - 3y - 8 = 0 \text{ (Ans.)}$$

$$\begin{aligned} \text{২য় অংশ : } \text{প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র } (3, -5) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } r &= \sqrt{9+25+21} = \sqrt{55}. \end{aligned}$$

$$\text{কেন্দ্র } (3, -5) \text{ এবং জ্যা এর মধ্যবিন্দু } (1, -2) \text{ এর দূরত্ব } d = \sqrt{(3-1)^2 + (-5+2)^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{জ্যা এর দৈর্ঘ্য} = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{55-13}$$

$$= 2\sqrt{44} \text{ একক।}$$

14. (a) $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$ ও $x^2 + y^2 + 8x + y + 10 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব.'০৫]

সমাধান : ধরি, $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$
এবং $S_2 \equiv x^2 + y^2 + 8x + y + 10 = 0$

বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$$S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow -2x + y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - y + 4 = 0 \dots \dots (1)$$

ধরি, এ সাধারণ জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 +$

$$k(2x - y + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (6 + 2k)x + (2 - k)y + 6 + 4k = 0 \dots (2)$$

(2) বৃত্তের কেন্দ্র $(-k - 3, \frac{k - 2}{2})$, যা সাধারণ জ্যা

(1) এর উপর অবস্থিত।

$$2(-k - 3) - \frac{k - 2}{2} + 4 = 0$$

$$\Rightarrow -4k - 12 - k + 2 + 8 = 0$$

$$\Rightarrow -5k - 2 = 0 \Rightarrow k = -\frac{2}{5}$$

$$\text{নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, } x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 - \frac{2}{5}(2x - y + 4) = 0$$

$$\Rightarrow 5(x^2 + y^2) + 30x + 10y + 30 - 4x + 2y - 8 = 0$$

$$5(x^2 + y^2) + 26x + 12y + 22 = 0$$

14 (b) $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ ও $(x - q)^2 + (y - p)^2 = r^2$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণগুলিকে লিখা যাই,

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0$$

$$\text{এবং } x^2 + y^2 - 2qx - 2py + p^2 + q^2 - r^2 = 0$$

বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$$(-2p + 2q)x + (-2q + 2p)y = 0$$

$$\Rightarrow x - y = 0 \dots \dots (1)$$

১ম বৃত্তের কেন্দ্র (p, q) এবং ব্যাসার্ধ = r

$$\text{কেন্দ্র } (p, q) \text{ থেকে (1) সাধারণ জ্যা এর লম্বদূরত্ব } d \\ = \frac{|p - q|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|p - q|}{\sqrt{2}}$$

$$\text{সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য} = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

$$= 2\sqrt{r^2 - \frac{|p - q|^2}{(\sqrt{2})^2}} = \sqrt{4r^2 - \frac{4(p - q)^2}{2}} \\ = \sqrt{4r^2 - 2(p - q)^2} \text{ (Ans.)}$$

14 (c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$ ও $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 43 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [প.ত.প.'০৫; '০৬]
সমাধান : ধরি, $S_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$
এবং $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 5x + 8y - 43 = 0$

বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$$S_1 - S_2 = 0$$

$$\Rightarrow (-4 + 5)x + (6 - 8)y + (-36 + 43) = 0 \\ x - 2y + 7 = 0 \text{ (Ans.)}$$

15.(a) দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$ ও $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে। সাধারণ স্পর্শক ও স্পর্শ কিন্দু নির্ণয় কর। [ব.'১১]

প্রমাণ : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C_1(1, -2)$ ও ব্যাসার্ধ $r_1 = \sqrt{1+4+31} = 6$
এবং $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C_2(-2, 2)$ ও ব্যাসার্ধ $r_2 = \sqrt{4+4-7} = 1.$

$$C_1 C_2 = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-2)^2}$$

$$= \sqrt{9+16} = 5 = 6 - 1 = r_1 - r_2$$

প্রদত্ত বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে

অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

সাধারণ স্পর্শক অর্থাৎ সাধারণ

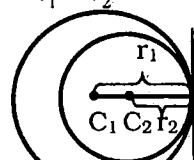
জ্যা এর সমীকরণ,

$$(-2 - 4)x + (4 + 4)y + (-31 - 7) = 0$$

$$\Rightarrow -6x + 8y - 38 = 0$$

$$3x - 4y + 19 = 0 \text{ (Ans.)}$$

এ সাধারণ স্পর্শক কেন্দ্রগুলোর সংযোগ রেখাখ $C_1 C_2$ কে ব্যাসার্ধগুলোর অনুপাতে অর্থাৎ $r_1 : r_2$ অনুপাতে



বহির্ভিত্তি করবে। অতএব, সর্পিলিদুর স্থানাঙ্ক
 $= \left(\frac{6(-2) - 1.1}{6-1}, \frac{6.2 - 1.(-2)}{6-1} \right) = \left(-\frac{13}{5}, \frac{14}{5} \right)$

15.(b) দেখাও যে, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
 যেকোন বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c' = 0$

বৃক্ষে অঙ্কিত সর্পকের দৈর্ঘ্য $\sqrt{c' - c}$.

প্রমাণ : ধরি, (α, β) প্রথম বৃক্ষের উপর যেকোন বিন্দু।

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + c &= 0 \\ \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta &= -c \dots(1) \end{aligned}$$

এখন (α, β) বিন্দু থেকে দ্বিতীয় বৃক্ষে অঙ্কিত সর্পকের
 দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + c'}$
 $= \sqrt{-c + c'} = \sqrt{c' - c}$ (Showed)

16.(a) (-5, 4) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 2x - 4y$

+ 1 = 0 বৃক্ষে অঙ্কিত সর্পকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[য. '০১; ঢ. '০৫, '১৩]

সমাধান : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \dots(1)$

বৃক্ষের কেন্দ্র (1, 2) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1+4-1} = 2$

ধরি, (-5, 4) বিন্দুগামী সাপর্শকের সমীকরণ
 $y - 4 = m(x + 5)$ অর্থাৎ $mx - y + 5m + 4 = 0$

বৃক্ষের কেন্দ্র (1, 2) থেকে এ সর্পকের লম্বদূরত
 ব্যাসার্ধ 2 এর সমান হবে।

$$\begin{aligned} \frac{|m - 2 + 5m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} &= 2 \Rightarrow \frac{|6m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2 \\ \Rightarrow (3m + 1)^2 &= m^2 + 1 \\ \Rightarrow 9m^2 + 6m + 1 &= m^2 + 1 \\ \Rightarrow 8m^2 + 6m &= 0 \Rightarrow m(8m + 6) = 0 \end{aligned}$$

$$m = 0, -\frac{3}{4}$$

সর্পকের সমীকরণ $y - 4 = 0$ এবং

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x + 5)$$

$$\Rightarrow 4y - 16 = -3x - 15 \therefore 3x + 4y - 1 = 0$$

16.(b) মূলবিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$ বৃক্ষে
 অঙ্কিত সর্পক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢ. '০৮, '১১;
 রা. '১০, '১৩; সি. '১০; য. '০৫; চ. '০৬, '০৯, '১৩ ব. '১২]

সমাধান : $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0 \dots(1)$

বৃক্ষের কেন্দ্র (5, 0) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{25 - 20} = \sqrt{5}$
 ধরি, মূলবিন্দু (0, 0) দিয়ে অতিক্রমকারী সাপর্শকের
 সমীকরণ $y = mx$ অর্থাৎ $mx - y = 0$

বৃক্ষের কেন্দ্র (5, 0) থেকে এ সর্পকের লম্বদূরত
 ব্যাসার্ধ $\sqrt{5}$ এর সমান হবে।

$$\begin{aligned} \frac{|5m - 0|}{\sqrt{m^2 + 1}} &= \sqrt{5} \Rightarrow 25m^2 = 5(m^2 + 1) \\ \Rightarrow 5m^2 &= m^2 + 1 \Rightarrow 4m^2 = 1 \therefore m = \pm \frac{1}{2} \\ (3m + 1)^2 &= m^2 + 1 \\ \text{সর্পক দুইটির সমীকরণ } y &= \frac{1}{2}x \Rightarrow x - 2y = 0 \end{aligned}$$

$$\text{এবং } y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow x + 2y = 0$$

16 (c) মূলবিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ বৃক্ষে অঙ্কিত সর্পক দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \dots(1)$

বৃক্ষের কেন্দ্র (3, 2) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{9+4-9} = 2$

ধরি, মূলবিন্দু (0, 0) দিয়ে অতিক্রমকারী সাপর্শকের
 সমীকরণ $y = mx$ অর্থাৎ $mx - y = 0$

বৃক্ষের কেন্দ্র (3, 2) থেকে এ সর্পকের লম্বদূরত
 ব্যাসার্ধ 2 এর সমান হবে।

$$\begin{aligned} \frac{|3m - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} &= 2 \Rightarrow (3m - 2)^2 = 4(m^2 + 1) \\ \Rightarrow 9m^2 - 12m + 4 &= 4m^2 + 4 \\ \Rightarrow 5m^2 - 12m &= 0 \Rightarrow m(5m - 12) = 0 \\ \therefore m = 0, \frac{12}{5} & \end{aligned}$$

সর্পক দুইটির সমীকরণ $y = 0$ এবং $y = \frac{12}{5}x$.

এখন $y = \frac{12}{5}x$ রেখা $y = 0$ রেখা অর্থাৎ x -অক্ষের
 সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে, $\tan\theta = m$

$\theta = \tan^{-1} \frac{12}{5}$, যা সর্পক দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ।

17.(a) $x = 0, y = 0$ ও $x = a$ রেখা তিনটিকে
 সর্প করে এরূপ বৃক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[য. '০১; রা. '০৫; কু. '০৪, '১১]

সমাধান : ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

বৃত্তটি $x = 0$ রেখাকে অর্থাৎ

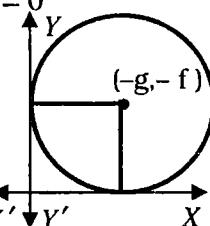
y -অক্ষকে এবং $y = 0$ রেখাকে

অর্থাৎ x -অক্ষকে স্পর্শ করে।

$$f^2 = c \text{ এবং } g^2 = c$$

$$g^2 = f^2 = c$$

আবার, বৃত্তটি $x = a$ অর্থাৎ $x - a = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে। অতএব, বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$ হতে রেখাটির অন্দরুনি ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ এর সমান হবে।



$$\frac{|-g - a|}{\sqrt{1}} = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

$$\Rightarrow g^2 + 2ag + a^2 = g^2 + f^2 - c$$

$$\Rightarrow 2ag + a^2 = f^2 - f^2 \quad [c = f^2]$$

$$\Rightarrow 2ag + a^2 = 0 \quad \therefore g = -\frac{a}{2}$$

$$c = g^2 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \quad \text{এবং}$$

$$f^2 = g^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow f = \pm \frac{a}{2}$$

নির্ণয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{a}{2}\right)x + 2\left(\pm \frac{a}{2}\right)y + \frac{a^2}{4} = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax \pm ay + \frac{1}{4}a^2 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

17.(b) $\sqrt{2}$ ব্যাসার্ধিবিশিষ্ট একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং যার কেন্দ্র তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

[প.ড.প. '08]

সমাধান : ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$\text{দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ } r = \sqrt{2}$$

বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে।

$$r = |h| = |k|$$

$$\Rightarrow r = -h = -k = \sqrt{2} \quad [\text{কেন্দ্র তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত, } \therefore h, k < 0]$$

$$h = k = -\sqrt{2}$$

নির্ণয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{2})^2 &= (\sqrt{2})^2 \\ \Rightarrow x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 + 2\sqrt{2}y + 2 &= 2 \\ x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

17(c) $(-5, -6)$ কিন্দুগামী একটি বৃত্ত $3x + 4y - 11 = 0$ রেখাকে $(1, 2)$ কিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $(1, 2)$ কিন্দুতে কিন্দুবৃত্তের সমীকরণ

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0 \dots (1)$$

$(-5, -6)$ কিন্দুগামী এবং (1) বৃত্ত ও প্রদত্ত রেখা $3x + 4y - 11 = 0$ এর ছেদ কিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}{3x + 4y - 11} = \frac{25 + 36 + 10 + 24 + 5}{-15 - 24 - 11}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}{3x + 4y - 11} = \frac{100}{-50}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = -6x - 8y + 22$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$$

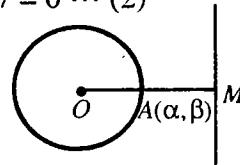
18. $12x + 5y = 212$ সরলরেখা হতে $x^2 + y^2$

$-2x - 2y = 167$ বৃত্তের উপর যে কিন্দুটির দূরত্ব ক্ষুদ্রতম তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $O(1, 1)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1+1+167} = \sqrt{169} = 13$

$12x + 5y - 212 = 0 \dots (1)$ রেখার উপর লম্ব এবং কেন্দ্র $O(1, 1)$ দিয়ে অতিক্রম করে এবং রেখার সমীকরণ, $5x - 12y = 5 \times 1 - 12 \times 1 = -7$

$$\Rightarrow 5x - 12y + 7 = 0 \dots (2)$$



(1) ও (2) রেখার ছেদকিন্দু M হলে,

$$M = \left(\frac{35 - 2544}{-144 - 25}, \frac{-1060 - 84}{-144 - 25} \right)$$

$$= \left(\frac{-2509}{-169}, \frac{-1144}{-169} \right) = \left(\frac{193}{13}, \frac{88}{13} \right)$$

$$\begin{aligned} OM &= \sqrt{\left(1 - \frac{193}{13}\right)^2 + \left(1 - \frac{88}{13}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{32400 + 5625}{169}} = \sqrt{\frac{38025}{169}} = 15 \end{aligned}$$

ধরি, নির্ণয় বিন্দুটি $A(\alpha, \beta)$ ।

$$OA = 13 \text{ এবং}$$

$$AM = OM - OA = 15 - 13 = 2$$

$$OA : AM = 13 : 2$$

$$\therefore \alpha = \frac{13 \times \frac{193}{13} + 2 \times 1}{13 + 2} = \frac{195}{15} = 13$$

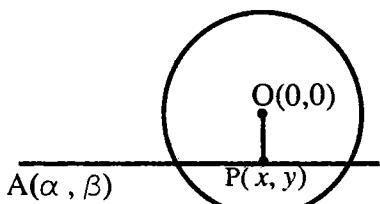
$$\text{এবং } \beta = \frac{13 \times \frac{88}{13} + 2 \times 1}{13 + 2} = \frac{90}{15} = 6$$

নির্ণয় বিন্দুর স্থানাংক $(13, 6)$ ।

19.(a) $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের মেসর জ্যা (α, β)

বিন্দুগামী তাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান :



ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = r^2$ এর কেন্দ্র $O(0, 0)$ এবং $A(\alpha, \beta)$ বিন্দুগামী জ্যাসমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের উপর $P(x, y)$ যেকোন একটি বিন্দু। তাহলে, $OP \perp AP$.

$$OP \text{ এর ঢাল} \times AP \text{ এর ঢাল} = -1$$

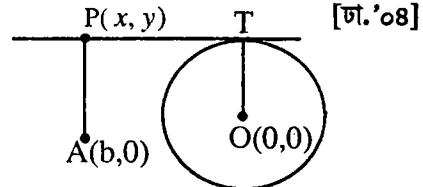
$$\Rightarrow \frac{0-y}{0-x} \times \frac{y-\beta}{x-\alpha} = -1$$

$$\Rightarrow y(y-\beta) = -x(x-\alpha)$$

$x(x-\alpha) + y(y-\beta) = 0$, যা নির্ণয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

19. (b) $(b, 0)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের সর্বকের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

সমাধান :



ধরি, $A(b,0)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের সর্বকের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথের উপর $P(x, y)$ যেকোন একটি বিন্দু PT যেকোন একটি সর্বক। তাহলে, $AP \perp PT$.

$$PT \text{ সর্বকের ঢাল}, m = -\frac{b-x}{0-y} = \frac{b-x}{y}$$

$$PT \text{ সর্বকের সমীকরণ}, y = mx \pm a\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{b-x}{y}x \pm a\sqrt{\frac{(b-x)^2}{y^2} + 1}$$

$$\Rightarrow y^2 = bx - x^2 \pm a\sqrt{(b-x)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - bx = \pm a\sqrt{(b-x)^2 + y^2}$$

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2 \{ (b-x)^2 + y^2 \}^2,$$

যা নির্ণয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

19 (c) (h, k) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 = 12$ বৃত্তে অঙ্কিত সর্বকের দৈর্ঘ্য $x^2 + y^2 + 5x + 5y = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত সর্বকের দৈর্ঘ্যের টিগুণ। (h, k) বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : (h, k) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 = 12$ অর্থাৎ $x^2 + y^2 - 12 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত সর্বকের দৈর্ঘ্য

$$= \sqrt{h^2 + k^2 - 12} \text{ এবং } (h, k) \text{ বিন্দু থেকে } x^2 + y^2 + 5x + 5y = 0 \text{ বৃত্তে অঙ্কিত সর্বকের দৈর্ঘ্যের } = \sqrt{h^2 + k^2 + 5h + 5k}$$

প্রশ্নমতে,

$$\sqrt{h^2 + k^2 - 12} = 2\sqrt{h^2 + k^2 + 5h + 5k}$$

$$\Rightarrow h^2 + k^2 - 12 = 4(h^2 + k^2 + 5h + 5k)$$

$$\Rightarrow 3h^2 + 3k^2 + 20h + 20k + 12 = 0$$

এখন h কে x দ্বারা এবং k কে y দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই, $3x^2 + 3y^2 + 20x + 20y + 12 = 0$, যা নির্ণয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

19 (d) মেসর বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত সর্বক দুইটি পরস্পর লম্ব হয় তাদের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [প.ড.প.'০৮]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত

$x^2 + y^2 = a^2$ এর কেন্দ্র $O(0, 0)$ এবং সঞ্চারপথের উপর $P(x, y)$ যেকোন একটি

বিন্দু থেকে অঙ্কিত PA ও PB
সমর্পক দুইটি পরস্পর লম্ব !

$PAOB$ চতুর্ভুজে,

$$\angle A = \angle B = \angle P = 90^\circ$$

$$\angle O = 90^\circ \text{ তাহাতা, } AO = OB = a$$

$PAOB$ একটি বর্গক্ষেত্র যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য a একক।

$$PO^2 = PA^2 + AO^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 + a^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 2a^2, \text{ যা নির্ণয় সংগ্রহপথের সমীকরণ।}$$

বিকল্প পদ্ধতি : ধরি, প্রদত্ত বৃত্তে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y = mx \pm a \sqrt{1+m^2}$$

$$\Rightarrow y - mx = \pm a \sqrt{1+m^2}$$

$$\Rightarrow y^2 - 2mxy + m^2x^2 = a^2(1+m^2)$$

$$\Rightarrow (x^2 - a^2)m^2 - 2mxy + y^2 - a^2 = 0$$

মূলদৰ্শন m_1 ও m_2 হলে, শর্তমতে, $m_1 m_2 = -1$

$$\frac{y^2 - a^2}{x^2 - a^2} = -1 \Rightarrow y^2 - a^2 = -x^2 + a^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 2a^2, \text{ যা নির্ণয় সংগ্রহপথের সমীকরণ।}$$

19(e) $3x - y - 1 = 0$ সরলরেখা $(x - 2)^2 + y^2 = 5$ বৃত্তকে যে সূক্ষ্মকোণে ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান : প্রদত্ত বৃত্ত } (x - 2)^2 + y^2 = 5 \quad (1)$$

$$\text{এবং সরলরেখা } 3x - y - 1 = 0$$

$$\text{অর্থাৎ } y = 3x - 1 \quad (2)$$

$$(1) \text{ এ } y- \text{ এর মান বসিয়ে পাই,}$$

$$(x - 2)^2 + (3x - 1)^2 = 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 9x^2$$

$$- 6x + 1 = 5$$

$$\Rightarrow 10x^2 - 10x = 0$$

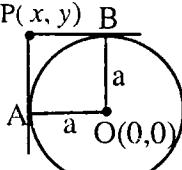
$$\Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$$

$$(2) \text{ হতে পাই, } y = -1, 2$$

(2) রেখা (1) বৃত্তকে $(0, -1)$ ও $(1, 2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(1) বৃত্তের কেন্দ্র $(2, 0)$.

$$(0, -1) \text{ বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল} = \frac{0+1}{2-0} = \frac{1}{2}$$



বইয়ের কম

$$(0, -1) \text{ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল} = -2$$

$$(2) \text{ রেখার ঢাল} = 3.$$

ধরি, নির্ণয় কোণ φ .

$$\tan \varphi = \left| \frac{3+2}{1+3(-2)} \right| = 1 \quad \varphi = 45^\circ$$

19(f) দেখাও যে, $P(h, k)$ বিন্দু থেকে মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের প্রাদৰ্শিত্বের সংগ্রহপথ একটি বৃত্ত।

প্রমাণ : ধরি, $P(h, k)$ বিন্দু থেকে মূলবিন্দু $O(0,0)$ দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার উপর $Q(x,y)$

অঙ্কিত লম্বের প্রাদৰ্শিত্বের সংগ্রহপথের উপর $Q(x,y)$ যেকোন একটি বিন্দু। তাহলে, $OQ \perp PQ$

$$OQ \text{ এর ঢাল} \times PQ \text{ এর ঢাল} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} \times \frac{y-k}{x-h} = -1 \Rightarrow y^2 - ky = -x^2 - hx$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + hx + ky = 0, \text{ যা একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।}$$

সংগ্রহপথটি একটি বৃত্ত।

20. সমাধান :

(a) ব্যাসের দৈর্ঘ্য $= (2, -4)$ ও $(0, 0)$ বিন্দু

$$\text{দুইটির দৈর্ঘ্য} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16}$$

$$= 2\sqrt{5} \text{ একক।}$$

(b) ব্যাসটির সমীকরণ,

$$(x - 2)(-4 - 0) - (y + 4)(2 - 0) = 0$$

$$\Rightarrow -4(x - 2) - 2(y + 4) = 0$$

$$\Rightarrow 2(x - 2) + (y + 4) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 4 + y + 4 = 0 \therefore 2x + y = 0$$

আবার, $(2, -4)$ ও $(0, 0)$ বিন্দু দুইটিকে একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - 2)(x - 0) + (y + 4)(y - 0) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \dots (1) \text{ (Ans.)}$$

(c) $(2, -4)$ ও $(0, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী

ব্যাসের সমীকরণ, $y = \frac{-4}{2}x$

$$\Rightarrow y = -2x \Rightarrow 2x + y = 0$$

ধরি, $2x + y = 0$ ব্যাসের সমান্তরাল স্পর্শকের
সমীকরণ $2x + y + k = 0 \quad (2)$

(1) বৃত্ত (2) রেখাকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(1, -2)$
থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ এর সমান
হবে।

$$\frac{|2-2+k|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow |k| = 5 \Rightarrow k = \pm 5$$

(2) এ k এর মান বসিয়ে পাই, $2x + y \pm 5 = 0$

21. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তি x -
অক্ষকে স্পর্শ করে।

(a) প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2(-2)x +$
 $2.(-3)y + c = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র $(2, 3)$,

$$\text{ব্যাসার্ধ} = \sqrt{2^2 + 3^2 - c} = \sqrt{13 - c}$$

$$\begin{aligned} \text{এবং বৃত্তি দ্বারা } x\text{-অক্ষের খন্ডিতাংশ} &= 2\sqrt{2^2 - c} \\ &= 2\sqrt{4 - c} \end{aligned}$$

(b) প্রশ্নমালা IV B এর 2(c) দ্রষ্টব্য।

(c) প্রশ্নমালা IV A এর 4(c) দ্রষ্টব্য।

22. সমাধান: কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের সম্পর্ক
হতে পাই, $r^2 = x^2 + y^2$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

$$r^2 = -4r \cos \theta \text{ হতে পাই},$$

$$x^2 + y^2 = -4x \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x = 0$$

$$(a) \text{ বৃত্তির কেন্দ্র} = \left(-\frac{4}{2}, \frac{0}{2} \right) = (-2, 0)$$

$$\text{এবং ব্যাসার্ধ} = \sqrt{2^2 + 0 - 0} =$$

(b) খলিফার নিয়মানুসারে $(-6, 5)$ ও $(-3, -4)$
কিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$\begin{aligned} (x+6)(x+3) + (y-5)(y+4) + \\ k\{(x+6)(5+4) - (y-5)(-6+3)\} &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + 9x + 18 + y^2 - y - 20 + \\ k(9x + 54 + 3y - 15) &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + 9x - y - 2 + \\ k(9x + 3y + 39) &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

(1) বৃত্তি $(2, 1)$ কিন্দুগামী বলে,

$$4 + 1 + 18 - 1 - 2 + k(18 + 3 + 39) = 0$$

$$\Rightarrow 60k = -20 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

(1) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 + 9x - y - 2 - 3x - y - 13 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0 \quad (1)$$

(c) দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র $(-3, 1)$.

$(-2, 0)$ ও $(-3, 1)$ কেন্দ্রগামী সরলরেখার সমীকরণে

$$\frac{x+2}{-2+3} = \frac{y-0}{0-1} \Rightarrow y = -x - 2$$

$x^2 + y^2 + 4x = 0$ বৃত্তে $y = -x - 2$ বসিয়ে
পাই, $x^2 + (x+2)^2 + 4x = 0$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 + 4x = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 8x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= -2 \pm \sqrt{2}$$

$$x = -2 + \sqrt{2} \text{ হলে, } y = 2 - \sqrt{2} - 2 = -\sqrt{2}$$

$$x = -2 - \sqrt{2} \text{ হলে, } y = 2 + \sqrt{2} - 2 = \sqrt{2}$$

প্রথম বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তিকিন্দু

$$(-2 + \sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ ও } (-2 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$$

কাজ

১। $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 28 = 0$ বৃত্তের
 $(-2, 4)$ কিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 28 = 0$ বৃত্তের
 $(-2, 4)$ কিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$x.(-2) + y.4 + 2(x-2) - 5(y+4) + 28 = 0$$

$$\Rightarrow -2x + 4y + 2x - 4 - 5y - 20 + 28 = 0$$

$$\Rightarrow -y + 4 = 0 \quad y = 4$$

এখন ধরি, $y = 4$ স্পর্শকের উপর লম্ব অভিলম্বের
সমীকরণ $x = k$, যা $(-2, 4)$ কিন্দুগামী।

$$-2 = k \Rightarrow k = -2$$

অভিলম্বের সমীকরণ $x = -2 \Rightarrow x + 2 = 0$

২। $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক x -অক্ষের সাথে $\tan^{-1} \frac{2}{5}$ কোণ উৎপন্ন করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= a$

ধরি, x -অক্ষের সাথে $\tan^{-1} \frac{2}{5}$ কোণ উৎপন্ন করে এবং

রেখার সমীকরণ $y = \tan(\tan^{-1} \frac{2}{5})x + c$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{5}x + c \Rightarrow 2x - 5y + 5c = 0 \dots(1)$$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(0, 0)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ a এর সমান হবে।

$$\frac{|5c|}{\sqrt{4+25}} = a \Rightarrow |5c| = \sqrt{29}a$$

$$\Rightarrow 5c = \pm \sqrt{29}a \quad c = \pm \frac{\sqrt{29}a}{5}$$

নির্ণয় স্পর্শকের সমীকরণ

$$2x - 5y + 5\left(\pm \frac{\sqrt{29}a}{5}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 5y \pm \sqrt{29}a = 0 \text{ (Ans.)}$$

৩। $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক অক্ষ দুইটির সাথে a^2 ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 0)$ এবং

ব্যাসার্ধ $= a$. ধরি, স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1$

$$\text{অর্থাৎ } cx + by - ab = 0 \dots(1)$$

(1) রেখাটি অক্ষ দুইটির সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার

$$\text{ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}bc$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{1}{2}bc = a^2 \Rightarrow bc = 2a^2 \dots(2)$$

আবার, (1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(0, 0)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ a এর সমান হবে।

$$\left| \frac{0-0-bc}{\sqrt{c^2+b^2}} \right| = a \Rightarrow b^2c^2 = a^2(b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow b^2c^2 = \frac{bc}{2}(b^2+c^2) \quad [(2) \text{ দ্বারা }]$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = 2bc \Rightarrow (b-c)^2 = 0$$

$$b - c = 0 \Rightarrow b = c$$

$$(2) \Rightarrow b^2 = 2a^2 \Rightarrow b = c = \pm \sqrt{2}a$$

$$\text{নির্ণয় স্পর্শকের সমীকরণ } \frac{x}{\pm \sqrt{2}a} + \frac{y}{\pm \sqrt{2}a} = 1$$

$$x + y = \pm a\sqrt{2} \quad (\text{Ans.})$$

৪। দেখাও যে, x -অক্ষ $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 4 = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রমাণ : $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র

$$(2, \frac{5}{2}) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } = \sqrt{4 + \frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2}$$

এখন x -অক্ষ থেকে বৃত্তের কেন্দ্র $(2, \frac{5}{2})$ এর দূরত্ব

$$= |\text{কেন্দ্রের কোটি}| = \left| \frac{5}{2} \right| = \frac{5}{2} = \text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}.$$

x -অক্ষ প্রদত্ত বৃত্তের একটি স্পর্শক।

২য় অংশ : ধরি মূলবিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx$ অর্থাৎ $mx - y = 0 \dots(1)$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের একটি স্পর্শক হলে কেন্দ্র

$(2, \frac{5}{2})$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\frac{5}{2}$ এর সমান হবে।

$$\left| \frac{2m-5/2}{\sqrt{m^2+1}} \right| = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(4m-5)^2}{4} = \frac{25}{4} (m^2+1)$$

$$\Rightarrow 16m^2 - 40m + 25 = 25m^2 + 25$$

$$\Rightarrow 9m^2 + 40m = 0 \therefore m = -\frac{40}{9}$$

$$\text{নির্ণয় স্পর্শকের সমীকরণ } y = -\frac{40}{9}x$$

$$40x + 9y = 0 \text{ (Ans.)}$$

৫। ৫ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $3x - 4y + 8 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে এবং

যদের ক্ষেত্র $3x + 4y - 1 = 0$ রেখার উপর
অবস্থিত। [প্র.ভ.গ.৮৮]

সমাধান : ধরি, 5 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ
 $(x - h)^2 + (y - k)^2 = 5^2 \dots (1)$

(1) এর ক্ষেত্র (h, k) , $3x + 4y - 1 = 0$ রেখার
উপর অবস্থিত।

$$3h + 4k - 1 = 0 \dots \dots (2)$$

(1) বৃত্ত $3x - 4y + 8 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করলে ক্ষেত্র
(h, k) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ 5 এর সমান হবে।

$$\frac{|3h - 4k + 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5 \Rightarrow \frac{|3h - 4k + 8|}{5} = 5$$

$$\Rightarrow |3h - 4k + 8| = 25 \Rightarrow 3h - 4k + 8 = \pm 25$$

$$3h - 4k - 17 = 0 \dots \dots (3) \text{ এবং}$$

$$3h - 4k + 33 = 0 \dots \dots (4)$$

$$(2) + (3) \Rightarrow 6h - 18 = 0 \Rightarrow h = 3$$

$$(2) \text{ হতে}, 9 + 4k - 1 = 0 \Rightarrow k = -2$$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25 \text{ (Ans.)}$$

$$\text{আবার}, (2) + (4) \Rightarrow 6h + 32 = 0 \Rightarrow h = -\frac{16}{3}$$

$$(2) \text{ হতে}, 3(-\frac{16}{3}) + 4k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -16 + 4k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{17}{4}$$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$$(x + \frac{16}{3})^2 + (y - \frac{17}{4})^2 = 25$$

৬। মূলবিদ্যুগ্মী একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা
 $3y + x = 20$ রেখাকে স্পর্শ করে এবং যার একটি
ব্যাসের সমীকরণ $y = 3x$.

সমাধান : ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots (1)$$

$$(1) \text{ বৃত্ত মূলবিদ্যুগ্মী। } c = 0$$

(1) বৃত্তের ক্ষেত্র $(-g, -f)$, $y = 3x$ ব্যাসের উপর
অবস্থিত। $\therefore -f = 3(-g) \Rightarrow f = 3g \dots (2)$

আবার, $3y + x = 20$ অর্থাৎ $x + 3y - 20 = 0$ রেখা

(1) বৃত্তকে স্পর্শ করলে ক্ষেত্র $(-g, -f)$ থেকে এর
দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ এর সমান হবে।

$$\frac{|-g - 3f - 20|}{\sqrt{1+9}} = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

$$\Rightarrow (g + 3f + 20)^2 = 10(g^2 + f^2) \quad [c=0]$$

$$\Rightarrow (g + 9g + 20)^2 = 10(g^2 + 9g^2) \quad [\because f = 3g]$$

$$\Rightarrow 100(g + 2)^2 = 100g^2$$

$$\Rightarrow g^2 + 4g + 4 = g^2 \Rightarrow g = -1.$$

$$(2) \text{ হতে পাই, } f = 3.(-1) = -3$$

(1) এ f, g ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0 \text{ (Ans.)}$$

৭। $y = 2x$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তের
একটি জ্যা। উক্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের
(2, 4) কিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $y = 2x$ (1) হতে y এর মান প্রদত্ত
বৃত্তের সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x^2 + (2x)^2 = 10x$

$$\Rightarrow x^2 + 4x^2 - 10x = 0 \Rightarrow 5x^2 - 10x = 0$$

$$\Rightarrow 5x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

$$(1) \text{ হতে পাই, } y = 2.0 = 0 \text{ এবং } y = 2.2 = 4$$

প্রদত্ত বৃত্তের (1) জ্যা এর প্রান্তিকিন্দু দুইটি (0,0)
এবং (2,4).

(0,0) এবং (2,4) কিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাখনকে
ব্যাস ধরে অঙ্কিত নির্ণয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - 0)(x - 2) + (y - 0)(y - 4) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$$

এখন $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ বৃত্তের (2, 4)
কিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$x \cdot 2 + y \cdot 4 - (x + 2) - 2(y + 4) = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 4y - x - 2 - 2y - 8 = 0$$

$$x + 2y - 10 = 0 \text{ (Ans.)}$$

৮। (3, -1) কিন্দুগামী একটি বৃত্ত $3x + y = 10$
রেখাকে (3, 1) কিন্দুতে স্পর্শ করে বৃত্তটির সমীকরণ
নির্ণয় কর।

সমাধান : (3, 1) কেন্দ্রবিশিষ্ট কিন্দুবৃত্তের সমীকরণ,
 $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 0 \dots (1)$

(3, -1) কিন্দু দিয়ে যায় এবং (1) বৃত্ত ও
 $3x + y - 10 = 0$ রেখার ছেদকিন্দুগামী বৃত্তের
সমীকরণ,

$$\frac{(x - 3)^2 + (y - 1)^2}{(3 - 3)^2 + (-1 - 1)^2} = \frac{3x + y - 10}{3 \times (3) + (-1) - 10}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \frac{x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1}{0+4} = \frac{3x + y - 10}{9-1-10} \\ & \Rightarrow \frac{x^2 - 6x + y^2 - 2y + 10}{4} = \frac{3x + y - 10}{-2} \\ & \Rightarrow x^2 - 6x + y^2 - 2y + 10 = -6x - 2y + 20 \\ & x^2 + y^2 = 10 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

৯। এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x = 0$, $y = 0$, $3x - 4y = 12$ রেখাকে তিনটিকে স্পর্শ করে এবং যার কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

সমাধান : ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

বৃত্তটি $x = 0$ রেখাকে অর্থাৎ

y -অক্ষকে এবং $y = 0$ রেখাকে

অর্থাৎ x -অক্ষকে স্পর্শ করে।

$$r = |k| = k \text{ এবং}$$

$$r = |h| = h$$

[∵ কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত, ∴ $h, k > 0$]

$$h = k = r$$

আবার, বৃত্তটি $3x - 4y = 12$ অর্থাৎ $3x - 4y - 12 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে। অতএব, বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) হতে রেখাটির লম্বদূরত্ব ব্যাসার্ধ r এর সমান হবে।

$$\frac{|3h - 4k - 12|}{\sqrt{9+16}} = r$$

$$\Rightarrow |3h - 4k - 12| = 5h \quad [\quad h = k = r \quad]$$

$$\Rightarrow |h + 12| = 5h \Rightarrow h + 12 = \pm 5h$$

$$4h = 12 \Rightarrow h = 3 \text{ অথবা, } -6h = 12 \Rightarrow h = -2$$

$$\text{কিন্তু } h > 0 \quad \therefore h = k = r = 3$$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$$

১০। $2\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3x - y = 6$ রেখাকে $(1, -3)$ কিন্তু স্পর্শ করে।

সমাধান : ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots(1)$$

(1) বৃত্তের $(1, -3)$ কিন্তু স্পর্শকের সমীকরণ

$$x \cdot 1 + y \cdot (-3) + g(x+1) + f(y-3) + c = 0$$

$$\Rightarrow x - 3y + gx + g + fy - 3f + c = 0$$

$$\Rightarrow (1+g)x + (-3+f)y + g - 3f + c = 0$$

প্রশ্নমতে, এ রেখা এবং $3x - y = 6$ অভিন্ন।

$$\frac{1+g}{3} = \frac{-3+f}{-1} = \frac{g-3f+c}{-6}$$

$$\frac{1+g}{3} = \frac{-3+f}{-1} \text{ হতে পাই, } 1+g = 9-3f$$

$$\Rightarrow g = 8-3f \dots(2)$$

$$\frac{-3+f}{-1} = \frac{g-3f+c}{-6} \text{ হতে পাই,}$$

$$-18+6f = g-3f+c$$

$$\Rightarrow c = -18+9f-g = -18+9f-8+3f = 12f-26$$

$$\text{আবার (1) বৃত্তের ব্যাসার্ধ} = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

$$\sqrt{g^2 + f^2 - c} = 2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow (8-3f)^2 + f^2 - 12f + 26 = 40$$

$$\Rightarrow 64 - 48f + 9f^2 + f^2 - 12f - 14 = 0$$

$$\Rightarrow 10f^2 - 60f + 50 = 0$$

$$\Rightarrow f^2 - 6f + 5 = 0 \Rightarrow (f-5)(f-1) = 0$$

$$f = 1, 5$$

$$f = 1 \text{ ধরে, } g = 8-3=5, c = 12-26=-14$$

$$f=5 \text{ ধরে, } g = 8-15=-7, c = 60-26=34$$

নির্ণয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + 10x + 2y - 14 = 0 \text{ এবং}$$

$$x^2 + y^2 - 14x + 10y - 34 = 0$$

বিকল্প পদ্ধতি : $(1, -3)$ কিন্তু বিন্দুবৃত্তের সমীকরণ $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$.

ধরি, এ বৃত্ত ও প্রদত্ত রেখায় ছেদ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)^2 + (y+3)^2 + k(3x-y-6) = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + 3kx - ky - 6k = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-2+3k)x + (6-k)y + 10 - 6k = 0 \dots(1)$$

প্রশ্নমতে, (1) এর ব্যাসার্ধ $= 2\sqrt{10}$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{2-3k}{2}\right)^2 + \left(\frac{k-6}{2}\right)^2 - 10 + 6k} = 2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(4 - 12k + 9k^2 + k - 12k + 36) - 10 + 6k = 40$$

$$\Rightarrow 4 - 12k + k^2 + k^2 - 12k + 36 - 200 + 24k = 0$$

$$\Rightarrow 10k^2 - 160 = 0 \Rightarrow k^2 = 16 \therefore k = \pm 4$$

(1) হতে নির্ণয় বৃত্তের সমীকরণ,
 $x^2 + y^2 + 10x + 2y - 14 = 0$ এবং
 $x^2 + y^2 - 14x + 10y + 34 = 0$

১১। (-2, 3) কিন্দু থেকে $2x^2 + 2y^2 = 3$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ষ. '০১]

সমাধান : (-2, 3) কিন্দু থেকে $2x^2 + 2y^2 = 3$

অর্থাৎ $x^2 + y^2 - \frac{3}{2} = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের

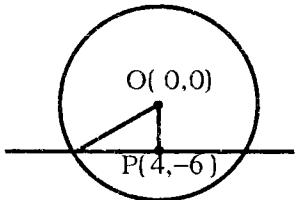
$$\text{দৈর্ঘ্য} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 - \frac{3}{2}} = \sqrt{4 + 9 - \frac{3}{2}}$$

$$= \sqrt{13 - \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{26 - 3}{2}} = \sqrt{\frac{23}{2}} \text{ একক।}$$

১২। $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যকিন্দু (-2, 3) কিন্দুতে অবস্থিত।

[ষ. '০০]

সমাধান :



ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 16$ এর কেন্দ্র O(0, 0) এবং জ্যা এর মধ্যকিন্দু P(-2, 3).

$$OP \text{ রেখার সমীকরণ } y = \frac{3}{-2}x \Rightarrow -2y = 3x$$

$$\Rightarrow 3x + 2y = 0$$

P(-2, 3) কিন্দুগামী এবং $3x + 2y = 0$ রেখার উপর লম্ব নির্ণয় জ্যা এর সমীকরণ,

$$2x - 3y = 2(-2) - 3(3) = -4 - 9 = -13$$

$$2x - 3y + 13 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

১৩। $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ ও $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 21 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর

সমীকরণ এবং দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$
 এবং $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 21 = 0$

বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$$S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow 8x - 8y + 24 = 0$$

$$x - y + 3 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

এখন S_1 বৃত্তের কেন্দ্র (-2, 1) এবং ব্যাসার্ধ

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 - 3} = \sqrt{2}$$

কেন্দ্র (-2, 1) হতে $x - y + 3 = 0$ এর লম্বদূরত্ব

$$d = \frac{|-2 - 1 + 3|}{\sqrt{1+1}} = 0$$

$$\text{সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য} = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

$$= 2\sqrt{2 - 0} = 2\sqrt{2} \text{ একক।}$$

www.boighar.com

১৪। $3x^2 + 3y^2 - 29x - 19y + 56 = 0$

বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ $x - y + 2 = 0$. উক্ত জ্যা এর দৈর্ঘ্য এবং এ জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $3x^2 + 3y^2 - 29x - 19y + 56 = 0$

অর্থাৎ $x^2 + y^2 - \frac{29}{3}x - \frac{19}{3}y + \frac{56}{3} = 0$ বৃত্তের

কেন্দ্র $(\frac{29}{6}, \frac{19}{6})$ এবং

$$\text{ব্যাসার্ধ } r = \sqrt{\left(\frac{29}{6}\right)^2 + \left(\frac{19}{6}\right)^2 - \frac{56}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{841 + 361 - 672}{36}} = \sqrt{\frac{530}{36}}$$

কেন্দ্র $(\frac{29}{6}, \frac{19}{6})$ থেকে $x - y + 2 = 0$

$$\text{জ্যা এর লম্বদূরত্ব } d = \frac{\left|\frac{29}{6} - \frac{19}{6} + 2\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{11}{3\sqrt{2}}$$

$$\text{জ্যা এর দৈর্ঘ্য} = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

$$= 2\sqrt{\frac{530}{36} - \frac{121}{18}} = 2\sqrt{\frac{530 - 242}{36}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{288}{36}} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2} \text{ একক।}$$

বইয়র কম

২য় অংশ : ধরি প্রদত্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে নির্ণয় বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - \frac{29}{3}x - \frac{19}{3}y + \frac{56}{3} + k(x - y + 2) = 0$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + \left(-\frac{29}{3} + k\right)x + \left(-\frac{19}{3} - k\right)y + \frac{56}{3} + 2k = 0 \cdots (1)$$

$$(1) \text{ বৃত্তের কেন্দ্র } \left(\frac{29}{6} - \frac{k}{2}, \frac{19}{6} + \frac{k}{2}\right), \text{ যা}$$

$$x - 2y + 7 = 0 \text{ রেখার উপর অবস্থিত।}$$

$$\frac{29}{6} - \frac{k}{2} - \frac{19}{3} - k + 7 = 0$$

$$\Rightarrow 29 - 3k - 38 - 6k + 42 = 0$$

$$\Rightarrow -9k = -33 \Rightarrow k = \frac{11}{3}$$

$$\text{নির্ণয় বৃত্তের সমীকরণ, } x^2 + y^2 - \frac{29}{3}x -$$

$$\frac{19}{3}y + \frac{56}{3} + \frac{11}{3}(x - y + 2) = 0$$

$$\Rightarrow 3(x^2 + y^2) - 29x - 19y + 56 + 11x - 11y + 22 = 0$$

$$\Rightarrow 3(x^2 + y^2) - 18x - 30y + 78 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 26 = 0 \text{ (Ans.)}$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত সর্পক x -অক্ষের সমান্তরাল। সর্পকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$ বৃত্তের

$$\text{কেন্দ্র } (3, -4) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } = \sqrt{3^2 + 4^2 - 21} = 2$$

ধরি, x -অক্ষের সমান্তরাল সর্পকের সমীকরণ $y + k = 0$ (1)

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(3, -4)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\frac{|-4 + k|}{\sqrt{1}} = 2 \Rightarrow |-4 + k| = 2$$

$$\Rightarrow k - 4 = \pm 2 \therefore k = 6, 2$$

$$\text{নির্ণয় সর্পকের সমীকরণ } y + 6 = 0, y + 2 = 0$$

ব্যবহারিক

পরীক্ষণের নাম : $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$
সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর। সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেসিল (ii) ঢেকেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি :

1. প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ হতে পাই,

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow (y - 4)^2 = 5^2 - (x + 3)^2$$

$$\Rightarrow y - 4 = \pm \sqrt{(5 + x + 3)(5 - x - 3)}$$

$$\Rightarrow y = 4 \pm \sqrt{-(x + 8)(x - 3)} \quad (i)$$

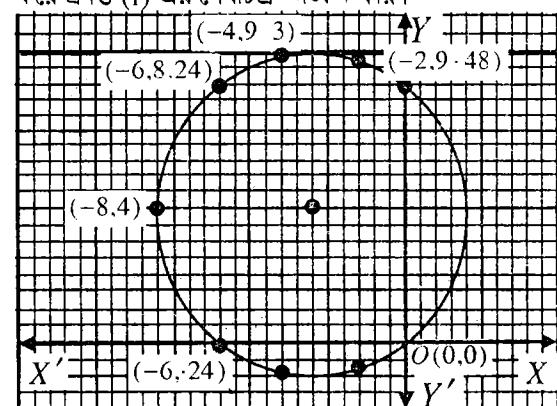
$$(x + 8)(x - 3) \leq 0 \Rightarrow -8 \leq x \leq 3 \text{ অর্থাৎ}$$

$x \in [-8, 3]$ এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছকটি তৈরি করি

x	-8	-6	-6	-4	-4
y	4	8.24	-2	9.29	-1.2
			4		9
x	-2	-2	0	0	
y	9.4	-1.4	8.8	-0.8	
	8	8	9	9	

2. একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OY$ ও YOY' আঁকি

3. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেসিল দিয়ে মুক্তহস্তে সংযোগ করে প্রদত্ত (i) এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।



গেধের বৈশিষ্ট্য :

- লেখচিত্রটি একটি বৃত্ত।
- লেখচিত্রটি অবিছিন্ন।

সতর্কতা :

- গ্রাফ পেপার সুষম বর্গক্ষেত্র বিশিষ্ট কিনা দেখে নেই।
- শার্পনার দিয়ে পেপিল সরু করে নেই।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

- k এর মান কত হলে $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করবে? [DU 08-09, 01-02, SU 03-04]

Sol". বৃত্তের সমীকরণে xy এর সহগ শূন্য।

$$-2 + k = 0 \Rightarrow k = 2$$

- $2x^2 + ay^2 = 9$ একটি বৃত্তের সমীকরণ। তাই a এর মান – [CU 07-09]

Sol". x^2 ও y^2 এর সহগ সমান। তাই $a = 2$

- $x^2 + y^2 = 16$ এর বিবেচনায় $(4, -3)$ কিন্দুটির অবস্থান কোথায়? [RU 06-07]

Sol". $4^2 + (-3)^2 - 16 = 9 > 0$ বৃত্তের বাইরে।

- $x^2 + y^2 - 24x + 10y = 0$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ – [DU 03-04; RU 05-06]

Sol". ব্যাসার্ধ = $\sqrt{12^2 + 5^2 - 0} = 13$

- $2x^2 + 2y^2 + 6x + 10y - 1 = 0$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে, $r = ?$ [DU 95-96, 97-98]

Sol". প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 + 3x + 5y - 1/2 = 0$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9+25+2}{4}} = 3$$

- $x^2 + y^2 - 5x = 0$ ও $x^2 + y^2 + 3x = 0$ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রের দূরত্ব কত? [DU 06-07]

Sol". কেন্দ্র $(\frac{5}{2}, 0)$ ও $(-\frac{3}{2}, 0)$ এর দূরত্ব = $|\frac{5}{2} + \frac{3}{2}| = 4$

- $(-9, 9)$ ও $(5, 5)$ কিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাখঙ্কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ – [DU 05-06, 02-03; RU 06-07; NU 02-03]

$$\begin{aligned} Sol^n. & (x + 9)(x - 5) + (y - 9)(y - 5) = 0 \\ & \Rightarrow x^2 + 4x - 45 + y^2 - 14y + 45 = 0 \\ & \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 14y = 0 \end{aligned}$$

- $(4, 5)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্ত, যা $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে গমন করে তার সমীকরণ – [DU 03-04; RU 05-06]

Sol". প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(-2, -3)$. নির্ণয় বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 8x - 10y = (-2)^2 + (-3)^2 - 8(-2) - 10(-3)$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 10y - 59 = 0$

- $(-1, 1)$ এবং $(-7, 3)$ কিন্দু দিয়ে অক্রমকারী একটি বৃত্তের কেন্দ্র $2x + y = 9$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ – [NU 08-09; SU 03-04]

- $(x + 1)^2 + (y - 11)^2 = 100$
- $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 81$
- $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$
- $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 64$

Sol". A. option টির কেন্দ্র $(-1, 11)$, যা প্রদত্ত রেখার উপর অবস্থিত।

- $(5, 0)$ এবং $(0, 5)$ কিন্দুটি অক্ষরেখাদ্বয়কে সর্পিল বৃত্তের সমীকরণ – [DU 04-05]

Sol". $x^2 + y^2 - 2.5x - 2.5y + 5^2 = 0$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

- নিম্নের কোন সমীকরণ ঘারা নির্দেশিত বৃত্তের সর্পিল x অক্ষ? [DU 08-09]

- $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$
- $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 25 = 0$
- $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 25 = 0$
- $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 28 = 0$

Sol". প্রদত্ত option গুলোর মধ্যে B এর ক্ষেত্রে $g^2 = c$

- $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি x অক্ষকে সর্প করে। c এর মান – [DU 00-01, 01-02; RU 07-08; NU 05-06]

Sol". $c = (x \text{ এর সহগের অর্ধেক})^2 = 4$

- $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ বৃত্তটি x অক্ষকে সর্প করে। সর্পিলের স্থানাঙ্ক – [NU 07-08]

Sol". স্পর্শবিন্দু $\equiv (-x \text{ এর সহগের অর্ধেক}, 0) = (2, 0)$

14. $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তটির জ্যা $(-2, 3)$ বিন্দুতে
সমন্বিত হলে জ্যা এর সমীকরণ - [JU 05-06;
KU 03-04]

$$\begin{aligned} \text{Sol"} . & x . (-2) + y . 3 = (-2)^2 + 3^2 \\ \Rightarrow & 2x - 3y + 13 = 0 \end{aligned}$$

15. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 43 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা
এর সমীকরণ [RU 07-08; KUET 05-06]

$$\begin{aligned} \text{Sol"} . & (-4+5)x + (6-8)y - 36 + 43 = 0 \\ \Rightarrow & x - 2y + 7 = 0 \end{aligned}$$

16. $(4, 3)$ বিন্দুতে কেন্দ্র ধরে কত ব্যাসার্ধ বৃত্ত অঙ্কন
করলে $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে? [IU07-08]

$$\begin{aligned} \text{Sol"} . r \pm 2 &= \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5 \\ r &= 7 \text{ বা, } 3 \end{aligned}$$

17. $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ বৃত্তের কেন্দ্র হতে 3
একক দূরত্বে অবস্থিত জ্যা এর দৈর্ঘ্য - [IU 07-08]

$$\text{Sol"} . \text{জ্যা এর দৈর্ঘ্য} = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8$$

18. $x^2 + y^2 = 100$ বৃত্ত দ্বারা $x + 7y - 50 = 0$
রেখার ছেদাংশের পরিমাণ - [KU 07-08]

$$\text{Sol"} . \text{এখানে } r = 10, d = \frac{|0 + 0 - 50|}{\sqrt{1+49}} = \sqrt{50}$$

$$\begin{aligned} \text{ছেদাংশের পরিমাণ} &= 2\sqrt{r^2 - d^2} \\ &= 2\sqrt{100 - 50} = 2\sqrt{50} = 10\sqrt{2} \end{aligned}$$

19. $2x - 3y - 9 = 0$ রেখাটি যে বৃত্তকে স্পর্শ করে
তার কেন্দ্র $(1, 2)$ এর ব্যাসার্ধ $r = \sqrt{5+c}$ । c এর
মান কত? [RU 06-07]

$$\text{Sol"} . r = \sqrt{5+c} = \frac{|2.1 - 3.2 - 9|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \sqrt{13}$$

$$c = 13 - 5 = 8$$

20. যে বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং এবং $2x + \sqrt{5}y - 1 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে তার সমীকরণ
হবে- [CU-07-08; JU 07-08]

$$\text{Sol"} . (x-0)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{2.0 + 5.0 - 1}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{9} \therefore 9(x^2 + y^2) = 1$$

21. মূলবিন্দু থেকে $(1, 2)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের উপর
অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 2 একক হলে বৃত্তটির
সমীকরণ- [RU 07-08]

$$\begin{aligned} \text{Sol"} . (1, 2) \text{ কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্ত } x^2 + y^2 - 2x - 4y \\ + c = 0 \text{ এবং } (0, 0) \text{ বিন্দু থেকে এ বৃত্তে অঙ্কিত } \\ \text{স্পর্শকের দৈর্ঘ্য} = \sqrt{c}. \quad \sqrt{c} = 2 \Rightarrow c = 4 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0 \end{aligned}$$

22. একটি বৃত্তের সমীকরণ হল $2x^2 + 2y^2 = 25$ ।
5 একক দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি জ্যা কেন্দ্রে কত ঝেডিয়ান
কোণ তৈরী করবে? [SU 06-07]

$$\begin{aligned} \text{Sol"} . 2x^2 + 2y^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ \cos\theta = \frac{(5/\sqrt{2})^2 + (5/\sqrt{2})^2 - 5^2}{2 \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}}} = 0 \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

1. সমাধান :

(a) দেওয়া আছে, ${}^{n-1}P_3 : {}^{n+1}P_3 = 5 : 12 \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-1-3)!} : \frac{(n+1)!}{(n+1-3)!} = 5 : 12$ [ৱা. '০৫]

$$\Rightarrow \frac{(n-1)! \times (n-2)!}{(n-4)! \times (n+1)!} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{(n-1)! \times (n-2).(n-3).(n-4)!}{(n-4)! \times (n+1)n(n-1)!} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{(n-2).(n-3)}{(n+1)n} = \frac{5}{12} \Rightarrow 12(n^2 - 5n + 6) = 5(n^2 + n) \Rightarrow 12n^2 - 5n^2 - 60n - 5n + 72 = 0$$

$$\Rightarrow 7n^2 - 65n + 72 = 0 \Rightarrow 7n^2 - 56n - 9n + 72 = 0 \Rightarrow 7n(n-8) - 9(n-8) = 0$$

$$\Rightarrow (n-8)(7n-9) = 0 \Rightarrow n = 8, \frac{9}{7} \text{ কিন্তু } n \text{ ভগ্নাংশ হতে পারেনা। } \quad n = 8$$

(b) দেওয়া আছে, $4 \times {}^nP_3 = 5 \times {}^{n-1}P_3 \Rightarrow 4 \cdot \frac{n!}{(n-3)!} = 5 \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1-3)!}$ [ক্ষ. '০৫]

$$\Rightarrow 4 \cdot \frac{n.(n-1)!}{(n-3).(n-4)!} = 5 \cdot \frac{(n-1)!}{(n-4)!} \Rightarrow 4 \cdot \frac{n}{n-3} = 5 \Rightarrow 5n - 15 = 4n \therefore n = 15 \text{ (Ans.)}$$

(c) সাধারণ সূত্র ব্যবহার না করে n -সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে প্রত্যেকবার যেকোন 3টিকে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান : n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবার 3টি জিনিস নিয়ে 3টি শূন্যস্থান যত রাকম ভাবে পূরণ করা যায় তাই হবে n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবার 3টি জিনিস নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যার সমান।

n সংখ্যক জিনিসের যেকোন একটিকে বসিয়ে প্রথম শূন্যস্থানটি n সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়। প্রথম শূন্যস্থানটি n প্রকারের যেকোন এক উপায়ে পূরণ করার পর দ্বিতীয় শূন্য স্থানটি অবশিষ্ট ($n-1$) সংখ্যক জিনিস দ্বারা ($n-1$) সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়। যেহেতু প্রথম শূন্য স্থানটি পূরণকরার প্রত্যেক উপায়ের সঙ্গে দ্বিতীয় স্থান পূরণের ($n-1$) সংখ্যক সংযোগ করা যায়, সুতরাং প্রথম দুইটি শূন্য স্থান একত্রে $n(n-1)$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যাবে। অর্থাৎ ${}^nP_2 = n(n-1)$.

n সংখ্যক জিনিসের যেকোন দুইটি দ্বারা প্রথম ও দ্বিতীয় শূন্য স্থান পূরণ করার পর তৃতীয় শূন্য স্থানটি অবশিষ্ট ($n-2$) সংখ্যক জিনিস দ্বারা ($n-2$) সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং, প্রথম তিনটি স্থান একত্রে মোট $n(n-1)(n-2)$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়। অর্থাৎ ${}^nP_3 = n(n-1)(n-2)$.

2. ‘COURAGE’ শব্দটির বর্ণগুলো নিয়ে কতগুলো বিন্যাস তৈরি করা করা যায়, যাদের প্রথমে একটি স্বরবর্ণ থাকবে?

সমাধান : ‘COURAGE’ শব্দটিতে মোট 7টি বিভিন্ন অক্ষর আছে যাদের 4টি স্বরবর্ণ। প্রথম স্থানটি এই 4টি ভিন্ন স্বরবর্ণে যেকোনো একটি দ্বারা ${}^4P_1 = 4$ প্রকারে পূরণ করা যায় এবং অবশিষ্ট ($7-1$) অর্থাৎ, 6টি স্থান বাকি 6টি ভিন্ন অক্ষর দ্বারা $6! = 720$ প্রকারে পূরণ করা যায়। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 4 \times 720 = 2880$

3. (a) সাধারণ সূত্র ব্যবহার না করে $(p+q)$ সংখ্যক জিনিসের p সংখ্যক জিনিস এক জাতীয় এবং বাকীগুলো সব ভিন্ন হলে, এদের সকলুকে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা x । এই x সংখ্যক বিন্যাসের যেকোন একটির অন্তর্গত p সংখ্যক এক জাতীয় জিনিসের স্থলে p সংখ্যক ভিন্ন জিনিস বসানো হলে অন্যদের স্থান পরিবর্তন না করে কেবল তাদের সাজানো

সমাধান : মনে করি, নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা x । এই x সংখ্যক বিন্যাসের যেকোন একটির অন্তর্গত p সংখ্যক এক

পরিবর্তন করে মোট $p!$ সংখ্যক নতুন বিন্যাস পাওয়া যায়। সুতরাং, x সংখ্যক বিন্যাসের জন্য মোট $x \times p!$ সংখ্যক বিন্যাস হবে।

উপর্যুক্ত প্রক্রিয়ার পর দেখা যায় জিনিসগুলো সবই এখন ভিন্ন ভিন্ন এবং $(p+q)$ সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিসের সকুলে নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা $(p+q)!$. $x \times p! = (p+q)! \Rightarrow x = \frac{(p+q)!}{p!}$

(b) 10টি বর্ণের কিছু সংখ্যক একজাতীয় এবং বাকীগুলো ভিন্ন ভিন্ন। যদি তাদের সবগুলোকে একত্রে নিয়ে 30240টি শব্দ গঠন করা যায়, তবে কতগুলো বর্ণ এক জাতীয়।

সমাধান : মনে করি, 10টি বর্ণের r সংখ্যক একজাতীয়।

এ 10টি বর্ণের সবগুলোকে একত্রে নিয়ে শব্দ গঠন করা যায় $\frac{10!}{r!}$ টি।

$$\text{প্রশ্নমতে}, \frac{10!}{r!} = 30240 \Rightarrow r! = \frac{10!}{30240} = \frac{3628800}{30240} = 120 = 5! \quad r = 5 \text{ (Ans.)}$$

4 (a) প্রমাণ কর যে, 'AMERICA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা 'CANADA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যার 21 গুণ। [চ.'০৩]

প্রমাণ : 'AMERICA' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 2টি A.

'AMERICA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{7!}{2!} = 2520 = 21 \times 120$

'CANADA' শব্দটিতে 3টি A সহ মোট 6টি বর্ণ আছে।

'CANADA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{6!}{3!} = 120$

'AMERICA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা 'CANADA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যার 21 গুণ।

4. (b) দেখাও যে, 'AMERICA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় 'CALCUTTA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে তার দ্বিগুণ উপায়ে সাজানো যায়। [জ.'০৮; রা.'১৩]

প্রমাণ : 'AMERICA' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 2টি A.

'AMERICA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো সংখ্যা $= \frac{7!}{2!} = 2520$.

'CALCUTTA' শব্দটিতে মোট 8টি বর্ণ আছে যাদের 2টি C, 2টি A এবং 2টি T

'CALCUTTA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো সংখ্যা $= \frac{8!}{2!2!2!} = 5040 = 2 \times 2520$

'AMERICA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় 'CALCUTTA' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে তার দ্বিগুণ উপায়ে সাজানো যায়।

5 (a) 'ARRANGE' শব্দটির অক্ষরগুলো কত প্রকারে সাজানো যায়, যাতে R দুইটি পাশাপাশি থাকবে না?

সমাধান : 'ARRANGE' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 2টি A এবং 2টি R.

সকগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা $= \frac{7!}{2! \times 2!} = 1260$

2টি R কে একটি একক বর্ণ মনে করলে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে $(7 - 2 + 1)$ অর্থাৎ, 6টি যাদের 2টি A.

$$2টি R কে পাশাপাশি রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = \frac{6!}{2!} = 360$$

R দুইটি পাশাপাশি না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা - R দুইটি পাশাপাশি রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = $1260 - 360 = 900$

৫ (b) 'ENGINEERING' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। তাদের কঙগুলোতে তিনটি E একত্রে থাকবে এবং কঙগুলোতে এরা প্রথমে থাকবে। [ব. '০২; রা. '০৩; কু. '০৩]

সমাধান : ১ম অংশ : 'ENGINEERING' শব্দটিতে মোট 11টি বর্ণ আছে যার মধ্যে 3টি E, 3টি N, 2টি G এবং 2টি I.

$$\text{সব কয়টি বর্ণকে একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা} = \frac{11!}{3!3!2!2!} = \frac{39916800}{6.6.2.2} = 277200 \text{ (Ans.)}$$

২য় অংশ : যেহেতু E তিনটি একত্রে থাকে, অতএব তাদেরকে একটি একক বর্ণ মনে করলে মোট বর্ণগুলো হবে (EEE), N, G, I, N, R, I, N, G. এই 9টি বর্ণের 3টি N, 2টি G এবং 2টি I.

$$E \text{ তিনটি একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা} = \frac{9!}{3!2!2!} = \frac{362880}{6.2.2} = 15120$$

তৃতীয় অংশ : 3 টি E প্রথমে রেখে অবশিষ্ট বর্ণের সংখ্যা হবে $(11-3)$ অর্থাৎ, 8টি ; যাদের 3টি N, 2টি G ও 2টি I

$$E \text{ তিনটি প্রথমে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা} = \frac{8!}{3!2!2!} = \frac{40320}{6.2.2} = 1680 \text{ (Ans.)}$$

৬. (a) 'PARALLEL' শব্দটির বর্ণগুলোর সকলুকে একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর এবং স্বরবর্ণগুলোকে পৃথক না রেখে বর্ণগুলো কত প্রকারে সাজানো যায় তাও নির্ণয় কর।

[য. '০৬; ব. '০৭; সি. '০৮, '১১; চ. '০৮, '১২; দি. '০৯; রা. '১১; ঢা. '১৩]

সমাধান : ১ম অংশ : 'PARALLEL' শব্দটিতে 2টি A এবং 3টি L সহ মোট 8টি বর্ণ আছে।

$$\text{সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা} = \frac{8!}{2!3!} = \frac{40320}{2.6} = 3360$$

২য় অংশ : স্বরবর্ণ 3টি পৃথক না হলে, তাদেরকে একটি একক বর্ণ ধরতে হবে এবং ফলে বর্ণগুলো হবে (AAE), P, R, L, L, L.

$$3টি L সহ এই 6টি বর্ণকে \frac{6!}{3!} = 120 উপায়ে এবং 2টি A সহ 3টি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে \frac{3!}{2!} = 3$$

উপায়ে সাজানো যায়।

$$\text{স্বরবর্ণগুলোকে পৃথক না রেখে বর্ণগুলোর মোট সাজানো সংখ্যা} = 120 \times 3 = 360. \text{ (Ans.)}$$

(b) স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি না রেখে 'TRIANGLE' শব্দটির বর্ণগুলো কত সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর? [চ. '০৫; চ. '০৭; মা.বো. '০৯, '১৩; ব. '১০]

সমাধান : 'TRIANGLE' শব্দটিতে মোট 8টি তিন্নি বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ।

$$\text{সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা} = 8! = 40320$$

3টি স্বরবর্ণকে একটি একক বর্ণ মনে করলে পৃথক বর্ণগুলো হবে (IAE), T, R, N, G এবং L. এই 6টি তিনি বর্ণকে $6!$ প্রকারে এবং 3টি তিন্নি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $3!$ প্রকারে সাজানো যায়।

$$\text{স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি রেখে মোট সাজানো সংখ্যা} = 6! \times 3! = 720 \times 6 = 4320$$

স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা - স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = $40320 - 4320 = 36000$

(c) স্বরবর্ণগুলোকে (i) কোন সময়ই পৃথক না রেখে এবং (ii) কোন সময়ই পাশাপাশি না রেখে ‘DAUGHTER’ শব্দটির বর্ণগুলো কত সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। [চ. '১০]

সমাধান : (i) ‘DAUGHTER’ শব্দটিতে মোট ৪টি ভিন্ন বর্ণ আছে যাদের ৩টি স্বরবর্ণ।

সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা = $4! = 40320$

৩টি স্বরবর্ণকে একটি একক বর্ণ মনে করলে পৃথক বর্ণগুলো হবে (AUE), D, G, H, T এবং R . এই ৬টি ভিন্ন বর্ণকে 6! প্রকারে এবং ৩টি ভিন্ন স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে 3! প্রকারে সাজানো যায়।

স্বরবর্ণগুলোকে কোন সময়ই পৃথক না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = $6! \times 3! = 720 \times 6 = 4320$

(ii) স্বরবর্ণগুলোকে কোন সময়ই পাশাপাশি না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা – স্বরবর্ণগুলোকে কোন সময়ই পৃথক না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = $40320 - 4320 = 36000$

(d) ‘DIGITAL’ শব্দটির বর্ণগুলোর সকলুগুলো একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর এবং এদের কতগুলিতে স্বরবর্ণ গুলো একত্রে থাকবে? [য. '১০]

সমাধান : ‘DIGITAL’ শব্দটিতে ২টি I সহ মোট ৭টি বর্ণ আছে।

সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা = $\frac{7!}{2!} = 2520$ (Ans.)

৩টি স্বরবর্ণ I, I ও A কে একটি একক বর্ণ মনে করলে পৃথক বর্ণগুলো হবে (I I A), D, G, T এবং L . এই ৫টি ভিন্ন বর্ণকে 5! প্রকারে এবং ৩টি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $\frac{3!}{2!} = 3$ প্রকারে সাজানো যায়।

স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = $5! \times 3 = 120 \times 3 = 360$ (Ans.)

7. ৯ টি বলের ৭টি বল লাল, ২টি সাদা (i) এদের উপর কোন বিধি-নিষেধ আরোপ না করে এবং (ii) সাদা বল দুইটি পাশাপাশি না রেখে বলগুলোকে কত প্রকারে এক সারিতে সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে 9 টি বলের মধ্যে ৭টি লাল এবং ২টি সাদা।

(i) এদের উপর কোন বিধি-নিষেধ আরোপ না করে নির্ণয় সাজানো সংখ্যা = $\frac{9!}{7! \times 2!} = 36$

(ii) সাদা বল দুইটি একটি একক বল মনে করলে মোট বলের সংখ্যা হবে $(9 - 2 + 1)$ অর্থাৎ, 8টি যাদের মধ্যে 7টি লাল। অতএব, সাদা বল দুইটি পাশাপাশি রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = $\frac{8!}{7!} = 8$

সাদা বল দুইটি পাশাপাশি না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = $36 - 8 = 28$

8.(a) স্বরবর্ণগুলোর স্থান পরিবর্তন না করে ‘PERMUTATION’ শব্দটির বর্ণগুলো কত উপায়ে পুনর্বিন্যাস করা যায়? [ব. '০০, ০৫ ; চ. '০০, ০৮ ; ঢ. '০৯ ; দি. '১৩]

সমাধান : ‘PERMUTATION’ শব্দটিতে মোট 11টি বর্ণ আছে যাদের 5টি স্বরবর্ণ।

৫ টি স্বরবর্ণের স্থান পরিবর্তন না করে ২টি T সহ অবশিষ্ট $(11 - 5)$ বা, 6টি বাঙ্গল বর্ণকে $\frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360$ উপায়ে

সাজানো যায়।

নির্ণয় পুনর্বিন্যাস করার উপায় = $360 - 1 = 359$ (Ans.)

(b) স্বরবর্ণগুলোর (i) ক্রম পরিবর্তন না করে (ii) স্থান পরিবর্তন না করে এবং (iii) স্বরবর্ণের ও বাঙ্গলবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন না করে ‘DIRECTOR’ শব্দটি কত প্রকারে পুনরায় সাজানো যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান : (i) 'DIRECTOR' শব্দটিতে মোট 8টি বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ। ক্রম পরিবর্তন না করায় স্বরবর্ণ 3টি (I, E, O) পরস্পরের মধ্যে আগেরটি পরে ও পরেরটি আগে আসতে পারে না। তাই তারা 3টি এক জাতীয় বর্ণের ন্যায় অবস্থান করে। তাহলে, 8 টি বর্ণের মধ্যে 3টি স্বরবর্ণ এক জাতীয় এবং 2টি R অন্য এক জাতীয়।

$$\text{স্বরবর্ণগুলোর ক্রম পরিবর্তন না করে মোট সাজানো সংখ্যা} = \frac{8!}{3! \times 2!} = 3360$$

'DIRECTOR' শব্দটি নিজেই একটি সাজানো সংখ্যা।

$$\text{নির্ণেয় পুনরায় সাজানো সংখ্যা} = 3360 - 1 = 3359$$

$$(ii) \text{ স্বরবর্ণ } 3\text{টির স্থান নির্দিষ্ট রেখে } 2\text{টি R সহ } 5\text{টি ব্যঙ্গন বর্ণকে } \frac{5!}{2!} = 60 \text{ রকমে সাজানো যায়।$$

$$\text{স্বরবর্ণগুলোর স্থান পরিবর্তন না করে নির্ণেয় পুনরায় সাজানো সংখ্যা} = 60 - 1 = 59$$

$$(iii) \text{ এক্ষেত্রে, স্বরবর্ণ } 3\text{টি নির্দিষ্ট } 3\text{টি (২য়, ৪র্থ এবং ৭ম) স্থানে নিজেরা } 3! = 6 \text{ প্রকারে বিন্যস্ত হয় এবং ব্যঙ্গন বর্ণ } 5\text{টি নির্দিষ্ট } 5\text{টি (১ম, ৩য়, ৫ম থেকে ৬ষ্ঠ এবং ৮ম) স্থানে নিজেরা } \frac{5!}{2!} = 60 \text{ প্রকারে বিন্যস্ত হয়।}$$

$$\text{স্বরবর্ণের ও ব্যঙ্গনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন না করে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা} = 6 \times 60 - 1 = 359$$

9.(a) 'MILLENNIUM' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। তাদের কতগুলোতে প্রথমে ও শেষে M থাকবে? [সি.,০৬, '১২; প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান : ১ম অংশ : 'MILLENNIUM' শব্দটিতে মোট 10টি বর্ণ আছে যাদের 2টি I, 2টি M, 2টি L ও 2টি N

$$\text{এ শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো যায় } \frac{10!}{2! \times 2! \times 2! \times 2!} = 226800 \text{ উপায়ে।}$$

২য় অংশ : প্রথম ও শেষ স্থান দুইটি 'L' দ্বারা নির্দিষ্ট করে 2টি M এবং 2টি N সহ অবশিষ্ট (10 - 2) অর্থাৎ,

$$8\text{টি বর্ণকে } 8\text{টি স্থানে } \frac{8!}{2! \times 2! \times 2!} = 5040 \text{ উপায়ে সাজানো যায়।$$

$$\text{নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা } 226800 \text{ ও } 5040.$$

(b) 'IMMEDIATE' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। কতগুলোর প্রথমে T এবং শেষে A থাকবে?

সমাধান : ১ম অংশ : 'IMMEDIATE' শব্দটিতে মোট 9টি বর্ণ আছে যাদের 2টি I, 2টি M এবং 2টি E.

$$\text{এ শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো যায় } \frac{9!}{2! \times 2! \times 2!} = 45360 \text{ উপায়ে।}$$

২য় অংশ : প্রথম স্থানটি 'T' এবং শেষ স্থানটি 'A' দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট (9 - 2) বা 7টি বর্ণকে (যাদের 2টি I, 2টি M এবং 2টি E) 7টি স্থানে $\frac{7!}{2! \times 2! \times 2!} = 630$ উপায়ে সাজানো যায়।

(c) 'DAUGHTER' শব্দটির বর্ণগুলো মোট কত রকমে সাজানো যাবে? কতগুলো D দ্বারা শুরু হবে? কতগুলোর প্রথমে D এবং শেষে R থাকবে?

[ব.'০৩]

কতগুলোর প্রথমে D থাকবে কিন্তু শেষে R থাকবে না? কতগুলোর প্রথমে D এবং শেষে R থাকবে না?

সমাধান : ১ম অংশ : 'DAUGHTER' শব্দটির 8 টি তিন্নি বর্ণ আছে।

নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা = $8! = 40320$

২য় অংশ : প্রথম স্থানটি 'D' দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8 - 1)$ অর্থাৎ, 7টি বর্ণকে 7! উপায়ে সাজানো যায়।

নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা = $7! = 5040$ (Ans.)

অর্থ অংশ : প্রথম স্থানটি 'D' এবং শেষ স্থানটি 'R' দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8 - 2)$ বা, 6টি বর্ণকে 6! উপায়ে সাজানো যায়।

নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা = $6! = 720$ (Ans.)

৪র্থ অংশ : প্রথমে D থাকবে কিন্তু শেষে R থাকবে না এমন সাজানো সংখ্যা = প্রথমে D থাকে এমন সাজানো সংখ্যা – প্রথমে D এবং শেষে R থাকে এমন সাজানো সংখ্যা = $5040 - 720 = 4320$

বিকল্প পদ্ধতি : যেহেতু প্রথম স্থানটি D দ্বারা পূরণ করতে হয় এবং শেষের স্থানটি R দ্বারা পূরণ করা যায় না, অতএব শেষের স্থানটি $(8 - 2)$ বা, 6টি বর্ণ দ্বারা 6P_1 তাবে পূরণ করা যায়

আবার, মাঝের $(8 - 2)$ বা, 6টি স্থান অবশিষ্ট 6টি বর্ণ দ্বারা $6!$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা = ${}^6P_1 \times 6! = 6 \times 720 = 4320$

৫ম অংশ : নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা = সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা – প্রথমে 'D' নিয়ে সাজানো সংখ্যা – শেষে 'R' নিয়ে সাজানো সংখ্যা + প্রথমে 'D' এবং শেষে 'R' নিয়ে সাজানো সংখ্যা

$$= 8! - 7! - 7! + 6! = 40320 - 2.5040 + 720 = 41040 - 10080 = 30960$$

10. (a) 'POSTAGE' শব্দটির সব কল্পিত বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে যাতে স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থান দখল করবে? কতগুলোতে ব্যঞ্জনবর্ণগুলো একত্রে থাকবে? [ক্র. '18]

সমাধান : ১ম অংশ : 'POSTAGE' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ। এখানে 7টি স্থানের মধ্যে 3টি জোড় স্থান (২য়, ৪র্থ এবং ৬ষ্ঠ) 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $3!$ উপায়ে এবং 4টি বিজোড় স্থান (১ম, ৩য়, ৫ম এবং ৭ম) 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা $4!$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা = $3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

২য় অংশ : 4টি ব্যঞ্জনবর্ণকে একটি একক বর্ণ মনে করলে ভিন্ন বর্ষ হবে (PSTG), O, A, E। এই 4টি বর্ণকে $4!$ প্রকারে এবং 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণকে নিজেদের মধ্যে $4!$ প্রকারে সাজানো যাবে।

ব্যঞ্জনবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = $4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$

(b) স্বরবর্ণগুলোকে কেবল (i) জোড় স্থানে (ii) বিজোড় স্থানে রেখে 'ARTICLE' শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। [ক্র. '10]

সমাধান : (i) 'ARTICLE' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে যাদের 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ। এখানে 7টি স্থানের মধ্যে 3টি জোড় স্থান (২য়, ৪র্থ এবং ৬ষ্ঠ) 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $3!$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 4টি স্থান 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা $4!$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

স্বরবর্ণগুলোকে কেবল জোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা = $3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

(ii) 7টি স্থানের মধ্যে 4টি বিজোড় স্থান (১ম, ৩য়, ৫ম এবং ৭ম) এর 3টি স্থান 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা 4P_3 উপায়ে এবং অবশিষ্ট 4টি স্থান 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা $4!$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

স্বরবর্ণগুলোকে কেবল বিজোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা = ${}^4P_3 \times 4! = 24 \times 24 = 576$

10. (c) 'ALLAHABAD' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। এদের কতগুলোতে A চারটি একত্রে থাকবে? এদের কতগুলোতে স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থান দখল করবে?

সমাধান : ১ম অংশ : 'ALLAHABAD' শব্দটিতে মোট ৭টি বর্ণের মধ্যে ৪টি A এবং ২টি L আছে।

$$\text{সবগুলো বর্ণ একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা} = \frac{9!}{4! \times 2!} = 7560$$

২য় অংশ : A চারটিকে একটি একক বর্ণ মনে করলে তিনি বর্ণ হবে (AAAA), L, L, H, B এবং D. ২টি L সহ

এ ৬টি বর্ণকে $\frac{6!}{2!} = 360$ উপায়ে এবং A চারটিকে নিজেদের মধ্যে $\frac{4!}{4!} = 1$ উপায়ে সাজানো যাবে।

$$A \text{ চারটি একত্রে নিয়ে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা} = 360 \times 1 = 360$$

৩য় অংশ : ৪টি স্থানের মধ্যে ৪টি জোড় স্থান ৪টি স্বরবর্ণ অর্থাৎ ৪টি A দ্বারা $\frac{4!}{4!} = 1$ উপায়ে এবং ৫টি বিজোড় স্থান

২টি L সহ ৫টি ব্যঙ্গবর্ণ দ্বারা $\frac{5!}{2!} = 60$ উপায়ে সাজানো যাবে।

$$\text{স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা} = 1 \times 60 = 60$$

11 (a) দেখাও যে, দুইখানা বিশেষ পুস্তক একত্রে না রেখে n সংখ্যক বিভিন্ন পুস্তক যত রকমে সাজানো যায় তার সংখ্যা $(n - 2)(n - 1)!$

সমাধান : n সংখ্যক বিভিন্ন পুস্তকের সবগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো সংখ্যা $= n!$

দুইখানা বিশেষ পুস্তককে একটি একক পুস্তক মনে করলে সাজানোর জন্য $(n - 1)$ সংখ্যক পুস্তক পাই। এই $(n - 1)$ সংখ্যক পুস্তক একত্রে $(n - 1)!$ প্রকারে এবং বিশেষ পুস্তক দুইটিকে নিজেদের মধ্যে $2! = 2$ প্রকারে সাজানো যায়।

$$\text{দুইখানা বিশেষ পুস্তক একত্রে রেখে সাজানো সংখ্যা} = (n - 1)! \times 2 = 2(n - 1)!$$

$$\begin{aligned} \text{দুইখানা বিশেষ পুস্তক একত্রে না রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা} &= n! - 2(n - 1)! = n.(n - 1)! - 2(n - 1)! \\ &= (n - 2).(n - 1)! \end{aligned}$$

(b) n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসকে কত রকমে এক সারিতে সাজানো যায়, যাতে বিশেষ দুইটি জিনিস সারির প্রথমে বা শেষে না থাকে?

সমাধান : বিশেষ জিনিস দুইটি সারির প্রথমে বা শেষে না থাকলে অবশিষ্ট $(n - 2)$ সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস দ্বারা প্রথম ও শেষ স্থান দুইটি ${}^{n-2}P_2$ উপায়ে পূরণ করা যায় এবং অবশিষ্ট $(n - 2)$ সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস দ্বারা মধ্যের $(n - 2)$ সংখ্যক স্থান $(n - 2)!$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

$$\text{নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা} = {}^{n-2}P_2 \times (n - 2)! = (n - 2)(n - 3). (n - 2)!$$

(c) n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের r সংখ্যক একবারে নিয়ে কত রকমে এক সারিতে সাজানো যায়, যাতে বিশেষ দুইটি জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকে কিন্তু তারা সারির প্রথমে বা শেষে থাকে না?

সমাধান : বিশেষ জিনিস দুইটি সারির প্রথমে বা শেষে না থাকলে অবশিষ্ট $(n - 2)$ সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস দ্বারা প্রথম ও শেষ স্থান দুইটি ${}^{n-2}P_2$ উপায়ে পূরণ করা যায় এবং অবশিষ্ট $(n - 2)$ সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস দ্বারা মধ্যের $(r - 2)$ সংখ্যক স্থান ${}^{n-2}P_{r-2}$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

$$\text{নির্ণেয়} \quad \text{সাজানো} \quad \text{সংখ্যা} \quad = \quad {}^{n-2}P_2 \times {}^{n-2}P_{r-2} \quad =$$

$$(n - 2)(n - 3) \frac{(n - 2)!}{(n - 2 - r + 2)!} = \frac{(n - 2)!}{(n - r)!} (n - 2)(n - 3)$$

12.(a) 'SECOND' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে একটি স্বরবর্ণ ও দুইটি ব্যঞ্জন বর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যেতে পারে, যখন স্বরবর্ণ সর্বদা মধ্যম স্থান দখল করে ?
[ব.'০৩]

সমাধান : 'SECOND' শব্দটিতে মোট 6টি বর্ণ আছে যাদের 2টি স্বরবর্ণ এবং 3টি ব্যঞ্জন বর্ণ।

মধ্যম স্থানটি দুইটি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা ${}^2P_1 = 2$ উপায়ে এবং প্রান্ত স্থান 2টি 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ দ্বারা ${}^4P_2 = 12$ উপায়ে পূরণ করা যেতে পারে।

$$\text{নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা} = 2 \times 12 = 24 \quad (\text{Ans.})$$

(b) 7টি বিভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 3টি বিভিন্ন স্বরবর্ণ থেকে দুইটি ব্যঞ্জনবর্ণ ও একটি স্বরবর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যায়, যাতে স্বরবর্ণটি ব্যঞ্জনবর্ণের মাঝখানে থাকবে ?

সমাধান : মধ্যম স্থানটি 3টি বিভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা ${}^3P_1 = 3$ উপায়ে এবং প্রান্ত স্থান 2টি, 7টি বিভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ দ্বারা ${}^7P_2 = 42$ উপায়ে পূরণ করা যাবে। \therefore নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $= 3 \times 42 = 126$

(c) যদি 'CAMBRIDGE' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে কেবল 5টি বর্ণ নিয়ে শব্দ গঠন করা হয় তবে কতগুলোতে প্রদত্ত শব্দটির সব কয়টি স্বরবর্ণ বর্তমান থাকবে ?
[চ.'০৮; কু.'০৭]

সমাধান : 'CAMBRIDGE' শব্দটিতে মোট 7টি ভিন্ন বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ এবং 6টি ব্যঞ্জন বর্ণ।

5টি স্থান 3টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা ${}^5P_3 = 60$ উপায়ে পূরণ করা যাবে। অবশিষ্ট $(5 - 3)$ অর্থাৎ, 2টি স্থান 6টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ দ্বারা ${}^6P_2 = 30$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$$\text{নির্ণেয় শব্দ গঠন করার উপায় সংখ্যা} = 60 \times 30 = 1800$$

বিকল্প পদ্ধতি : প্রদত্ত শব্দটিতে মোট 7টি ভিন্ন বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ এবং 6টি ব্যঞ্জন বর্ণ।

6টি ব্যঞ্জন বর্ণ হতে 2টি ব্যঞ্জন বর্ণ 6C_2 উপায়ে বেছে নেওয়া যায়। 3টি স্বরবর্ণ এবং 2টি ব্যঞ্জন বর্ণ $5!$ প্রকারে বিন্যস্ত হয়।

$$\text{নির্ণেয় শব্দ গঠন করার উপায় সংখ্যা} = {}^6C_2 \times 5! = 15 \times 120 = 1800 \quad (\text{Ans.})$$

12. (d) 'EQUATION' শব্দটির বর্ণগুলো হতে প্রত্যেকবার 4টি বর্ণ নিয়ে বিভিন্ন শব্দ গঠন করা হল, এদের কতগুলোতে Q বর্তমান থাকবে কিন্তু N থাকবে না ?
[য.'০৮]

সমাধান : 'EQUATION' শব্দটিতে 8 টি ভিন্ন বর্ণ আছে। 4টি বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দে 4টি স্থানে Q বর্তমান থাকবে ${}^4P_1 = 4$ উপায়ে। অবশিষ্ট $(4 - 1)$ অর্থাৎ 3টি স্থান 6টি বর্ণ E, U, A, T, I এবং O দ্বারা পূরণ করা যাবে ${}^6P_3 = 120$ উপায়ে। Q কে বর্তমান রেখে এবং N কে বর্তমান না রেখে শব্দ হস্তন করা যাবে $4 \times 120 = 480$ টি।

বিকল্প পদ্ধতি : Q কে বর্তমান রেখে এবং N কে বর্তমান না রেখে 4টি বর্ণ নিয়ে শব্দ গঠন করা হলে অন্য $(8 - 2) = 6$ টি বর্ণ হতে 3টি বর্ণ নিতে হবে এবং তা ${}^6C_3 = 20$ উপায়ে নেওয়া যায়। আবার, 4টি ভিন্ন বর্ণ দ্বারা শব্দ গঠন করা যায় $4! = 24$ টি।

$$Q \text{ কে বর্তমান রেখে এবং N কে বর্তমান না রেখে শব্দ হস্তন করা যায় } 20 \times 24 = 480 \text{ টি।}$$

13. (a) 10 টি বস্তুর 5টি একবারে নিয়ে কতগুলো বিন্যাসের মধ্যে 2টি বিশেষ কস্তু সর্বদা অল্পতর্জুত থাকবে ?
[কু.'১০]

সমাধান : 5টি একবারে নিয়ে গঠিত বিন্যাসের 5টি স্থান 2টি বিশেষ বস্তু দ্বারা ${}^5P_2 = 20$ উপায়ে পূরণ করার পর অবশিষ্ট $(5 - 2)$ অর্থাৎ, 3টি স্থান বাকি $(10 - 2)$ অর্থাৎ, 8টি বস্তু দ্বারা ${}^8P_3 = 336$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$$\text{নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা} = 20 \times 336 = 6720$$

বিকল্প পদ্ধতি : 2 টি বিশেষ কস্তুকে সর্বদা অন্তর্ভুক্ত রেখে অবশিষ্ট $(10 - 2)$ বা, 8টি কস্তু হতে 3টি কস্তু 8C_3 উপায়ে বেছে নেওয়া যাবে। আবার, 5 টি কস্তুকে 5! উপায়ে সাজানো যাবে।

$$\text{নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা} = {}^8C_3 \times 5! = 56 \times 120 = 6720$$

(b) ইঞ্রেজি বর্ণমালার 26টি বর্ণ থেকে কতগুলিরে 5টি বিভিন্ন বর্ণ সমন্বিত একটি শব্দ গঠন করা যায়, যাদের মধ্যে A এবং L অক্ষর দুইটি অবশ্যই থাকবে ?

সমাধান : 5টি অক্ষর নিয়ে গঠিত শব্দে 5টি স্থান A এবং L অক্ষর দ্বারা ${}^5P_2 = 20$ উপায়ে পূরণ করার পর অবশিষ্ট $(5 - 2)$ অর্ধাঃ, 3টি স্থান বাকি $(26 - 2)$ অর্ধাঃ, 24টি অক্ষর দ্বারা ${}^{24}P_3 = 12144$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$$\text{নির্ণেয় সংখ্যা} = 20 \times 12144 = 242880$$

14 (a) একজন লোকের একটি সাদা, দুইটি লাল এবং তিনটি সবুজ পতাকা আছে। একটির উপর আরেকটি সাজানো চারটি পতাকা নিয়ে সে কতগুলো বিভিন্ন সংকেত তৈরী করতে পারবে ? [রা.'০২]

সমাধান : ৩টি পতাকার সংখ্যা = $1 + 2 + 3 = 6$.

৬টি পতাকা হতে 4টি পতাকা নির্বাচন করে সে নিম্নরূপে সংকেত তৈরী করতে পারবে :

সাদা পতাকা (1)	লাল পতাকা (2)	সবুজ পতাকা (3)	সংকেত তৈরীর উপায় সংখ্যা
1 2	1	$\frac{4!}{2!} = 12$	
1 1	2	$\frac{4!}{2!} = 12$	
1 0	3	$\frac{4!}{3!} = 4$	
0 1	3	$\frac{4!}{3!} = 4$	
0 2	2	$\frac{4!}{2!2!} = 6$	

সে সংকেত তৈরী করতে পারবে $(12 + 12 + 4 + 4 + 6)$ বা, 38 উপায়ে।

14 (b) একজন লোকের একটি সাদা, দুইটি লাল এবং তিনটি সবুজ পতাকা আছে। একটির উপর আরেকটি সাজানো পাঁচটি পতাকা নিয়ে সে কতগুলো বিভিন্ন সংকেত তৈরী করতে পারবে ? [ক্ষ.'০১; পি.'১০; প্র.ড.প.'০৮]

সমাধান : ৩টি পতাকার সংখ্যা = $1 + 2 + 3 = 6$.

৬টি পতাকা হতে 5টি পতাকা নির্বাচন করে সে নিম্নরূপে সংকেত তৈরী করতে পারবে :

সাদা পতাকা (1)	লাল পতাকা (2)	সবুজ পতাকা (3)	সংকেত তৈরীর উপায় সংখ্যা
1	2	2	$\frac{5!}{2!2!} = 30$
1	1	3	$\frac{5!}{3!} = 20$
0	2	3	$\frac{5!}{2!3!} = 10$

$$\text{নির্ণেয় সংখ্যা} = 30 + 20 + 10 = 60 \text{ (Ans.)}$$

15. (a) দুইজন B.Sc. ক্লাসের ছাত্রকে পাশাপাশি না বসিয়ে 14 জন I.Sc. ক্লাসের ও 10 জন B.Sc. ক্লাসের ছাত্রকে কত রকমে একটি লাইনে সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর। [য.'০৮]

সমাধান : 14 জন I.Sc. ক্লাসের ছাত্রকে একটি লাইনে 14! রকমে সাজানো যায়। এই 14 জন I.Sc. ক্লাসের ছাত্রের মাঝখানে $(14 - 1) = 13$ টি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। এ ছাড়া লাইনের দুই প্রান্তে আরও দুইটি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। সুতরাং, $(13 + 2) = 15$ টি ফাঁকা স্থানে 10 জন B.Sc. ক্লাসের ছাত্রকে ${}^{15}P_{10}$ রকমে সাজানো যায়।

$$\text{নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা} = 14! \times {}^{15}P_{10}$$

- 15 (b) দুইটি যোগবোধক চিহ্ন পাশাপাশি না রেখে p-সংখ্যক যোগবোধক চিহ্ন ও q-সংখ্যক বিয়োগবোধক চিহ্ন ($p < q$) কত প্রকারে এক সারিতে সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর।

সমাধান : p-সংখ্যক যোগবোধক চিহ্ন এবং q-সংখ্যক বিয়োগবোধক চিহ্ন একজাতীয়। q-সংখ্যক বিয়োগবোধক চিহ্নকে এক সারিতে $\frac{q!}{p!} = 1$ রকমে সাজানো যায়। এই q-সংখ্যক বিয়োগবোধক চিহ্নের মাঝখানে $(q - 1)$ টি ফাঁকা স্থান $p!$ পাওয়া যায়। এ ছাড়া সারির দুই প্রান্তে আরও দুইটি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। সুতরাং, $\{(q - 1) + 2\} = (q + 1)$ টি ফাঁকা স্থানে p-সংখ্যক যোগবোধক চিহ্নকে $\frac{{}^{q+1}P_p}{p!} = \frac{(q + 1)!}{p! \times (q + 1 - p)!}$ রকমে সাজানো যায়।

$$\text{নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা} = 1 \times \frac{(q + 1)!}{p! \times (q + 1 - p)!} = \frac{(q + 1)!}{p! \times (q - p + 1)!}$$

- 16 (a) 3, 4, 5, 6, 7, 8 অঙ্কগুলোর একটিকেও পুনরাবৃত্তি না করে 5000 এবং 6000 মধ্যবর্তী কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে? [ব.'১৩]

সমাধান : 5000 এবং 6000 মধ্যবর্তী সংখ্যাগুলো অবশ্যই 4 অঙ্কের হতে হবে এবং প্রথম অঙ্কটি 5 দ্বারা আরম্ভ হতে হবে। এখানে 6টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে। প্রথম স্থানটি 5 দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(4 - 1) = 3$ টি স্থান বাকি $(6 - 1) = 5$ টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে 5P_3 উপায়ে। $\therefore \text{নির্ণেয় মোট সংখ্যা} = {}^5P_3 = 60$

- (b) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার ব্যবহার করে 5, 6, 7, 8, 0 অঙ্কগুলো দ্বারা পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট এবং 4 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান : এখানে শূন্যসহ মোট 5টি অঙ্ক আছে। সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। 4 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাগুলোর শেষের অঙ্ক দুইটি দ্বারা গঠিত সংখ্যা 4 দ্বারা বিভাজ্য হবে। অতএব, 4 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাগুলোর শেষের অঙ্ক দুইটি দ্বারা গঠিত সংখ্যা 08, 60, 80, 56, 68, 76 হবে।

শেষ দুইটি স্থানে 08, 60 ও 80 এর যেকোন একটি দ্বারা 3P_1 উপায়ে পূরণ করে অবশিষ্ট $(5 - 2) = 3$ টি স্থান বাকি $(5 - 2) = 3$ টি অঙ্ক দ্বারা 3! উপায়ে পূরণ করা যাবে।

আবার, শেষ দুইটি স্থানে 56, 68 ও 76 এর যেকোন একটি দ্বারা 3P_1 উপায়ে এবং 0 ব্যতীত অপর দুইটি অঙ্কের যেকোন একটি দ্বারা প্রথম স্থানটি 2P_1 উপায়ে পূরণ করে অবশিষ্ট $(5 - 3) = 2$ টি স্থান 0 ও অপর একটি অঙ্ক দ্বারা 2! উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$$4 \text{ দ্বারা বিভাজ্য মোট সংখ্যা} = {}^3P_1 \times 3! + {}^3P_1 \times {}^2P_1 \times 2! = 3 \times 6 + 3 \times 2 \times 2 = 18 + 12 = 30$$

17. (a) প্রতিটি অঙ্ক যতবার আছে এর বেশি সংখ্যকবার ব্যবহার না করে 3, 4, 5, 3, 4, 5, 6 এর বিজোড় অঙ্কগুলো সবসময় বিজোড় স্থানে রেখে সাত অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান : সাত অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার 4টি বিজোড় স্থান ও 3টি জোড় স্থান থাকে। 3, 5, 3 ও 5 অঙ্কগুলো দ্বারা 4টি

বিজোড় স্থান $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ উপায়ে এবং 4, 4 ও 6 অঙ্কগুলো দ্বারা বাকি স্থান 3টি $\frac{3!}{2!} = 3$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$$\text{নির্ণেয় মোট সংখ্যা} = 6 \times 3 = 18$$

(b) প্রত্যেক সংখ্যায় প্রতিটি অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়, যাদের প্রথমে ও শেষে জোড় অঙ্ক থাকবে?

সমাধান : এখানে 7টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে যাদের 4টি জোড় অঙ্ক।

প্রথম ও শেষ স্থান দুইটি 4টি জোড় অঙ্কের যেকোন দুইটি দ্বারা 4P_2 উপায়ে এবং অবশিষ্ট $(9 - 2) = 7$ টি স্থান বাকি $(9 - 2) = 7$ টি অঙ্ক দ্বারা $7!$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$$\text{প্রথমে ও শেষে জোড় অঙ্ক নিয়ে মোট সংখ্যা} = {}^4P_2 \times 7! = 12 \times 5040 = 60480$$

18. কোন সংখ্যায় কোন অঙ্কের পুনরাবৃত্তি না করে 0, 3, 5, 6, 8 অঙ্কগুলো দ্বারা 4000-এর চেয়ে বড় কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান : প্রশ্নমতে সংখ্যাগুলো 4 অঙ্কের ও 5 অঙ্কের হবে।

4000-এর চেয়ে বড় 4 অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যাগুলো 5, 6 কিংবা 8 দ্বারা আরম্ভ হবে।

$$4 \text{ অঙ্ক দ্বারা গঠিত মোট সংখ্যা} = {}^3P_1 \times {}^4P_3 = 3 \times 24 = 72$$

4000-এর চেয়ে বড় 5 অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যাগুলো 3, 5, 6 কিংবা 8 দ্বারা আরম্ভ হবে।

$$4 \text{ অঙ্ক দ্বারা গঠিত মোট সংখ্যা} = {}^4P_1 \times {}^4P_4 = 4 \times 24 = 96$$

$$\text{নির্ণেয় মোট সংখ্যা} = 72 + 96 = 168$$

19 (a) 1, 2, 3, 4 অঙ্কগুলি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে তিনি অঙ্কের বেশি নয় এমন কতগুলি সংখ্যা তৈরী করা যায়?

সমাধান : এখানে অঙ্ক 4টির প্রতিটি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করা যাবে।

\therefore এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 4 উপায়ে।

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রতিটি স্থান (একক বা দশক) 4টি অঙ্ক দ্বারা 4 উপায়ে পূরণ করা যাবে। অতএব, দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $4 \times 4 = 4^2$ উপায়ে।

অনুরূপভাবে, তিনি ত্রি বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 4^3 উপায়ে।

$$\text{নির্ণেয় মোট সংখ্যা} = (4 + 4^2 + 4^3) = (4 + 16 + 64) = 84$$

(b) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলো যেকোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে 10000 এর ছেটি কতগুলো বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান : শূন্যসহ 8টি অঙ্কের প্রতিটি যে কোন সংখ্যকবার ব্যবহার করা যাবে। সংখ্যার শেষে 1, 3, 5 বা 7 থাকলে সংখ্যাগুলি বিজোড় হবে এবং প্রথমে 0 থাকলে তা অর্ধপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। তাই, শেষ স্থানটি (অর্ধাং একক স্থান) এ চারাটি বিজোড় সংখ্যা দ্বারা 4 উপায়ে, বাম দিক হতে প্রথম স্থানটি 0 ব্যতীত বাকী 7টি অঙ্ক দ্বারা 7 উপায়ে এবং অন্যান্য স্থানগুলির প্রতিটি শূন্যসহ 8টি অঙ্ক দ্বারা 8 উপায়ে পূরণ করা যাবে।

\therefore এক অঙ্ক বিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে 4 উপায়ে।

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে $7 \times 4 = 28$ উপায়ে।

তিনি অঙ্ক বিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে $7 \times 8 \times 4 = 224$ উপায়ে।

চার অঙ্ক বিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে $7 \times 8 \times 8 \times 4$ অর্থাৎ 1792 উপায়ে।

$$\text{নির্ণয় মোট সংখ্যা} = (4 + 28 + 224 + 1792) = 2048$$

20. (a) একটি প্রফেসরের পদের জন্য 3 জন প্রার্থী 5 জন লোকের ভোটে একজন নির্বাচিত হবে। কত প্রকারে ভোট দেওয়া যেতে পারে?

[য.'০৫; কু.'০৯; রা.'১০]

সমাধান : প্রত্যেক ভোটার 3 জন প্রার্থীকে ভোট দিতে পারে 3 উপায়ে।

$$5 \text{ জন ভোটার } 3 \text{ জন প্রার্থীকে ভোট দিতে পারে } 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243 \text{ উপায়ে।}$$

$$243 \text{ প্রকারে ভোট দেওয়া যেতে পারে।}$$

(b) তিনটি পুরস্কারের একটি সদাচারের জন্য, একটি ক্রীড়ার জন্য এবং একটি সাধারণ উন্নতির জন্য। 10 জন বালকের মধ্যে এগুলো কত রকমে বিতরণ করা যেতে পারে?

সমাধান : প্রত্যেক পুরস্কার 10 জন বালকের মধ্যে 10 উপায়ে বিতরণ করা যায়।

$$\text{তিনটি পুরস্কার } 10 \text{ জন বালকের মধ্যে বিতরণ করার মোট উপায় সংখ্যা} = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

21. (a) গণিতের 5 খানা, পদার্থবিজ্ঞানের 3 খানা ও রসায়নবিজ্ঞানের 2 খানা পুস্তককে একটি তাকে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে যাতে একই বিষয়ের পুস্তকগুলো একত্রে থাকে?

সমাধান : যেহেতু একই বিষয়ের পুস্তকগুলো একত্রে থাকে, অতএব গণিতের 5 খানা পুস্তককে গণিতের একটি একক পুস্তক, পদার্থবিজ্ঞানের 3 খানা পুস্তককে পদার্থবিজ্ঞানের একটি একক পুস্তক এবং রসায়নবিজ্ঞানের 2 খানা পুস্তককে রসায়নবিজ্ঞানের একটি একক পুস্তক মনে করতে হবে।

এই 3 বিষয়ের পুস্তক $3! = 6$ উপায়ে এবং গণিতের 5 খানা পুস্তককে নিজেদের মধ্যে $5! = 120$ উপায়ে, পদার্থবিজ্ঞানের 3 খানা পুস্তককে $3! = 6$ উপায়ে ও রসায়নবিজ্ঞানের 2 খানা পুস্তককে $2! = 2$ উপায়ে সাজানো যাবে।

$$\text{একই বিষয়ের পুস্তকগুলো একত্রে রেখে নির্ণয় সাজানো সংখ্যা} = 6 \times 120 \times 6 \times 2 = 8640$$

(b) একটি তালার 4টি রিং এর প্রত্যেকটিতে 5টি করে অক্ষর মূদ্রিত আছে। প্রতিটি রিং এর একটি করে 4টি অক্ষরের একমাত্র বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা গোলে কতগুলি বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা যাবে না?

সমাধান : প্রতিটি বিন্যাসের প্রথম স্থানটি প্রথম রিং এর 5টি অক্ষর দ্বারা পূরণ করা যায় 5 উপায়ে।

প্রতিটি বিন্যাসের দ্বিতীয় স্থানটি দ্বিতীয় রিং এর 5টি অক্ষর দ্বারা পূরণ করা যায় 5 উপায়ে।

প্রতিটি বিন্যাসের তৃতীয় স্থানটি তৃতীয় রিং এর 5টি অক্ষর দ্বারা পূরণ করা যায় 5 উপায়ে।

প্রতিটি বিন্যাসের চতুর্থ স্থানটি চতুর্থ রিং এর 5টি অক্ষর দ্বারা পূরণ করা যায় 5 উপায়ে।

$$\text{চারটি রিং এর অক্ষরগুলি দ্বারা গঠিত বিন্যাসের সংখ্যা} = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 25$$

$$\text{যেসব বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা যাবেনা তাদের সংখ্যা} = 625 - 1 = 624$$

22. (a) 8 জন মেয়ে বৃত্তাকারে নাচবে। কত প্রকারে পৃথক পৃথক ভাবে তারা বৃত্তাকারে দাঁড়াবে?

সমাধান : 1 জন মেয়েকে নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8 - 1)$ বা, 7 জন মেয়েকে 7! প্রকারে সাজানো যায়।

$$7! = 5040 \text{ ভাবে তারা বৃত্তাকারে দাঁড়াতে পারবে।}$$

(b) 8 টি তিনি ধরনের মুক্তা কত রকমে একটি ব্যান্ডে লাগিয়ে একটি হার তৈরি করা যেতে পারে?

সমাধান : 1টি মুক্তা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8 - 1)$ বা, 7 টি মুক্তাকে 7! প্রকারে একটি ব্যান্ডে লাগিয়ে একটি হার তৈরি করা যেতে পারে। কিন্তু হারটি একটি চক্র বিন্যাস যা উপর এবং নিচ থেকে অথবা উল্টিয়ে দেখা যায়।

$$\frac{7!}{2} = \frac{5040}{2} = 2520 \text{ রকমে একটি হার তৈরি করা যেতে পারে।}$$

22. (c) দুইজন কলা বিভাগের ছাত্রকে পাশাপাশি না বসিয়ে 8 জন বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র ও 7 জন কলা বিভাগের ছাত্রকে কত রকমে একটি গোল টেবিলের চারপাশে বসানো যায়, তা নির্ণয় কর।

[বা.'১১; ঢা.'১২]

সমাধান : 1 জন বিজ্ঞানের ছাত্রকে নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(8 - 1)$ বা, 7 জন বিজ্ঞানের ছাত্রকে একটি গোল টেবিলের চারপাশে 7! রকমে বসানো যায়। 8 জন বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্রের মধ্যের 8 টি আসনে 7 জন কলা বিভাগের ছাত্রকে 8P_7 , রকমে বসানো যায়। ∴ তাদেরকে $7! \times {}^8P_7$, রকমে বসানো যেতে পারে।

(d) 15 সদস্যের একটি কমিটিকে গোলটেবিলে 15টি আসনে কতভাবে বসানো যায়? প্রথান অতিথিকে মাঝের আসনে বসিয়ে তাদেরকে একটি লম্বা টেবিলে 15টি আসনে কতভাবে বসানো যায় তাও নির্ণয় কর।

সমাধান : 15 জন সদস্যের মধ্যে একজনকে একটি আসনে নির্দিষ্ট করে বাকি 14 জনকে গোল টেবিলের 14টি আসনে 14! উপায়ে বসানো যাবে। সুতরাং, নির্ণয় সংখ্যা = 14!

আবার, একটি লম্বা টেবিলে প্রধান অতিথিকে মাঝের আসনে বসিয়ে বাকি 14 টি আসনে 14 জনকে 14! উপায়ে বসানো যাবে। সুতরাং, নির্ণয় সংখ্যা = 14!

23. (a) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে $0, 2, 4, 6, 8$ অঙ্কগুলো দ্বারা 10000 এর চেয়ে বড় যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে $0, 2, 4, 6, 8$ অঙ্কগুলো দ্বারা 10000 এর চেয়ে বড় সংখ্যা পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট হবে।

পাঁচ স্থানের যেকোন একটি স্থান এ পাঁচটি অঙ্কের যেকোন একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট চারটি স্থান বাকী চারটি অঙ্ক দ্বারা 4! উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং, প্রত্যেক অঙ্ক প্রত্যেক স্থানে (একক, দশক, শতক, হাজার বা ওযুত) 4! সংখ্যক বার পুনরাবৃত্ত হবে।

$$\text{পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি} = 4! \times (0 + 2 + 4 + 6 + 8) = 24 \times 20 = 480$$

প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে $0, 2, 4, 6, 8$ অঙ্কগুলো দ্বারা গঠিত পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি = $480 \times 1 + 480 \times 10 + 480 \times 100 + 480 \times 1000 + 480 \times 10000$

$$= 480(1 + 10 + 100 + 1000 + 10000) = 480 \times 11111 = 5333280$$

তবে এদের মধ্যে প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা এবং এরূপ সংখ্যার সমষ্টি = প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে $2, 4, 6, 8$ অঙ্কগুলো দ্বারা গঠিত চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি = $3! \times (0 + 2 + 4 + 6 + 8) \times 1111 = 6 \times 20 \times 1111 = 133320$

$$\text{নির্ণয় সমষ্টি} = 5333280 - 133320 = 5199960$$

$$[\text{বি.দ্র. : নির্ণয় সমষ্টি} = (2 + 4 + 6 + 8)(4! \times 11111 - 3! \times 1111) = 5199960]$$

23. (b) কোন অঙ্ক কোন সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে $1, 2, 3, 4$ অঙ্কগুলো দ্বারা যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি = $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার একক বা দশক স্থান এ চারটি অঙ্কের যেকোন একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট তিনটি অঙ্ক দ্বারা বাকী স্থানটি 3P_1 উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং, প্রত্যেক অঙ্ক একক বা দশক স্থানে 3P_1 সংখ্যক বার পুনরাবৃত্ত হয়।

$$\begin{aligned} \text{দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের (একক বা দশক) অঙ্কগুলির সমষ্টি} &= {}^3P_1(1 + 2 + 3 + 4) \\ &= 10 \times {}^3P_1 = 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি} &= 10 \times {}^3P_1 \times 10 + 10 \times {}^3P_1 \times 1 \quad [\text{যেমন } 26 = 2 \times 10 + 6 \times 1] \\ &= 10 \times {}^3P_1(10 + 1) = 10 \times {}^3P_1 \times 11 = 330 \end{aligned}$$

অনুরূপভাবে, তিনি অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি = $10 \times {}^3P_2 \times 111 = 10 \times 6 \times 111 = 6660$

চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি = $10 \times {}^3P_3 \times 1111 = 10 \times 6 \times 1111 = 66660$

নির্ণয় সমষ্টি = $10 + 330 + 6660 + 66660 = 73660$

[বি.দ্র. : নির্ণয় সমষ্টি = $(1+2+3+4)(1+11 \times {}^3P_1 + 111 \times {}^3P_2 + 1111 \times {}^3P_3)$ যেকোন সংখ্যকবার ব্যবহার করে 1, 2, 3, 4 অঙ্কগুলো দ্বারা যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি = $(1+2+3+4)(1+11 \times 4^1 + 111 \times 4^2 + 1111 \times 4^3) = 10(1+44+1776+71104) = 729250]$

23 (c) প্রত্যেক সংখ্যায় 5 পাঁচবার এবং 4 চারবার ব্যবহার করে 9 অঙ্কের গঠিত বিভিন্ন সংখ্যার গড় নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রত্যেক সংখ্যায় 5 পাঁচবার এবং 4 চারবার ব্যবহার করে 9 অঙ্কের $\frac{9!}{5!4!} = 126$ সংখ্যক সংখ্যা গঠিত হয়।

যেকোন স্থান (একক, দশক, শতক ইত্যাদি) 5 দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট আটটি স্থান 4টি 5 ও 4টি 4 দ্বারা $\frac{8!}{4!4!} = 70$ উপায়ে পূরণ করা যায় অর্থাৎ যেকোন স্থানে 70 বার 5 পুনরাবৃত্ত হয়। আবার, যেকোন স্থান 4 দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট আটটি স্থান 5টি 5 ও 3টি 4 দ্বারা $\frac{8!}{5!3!} = 56$ উপায়ে পূরণ করা যায় অর্থাৎ যেকোন স্থানে 56 বার 4 পুনরাবৃত্ত হয়।

নয় অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি = $5 \times 70 + 4 \times 56 = 350 + 224 = 574$

প্রত্যেক সংখ্যায় 5 পাঁচবার এবং 4 চারবার ব্যবহার করে 9 অঙ্কের গঠিত সংখ্যার সমষ্টি

= $574 \times 111111111 = 63777777714$

নির্ণয় গড় = $63777777714 \div 126 = 506172839$

কাজ

১। ‘EQUATION’ শব্দটির সকলগুলো অঙ্কের ব্যবহার করে কতটি শব্দ গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান : ‘EQUATION’ শব্দটিতে মোট 8টি বিভিন্ন অঙ্কের আছে। এই 8টি অঙ্কের একত্রে ব্যবহার করে গঠিত বিভিন্ন শব্দের সংখ্যা ${}^8P_8 = 8! = 40320$

২। ‘LAUGHTER’ শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। এদের কতগুলো L দ্বারা শুরু হবে?

সমাধান : ‘LAUGHTER’ শব্দটিতে মোট 8টি বিভিন্ন অঙ্কের আছে। এই 8টি অঙ্কের একত্রে ব্যবহার করে গঠিত বিভিন্ন শব্দের সংখ্যা ${}^8P_8 = 8! = 40320$

প্রথম স্থানটি L দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট (8 - 1) অর্থাৎ, 7টি অঙ্করকে তাদের নিজেদের মধ্যে $7! = 5040$

উপায়ে সাজানো যায়। সুতরাং L দ্বারা শুরু হয় এরূপ সাজানো সংখ্যা = 5040

৩। (a) নিচের শব্দগুলোর সকলগুলো বর্ণ একবারে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় : (i) committee
(ii) infinitesimal (iii) proportion ?

সমাধান : (i) ‘committee’ শব্দটিতে মোট 9টি অঙ্কের আছে, যাদের মধ্যে 2টি m, 2টি t এবং 2টি e.

$$\text{নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা} = \frac{9!}{2! \times 2! \times 2!}$$

(ii) infinitesimal শব্দটিতে মোট 13টি অক্ষর আছে , যাদের মধ্যে 4টি i, 2টি n .

$$\text{নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা} = \frac{13!}{4! \times 2!}$$

(iii) proportion শব্দটিতে মোট 10টি অক্ষর আছে , যাদের মধ্যে 2টি p, 2টি r, 3টি o.

$$\text{নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা} = \frac{10!}{2! \times 2! \times 3!}$$

(b) একটি লাইভেরীতে একখানা পুস্তকের 8 কপি , দুইখানা পুস্তকের প্রত্যেকের 3 কপি , তিনখানা পুস্তকের প্রত্যেকের 5 কপি এবং দশখানা পুস্তকের 1 কপি করে আছে। সবগুলো একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে?

সমাধান : মোট পুস্তকের সংখ্যা = $8 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 10 = 8 + 6 + 15 + 10 = 39$

$$\text{নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা} = \frac{39!}{8! \times 3! \times 3! \times 5! \times 5! \times 5!} = \frac{39!}{8! \times (3!)^2 \times (5!)^3}$$

৪। স্বরবর্ণগুলোকে পৃথক না রেখে 'INSURANCE' শব্দটি বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান : 'INSURANCE' শব্দটিতে মোট 9টি বর্ণ আছে যাদের 4টি ভিন্ন স্বরবর্ণ । যেহেতু স্বরবর্ণ 4টি একত্রে থাকে, অতএব তাদেরকে একটি একক বর্ণ মনে করলে বর্ণগুলো হবে (IUAE), N, S, R, N, C .

$$2\text{টি N সহ এই } 6\text{টি বর্ণকে } \frac{6!}{2!} = 360 \text{ প্রকারে সাজানো যায়। \text{আবার, } 4 \text{ টি ভিন্ন স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে}$$

$4! = 24$ প্রকারে সাজানো যায় ।

$$\text{নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা} = 360 \times 24 = 8640$$

৫। (a) 'CHITTAGONG' শব্দটির বর্ণগুলো কত রকম ভাবে বিন্যাস করা যায়, যখন স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকে ? [চ. '০১]

সমাধান : ' CHITTAGONG ' শব্দটিতে মোট 10টি বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ ।

যেহেতু স্বরবর্ণ তিনটি একত্রে থাকে, অতএব তাদেরকে 1টি বর্ণ মনে করে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে $(10 - 3 + 1)$ অর্থাৎ,

$$8\text{টি } 2\text{টি T ও } 2\text{টি G সহ এই } 8\text{টি বর্ণকে } \frac{8!}{2!.2!} = 10080 \text{ প্রকারে এবং } 3 \text{ টি ভিন্ন স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে$$

$3! = 6$ প্রকারে সাজানো যায় ।

$$\text{স্বরবর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বর্ণগুলোর মোট সাজানো সংখ্যা} = 10080 \times 6 = 60480$$

(b) স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি রেখে 'TECHNOLOGY' শব্দটির বর্ণগুলো কত উপায়ে বিন্যাস করা যায়? [গ.ত.প. '০৫]

সমাধান : ' TECHNOLOGY ' শব্দটিতে মোট 10টি বর্ণ আছে যাদের 3টি স্বরবর্ণ ।

যেহেতু স্বরবর্ণ তিনটি একত্রে থাকে, অতএব তাদেরকে 1টি বর্ণ মনে করে মোট বর্ণের সংখ্যা হবে $(10 - 3 + 1)$ অর্থাৎ,

$$8\text{টি } 1 \text{ টি O সহ } 2\text{টি T ও } 2\text{টি G সহ } 3\text{টি ভিন্ন স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে } \frac{3!}{2!} = 3 \text{ উপায়ে বিন্যাস}$$

করা যায় ।

$$\text{স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি রেখে বর্ণগুলোর মোট বিন্যাস সংখ্যা} = 8! \times 3 = 120960$$

৬। 7টি সবজ , 4টি নীল এবং 2টি লাল কাউন্টার এক সারিতে কত রকমে সাজানো যেতে পারে ? এদের ক্ষতগুলোতে লাল কাউন্টার দুইটি একত্রে থাকবে ?

সমাধান : ১ম অংশ : এখানে মোট $(7 + 4 + 2) = 3$ টি কাউন্টারের মধ্যে ৭টি সবুজ , 4টি নীল এবং ২টি লাল ।

$$\text{সবগুলো কাউন্টার একত্রে নিয়ে মোট সাজানো সংখ্যা} = \frac{13!}{7! \times 4! \times 2!} = 25740$$

২য় অংশ : লাল কাউন্টার দুইটিকে একটি একক কাউন্টার মনে করলে মোট কাউন্টার সংখ্যা হবে $(13 - 2 + 1)$ অর্থাৎ, ১২টি যাদের মধ্যে ৭টি সবুজ এবং ৪টি নীল ।

$$\text{লাল কাউন্টার দুইটি একত্রে রেখে মোট সাজানো সংখ্যা} = \frac{12!}{7! \times 4!} = 3960$$

৭। ‘IDENTITY’ শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। কতগুলোর প্রথমে I এবং শেষে I থাকবে ? কতগুলোতে I দুইটি এবং T দুইটি একত্রে থাকবে ?

সমাধান : ১ম অংশ : ‘IDENTITY’ শব্দটিতে মোট ৪টি বর্ণ আছে যাদের ২টি I এবং ২টি T

$$\text{এ শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে সাজানো যায়} = \frac{8!}{2! \times 2!} = 10080 \text{ প্রকারে।}$$

২য় অংশ : প্রথম ও শেষ স্থান দুইটি ‘I’ দ্বারা নির্দিষ্ট করে ২টি T সহ অবশিষ্ট $(8 - 2)$ অর্থাৎ, ৫টি বর্ণকে ৫টি স্থানে $\frac{5!}{2!} = 60$ প্রকারে সাজানো যায় ।

৩য় অংশ : I দুইটিকে একটি একক বর্ণ এবং T দুইটি একটি একক বর্ণ মনে করে মোট তিনি বর্ণের সংখ্যা হবে $(8 - 2)$ অর্থাৎ, ৬টি । সুতরাং, I দুইটি এবং T দুইটি একত্রে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 6! = 720$

৮। ব্যঙ্গনবর্ণগুলোকে বিজোড় স্থানে রেখে ‘EQUATION’ শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান : ‘EQUATION’ শব্দটিতে মোট ৪টি বর্ণ আছে যাদের ৫টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং ৩টি ভিন্ন ব্যঙ্গনবর্ণ। এখানে ৪টি স্থানের মধ্যে ৪টি বিজোড় স্থান (১ম , ৩য় , ৫ম এবং ৭ম) এর ৩টি স্থান ৩টি ভিন্ন ব্যঙ্গনবর্ণ দ্বারা 4P_3 উপায়ে এবং অবশিষ্ট ৫টি স্থান ৫টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা $5!$ উপায়ে পূরণ করা যাবে ।

$$\text{ব্যঙ্গনবর্ণগুলোকে বিজোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা} = {}^4P_3 \times 5! = 24 \times 120 = 2880$$

৯। (a) ৬টি পরীক্ষার খাতাকে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে, যাতে সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটি একত্রে না থাকে ?

সমাধান : ৬টি খাতা একত্রে $6! = 720$ প্রকারে সাজানো যায়। সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটিকে একটি একক খাতা মনে করে মোট খাতার সংখ্যা হবে $(6 - 2 + 1)$ অর্থাৎ ৫ টি । এই ৫টি খাতা একত্রে $5! = 120$ প্রকারে এবং সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটিকে নিজেদের মধ্যে $2! = 2$ প্রকারে সাজানো যায়।

$$\text{সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটিকে একত্রে নিয়ে সাজানো সংখ্যা} = 120 \times 2 = 240$$

$$\text{সবচেয়ে ভাল ও সবচেয়ে খারাপ খাতা দুইটি একত্রে না নিয়ে সাজানো সংখ্যা} = 720 - 240 = 480$$

(b) আটটি বস্তুকে এক সারিতে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে , যাতে (i) দুইটি বিশেষ বস্তু একত্রে থাকে এবং (ii) দুইটি বিশেষ বস্তু একত্রে না থাকে ?

সমাধান : (i) দুইটি বিশেষ বস্তুকে একটি একক বস্তু মনে করলে সাজানোর জন্য $(8 - 2 + 1)$ অর্থাৎ, ৭টি বস্তু পাই। এই ৭টি বস্তু একত্রে $7!$ প্রকারে এবং বিশেষ বস্তু দুইটিকে নিজেদের মধ্যে $2! = 2$ প্রকারে সাজানো যায়।

$$\text{দুইটি বিশেষ বস্তু একত্রে নিয়ে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা} = 7! \times 2 = 5040 \times 2 = 10080$$

(ii) ৮টি বস্তুকে এক সারিতে $8! = 40320$ প্রকারে সাজানো যায়।

$$\text{দুইটি বিশেষ বস্তু একত্রে না নিয়ে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা} = 40320 - 10080 = 30240$$

১০। (a) ‘PERMUTATIONS’ শব্দটির বর্ণগুলো থেকে একটি স্বরবর্ণ ও দুইটি ব্যঞ্জন বর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যেতে পারে, যখন স্বরবর্ণ সর্বদা মধ্যম স্থান দখল করে?

সমাধান : ‘PERMUTATIONS’ শব্দটিতে মোট 12টি বর্ণ আছে যাদের 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 2টি T সহ 7টি ব্যঞ্জন বর্ণ। মধ্যম স্থানটি 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ দ্বারা ${}^5P_1 = 5$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$$\text{প্রান্ত স্থান } 2\text{টি } 6\text{টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ P, R, M, T, N \text{ ও S দ্বারা } {}^6P_2 = 30 \text{ উপায়ে এবং } 2\text{টি T দ্বারা } \frac{2!}{2!} = 1$$

উপায়ে পূরণ করা যাবে। অতএব, প্রান্ত স্থান 2টি ব্যঞ্জন বর্ণ দ্বারা $(30 + 1) = 31$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$$\text{নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা} = 5 \times 31 = 155 \quad (\text{Ans.})$$

(b) একটি বালকের 11টি বিভিন্ন বস্তু আছে, যার মধ্যে 5টি কালো এবং 6টি সাদা। একটি কালো বস্তু মাঝখানে রেখে সে তিনটি বস্তু এক সারিতে কত প্রকারে সাজাতে পারে?

সমাধান : সারির মাঝখানের স্থানটি 5টি বিভিন্ন কালো বস্তু দ্বারা ${}^5P_1 = 5$ উপায়ে এবং প্রান্ত স্থান 2টি অবশিষ্ট $(11 - 1) = 10$ টি বিভিন্ন বস্তু দ্বারা ${}^{10}P_2 = 90$ উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$$\text{নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা} = 5 \times 90 = 450$$

(c) a, b, c, d, e, f অক্ষরগুলো থেকে তিনটি অক্ষর দ্বারা গঠিত বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয় কর, যেখানে প্রতিটি বিন্যাসে কমপক্ষে একটি স্বরবর্ণ বর্তমান থাকে।

সমাধান : a, b, c, d, e, f অক্ষরগুলোর মধ্যে 2টি ভিন্ন স্বরবর্ণ এবং 4টি ভিন্ন ব্যঞ্জন বর্ণ। 6টি অক্ষরের যেকোন 3টি নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা $= {}^6P_3$ । এদের মধ্যে কেবল 3টি ব্যঞ্জন বর্ণ থাকবে এবং বিন্যাস সংখ্যা $= {}^4P_3$

$$\text{প্রতিটি বিন্যাসে কমপক্ষে একটি স্বরবর্ণ বর্তমান থাকবে এবং } {}^6P_3 - {}^4P_3 = 120 - 24 = 96.$$

১১। দুইজন মেয়েকে পাশাপাশি না রেখে x জন ছেলে ও y জন মেয়েকে ($x > y$) কত প্রকারে এক সারিতে সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর।

সমাধান : x জন ছেলেকে এক সারিতে x! প্রকারে সাজানো যায়। এই x জন ছেলের মাঝখানে ($x - 1$) টি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। এ ছাড়া সারির দুই প্রান্তে আরও দুইটি ফাঁকা স্থান পাওয়া যায়। সুতরাং, $\{(x - 1) + 2\} = (x + 1)$ টি ফাঁকা স্থানে y জন মেয়েকে ${}^{x+1}P_y$ উপায়ে সাজানো যায়। $\therefore \text{নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা} = x! \times {}^{x+1}P_y$

১২। (a) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলো দ্বারা ছয় অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে? এদের কতগুলো 5 দ্বারা বিভাজ্য হবে না?

সমাধান : এখানে 6টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে। প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 6টি অঙ্ক দ্বারা ছয় অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা $= {}^6P_6 = 6! = 720$

শেষ স্থানটি 5টি অঙ্ক 2, 3, 4, 6 ও 7 এর যেকোন একটি দ্বারা 5P_1 প্রকারে পূরণ করে অবশিষ্ট 5টি স্থানে থাকি 5টি অঙ্ককে 5! প্রকারে সাজানো যায়।

$$5 \text{ দ্বারা বিভাজ্য নয় এবং } 5! = 120$$

(b) প্রতিটি অঙ্ক যতবার আছে এর বেশি সংখ্যাক্রমের ব্যবহার না করে 2, 2, 2, 3, 3, 4 অঙ্কগুলো দ্বারা ছয় অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে? এদের কতগুলো 400000 অপেক্ষা বড় হবে?

সমাধান : ১ম অংশ : এখানে 3টি 2 এবং 2টি 3 সহ মোট 6টি অঙ্ক আছে।

$$\text{ছয় অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা} = \frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

২য় অংশ : 400000 অপেক্ষা বড় সংখ্যাগুলোর প্রথম অঙ্কটি 4 দ্বারা আরম্ভ হতে হবে। প্রথম স্থানটি 4 দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট $(6 - 1) = 5$ টি স্থান 3টি 2 এবং 2টি 3 সহ বাকি 5টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে $\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$ উপায়ে।

$$\text{নির্ণয় মোট সংখ্যা} = 10$$

১৩। (a) 1, 2, 3 অঙ্কগুলি যে কোন সংখ্যক্বার ব্যবহার করে চার অঙ্কের বেশি নয় এমন কতগুলি সংখ্যা তৈরী করা যায়?

সমাধান : এখানে অঙ্ক 3টির প্রতিটি যে কোন সংখ্যক্বার ব্যবহার করা যাবে।

এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 3 উপায়ে।

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রতিটি স্থান (একক বা দশক) 3টি অঙ্ক দ্বারা 3 উপায়ে পূরণ করা যাবে। অতএব, দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $3 \times 3 = 3^2 = 9$ উপায়ে।

অনুরূপভাবে, তিন অঙ্ক বিশিষ্ট ও চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে যথাক্রমে 3^3 ও 3^4 উপায়ে।

$$\text{নির্ণয় মোট সংখ্যা} = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) = (3 + 9 + 27 + 81) = 120$$

[দ্র. 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলি যে কোন সংখ্যক্বার ব্যবহার করে চার অঙ্কের বেশি নয় এমন সংখ্যা গঠন করা যায় $\frac{5(5^4 - 1)}{5 - 1} = 780$ উপায়ে।]

(b) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলো যেকোন সংখ্যক্বার ব্যবহার করে 10000 এর ছোট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান : শূন্যসহ 8টি অঙ্কের প্রতিটি যে কোন সংখ্যক্বার ব্যবহার করা যাবে। সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্ধপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। তাই, বাম দিক হতে সংখ্যার প্রথম স্থান 0 ব্যতীত বাকী 7টি অঙ্ক দ্বারা 7 উপায়ে এবং অন্যান্য স্থানগুলির প্রতিটি শূন্যসহ 8টি অঙ্ক দ্বারা 8 উপায়ে পূরণ করা যাবে।

এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে 7 উপায়ে।

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $7 \times 8 = 56$ উপায়ে।

তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $7 \times 8 \times 8 = 448$ উপায়ে।

চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যাবে $7 \times 8 \times 8 \times 8 = 3584$ উপায়ে।

$$\text{নির্ণয় মোট সংখ্যা} = (7 + 56 + 448 + 3584) = 4095$$

১৪। তিনটি ফুটবল খেলার ফলাফল কত উপায়ে হতে পারে?

সমাধান : প্রথম খেলার ফলাফল কোন বিশেষ দলের জন্য জয়, পরাজয় অথবা অমীমাণ্সিত অর্থাৎ 3 উপায়ে হতে পারে। অনুরূপ ২য় খেলার ফলাফল 3 উপায়ে এবং ৩য় খেলার ফলাফলও 3 উপায়ে হতে পারে।

$$\text{নির্ণয় সংখ্যা} = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

১৫। (a) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 1, 3, 5, 7, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা 10000 এর চেয়ে বড় যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 1, 3, 5, 7, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা 10000 এর চেয়ে বড় সংখ্যা পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট হবে।

গাঁচ স্থানের যেকোন একটি স্থান এ পাঁচটি অঙ্কের যেকোন একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট চারটি স্থান বাকী চারটি অঙ্ক দ্বারা 4! উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং , প্রত্যেক অঙ্ক প্রত্যেক স্থানে (একক, দশক, শতক, হাজার বা ওয়ুত) 4! সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হবে।

$$\text{গাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি} = 4! \times (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 24 \times 25 = 600$$

$$\begin{aligned} \text{প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে } 1, 3, 5, 7, 9 \text{ অঙ্কগুলো দ্বারা গঠিত গাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি} &= 600 \times 1 + 600 \times 10 + 600 \times 100 + 600 \times 1000 + 600 \times 10000 \\ &= 600(1 + 10 + 100 + 1000 + 10000) = 600 \times 11111 = 6666600 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

$$[\text{বি.দ্র. : নির্ণয় সমষ্টি} = (5 - 1)! \times (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \times 11111 = 24 \times 25 \times 11111 = 6666600]$$

(b) কোন অঙ্ক কোন সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে **1, 3, 5, 7, 9** অঙ্কগুলো দ্বারা যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান : এক অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার একক বা দশক স্থান এ পাঁচটি অঙ্কের যেকোন একটি দ্বারা নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট চারটি অঙ্ক দ্বারা বাকী স্থানটি 4P_1 উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং , প্রত্যেক অঙ্ক একক ও দশক স্থানে 4P_1 সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হয়।

$$\begin{aligned} \text{দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের (একক বা দশক) অঙ্কগুলির সমষ্টি} &= {}^4P_1(1 + 3 + 5 + 7 + 9) \\ &= 25 \times {}^4P_1 = 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি} &= 25 \times {}^4P_1 \times 10 + 25 \times {}^4P_1 \times 1 \quad [\text{যেমন } 26 = 2 \times 10 + 6 \times 1] \\ &= 25 \times {}^4P_1 (10 + 1) = 25 \times {}^4P_1 \times 11 = 1100 \end{aligned}$$

$$\text{অনুরূপভাবে, তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি} = 25 \times {}^4P_2 \times 111 = 25 \times 12 \times 111 = 33300$$

$$\text{চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি} = 25 \times {}^4P_3 \times 1111 = 25 \times 24 \times 1111 = 666600$$

$$\text{পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার সমষ্টি} = 25 \times {}^4P_4 \times 11111 = 25 \times 24 \times 11111 = 6666600$$

$$\text{নির্ণয় সমষ্টি} = 25 + 1100 + 33300 + 666600 + 6666600 = 7367625$$

$$[\text{বি.দ্র. নির্ণয় সমষ্টি} = (1 + 3 + 5 + 7 + 9)(1 + 11 \times {}^4P_1 + 111 \times {}^4P_2 + 1111 \times {}^4P_3 + 11111 \times {}^4P_4)]$$

প্রশ্নমালা VI B

1(a) Solⁿ : 26টি বর্ণ হতে প্রতিবার 5টি বর্ণ নিয়ে শব্দ গঠন করা যায় ${}^{26}P_5 = 7893600$ টি । ∴ Ans. A

(b) Solⁿ : (i) 8 জন মেয়ে প্রথক প্রথক ভাবে বৃত্তাকারে দাঁড়াতে পারবে $(8 - 1)! = 5040$ উপায়ে।

(ii) 8 টি ভিন্ন ধরনের মুক্ত একটি ব্যানে লাগিয়ে একটি হার তৈরি করা যেতে পারে $\frac{(8 - 1)!}{2} = 2520$ উপায়ে।

(iii) 4টি ডাকবক্সে 5টি চিঠি ফেলা যায় $= 4^5 = 1024$ উপায়ে। Ans. A

- (c) $Sol^n : \frac{10!}{2!} = 1814400.$
- (d) $Sol^n : \text{অঙ্গুলির সমষ্টি} \times (4-1)! \times 4 \text{ সংখ্যক } 1 \text{ দ্বারা গঠিত সংখ্যা} = (1+2+3+4) \times 3! \times 1111 \\ = 10 \times 6 \times 1111 = 66660$
- (e) $Sol^n : \text{উপরের সরঙ্গলি তথ্য সত্য} \therefore \text{Ans. D.}$
- (f) $Sol^n : {}^n P_3 + {}^n C_3 = 70 \Rightarrow {}^n C_3 \times 3! + {}^n C_3 = 70 \Rightarrow 7. {}^n C_3 = 70 \Rightarrow {}^n C_3 = 10 = {}^5 C_3 \quad n = 5$
- (g) $Sol^n : {}^{5-2} C_3 + {}^{5-2} C_{3-1} + {}^{5-2} C_{3-2} = {}^3 C_3 + {}^3 C_2 + {}^3 C_1 = 1 + 3 + 3 = 7$
- (h) $Sol^n : {}^n C_r + {}^n C_{r-1} = {}^{n+1} C_r \therefore \text{Ans. A.}$
- (i) $Sol^n : \text{প্রদত্ত শব্দে } 2 \text{ টি সহ ব্যঙ্গন বর্ণ আছে } 6 \text{ টি। নির্ণেয় উপায় সংখ্যা} = \frac{6!}{2!} - 1 = 360 - 1 = 359$
 Ans. B
- (j) $Sol^n : \text{সংখ্যা গঠন করা যায় } 4 \times 10^7 = 40000000 \text{ সংখ্যক} \quad \text{Ans. D}$
- (k) $Sol^n : {}^n C_r + {}^n C_{r-1} = {}^{n+1} C_r \quad \text{Ans. B}$
- (l) $Sol^n : \text{'PARALLEL' শব্দটির বর্ণগুলি থেকে অন্তত একটি বর্ণ বাছাই করা যায়} (3+1)(2+1)2^3 - 1$
 উপায়ে | Ans. B
2. (a) দেওয়া আছে, ${}^{2n} C_r = {}^{2n} C_{r+2} \Rightarrow r+r+2=2n \quad [{}^n C_x = {}^n C_y \text{ হলে}, x+y=n]$
 $\Rightarrow 2r=2(n-1) \quad \therefore r=n-1 \text{ (Ans.)}$
- (b) দেওয়া আছে, ${}^n C_r : {}^n C_{r+1} : {}^n C_{r+2} = 1 : 2 : 3$
- ১ম এবং ২য় অনুপাত হতে আমরা পাই, ${}^n C_r : {}^n C_{r+1} = 1 : 2 \Rightarrow \frac{{}^n C_r}{{}^n C_{r+1}} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot {}^n C_r = {}^n C_{r+1}$
 $\Rightarrow 2 \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} \Rightarrow 2 \frac{1}{r!(n-r)(n-r-1)!} = \frac{1}{(r+1)r!(n-r-1)!}$
 $\Rightarrow \frac{2}{n-r} = \frac{1}{r+1} \Rightarrow n-r=2r+2 \Rightarrow n=3r+2 \dots\dots\dots(1)$
- ২য় এবং শেষ অনুপাত হতে আমরা পাই, ${}^n C_{r+1} : {}^n C_{r+2} = 2 : 3 \Rightarrow 3 \cdot {}^n C_{r+1} = 2 \cdot {}^n C_{r+2}$
 $\Rightarrow 3 \cdot \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} = 2 \cdot \frac{n!}{(r+2)!(n-r-2)!}$
 $\Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{(r+1)!(n-r-1)!(n-r-2)!} = 2 \cdot \frac{1}{(r+2)!(r+1)!(n-r-2)!} \Rightarrow \frac{3}{n-r-1} = \frac{2}{r+2}$
 $\Rightarrow 2n-2r-2=3r+6 \Rightarrow 2n=5r+8 \Rightarrow 2(3r+2)=5r+8 \quad [(1) \text{ দ্বারা}]$
 $\Rightarrow 6r+4=5r+8 \Rightarrow r=4$
 (1) হতে আমরা পাই, $n=3r+2=14 \quad \therefore r=4, n=14 \text{ (Ans.)}$
- (c) দেখাও যে, ${}^n C_r = {}^{n-2} C_r + 2 \cdot {}^{n-2} C_{r-1} + {}^{n-2} C_{r-2}$, যখন $n > r > 2$:

$$\begin{aligned}
 \text{প্রমাণ : } & {}^{n-2}C_r + 2 \cdot {}^{n-2}C_{r-1} + {}^{n-2}C_{r-2} = ({}^{n-2}C_r + {}^{n-2}C_{r-1}) + ({}^{n-2}C_{r-1} + {}^{n-2}C_{r-2}) \\
 & = {}^{n-2+1}C_r + {}^{n-2+1}C_{r-1} = {}^{n-1}C_r + {}^{n-1}C_{r-1} \quad [{}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r] \\
 & = {}^{n-1+1}C_r = {}^nC_r \\
 & {}^nC_r = {}^{n-2}C_r + 2 \cdot {}^{n-2}C_{r-1} + {}^{n-2}C_{r-2}
 \end{aligned}$$

(d) দেখাও যে, ${}^{n+2}C_r = {}^nC_r + 2 \cdot {}^nC_{r-1} + {}^nC_{r-2}$, যখন $n > r > 2$.

$$\begin{aligned}
 \text{প্রমাণ : } & {}^nC_r + 2 \cdot {}^nC_{r-1} + {}^nC_{r-2} = ({}^nC_r + {}^nC_{r-1}) + ({}^nC_{r-1} + {}^nC_{r-2}) \\
 & = {}^{n+1}C_r + {}^{n+1}C_{r-1} = {}^{n+1+1}C_r \quad [{}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r] \\
 & {}^{n+2}C_r = {}^nC_r + 2 \cdot {}^nC_{r-1} + {}^nC_{r-2}
 \end{aligned}$$

3. (a) 'LOGARITHMS' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে প্রতিবারে 3টি ব্যঙ্গনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ কর প্রকারে বাছাই করা যায় ?
সমাধান : 'LOGARITHMS' শব্দটিতে মোট 10টি বিভিন্ন বর্ণ আছে যাদের 7টি ব্যঙ্গনবর্ণ এবং 3টি স্বরবর্ণ ।

$$7\text{টি ব্যঙ্গনবর্ণ থেকে প্রতিবারে 3টি } {}^7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35 \text{ উপায়ে এবং 3টি স্বরবর্ণ থেকে প্রতিবারে 2টি } {}^3C_2 = 3 \text{ উপায়ে বাছাই করা যায়। অতএব, প্রতিবারে 3টি ব্যঙ্গনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ বাছাই সংখ্যা = } 35 \times 3 = 105$$

(b) 'DEGREE' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে প্রতিবারে 4টি বর্ণ নিয়ে কর প্রকারে বাছাই করা যেতে পারে ?

[য. '০৭, '১৩; রা. '১১]

সমাধান : 'DEGREE' শব্দটিতে 3টি E সহ মোট 6টি বর্ণ আছে ।

$$\begin{aligned}
 \text{সবগুলোই বর্ণ ভিন্ন এবৃপ্তি বাছাই সংখ্যা = } {}^4C_4 = 1 & \quad [\because \text{ভিন্ন বর্ণ } 4\text{টি}] \\
 2 \text{টি E এবং অন্য } 2 \text{টি ভিন্ন এবৃপ্তি বাছাই সংখ্যা = } {}^3C_2 = {}^3C_1 = 3 & \quad [\text{E ব্যতীত ভিন্ন বর্ণ } 3\text{টি}]
 \end{aligned}$$

$$3\text{টি E এবং আরেকটি অন্য বর্ণ এবৃপ্তি বাছাই সংখ্যা = } {}^3C_1 = 3$$

$$\text{নির্ণেয় বাছাই সংখ্যা = } 1 + 3 + 3 = 7 \text{ (Ans.)}$$

4. (a) 4 জন ডন্ড মহিলাসহ 10 ব্যক্তির মধ্য থেকে 5 জনের একটি কমিটি কর রকমে গঠন করা যেতে পারে, যাতে অস্তিত একজন ডন্ড মহিলা থাকবে ?

[য. '০২; মা.রো. '১৩]

সমাধান : 5 জনের কমিটি নিম্নরূপে গঠন করা যায় -

<u>ডন্ড মহিলা (4)</u>		<u>অন্যান্য (6)</u>	<u>কমিটি গঠনের উপায়</u>
1	4	${}^4C_1 \times {}^6C_4 = 4 \times 15 = 60$	
2	3	${}^4C_2 \times {}^6C_3 = 6 \times 20 = 120$	
3	2	${}^4C_3 \times {}^6C_2 = 4 \times 15 = 60$	
4	1	${}^4C_4 \times {}^6C_1 = 1 \times 6 = 6$	

$$\text{কমিটি গঠনের মোট উপায় = } 60 + 120 + 60 + 6 = 246$$

$$\begin{aligned}
 [\text{বি. দ্র. কমিটি গঠনের মোট উপায়} &= \sum_{i=1}^4 {}^4C_i \times {}^6C_{5-i} = {}^4C_1 \times {}^6C_4 + {}^4C_2 \times {}^6C_3 + {}^4C_3 \times {}^6C_2 \\
 &+ {}^4C_4 \times {}^6C_1 = 246]
 \end{aligned}$$

4. (b) 6 জন বিজ্ঞান ও 4 জন কলা বিভাগের ছাত্র থেকে 6 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে। বিজ্ঞানের ছাত্রদেরকে সংখ্যা গরিষ্ঠতা দিয়ে কর প্রকারে কমিটি গঠন করা যাবে ?

[য. '০৬, '১২; কু. '০৯; ব.চ. '১৩]

সমাধান : নিম্নরূপে 6 জনের কমিটি গঠন করা যেতে পারে -

বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র (6)	কলা বিভাগের ছাত্র (4)	কমিটি গঠনের উপায়
6 0	${}^6C_0 = 1$	
5 1	${}^6C_5 \times {}^4C_1 = 6 \times 4 = 24$	
4 2	${}^6C_4 \times {}^4C_2 = 15 \times 6 = 90$	

(1 + 24 + 90) অর্থাৎ, 115 প্রকারে কমিটি গঠন করা যাবে।

- (c) 5 জন বিজ্ঞান ও 3 জন কলা বিভাগের ছাত্রের মধ্য থেকে 4 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে। যদি প্রত্যেক কমিটিতে (i) অল্পতত একজন বিজ্ঞানের ছাত্র থাকে, (ii) অল্পতত একজন বিজ্ঞান ও একজন কলা বিভাগের ছাত্র থাকে, তাহলে কত প্রকারে কমিটি গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান : (i) নিম্নরূপে 4 জনের কমিটি গঠন করা যেতে পারে –

বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র (5)	কলা বিভাগের ছাত্র (3)	কমিটি গঠনের উপায়
1 3	${}^5C_1 \times {}^3C_3 = 5 \times 1 = 15$	
2 2	${}^5C_2 \times {}^3C_2 = 10 \times 3 = 30$	3
1	${}^5C_3 \times {}^3C_1 = 10 \times 3 = 30$	
4	0	${}^5C_4 \times {}^3C_0 = 5 \times 1 = 5$

নির্ণেয় মোট সংখ্যা = 5 + 30 + 30 + 5 = 70

(ii) নিম্নরূপে 4 জনের কমিটি গঠন করা যেতে পারে –

বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র (5)	কলা বিভাগের ছাত্র (3)	কমিটি গঠনের উপায়
1 3	${}^5C_1 \times {}^3C_3 = 5 \times 1 = 15$	
2 2	${}^5C_2 \times {}^3C_2 = 10 \times 3 = 30$	3
1	${}^5C_3 \times {}^3C_1 = 10 \times 3 = 30$	

নির্ণেয় মোট সংখ্যা = 5 + 30 + 30 = 65

- (d) 15 জন ক্রিকেট খেলোয়াড়ের মধ্যে 5 জন বোলার এবং 3 জন ইউকেট রক্ষক। এদের মধ্য হতে 11 জন খেলোয়াড়ের একটি দল কত প্রকারে বাছাই করা যেতে পারে যাতে অল্পতত 8 জন বোলার ও 2 জন ইউকেট রক্ষক থাকে? [রা.:’18]

সমাধান : 11 জনের একটি দল নিম্নরূপে বাছাই করা যায় –

বোলার (5)	ইউকেট রক্ষক (3)	অন্যান্য (7)	দল বাছাই করার উপায় সংখ্যা
4 2	5	${}^5C_4 \times {}^3C_2 \times {}^7C_5 = 5 \times 3 \times 21 = 315$	
4 3	4	${}^5C_4 \times {}^3C_3 \times {}^7C_4 = 5 \times 1 \times 35 = 175$	
5 2	4	${}^5C_5 \times {}^3C_2 \times {}^7C_4 = 1 \times 3 \times 35 = 105$	
5 3	3	${}^5C_5 \times {}^3C_3 \times {}^7C_3 = 1 \times 1 \times 35 = 35$	

নির্ণেয় মোট সংখ্যা = 315 + 175 + 105 + 35 = 630

5. (a) প্রতি গ্রুপে 5টি প্রশ্ন আছে এমন দুইটি গ্রুপে বিস্তৃত 10 টি প্রশ্ন থেকে একজন পরীক্ষার্থীকে 6 টি প্রশ্নের উভয় দিতে হবে এবং তাকে কোন গ্রুপ থেকে 4 টির বেশি উভয় দিতে দেয়া হবে না। সে কত প্রকারে প্রশ্নগুলো বাছাই করতে পারবে?

[য. ’03]

সমাধান : একজন পরীক্ষার্থী 6টি প্রশ্ন নিম্নরূপে বাছাই করতে পারবে

১য় গ্রুপ (5) ২য় গ্রুপ (5) প্রশ্ন বাছাই করার উপায়

$$\begin{array}{ccc} 2 & 4 & {}^5C_2 \times {}^5C_4 = 10 \times 5 = 50 \\ 3 & 3 & {}^5C_3 \times {}^5C_3 = 10 \times 10 = 100 \\ 4 & 2 & {}^5C_4 \times {}^5C_2 = 5 \times 10 = 50 \end{array}$$

$$\text{নির্ণেয় মোট সংখ্যা} = 50 + 100 + 50 = 200$$

(b) একজন পরীক্ষার্থীকে 12 টি প্রশ্ন থেকে 6 টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে। তাকে প্রথম 5 টি থেকে ঠিক 4 টি প্রশ্ন বাছাই করতে হবে। সে কত প্রকারে প্রশ্নগুলো বাছাই করতে পারবে? [ব.'০২, '০৬, '০৭]

সমাধান : সে প্রথম 5টি প্রশ্ন হতে 4টি ${}^5C_4 = 5$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 7টি প্রশ্ন থেকে 2টি ${}^7C_2 = 21$ উপায়ে বাছাই করতে পারবে।

$$\text{নির্ণেয় মোট সংখ্যা} = 5 \times 21 = 105 \text{ (Ans.)}$$

(c) একজন পরীক্ষার্থীকে 12 টি প্রশ্ন হতে 7 টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে। এদের মধ্যে তাকে প্রথম পাঁচটি হতে ঠিক চারটি প্রশ্ন বাছাই করতে হবে। সে কত প্রকারে 7 টি প্রশ্ন বাছাই করতে পারবে? [সি.'০১]

সমাধান : পরীক্ষার্থী প্রথম 5টি প্রশ্ন হতে 4টি ${}^5C_4 = 5$ প্রকারে এবং শেষের 7টি প্রশ্ন হতে 3টি ${}^7C_3 = 35$ প্রকারে বাছাই করতে পারবে।

$$\text{সে } 5 \times 35 = 175 \text{ প্রকারে } 7 \text{ টি প্রশ্ন বাছাই করতে পারবে।}$$

6. (a) সাতটি সরল রেখার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 সে.মি। দেখাও যে, একটি চতুর্ভুজ গঠন করার জন্য চারটি সরল রেখা যত প্রকারে বাছাই করা যায় তার সংখ্যা 32.

[বা. '০৮, '১০; চ. '০৬, '০৮, '১২; সি. '০৮, '১২; দি. '০৯; ব. '০৮, '১০; ঘ. '০৯]

সমাধান : 7টি সরল রেখা হতে 4টি সরল রেখা বাছাই করার উপায় = ${}^7C_4 = 35$

কিন্তু বাছাই করা 4টি সরল রেখার দৈর্ঘ্যের সেট $\{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3, 7\}$ এবং $\{1, 2, 4, 7\}$ হলে, তাদের ক্ষুদ্রতম সরল রেখা তিনটির দৈর্ঘ্যের যোগফল 4ৰ্থ সরল রেখার দৈর্ঘ্যের বৃহত্তম নয় বলে তাদের দ্বারা কোন চতুর্ভুজ গঠন করা সম্ভব নয়। \therefore নির্ণেয় চতুর্ভুজ গঠন করা সংখ্যা = $35 - 3 = 32$

(b) দেখাও যে, n বাহু বিশিষ্ট একটি বহুভুজের $\frac{1}{2}n(n - 3)$ সংখ্যক কর্ণ আছে। আরও দেখাও যে, এর কৌণিক বিদ্যুগুলোর সংযোগ রেখা দ্বারা $\frac{1}{6}n(n - 1)(n - 2)$ সংখ্যক বিভিন্ন ত্রিভুজ গঠন করা যেতে পারে। [ঢ. '০৫]

সমাধান : প্রথম অংশ : n বাহু বিশিষ্ট একটি বহুভুজের n টি কৌণিক বিদ্যু আছে এবং দুই বিদ্যুর সংযোগে একটি সরলরেখা উৎপন্ন হয়। $\therefore n$ টি কৌণিক বিদ্যু দ্বারা গঠিত সরল রেখার সংখ্যা = ${}^nC_2 = \frac{n(n - 1)}{2}$

কিন্তু এদের মধ্যে, বহুভুজের n টি সীমান্ত বাহু কর্ণ নয়।

$$\text{কর্ণের সংখ্যা} = \frac{n(n - 1)}{2} - n = \frac{1}{2}n(n - 1 - 2) = \frac{1}{2}n(n - 3)$$

যিতীব্য অংশ : অসমরেখ তিনটি বিদ্যুর সংযোগ রেখা দ্বারা একটি ত্রিভুজ গঠিত হয়।

$$n \text{টি কৌণিক বিদ্যু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের সংখ্যা} = {}^nC_3 = \frac{n(n - 1)(n - 2)}{3!} = \frac{1}{6}n(n - 1)(n - 2)$$

n বাহু বিশিষ্ট একটি বহুভুজের $\frac{1}{2}n(n - 3)$ সংখ্যক কর্ণ আছে এবং $\frac{1}{6}n(n - 1)(n - 2)$ সংখ্যক সংখ্যক ত্রিভুজ গঠন করা যেতে পারে।

7. (a) 10 খানা ও 12 খানা বই এর দুইজন মালিক কতভাবে দুইখানার পরিবর্তে দুইখানা বই পরস্পরের মধ্যে বিনিময় করতে পারবে?

সমাধান : 10 খানা বই এর মালিক দুইখানা বই $^{10}C_2$ উপায়ে 12 খানা বই এর মালিককে দিতে পারবে এবং 12 খানা বই এর মালিক দুইখানা বই $^{12}C_2$ উপায়ে 10 খানা বই এর মালিককে দিতে পারবে।

তারা $^{10}C_2 \times ^{12}C_2 = 2970$ উপায়ে দুইখানার পরিবর্তে দুইখানা বই পরস্পরের মধ্যে বিনিময় করতে পারবে।

(b) 12 খানা পুস্তকের মধ্যে 5 খানা কত প্রকারে বাছাই করা যায় (i) যাতে দুইখানা নির্দিষ্ট পুস্তক সর্বদাই থাকবে এবং (ii) যাতে দুইখানা নির্দিষ্ট পুস্তক সর্বদাই বাদ থাকবে?

সমাধান : (i) দুইখানা নির্দিষ্ট পুস্তক সর্বদাই অল্পরুচি রেখে অবশিষ্ট $(12 - 2)$ অর্থাৎ, 10 খানা পুস্তক হতে বাকি $(5 - 2)$ অর্থাৎ, 3 খানা পুস্তক বাছাই করা যাবে $^{10}C_3 = 120$ উপায়ে। সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যা = 120

(ii) দুইখানা নির্দিষ্ট পুস্তক সর্বদাই বাদ দিয়ে অবশিষ্ট $(12 - 2)$ অর্থাৎ, 10 খানা পুস্তক হতে 5 খানা পুস্তক বাছাই করা যাবে $^{10}C_5 = 252$ উপায়ে। সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যা = 252

(c) দুইজনকে কখনও একত্রে না নিয়ে, 9 জন ব্যক্তি হতে 5 জনকে একত্রে কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান : বিশেষ দুইজনের কাউকে না নিয়ে 5 জনকে একত্রে বাছাই করার উপায় = $^{9-2}C_5 = ^7C_5 = 21$

বিশেষ দুইজনের এক জন এবং অন্য 7 জনের 4 জনকে নিয়ে বাছাই করার উপায় = $^2C_1 \times ^7C_4 = 2 \times 35 = 70$

নির্ণেয় সংখ্যা = $21 + 70 = 91$

8. (a) 1 হতে 30 সংখ্যাগুলোর যে তিনটির সমষ্টি জোড় তাদেরকে কত ভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান : 1 হতে 30 পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর 15টি জোড় এবং 15টি বিজোড়। তিনটি জোড় সংখ্যার যোগফল একটি জোড় সংখ্যা এবং 15টি জোড় সংখ্যার যোগফল একটি জোড় সংখ্যা।

15টি জোড় সংখ্যা হতে 3টি জোড় সংখ্যা $^{15}C_3 = 455$ উপায়ে বাছাই করা যায় যাদের সমষ্টি একটি জোড় সংখ্যা।

আবার, 15টি বিজোড় সংখ্যা হতে 2টি বিজোড় সংখ্যা $^{15}C_2 = 105$ উপায়ে এবং 15টি জোড় সংখ্যা হতে 1টি জোড় সংখ্যা $^{15}C_1 = 15$ উপায়ে বাছাই করা যায়

1 হতে 30 পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর দুইটি বিজোড় ও একটি জোড় সংখ্যা $105 \times 15 = 1575$ উপায়ে বাছাই করা যায় যাদের সমষ্টি একটি জোড় সংখ্যা।

$(455 + 1575)$ বা, 2030 উপায়ে বাছাই করা যায়।

(b) 3টি শূন্য পদের জন্য 10 জন প্রার্থী আছে। একজন নির্বাচক তিনি বা তিনের কম প্রথীকে কতভাবে নির্বাচন করতে পারেন?

[ঢ. '০১]

সমাধান : একজন নির্বাচক নিম্নরূপে নির্বাচন করতে পারেন –

তিনি 3 জন প্রার্থীকে নির্বাচন করতে পারেন $^{10}C_3$ বা, 120 উপায়ে।

তিনি 2 জন প্রার্থীকে নির্বাচন করতে পারেন $^{10}C_2$ বা, 45 উপায়ে।

তিনি 1 জন প্রার্থীকে নির্বাচন করতে পারেন $^{10}C_1$ বা, 10 উপায়ে।

নির্ণেয় সংখ্যা = $120 + 45 + 10 = 175$ (Ans)

(c) কোন নির্বাচনে 5 জন পদপ্রার্থী আছেন, তার মধ্যে 3 জনকে নির্বাচন করতে হবে। একজন ভোটার যত ইচ্ছা ভোট দিতে পারেন, কিন্তু যতজন নির্বাচিত হবেন তার চেয়ে বেশি ভোট দিতে পারবেন না। তিনি মোট কতভাবে ভোট দিতে পারবেন?

সমাধান : একজন ভোটার নিম্নরূপে ভোট দিতে পারেন –

তিনি 1 জন প্রার্থীকে ভোট দিতে পারেন 5C_1 বা, 5 উপায়ে।

তিনি 2 জন প্রার্থীকে ভোট দিতে পারেন 5C_2 বা, 10 উপায়ে।

তিনি ৩ জন প্রাথীকে ভোট দিতে পারেন 5C_3 বা, 10 উপায়ে ।

$$\text{নির্ণেয় সংখ্যা} = 5 + 10 + 10 = 25 \text{ (Ans)}$$

৯. (a) 277200 সংখ্যাটির উৎপাদকের সংখ্যা নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান : } 277200 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 11 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^1 \times 11^1$$

$$277200 \text{ এর উৎপাদকের সংখ্যা} = (4+1)(2+1)(2+1)2^2 - 1 = 179 \text{ (Ans.)}$$

(b) "Daddy did a deadly deed" বাক্যটির বর্ণগুলো হতে যতগুলো সমাবেশ গঠন করা যাবে তার সংখ্যা নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান : } "Daddy did a deadly deed" \text{ এ আছে 9 টি d, 3 টি a, 3 টি e, 2 টি y, 1 টি l \text{ এবং 1 টি i}$$

$$\text{নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা} = (9+1)(3+1)(3+1)(2+1)2^2 - 1 = 1920 - 1 = 1919$$

(c) কোন পরীক্ষায় কৃতকার্য হতে হলে ৬টি বিষয়ের প্রতিটিতে ন্যূনতম নম্বর পেতে হয়। একজন ছাত্র কত রকমে অকৃতকার্য হতে পারে?

সমাধান : একজন ছাত্র এক, দুই, তিন, চার, পাঁচ বা ছয় বিষয়ে অকৃতকার্য হতে পারে।

$$\begin{aligned} \text{ছাত্রটির মোট অকৃতকার্য হওয়ার উপায়} &= {}^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6 \\ &= 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63 \end{aligned}$$

(d) দেখাও যে, প্রতিটি বিকল্পসহ ৪টি প্রশ্ন থেকে একজন পরীক্ষার্থী একটি অথবা একাধিক প্রশ্ন $3^8 - 1$ উপায়ে বাছাই করতে পারে।

প্রমাণ : যেহেতু প্রতিটি প্রশ্নের বিকল্প প্রশ্ন দেওয়া আছে, প্রতিটি প্রশ্নকে তিন উপায়ে নিষ্পত্তি করা যায়— প্রশ্নটিকে গ্রহণ করে, এর বিকল্প প্রশ্নকে গ্রহণ করে অথবা উভয় প্রশ্নকে গ্রহণ না করে। অতএব, প্রদত্ত ৪টি প্রশ্ন নিষ্পত্তি করা যায় $3^8 - 1$ উপায়ে। কিন্তু এর ভিত্তির বিকল্পসহ ৪টি প্রশ্নের একটিও নামেয়ার উপায়ও অন্তর্ভুক্ত।

$$\text{নির্ণেয় মোট সংখ্যা} = 3^8 - 1$$

10. একটি OMR সীটের একটি সারিতে 20টি ছোট বৃত্ত আছে। পেপিল ধারা কমপক্ষে একটি বৃত্ত কতভাবে ভরাট করা যায়?

$$\text{সমাধান : } 20\text{টি ছোট বৃত্তের কমপক্ষে একটি বৃত্ত ভরাট করার উপায়} = 2^{20} - 1 = 1048575, [2^n - 1 \text{ সূত্রের সাহায্যে}]$$

11. (a) 21টি ভিন্ন ব্যঙ্গন বর্ণ এবং 5টি ভিন্ন স্বরবর্ণ হতে প্রতিবার কমপক্ষে 1টি ব্যঙ্গন বর্ণ এবং কমপক্ষে 2টি স্বরবর্ণ কতভাবে বাছাই করা যায়?

$$\text{সমাধান : } 21\text{টি ভিন্ন ব্যঙ্গন বর্ণ হতে কমপক্ষে 1টি বাছাই করা যায় } (2^{21} - 1) = 2097151 \text{ উপায়ে।}$$

$$5\text{টি ভিন্ন ব্যঙ্গন বর্ণ হতে কমপক্ষে 2টি বাছাই করা যায় } \sum_{r=2}^5 {}^5C_r = {}^5C_2 + {}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5 = 26 \text{ উপায়ে।}$$

$$\text{নির্ণেয় বাছাই সংখ্যা} = 2097151 \times 26 = 54525926$$

(b) 3টি নারিকেল, 4টি আপেল, 2টি কমলা লেবু হতে প্রত্যেক প্রকার ফলের কমপক্ষে একটি করে ফল কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান : 3টি নারিকেলের কমপক্ষে একটি $(2^3 - 1)$ উপায়ে, 4টি আপেলের কমপক্ষে একটি $(2^4 - 1)$ উপায়ে এবং 2টি কমলা লেবুর কমপক্ষে একটি $(2^2 - 1)$ উপায়ে বাছাই করা যায়।

$$\text{তিনি প্রকারের কমপক্ষে একটি করে ফল বাছাই করার উপায়} = (2^3 - 1)(2^4 - 1)(2^2 - 1) = 315$$

12. (a) 9 ব্যক্তির একটি দল দুইটি যানবাহনে ভ্রমন করবে, যার একটিতে সাত জনের বেশি এবং অন্যটিতে চার জনের বেশি ধরে না। দলটি কত প্রকারে ভ্রমণ করতে পারবে?

[চ.'০৯; ঢ.'১১,'১৮; রা.'০৭; সি.'১০,'১৮; ব.'০৯; কু.'১০; ঘ.'১১; দি.'১৮]

সমাধান : নিম্নরূপে দলটি অমণ করতে পারবে -

১ম যানবাহন	২য় যানবাহন	অমণ করার উপায়
7	2	${}^9C_7 \times {}^2C_2 = 36 \times 1 = 36$
6	3	${}^9C_6 \times {}^3C_3 = 6 \times 1 = 84$
5	4	${}^9C_5 \times {}^4C_4 = 15 \times 1 = 126$

(36 + 84 + 126) বা , 246 উপায়ে দলটি অমণ করতে পারবে ।

[বি.দ্র.: অমণ করার উপায় সংখ্যা (${}^9C_7 + {}^9C_6 + {}^9C_5$) বা, (${}^9C_4 + {}^9C_3 + {}^9C_2$)]

(b) 20 ব্যক্তির একটি দল দুইটি যানবাহনে অমণ করবে । প্রতিটি যানবাহনের ধারণ ক্ষমতা 20 । দলটি কত প্রকারে অমণ করতে পারবে ?

$$\text{সমাধান : দলটির দুইটি যানবাহনে অমণ করার উপায়} = \sum_{r=0}^{20} {}^{20}C_r \times {}^{20-r}C_{20-r} \quad [\quad {}^nC_n = 1] \\ = \sum_{r=0}^{20} {}^{20}C_r = 2^{20} = 1048576$$

বিকল্প পদ্ধতি : প্রতিজন দুইটি যানবাহনের যেকোন একটিতে অমণ করতে পারবে ।

প্রতিজনের অমণ করার উপায় = 2

20 ব্যক্তির দলটি দুইটি যানবাহনে অমণ করতে পারবে 2^{20} বা, 1048576 উপায়ে ।

(c) 10 জন লোক দুইটি শয়ন কক্ষে কত রকমভাবে রাত্রি যাপন করতে পারবে তা নির্ণয় কর ।

সমাধান : প্রতিজন লোক দুইটি শয়ন কক্ষের যেকোন একটিতে রাত্রি যাপন করতে পারবে ।

প্রতিজনের রাত্রি যাপনের উপায় = 2

10 জন লোক দুইটি শয়ন কক্ষে রাত্রি যাপন করতে পারবে 2^{10} বা, 1024 উপায়ে ।

(d) A , B ও C কে কতভাবে 12 খানা বই দেয়া যাবে যেন A ও B একত্রে C এর দিগুণ পায় ?

সমাধান : মনে করি, C বই পায় x টি । তাহলে, A ও B একত্রে বই পায় $2x$ টি

$$x + 2x = 12 \Rightarrow x = 4$$

4 খানা বই C পাবে এবং অবশিষ্ট $(12 - 4)$ বা, 8 খানা বই A ও B পাবে ।

$$12 \text{ খানা বই হতে } 4 \text{ খানা } C \text{ কে দেওয়া যায় {}^{12}C_4 = 495 \text{ উপায়ে } \text{এবং অবশিষ্ট } 8 \text{ খানা বই A ও B কে দেওয়া} \\ \text{যায় } \sum_{r=0}^8 {}^8C_r \times {}^{8-r}C_{8-r} = \sum_{r=0}^8 {}^8C_r = 2^8 = 256 \cdot \text{উপায়ে}, [\quad {}^nC_n = 1] ।$$

A , B ও C কে 12 খানা বই দেয়া যাবে 495×256 বা 126720 উপায়ে ।

13. (a) 15 জন ছাত্রের মধ্য থেকে প্রতি কমিটিতে 5 জন হিসাবে মোট 3টি কমিটি গঠন করতে হবে । কত উপায়ে কমিটিগুলো গঠন করা যাবে ?

[প্র.ভ.প.'০৫]

সমাধান : 15 জন ছাত্রের মধ্য থেকে প্রতি কমিটিতে 5 জন হিসাবে 3টি কমিটি গঠন করা যায় $\frac{15!}{3!(5!)^3}$ উপায়ে ।

(b) কত প্রকারে 52 খানা তাস 4 ব্যক্তির মধ্যে সমানভাবে ভাগ করা যেতে পারে ?

সমাধান : 52 খানা তাস 4 ব্যক্তির মধ্যে সমানভাবে ভাগ করা যায় $\frac{52!}{(13!)^4}$ উপায়ে ।

[সূত্র প্রয়োগ করে ।]

[চ.'০৯; ঢ.'১১,'১৮; রা.'০৭; সি.'১০,'১৮; ব.'০৯; কু.'১০; য.'১১; দি.'১৮]

সমাধান : নিম্নরূপে দলটি ভ্রমণ করতে পারবে -

১য় যানবাহন	২য় যানবাহন	ভ্রমণ করার উপায়
7	2	${}^9C_7 \times {}^2C_2 = 36 \times 1 = 36$
6	3	${}^9C_6 \times {}^3C_3 = 6 \times 1 = 84$
5	4	${}^9C_5 \times {}^4C_4 = 15 \times 1 = 126$

(36 + 84 + 126) বা , 246 উপায়ে দলটি ভ্রমণ করতে পারবে ।

[বি. দ্র.: ভ্রমণ করার উপায় সংখ্যা (${}^9C_7 + {}^9C_6 + {}^9C_5$) বা, (${}^9C_4 + {}^9C_3 + {}^9C_2$)]

(b) 20 ব্যক্তির একটি দল দুইটি যানবাহনে ভ্রমণ করবে । প্রতিটি যানবাহনের ধারণ ক্ষমতা 20 । দলটি কত প্রকারে ভ্রমণ করতে পারবে?

সমাধান : দলটির দুইটি যানবাহনে ভ্রমণ করার উপায় = $\sum_{r=0}^{20} {}^{20}C_r \times {}^{20-r}C_{20-r}$ [${}^nC_n = 1$]

$$= \sum_{r=0}^{20} {}^{20}C_r = 2^{20} = 1048576$$

বিকল্প পদ্ধতি : প্রতিজন দুইটি যানবাহনের যেকোন একটিতে ভ্রমণ করতে পারবে ।

প্রতিজনের ভ্রমণ করার উপায় = 2

20 ব্যক্তির দলটি দুইটি যানবাহনে ভ্রমণ করতে পারবে 2^{20} বা, 1048576 উপায়ে ।

(c) 10 জন লোক দুইটি শয়ন কক্ষে কত রাকমতাবে রাত্রি যাপন করতে পারবে তা নির্ণয় কর ।

সমাধান : প্রতিজন লোক দুইটি শয়ন কক্ষের যেকোন একটিতে রাত্রি যাপন করতে পারবে ।

প্রতিজনের রাত্রি যাপনের উপায় = 2

10 জন লোক দুইটি শয়ন কক্ষে রাত্রি যাপন করতে পারবে 2^{10} বা, 1024 উপায়ে ।

(d) A , B ও C কে কতভাবে 12 খানা বই দেয়া যাবে যেন A ও B একত্রে C এর দিগুণ পায়?

সমাধান : মনে করি, C বই পায় x টি । তাহলে, A ও B একত্রে বই পায় $2x$ টি

$$x + 2x = 12 \Rightarrow x = 4$$

4 খানা বই C পাবে এবং অবশিষ্ট $(12 - 4)$ বা, 8 খানা বই A ও B পাবে ।

12 খানা বই হতে 4 খানা C কে দেওয়া যায় ${}^{12}C_4 = 495$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 8 খানা বই A ও B কে দেওয়া

$$\text{যায় } \sum_{r=0}^8 {}^8C_r \times {}^{8-r}C_{8-r} = \sum_{r=0}^8 {}^8C_r = 2^8 = 256 \cdot \text{উপায়ে}, [{}^nC_n = 1] ।$$

A , B ও C কে 12 খানা বই দেয়া যাবে 495×256 বা 126720 উপায়ে ।

13. (a) 15 জন ছাত্রের মধ্য থেকে প্রতি কমিটিতে 5 জন হিসাবে মোট 3টি কমিটি গঠন করতে হবে । কত উপায়ে কমিটিগুলো গঠন করা যাবে?

[প্র.ভ.প.'০৫]

সমাধান : 15 জন ছাত্রের মধ্য থেকে প্রতি কমিটিতে 5 জন হিসাবে 3টি কমিটি গঠন করা যায় $\frac{15!}{3!(5!)^3}$ উপায়ে ।

(b) কত প্রকারে 52 খানা তাস 4 ব্যক্তির মধ্যে সমানভাবে ভাগ করা যেতে পারে?

সমাধান : 52 খানা তাস 4 ব্যক্তির মধ্যে সমানভাবে ভাগ করা যায় $\frac{52!}{(13!)^4}$ উপায়ে ।

[সূত্র প্রয়োগ করে ।]

(c). 23 জন খেলোয়াড় থারা 11 সদস্যের দুইটি ক্লিকেট দল করতাবে গঠন করা যায়। 23 জনের মধ্যে দুজন উইকেট কিপিং করতে পারে এবং তাদেরকে দুইটি দলে রেখে করতাবে দুইটি ক্লিকেট দল গঠন করা যায়।

সমাধান : ১ম অংশ : 23 জন খেলোয়াড় হতে 22 জনকে $^{23}C_{22}$ উপায়ে বাছাই করা যায়। আবার 22 জনকে

11 জন করে সমান দুইটি দলে বিভক্ত করা যায় $\frac{22!}{2!(11!)^2}$ উপায়ে।

$$\text{দুইটি ক্লিকেট টিম গঠন করার উপায় = } ^{23}C_{22} \times \frac{22!}{2!(11!)^2} = 23 \times \frac{22!}{2!(11!)^2} = \frac{23!}{2!(11!)^2}$$

২য় অংশ : 21 জন হতে 20 জনকে বাছাই করা যায় $^{21}C_{20}$ উপায়ে। আবার, দুইজন ইউকেট রাফ্ককে দুইটি টিমে নির্দিষ্ট করে 20 জনকে দুইটি সমান ভাগে সেই নির্দিষ্ট টিমে বিভক্ত করা যায় $\frac{20!}{(10!)^2}$ উপায়ে।

$$\text{দুইটি ক্লিকেট টিম গঠন করার উপায় = } ^{21}C_{20} \times \frac{20!}{(10!)^2} = \frac{21!}{20!} \times \frac{20!}{(10!)^2} = \frac{21!}{(10!)^2}$$

(d) 23 জন খেলোয়াড়ের মধ্যে দুইজন উইকেট রাফ্ক। তাদেরকে দুইটি দলে রেখে A ও B দল নামে দুইটি ক্লিকেট দল করতাবে গঠন করা যায় ?

সমাধান : দুইজন উইকেট রাফ্ককে A ও B দলে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে $2! = 2$ উপায়ে।

অবশিষ্ট 21 জন খেলোয়াড় হতে A -দলের জন্য বাকি 10 জনকে বাছাই করা যায় $^{21}C_{10}$ উপায়ে। বাকি 11 জন হতে B -দলের জন্য 10 জনকে বাছাই করা যায় $^{11}C_{10} = 11$ উপায়ে।

$$\begin{aligned} \text{A ও B দল নামে দুইটি ক্লিকেট টিম গঠন করার উপায়} &= 2 \times ^{21}C_{10} \times 11 = 2 \times \frac{21!}{10!11!} \\ &= 2 \times \frac{21!}{(10!)^2} \end{aligned}$$

(e) একটি কম্পানি দুইটি ফ্যাটলিন জন্য 15 জনকে নিয়োগ দিয়েছে। একটি ফ্যাটলিনতে 5 জনকে ও অপরটিতে 10 জনকে করতাবে নিয়োগ দেওয়া যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান : 15 জন হতে একটি ফ্যাটলিনতে 5 জনকে নিয়োগ দেওয়া যাবে $^{15}C_5$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট 10 জনকে অপর ফ্যাটলিনতে $^{10}C_{10}$ উপায়ে নিয়োগ দেওয়া যাবে।

$$\text{নির্ণয় উপায় সংখ্যা} = ^{15}C_5 \times ^{10}C_{10} = \frac{15!}{5 \times 10!} \times 1 = \frac{15!}{5 \times 10!}$$

(f) একটি ক্লিকেট টুর্নামেন্ট- এ 16 টি দল অংশ নেয়। র্যাএকিং- এ শীর্ষ 8 টি দল থেকে দুইটি দল এবং অপর 8 টি দল থেকে দুইটি দল নিয়ে 4 দলের 4 টি গ্রুপ করতাবে গঠন করা যায় তা নির্ণয় কর।

সমাধান : ১ম অংশ : শীর্ষ 8টি দলকে 2টি করে সমান 4টি দলে বিভক্ত করা যায় $\frac{8!}{4!(2!)^4} = 105$ উপায়ে।

পুনরায় , অপর 8টি দলকে 2টি করে সমান 4টি দলে বিভক্ত করা যায় $\frac{8!}{4!(2!)^4} = 105$ উপায়ে।

$$4 \text{ দলের } 4 \text{ টি গ্রুপ গঠন করার উপায়} = 105 \times 105 = 11025$$

২য় অংশ : শীর্ষ 8টি দলকে 2টি করে A , B , C , D নামে 4টি দলে বিভক্ত করা যায় $\frac{8!}{(2!)^4} = 2520$ উপায়ে।

অপৰ ৪টি দলকে ২টি করে A, B, C, D নামে ৪টি দলে বিভক্ত কৱা যায় $\frac{8!}{(2!)^4} = 2520$ উপায়ে।

A B, C, D নামে 4 দলের 4টি গুপ্ত গঠন করার উপায় = $2520 \times 2520 = 6350400$

(g) এক ব্যক্তির ৫টি সিম কার্ড এবং দুইটি করে সিম কার্ড ব্যবহার উপযোগী দুইটি মোবাইল সেট আছে। তিনি তাঁর মোবাইল সেট দুইটিতে কতভাবে 2 টি করে 4 টি সিম কার্ড সম্পর্কিত রাখতে পারেন এবং কতভাবে 1 টি করে 2 টি সিম কার্ড চালু রাখতে পারেন ?

সমাধান : 5 টি সিম কার্ড হতে 4 টি সিম কার্ড ${}^5C_4 = 5$ উপায়ে বেছে নেওয়া যায়। এই বেছে নেওয়া 4 টি সিম কার্ড দুইটি মোবাইল সেটে সমান দুইভাগে ভাগ করা যায় $\frac{4!}{(2!)^2} = \frac{24}{4} = 6$ উপায়ে।

4 টি সিম কার্ড মোবাইল সেট দুইটিতে সংরক্ষিত রাখা যায় $= 5 \times 6 = 30$ উপায়ে।

এখন, একটি মোবাইল সেটের সংরক্ষিত সিম কার্ড দুইটির একটি চালু রাখা যায় 2! উপায়ে এবং অপর মাবাইল সেটের সংরক্ষিত সিম কার্ড দুইটির একটি চালু রাখা যায় 2! উপায়ে।

২ টি সিম কার্ড দুইটি সেটে চালু রাখা যায় $30 \times 2! \times 2! = 120$ উপায়ে।

14. देवया आहे, ${}^{10}P_r = 240$ (1) एव्ह ${}^{10}C_r = 120$ (2)

$$(1) \div (2) \Rightarrow {}^n P_r \div {}^n C_r = 240 \div 120 = 2 \Rightarrow {}^n P_r = 2 \cdot {}^n C_r$$

$$\Rightarrow r! \cdot {}^nC_r = 2 \cdot {}^nC_r \Rightarrow r! = 2 \quad \therefore r = 2 \quad [\quad {}^nP_r = r! \cdot {}^nC_r]$$

$$\text{এখন, } {}^nC_1 = 120 \Rightarrow {}^nC_2 = 120 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = 120 \Rightarrow n^2 - n = 420 \Rightarrow n^2 - n - 420 = 0$$

$$\Rightarrow (n - 16)(n + 15) = 0 \Rightarrow n = 16, -15.$$

কিম্বতু n -এর মান খণ্ডাইক হতে পারেনা। $n = 16$ (Ans.)

15. (a) 21টি তিনি বাঞ্জন বর্ষ এবং 5টি তিনি স্বরবর্ষ হতে প্রতিবার 2টি বাঞ্জন বর্ষ এবং 3টি স্বরবর্ষ নিয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায়?

সমাধান : 21টি ডিল্যু ব্যঞ্জন বর্ণ হতে 2টি ${}^{21}C_2 = 210$ উপায়ে এবং 5টি ডিল্যু স্বরবর্ণ হতে 3টি ${}^5C_3 = 10$ উপায়ে বেছে নেওয়া যায়। এ বেছে নেওয়া 5টি ডিল্যু বর্ণ (2টি ব্যঞ্জন বর্ণ ও 3টি স্বরবর্ণ) দ্বারা $5! = 120$ টি শব্দ গঠন করা যায়। $\therefore 210 \times 10 \times 120 = 252000$ টি শব্দ গঠন করা যায়।

(b) 12টি বিভিন্ন ব্যক্তির বর্ণ এবং 5টি বিভিন্ন স্বরবর্ণ হতে প্রতিবার 3টি ব্যক্তির বর্ণ এবং 2টি স্বরবর্ণ নিয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায়? [চ. ১০]

সমাধান : 12টি ডিম্ব ব্যক্তির বর্ণ হতে 3টি $^{12}C_3 = 220$ উপায়ে এবং 5টি ডিম্ব স্বরবর্ণ হতে 2টি $^5C_2 = 10$ উপায়ে বেছে নেওয়া যায়। এ বেছে নেওয়া 5টি ডিম্ব বর্ণ (2টি ব্যক্তির বর্ণ ও 3টি স্বরবর্ণ) দ্বারা $5! = 120$ টি শব্দ গঠন করা যায়। ∴ $220 \times 10 \times 120 = 264000$ টি শব্দ গঠন করা যায়।

(c) 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলো একবার এবং 6 দুইবার পর্যন্ত ব্যবহার করে তিন অঙ্কের কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ৪: নিম্নরূপ তিনি অঙ্গের কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়—

৬ দুইবার ব্যবহার করা হলে, অন্য ৪টি অঙ্গের ১টি ব্যবহার করতে হবে এবং তা 4C_1 উপায়ে ব্যবহার করা যাবে।

$$6 \text{ দুইবার ব্যবহার করে সংখ্যা গঠন করা যায় } {}^4C_1 \times \frac{3!}{2!} = 4 \times 3 = 12 \text{ টি}$$

চন্দ্ৰপঢ়াবে, 6 একবাৰ ব্যৱহাৰ কৰে সংখ্যা গঠন কৰা যায় ${}^4C_3 \times 3! = 36$ টি এবং

৬ ব্যবহার না করে সংখ্যা গঠন করা যায় ${}^4C_3 \times 3! = 24$ টি

$$\text{সর্বমোট শব্দ সংখ্যা} = 12 + 36 + 24 = 72$$

16. (a) 'ALGEBRA' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে প্রতিবার 3টি করে নিয়ে কঙ্গুলো তিনি শব্দ গঠন করা যায়? [ব. ১০]

সমাধান : 'ALGEBRA' শব্দটিতে 2টি A সহ মোট 7টি বর্ণ আছে।

7টি বর্ণ হতে 3টি নিয়ে নিম্নরূপে শব্দ গঠন করা যায় –

6টি তিনি বর্ণ A, L, G, E, B ও R হতে 3টি নিয়ে শব্দ গঠন করা যায় ${}^6P_3 = 120$ উপায়ে।

$$2\text{টি } A \text{ এবং } \text{অপর } 5\text{টি } \text{তিনি } \text{বর্ণ } L, G, E, B \text{ ও } R \text{ হতে } 1\text{টি } \text{নিয়ে } \text{শব্দ } \text{গঠন } \text{করা } = {}^2C_2 \times {}^5C_1 \times \frac{3!}{2!}$$

$$= 1 \times 5 \times 3 = 15 \text{ উপায়ে। } \therefore \text{সর্বমোট } \text{শব্দ } \text{সংখ্যা} = 120 + 15 = 135$$

(b) 'EXAMINATION' শব্দটির বর্ণগুলো হতে প্রত্যেকবার 4টি বর্ণ নিয়ে বিভিন্ন শব্দ গঠন করা হল, এদের কঙ্গুলোতে এক প্রালৈত N এবং অন্য প্রালৈত A থাকবে। [প.ভ.প. ৮৮]

সমাধান : 'EXAMINATION' শব্দটিতে 2টি A, 2টি I ও 2টি N সহ মোট 11টি বর্ণ আছে।

এক প্রালৈত N এবং অন্য প্রালৈত A রেখে 4টি বর্ণ নিয়ে বিভিন্ন শব্দ গঠন করা হলে, মধ্যের স্থান দুইটি অবশিষ্ট $(11 - 2) = 9$ টি বর্ণের 2টি দ্বারা পূরণ করতে হবে।

$$2\text{টি } I \text{ দ্বারা } \text{মধ্যের } \text{স্থান } \text{দুইটি } \text{পূরণ } \text{করা } \text{যায় } \frac{2!}{2!} = 1 \text{ উপায়ে।}$$

2টি তিনি বর্ণ দ্বারা মধ্যের স্থান দুইটি পূরণ করা যায় ${}^{9-1}P_2 = {}^8P_2 = 56$ উপায়ে। [$11 - 3 = 8$ টি তিনি বর্ণ]

আবার, N ও A দ্বারা প্রালৈতের স্থান দুইটি পূরণ করা যায় $2! = 2$ উপায়ে।

$$\text{নির্ণেয় } \text{সংখ্যা} = (1 + 56) \times 2 = 114$$

(c) 'MATHEMATICS' শব্দটিতে 2টি M, 2টি A ও 2টি T সহ মোট 11টি বর্ণ আছে যাদের 4টি স্বরবর্ণ ও 7টি ব্যঙ্গন বর্ণ।

সমাধান : 3টি তিনি স্বরবর্ণ A, E ও I হতে 1টি স্বরবর্ণ এবং 5টি তিনি ব্যঙ্গন বর্ণ M, T, H, C ও S হতে

$$2\text{টি } \text{ব্যঙ্গন } \text{বর্ণ } \text{নিয়ে } \text{বিন্যাস } \text{সংখ্যা} = {}^3C_1 \times {}^5C_2 \times 3! = 3 \times \frac{5 \times 4}{2} \times 3 \times 2 \times 1 = 180$$

আবার, 3টি তিনি স্বরবর্ণ A, E ও I হতে 1টি স্বরবর্ণ এবং 2টি M বা 2টি T নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা

$$= {}^3C_1 \times {}^2C_1 \times \frac{3!}{2!} = 3 \times 2 \times 3 = 18. \therefore \text{নির্ণেয় } \text{বিন্যাস } \text{সংখ্যা} = 180 + 18 = 198$$

(d) 'EXPRESSION' শব্দটির বর্ণগুলো হতে প্রত্যেকবার 4 টি বর্ণ নিয়ে সমাবেশ ও বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান : 'EXPRESSION' শব্দটিতে মোট 10টি বর্ণ আছে যাদের 2টি E এবং 2টি S

10টি বর্ণ হতে 4টি বর্ণ নিয়ে নিম্নরূপে সমাবেশ ও বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করা যায় –

$$8\text{টি } \text{তিনি } \text{বর্ণ } E, X, P, R, S, I, O \text{ ও } N \text{ হতে } 4\text{টি } \text{নিয়ে } \text{সমাবেশ } \text{সংখ্যা} = {}^8C_4 = 70 \text{ এবং } \text{বিন্যাস } \text{সংখ্যা} = {}^8P_4 = 1680$$

$$2\text{টি } E \text{ এবং } \text{অপর } 7\text{টি } \text{তিনি } \text{বর্ণ } X, P, R, S, I, O \text{ ও } N \text{ হতে } 2\text{টি } \text{নিয়ে } \text{সমাবেশ } \text{সংখ্যা} = {}^2C_2 \times {}^7C_2$$

$$= 1 \times 21 = 21 \text{ এবং } \text{বিন্যাস } \text{সংখ্যা} = 21 \times \frac{4!}{2!} = 21 \times 12 = 252$$

অনুরূপভাবে, 2টি S এবং অপর 7টি ভিন্ন বর্ণ E, X, P, R, I, O ও N হতে 2টি নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা = 21 এবং বিন্যাস সংখ্যা = 252

$$2\text{টি E এবং } 2\text{টি S নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা} = {}^2C_2 \times {}^2C_2 = 1 \text{ এবং বিন্যাস সংখ্যা} = 1 \times \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$\text{নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা} = 70 + 42 + 1 = 113 \text{ এবং বিন্যাস সংখ্যা} = 1680 + 504 + 6 = 2190$$

(e) 'ENGINEERING' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে প্রতিবারে 3 টি বর্ণ নিয়ে শব্দ গঠন করা হল, এদের ক্ষেত্রে অন্তত একটি স্বরবর্ণ বর্তমান থাকবে। [RU 06-07]

সমাধান : 'ENGINEERING' শব্দটিতে ব্যক্তি বর্ণ আছে 3টি N, 2 টি G ও 1টি R এবং স্বরবর্ণ আছে 3টি E ও 2 টি I.

$$\begin{aligned} \text{যেকোন } 3\text{টি বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা} &= 5\text{টি ভিন্ন বর্ণ E, N, G, I ও R হতে } 3\text{টি নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা} + 2\text{টি N বা, } 2\text{টি G বা, } 2\text{টি I এবং অপর } 4\text{টি ভিন্ন বর্ণ হতে } 1\text{টি নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা} + 3\text{টি N বা, } 3\text{টি E নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা} \\ &= {}^5P_3 + {}^4C_1 \times {}^4C_1 \times \frac{3!}{2!} + {}^2C_1 \times \frac{3!}{3!} = 60 + 4 \times 4 \times 3 + 2 \times 1 \\ &= 60 + 48 + 2 = 110 \end{aligned}$$

www.boighar.com

যেকোন 3টি ব্যক্তি বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা = 3টি ভিন্ন ব্যক্তি বর্ণ N, G ও R একত্রে নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা + 2টি N বা, 2 টি G এবং অপর 2টি ভিন্ন ব্যক্তি বর্ণ হতে 1টি নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা + 3টি N দ্বারা গঠিত শব্দ সংখ্যা

$$= 3! + {}^2C_1 \times {}^2C_1 \times \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{3!} = 6 + 2 \times 2 \times 3 + 1 = 6 + 12 + 1 = 19$$

অন্তত 1টি স্বরবর্ণ নিয়ে 3টি বর্ণ দ্বারা গঠিত শব্দ সংখ্যা = যেকোন 3টি বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা - কোন স্বরবর্ণ না নিয়ে অর্থাৎ যেকোন 3টি ব্যক্তি বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা = $110 - 19 = 91$

17. (a) n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের r ($n > r$) সংখ্যক একবারে নিয়ে গঠিত বিন্যাসের যেগুলোতে একটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকে তাদের সংখ্যা এবং যেগুলোতে উহা অন্তর্ভুক্ত থাকেনা তাদের সংখ্যা সমান হলে দেখাও যে, $n = 2r$.

সমাধান : n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের একটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকলে অবশিষ্ট $(n - 1)$ সংখ্যক জিনিস হতে বাকি $(r - 1)$ সংখ্যক জিনিসকে ${}^{n-1}C_{r-1}$ উপায়ে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে। এক্ষেত্রে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা = ${}^{n-1}C_{r-1} \times r!$

একটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত না থাকলে অবশিষ্ট $(n - 1)$ সংখ্যক জিনিস হতে r সংখ্যক জিনিসকে ${}^{n-1}C_r$ উপায়ে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে। এক্ষেত্রে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা = ${}^{n-1}C_r \times r!$

$$\text{প্রমতে, } {}^{n-1}C_{r-1} \times r! = {}^{n-1}C_r \times r! \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r+1)!} = \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(r-1)!(n-r).(n-r-1)!} = \frac{1}{r.(r-1)!(n-1-r)!} \Rightarrow \frac{1}{n-r} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow n - r = r \Rightarrow n = 2r \text{ (Showed)}$$

(b) n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের r সংখ্যক একবারে নিয়ে গঠিত বিন্যাসের যেগুলোতে দুইটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকে তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর। এদের ক্ষেত্রে বিশেষ জিনিস দুইটি পাশাপাশি থাকবে।

সমাধান : ১ম অংশ : n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের দুইটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকলে অবশিষ্ট $(n - 2)$ সংখ্যক জিনিস হতে বাকি $(r - 2)$ সংখ্যক জিনিসকে ${}^{n-2}C_{r-2}$ উপায়ে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে।

n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের r সংখ্যক একবারে নিয়ে গঠিত বিন্যাসের ফেগুলোতে দুইটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকে তাদের সংখ্যা $= {}^{n-2}C_{r-2} \times r! = \frac{(n-2)!r!}{(r-2)!(n-2-r+2)!} = \frac{(n-2)!r!}{(r-2)!(n-r)!}$ (Ans.)

২য় অংশ : এই দুইটি বিশেষ জিনিসকে একটি একক জিনিস বিবেচনা করলে $(r-1)$ সংখ্যক ভিন্ন জিনিস $(r-1)!$ তাবে বিন্যস্ত হবে এবং বিশেষ জিনিস দুইটি $2!$ তাবে বিন্যস্ত হবে।

$$\begin{aligned}\text{নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা} &= {}^{n-2}C_{r-2} \times (r-1)! \times 2! = \frac{(n-2)!}{(r-2)!(n-2-r+2)!} 2.(r-1)! \\ &= \frac{(n-2)!}{(r-2)!(n-r)!} 2.(r-1).(r-2)! = \frac{2(r-1).(n-2)!}{(n-r)!} \quad (\text{Ans.})\end{aligned}$$

17. (c) n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের r সংখ্যক একবারে নিয়ে গঠিত বিন্যাসের ফেগুলোতে দুইটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকলে উভয়েই থাকে তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান : n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের দুইটি বিশেষ জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকলে অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক জিনিস হতে বাকি $(r-2)$ সংখ্যক জিনিসকে ${}^{n-2}C_{r-2}$ উপায়ে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে। এক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{n-2}C_{r-2} \times r!$

n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের দুইটি বিশেষ জিনিসের কোনটি অন্তর্ভুক্ত না থাকলে অবশিষ্ট $(n-2)$ সংখ্যক জিনিস হতে r সংখ্যক জিনিসকে nC_r উপায়ে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে। এক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^nC_r \times r!$

$$\begin{aligned}\text{নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা} &= {}^{n-2}C_{r-2} \times r! + {}^nC_r \times r! = \frac{(n-2)!r!}{(r-2)!(n-2-r+2)!} + \frac{(n-2)!r!}{r!(n-2-r)!} \\ &= \frac{(n-2)!r(r-1).(r-2)!}{(r-2)!(n-r)!} + \frac{(n-2)!r!}{(n-2-r)!} = \frac{(n-2)!r(r-1)}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)!} + \frac{(n-2)!r!}{(n-2-r)!} \\ &= \frac{(n-2)!\{r(r-1) + (n-r)(n-r-1)\}}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)!} = \frac{(n-2)!(r^2 - r + n^2 - 2nr + r^2 - n + r)}{(n-r)!} \\ &= \frac{(n-2)!}{(n-r)!} (2r^2 + n^2 - 2nr - n) \quad (\text{Ans.})\end{aligned}$$

(d) একটি সংকেত তৈরি করতে তিনটি পতাকার প্রয়োজন হয়। ৬টি বিভিন্ন রং-এর প্রত্যেকটির ৪টি করে ২৪টি পতাকা দ্বারা কতগুলো সংকেত দেয়া যেতে পারে?

সমাধান : সবগুলো পতাকা ভিন্ন রঙের নিয়ে সংকেত দেয়ার সংখ্যা $= {}^6P_3 = 120$

৬টি বিভিন্ন রঙের পতাকা হতে এক রঙের ২টি পতাকা বাছাই করা যায় 6C_1 উপায়ে। আবার অবশিষ্ট ৫টি বিভিন্ন রঙের পতাকা হতে এক রঙের ১টি পতাকা বাছাই করা যায় 5C_1 উপায়ে। এই বেছে নেয়া এক রঙের ২টি ও অন্য রঙের ১টি পতাকাকে $\frac{3!}{2!} = 3$ উপায়ে সাজানো যায়।

২টি এক রঙের এবং অপরটি অন্য এক রঙের নিয়ে সংকেত দেয়ার সংখ্যা $= {}^6C_1 \times {}^5C_1 \times 3 = 6 \times 5 \times 3 = 90$

সবগুলো পতাকা একই রঙের নিয়ে সংকেত দেয়ার সংখ্যা $= {}^6C_1 \times \frac{3!}{3!} = 6$

নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 120 + 90 + 6 = 216$

18. n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে যত প্রকারে বিন্যাস (Permutation) করা যায় তার সংখ্যা nP_r এবং যতগুলি সমাবেশ (Combination) হতে পারে তার সংখ্যা nC_r .

- (a) ${}^{n+1}P_3 + {}^nC_3 + {}^nC_2 = 343$ হলে n এর মান নির্ণয় কর।
[ব.'০৫; চ.'০৬; সি.'০৭; কু.'০৭; ব.'০৮; দি.'০৯; য.'১৪]
- (b) প্রমাণ কর যে, ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$
[চ.'১০; চ.'১২; শা.'০৮; চ.'০৭; চ.'১৪; সি.'০৭; '০৯; কু.'০৭; '১২; '১৪; ব.'০৮; '১২; '১৪; দি.'১০; '১৩; য.'১৪]
- (c) 'Combination' শব্দটির বর্ণগুলি থেকে অস্তত একটি বর্ণ কত উপায়ে বাছাই করা যায় এবং স্বরবর্ণগুলির স্থান পরিবর্তন না করে 'Permutation' শব্দটির বর্ণগুলি কত উপায়ে পুনর্বিন্যাস করা যায়?
[ব.'০৫; চ.'০৮; চ.'০৯; দি.'১৩]

সমাধান : (a) ${}^{n+1}P_3 + {}^nC_3 + {}^nC_2 = 392 \Rightarrow {}^{n+1}P_3 + ({}^nC_3 + {}^nC_{3-1}) = 392$
 $\Rightarrow {}^{n+1}C_3 \times 3! + {}^{n+1}C_3 = 392 \Rightarrow 7 \times {}^{n+1}C_3 = 392 \Rightarrow {}^{n+1}C_3 = 56 = {}^8C_3 \Rightarrow n+1 = 8 \therefore n = 7$

(b) মূল বইয়ের ১৩৮ পৃষ্ঠা দ্রষ্টব্য।

(c) 'Combination' শব্দটিতে 2টি O, 2টি N, 2টি I ও 5টি ডিম ভিন্ন বর্ণ আছে।
অস্তত একটি বর্ণ বাছাই করা যাই $(2+1)(2+1)(2+1)2^5 - 1 = 863$ উপায়ে।

'PERMUTATION' শব্দটিতে মোট 11টি বর্ণ আছে যাদের 5টি স্বরবর্ণ।

5 টি স্বরবর্ণের স্থান পরিবর্তন না করে 2টি T সহ অবশিষ্ট $(11-5)$ বা, 6টি ব্যঙ্গন বর্ণকে $\frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360$ উপায়ে
সজানো যায়।

নির্ণেয় পুনর্বিন্যাস করার উপায় = $360 - 1 = 359$ (Ans.)

19. সাতটি সরল রেখার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 সে.মি.।

- (a) 1234567 সংখ্যাটির অঙ্কগুলি থেকে অস্তত একটি জোড় অঙ্ক ও অস্তত একটি বিজোড় অঙ্ক কতভাবে বাছাই করা যায়?
উ: 105
- (b) nP_r এর মান নির্ণয় কর।
[কু.'০৮; ব.'০৯; চ.'০৬; '০৯; '১৩; য.'০৭; '১১; দি.'১৪]
- (c) দেখাও যে, একটি চতুর্ভুজ গঠন করার জন্য চারটি সরল রেখা যত প্রকারে বাছাই করা যায় তার সংখ্যা 32.
[চ.'০৮; '১২; সি.'০৮; '১২; দি.'০৯; য.'০৯; ব.'০৮; '১০]

সমাধান: (a) 1234567 সংখ্যাটির তিনটি জোড় অঙ্ক ও চারটি বিজোড় অঙ্ক আছে।

অস্তত একটি জোড় অঙ্ক ও অস্তত একটি বিজোড় অঙ্ক বাছাই করা যায় $(2^3 - 1)(2^4 - 1) = 105$ উপায়ে।

- (b) মূল বইয়ের ১২৭ পৃষ্ঠা দ্রষ্টব্য।
- (c) অঞ্চলমালা VB এর 6(a) দ্রষ্টব্য।
20. যেকোনো সংখ্যা গঠনে 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলি ব্যবহার করা হয়।
- (a) প্রত্যেক সংখ্যায় প্রত্যেক অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 10 অঙ্কের কতগুলি অর্থপূর্ণ সংখ্যা গঠন করা যায়।
- (b) প্রত্যেক সংখ্যায় প্রত্যেক অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 10 অঙ্কের কতগুলি অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা গঠন করা যায়।
- (c) প্রত্যেক সংখ্যায় 1 নয়বার ও 9 একবার ব্যবহার করে 10 অঙ্কের যতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের গড় নির্ণয় কর। *

সমাধান : (a) প্রদত্ত 10টি অঙ্ক ব্যবহার করে $10!$ সংখ্যক সংখ্যা গঠন করা যায়। কিন্তু 0 দ্বারা শুরু $9!$ সংখ্যক সংখ্যা হর্ফপৰ্স সংখ্যা নয়।

নির্ণেয় অর্থপূর্ণ সংখ্যা = $10! - 9! = 3265920$

(b) সংখ্যাগুলির শেষে ০, 2, 4, 6 অথবা 8 থাকলে সংখ্যাগুলি জোড় হবে। আবার, সংখ্যার প্রথমে ০ থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা।

০ শেষে রেখে প্রথম স্থানটি 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 বা 9 দ্বারা 9 উপায়ে পূরণ করা যায়। অবশিষ্ট মাঝের ৪টি স্থান বাকী ৪টি অঙ্কে দ্বারা $8! = 40320$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

০ শেষে রেখে অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা গঠন করার উপায় সংখ্যা = $9 \times 40320 = 362880$

আবার, 2 শেষে রেখে প্রথম স্থানটি 1, 3, 5, 6, 7, 8 বা 9 দ্বারা 8 উপায়ে পূরণ করা যায়। অবশিষ্ট মাঝের ৪টি স্থান বাকী ৪টি অঙ্কে দ্বারা $8! = 40320$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

২ শেষে রেখে অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা গঠন করার উপায় সংখ্যা = $8 \times 40320 = 322560$

অনুরূপভাবে, 4, 6 অথবা 8 শেষে রেখে অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা গঠন করার উপায় সংখ্যা = 322560

নির্ণেয় অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা = $362880 + 4 \times 322560 = 1653120$ সংখ্যক।

(c) প্রত্যেক সংখ্যায় 1 নয়বার ও 9 একবার ব্যবহার করে যতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সংখ্যা = $\frac{10!}{9!} = 10$

প্রত্যেক স্থানে (একক, দশক, শতক ইত্যাদি) 9 একবার ও 1 নয়বার পুনরাবৃত্ত হয়।

দশ অঙ্কে বিশিষ্ট সংখ্যার প্রত্যেক স্থানের অঙ্কগুলির সমষ্টি = $9 + 1 \times 9 = 18$

প্রত্যেক সংখ্যায় 1 নয়বার ও 9 একবার ব্যবহার করে 10 অঙ্কের গঠিত সংখ্যার সমষ্টি

= $18 \times 1111111111 = 19999999998$

নির্ণেয় গড় = $19999999998 \div 10 = 1999999999.8$

অথবা,

গঠিত সংখ্যার সমষ্টি = $9111111111 + 1911111111 + 1191111111 + 1119111111 + 1111911111 + 1111191111 + 1111119111 + 111111191 + 1111111119 = 19999999998$

নির্ণেয় গড় = $19999999998 \div 10 = 1999999999.8$

কাজ:

১। 10 টি জিনিসের মধ্যে 2টি এক জাতীয় এবং বাকীগুলো ভিন্ন ভিন্ন জিনিস। ঐ জিনিসগুলো থেকে প্রতিবারে 5টি নিয়ে কত প্রকারে বাছাই করা যায়?

সমাধান : 8 সবগুলোই জিনিস ভিন্ন ভিন্ন এবং বাছাই সংখ্যা = $(10 - 2 + 1)$ অর্থাৎ 9টি বিভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবারে 5টি নিয়ে বাছাই সংখ্যা = ${}^9C_5 = 126$

2টি জিনিস এক জাতীয় এবং অপর 3টি জিনিস ভিন্ন ভিন্ন এবং বাছাই সংখ্যা = ${}^2C_2 \times {}^8C_3 = 1 \times 56 = 56$

নির্ণেয় মোট বাছাই সংখ্যা = $126 + 56 = 182$

২। 13 জন বালকের একটি দলে 5 জন বালক সেনা আছে। কত প্রকারে 7 জন বালক বাছাই করা যায় যাতে (i) ঠিক 3 জন বালক সেনা থাকে, (ii) অস্তত 3 জন বালক সেনা থাকে?

(i) সমাধান : 5 জন বালক সেনা থেকে প্রতিবারে ঠিক 3 জনকে ${}^5C_3 = 10$ উপায়ে এবং অন্যান্য $(13 - 5)$ অর্থাৎ, 8 জন বালক থেকে প্রতিবারে বাকি $(7 - 3)$ অর্থাৎ, 4 জনকে ${}^8C_4 = 70$ উপায়ে বাছাই করা যায়।

৭ জনের দল গঠন করা যাবে $= 10 \times 70 = 700$ উপায়ে।

(ii) ৪ নিম্নরূপে 7 জনের একটি দল গঠন করা যেতে পারে –

বালক সেনা (5)

অন্যান্য বালক (8)

কমিটি গঠনের উপায়

3 4

$${}^5C_3 \times {}^8C_4 = 10 \times 70 = 700$$

4 3

$${}^5C_4 \times {}^8C_3 = 5 \times 56 = 280$$

5 2

$${}^5C_5 \times {}^8C_2 = 1 \times 28 = 28$$

(700 + 280 + 28) অর্থাৎ, 1008 প্রকারে দল গঠন করা যাবে।

৩। ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮ চিহ্নিত আটটি কাউন্টার থেকে অনুযান একটি বিজোড় ও একটি জোড় কাউন্টার নিয়ে চারটি কাউন্টারের কঙগুলো সমাবেশ গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান : নিম্নরূপে 4টি কাউন্টারের সমাবেশ গঠন করা যেতে পারে –

জোড় কাউন্টার (4)

বিজোড় কাউন্টার (4)

সমাবেশ গঠনের উপায়

1

3

$${}^4C_1 \times {}^4C_3 = 4 \times 4 = 16$$

2

2

$${}^4C_2 \times {}^4C_2 = 6 \times 6 = 36$$

3

1

$${}^4C_3 \times {}^4C_1 = 4 \times 4 = 16$$

নির্ণয় মোট সংখ্যা = $16 + 36 + 16 = 68$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

১. (a) একটি সমতলে n - সংখ্যক সরলরেখা টানলে, যদি কোন দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল না হয়, এবং কোন তিনটিও সমবিন্দু না হয়, তবে সেখানে কতগুলো ছেদবিন্দু থাকবে?

সমাধান : দুইটি অসমান্তরাল সরলরেখা একটি বিন্দুতে ছেদ করে।

যেকোন দুইটি সমান্তরাল নয় এবং n - সংখ্যক সরলরেখা ছেদ করবে ${}^nC_2 = \frac{1}{2} n(n-1)$ সংখ্যক বিন্দুতে।

(b) শূন্যে অবস্থিত n - সংখ্যক বিন্দুর মধ্যে কোন তিনটি বিন্দুও সমরেখ নয় এবং কোন চারটি এক সমতলে নয়। n -এর কত মানের জন্য বিন্দুগুলোর সংযোগ রেখার দ্বারা প্রাপ্ত সরলরেখার সংখ্যা ও সমতলের সংখ্যা সমান হবে?

সমাধান : একটি সরলরেখার জন্য দুটি বিন্দু এবং একটি সমতলের জন্য তিনটি বিন্দুর প্রয়োজন। এখানে মোট n - সংখ্যক বিন্দু। অতএব, মোট সরলরেখার সংখ্যা nC_2 এবং মোট সমতলের সংখ্যা nC_3 .

প্রশ্নমতে, ${}^nC_3 = {}^nC_2 \Rightarrow \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) = \frac{1}{2} n(n-1) \Rightarrow n-2=3 \therefore n=5$

(c) শূন্যে অবস্থিত n - সংখ্যক বিন্দুর মধ্যে কোন তিনটি বিন্দুও সমরেখ নয় এবং কোন চারটি এক সমতলে নয়, কেবল p -সংখ্যক বিন্দু এক সমতলে অবস্থিত। ঐ বিন্দুগুলো দ্বারা কতগুলো ডিম্ব সমতল গঠন করা যেতে পারে?

সমাধান : একটি সমতল গঠন করাতে তিনটি বিন্দুর প্রয়োজন।

প্রদত্ত n - সংখ্যক বিন্দু দ্বারা গঠিত সমতলের সংখ্যা = nC_3 ,

কিন্তু যেহেতু p - সংখ্যক বিন্দু একসমতলে অবস্থিত; সুতরাং তারা pC_3 সংখ্যক সমতলের পরিবর্তে কেবল একটি সমতল গঠন করে।

নির্ণয় সমতলের সংখ্যা := ${}^nC_3 - {}^pC_3 + 1 = \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) - \frac{1}{6} p(p-1)(p-2) + 1$

(d) কোন সমতলে অবস্থিত n - সংখ্যক বিন্দুর মধ্যে, p - সংখ্যক বিন্দু সমরেখ, বাকিগুলোর যে কোন তিনটি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত নয়। ঐ n - সংখ্যক বিন্দুগুলো সংযোগ করে মোট কতগুলো সরলরেখা পাওয়া যাবে? এদের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের সংখ্যাও নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রথম অংশ : দুই বিন্দুর সংযোগে একটি সরলরেখা উৎপন্ন হয়।

প্রদত্ত n - সংখ্যক বিন্দু দ্বারা গঠিত সরলরেখার সংখ্যা = ${}^n C_2$

কিন্তু যেহেতু p - সংখ্যক বিন্দু সমরেখ; সুতরাং তারা ${}^p C_2$ সংখ্যক রেখার পরিবর্তে কেবল একটি রেখা গঠন করে।

$$\text{নির্ণেয় রেখার সংখ্যা} = {}^n C_2 - {}^p C_2 + 1 = \frac{1}{2} n(n-1) - \frac{1}{2} p(p-1) + 1$$

দ্বিতীয় অংশ : অসমরেখ তিনটি বিন্দুর সংযোগ রেখা দ্বারা একটি ত্রিভুজ গঠিত হয়।

$$\begin{aligned}\text{উপরের যুক্তি অনুযায়ী নির্ণেয় ত্রিভুজ সংখ্যা} &= {}^n C_3 - {}^p C_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} - \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{p(p-1)(p-2)}{6}\end{aligned}$$

3. ক্রিকেট বিশ্বকাপ -2007 এ 4 টি গ্রুপ থেকে 2টি করে দল শীর্ষ আটে উঠে। নিজ গ্রুপের দল ব্যতীত এই 8 টি দলের প্রতিটি দল পরস্পরের মুখোমুখি হলে শীর্ষ আটে মোট কয়টি খেলা অনুষ্ঠিত হয়।

সমাধান : 8টি দলের 2টি করে দল পরস্পরের সাথে খেললে মোট খেলার সংখ্যা হয় ${}^8 C_2$ বা 28 টি।

কিন্তু শীর্ষ আটে নিজ গ্রুপের দল দুইটি পরস্পরের সাথে খেলেনি বলে 4টি গ্রুপের 4টি খেলা অনুষ্ঠিত হয়নি।

শীর্ষ আটে মোট খেলা অনুষ্ঠিত হয় (28 - 4) বা, 24 টি

4. (a) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে $2, 3, 4, 5, 6, 7$ এবং 8 অঙ্কগুলো দ্বারা চার অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো পৃথক সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান : এখানে 7টি অঙ্ক আছে। প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 7টি অঙ্ক দ্বারা চার অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা = ${}^7 P_4 = 840$

(b) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে $3, 1, 7, 0, 9, 5$ অঙ্কগুলো দ্বারা ছয় অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়? এদের মধ্যে কতগুলো সংখ্যায় দশকের স্থানে শূন্য থাকবে?

সমাধান : এখানে শূন্যসহ মোট 6টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে। সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা।

প্রথম স্থানটি 5টি অঙ্ক $3, 1, 7, 9, 5$ এর যেকোন একটি দ্বারা ${}^5 P_1$ উপায়ে পূরণ করে অবশিষ্ট 5টি স্থান বাকি 5টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে $5!$ উপায়ে। \therefore নির্ণেয় মোট সংখ্যা = ${}^5 P_1 \times 5! = 5 \times 120 = 600$

২য় অংশ : প্রথম স্থানটি 5টি অঙ্ক $3, 1, 7, 9, 5$ এর যেকোন একটি দ্বারা ${}^5 P_1$ উপায়ে এবং দশকের স্থান শূন্য দ্বারা পূরণ করে অবশিষ্ট 4টি স্থান বাকি 4টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে $4!$ উপায়ে। \therefore নির্ণেয় মোট সংখ্যা = ${}^5 P_1 \times 4! = 5 \times 24 = 120$

(c) $3, 4, 0, 5, 6$ অঙ্কগুলোর একটিকেও পুনরাবৃত্তি না করে 10 এবং 1000 মধ্যবর্তী কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়? এদের মধ্যে কতগুলো সংখ্যাগুলো দুই অঙ্কের ও তিন অঙ্কের হবে। এখানে শূন্যসহ মোট 5টি বিভিন্ন অঙ্ক আছে। সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা।

দুই অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা = 5টি অঙ্ক দ্বারা দুই অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা - 0 প্রথমে রেখে বাকি 4টি অঙ্ক দ্বারা এক অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা = ${}^5 P_2 - {}^4 P_1 = 20 - 4 = 16$

অন্তর্গতভাবে, তিন অঙ্কের গঠিত মোট সংখ্যা = ${}^5 P_3 - {}^4 P_2 = 60 - 12 = 48$

নির্ণয় মোট সংখ্যা = $16 + 48 = 64$

[MCQ এর জন্য : নির্ণয় মোট সংখ্যা = $4 ({}^4P_1 + {}^4P_2) = 64$]

৫. (a) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ অঙ্কগুলো দ্বারা **10000** এর ছোট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় ?

সমাধান : এখানে শূন্যসহ মোট 8টি অঙ্ক আছে। সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। 10000 এর ছোট সংখ্যা নিম্নরূপে গঠন করা যায় :

শূন্য ব্যতীত বাকি 7টি অঙ্ক দ্বারা এক অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = ${}^7P_1 = 7$

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = 8টি অঙ্ক দ্বারা দুই অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা - 0 প্রথমে রেখে বাকি 7টি অঙ্ক দ্বারা এক অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = ${}^8P_2 - {}^7P_1 = 49$

অনুরূপভাবে, তিন অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = ${}^8P_3 - {}^7P_2 = 294$

এবং চার অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = ${}^8P_4 - {}^7P_3 = 1470$

10000 এর ছোট মোট সংখ্যা = $(7 + 49 + 294 + 1470) = 1820$

[MCQ এর জন্য : নির্ণয় মোট সংখ্যা = ${}^7P_1 (1 + {}^7P_1 + {}^7P_2 + {}^7P_3) = 1820$]

(b) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ অঙ্কগুলো দ্বারা **1000**-এর চেয়ে ছোট এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় ?

সমাধান : এখানে শূন্যসহ মোট 10টি ভিন্ন অঙ্ক আছে। সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। 5 দ্বারা সংখ্যাগুলোর শেষে 0 বা 5 থাকতে হবে।

1000-এর চেয়ে ছোট এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা নিম্নরূপে গঠন করা যায় :

এক অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = 1

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = শেষে 0 থাকে এবৃপ মোট সংখ্যা + শেষে 5 থাকে এবৃপ মোট সংখ্যা
 $= {}^9P_1 + {}^8P_1 = 9 + 8 = 17$

তিন অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = শেষে 0 থাকে এবৃপ মোট সংখ্যা + শেষে 5 থাকে এবৃপ মোট সংখ্যা
 $= {}^9P_2 + ({}^9P_2 - {}^8P_1) = 72 + 72 - 8 = 136$

নির্ণয় মোট সংখ্যা = $1 + 17 + 136 = 154$

(c) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে $0, 1, 2, 3, 4$ অঙ্কগুলো দ্বারা তিন অঙ্কের বেশি নয়, এবৃপ কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় ?

সমাধান : এখানে শূন্যসহ মোট 5টি ভিন্ন অঙ্ক আছে। সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবেনা। তিন অঙ্কের বেশি নয় এবৃপ সংখ্যা নিম্নরূপে গঠন করা যায় :

এক অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = ${}^4P_1 = 4$

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = ${}^5P_2 - {}^4P_1 = 20 - 4 = 16$

তিন অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা = ${}^5P_3 - {}^4P_2 = 60 - 12 = 48$

নির্ণয় মোট সংখ্যা = $4 + 16 + 48 = 68$

(d) $1, 2, 3, 4, 5$ অঙ্কগুলি যে কোন সংখ্যক্ষেত্রে ব্যবহার করে চার অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় ? এ সংখ্যাগুলির কয়টিতে একই অঙ্ক একাধিকবার থাকবে।

সমাধান : প্রদত্ত পাঁচটি অঙ্ক দ্বারা চার অঙ্কবিশিষ্ট প্রত্যেক সংখ্যার প্রতিটি স্থান 5 উপায়ে পূরণ করা যায়।

প্রদত্ত অঙ্কগুলি যে কোন সংখ্যক্বার ব্যবহার করে চার অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যায় $5^4 = 625$ উপায়ে।

আবার, প্রদত্ত অঙ্কগুলি প্রত্যেক সংখ্যায় একবারের বেশি ব্যবহার না করে চার অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যায়
 ${}^5P_4 = 120$ উপায়ে।

$$625 - 120 = 505 \text{ টি সংখ্যায় একই অঙ্ক একাধিকবার থাকবে।}$$

৬. কোনো পরীক্ষায় তিনটি বিষয়ের প্রতিটির পূর্ণমাপ-100। একজন ছাত্র কতভাবে 200 নম্বর পেতে পারে?

সমাধান : একজন ছাত্রকে 200 নম্বর পেতে হলে প্রতিটি বিষয়ে 0 হতে 100 নম্বর পেতে হবে।

ছাত্রটি নিম্নরূপে পরীক্ষায় 200 নম্বর পেতে পারে -

১ম বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বর ২য় বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বর ৩য় বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বর মোট প্রাপ্ত নম্বর

0	100	100	200
1	100	99	200
1	99	100	200
2	100	88	200
2	99	99	200
2	88	100	200

লক্ষ্যনীয় যে, ১ম বিষয়ে 0 পাওয়া যায় 1 উপায়ে, 1 পাওয়া যায় 2 উপায়ে, 2 পাওয়া যায় 3 উপায়ে।

অনুরূপভাবে, ১ম বিষয়ে 3 পাওয়া যায় 4 উপায়ে, 4 পাওয়া যায় 5 উপায়ে, 5 পাওয়া যায় 6 উপায়ে ..., 100
 পাওয়া যায় 101 উপায়ে।

$$\text{নির্ণেয় সংখ্যা} = 1 + 2 + 3 + \dots + 101 = \frac{101(101+1)}{2} = \frac{101 \times 102}{2} = 5151$$

৭. (a) $n(A) = 4$ হলে, $P(A)$ সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান : দেওয়া আরছে, $n(A) = 4$ $P(A)$ সেটের উপাদান সংখ্যা $= 2^4 = 16$

$P(A)$ সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান বাছাই করা যায় $(2^{16} - 1)$ বা 65535 উপায়ে।

(b) $n(A) = 2$, $n(B) = 3$ হলে, $P(A \times B)$ সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান : দেওয়া আরছে, $n(A) = 2$, $n(B) = 3$ $n(A \times B) = 2 \times 3 = 6$

$$P(A \times B) \text{ সেটের উপাদান সংখ্যা} = 2^6 = 64$$

$P(A \times B)$ সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান বাছাই করা যায় $(2^{64} - 1)$ উপায়ে।

৮. $n(A) = 3$, $n(B) = 4$ হলে A , B ও J_5 প্রত্যেক সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান কতভাবে বাছাই করা যায়?

সমাধান : $n(J_5) = 5$.

$$\text{প্রত্যেক সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান বাছাই করার উপায়} = (2^3 - 1)(2^4 - 1)(2^5 - 1) = 3255$$

৯. ‘EQUATION’ শব্দটির সকলগুলো এ প্রশ্নমালা $V(A + B)$ কারে দুইটি শব্দ গঠন করা যেতে পারে,
 যেন E , Q , U অক্ষর তিনটি এক শব্দে এবং C , I , T অক্ষর তিনটি এক শব্দে। অন্তর্ভুক্ত থাকে?

সমাধান : A , T , I অক্ষর তিনটি থেকে যেকোন 0, 1, 2 ও 3টি অক্ষর 1ম শব্দে (E , Q , U অন্তর্ভুক্ত শব্দে)
 অন্তর্ভুক্ত করা হলে ২য় শব্দে (O , N অন্তর্ভুক্ত শব্দে) যথাক্রমে 3, 2, 1 ও 0টি অক্ষর অন্তর্ভুক্ত করতে হবে। এ 3টি

মক্ষরকে ১ম শব্দে ১টি ও ২য় শব্দে ২টি অন্তর্ভুক্ত করা যায় $\frac{3!}{1! \times 2!}$ উপায়ে !

A, T, I অক্ষর তিনটি নিম্নলিপে অন্তর্ভুক্ত করে দুইটি শব্দ গঠন করা যায় -

E, Q, U অন্তর্ভুক্ত শব্দ	O, N অন্তর্ভুক্ত শব্দ	দুইটি শব্দ গঠন করার উপায়
$3 + 0 = 3$	$2 + 3 = 5$	$\frac{3!}{0! \times 3!} \times 3! \times 5! = 720$
$3 + 1 = 4$	$2 + 2 = 4$	$\frac{3!}{1! \times 2!} \times 4! \times 4! = 1728$
$3 + 2 = 5$	$2 + 1 = 3$	$\frac{3!}{2! \times 1!} \times 5! \times 3! = 2160$
$3 + 3 = 6$	$2 + 0 = 6$	$\frac{3!}{3! \times 0!} \times 6! \times 2! = 1440$

$$\text{নির্ণয় মোট সংখ্যা} = 720 + 1728 + 2160 + 1440 = 6048$$

10. (a) 11 ডিজিট বিশিষ্ট গ্রামফোন মোবাইল নম্বরে বাম দিক হতে প্রথম চারটি 0171 দ্বারা নির্ধারিত। গ্রামফোন স্বার দেশে সর্বাধিক কত সংখ্যক মোবাইল সংযোগ দিতে পারবে? এদের কত সংখ্যক 5 দ্বারা বিভাজ্য হবে ? কতগুলোর ঠিক স্বার তিনটি ডিজিট এক রকম হবে তাও নির্ণয় কর।

সূত্রান্তর : ১ম অংশ : ০ হতে 9 পর্যন্ত মোট 10টি অঙ্ক (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9) আছে। বাম দিক হতে প্রথম চারটি ডিজিট 0171 দ্বারা নির্ধারিত করে অবশিষ্ট (11 – 4) বা, 7টি ডিজিট প্রত্যেকটি 10টি অঙ্ক দ্বারা 10 উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$$\text{নির্ণয় টেলিফোন সংযোগ সংখ্যা} = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^7$$

এবং অংশ : ৫ দ্বারা বিভাজ্য বলে শেষের ডিজিট 0 অথবা 5 হবে এবং তা ${}^2C_1 = 2$ উপায়ে পূরণ করা যাবে এবং অবশিষ্ট (14 – 4 – 1) বা, 6টি ডিজিট প্রত্যেকটি 10টি অঙ্ক দ্বারা 10 উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$$\text{নির্ণয় টেলিফোন সংযোগ সংখ্যা} = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 2 = 2 \times 10^6$$

এবং অংশ : শেষের তিনটি ডিজিট 10টি অঙ্কের যেকোন একটির তিনটি দ্বারা 10 উপায়ে পূরণ করা যাবে। শেষের তিনটি ডিজিট 10টি অঙ্কের যেকোন একটি দ্বারা পূরণ করার পর ডান দিক হতে ৪টি ডিজিট অবশিষ্ট 9টি অঙ্কের যেকোন একটি দ্বারা 9 উপায়ে পূরণ করা যাবে। অবশিষ্ট (7 – 3 – 1) বা, 3টি ডিজিট প্রত্যেকটি 10টি অঙ্ক দ্বারা 10 উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$$\text{শেষের তিনটি ডিজিট ঠিক এক রকম এমন টেলিফোন সংযোগ সংখ্যা} = 10 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^4$$

11 ডিজিট বিশিষ্ট টেলিটেক মোবাইল নম্বরে বাম দিক হতে প্রথম চারটি 0155 দ্বারা নির্ধারিত। বাম দিক হতে ৫ম অঙ্কটি জোড়া সংখ্যা দ্বারা নির্ধারিত হলে, সারা দেশে কত সংখ্যক টেলিটেকের মোবাইল সংযোগ দেওয়া যাবে তা নির্ণয় কর।

সূত্রান্তর : ০ হতে 9 পর্যন্ত মোট 10টি অঙ্ক (2 , 4 , 6 , 8) জোড়। বাম দিক হতে ৫ম ডিজিট 4টি অঙ্ক এবং 4C_1 উপায়ে পূরণ করা যায়। অবশিষ্ট 6টি ডিজিট প্রত্যেকটি 10টি অঙ্ক দ্বারা 10 উপায়ে পূরণ করা যাবে।

$$\text{মোট সংযোগ সংখ্যা} = {}^4C_1 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 4 \times 10^6$$

তিন অঙ্ক বিশিষ্ট একটি সংখ্যার বাম দিক থেকে প্রথম দুইটি অঙ্কের সমষ্টি 4, প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় করে মাত্র র্যবহার করে গঠিত সংখ্যার সমষ্টি 1998 এবং সংখ্যাটির উৎপাদকের সংখ্যা 8 হলে সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সূত্রান্তর : মনে করি, সংখ্যাটি (100a + 10b + c).

$$\text{অঙ্ক} : a + b = 4 \quad \dots \text{(i)}$$

$$(3-1)! \times (a+b+c) \times 111 = 1998 \Rightarrow a+b+c = \frac{1994}{222} = 9 \Rightarrow 4+c = 9 \Rightarrow c = 5$$

(i) হতে পাই, $(a, b) = (4, 0), (2, 2), (3, 1)$ অথবা, $(1, 3)$.

নির্ণেয় সংখ্যাটি হবে 405, 225, 315 অথবা, 135.

এখন, $405 = 3^4 \times 5$. 405 এর উৎপাদকের সংখ্যা = $(4+1)(1+1) = 10$

$225 = 3^2 \times 5^2$ 225 এর উৎপাদকের সংখ্যা = $(2+1)(2+1) = 9$

$315 = 3^2 \times 5 \times 7$ 315 এর উৎপাদকের সংখ্যা = $(2+1)(1+1)(1+1) = 12$

$135 = 3^3 \times 5$ 135 এর উৎপাদকের সংখ্যা = $(3+1)(1+1) = 8$

নির্ণেয় সংখ্যা 135.

ভর্তি পরীক্ষার MCQ:

1. যদি **TIME** শব্দটির অক্ষরগুলি পুনর্বিন্যাস করা হয় তবে কতগুলো বিন্যাস স্বরবর্ণ দ্বারা শুরু হবে ? [DU 88-99]

Sol": নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা = ${}^2 P_1 \times 3! = 12$

2. **SCIENCE** শব্দটির স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে সবকয়টি বর্ণকে যত উপায়ে সাজানো যায় তাদের সংখ্যা কত ? [DU 97-98]

Sol": নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা = $\frac{5!}{2!} \times \frac{3!}{2!} = 180$

3. প্রতিটি সংখ্যায় প্রতিটি অঙ্ক একবার ব্যবহার করে 0,1,2,3,4,5 দ্বারা কতগুলি সংখ্যা-গঠন করা যায় ? [IU 06-07]

Sol": নির্ণেয় উপায় = $6! - 5! = 600$

4. **SCHOOL** শব্দটি হতে তিনটি অক্ষর বাছাই করা যায় ? [DU 07-08]

Sol": নির্ণেয় উপায় = ${}^5 C_3 + {}^4 C_1 = 14$

5. 6 জন ছাত্র ও 5 জন ছাত্রী হতে 5 জনের একটি কমিটি কর্তব্যে গঠন করা যাবে যাতে অন্তত: একজন ছাত্র ও একজন ছাত্রী অন্তর্ভুক্ত থাকে ? [DU 05-06; Jt.U 06-07]

Sol": নির্ণেয় সংখ্যা = ${}^5 C_1 \times {}^6 C_4 + {}^5 C_2 \times {}^6 C_3 + {}^5 C_3 \times {}^6 C_2 + {}^5 C_4 \times {}^6 C_1 = 455$

6. আটজন ব্রাঞ্জি হতে পাঁচ সদস্যের একটি কমিটি কর্তব্যে হঠন করা যায় যাতে তিনজন বিশেষ ব্যক্তির সর্বাধিক একজন অন্তর্ভুক্ত থাকে ? [DU 97-98]

Sol": কমিটি গঠনের উপায় সংখ্যা = ${}^3 C_1 \times {}^5 C_4 + {}^3 C_0 \times {}^5 C_5 = 16$

7. 8 জন লোক প্রত্যেকে প্রত্যেকের সাথে কর্মদল করলে কর্মদলের সংখ্যা কত হবে ? [SU 07-08]

Sol": নির্ণেয় সংখ্যা = ${}^8 C_2 = 28$ [∵ কর্মদলে দুইজন ব্যক্তি লাগে।]

8. একটি টেনিম টুনামেন্টে 150 জন খেলোয়াড় আছে। এক জন খেলোয়াড় একটি ম্যাচ হারলে টুনামেন্ট থেকে বিদ্যায় নেয়। টুনামেন্টে কৃতি ম্যাচ খেলা হয়েছে ? [SU 06-07]

Sol": টুনামেন্টে একজন বিজয়ী হয় এবং অবশিষ্ট $(150 - 1) = 149$ জন খেলোয়াড় 149টি ম্যাচে পরাজিত হয়ে টুনামেন্ট থেকে বিদ্যায় নেয়। অতএব, নির্ণেয় ম্যাচ সংখ্যা = 149.

9. ${}^n P_5 = 84 \times {}^{n-1} P_2$ হলে n এর মান কত ?

ALPHA X SHIFT



7 0

1. প্রমাণ কর যে,

$$(a) (\tan \theta + \sec \theta)^2 = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}$$

প্রমাণ : L.H.S. = $(\tan \theta + \sec \theta)^2$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \right\}^2 = \left\{ \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta} \right\}^2 \\ &= \frac{(1 + \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta} = \frac{(1 + \sin \theta)^2}{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{(1 + \sin \theta)^2}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

$$1(b) \frac{\sec \theta \cdot \cosec \theta - 2}{\sec \theta \cdot \cosec \theta + 2} = \left(\frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \right)^2$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sec \theta \cdot \cosec \theta - 2}{\sec \theta \cdot \cosec \theta + 2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{\cos \theta \sin \theta} - 2}{\frac{1}{\cos \theta \sin \theta} + 2} = \frac{1 - 2 \sin \theta \cos \theta}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta - \cos \theta)^2}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} = \frac{\cos^2 \theta \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 1 \right)^2}{\cos^2 \theta \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 1 \right)^2} \\ &= \frac{(\tan \theta - 1)^2}{(\tan \theta + 1)^2} = \frac{(1 - \tan \theta)^2}{(1 + \tan \theta)^2} = \left(\frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \right)^2 \\ &= \text{R.H.S. (Proved)} \end{aligned}$$

$$1(c) 1 - 4\sin^2 \theta \cos^2 \theta = \sin^4 \theta (1 - \cot^2 \theta)^2$$

$$\text{L.H.S.} = 1 - 4\sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$\begin{aligned} &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 4\sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= \sin^4 \theta + \cos^4 \theta + 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta - 4\sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= (\sin^2 \theta)^2 + (\cos^2 \theta)^2 - 2(\sin^2 \theta)(\cos^2 \theta) \end{aligned}$$

$$= (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)^2 = \left\{ \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) \right\}^2$$

$$= \sin^4 (1 - \cot^2 \theta)^2 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$1(d) \sin \theta + \sec \theta)^2 + (\cos \theta + \cosec \theta)^2 = (1 + \sec \theta \cosec \theta)^2$$

$$\text{L.H.S.} = (\sin \theta + \sec \theta)^2 + (\cos \theta + \cosec \theta)^2$$

$$= \sin^2 \theta \left(1 + \frac{\sec \theta}{\sin \theta} \right)^2 + \cos^2 \theta \left(1 + \frac{\cosec \theta}{\cos \theta} \right)^2$$

$$= (1 + \sec \theta \cosec \theta)^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= (1 + \sec \theta \cosec \theta)^2 \cdot 1$$

$$= (1 + \sec \theta \cosec \theta)^2 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$1(e) \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} = \cosec \theta + \cot \theta$$

$$\text{L.H.S.} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \cos \theta}}{\sqrt{1 - \cos \theta}} = \frac{\sqrt{1 + \cos \theta} \sqrt{1 + \cos \theta}}{\sqrt{1 - \cos \theta} \sqrt{1 + \cos \theta}}$$

$$= \frac{1 + \cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \frac{1 + \cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta}} = \frac{1 + \cos \theta}{|\sin \theta|}$$

$$= \frac{1}{|\sin \theta|} + \frac{\cos \theta}{|\sin \theta|} = \cosec \theta + \cot \theta$$

$$= \text{R.H.S. (proved)}$$

$$1(f) \sin^2 \theta (1 + \cot^2 \theta) + \cos^2 \theta (1 + \tan^2 \theta) = 2$$

$$\text{L.H.S.} = \sin^2 \theta (1 + \cot^2 \theta) + \cos^2 \theta (1 + \tan^2 \theta)$$

$$= \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \cot^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \tan^2 \theta$$

$$= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$+ \cos^2 \theta \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= 1 + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 + 1 = 2 = \text{R.H.S.}$$

$$1(g) \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta}{(\sin \theta + \cos \theta)(\cot \theta + \tan \theta)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) \\
 \text{L.H.S.} &= \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta}{(\sin \theta + \cos \theta)(\cot \theta + \tan \theta)} \\
 &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}{(\sin \theta + \cos \theta) \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)} \\
 &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2}{(\sin \theta + \cos \theta) \left(\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \right)} \\
 &= \frac{\sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\
 &= \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) = \text{R.H.S.} \\
 &\quad \text{(Proved)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.(h) \quad &3(\sin \theta + \cos \theta) - 2(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta) \\
 &= (\sin \theta + \cos \theta)^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S.} &= 3(\sin \theta + \cos \theta) - 2(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta) \\
 &= 3(\sin \theta + \cos \theta) - 2(\sin \theta + \cos \theta) \\
 &\quad (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta) \\
 &= (\sin \theta + \cos \theta) \{ 3 - 2(1 - \sin \theta \cos \theta) \} \\
 &= (\sin \theta + \cos \theta) (1 + 2 \sin \theta \cos \theta) \\
 &= (\sin \theta + \cos \theta) (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta) \\
 &= (\sin \theta + \cos \theta) (\sin \theta + \cos \theta)^2 \\
 &= (\sin \theta + \cos \theta)^3 = \text{L.H.S.} \quad \text{(Proved)}
 \end{aligned}$$

$$1(i) \quad 1 + \tan \theta + \sec \theta = \frac{2}{1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta}$$

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S.} &= 1 + \tan \theta + \sec \theta \\
 &= 1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta + \sin \theta + 1}{\cos \theta} \\
 &= \frac{(\cos \theta + \sin \theta + 1)(\cos \theta + \sin \theta - 1)}{\cos \theta (\cos \theta + \sin \theta - 1)} \\
 &= \frac{(\cos \theta + \sin \theta)^2 - 1}{\cos \theta (\cos \theta + \sin \theta - 1)} \\
 &= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - 1}{\cos \theta (\cos \theta + \sin \theta - 1)} \\
 &= \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta - 1}{\cos \theta (\sin \theta + \cos \theta - 1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos \theta (\sin \theta + \cos \theta - 1)} \\
 &= \frac{2}{\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta + \cos \theta - 1)} \\
 &= \frac{2}{1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta} = \text{R.H.S.} \quad \text{(Proved)}
 \end{aligned}$$

$$2. (a) \quad a \cos \theta - b \sin \theta = c \quad \text{হলে দেখাও যে,} \\
 a \sin \theta + b \cos \theta = \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{প্রমাণ : } & \text{দেওয়া আছে, } a \cos \theta - b \sin \theta = c \\
 \Rightarrow & a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta - 2ab \sin \theta \cos \theta = c^2 \\
 \Rightarrow & a^2 (1 - \sin^2 \theta) + b^2 (1 - \cos^2 \theta) \\
 & \quad - 2ab \sin \theta \cos \theta = c^2 \\
 \Rightarrow & a^2 - a^2 \sin^2 \theta + b^2 - b^2 \cos^2 \theta \\
 & \quad - 2abs \in \theta \cos \theta = c^2 \\
 \Rightarrow & -(a \sin \theta)^2 + (b \cos \theta)^2 + 2 \cdot a \sin \theta \cdot b \cos \theta = c^2 - a^2 - b^2 \\
 \Rightarrow & (a \sin \theta + b \cos \theta)^2 = a^2 + b^2 - c^2 \\
 a \sin \theta + b \cos \theta &= \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \\
 &\quad \text{(Proved)}
 \end{aligned}$$

$$2(b) \quad \sin \theta + \operatorname{cosec} \theta = 2 \quad \text{হলে প্রমাণ কর যে,} \\
 \sin^n \theta + \operatorname{cosec}^n \theta = 2$$

$$\begin{aligned}
 \text{প্রমাণ : } & \text{দেওয়া আছে, } \sin \theta + \operatorname{cosec} \theta = 2 \\
 \Rightarrow & \sin \theta + \frac{1}{\sin \theta} = 2 \Rightarrow \sin^2 \theta - 2 \sin \theta + 1 = 0 \\
 \Rightarrow & (\sin \theta - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin \theta - 1 = 0 \therefore \sin \theta = 1 \\
 \text{এখন, L.H.S.} &= \sin^n \theta + \operatorname{cosec}^n \theta \\
 &= \sin^n \theta + \frac{1}{\sin^n \theta} = 1^n + \frac{1}{1^n} = 1 + 1 = 2 = \\
 &\quad \text{R.H.S.} \quad \text{(Proved)}
 \end{aligned}$$

$$2(c) \quad x \sin^3 \theta + y \cos^3 \theta = \sin \theta \cos \theta \quad \text{এবং} \\
 x \sin \theta - y \cos \theta = 0 \quad \text{হলে দেখাও যে, } x^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{প্রমাণ : } & \text{দেওয়া আছে,} \\
 x \sin^3 \theta + y \cos^3 \theta &= \sin \theta \cos \theta \dots \dots \dots (1) \quad \text{এবং} \\
 x \sin \theta - y \cos \theta &= 0 \Rightarrow x \sin \theta = y \cos \theta
 \end{aligned}$$

$$\therefore x = y \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dots \dots \dots (2)$$

$$(1) \text{ এ } x = y \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \text{ বসিয়ে পাই}$$

$$y \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \sin^3 \theta + y \cos^3 \theta = \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow y \sin^2 \theta \cos \theta + y \cos^3 \theta = \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow y \cos \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow y \cos \theta \cdot 1 = \sin \theta \cos \theta$$

$$y = \sin \theta$$

$$(2) \text{ হতে পাই, } x = \sin \theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cos \theta$$

$$\text{এখন, } x^2 + y^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{Showed})$$

2. (d) $k \tan \theta = \tan k \theta$ হলে দেখাও যে,

$$\frac{\sin^2 k \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{k^2}{1 + (k^2 - 1) \sin^2 \theta}$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $k \tan \theta = \tan k \theta$

$$\Rightarrow k \frac{1}{\cot \theta} = \frac{1}{\cot k \theta} \Rightarrow k \cot k \theta = \cot \theta$$

$$\Rightarrow k^2 (\cot^2 k \theta) = \cot^2 \theta$$

$$\Rightarrow k^2 (\cosec^2 k \theta - 1) = \cosec^2 \theta - 1$$

$$\Rightarrow k^2 \cosec^2 k \theta = \cosec^2 \theta + k^2 - 1$$

$$\Rightarrow k^2 \frac{1}{\sin^2 k \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} + k^2 - 1 = \frac{1 + (k^2 - 1) \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{1 + (k^2 - 1) \sin^2 \theta} = \frac{\sin^2 k \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$\frac{\sin^2 k \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{k^2}{1 + (k^2 - 1) \sin^2 \theta} \quad (\text{Proved})$$

2(e) $3 \sec^4 \theta + 8 = 10 \sec^2 \theta$ হলে, $\tan \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $3 \sec^4 \theta + 8 = 10 \sec^2 \theta$

$$\Rightarrow 3 \sec^4 \theta - 10 \sec^2 \theta + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 3 \sec^4 \theta - 6 \sec^2 \theta - 4 \sec^2 \theta + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 3 \sec^2 \theta (\sec^2 \theta - 2) - 4 (\sec^2 \theta - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (\sec^2 \theta - 2)(3 \sec^2 \theta - 4) = 0 \Rightarrow \sec^2 \theta = 2$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 \theta = 2 \Rightarrow \tan^2 \theta = 1 \therefore \tan \theta = \pm 1$$

$$\text{অথবা, } \sec^2 \theta = \frac{4}{3} \Rightarrow 1 + \tan^2 \theta = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \theta = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \therefore \tan \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \theta = \pm 1, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$2(f) (a^2 - b^2) \sin \theta + 2ab \cos \theta = a^2 + b^2$$

এবং θ সূক্ষ্ম ও ধনাত্মক কোণ হলে, $\tan \theta$ এবং $\cosec \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ : $(a^2 - b^2) \sin \theta + 2ab \cos \theta = a^2 + b^2$

$$\Rightarrow (a^2 - b^2) \tan \theta + 2ab = (a^2 + b^2) \sec \theta$$

$$\Rightarrow (a^2 - b^2)^2 \tan^2 \theta + 2(a^2 - b^2) \tan \theta \cdot 2ab + 4a^2 b^2 = (a^2 + b^2)^2 \sec^2 \theta \quad [\text{উভয় পক্ষকে বর্গ করে}]$$

$$\Rightarrow (a^2 - b^2)^2 \tan^2 \theta + 2(a^2 - b^2) \tan \theta \cdot 2ab + 4a^2 b^2 = (a^2 + b^2)^2 (1 + \tan^2 \theta)$$

$$\Rightarrow (a^2 - b^2)^2 \tan^2 \theta + 4ab(a^2 - b^2) \tan \theta + 4a^2 b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 + b^2)^2 \tan^2 \theta$$

$$\Rightarrow \{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2\} \tan^2 \theta + 4ab(a^2 - b^2) \tan \theta + 4a^2 b^2 - a^4 - 2a^2 b^2 - b^4 = 0$$

$$\Rightarrow -4a^2 b^2 \tan^2 \theta + 4ab(a^2 - b^2) \tan \theta - (a^4 - 2a^2 b^2 + b^4) = 0$$

$$\Rightarrow 4a^2 b^2 \tan^2 \theta - 4ab(a^2 - b^2) \tan \theta + (a^2 - b^2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \{2ab \tan \theta - (a^2 - b^2)\}^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2ab \tan \theta - (a^2 - b^2) = 0$$

$$\Rightarrow 2ab \tan \theta = a^2 - b^2$$

$$\tan \theta = \frac{a^2 - b^2}{2ab} \quad (\text{Ans.})$$

$$\text{এখন, } \cosec \theta = \sqrt{1 - \cot^2 \theta}$$

[$\because \theta$ ধনাত্মক সূক্ষ্ম কোণ]

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{2ab}{a^2 - b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2}{(a^2 - b^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 - b^2)^2}} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \quad (\text{Ans.})$$

2(g) $\cot A + \cot B + \cot C = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $(\sum \tan A)^2 = \sum \tan^2 A$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\cot A + \cot B + \cot C = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\tan B \tan C + \tan C \tan A + \tan A \tan B}{\tan A \tan B \tan C} = 0$$

$$\Rightarrow \tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 0$$

$$\Rightarrow 2(\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A) = 0$$

$$\Rightarrow \tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C + 2(\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A) = \tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C$$

$$\Rightarrow (\tan A + \tan B + \tan C)^2 = \tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C$$

$$(\sum \tan A)^2 = \sum \tan^2 A \quad (\text{Showed})$$

2(h) $\cos \theta + \sec \theta = \frac{5}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে,

$$\cos^n \theta + \sec^n \theta = 2^n + 2^{-n}$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\cos \theta + \sec \theta = \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta + 1 = \frac{5}{2} \cos \theta$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 \theta + 2 = 5\cos \theta$$

$$\Rightarrow 2\cos \theta - 5\cos \theta + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 \theta - 4\cos \theta - \cos \theta + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos \theta (\cos \theta - 2) - 1(\cos \theta - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (\cos \theta - 2)(2\cos \theta - 1) = 0$$

$$\cos \theta - 2 = 0 \text{ অথবা, } 2\cos \theta - 1 = 0$$

$$\text{কিন্তু } \cos \theta - 2 \neq 0 \quad [\because -1 \leq \cos \theta \leq 1]$$

$$2\cos \theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \therefore \sec \theta = 2$$

$$\text{এখন, L.H.S.} = \cos^n \theta + \sec^n \theta$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^n + (2)^n$$

$$= 2^n + 2^{-n} = \text{R.H.S.}$$

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.} \quad (\text{প্রমাণিত})$$

2(i) $a_1 \sin \theta + b_1 \cos \theta + c_1 = 0$ এবং

$a_2 \sin \theta + b_2 \cos \theta + c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয় হতে θ অপসারণ কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $a_1 \sin \theta + b_1 \cos \theta + c_1 = 0$

$$a_2 \sin \theta + b_2 \cos \theta + c_2 = 0$$

বক্ষগুণ প্রণালীর সাহায্যে পাই,

$$\frac{\sin \theta}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{\cos \theta}{a_2 c_1 - a_1 c_2} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$\sin \theta = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \cos \theta = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

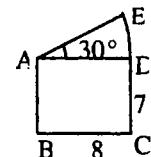
$$\text{এখন, } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \right)^2 + \left(\frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (a_2 c_1 - a_1 c_2)^2 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

3. সমাধান :

$$\begin{aligned} DE &= s = r \theta = 8 \times \frac{30\pi}{180} \\ &= 4.189 \text{ মিটার (প্রায়)} \end{aligned}$$



ABCDE সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= ABCD \text{ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} +$$

$$\text{ADE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল} = 8 \times 7 + \frac{r^2 \theta}{2}$$

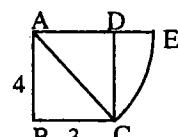
$$= 56 + \frac{8^2}{2} \times \frac{30\pi}{180}$$

$$= 56 + 16.755 = 80.755 \text{ বর্গ মিটার (প্রায়)} .$$

4. সমাধান : এখানে $AD = BC = 3$ মিটার।

$$DC = AB = 4 \text{ মিটার} .$$

$$\begin{aligned} \tan CAD &= \frac{DC}{AD} = \frac{4}{3} \\ &= \tan (0.927) \end{aligned}$$



$$\text{ধরি, } \theta = \angle CAD = 0.927 \text{ রেজিয়ান} .$$

$$r = AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ মিটার} .$$

$$\text{বৃত্তাখ �CE এর দৈর্ঘ্য} = r \theta = 5 \times 0.927$$

$$= 4.635 \text{ মিটার (প্রায়)} .$$

ত্রিভুজ ক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}(AD \times CD) = \frac{1}{2}(3 \times 4) = 6 \text{ বর্গ মিটার।}$$

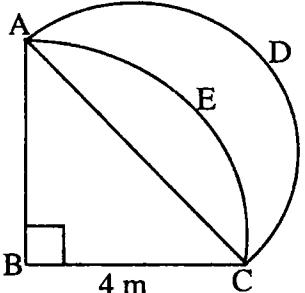
$$\text{ACE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল} = \frac{r^2\theta}{2} = \frac{25 \times 0.927}{2} \\ = 11.5875 \text{ বর্গ মিটার।}$$

$$\text{CDE ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} = (11.5875 - 6)$$

$$= 5.5875 \text{ বর্গ মিটার (প্রায়।)}$$

৫. সমাধান : AECB একটি বৃত্তকলা বলে

$$AB = BC = 4 \text{ মিটার।}$$



$$AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \text{ মিটার}$$

$$\text{ADC অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ } r = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \\ = 2\sqrt{2} \text{ মিটার।}$$

$$\text{ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi \times 8 \\ = 4\pi \text{ বর্গ মিটার।}$$

$$\text{বৃত্তাংশ AEC এর দৈর্ঘ্য} = r\theta = 4 \times \frac{\pi}{2}$$

$$= 2 \times 3.1416 = 6.2832 \text{ মিটার।}$$

$$\text{AECB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল} = \frac{r^2\theta}{2} = \frac{4^2}{2} \times \frac{\pi}{2} \\ = 4\pi \text{ বর্গ মিটার।}$$

$$\text{ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times a^2 = \frac{1}{2} \times 4^2 \\ = 8 \text{ বর্গ মিটার।}$$

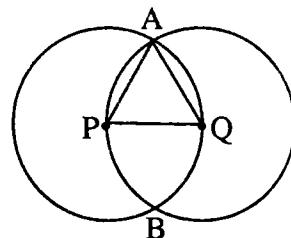
$$\text{AECD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} = \text{ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল} - \text{AEC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}$$

= ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল - (AECB

বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল - ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল)

$$= 4\pi - 4\pi + 8 = 8 \text{ বর্গ মিটার}$$

৬. সমাধান : A, P ; P, Q ; A, Q যোগ করি। তাহলে APQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।



$$\text{APQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{\sqrt{3}}{4} (1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ বর্গ একক।}$$

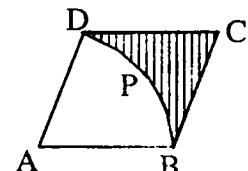
$$\text{APQ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল} = \frac{r^2\theta}{2} = \frac{1^2}{2} \times \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \\ \text{বর্গ একক।}$$

$$\text{APBQ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} = 4 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$= 4 \times \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3} \text{ বর্গ একক।}$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

১. ২ সে.মি. বাহুবিশিষ্ট ABCD রম্পের সূতাকোণ $A = 60^\circ$ । ABPD একটি বৃত্তকলা। বৃত্তাংশ BPD এর দৈর্ঘ্য এবং BPDC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



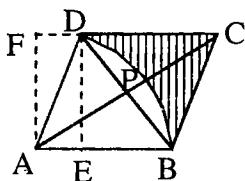
সমাধান: এখানে, ABPD বৃত্তকলার BPD বৃত্তাংশ

ঘারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = \angle BAD = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$,

বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = রম্পের বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 সে.মি.

বৃত্তাংশ BPD এর দৈর্ঘ্য $= r\theta = 2 \times \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 1$

সে.মি. (প্রায়)।



$$\begin{aligned} \text{ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল } &= \frac{1}{2} \theta r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times 2^2 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times 2^2 = 2 \cdot 1 \text{ বর্গ সে.মি. (প্রায়)} \end{aligned}$$

$DE \perp AB$ ও $AF \perp CD$ অঙ্কন করি যা AB কে F বিন্দুতে ও CD এর বর্ধিতাংশকে F বিন্দুতে ছেদ করে।

ΔABD এ, $\angle A = 60^\circ$ (সূক্ষককোণ)

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AE \\ &= AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos A \\ &= 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos 60^\circ \\ &= 8 - 8 \times \frac{1}{2} = 4 \end{aligned}$$

$$BD = 2 \text{ সে.মি.।}$$

আবার, ΔACD , $\angle ADC = 120^\circ$ (সূলকোণ)

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + DC^2 + 2 \cdot CD \times DF \\ &= AD^2 + DC^2 + 2 \cdot CD \times AD \cos ADF \\ &= AD^2 + DC^2 + 2 \cdot CD \times AD \cos 60^\circ \\ &= 2^2 + 2^2 + 2 \times 2 \times 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 12 \end{aligned}$$

$$AC = 2\sqrt{3}$$

এখন, $ABCD$ রম্পসের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} (AC \times BD)$

$$= \frac{1}{2} (2\sqrt{3} \times 2) = 2\sqrt{3} \text{ বর্গ সে.মি.।}$$

$BPDC$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= ABCD$ রম্পসের ক্ষেত্রফল $- ABPD$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} = 1.37 \text{ বর্গ সে.মি. (প্রায়)।}$$

2. 6 মিটার লম্বা ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটার শীর্ষবিন্দু 5 সেকেন্ডে কতটুকু বৃত্তাকার পথ অতিক্রম করবে?

সমাধান: ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটা

60 সেকেন্ডে 360° কোণ উৎপন্ন করে

20 সেকেন্ডে 30° কোণ উৎপন্ন করে।

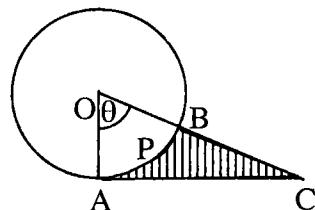
এখানে, উৎপন্ন কোণ $\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান,

$r = 6$ মি.। ধরি, সেকেন্ডের কাঁটাটি s মি. বৃত্তাকার পথ অতিক্রম করবে।

$$s = r\theta = 6 \times \frac{\pi}{6} = \pi = 3.1416$$

নির্ণেয় বৃত্তাকার পথ $= 3.1416$ মি.।

3. O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 সে.মি.। বৃত্তাংশ APB এর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি.।



(a) $\theta = \angle AOB$ নির্ণয় কর। উ: 1.2 রেডিয়ান

(b) OAB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: 15 বর্গ সে.মি.

(c) A বিন্দুতে অক্ষিত বৃত্তের স্পর্শক OB এর বর্ধিতাংশকে C বিন্দুতে ছেদ করে। APBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উ: 17.15 বর্গ সে.মি.।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ প্রশ্ন উন্নয়নসহ :

1. $\frac{3\pi}{8}$ রেডিয়ান কোণের ষাটমূলক পদ্ধতিতে মান কত?

[CU 07-08]

$$Sol'': \frac{3\pi}{8} \text{ রেডিয়ান} = \frac{3 \times 180^\circ}{8} = 67^\circ 30'$$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে,

$$3 \times 180 \div 8 = 67.5 \text{, } 67^\circ 30'$$

2. $50^\circ 37' 30''$ = কত রেডিয়ান? [CU 05-06]

$$Sol'': 50^\circ 37' 30'' = \frac{50.625 \times \pi}{180} = \frac{9\pi}{32}$$

1(a) Sol^n : জ্যামিতিক কোণ ধনাত্মক এবং 360° এর ছোট হয়। ∴ Ans. B

(b) Sol^n : $\frac{\text{বৃত্তের পরিধি}}{2r} = \pi$ Ans. C (c) Sol^n : $\sec \theta = \frac{OB}{OP}$ ∴ Ans. A

(d) Sol^n : $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$ Ans. C

(e) Sol^n : সরঙলি তথ্য সত্য। Ans. D

(f) Sol^n : $\sin \theta$ ও $\cos \theta$ এর মান সবসময় -1 থেকে +1 Ans. C

(g) Sol^n : কোণ 90° থেকে বেড়ে 180° হলে $\cos \theta$ এর মান 0 থেকে কমে -1 হবে। Ans. A

(h) Sol^n : সর্বোচ্চ মান = $1 + \sqrt{(\pm 1)^2 + 1} = 1 + \sqrt{2}$ Ans. C

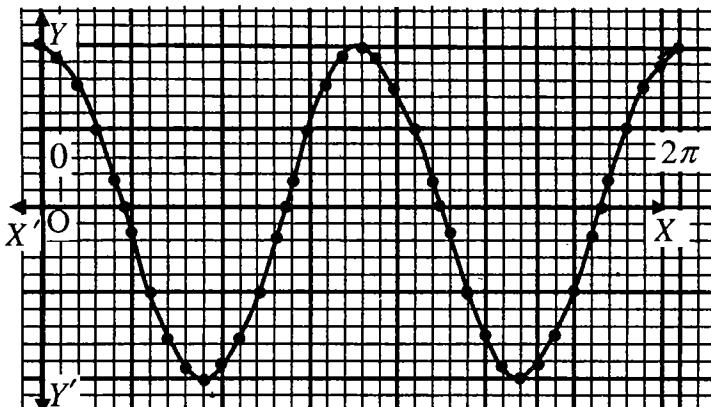
2. নিম্নের ফাংশনগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর :

(a) $y = \cos 2x$, যখন $0 \leq x \leq 2\pi$ [ঢ. '১০, '১৮; ঢ. '০৯, '১৩]

সমাধান : নিচের তালিকায় $x \in [0, 2\pi]$ এর জন্য $y = \cos 2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2. \frac{\pi}{18}$	$3. \frac{\pi}{18}$	$4. \frac{\pi}{18}$	$4.5 \times \frac{\pi}{18}$	$5. \frac{\pi}{18}$	$6. \frac{\pi}{18}$
$y = \cos 2x$	1	0.94	0.77	0.5	0.17	0	-0.17	-0.5
x	$7. \frac{\pi}{18}$	$8. \frac{\pi}{18}$	$9. \frac{\pi}{18}$	$12. \frac{\pi}{18}$	$17. \frac{\pi}{18}$	$22. \frac{\pi}{18}$	$28. \frac{\pi}{18}$	$36. \frac{\pi}{18}$
$y = \cos 2x$	-0.77	-0.93	-1.	-0.5	0.94	-0.17	0.94	1

একটি ছুক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।



$y = \cos 2x$ এর লেখচিত্র।

স্কেল নির্ধারণ : x -অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y -অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু $= 1$

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \cos 2x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

$$(b) y = \sin 3x, \quad \text{যখন } 0 \leq x \leq \pi$$

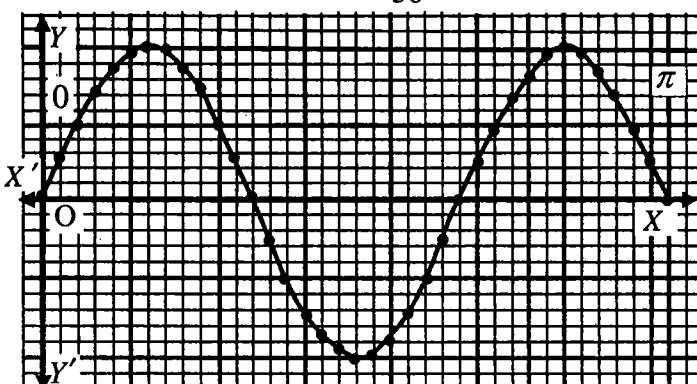
[ক্ল.'০৯,'১২; রা.'১৪; দি.'১৩]

সমাধান : নিচের তালিকায় $x \in [0, \pi]$ এর জন্য $y = \sin 3x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	$\frac{\pi}{36}$	$2. \frac{\pi}{36}$	$3. \frac{\pi}{36}$	$4. \frac{\pi}{36}$	$5. \frac{\pi}{36}$	$6. \frac{\pi}{36}$	$7. \frac{\pi}{36}$
$y = \sin 3x$	0	0.26	0.5	0.71	0.87	0.97	1	0.97
x	$8. \frac{\pi}{36}$	$9. \frac{\pi}{36}$	$10. \frac{\pi}{36}$	$12. \frac{\pi}{36}$	$17. \frac{\pi}{36}$	$22. \frac{\pi}{36}$	$28. \frac{\pi}{36}$	$36. \frac{\pi}{36}$
$y = \sin 3x$	0.87	0.71	0.5	0	-0.97	-0.5	0.87	0

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ : x -অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{36}$ এবং y -অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু $= 1$



$y = \sin 3x$ এর লেখচিত্র

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin 3x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

$$2. (c) y = \cos 3x, \quad \text{যখন } 0 \leq x \leq \pi$$

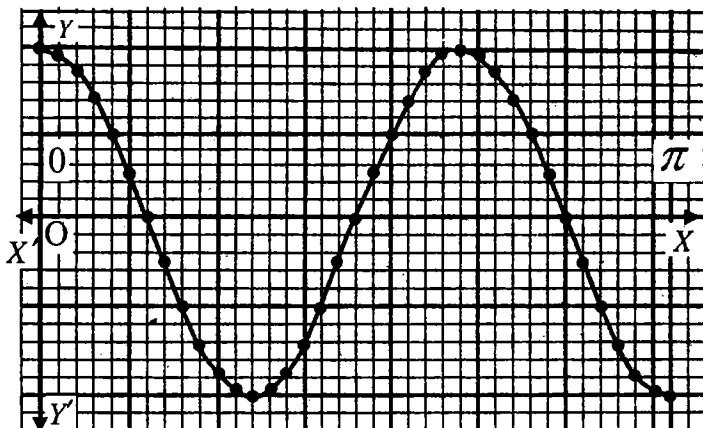
[চ.'০১,'০৮; ঢ.'০৩; য.'০৫]

সমাধান : নিচের তালিকায় $x \in [0, \pi]$ এর জন্য $y = \cos 3x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	$\frac{\pi}{36}$	$2. \frac{\pi}{36}$	$3. \frac{\pi}{36}$	$4. \frac{\pi}{36}$	$5. \frac{\pi}{36}$	$6. \frac{\pi}{36}$	$7. \frac{\pi}{36}$
$y = \cos 3x$	1	0.97	0.87	0.71	0.5	0.26	0	-0.26
x	$8. \frac{\pi}{36}$	$9. \frac{\pi}{36}$	$10. \frac{\pi}{36}$	$12. \frac{\pi}{36}$	$17. \frac{\pi}{36}$	$22. \frac{\pi}{36}$	$28. \frac{\pi}{36}$	$36. \frac{\pi}{36}$
$y = \cos 3x$	-0.5	-0.71	-0.87	-1	-0.26	-0.5	0.5	-1

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ : x -অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{36}$ এবং y -অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু $= 1$



$y = \cos 3x$ এর গেখচিত্র।

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বঙাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \cos 3x$ এর গেখ অঙ্কন করা হল।

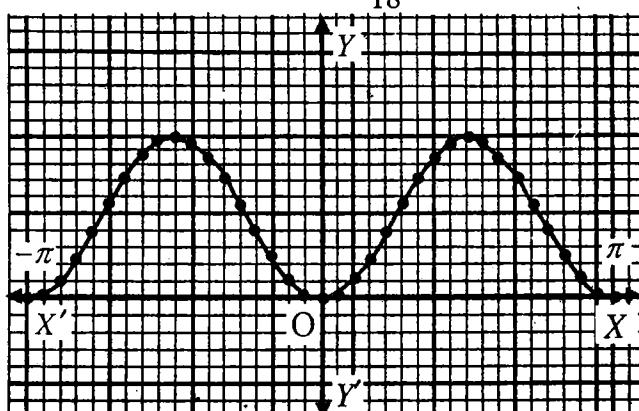
2. (d) $y = \sin^2 x$ যখন $-\pi \leq x \leq \pi$ [ব.'০১; সি.'১,'১০; ঢ.'০৮; কু.'১৩; চ.'১৩]

সমাধান : নিচের তালিকায় $x \in [-\pi, \pi]$ এর জন্য $y = \sin^2 x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	$\pm \frac{\pi}{18}$	$\pm 2 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 3 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 4 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 5 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 6 \cdot \frac{\pi}{18}$
$y = \sin^2 x$	0	0.03	0.117	0.25	0.41	0.59	0.75
x	$\pm 7 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 8 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 9 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 12 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 14 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 16 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 18 \cdot \frac{\pi}{18}$
$y = \sin^2 x$	0.88	0.97	1	0.75	0.41	0.117	0

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ : x -অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi}{18}$ এবং y -অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু $= 1$



$y = \sin^2 x$ এর গেখচিত্র।

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত কিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত কিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin^2 x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

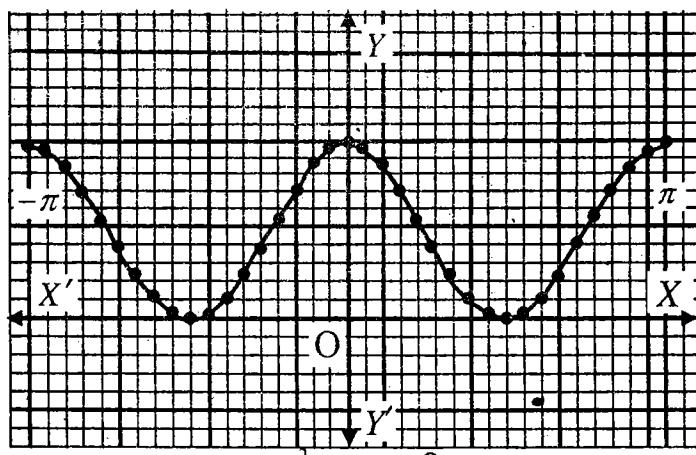
(e) $y = \cos^2 x$, যখন $-\pi \leq x \leq \pi$ [রা.'০৩, '০৬, '০৯; ব.'০৫; চ.'০৫, '১১; ঘ.'০৯, '১৩; ব., দি.'১৩]

সমাধান : নিচের তালিকায় $x \in [-\pi, \pi]$ এর জন্য $y = \cos^2 x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	$\pm \frac{\pi}{18}$	$\pm 2 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 3 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 4 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 5 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 6 \cdot \frac{\pi}{18}$
$y = \cos^2 x$	1	0.97	0.88	0.75	0.59	0.41	0.25
x	$\pm 7 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 8 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 9 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 10 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 12 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 15 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 18 \cdot \frac{\pi}{18}$
$y = \cos^2 x$	0.12	0.03	0	0.97	0.25	0.75	1

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ : x -অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi}{18}$ এবং y -অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু $= 1$



$y = \cos^2 x$ এর লেখচিত্র।

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত কিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত কিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \cos^2 x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

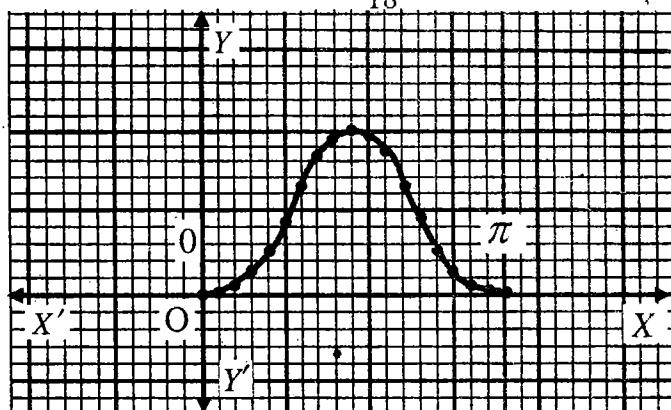
2. (f) $y = \sin^3 x$, যখন $0 \leq x \leq \pi$ [য. '০০; চ. '০২]

সমাধান : নিচের তালিকায় $x \in [0, \pi]$ এর জন্য $y = \sin^3 x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2 \cdot \frac{\pi}{18}$	$3 \cdot \frac{\pi}{18}$	$4 \cdot \frac{\pi}{18}$	$5 \cdot \frac{\pi}{18}$	$6 \cdot \frac{\pi}{18}$
$y = \sin^3 x$	0	0.005	0.04	0.13	0.27	0.45	0.65
x	$7 \cdot \frac{\pi}{18}$	$8 \cdot \frac{\pi}{18}$	$9 \cdot \frac{\pi}{18}$	$12 \cdot \frac{\pi}{18}$	$14 \cdot \frac{\pi}{18}$	$16 \cdot \frac{\pi}{18}$	$18 \cdot \frac{\pi}{18}$
$y = \sin^3 x$	0.83	0.96	1	0.65	0.27	0.04	0

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ : x -অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi}{18}$ এবং y -অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু $= 1$



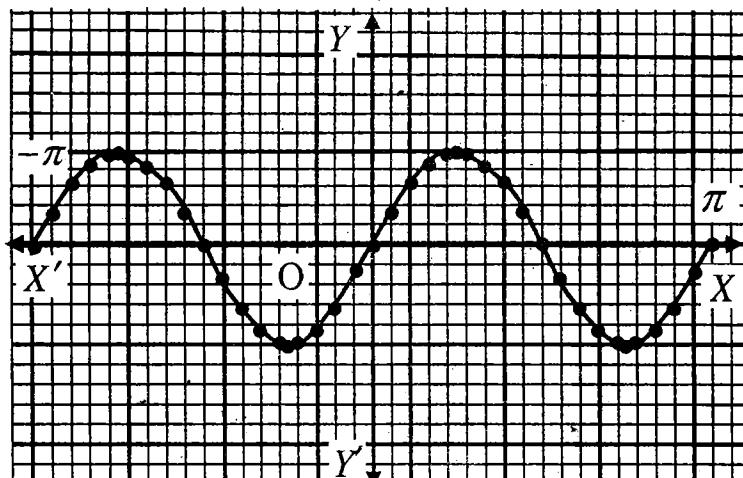
এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে প্রদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin^3 x$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

2. (g) $y = \sin x \cos x$, যখন $-\pi \leq x \leq \pi$

সমাধান : $y = \sin x \cos x \Rightarrow y = \frac{1}{2} \sin 2x$

নিচের তালিকায় $x \in [-\pi, \pi]$ এর জন্য $y = \frac{1}{2} \sin 2x$ এর প্রতিবৃত্তী মান নির্ণয় করি

x	0	$\pm \frac{\pi}{18}$	$\pm 2. \frac{\pi}{18}$	$\pm 3. \frac{\pi}{18}$	$\pm 4. \frac{\pi}{18}$	$\pm \frac{\pi}{4}$	$\pm 5. \frac{\pi}{18}$
$y = \frac{1}{2} \sin 2x$	0	± 0.17	± 0.32	± 0.43	± 0.49	± 0.5	± 0.49
x	$\pm 6. \frac{\pi}{18}$	$\pm 7. \frac{\pi}{18}$	$\pm 8. \frac{\pi}{18}$	$\pm 9. \frac{\pi}{18}$	$\pm 14. \frac{\pi}{18}$	$\pm 15. \frac{\pi}{18}$	$\pm 18. \frac{\pi}{18}$
$y = \frac{1}{2} \sin 2x$	± 0.43	± 0.32	± 0.17	0	∓ 0.49	∓ 0.43	0



$$y = \sin x \cos x \text{ এর লেখচিত্র।}$$

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষেরখি $X'OX$ ও YOY' আৰি।

স্কেল নির্ধারণ : x -অক্ষ বরাবৰ ছোট বৰ্গক্ষেত্ৰের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y -অক্ষ বরাবৰ ছোট বৰ্গক্ষেত্ৰে 10 বাহু $= 1$

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন কৰি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ কৰে প্ৰদত্ত সীমা অনুযায়ী $y = \sin x \cos x$ এর লেখ অঙ্কন কৰা হল।

৩. লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কৰো :

$$(a) \sin x - \cos x = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

[কু. '০৯; রা.'১৩; চ.'১২; ঘ.'১১, '১৪; ব.'০৯; সি.'০৯; ঢা. '০৯, '১২, '১৪; মা.'১৪]

সমাধান : দেওয়া আছে $\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x$

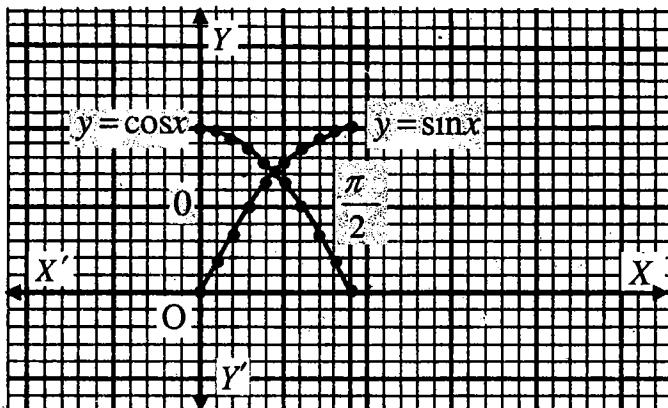
মনে কৰি, $y = \sin x = \cos x \quad \therefore y = \sin x$ এবং $y = \cos x$

নিচের তালিকায় $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ এর জন্য $y = \sin x$ ও $y = \cos x$ এর প্রতিবৃত্তী মান নির্ণয় কৰি :

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2 \cdot \frac{\pi}{18}$	$3 \cdot \frac{\pi}{18}$	$4 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{4}$	$5 \cdot \frac{\pi}{18}$
$y = \sin x$	0	0.17	0.34	0.5	0.64	0.71	0.77
$y = \cos x$	1	0.98	0.94	0.87	0.77	0.71	0.64
x	$6 \cdot \frac{\pi}{18}$	$7 \cdot \frac{\pi}{18}$	$8 \cdot \frac{\pi}{18}$	$9 \cdot \frac{\pi}{18}$			
$y = \sin x$	0.87	0.94	0.98	1			
$y = \cos x$	0.5	0.34	0.17	0			

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষেরখি $X'OX$ ও YOY' আৰি।

স্কেল নির্ধারণ : x -অক্ষ বরাবৰ ছোট বৰ্গক্ষেত্ৰের এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y -অক্ষ বরাবৰ ছোট বৰ্গক্ষেত্ৰে 10 বাহু $= 1$



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন কৰে $y = \sin x$ ও $y = \cos x$ ফাংশনদৰ্শকের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন কৰি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্ৰদত্ত সীমাৰ মধ্যে ছেদ বিন্দুৰ ভূজ

হচ্ছে $\frac{\pi}{4}$. সুতরাং নির্ণয় সমাধান, $x = \frac{\pi}{4}$.

3. (b) $2 \sin^2 x = \cos 2x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

[য. '০৩, '০৮, '০৯]

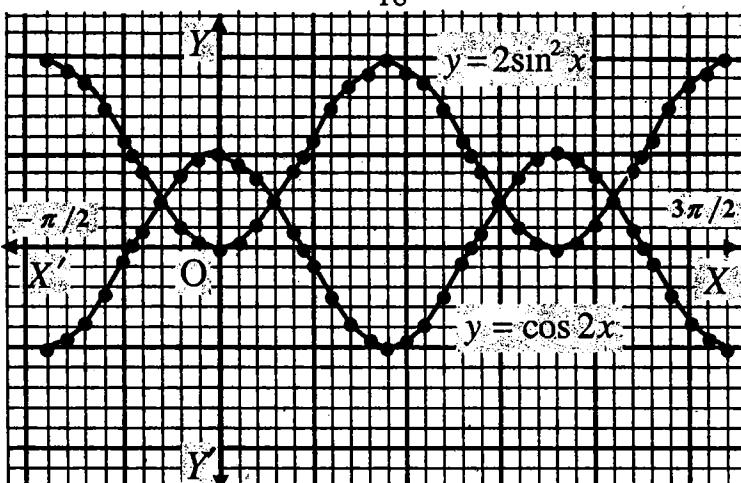
সমাধান : মনে করি, $y = 2\sin^2 x = \cos 2x$ $y = 2\sin^2 x$ এবং $y = \cos 2x$

নিচের তালিকায় $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ এর জন্য $y = 2\sin^2 x$ ও $y = \cos 2x$ এর প্রতিবুন্ধ মান নির্ণয় করি :

x	0	$\pm \frac{\pi}{18}$	$\pm 2 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 3 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 4 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm \frac{\pi}{4}$	$\pm 5 \cdot \frac{\pi}{18}$
$y = 2\sin^2 x$	0	0.06	0.23	0.5	0.83	1	1.17
$y = \cos 2x$	1	0.94	0.77	0.5	0.17	0	-0.17
x	$\pm 6 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 7 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 8 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 9 \cdot \frac{\pi}{18}$	$15 \cdot \frac{\pi}{18}$	$21 \cdot \frac{\pi}{18}$	$27 \cdot \frac{\pi}{18}$
$y = 2\sin^2 x$	1.5	1.77	1.94	2	0.5	0.5	2
$y = \cos 2x$	-0.5	-0.77	0.94	-1	0.5	0.5	-1

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ : x -অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi}{18}$ এবং y -অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 5 বাহু $= 1$



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে $y = 2\sin^2 x$ ও $y = \cos 2x$ তত্ত্বান্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্রদত্ত সীমার মধ্যে হেদে বিন্দুর

স্বসমূহ হচ্ছে $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$. সুতরাং, নির্ণয় সমাধান, $x = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

3. (c) $5 \sin x + 2 \cos x = 5$, $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

[য. '০৮; চ. '১০; রা., ব. '১৪]

সমাধান : দেওয়া আছে, $5 \sin x + 2 \cos x = 5 \Rightarrow 2\cos x = 5(1 - \sin x)$

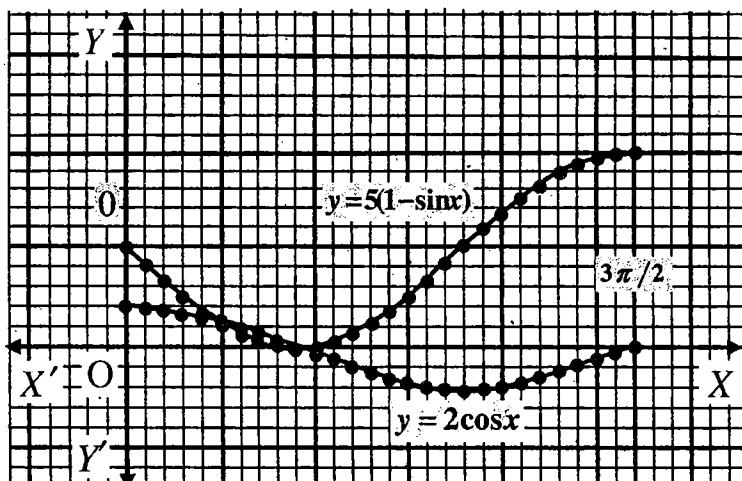
মনে করি $y = 5(1 - \sin x) = 2\cos x \quad \therefore y = 5(1 - \sin x)$ এবং $y = 2\cos x$

সমাধান : নিচের তালিকায় $x \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ এর জন্য, $y = 2\sin^2 x$ ও $y = \cos 2x$ এর প্রতিকূলী মান নির্ণয় করি :

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2 \cdot \frac{\pi}{18}$	$3 \cdot \frac{\pi}{18}$	$4 \cdot \frac{\pi}{18}$	$5 \cdot \frac{\pi}{18}$	$6 \cdot \frac{\pi}{18}$
$y = 5(1 - \sin x)$	5	4.13	3.29	2.5	1.79	1.17	0.67
$y = 2\cos x$	2	1.97	1.88	1.73	1.53	1.29	1
x	$7 \cdot \frac{\pi}{18}$	$8 \cdot \frac{\pi}{18}$	$9 \cdot \frac{\pi}{18}$	$11 \cdot \frac{\pi}{18}$	$15 \cdot \frac{\pi}{18}$	$19 \cdot \frac{\pi}{18}$	$20 \cdot \frac{\pi}{18}$
$y = 5(1 - \sin x)$	0.3	0.08	0	0.3	2.5	5.89	6.7
$y = 2\cos x$	-0.68	0.35	0	-0.68	-1.73	-1.97	-1.88
x	$21 \cdot \frac{\pi}{18}$	$22 \cdot \frac{\pi}{18}$	$23 \cdot \frac{\pi}{18}$	$24 \cdot \frac{\pi}{18}$	$25 \cdot \frac{\pi}{18}$	$26 \cdot \frac{\pi}{18}$	$27 \cdot \frac{\pi}{18}$
$y = 5(1 - \sin x)$	7.5	8.2	8.83	9.93	9.7	9.9	10
$y = 2\cos x$	-0.73	1.53	-1.29	-1	-0.68	-0.35	0

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ : x -অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi}{18}$ এবং y -অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু $= 1$



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে $y = 5(1 - \sin x)$ ও $y = 2\cos x$. ফাংশনদৰ্যের লেখিত্ব দুইটি অঙ্কন করি। লেখিত্ব থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর তৃজ্যসমূহ হচ্ছে $46.4^\circ = \frac{232}{9}\pi$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$. সূতরাং, নির্ণেয় সমাধান, $x = 46.4^\circ = \frac{232}{9}\pi$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$

3. (d) $x - \tan x = 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

[রা.'08,'09; ব.'08,'11,'13.'05,'10,'12; কু.'07,'10; দি.'10,'12; চ.'11; ঢ.'11; ঘ.'12]

সমাধান : দেওয়া আছে, $x - \tan x = 0 \Rightarrow x = \tan x$

মনে করি $y = x = \tan x \therefore y = x$ এবং $y = \tan x$

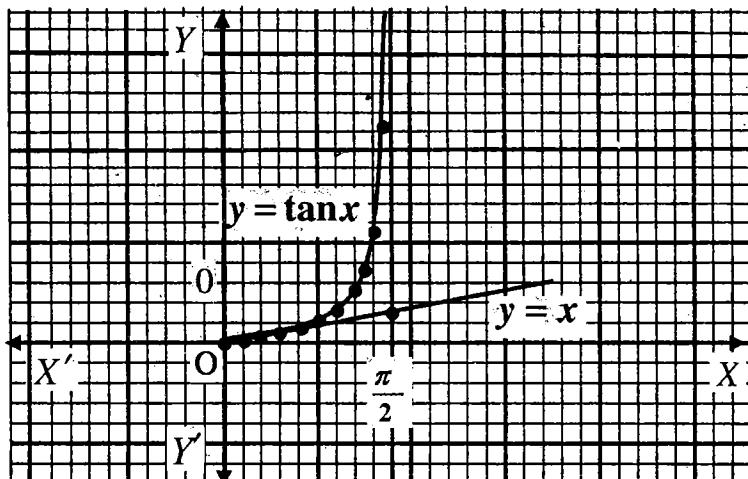
নিচের তালিকায় $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ এর জন্য $y = x$ ও $y = \tan x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$3 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = x$	0	0.18	0.52	1.57

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$2 \cdot \frac{\pi}{18}$	$3 \cdot \frac{\pi}{18}$	$4 \cdot \frac{\pi}{18}$	$5 \cdot \frac{\pi}{18}$	$6 \cdot \frac{\pi}{18}$
$y = \tan x$	0	0.18	0.36	0.58	0.84	1.19	1.73
x	$7 \cdot \frac{\pi}{18}$	$7 \cdot 5 \times \frac{\pi}{18}$	$8 \cdot \frac{\pi}{18}$	$8 \cdot 5 \times \frac{\pi}{18}$	$9 \cdot \frac{\pi}{18}$		
$y = \tan x$	2.75	3.73	5.67	11.43	অসংজ্ঞায়িত		

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষেখ খোট বর্গক্ষেত্রে $X'OX$ ও YOY' আৰি :

চৰকল নির্ধারণ : x -অক্ষ বৰাবৰ ছোট বৰ্গক্ষেত্রে এক বাহু $= \frac{\pi}{18}$ এবং y -অক্ষ বৰাবৰ ছোট বৰ্গক্ষেত্রে 1 বাহু $= 1$



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত কিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে $y = x$ ও $y = \tan x$ ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র দুইটি অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ কিন্দুর হ্জসমূহ হচ্ছে $0, \frac{\pi}{18}$ । সুতরাং নির্ণয় সমাধান $x = 0, \frac{\pi}{18}$

$$3 (e) 2x = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

[চ. '০২]

সমাধান : মনে করি $y = 2x = \tan x \therefore y = 2x$ এবং $y = \tan x$

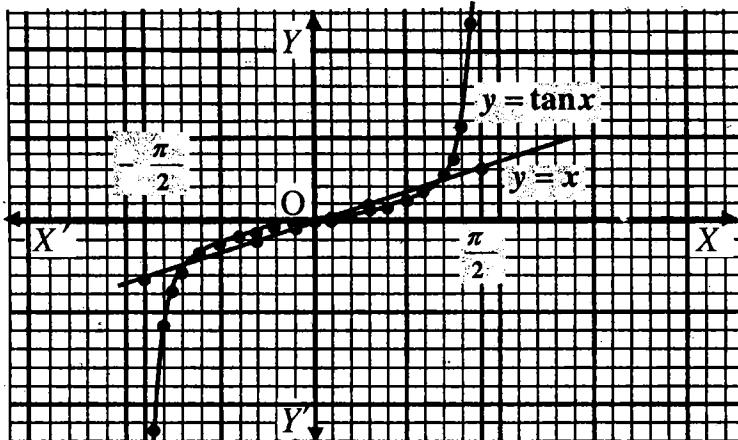
নিচের তালিকায় $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ এর জন্য $y = 2x$ ও $y = \tan x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	$\pm \frac{\pi}{18}$	$\pm 3 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm \frac{\pi}{2}$
$y = 2x$	0	± 0.35	± 1.05	± 3.14

x	0	$\pm \frac{\pi}{18}$	$\pm 2 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 3 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 4 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 5 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 6 \cdot \frac{\pi}{18}$
$y = \tan x$	0	± 0.18	± 0.36	± 0.58	± 0.84	± 1.19	± 1.73
x	$\pm 7 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 7 \cdot 5 \times \frac{\pi}{18}$	$\pm 8 \cdot \frac{\pi}{18}$	$\pm 8 \cdot 5 \times \frac{\pi}{18}$	$\pm 9 \cdot \frac{\pi}{18}$		
$y = \tan x$	± 2.75	± 3.73	± 5.67	± 11.43	অসংজ্ঞায়িত		

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষেরখি X'OX ও YOY' আৰি।

স্কেল নির্ধারণ : x-অক্ষ বৰাবৰ ছোট বৰ্গক্ষেত্ৰে এক বাহু $= \frac{\pi^c}{18}$ এবং y-অক্ষ বৰাবৰ ছোট বৰ্গক্ষেত্ৰে 1 বাহু $= 1$



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন কৰে $y = 2x$ ও $y = \tan x$ ফাংশনসময়ের মেখচিত্ৰ দুইটি অঙ্কন কৰি। মেখচিত্ৰ থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ হচ্ছে $0, -66^\circ = -\frac{11\pi}{30}, 66^\circ = \frac{11\pi}{30}$. সুতৰাং, নির্ণয় সমাধান, $x = 0, -\frac{11\pi}{30}, \frac{11\pi}{30}$

3. (f) $\cot x - \tan x = 2, 0 \leq x \leq \pi$ [য. '০৫ ; চ. '০২; সি. '০৩, '১১; ঢ. '০৬; রা. '১০, '১২; কু. '১:

সমাধান : দেওয়া আছে, $\cot x - \tan x = 2 \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \sin x \cos x$

$$\Rightarrow \cos 2x = \sin 2x$$

মনে কৰি, $y = \sin 2x = \cos 2x \therefore y = \sin 2x, y = \cos 2x$

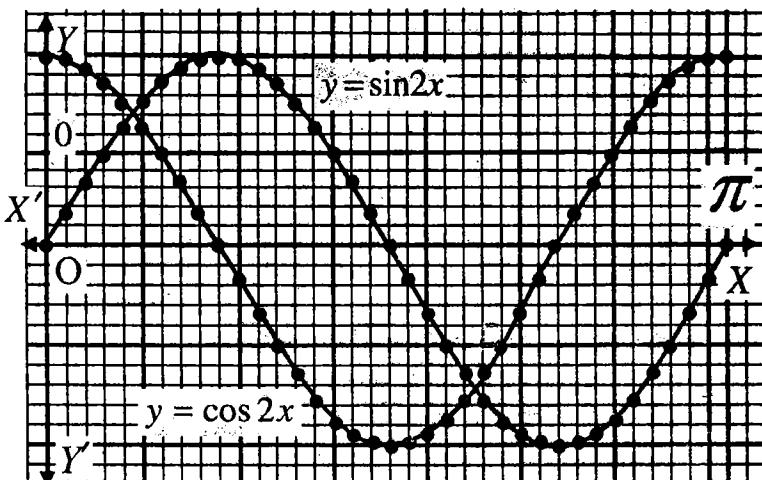
নিচের তালিকায় $x \in [0, \pi]$ এৰ জন্য $y = \sin 2x$ ও $y = \cos 2x$ এৰ প্ৰতিৱৰ্পী মান নিৰ্ণয় কৰি :

x	0	$\frac{\pi}{36}$	$2 \cdot \frac{\pi}{36}$	$3 \cdot \frac{\pi}{36}$	$4 \cdot \frac{\pi}{36}$	$5 \cdot \frac{\pi}{36}$	$6 \cdot \frac{\pi}{36}$
---	---	------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

$y = \sin 2x$	0	0.17	0.34	0.5	0.64	0.77	0.87
$y = \cos 2x$	1	0.98	0.94	0.87	0.77	0.64	0.5
x	$7. \frac{\pi}{36}$	$8. \frac{\pi}{36}$	$9. \frac{\pi}{36}$	$10. \frac{\pi}{36}$	$24. \frac{\pi}{36}$	$32. \frac{\pi}{36}$	$36. \frac{\pi}{36}$
$y = \sin 2x$	0.94	0.98	1	0.98	-0.87	-0.64	0
$y = \cos 2x$	0.34	0.17	0	-0.17	-0.5	0.77	1

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষেরখি $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ : x -অক্ষ বরাবর ছোট কর্ণক্ষেত্রের এক বাহু $= \frac{\pi}{36}$ এবং y -অক্ষ বরাবর ছোট কর্ণক্ষেত্রের 10 বাহু $= 1$



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে $y = \sin 2x$ ও $y = \cos 2x$ ফাংশনসময়ের লেখচিত্র দৃষ্টি অঙ্কন করিঃ লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্রদত্ত সীমার মধ্যে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ হচ্ছে $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$. সূতরাং নির্ণয় সমাধান $x = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$.

4. (a) প্রমাণ : $OA \perp OC$ টানি।

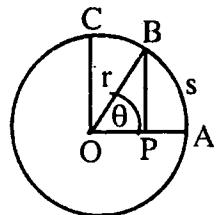
$$\frac{\text{বৃত্তকলা } AOB \text{ এর তেজোত্তুল্য}}{\text{বৃত্তকলা } AOC \text{ এর তেজোত্তুল্য}} = \frac{\angle AOB \text{ এর পরিমাপ}}{\angle AOC \text{ এর পরিমাপ}}$$

$$\Rightarrow \text{বৃত্তকলা } AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{\theta}{\pi/2} \times \text{বৃত্তকলা } AOC \text{ এর ক্ষেত্রফল}$$

$$= \frac{2\theta}{\pi} \times \frac{1}{4} \times \text{বৃত্তের ক্ষেত্রফল} = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 = \frac{r^2\theta}{2}$$

(b) সমাধান: OBP ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, $\sin \theta = \frac{BP}{OB} = \frac{BP}{r}$ ও $\cos \theta = \frac{OP}{OB} = \frac{OP}{r}$

উভয়ের অবশিষ্ট অংশ প্রশ্নমালা VI B এর 3(a) দ্রষ্টব্য।



- (c) সমাধান: দেওয়া আছে, $\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $r = 5$ সে.মি., $BP = 4$ সে.মি.

$$OP = \sqrt{OB^2 - BP^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3 \text{ সে.মি.}$$

$$\text{বৃত্তাংশ } s \text{ এর দৈর্ঘ্য} = r\theta = 5 \times \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \text{ সে.মি.}$$

এবং ABP ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল – ত্রিভুজ OBP এর ক্ষেত্রফল

$$\begin{aligned} &= \frac{r^2\theta}{2} - \frac{1}{2}(OP \times BP) = \frac{1}{2} \times 5^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}(3 \times 4) \\ &= \frac{25\pi}{6} - 6 = \frac{25\pi - 36}{6} \text{ বর্গ সে.মি.} \end{aligned}$$

5. চিত্রে ABC সমকোণী ত্রিভুজে ABC একটি অর্ধবৃত্ত ও ADC একটি বৃত্তাংশ।

- (a) সমাধান: ADC একটি বৃত্তাংশ বলে $AB = BC = 5$ মিটার।

$$\text{বৃত্তাংশ } ADC \text{ এর দৈর্ঘ্য} = AB \times \angle ABC = 5 \times \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \text{ মিটার।}$$

- (b) অশ্লমালা VI B এর উদাহরণ-1 দ্রষ্টব্য।

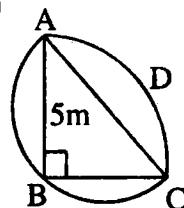
- (c) $AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ মিটার। সূতরাং, ABC একটি অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \frac{AC}{2} = 2\sqrt{2}$ মিটার।

ABCD সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

+ (ABC বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল – ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল)

$$= \frac{1}{2}\pi \times (2\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{2} \times 5^2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \times 5 \times 5)$$

$$= 4\pi + (\frac{25\pi}{4} - \frac{25}{2}) = \frac{16\pi + 25\pi - 50}{4} = \frac{41\pi - 50}{4} \text{ বর্গ মিটার।}$$



ভঙ্গি পরীক্ষার MCQ :

1. $\sin(4x + 1)$ এর পর্যায় কত?

[RU 06-07; BUET 00-01]

$$Sol": 4x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \therefore \text{পর্যায়কাল} = \frac{\pi}{2}$$

নিয়ম : $\sin x, \cos x, \sec x, \operatorname{cosec} x$ এর পর্যায় = 2π এবং $\tan x, \cot x$ এর পর্যায় = π .

2. $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$ এর সর্বোচ্চ মান - [SU 08-09]

$$Sol": \text{সর্বোচ্চ মান} = \sqrt{1+3} = 2$$

বিধি: $a \cos x + b \sin x$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \tan^{-1} \frac{b}{a})$$

$$a \cos \theta + b \sin \theta \text{ সর্বোচ্চ হবে যদি } \sin(x + \tan^{-1} \frac{b}{a})$$

সর্বোচ্চ হয় অর্থাৎ $\sin(x + \tan^{-1} \frac{b}{a}) = 1$ হয়।

$$\therefore x = 90^\circ - \tan^{-1} \frac{b}{a} \text{ এর জন্য } a \cos x + b \sin x$$

$$\text{এর সর্বোচ্চ মান} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3. $f(x) = 1 + \sqrt{\sin^2 x + 1}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান হবে - [CU 07-08]

$$Sol": \text{সর্বোচ্চ মান} = 1 + \sqrt{(\pm 1)^2 + 1} = 1 + \sqrt{2}$$

4. $f(x) = 2 \cos |x|$ এর সীমা - [RU 03-04]

$$Sol": \cos |x| \text{ এর বিস্তার} = [-1,1]$$

$$\therefore -2 \leq f(x) \leq 2$$

5. $\cos^2 x$ ($x \in \mathbb{R}$) এর বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রত্তম মান হচ্ছে - [CU 03-04]

$$Sol": \text{বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রত্তম মান যথাক্রমে} 1 \text{ ও} 0.$$

6. $\sin 2x - \cos x$ এর সর্বনিম্ন মান - [IU 07-08]

$$Sol": x = -45^\circ \text{ এর জন্য প্রদত্ত রাশির সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায় } -\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned}
 1(a) \sin(-1230^\circ) - \cos\{(2n+1)\pi + \frac{\pi}{3}\} \\
 &= -\sin 1230^\circ - \cos\{2n\pi + (\pi + \frac{\pi}{3})\} \\
 &= -\sin(3.360^\circ + 150^\circ) - \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) \\
 &= -\sin 150^\circ - (-\cos \frac{\pi}{3}) \\
 &= -\sin(180^\circ - 30^\circ) + \cos \frac{\pi}{3} \\
 &= -\sin 30^\circ + \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

2. মান নির্ণয় কর :

$$\begin{aligned}
 &\sin(-330^\circ) \cos(-300^\circ) \quad [চ.'০১] \\
 &= \sin 780^\circ \cos 390^\circ - \sin 330^\circ \cos 300^\circ \\
 &= \sin(2.360^\circ + 60^\circ) \cos(360^\circ + 30^\circ) - \\
 &\quad \sin(360^\circ - 30^\circ) \cos(360^\circ - 60^\circ) \\
 &= \sin 60^\circ \cos 30^\circ - (-\sin 30^\circ) \cos 60^\circ \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

(a) $\sin^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{5\pi}{14} + \sin^2 \frac{8\pi}{7} + \sin^2 \frac{9\pi}{14}$

[জি. '০২; সি. '০৩; মা.বো. '০৩; ব.'১০; ঘ.'১১]

$$\begin{aligned}
 &= \sin^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) + \sin^2 \left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) + \\
 &\quad \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right) \\
 &= \sin^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{\pi}{7} \\
 &= 2 \left(\sin^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{\pi}{7}\right) = 2.1 = 2 \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2(b) \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} + \\
 \sin^2 \frac{9\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \\
 &\quad + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{12}\right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}\right) \\
 &= \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} \\
 &\quad + \cos^2 \frac{3\pi}{12} + \cos^2 \frac{5\pi}{12} \\
 &= \left(\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12}\right) + \left(\sin^2 \frac{3\pi}{12} + \cos^2 \frac{3\pi}{12}\right) \\
 &\quad + \left(\sin^2 \frac{5\pi}{12} + \cos^2 \frac{5\pi}{12}\right) \\
 &= 1 + 1 + 1 = 3 \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.(c) \sin^2 \frac{17\pi}{18} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{37\pi}{18} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} \\
 &= \sin^2 \left(\pi - \frac{\pi}{18}\right) + \sin^2 \left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) + \\
 &\quad \cos^2 \left(2\pi + \frac{\pi}{18}\right) + \cos^2 \frac{3\pi}{8} \\
 &= \sin^2 \frac{\pi}{18} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{18} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} \\
 &= \left(\sin^2 \frac{\pi}{18} + \cos^2 \frac{\pi}{18}\right) + \left(\sin^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8}\right) \\
 &= 1 + 1 = 2 \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.(a) \sec^2 \frac{14\pi}{17} - \sec^2 \frac{39\pi}{17} + \cot^2 \frac{41\pi}{34} - \cot^2 \frac{23\pi}{34} \\
 &= \sec^2 \left(\pi - \frac{3\pi}{17}\right) - \sec^2 \left(2\pi + \frac{5\pi}{17}\right) + \\
 &\quad \cot^2 \left(\pi + \frac{7\pi}{34}\right) - \cot^2 \left(\pi - \frac{11\pi}{34}\right) \\
 &= \sec^2 \frac{3\pi}{17} - \sec^2 \frac{5\pi}{17} + \cot^2 \frac{7\pi}{34} - \cot^2 \frac{11\pi}{34} \\
 &= \sec^2 \frac{3\pi}{17} - \sec^2 \frac{5\pi}{17} + \cot^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{17}\right) - \\
 &\quad \cot^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{17}\right) \\
 &= \sec^2 \frac{3\pi}{17} - \sec^2 \frac{5\pi}{17} + \tan^2 \frac{5\pi}{17} - \tan^2 \frac{3\pi}{17} \\
 &= \left(\sec^2 \frac{3\pi}{17} - \tan^2 \frac{3\pi}{17}\right) - \left(\sec^2 \frac{5\pi}{17} - \tan^2 \frac{5\pi}{17}\right)
 \end{aligned}$$

ষষ্ঠিমাসকাৰ VII A

$$= 1 - 1 = 0 \text{ (Ans.)}$$

$$\begin{aligned} & 3(b) \tan 15^\circ + \tan 45^\circ + \tan 75^\circ + \dots + \tan 165^\circ \\ &= \tan 15^\circ + \tan 45^\circ + \tan 75^\circ + \tan 105^\circ + \\ &\quad \tan 135^\circ + \tan 165^\circ \\ &= \tan 15^\circ + \tan 45^\circ + \tan(90^\circ - 15^\circ) + \\ &\quad \tan(90^\circ + 15^\circ) + \tan(180^\circ - 45^\circ) + \\ &\quad \tan(180^\circ - 15^\circ) \\ &= \tan 15^\circ + \tan 45^\circ + \cot 15^\circ - \cot 15^\circ - \\ &\quad \tan 45^\circ - \tan 15^\circ = 0 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3(c) \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \\ &\quad \cos^2 35^\circ + \dots + \cos^2 75^\circ \\ &= \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 35^\circ + \cos^2 45^\circ \\ &\quad + \cos^2 55^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 75^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 35^\circ + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &\quad + \cos^2(90^\circ - 35^\circ) + \\ &\quad \cos^2(90^\circ - 25^\circ) + \cos^2(90^\circ - 15^\circ) \\ &= \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 35^\circ + \frac{1}{2} + \\ &\quad \sin^2 35^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 15^\circ \\ &= (\sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ) + (\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ) \\ &\quad + (\sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ) + \frac{1}{2} \\ &= 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

মা) প্ৰমাণ কৈ দেওয়া আছে, [পি.'১৮; ষ.'১২; চ.'০৯]

$$\sin \theta = \frac{5}{13} \text{ এবং } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

$$\begin{aligned} \cosec \theta &= \frac{13}{5}, \cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ &= -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13} \end{aligned}$$

$$\sec \theta = -\frac{13}{12} \text{ এবং}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{5}{13} \times \left(-\frac{13}{12}\right) = -\frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \cot \theta = -\frac{12}{5}$$

$$\text{এখন, } \frac{\tan \theta + \sec(-\theta)}{\cot \theta + \cosec(-\theta)} = \frac{\tan \theta + \sec \theta}{\cot \theta - \cosec \theta}$$

$$= \frac{-5 + -13}{\frac{12}{5} - \frac{13}{5}} = \frac{-5 - 13}{-12 - 13} = \frac{12}{5}$$

$$= \left(-\frac{18}{12}\right) \times \left(-\frac{5}{25}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \frac{\tan \theta + \sec(-\theta)}{\cot \theta + \cosec(-\theta)} = \frac{3}{10}$$

$$4.(b) \text{ যেহেতু } \cot \theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan \theta = \frac{4}{3} \text{ এবং } \cos \theta$$

ঝোতাক

$$\therefore \sec \theta = -\sqrt{1 + \tan^2 \theta} = -\sqrt{1 + \frac{16}{9}}$$

$$= -\sqrt{\frac{25}{9}} = -\frac{5}{3}$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{3}{5} \text{ এবং}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$\therefore \cosec \theta = -\frac{5}{4}$$

$$\text{এখন, } \frac{\cot(-\theta) + \cosec \theta}{\cos \theta + \sin(-\theta)} = \frac{-\cot \theta + \cosec \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$$

$$= \frac{-\frac{3}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right)}{-\frac{3}{5} - \frac{-4}{5}} = \frac{-3 - 5}{4} \times \frac{5}{-3 + 4}$$

$$= -\frac{40}{4} = -10 \text{ (Ans.)}$$

৫. সমাধান :

$$(a) \sin x + \sin(\pi + x) + \sin(2\pi + x) + \dots \quad (n+1)\text{তম পদ পৰ্যন্ত}$$

$$= \sin x - \sin x + \sin x - \sin x + \dots \quad (n+1)\text{ তম পদ পৰ্যন্ত}$$

$$n = 1 \text{ হলে}, (1+1) \text{ বা } 2\text{য় পদ পর্যন্ত যোগফল} \\ = \sin x - \sin x = 0$$

$$n = 3 \text{ হলে}, (3+1) \text{ বা } 8\text{র্থ পদ পর্যন্ত}$$

$$\text{যোগফল} = \sin x - \sin x + \sin x - \sin x = 0$$

$$\text{অদৃপ, } n \text{ যেকোন বিজোড় সংখ্যা হলে নির্ণেয় যোগফল} = 0$$

$$\text{আবার, } n = 2 \text{ হলে } (2+1) \text{ বা } 3\text{য় পদ পর্যন্ত যোগফল} \\ = \sin x - \sin x + \sin x = \sin x$$

$$n = 4 \text{ হলে}, (4+1) \text{ বা } 5\text{ম পদ পর্যন্ত যোগফল} \\ = \sin x - \sin x + \sin x - \sin x + \sin x \\ = \sin x$$

$$\text{অদৃপ, } n \text{ যেকোন জোড় সংখ্যা হলে নির্ণেয় যোগফল} = \sin x$$

$$\begin{aligned} 5(b) \tan\theta + \tan(\pi + \theta) + \tan(2\pi + \theta) + \\ + \tan(n\pi + \theta) \\ = \tan\theta + \tan\theta + \tan\theta + \dots n \text{ তম পদ পর্যন্ত} \\ = (n+1) \tan\theta \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

$$6(a) \text{ দেওয়া আছে, } \theta = \frac{\pi}{20} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = 10\theta$$

$$\begin{aligned} L.H.S. &= \cot\theta \cot 3\theta \cot 5\theta \cot 7\theta \\ &\quad \cot 9\theta \cot 11\theta \cot 13\theta \cot 15\theta \cot 17\theta \\ &\quad \cot 19\theta \\ &= \cot\theta \cot 3\theta \cot 5\theta \cot 7\theta \cot 9\theta \\ &\quad \cot(10\theta + \theta) \cot(10\theta + 3\theta) \\ &\quad \cot(10\theta + 5\theta) \cot(10\theta + 7\theta) \\ &\quad \cot(10\theta + 9\theta) \\ &= \cot\theta \cot 3\theta \cot 5\theta \cot 7\theta \cot 9\theta \\ &\quad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cot\left(\frac{\pi}{2} + 3\theta\right) \cot\left(\frac{\pi}{2} + 5\theta\right) \\ &\quad \cot\left(\frac{\pi}{2} + 7\theta\right) \cot\left(\frac{\pi}{2} + 9\theta\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\tan\theta \tan 3\theta \tan 5\theta \tan 7\theta \tan 9\theta} (-\tan\theta) \\ &\quad (-\tan 3\theta) (-\tan 5\theta) (-\tan 7\theta) (-\tan 9\theta) \\ &= -1 = R.H.S. \end{aligned}$$

$$6. (b) \text{ দেওয়া আছে, } \theta = \frac{\pi}{28} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = 14\theta$$

$$L.H.S. = \tan\theta \tan 3\theta \tan 5\theta \tan 7\theta$$

$$\begin{aligned} &\tan 9\theta \tan 11\theta \tan 13\theta \\ &= \tan\theta \tan 3\theta \tan 5\theta \tan 7\theta \end{aligned}$$

$$\tan(14\theta - 5\theta) \tan(14\theta - 3\theta)$$

$$\tan(14\theta - \theta)$$

$$= \frac{1}{\tan\theta \tan 3\theta \tan 5\theta} \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - 5\theta\right) \tan\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= \frac{1}{\tan\theta \tan 3\theta \tan 5\theta} \cdot 1 \cdot \tan 5\theta \cdot \tan 3\theta \cdot \tan\theta$$

$$= 1 = R.H.S.$$

$$6(c) \tan\theta \cdot \tan 2\theta \cdot \tan 3\theta \cdot \tan(2n-1)\theta$$

এখানে, পদসংখ্যা = $2n-1$, যা বিজোড় সংখ্যা।

$$\frac{2n-1+1}{2} \text{ অর্থাৎ } n \text{ তম পদ মধ্যপদ।}$$

$$\therefore \text{মধ্যপদ} = \tan n\theta = \tan \frac{\pi}{4} = 1 [\because 4n\theta = \pi]$$

$$\tan\theta \cdot \tan(2n-1)\theta = \tan\theta \cdot \tan(2n\theta - \theta)$$

$$= \tan\theta \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) [\because 4n\theta = \pi]$$

$$= \tan\theta \cdot \cot\theta = 1$$

$$\tan 2\theta \cdot \tan(2n-2)\theta = \tan 2\theta \cdot \tan(2n\theta - 2\theta)$$

$$= \tan 2\theta \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$$

$$= \tan 2\theta \cdot \cot 2\theta = 1$$

$$\text{অনুরূপভাবে, } \tan 3\theta \cdot \tan(2n-3)\theta = 1$$

$$\tan 4\theta \cdot \tan(2n-4)\theta = 1, \dots \text{ ইত্যাদি।}$$

$$\text{অর্থাৎ, মধ্যপদ হতে সমদ্বৰ্তী পদ দুইটির গুণফল} = 1$$

$$\therefore \tan\theta \cdot \tan 2\theta \cdot \tan 3\theta \cdots \tan(2n-1)\theta = 1$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

$$1. \text{ মান নির্ণয় করো:}$$

$$(a) \tan(-1590^\circ) = -\tan(1590^\circ)$$

$$= -\tan(4 \cdot 360^\circ + 150^\circ) = -\tan 150^\circ$$

$$= -\tan(180^\circ - 30^\circ) = +\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(b) \cos 420^\circ \sin(-300^\circ) - \sin 870^\circ \cos 570^\circ$$

$$= \cos 420^\circ (-\sin 300^\circ) - \sin 870^\circ \cos 570^\circ$$

$$= -\cos(360^\circ + 60^\circ) \sin(360^\circ - 60^\circ)$$

প্রশ্নমালা-VII A

বইয়ের কম

$$\begin{aligned}
 & -\sin(2.360^\circ + 150^\circ) \cos(2.360^\circ - 150^\circ) \\
 & = -\cos 60^\circ (-\sin 60^\circ) - \sin 150^\circ \cos 150^\circ \\
 & = \cos 60^\circ \sin 60^\circ - \sin(180^\circ - 30^\circ) \\
 & \quad \cos(180^\circ - 30^\circ) \\
 & = \cos 60^\circ \sin 60^\circ - \sin 30^\circ (-\cos 30^\circ) \\
 & = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \cos^2 \frac{\pi}{24} + \cos^2 \frac{19\pi}{24} + \cos^2 \frac{31\pi}{24} + \cos^2 \frac{37\pi}{24} \\
 & = \cos^2 \frac{\pi}{24} + \cos^2 \frac{19\pi}{24} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{19\pi}{24}\right) \\
 & \quad + \cos^2 \left(3 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{24}\right) \\
 & = \cos^2 \frac{\pi}{24} + \cos^2 \frac{19\pi}{24} + \sin^2 \frac{\pi}{24} + \sin^2 \frac{19\pi}{24} \\
 & = (\sin^2 \frac{\pi}{24} + \cos^2 \frac{\pi}{24}) + (\sin^2 \frac{19\pi}{24} + \cos^2 \frac{19\pi}{24}) \\
 & = 1 + 1 = 2 \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3(a) \quad & \cos^2 25^\circ + \cos^2 35^\circ + \cos^2 45^\circ + \\
 & \cos^2 55^\circ + \cos^2 65^\circ \\
 & = \cos^2 25^\circ + \cos^2 35^\circ + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \\
 & \cos^2(90^\circ - 35^\circ) + \cos^2(90^\circ - 25^\circ) \\
 & = \cos^2 25^\circ + \cos^2 35^\circ + \frac{1}{2} + \sin^2 35^\circ \\
 & \quad + \sin^2 25^\circ \\
 & = (\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ) + \frac{1}{2} + \\
 & (\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ) \\
 & = 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2} \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3(b) \quad & \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \\
 & \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ \\
 & = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ \\
 & \quad + \sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 60^\circ \\
 & \quad + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ \\
 & = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sin^2 40^\circ + \sin^2(90^\circ - 40^\circ) + \\
 & \sin^2(90^\circ - 30^\circ) + \sin^2(90^\circ - 20^\circ) \\
 & \quad + \sin^2(90^\circ - 10^\circ) \\
 & = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ \\
 & \quad + \sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 30^\circ \\
 & \quad + \cos^2 20^\circ + \cos^2 10^\circ \\
 & = (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) \\
 & \quad + (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) \\
 & = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$4. \quad \tan \theta = \frac{3}{4} \text{ এবং } \cos \theta \text{ খণ্ডাক হলে,}$$

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sec \theta + \tan \theta} \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$\tan \theta = \frac{3}{4} \text{ এবং } \cos \theta \text{ খণ্ডাক}$$

$$\therefore \sec \theta = -\sqrt{1 + \tan^2 \theta} = -\sqrt{1 + \frac{9}{16}}$$

$$= -\sqrt{\frac{25}{16}} = -\frac{5}{4} \quad \therefore \cos \theta = -\frac{4}{5} \text{ এবং}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = \frac{3}{4} \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}$$

$$\text{এখন, } \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sec \theta + \tan \theta} = \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{-\frac{5}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= -\frac{3+4}{5} \times \frac{4}{-5+3} = -\frac{7}{5} \times \frac{4}{-2} = \frac{14}{5} \text{ (Ans.)}$$

$$5. \quad \sin \theta = \frac{12}{13} \text{ এবং } 90^\circ < \theta < 180^\circ \text{ হলে}$$

$$\text{দেখাও যে, } \frac{\tan \theta + \sec(-\theta)}{\cot \theta + \cosec(-\theta)} = \frac{10}{3}$$

$$\text{প্রমাণ : যেহেতু } \sin \theta = \frac{12}{13} \Rightarrow \cosec \theta = \frac{13}{12}$$

$$\text{এবং } 90^\circ < \theta < 180^\circ,$$

$$\therefore \cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= -\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$$

$$\sec \theta = -\frac{13}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{12}{13} \times \left(-\frac{13}{5}\right) = -\frac{12}{5}$$

$$\Rightarrow \cot \theta = -\frac{5}{12}$$

$$\text{এখন}, \frac{\tan \theta + \sec(-\theta)}{\cot \theta + \csc(-\theta)} = \frac{\tan \theta + \sec \theta}{\cot \theta - \csc \theta}$$

$$= \frac{-\frac{12}{5} - \frac{13}{5}}{-\frac{5}{12} - \frac{13}{12}} = \frac{-25}{5} \times \frac{12}{-5 - 13}$$

$$= 5 \times \frac{12}{18} = \frac{10}{3}$$

$$6. \text{ যোগফল নির্ণয় কৰ } \cos \theta + \cos(\pi + \theta) + \cos(2\pi + \theta) + \dots + \cos(n\pi + \theta)$$

$$\text{সমাধান: } \cos \theta + \cos(\pi + \theta) + \cos(2\pi + \theta) + \dots + \cos(n\pi + \theta)$$

$$= \cos \theta + \{-\cos \theta + \cos \theta - \cos \theta + \dots + (-1)^n \cos \theta\}$$

$$n = 2 \text{ হলে যোগফল} = \cos \theta + \{-\cos \theta + \cos \theta\} = \cos \theta$$

$$n = 4 \text{ হলে যোগফল} = \cos \theta + \{-\cos \theta + \cos \theta - \cos \theta + \cos \theta\} = \cos \theta$$

তদুপ, n যেকোন জোড় হলে নির্ণয় যোগফল = $\cos x$

$$n = 1 \text{ হলে যোগফল} = \cos \theta + (-\cos \theta) = 0$$

$$n = 3 \text{ হলে যোগফল} = \cos \theta + \{-\cos \theta + \cos \theta - \cos \theta\} = 0$$

তদুপ, n যেকোন বিজোড় হলে নির্ণয় যোগফল = 0

$$7. \quad n \in \mathbb{Z} \text{ হলে, } \sin\{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\} \text{ এৱং}$$

মান নির্ণয় কৰ ।

$$\text{সমাধান: (a) } \sin\{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\}$$

n জোড় সংখ্যা হলে মনে কৰি, n = 2m, m \in \mathbb{N}.

$$\therefore \sin\{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\}$$

$$= \sin\{2m\pi + (-1)^{2m} \frac{\pi}{4}\}$$

$$= \sin(2m\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

n বিজোড় সংখ্যা হলে মনে কৰি, n = 2m+1; m \in \mathbb{N}.

$$\therefore \sin\{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\}$$

$$= \sin\{(2m+1)\pi + (-1)^{2m+1} \frac{\pi}{4}\}$$

$$= \sin\{2m\pi + (\pi - \frac{\pi}{4})\}$$

$$= \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (Ans.)}$$

$$8. \text{ দেখাও যে, } \tan \frac{\pi}{12} \tan \frac{5\pi}{12} \tan \frac{7\pi}{12} \tan \frac{11\pi}{12} = 1$$

$$\text{ধৰণ: } \tan \frac{\pi}{12} \tan \frac{5\pi}{12} \tan \frac{7\pi}{12} \tan \frac{11\pi}{12}$$

$$= \tan \frac{\pi}{12} \tan \frac{5\pi}{12} \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12})$$

$$= \tan \frac{\pi}{12} \tan \frac{5\pi}{12} \cot \frac{\pi}{12} \cot \frac{5\pi}{12}$$

$$= (\tan \frac{\pi}{12} \cdot \cot \frac{\pi}{12})(\tan \frac{5\pi}{12} \cdot \cot \frac{5\pi}{12})$$

$$= 1 \cdot 1 = 1 \quad [\because \tan \theta \cdot \cot \theta = 1]$$

প্রশ্নমালা VII B

- মান নির্ণয় কৰ । (a) $\tan 105^\circ$ (b) $\cot 165^\circ$ (c) $\cosec 165^\circ$

$$(a) \tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ)$$

$$= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1}$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{1 - 3}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3} + 2)}{-2} = -(\sqrt{3} + 2).$$

$$\begin{aligned}
 1(b) \cot 165^\circ &= \cot(90^\circ + 75^\circ) = -\tan 75^\circ \\
 &= -\tan(30^\circ + 45^\circ) = -\frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ} \\
 &= -\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1} = -\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = -\frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \\
 &= -\frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = -\frac{2(\sqrt{3} + 2)}{2} = -(\sqrt{3} + 2) \\
 1(c) \cosec 165^\circ &= \cosec(90^\circ + 75^\circ) \\
 &= \sec 75^\circ = \frac{1}{\cos 75^\circ} = \frac{1}{\cos(45^\circ + 30^\circ)} \\
 &= \frac{1}{\cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{2(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{3 - 1} \\
 &= \frac{2(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{2} = \sqrt{6} + \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

২. মান নির্ণয় কর :

$$\begin{aligned}
 1(a) \cos 38^\circ 15' \sin 68^\circ 15' - \\
 &\quad \cos 51^\circ 45' \sin 21^\circ 45' \\
 &= \cos 38^\circ 15' \sin 68^\circ 15' - \\
 &\quad \cos(90^\circ - 38^\circ 15') \sin(90^\circ - 68^\circ 15') \\
 &= \cos 38^\circ 15' \sin 68^\circ 15' - \\
 &\quad \sin 38^\circ 15' \cos 68^\circ 15' \\
 &= \sin(68^\circ 15' - 38^\circ 15') = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1(b) \cos 69^\circ 22' \cos 9^\circ 22' + \\
 &\quad \cos 80^\circ 38' \cos 20^\circ 38' \\
 &= \cos 69^\circ 22' \cos 9^\circ 22' + \\
 &\quad \cos(90^\circ - 9^\circ 22') \cos(90^\circ - 69^\circ 22') \\
 &= \cos 69^\circ 22' \cos 9^\circ 22' + \\
 &\quad \sin 9^\circ 22' \sin 69^\circ 22'
 \end{aligned}$$

$$= \cos(69^\circ 22' - 9^\circ 22') = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

৩. প্রমাণ কর যে ,

$$\begin{aligned}
 1(a) L.H.S. &= \sin(25^\circ + A) \cos(25^\circ - A) + \\
 &\quad \cos(25^\circ + A) \cos(115^\circ - A) \\
 &= \sin(25^\circ + A) \cos(25^\circ - A) + \\
 &\quad \cos(25^\circ + A) \cos\{90^\circ + (25^\circ - A)\} \\
 &= \sin(25^\circ + A) \cos(25^\circ - A) - \\
 &\quad \cos(25^\circ + A) \sin(25^\circ - A) \\
 &= \sin\{(25^\circ + A) - (25^\circ - A)\} \\
 &= \sin(25^\circ + A - 25^\circ + A) \\
 &= \sin 2A = R.H.S. \text{ (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1(b) \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \beta\right) - \\
 &\quad \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \beta\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{6} - \beta\right) \\
 &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) - (\alpha + \beta) \\
 &= \cos\left\{\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right\} \\
 &= \sin(\alpha + \beta) = R.H.S. \text{ (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1(c) L.H.S. &= \sin(n+1)x \cos(n-1)x \\
 &\quad - \cos(n+1)x \sin(n-1)x \\
 &= \sin\{(n+1)x - (n-1)x\} \\
 &= \sin(nx + x - nx + x) \\
 &= \sin 2x = R.H.S. \text{ (Proved)}
 \end{aligned}$$

৪. প্রমাণ কর যে ,

$$\begin{aligned}
 1(a) L.H.S. &= \sin A \sin(B - C) + \\
 &\quad \sin B \sin(C - A) + \sin C \sin(A - B) \\
 &= \sin A (\sin B \cos C - \sin C \cos B) + \\
 &\quad \sin B (\sin C \cos A - \sin A \cos C) + \\
 &\quad \sin C (\sin A \cos B - \sin B \cos A) \\
 &= \sin A \sin B \cos C - \sin A \cos B \sin C \\
 &\quad + \cos A \sin B \sin C - \sin A \sin B \cos C \\
 &\quad + \sin A \cos B \sin C - \cos A \sin B \sin C \\
 &= 0 = R.H.S. \text{ (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4(b) \text{ L.H.S.} &= \sin(B+C) \sin(B-C) + \\
 &\quad \sin(C+A) \sin(C-A) + \\
 &\quad \sin(A+B) \sin(A-B) \\
 &= \sin^2 B - \sin^2 C + \sin^2 C - \sin^2 A + \\
 &\quad \sin^2 A - \sin^2 B \\
 &= 0 = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4(c) \text{ L.H.S.} &= \sin(135^\circ - A) + \\
 &\quad \cos(135^\circ + A) \\
 &= \sin\{180^\circ - (45^\circ + A)\} + \\
 &\quad \cos\{180^\circ - (45^\circ - A)\} \\
 &= \sin(45^\circ + A) - \cos(45^\circ - A) \\
 &= \sin(45^\circ + A) - \cos\{90^\circ - (45^\circ + A)\} \\
 &= \sin(45^\circ + A) - \sin(45^\circ + A) \\
 &= 0 = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

৫. প্রমাণ কর যে,

$$\begin{aligned}
 (a) \text{ L.H.S.} &= \frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} \\
 &= \frac{\cos 15^\circ \left(1 + \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}\right)}{\cos 15^\circ \left(1 - \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}\right)} = \frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} \\
 &= \frac{\tan 45^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 15^\circ} = \tan(45^\circ + 15^\circ) \\
 &= \tan 60^\circ = \sqrt{3} = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5(b) \text{ L.H.S.} &= \frac{\cos 25^\circ - \sin 25^\circ}{\cos 25^\circ + \sin 25^\circ} \\
 &= \frac{\cos 25^\circ \left(1 - \frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ}\right)}{\cos 25^\circ \left(1 + \frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ}\right)} = \frac{1 - \tan 25^\circ}{1 + \tan 25^\circ} \\
 &= \frac{\tan 45^\circ - \tan 25^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 25^\circ} = \tan(45^\circ - 25^\circ) \\
 &= \tan 20^\circ = \text{R.H.S. (proved)}
 \end{aligned}$$

$$5(c) \text{ L.H.S.} = \frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin(90^\circ - 15^\circ) + \sin 15^\circ}{\sin(90^\circ - 15^\circ) - \sin 15^\circ} \\
 &= \frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ \left(1 + \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}\right)}{\cos 15^\circ \left(1 - \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}\right)} \\
 &= \frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} = \frac{\tan 45^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 15^\circ} \\
 &= \tan(45^\circ + 15^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

৬. প্রমাণ কর যে,

$$(a) \tan \frac{\pi}{4} = \tan\left(\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{\tan \frac{\pi}{20} + \tan \frac{\pi}{5}}{1 - \tan \frac{\pi}{20} \tan \frac{\pi}{5}}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\pi}{20} + \tan \frac{\pi}{5} = 1 - \tan \frac{\pi}{20} \tan \frac{\pi}{5}$$

$$\therefore \tan \frac{\pi}{20} + \tan \frac{\pi}{5} + \tan \frac{\pi}{20} \tan \frac{\pi}{5} = 1$$

$$6(b) \tan 70^\circ = \tan(50^\circ + 20^\circ)$$

[চ.০৫; জ.১০; প.ক.গ.০৩]

$$\Rightarrow \tan 70^\circ = \frac{\tan 50^\circ + \tan 20^\circ}{1 - \tan 50^\circ \tan 20^\circ}$$

$$\Rightarrow \tan 70^\circ - \tan 70^\circ \tan 50^\circ \tan 20^\circ = \tan 50^\circ + \tan 20^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 70^\circ - \tan(90^\circ - 20^\circ) \tan 50^\circ \tan 20^\circ = \tan 50^\circ + \tan 20^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 70^\circ - \cot 20^\circ \tan 50^\circ \tan 20^\circ = \tan 50^\circ + \tan 20^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 70^\circ - \tan 50^\circ = \tan 50^\circ + \tan 20^\circ$$

$$\therefore \tan 70^\circ = \tan 20^\circ + 2 \tan 50^\circ$$

$$6(c) \tan(A - B) = -\tan(B - A)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\tan\{(B - C) + (C - A)\} \\
 &= -\frac{\tan(B - C) + \tan(C - A)}{1 - \tan(B - C) \tan(C - A)}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tan(A - B) - \tan(A - B) \tan(B - C)$$

$$\begin{aligned}\tan(C-A) &= -\tan(B-C) - \tan(C-A) \\ \tan(B-C) + \tan(C-A) + \tan(A-B) &= \tan(B-C) \tan(C-A) \tan(A-B)\end{aligned}$$

$$7(a) \text{ L.H.S.} = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\left(\sin\theta \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \theta\right)$$

$$\left(\sin\theta \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \theta\right)$$

$$= 2\left(\sin\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta\right)$$

$$\left(\sin\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} (\sin\theta + \cos\theta)(\sin\theta - \cos\theta)$$

$$= \sin^2\theta - \cos^2\theta = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$\text{বিকল পদ্ধতি: L.H.S.} = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2(\sin^2\theta - \sin^2\frac{\pi}{4})$$

$$[\because \sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B]$$

$$= 2(\sin^2\theta - \frac{1}{2}) = 2\sin^2\theta - 1$$

$$= 2\sin^2\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= \sin^2\theta - \cos^2\theta = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$7(b) \text{ L.H.S.} = \tan(A+B) \tan(A-B)$$

$$= \frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos(A+B)\cos(A-B)}$$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A - \sin^2 B} = \text{R.H.S.}$$

$$7.(c) \text{ L.H.S.} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}$$

$$= \left\{ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)} \right\} \div$$

$$\begin{aligned}& \left\{ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)} \right\} \\&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)} \times \\& \quad \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)} \\&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta - \frac{\pi}{4} + \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta + \frac{\pi}{4} - \theta\right)} = \frac{\sin 2\theta}{\sin \frac{\pi}{2}} \\&= \sin 2\theta = \text{R.H.S. (Proved)}\end{aligned}$$

$$8. (a) a \cos(x + \alpha) = b \cos(x - \alpha) \text{ হলে দেখাও } \\ \text{যে, } (a+b) \tan x = (a-b) \cot \alpha \quad [\text{জ.'oC}]$$

$$\text{প্রমাণ : } \text{দেওয়া আছে, } a \cos(x + \alpha) = b \cos(x - \alpha) \\ \Rightarrow a(\cos x \cos \alpha - \sin x \sin \alpha)$$

$$= b(\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha)$$

$$\Rightarrow (a-b)\cos x \cos \alpha = (a+b) \sin x \sin \alpha$$

$$\Rightarrow (a+b) \frac{\sin x}{\cos x} = (a-b) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\therefore (a+b) \tan x = (a-b) \cot \alpha$$

$$8(b) a \sin(x + \theta) = b \sin(x - \theta) \text{ হলে } \\ \text{দেখাও যে, } (a+b) \tan \theta + (a-b) \tan x = 0$$

$$\text{প্রমাণ : } \text{দেওয়া আছে, } a \sin(x + \theta) = b \sin(x - \theta) \\ \Rightarrow a(\sin x \cos \theta + \sin \theta \cos x)$$

$$= b(\sin x \cos \theta - \sin \theta \cos x)$$

$$\Rightarrow (a-b) \sin x \cos \theta = -(a+b) \sin \theta \cos x$$

$$\Rightarrow (a-b) \frac{\sin x}{\cos x} = -(a+b) \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\Rightarrow (a-b) \tan x = -(a+b) \tan \theta$$

$$\therefore (a+b) \tan \theta + (a-b) \tan x = 0$$

$$8.(c) \theta \text{ কোণকে } \alpha \text{ এবং } \beta \text{ এই দুই অঙ্গে এমন ভাবে \\ \text{বিভক্ত করা হল যেন, } \tan \alpha : \tan \beta = x : y \text{ হয়।}$$

দেখাও যে, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{x - y}{x + y} \sin \theta$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\theta = \alpha + \beta$ এবং
 $\tan \alpha - \tan \beta = x : y$

$$\Rightarrow \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha + \tan \beta = \frac{x+y}{x-y} (\tan \alpha - \tan \beta)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{x+y}{x-y} \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{x+y}{x-y} \left(\frac{\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} \right)$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \frac{x+y}{x-y} \sin(\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{x+y}{x-y} \sin(\alpha - \beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{x-y}{x+y} \sin \theta$$

8(d) $\tan \theta + \sec \theta = \frac{x}{y}$ হলে দেখাও যে,

$$\sin \theta = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\tan \theta + \sec \theta = \frac{x}{y}$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{x^2}{y^2} \quad [\text{উভয় পক্ষকে বর্ষ করে।}]$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{1 + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

[যোজন-বিয়োজন করে।]

$$\Rightarrow \frac{1 + 2 \sin \theta + (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{(1 - \cos^2 \theta) + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 2 \sin \theta + 1}{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2(1 + \sin \theta)}{2 \sin \theta (1 + \sin \theta)} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin \theta} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (\text{Showed})$$

8.(e) $\sin(A + B) = n \sin(A - B)$ এবং $n \neq 1$

হলে দেখাও যে, $\cot A = \frac{n-1}{n+1} \cot B$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sin(A + B) = n \sin(A - B)$

$$\Rightarrow \frac{\sin(A + B)}{\sin(A - B)} = n$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(A + B) + \sin(A - B)}{\sin(A + B) - \sin(A - B)} = \frac{n+1}{n-1}$$

[যোজন-বিয়োজন করে।]

$$\Rightarrow \frac{2 \sin A \cos B}{2 \sin B \cos A} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\cot B}{\cot A} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\therefore \cot A = \frac{n-1}{n+1} \cot B$$

9. (a) $a \sin(\theta + \alpha) = b \sin(\theta + \beta)$ হলে

দেখাও যে, $\cot \theta = \frac{a \cos \alpha - b \cos \beta}{b \sin \beta - a \sin \alpha}$ [য. '০৫]

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $a \sin(\theta + \alpha) = b \sin(\theta + \beta)$

$$\Rightarrow a(\sin \theta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \theta) = b(\sin \theta \cos \beta + \sin \beta \cos \theta)$$

$$\Rightarrow a \sin \theta \cos \alpha - b \sin \theta \cos \beta$$

$$= b \sin \beta \cos \theta - a \sin \alpha \cos \theta$$

$$\Rightarrow (a \cos \alpha - b \cos \beta) \sin \theta$$

$$= (b \sin \beta - a \sin \alpha) \cos \theta$$

$$\therefore \cot \theta = \frac{a \cos \alpha - b \cos \beta}{b \sin \beta - a \sin \alpha} \quad (\text{Showed})$$

9.(b) $\sin \theta = k \cos(\theta - \alpha)$ হলে দেখাও যে,

$$\cot \theta = \frac{1 + k \sin \alpha}{k \cos \alpha} \quad [\text{কু. } '12]$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sin \theta = k \cos(\theta - \alpha)$

$$\Rightarrow \sin \theta = k(\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha)$$

$$\Rightarrow \sin \theta + k \sin \theta \sin \alpha = k \cos \theta \cos \alpha$$

$$\Rightarrow (1 + k \sin \alpha) \sin \theta = k \cos \theta \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1 + k \sin \alpha}{k \cos \alpha} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1 + k \sin \alpha}{k \cos \alpha}$$

$$9(c) \cot \alpha + \cot \beta = a, \tan \alpha + \tan \beta = b$$

$$\text{এবং } \alpha + \beta = \theta \text{ হলে দেখাও যে, } (a - b) \tan \theta = a b$$

[জ. '০১, '১১; য. '০১; ব. '০৮]

প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$$\cot \alpha + \cot \beta = a \dots (1), \tan \alpha + \tan \beta = b \dots (2)$$

$$\text{এবং } \alpha + \beta = \theta \dots \dots (3)$$

$$(1) \text{ হতে } \cot \alpha + \cot \beta = a \Rightarrow \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} = a$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \beta + \tan \alpha}{\tan \alpha \tan \beta} = a$$

$$\Rightarrow \frac{b}{\tan \alpha \tan \beta} = a \Rightarrow \tan \alpha \tan \beta = \frac{b}{a}$$

এখন, $\theta = \alpha + \beta$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tan \theta &= \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{b}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{ab}{a - b} \end{aligned}$$

$$\therefore (a - b) \tan \theta = ab$$

$$9(d) \frac{\sin(\alpha + \theta)}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin(\beta + \theta)}{\sin \beta} \text{ হলে দেখাও}$$

$$\text{সি. } \cot \alpha - \cot \theta = 2 \cot \beta \quad [\text{কু. } '12]$$

$$\text{প্রমাণ : দেওয়া আছে, } \frac{\sin(\alpha + \theta)}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin(\beta + \theta)}{\sin \beta}$$

$$\Rightarrow \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \theta) = 2 \sin \alpha \cdot \sin(\beta + \theta)$$

$$\Rightarrow (\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) \sin \beta = 2 \sin \alpha (\sin \beta \cos \theta + \sin \theta \cos \beta)$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \theta \sin \beta + \cos \alpha \sin \theta \sin \beta$$

$$\begin{aligned} &= 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \theta + 2 \sin \alpha \sin \theta \cos \beta \\ \Rightarrow \cos \alpha \sin \theta \sin \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \theta &= 2 \sin \alpha \sin \theta \cos \beta \end{aligned}$$

ধরি, $\sin \theta \sin \alpha \sin \beta \neq 0$ এবং উভয় পক্ষকে $\sin \theta \sin \alpha \sin \beta$ দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই,

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 2 \frac{\cos \beta}{\sin \beta}$$

$$\therefore \cot \alpha - \cot \theta = 2 \cot \beta$$

$$10. A + B = \frac{\pi}{4} \text{ হলে দেখাও যে,}$$

$$(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$$

$$\text{প্রমাণ : দেওয়া আছে, } A + B = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan(A + B) = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 1$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B = 1 - \tan A \tan B$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan A \tan B + 1 = 2$$

$$\Rightarrow 1(1 + \tan A) + \tan B(1 + \tan A) = 2$$

$$\therefore (1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2 \text{ (Showed)}$$

$$11.(a) \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta + 1 = 0 \text{ হলে}$$

$$\text{প্রমাণ কর যে, } 1 + \cot \alpha \tan \beta = 0 \quad [\text{য. } '09]$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$$\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 1$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = 1 \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) \neq \cos 0$$

$$\therefore \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha$$

$$\text{এখন, L.H.S.} = 1 + \cot \alpha \tan(-\alpha)$$

$$= 1 + \frac{1}{\tan \alpha} (-\tan \alpha) = 1 - 1 = 0 = \text{R.H.S.}$$

$$11. (b) \tan \beta = \frac{2 \sin \alpha \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} \text{ হলে দেখাও যে,}$$

$$\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \gamma} = \frac{2}{\tan \beta}.$$

$$\text{প্রমাণ : দেওয়া আছে, } \tan \beta = \frac{2 \sin \alpha \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{2 \sin \alpha \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

$$\Rightarrow \sin \beta (\sin \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\sin\alpha \cos\beta \sin\gamma \\
 \Rightarrow \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma + \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma \\
 &\quad = 2\sin\alpha \cos\beta \sin\gamma
 \end{aligned}$$

ধরি, $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \neq 0$ এবং উভয় পক্ষকে $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই,

$$\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2 \frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \cot\gamma + \cot\alpha = 2 \cot\beta$$

$$\therefore \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\gamma} = \frac{2}{\tan\beta} \text{ (Showed)}$$

$$11(c) \tan\beta = \frac{n \sin\alpha \cos\alpha}{1 - n \sin^2\alpha} \text{ হলে দেখাও যে,}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = (1 - n) \tan\alpha$$

$$\text{প্রমাণ : } \tan\beta = \frac{n \sin\alpha \cos\alpha}{1 - n \sin^2\alpha} \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{এখন, } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{n \sin\alpha \cos\alpha}{1 - n \sin^2\alpha}}{1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{n \sin\alpha \cos\alpha}{1 - n \sin^2\alpha}} \\
 &= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \left(1 - \frac{n \cos^2\alpha}{1 - n \sin^2\alpha}\right)}{1 + \frac{n \sin^2\alpha}{1 - n \sin^2\alpha}} \\
 &= \tan\alpha \left(\frac{1 - n \sin^2\alpha - n \cos^2\alpha}{1 - n \sin^2\alpha} \right) \times \\
 &\quad \frac{1 - n \sin^2\alpha}{1 - n \sin^2\alpha + n \sin^2\alpha} \\
 &= \tan\alpha \frac{1 - n(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{1}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \tan(\alpha - \beta) = (1 - n) \tan\alpha \text{ (Showed)}$$

$$12(a) \tan\alpha - \tan\beta = x \text{ এবং } \cot\beta - \cot\alpha = y$$

$$\text{হলে দেখাও যে, } \cot(\alpha - \beta) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

$$\text{প্রমাণ : } \text{দেওয়া আছে, } \tan\alpha - \tan\beta = x \text{ এবং}$$

$$\cot\beta - \cot\alpha = y$$

$$\begin{aligned}
 \text{এখন, } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{\tan\alpha - \tan\beta} + \frac{1}{\cot\beta - \cot\alpha} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{\cot\alpha} - \frac{1}{\cot\beta}} + \frac{1}{\cot\beta - \cot\alpha} \\
 &= \frac{\cot\alpha \cot\beta}{\cot\beta - \cot\alpha} + \frac{1}{\cot\beta - \cot\alpha} \\
 &= \frac{\cot\alpha \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha} = \cot(\alpha - \beta)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \cot(\alpha - \beta) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \text{ (Showed)}$$

$$(b) \tan\theta = \frac{x \sin\varphi}{1 - x \cos\varphi} \text{ এবং } \tan\varphi = \frac{y \sin\theta}{1 - y \cos\theta}$$

$$\text{হলে দেখাও যে, } \frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{x}{y}.$$

$$\text{প্রমাণ : } \text{দেওয়া আছে, } \tan\theta = \frac{x \sin\varphi}{1 - x \cos\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x \sin\varphi}{1 - x \cos\varphi}$$

$$\Rightarrow x \cos\theta \sin\varphi = \sin\theta - x \sin\theta \cos\varphi$$

$$\Rightarrow x(\cos\theta \sin\varphi + \sin\theta \cos\varphi) = \sin\theta$$

$$\Rightarrow x \cos(\theta + \varphi) = \sin\theta \Rightarrow x = \frac{\sin\theta}{\sin(\theta + \varphi)}$$

$$\text{এবং } \tan\varphi = \frac{y \sin\theta}{1 - y \cos\theta} \Rightarrow \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y \sin\theta}{1 - y \cos\theta}$$

$$\Rightarrow y(\sin\theta \cos\varphi + \sin\varphi \cos\theta) = \sin\varphi$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sin\varphi}{\sin(\theta + \varphi)}$$

$$\text{এখন, } \frac{x}{y} = \frac{\sin\theta}{\sin(\theta + \varphi)} \times \frac{\sin(\theta + \varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}$$

$$\therefore \frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{x}{y} \text{ (Showed)}$$

$$13.(a) \sin x + \sin y = a \text{ এবং } \cos x + \cos y = b$$

$$\text{হলে প্রমাণ কর যে, } \sin \frac{1}{2}(x - y) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - a^2 - b^2}$$

$$\text{প্রমাণ : } \text{দেওয়া আছে, } \sin x + \sin y = a$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \sin^2 y + 2 \sin x \sin y = a^2 \dots (1)$$

এবং $\cos x + \cos y = b$

$$\Rightarrow \cos^2 x + \cos^2 y + 2 \cos x \cos y = b^2 \dots (2)$$

(1) ও (2) যোগ করে পাই,

$$(\sin^2 x + \cos^2 x) + (\sin^2 y + \cos^2 y) +$$

$$2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 1 + 1 + 2 \cos(x - y) = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 2\{1 + \cos(x - y)\} = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 2\{2 \cos^2 \frac{1}{2}(x - y)\} = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 4\{1 - \sin^2 \frac{1}{2}(x - y)\} = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 4 \sin^2 \frac{1}{2}(x - y) = 4 - a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{4}(4 - a^2 - b^2)$$

$$\sin \frac{1}{2}(x - y) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - a^2 - b^2}$$

13(b) $\cos(\alpha - \beta) \cos \gamma = \cos(\alpha - \gamma + \beta)$
হলে দেখাও যে, $\cot \alpha, \cot \gamma$ এবং $\cot \beta$ সমান্তর প্রগমন ভুক্ত।

প্রমাণ : $\cos(\alpha - \beta) \cos \gamma = \cos(\alpha - \gamma + \beta)$

$$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) \cos \gamma - \cos((\alpha + \beta) - \gamma) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) \cos \gamma - \{\cos(\alpha + \beta) \cos \gamma + \sin(\alpha + \beta) \sin \gamma\} = 0$$

$$\Rightarrow \{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\} \cos \gamma - \sin(\alpha + \beta) \sin \gamma = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) \sin \gamma = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \beta \cos \alpha \sin \gamma = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cot \gamma - \cos \beta - \cot \alpha = 0$$

[উভয় পক্ষকে $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ দ্বারা ভাগ করে]

$$\Rightarrow \cot \gamma - \cos \beta = \cot \alpha - \cot \gamma$$

$$\Rightarrow \cot \alpha - \cot \gamma = \cot \gamma - \cos \beta$$

$\cot \alpha, \cot \gamma$ এবং $\cot \beta$ সমান্তর প্রগমন ভুক্ত।

$$13(c) \cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha) + \cos(\alpha - \beta) = -\frac{3}{2}$$

হলে দেখাও যে, $\sum \cos \alpha = 0$ এবং $\sum \sin \alpha = 0$

প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$$\cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha) + \cos(\alpha - \beta) = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2(\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma + \cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = -3$$

$$\Rightarrow 2(\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha) + 2(\sin \alpha \sin \beta + \sin \beta \sin \gamma + \sin \gamma \sin \alpha) + 1 + 1 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2(\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha) + 2(\sin \alpha \sin \beta + \sin \beta \sin \gamma + \sin \gamma \sin \alpha) + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) = 0$$

$$\Rightarrow \{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2(\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha)\} + \{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2(\sin \alpha \sin \beta + \sin \beta \sin \gamma + \sin \gamma \sin \alpha)\} = 0$$

$$\Rightarrow (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2 = 0$$

$$\therefore \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0 \text{ এবং } \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$$

[\because দুইটি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি শূন্য হলে সংখ্যা দুইটি পৃথক পৃথক ভাবে শূন্য হয়।]

$$\therefore \sum \cos \alpha = 0 \text{ এবং } \sum \sin \alpha = 0$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. মান নির্ণয় কর :

(a) $\sin 76^\circ 40' \cos 16^\circ 40'$
 $\cos 73^\circ 20' \sin 13^\circ 20'$
 $= \sin 76^\circ 40' \cos 16^\circ 40' - \cos(90^\circ - 16^\circ 40')$
 $\sin(90^\circ - 76^\circ 40')$
 $= \sin 76^\circ 40' \cos 16^\circ 40' - \sin 16^\circ 40' \cos 76^\circ 40'$
 $= \sin(76^\circ 40' - 16^\circ 40') = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\cos 17^\circ 40' \sin 77^\circ 40' +$
 $\cos 107^\circ 40' \sin 12^\circ 20'$
 $= \cos 17^\circ 40' \sin 77^\circ 40' +$

$$\begin{aligned} & \cos(90^\circ + 17^\circ 40') \sin(90^\circ - 77^\circ 40') \\ &= \cos 17^\circ 40' \sin 77^\circ 40' - \\ & \quad \sin 17^\circ 40' \cos 77^\circ 40' \\ &= \sin(77^\circ 40' - 17^\circ 40') = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{c}) \quad & \frac{\tan 68^\circ 35' - \cot 66^\circ 25'}{1 + \tan 68^\circ 35' \cot 66^\circ 25'} \\ &= \frac{\tan 68^\circ 35' - \cot(90^\circ - 23^\circ 35')}{1 + \tan 68^\circ 35' \cot(90^\circ - 23^\circ 35')} \\ &= \frac{\tan 68^\circ 35' - \tan 23^\circ 35'}{1 + \tan 68^\circ 35' \tan 23^\circ 35'} \\ &= \tan(68^\circ 35' - 23^\circ 35') = \tan 45^\circ = 1 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

ঘোষণ কর যে,

$$\begin{aligned} 2. \quad & \cos(A - B) \cos(A - C) + \sin(A - B) \cdot \\ & \sin(A - C) = \cos(B - C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \cos(A - B) \cos(A - C) + \\ & \quad \sin(A - B) \sin(A - C) \\ &= \cos\{(A - B) - (A - C)\} \\ &= \cos(A - B - A + C) = \cos(-B + C) \\ &= \cos(B - C) = \text{R.H.S. (Proved)} \end{aligned}$$

$$3. \quad \frac{\cot(3A - B) \cot B - 1}{-\cot B - \cot(3A - B)} = -\cot 3A$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \frac{\cot(3A - B) \cot B - 1}{-\cot B - \cot(3A - B)} \\ &= \frac{\cot(3A - B) \cot B - 1}{-\{\cot B + \cot(3A - B)\}} \\ &= -\frac{\cot(3A - B) \cot B - 1}{\cot B + \cot(3A - B)} \\ &= -\cot(3A - B + B) = -\cot 3A \\ &= \text{R.H.S. (Proved)} \end{aligned}$$

$$4. \quad \cos A + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + A\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \cos A + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) + \\ & \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3} + A\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \cos A + 2\cos\frac{2\pi}{3} \cos A \\ &= \cos A + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cos A \\ &= \cos A - \cos A = 0 = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

(Proved)

$$5. \quad \frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ} \\ &= \frac{\sin(90^\circ - 15^\circ) - \sin 15^\circ}{\sin(90^\circ - 15^\circ) + \sin 15^\circ} \\ &= \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ \left(1 - \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}\right)}{\cos 15^\circ \left(1 + \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}\right)} \\ &= \frac{1 - \tan 15^\circ}{1 + \tan 15^\circ} = \frac{\tan 45^\circ - \tan 15^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 15^\circ} \\ &= \tan(45^\circ - 15^\circ) = \tan 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{R.H.S. (proved)} \end{aligned}$$

$$6. \quad \text{(a)} \quad \tan 5A \tan 3A \tan 2A = \tan 5A - \tan 3A - \tan 2A$$

$$\text{(b)} \quad \tan 32^\circ + \tan 13^\circ + \tan 32^\circ \tan 13^\circ = 1$$

$$\text{(c)} \quad \tan \frac{\pi}{20} + \tan \frac{\pi}{5} + \tan \frac{\pi}{20} \tan \frac{\pi}{5} = 1$$

ঘোষণ: (a) $\tan 5A = \tan(3A + 2A)$

$$\Rightarrow \tan 5A = \frac{\tan 3A + \tan 2A}{1 - \tan 3A \tan 2A}$$

$$\Rightarrow \tan 3A + \tan 2A = \tan 5A - \tan 5A \tan 3A \tan 2A$$

$$\therefore \tan 5A \tan 3A \tan 2A = \tan 5A - \tan 3A - \tan 2A$$

$$\text{(b)} \quad \tan 45^\circ = \tan(32^\circ + 13^\circ)$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{\tan 32^\circ + \tan 13^\circ}{1 - \tan 32^\circ \tan 13^\circ}$$

$$\Rightarrow \tan 32^\circ + \tan 13^\circ = 1 - \tan 32^\circ \tan 13^\circ$$

$$\therefore \tan 32^\circ + \tan 13^\circ + \tan 32^\circ \tan 13^\circ = 1$$

(c) $\tan 50^\circ = \tan 40^\circ + 10^\circ$

$$\Rightarrow \tan 50^\circ = \frac{\tan 40^\circ + \tan 10^\circ}{1 - \tan 40^\circ \tan 10^\circ}$$

$$\Rightarrow \tan 50^\circ - \tan 50^\circ \tan 40^\circ \tan 10^\circ = \tan 40^\circ + \tan 10^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 50^\circ - \tan (90^\circ - 40^\circ) \tan 40^\circ = \tan 40^\circ + \tan 10^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 50^\circ - \cot 40^\circ \tan 40^\circ \tan 10^\circ = \tan 40^\circ + \tan 10^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 50^\circ - \tan 10^\circ = \tan 40^\circ + \tan 10^\circ$$

$$\tan 50^\circ = \tan 40^\circ + 2\tan 10^\circ$$

7. (a) $\tan (45^\circ + A) \tan (45^\circ - A) = 1$

(b) $\cos^2(A - B) - \sin^2(A + B) = \cos 2A - \cos 2B$.

$$(a) L.H.S. = \tan (45^\circ + A) \tan (45^\circ - A)$$

$$= \tan (45^\circ + A) \tan \{90^\circ - (45^\circ + A)\}$$

$$= \tan (45^\circ + A) \cdot \cot (45^\circ + A)$$

$$= 1 = R.H.S. \text{ (Proved)}$$

$$(b) L.H.S. = \cos^2(A - B) - \sin^2(A + B)$$

$$= \cos \{(A - B) + (A + B)\}$$

$$= \cos \{(A - B) - (A + B)\}$$

$$= \cos (A - B + A + B) \cos (A - B - A - B)$$

$$= \cos 2A \cos (-2B) = \cos 2A \cos 2B = R.H.S.$$

11.(a) $\sin \alpha = k \sin (\alpha + \beta)$ হলে দেখাও যে,

$$\tan (\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta}{\cos \beta - k}$$

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $\sin \alpha = k \sin (\alpha + \beta)$

$$\Rightarrow \sin \alpha = k (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = k \sin \alpha \cos \beta + k \sin \beta \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \alpha (1 - k \cos \beta) = k \sin \beta \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{k \sin \beta}{1 - k \cos \beta}$$

এখন, $\tan (\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

$$= \frac{\frac{k \sin \beta}{1 - k \cos \beta} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{k \sin \beta}{1 - k \cos \beta} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}$$

$$= \frac{\frac{k \sin \beta \cos \beta + \sin \beta - k \sin \beta \cos \beta}{(1 - k \cos \beta) \cos \beta}}{\cos \beta - k \cos^2 \beta - k \sin^2 \beta}$$

$$= \frac{\sin \beta}{\cos \beta - k(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)}$$

$$\tan (\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta}{\cos \beta - k} \text{ (Showed)}$$

(b) $\tan \alpha = \frac{b}{a}$ হলে দেখাও যে,

$$a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos (\theta - \alpha)$$

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $\tan \alpha = \frac{b}{a}$

এখন, $\sqrt{a^2 + b^2} \cos (\theta - \alpha)$

$$= \sqrt{a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)} \cos (\theta - \alpha)$$

$$= a \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \cos (\theta - \alpha)$$

$$= a \sqrt{\sec^2 \alpha} \cos (\theta - \alpha) = a \sec \alpha \cos (\theta - \alpha)$$

$$= \frac{a}{\cos \alpha} (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta)$$

$$= a \cos \theta + a \sin \theta \tan \alpha$$

$$= a \cos \theta + a \sin \theta \frac{b}{a}$$

$$= a \cos \theta + b \sin \theta$$

$$a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos (\theta - \alpha)$$

বিকল্প পদ্ধতি: দেওয়া আছে, $\tan \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{b}{a}$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{b} = \frac{\cos \alpha}{a} = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$b = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \alpha, a = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \alpha$$

এখন, $a \cos \theta + b \sin \theta$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta)$$

$$\therefore a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos (\theta - \alpha)$$

(showed)

12.(a) $\cos\alpha + \cos\beta = a$ এবং $\sin\alpha + \sin\beta = b$

$$\text{হলে দেখাও যে, } \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2)$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\cos\alpha + \cos\beta = a$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta = a^2 \quad \dots(1)$$

$$\text{এবং } \sin\alpha + \sin\beta = b$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta = b^2 \quad \dots(2)$$

(1) ও (2) যোগ করে পাই,

$$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\sin^2\beta + \cos^2\beta) +$$

$$2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 1 + 1 + 2\cos(\alpha - \beta) = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 2\cos(\alpha - \beta) = a^2 + b^2 - 2$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2). \text{(Showed)}$$

(b) $\tan\theta = \frac{a\sin x + b\sin y}{a\cos x + b\cos y}$ হলে দেখাও যে, a

$$\sin(\theta - x) + b\sin(\theta - y) = 0.$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{a\sin x + b\sin y}{a\cos x + b\cos y}$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a\sin x + b\sin y}{a\cos x + b\cos y}$$

$$\Rightarrow a\sin\theta\cos x + b\sin\theta\cos y =$$

$$a\sin x\cos\theta + b\cos\theta\sin y$$

$$\Rightarrow a(\sin\theta\cos x - \sin x\cos\theta) +$$

$$b(\sin\theta\cos y - \cos\theta\sin y) = 0$$

$$a\sin(\theta - x) + b\sin(\theta - y) = 0 \quad \text{(Showed)}$$

(c) $\tan\beta = \frac{\sin 2\alpha}{5 + \cos 2\alpha}$ হলে দেখাও যে,

$$3\tan(\alpha - \beta) = 2\tan\alpha.$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\tan\beta = \frac{\sin 2\alpha}{5 + \cos 2\alpha}$

$$2\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{1 + \tan^2\alpha}{5 + \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}}$$

$$= \frac{\frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}}{\frac{5 + 5\tan^2\alpha + 1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}} = \frac{2\tan\alpha}{6 + 4\tan^2\alpha}$$

$$= \frac{\tan\alpha}{3 + 2\tan^2\alpha}$$

$$\text{এখন, } 3\tan(\alpha - \beta) = 3 \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$= 3 \frac{\tan\alpha - \frac{\tan\alpha}{3 + 2\tan^2\alpha}}{1 + \tan\alpha \cdot \frac{\tan\alpha}{3 + 2\tan^2\alpha}}$$

$$= 3 \frac{3\tan\alpha + 2\tan^3\alpha - \tan\alpha}{3 + 2\tan^2\alpha + \tan^2\alpha}$$

$$= 3 \frac{2\tan\alpha + 2\tan^3\alpha}{3 + 3\tan^2\alpha}$$

$$= 3 \frac{2\tan\alpha(1 + \tan^2\alpha)}{3(1 + \tan^2\alpha)} = 2\tan\alpha$$

$$\therefore 3\tan(\alpha - \beta) = 2\tan\alpha$$

13. (a) $\cos(\alpha + \beta)\sin(\gamma + \theta) = \cos(\alpha - \beta)\sin(\gamma - \theta)$
সিন $(\gamma - \theta)$ হলে দেখাও যে, $\tan\theta = \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\cos(\alpha + \beta)\sin(\gamma + \theta) = \cos(\alpha - \beta)\sin(\gamma - \theta)$

$$\Rightarrow \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin(\gamma - \theta)}{\sin(\gamma + \theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin(\gamma - \theta) + \sin(\gamma + \theta)}{\sin(\gamma - \theta) - \sin(\gamma + \theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos\alpha\cos\beta}{-2\sin\alpha\sin\beta} = \frac{2\sin\gamma\cos\theta}{-2\sin\theta\cos\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\tan\gamma}{\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma \quad \text{(Showed)}$$

(b) $(\theta - \varphi)$ সূক্ষ্মকোণ এবং $\sin\theta + \sin\varphi = \sqrt{3}(\cos\varphi - \cos\theta)$ হলে দেখাও যে, $\sin 3\theta + \sin 3\varphi = 0$

$$\text{প্রমাণ : } \sin\theta + \sin\varphi = \sqrt{3}(\cos\varphi - \sin\theta)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 2 \sin \frac{1}{2}(\theta + \varphi) \cos \frac{1}{2}(\theta - \varphi) &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = \text{R.H.S. (Proved)} \\
 \sqrt{3} \{ 2 \sin \frac{1}{2}(\theta + \varphi) \sin \frac{1}{2}(\theta - \varphi) \} & \\
 \Rightarrow \cos \frac{1}{2}(\theta - \varphi) &= \sqrt{3} \sin \frac{1}{2}(\theta - \varphi) \\
 \Rightarrow \cot \frac{1}{2}(\theta - \varphi) &= \sqrt{3} = \cot 30^{\circ} \\
 \frac{1}{2}(\theta - \varphi) &= 30^{\circ} \text{ যেহেতু } (\theta - \varphi) \text{ সূক্ষ্মকোণ} \\
 \Rightarrow \theta - \varphi &= 60^{\circ} \\
 \text{এখন, } \sin 3\theta + \sin 3\varphi & \\
 &= 2 \sin \frac{3}{2}(\theta + \varphi) \cos \frac{3}{2}(\theta - \varphi) \\
 &= 2 \sin \frac{3}{2}(\theta + \varphi) \cos \frac{3}{2}(60^{\circ}) \\
 &= 2 \sin \frac{3}{2}(\theta + \varphi) \cos 90^{\circ} \\
 &= 2 \sin \frac{3}{2}(\theta + \varphi) \times 0 \\
 \therefore \sin 3\theta + \sin 3\varphi &= 0
 \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা VII C

১. প্রমাণ কর যে,

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } \sin 10^{\circ} \sin 30^{\circ} \sin 50^{\circ} \sin 70^{\circ} &= \frac{1}{16} \\
 \text{L.H.S.} &= \sin 10^{\circ} \sin 30^{\circ} \sin 50^{\circ} \sin 70^{\circ} \\
 &= \sin 10^{\circ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \{ \cos(70^{\circ} - 50^{\circ}) - \\
 &\quad \cos(70^{\circ} + 50^{\circ}) \} \\
 &= \frac{1}{4} \sin 10^{\circ} (\cos 20^{\circ} - \cos 120^{\circ}) \\
 &= \frac{1}{4} \sin 10^{\circ} \cos 20^{\circ} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right) \sin 10^{\circ} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \{ \sin(20^{\circ} + 10^{\circ}) - \\
 &\quad \sin(20^{\circ} - 10^{\circ}) \} + \frac{1}{8} \sin 10^{\circ} \\
 &= \frac{1}{8} \sin 30^{\circ} - \frac{1}{8} \sin 10^{\circ} + \frac{1}{8} \sin 10^{\circ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b) } \cos 20^{\circ} \cos 40^{\circ} \cos 60^{\circ} \cos 80^{\circ} &= \frac{1}{16} \\
 \text{L.H.S.} &= \cos 20^{\circ} \cos 40^{\circ} \cos 60^{\circ} \cos 80^{\circ} \\
 &= \frac{1}{2} \{ \cos(40^{\circ} + 20^{\circ}) + \\
 &\quad \cos(40^{\circ} - 20^{\circ}) \} \frac{1}{2} \cdot \cos 80^{\circ} \\
 &= \frac{1}{4} \{ \cos 60^{\circ} + \cos 20^{\circ} \} \cos(90^{\circ} - 10^{\circ}) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \cos 20^{\circ} \right) \sin 10^{\circ} \\
 &= \frac{1}{8} \sin 10^{\circ} + \frac{1}{4} \cos 20^{\circ} \sin 10^{\circ} \\
 &= \frac{1}{8} \sin 10^{\circ} + \frac{1}{8} \{ \sin(20^{\circ} + 10^{\circ}) \\
 &\quad - \sin(20^{\circ} - 10^{\circ}) \} \\
 &= \frac{1}{8} \sin 10^{\circ} + \frac{1}{8} \sin 30^{\circ} - \frac{1}{8} \sin 10^{\circ} \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$\text{(c) } \tan 20^{\circ} \tan 40^{\circ} \tan 60^{\circ} \tan 80^{\circ} = 3$$

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S.} &= \tan 20^{\circ} \tan 40^{\circ} \tan 60^{\circ} \tan 80^{\circ} \\
 &= \tan 20^{\circ} \tan 40^{\circ} \cdot \sqrt{3} \cdot \tan 80^{\circ} \\
 &= \sqrt{3} \tan 20^{\circ} \tan 40^{\circ} \tan 60^{\circ} \\
 &= \sqrt{3} \cdot \frac{2 \sin 20^{\circ} \sin 40^{\circ} \sin 80^{\circ}}{2 \cos 20^{\circ} \cos 40^{\circ} \cos 80^{\circ}} \\
 &= \frac{\sqrt{3} \{ \cos(40^{\circ} - 20^{\circ}) - \cos(40^{\circ} + 20^{\circ}) \} \sin(90^{\circ} - 10^{\circ})}{\{ \cos(40^{\circ} + 20^{\circ}) + \cos(40^{\circ} - 20^{\circ}) \} \cos(90^{\circ} - 10^{\circ})} \\
 &= \sqrt{3} \frac{(\cos 20^{\circ} - \cos 60^{\circ}) \cos 10^{\circ}}{(\cos 60^{\circ} + \cos 20^{\circ}) \sin 10^{\circ}} \\
 &= \sqrt{3} \frac{\cos 20^{\circ} \cos 10^{\circ} - \frac{1}{2} \cos 10^{\circ}}{\frac{1}{2} \sin 10^{\circ} + \cos 20^{\circ} \sin 10^{\circ}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \{ \cos(20^\circ + 10^\circ) + \cos(20^\circ - 10^\circ) \} - \frac{1}{2} \cos 10^\circ \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sin 10^\circ + \frac{1}{2} \{ \sin(20^\circ + 10^\circ) - \sin(20^\circ - 10^\circ) \} \\
 &= \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cos 30^\circ + \frac{1}{2} \cos 10^\circ - \frac{1}{2} \cos 10^\circ \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sin 10^\circ + \frac{1}{2} \sin 30^\circ - \frac{1}{2} \sin 10^\circ \\
 &= \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \\
 &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 = \text{R.H.S.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.(a) \cos\theta \cos(60^\circ - \theta) \cos(60^\circ + \theta) &= \frac{1}{4} \cos 3\theta \\
 \text{L.H.S.} &= \cos\theta \cos(60^\circ - \theta) \cos(60^\circ + \theta) \\
 &= \cos\theta \cdot \frac{1}{2} \{ \cos(60^\circ + \theta) + 60^\circ - \theta \\
 &\quad + \cos(60^\circ + \theta - 60^\circ + \theta) \} \\
 &= \frac{1}{2} \cos\theta (\cos 120^\circ + \cos 2\theta) \\
 &= \frac{1}{2} \cos\theta \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\theta \cos 2\theta \\
 &= -\frac{1}{4} \cos\theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \{ \cos(2\theta + \theta) + \cos(2\theta - \theta) \} \\
 &= -\frac{1}{4} \cos\theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{1}{4} \cos\theta \\
 &= \frac{1}{4} \cos 3\theta = \text{R.H.S.} \quad (\text{Proved})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2(b) \cos(36^\circ - \theta) \cos(36^\circ + \theta) + \\
 \cos(54^\circ + \theta) \cos(54^\circ - \theta) &= \cos 2\theta \\
 \text{L.H.S.} &= \cos(36^\circ - \theta) \cos(36^\circ + \theta) + \\
 &\quad \cos(54^\circ + \theta) \cos(54^\circ - \theta) \\
 &= \frac{1}{2} (\cos 72^\circ + \cos 2\theta) + \frac{1}{2} (\cos 108^\circ + \cos 2\theta) \\
 &= \frac{1}{2} \{ \cos(90^\circ - 18^\circ) + \cos 2\theta \} + \\
 &\quad \frac{1}{2} \{ \cos(90^\circ + 18^\circ) + \cos 2\theta \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} (\cos 2\theta + \cos 18^\circ) + \frac{1}{2} (\cos 2\theta - \cos 18^\circ)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} (\cos 2\theta + \cos 18^\circ + \cos 2\theta - \cos 18^\circ)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 2\theta = \cos 2\theta = \text{R.H.S.} \quad (\text{Proved})
 \end{aligned}$$

৩. প্রমাণ কর যে,

$$(a) \cos(60^\circ - \theta) + \cos(60^\circ + \theta) - \cos\theta = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S.} &= \cos(60^\circ - \theta) + \cos(60^\circ + \theta) - \cos\theta \\
 &= 2 \cos 60^\circ \cos\theta - \cos\theta
 \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cos\theta - \cos\theta$$

$$= \cos\theta - \cos\theta = 0 = \text{R.H.S.} \quad (\text{Proved})$$

$$\begin{aligned}
 (b) \sin\theta + \sin(120^\circ + \theta) + \sin(240^\circ + \theta) &= 0 \\
 \text{[জ.'১২]}
 \end{aligned}$$

$$\text{L.H.S.} = \sin\theta + \sin(120^\circ + \theta) + \sin(240^\circ + \theta)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sin\theta + \sin\{180^\circ - (60^\circ - \theta)\} + \\
 &\quad \sin\{180^\circ + (60^\circ + \theta)\}
 \end{aligned}$$

$$= \sin\theta + \sin(60^\circ - \theta) - \sin(60^\circ + \theta)$$

$$= \sin\theta - \{\sin(60^\circ + \theta) - \sin(60^\circ - \theta)\}$$

$$= \sin\theta - 2 \cos 60^\circ \sin\theta = \sin\theta - 2 \cdot \frac{1}{2} \sin\theta$$

$$= \sin\theta - \sin\theta = 0 = \text{R.H.S.} \quad (\text{Proved})$$

$$3(c) \cos 70^\circ - \cos 10^\circ + \sin 40^\circ = 0$$

$$\text{L.H.S.} = \cos 70^\circ - \cos 10^\circ + \sin 40^\circ$$

$$= 2 \sin \frac{1}{2} (70^\circ + 10^\circ) \sin \frac{1}{2} (10^\circ - 70^\circ) + \sin 40^\circ$$

$$= 2 \sin 40^\circ \sin(-30^\circ) + \sin 40^\circ$$

$$= -2 \sin 40^\circ \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \sin 40^\circ$$

$$= -\sin 40^\circ + \sin 40^\circ = 0 = \text{R.H.S.}$$

$$4(a) \sin 18^\circ + \cos 18^\circ = \sqrt{2} \cos 27^\circ \quad [\text{ব.'১১}]$$

$$\text{L.H.S.} = \sin 18^\circ + \cos 18^\circ$$

$$= \sin(90^\circ - 72^\circ) + \cos 18^\circ$$

$$= \cos 72^\circ + \cos 18^\circ$$

$$= 2 \cos \frac{1}{2} (72^\circ + 18^\circ) \cos \frac{1}{2} (72^\circ - 18^\circ)$$

$$= 2 \cos 45^\circ \cos 27^\circ = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 27^\circ$$

$$= \sqrt{2} \cos 27^\circ$$

$$4.(b) \frac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ} = \tan 35^\circ$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ (1 - \tan 10^\circ)}{\cos 10^\circ (1 + \tan 10^\circ)} = \frac{\tan 45^\circ - \tan 10^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 10^\circ}$$

$$= \tan(45^\circ - 10^\circ) = \tan 35^\circ = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$5.(a) \cot(A + 15^\circ) - \tan(A - 15^\circ)$$

$$= \frac{4 \cos 2A}{2 \sin 2A + 1}$$

$$\text{L.H.S.} = \cot(A + 15^\circ) - \tan(A - 15^\circ)$$

$$= \frac{\cos(A + 15^\circ)}{\sin(A + 15^\circ)} - \frac{\sin(A - 15^\circ)}{\cos(A - 15^\circ)}$$

$$= \frac{\cos(A + 15^\circ)\cos(A - 15^\circ) - \sin(A + 15^\circ)\sin(A - 15^\circ)}{\sin(A + 15^\circ)\cos(A - 15^\circ)}$$

$$= \frac{\cos(A + 15^\circ + A - 15^\circ)}{\frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 30^\circ)} = \frac{2 \cos 2A}{\sin 2A + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4 \cos 2A}{2 \sin 2A + 1} = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$5.(b) (\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2$$

$$= 4 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad [\text{য.'} 12]$$

$$\text{L.H.S.} = (\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2$$

$$= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$= 1 + 1 + 2(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$$

$$= 2 \{ 1 + \cos(\alpha + \beta) \}$$

$$= 2 \cdot 2 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$= 4 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$5.(c) 2 \cos \frac{\pi}{13} \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} = 0$$

$$\text{L.H.S.} = 2 \cos \frac{\pi}{13} \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13}$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{13} \cos \frac{9\pi}{13} + 2 \cos \frac{1}{2} \left(\frac{5\pi}{13} + \frac{3\pi}{13} \right) \cos \frac{1}{2} \left(\frac{5\pi}{13} - \frac{3\pi}{13} \right)$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{13} \cos \frac{9\pi}{13} + 2 \cos \frac{4\pi}{13} \cos \frac{\pi}{13}$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{13} \cos \frac{9\pi}{13} + 2 \cos \left(\pi - \frac{9\pi}{13} \right) \cos \frac{\pi}{13}$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{13} \cos \frac{9\pi}{13} - 2 \cos \frac{\pi}{13} \cos \frac{9\pi}{13}$$

$$= 0 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$6. \left(\frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B} \right)^n + \left(\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B} \right)^n$$

$= 2 \cot^n \frac{1}{2}(A - B)$ অথবা 0 যখন n যথাক্রমে জোড় অথবা বিজোড় সংখ্যা।

$$\left(\frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B} \right)^n + \left(\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B} \right)^n$$

$$= \left(\frac{2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)}{2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)} \right)^n +$$

$$\left(\frac{2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)}{2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(B - A)} \right)^n$$

$$= \left(\cot \frac{1}{2}(A - B) \right)^n + \left(\frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{-\sin \frac{1}{2}(A - B)} \right)^n$$

$$= \cot^n \frac{1}{2}(A - B) + \left(-\cot \frac{1}{2}(A - B) \right)^n$$

$$= \cot^n \frac{1}{2}(A - B) + (-1)^n \cot^n \frac{1}{2}(A - B)$$

যখন n বিজোড় সংখ্যা,

$$\cot^n \frac{1}{2}(A - B) + (-1)^n \cot^n \frac{1}{2}(A - B)$$

$$= \cot^n \frac{1}{2}(A-B) - \cot^n \frac{1}{2}(A+B) = 0,$$

যখন n জোড় সংখ্যা,

$$\cot^n \frac{1}{2}(A-B) + (-1)^n \cot^n \frac{1}{2}(A+B)$$

$$= \cot^n \frac{1}{2}(A-B) + \cot^n \frac{1}{2}(A+B)$$

$$= 2 \cot^n \frac{1}{2}(A-B)$$

$$\left(\frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B} \right)^n + \left(\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B} \right)^n =$$

$2 \cot^n \frac{1}{2}(A-B)$ অথবা o যখন যথাক্রমে জোড় অথবা বিজোড় সংখ্যা।

7. (a) $a \cos \alpha + b \sin \alpha = a \cos \beta + b \sin \beta$ হলে

দেখাও যে, $\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

দেওয়া আছে,

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = a \cos \beta + b \sin \beta$$

$$\Rightarrow a(\cos \alpha - \cos \beta) = b(\sin \beta - \sin \alpha)$$

$$\Rightarrow a \cdot 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$= b \cdot 2 \sin \frac{\beta-\alpha}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} + \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

[যোজন - বিয়োজন করে ।]

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

$$\cos^2 \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

7.(b) $\cos x = k \cos y$ হলে দেখাও যে,

$$\tan \frac{x+y}{2} = \frac{k-1}{k+1} \cot \frac{y-x}{2}$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\cos x = k \cos y$

$$\Rightarrow \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{k}{1} \Rightarrow \frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{y-x}{2}}{2 \sin \frac{y-x}{2} \sin \frac{x+y}{2}} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\cot \frac{y-x}{2}}{\tan \frac{x+y}{2}} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\tan \frac{x+y}{2} = \frac{k-1}{k+1} \cot \frac{y-x}{2}$$

7(c) $\sin \theta = k \sin (\alpha - \theta)$ [হলে দেখাও যে]

$$\tan (\theta - \frac{\alpha}{2}) = \frac{k-1}{k+1} \tan \frac{\alpha}{2}$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sin \theta = k \sin (\alpha - \theta)$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta}{\sin(\alpha - \theta)} = \frac{k}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta + \sin(\alpha - \theta)}{\sin \theta - \sin(\alpha - \theta)} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin \frac{\theta+\alpha-\theta}{2} \cos \frac{\theta-\alpha+\theta}{2}}{2 \cos \frac{\theta+\alpha-\theta}{2} \sin \frac{\theta-\alpha+\theta}{2}} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan(\theta - \frac{\alpha}{2})} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\tan \left(\theta - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{k-1}{k+1} \tan \frac{\alpha}{2} \quad (\text{Showed}).$$

7(d) $\frac{\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\beta)} = \frac{a}{b}$ হলে দেখাও যে, $\frac{a+b}{a-b} \sin^2(\alpha - \beta) = \sin^2(\theta + \alpha) - \sin^2(\theta + \beta)$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\frac{\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\beta)} = \frac{a}{b}$

$$\Rightarrow \frac{\tan(\theta + \alpha) + \tan(\theta + \beta)}{\tan(\theta + \alpha) - \tan(\theta + \beta)} = \frac{a+b}{a-b}$$

[যোজন - বিয়োজন করে ।]

$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\cos(\theta + \alpha)} + \frac{\sin(\theta + \beta)}{\cos(\theta + \beta)} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\cos(\theta + \alpha)} - \frac{\sin(\theta + \beta)}{\cos(\theta + \beta)} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta + \alpha) \cos(\theta + \beta) + \sin(\theta + \beta) \cos(\theta + \alpha)}{\sin(\theta + \alpha) \cos(\theta + \beta) - \sin(\theta + \beta) \cos(\theta + \alpha)} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\{(\theta + \alpha) + (\theta + \beta)\}}{\sin\{(\theta + \alpha) - (\theta + \beta)\}} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b} \sin(\alpha - \beta) = \sin\{(\theta + \alpha) + (\theta + \beta)\}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b} \sin^2(\alpha - \beta) =$$

$$\sin\{(\theta + \alpha) + (\theta + \beta)\} \sin\{(\theta + \alpha) - (\theta + \beta)\}$$

$$\therefore \frac{a+b}{a-b} \sin^2(\alpha - \beta) = \sin^2(\theta + \alpha) - \sin^2(\theta + \beta)$$

$\because \sin(A+B) \sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

8. $\frac{x}{\tan(\theta + \alpha)} = \frac{y}{\tan(\theta + \beta)} = \frac{z}{\tan(\theta + \gamma)}$ হলে

দেখাও যে, $\frac{x+y}{x-y} \sin^2(\alpha - \beta) +$

$$\frac{y+z}{y-z} \sin^2(\beta - \gamma) + \frac{z+x}{z-x} \sin^2(\gamma - \alpha) = 0$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$$\frac{x}{\tan(\theta + \alpha)} = \frac{y}{\tan(\theta + \beta)} = \frac{z}{\tan(\theta + \gamma)}$$

১ম ও ২য় অনুপাত হতে পাই,

$$\frac{\tan(\theta + \alpha)}{\tan(\theta + \beta)} = \frac{\tan(\theta + \beta)}{\tan(\theta + \gamma)}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan(\theta + \alpha)}{\tan(\theta + \beta)} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan(\theta + \alpha) + \tan(\theta + \beta)}{\tan(\theta + \alpha) - \tan(\theta + \beta)} = \frac{x+y}{x-y}$$

[যোজন - বিয়োজন করে ।]

$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\cos(\theta + \alpha)} + \frac{\sin(\theta + \beta)}{\cos(\theta + \beta)} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\cos(\theta + \alpha)} - \frac{\sin(\theta + \beta)}{\cos(\theta + \beta)} = \frac{x-y}{x+y}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta + \alpha) \cos(\theta + \beta) + \sin(\theta + \beta) \cos(\theta + \alpha)}{\sin(\theta + \alpha) \cos(\theta + \beta) - \sin(\theta + \beta) \cos(\theta + \alpha)} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\{(\theta + \alpha) + (\theta + \beta)\}}{\sin\{(\theta + \alpha) - (\theta + \beta)\}} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{x-y} \sin(\alpha - \beta) = \sin\{(\theta + \alpha) + (\theta + \beta)\}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{x-y} \sin^2(\alpha - \beta) =$$

$$\sin\{(\theta + \alpha) + (\theta + \beta)\} \sin\{(\theta + \alpha) - (\theta + \beta)\}$$

$$\therefore \frac{x+y}{x-y} \sin^2(\alpha - \beta) = \sin^2(\theta + \alpha) - \sin^2(\theta + \beta)$$

অনুরূপভাবে, $\frac{y}{\tan(\theta + \beta)} = \frac{z}{\tan(\theta + \gamma)}$

$$\Rightarrow \frac{y+z}{y-z} \sin^2(\beta - \gamma) = \sin^2(\theta + \beta) - \sin^2(\theta + \gamma)$$

এবং $\frac{z}{\tan(\theta + \gamma)} = \frac{x}{\tan(\theta + \alpha)}$

$$\Rightarrow \frac{z+x}{z-x} \sin^2(\gamma - \alpha) = \sin^2(\theta + \gamma) - \sin^2(\theta + \alpha)$$

$$\frac{x+y}{x-y} \sin^2(\alpha - \beta) + \frac{y+z}{y-z} \sin^2(\beta - \gamma) +$$

$$\frac{z+x}{z-x} \sin^2(\gamma - \alpha) = \sin^2(\theta + \alpha) - \sin^2(\theta + \beta) +$$

$$\sin^2(\theta + \beta) - \sin^2(\theta + \gamma) + \sin^2(\theta + \gamma) - \sin^2(\theta + \alpha) = 0$$

9. (a) $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$ হলে

দেখাও যে, $A + B = \frac{\pi}{2}$ [সি.'০৯; চ., দি.'১০; ফ.'১২]

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$

$$\Rightarrow \sin A - \sin B = \cos B - \cos A$$

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\sin \frac{1}{2}(A+B)\sin \frac{1}{2}(A-B) \\
 \Rightarrow \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} &= 1 \\
 \Rightarrow \tan \frac{1}{2}(A+B) &= \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}(A+B) = \frac{\pi}{4} \\
 \therefore A+B &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

৯(b) $\sin \theta + \sin \varphi = a$ এবং $\cos \theta + \cos \varphi = b$

$$\text{হলে দেখাও যে, } \tan \frac{\theta - \varphi}{2} = \pm \sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sin \theta + \sin \varphi = a$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{1}{2}(\theta + \varphi) \cos \frac{1}{2}(\theta - \varphi) = a$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে আমরা পাই,

$$4 \sin^2 \frac{1}{2}(\theta + \varphi) \cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi) = a^2 \dots (1)$$

এবং $\cos \theta + \cos \varphi = b$

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{1}{2}(\theta + \varphi) \cos \frac{1}{2}(\theta - \varphi) = b$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে আমরা পাই,

$$4 \cos^2 \frac{1}{2}(\theta + \varphi) \cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi) = b^2 \dots (2)$$

(1) ও (2) যোগ করে আমরা পাই,

$$\begin{aligned}
 4 \cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi) \{ \sin^2 \frac{1}{2}(\theta + \varphi) + \\
 \cos^2 \frac{1}{2}(\theta + \varphi) \} &= a^2 + b^2
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi) = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi) = \frac{4}{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi) = \frac{4}{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \tan^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi) &= \frac{4}{a^2 + b^2} - 1 \\
 &= \frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \tan \frac{1}{2}(\theta - \varphi) = \pm \sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$$

৯(c) $\operatorname{cosec} A + \sec A = \operatorname{cosec} B + \sec B$
হলে দেখাও যে, $\tan A \tan B = \cot \frac{A+B}{2}$

প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$$\operatorname{cosec} A + \sec A = \operatorname{cosec} B + \sec B$$

$$\Rightarrow \operatorname{cosec} A - \operatorname{cosec} B = \sec B - \sec A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin A} - \frac{1}{\sin B} = \frac{1}{\cos B} - \frac{1}{\cos A}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin B - \sin A}{\sin A \sin B} = \frac{\cos A - \cos B}{\cos A \cos B}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin B - \sin A}{\cos A - \cos B} = \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}$$

$$2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{B-A}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{B-A}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B-A}{2}} = \tan A \tan B$$

$$\tan A \tan B = \cot \left(\frac{A+B}{2} \right)$$

10. $x \cos \alpha + y \sin \alpha = k = x \cos \beta + y \sin \beta$ হলে দেখাও যে,

$$\frac{x}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{y}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{k}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - k = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$x \cos \beta + y \sin \beta - k = 0 \dots \dots \dots (2)$$

বজ্ঞগুন প্রক্রিয়ায় সাহায্যে (1) ও (2) হতে আমরা পাই

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{\sin \alpha + \sin \beta} &= \frac{y}{-\cos \beta + \cos \alpha} \\
 &= \frac{k}{\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta} \\
 \Rightarrow \frac{x}{2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)} &= \frac{y}{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)} = \frac{k}{\sin(\beta - \alpha)}
 \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা VII C

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{x}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)} \\ = & \frac{y}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)} \\ = & \frac{k}{2\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)} \\ \therefore & \frac{x}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{y}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{k}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} \end{aligned}$$

11. $\sin\frac{\pi}{16}\cdot\sin\frac{3\pi}{16}\cdot\sin\frac{5\pi}{16}\cdot\sin\frac{7\pi}{16}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } & \sin\frac{\pi}{16}\sin\frac{3\pi}{16}\sin\frac{5\pi}{16}\sin\frac{7\pi}{16} \\ = & \frac{1}{4}(2\sin\frac{7\pi}{16}\sin\frac{\pi}{16})(2\sin\frac{5\pi}{16}\sin\frac{3\pi}{16}) \\ = & \frac{1}{4}\{\cos(\frac{7\pi}{16}-\frac{\pi}{16})-\cos(\frac{7\pi}{16}+\frac{\pi}{16})\} \\ & \quad \{\cos(\frac{5\pi}{16}-\frac{3\pi}{16})-\cos(\frac{5\pi}{16}+\frac{3\pi}{16})\} \\ = & \frac{1}{4}(\cos\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{2})(\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{2}) \\ = & \frac{1}{4}\{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8})-0\}(\cos\frac{\pi}{8}-0) \\ = & \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{8}\sin 2\cdot\frac{\pi}{8} \\ = & \frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{16} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

প্রমাণ কর যে,

$$1(a) \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} \quad [\text{প.ভ.প. '৯৩}]$$

$$\text{L.H.S.} = \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$$

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{2}\{\cos(50^\circ+10^\circ)+\cos(50^\circ-10^\circ)\} \\ & \cos(90^\circ-20^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{বইয়ের কর্ম} & = \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 40^\circ) \sin 20^\circ \\ = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 20^\circ + \frac{1}{2}\cos 40^\circ \sin 20^\circ \\ = & \frac{1}{4}\sin 20^\circ + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\{\sin(40^\circ+20^\circ)- \\ & \sin(40^\circ-20^\circ)\} \\ = & \frac{1}{4}\sin 20^\circ + \frac{1}{4}\sin 60^\circ - \frac{1}{4}\sin 20^\circ \\ = & \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} = \text{R.H.S. (Proved)} \end{aligned}$$

$$1.(b) \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$$

$$\text{L.H.S.} = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$$

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{2}\{\cos(40^\circ-20^\circ)- \\ & \cos(40^\circ+20^\circ)\}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 80^\circ \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \sin(90^\circ - 10^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(\cos 20^\circ - \frac{1}{2}) \cos 10^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 20^\circ \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{2}\{\cos(20^\circ-10^\circ)+\cos(20^\circ+10^\circ)\}$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 30^\circ - \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16} = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$1(c) \cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \frac{3}{16}$$

$$\text{L.H.S.} = \cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$$

$$= \cos 10^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\{\cos(70^\circ+50^\circ)+$$

$$\begin{aligned}
 & \cos(70^\circ - 50^\circ) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \cos 10^\circ \cos 120^\circ + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 20^\circ \cos 10^\circ \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 10^\circ \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} \{\cos(20^\circ + 10^\circ) \\
 &\quad + \cos(20^\circ - 10^\circ)\} \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{8} \cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8} \cos 30^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8} \cos 10^\circ \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16} = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$2(a) 4 \cos \theta \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) \cos \left(\frac{4\pi}{3} + \theta\right) = \cos 3\theta$$

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S.} &= 4 \cos \theta \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) \cos \left(\frac{4\pi}{3} + \theta\right) \\
 &= 4 \cos \theta \cdot \frac{1}{2} \{\cos \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + 2\theta\right) + \\
 &\quad \cos \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} - 2\theta\right)\} \\
 &= 2 \cos \theta \{ \cos(2\pi + 2\theta) + \cos \frac{2\pi}{3} \} \\
 &= 2 \cos \theta \cos 2\theta + 2 \cos \theta \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= \cos(2\theta + \theta) + \cos(2\theta - \theta) - \cos \theta \\
 &= \cos 3\theta + \cos \theta - \cos \theta \\
 &= \cos 3\theta = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$2(b) \sin(45^\circ + A) \sin(45^\circ - A) = \frac{1}{2} \cos 2A$$

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S.} &= \sin(45^\circ + A) \sin(45^\circ - A) \\
 &= \frac{1}{2} \{\cos(45^\circ + A - 45^\circ - A) - \\
 &\quad \cos(45^\circ + A + 45^\circ - A)\} \\
 &= \frac{1}{2} (\cos 2A - \cos 90^\circ) = \frac{1}{2} (\cos 2A - 0) \\
 &= \frac{1}{2} \cos 2A = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2(c) 4 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+A}{2} \cos \frac{A+B}{2} \\
 = \cos A + \cos B + \cos C + \cos(A + B + C)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S.} &= 4 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+A}{2} \cos \frac{A+B}{2} \\
 &= 2 \left\{ \cos \frac{1}{2}(B+C+C+A) + \right. \\
 &\quad \left. \cos \frac{1}{2}(B+C-C-A) \right\} \cos \frac{A+B}{2} \\
 &= 2 \cos \frac{1}{2}(B+2C+A) \cos \frac{A+B}{2} + \\
 &\quad 2 \cos \frac{1}{2}(B-A) \cos \frac{A+B}{2} \\
 &= \cos \frac{1}{2}(A+B+2C+A+B) + \\
 &\quad \cos \frac{1}{2}(A+B+2C-A-B) + \\
 &\quad \cos \frac{1}{2}(B-A+A+B) + \\
 &\quad \cos \frac{1}{2}(B-A-A-B) \\
 &= \cos(A+B+C) + \cos C + \cos B \\
 &\quad + \cos(-A) \\
 &= \cos A + \cos B + \cos C + \cos(A+B+C) \\
 &= \text{R.H.S. (Proved)} \\
 3(a) \sin \theta + \sin(60^\circ - \theta) - \sin(60^\circ + \theta) &= 0 \\
 \text{L.H.S.} &= \sin \theta + \sin(60^\circ - \theta) - \sin(60^\circ + \theta) \\
 &= \sin \theta - \{\sin(60^\circ + \theta) - \sin(60^\circ - \theta)\} \\
 &= \sin \theta - 2 \sin \theta \cos 60^\circ = \sin \theta - 2 \left(\frac{1}{2}\right) \sin \theta \\
 &= \sin \theta - \sin \theta = 0 = \text{R.H.S. (Proved)} \\
 (b) \cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ &= 0 \\
 \text{L.H.S.} &= \cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ \\
 &= \cos 40^\circ + 2 \cos \frac{1}{2}(160^\circ + 80^\circ) \\
 &\quad \cos \frac{1}{2}(160^\circ - 80^\circ) \\
 &= \cos 40^\circ + 2 \cos 120^\circ \cos 40^\circ \\
 &= \cos 40^\circ + 2 \left(-\frac{1}{2}\right) \cos 40^\circ \\
 &= \cos 40^\circ - \cos 40^\circ = 0 = \text{R.H.S.} \\
 4. \sin 65^\circ + \cos 65^\circ &= \sqrt{2} \cos 20^\circ
 \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা VII C

L.H.S. = $\sin 65^\circ + \cos 65^\circ$
 $= \sin 65^\circ + \cos (90^\circ - 25^\circ)$
 $= \sin 65^\circ + \sin 25^\circ$
 $= 2 \sin \frac{1}{2} (65^\circ + 25^\circ) \cos (65^\circ - 25^\circ)$
 $= 2 \sin 45^\circ \cos 20^\circ = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 20^\circ$
 $= \sqrt{2} \cos 20^\circ = \text{R.H.S. (Proved)}$

5.(a) $\tan(\frac{\pi}{6} + \theta) \tan(\frac{\pi}{6} - \theta) = \frac{2 \cos 2\theta - 1}{2 \cos 2\theta + 1}$

L.H.S. = $\tan(\frac{\pi}{6} + \theta) \tan(\frac{\pi}{6} - \theta)$
 $= \frac{\sin(\frac{\pi}{6} + \theta) \sin(\frac{\pi}{6} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{6} + \theta) \cos(\frac{\pi}{6} - \theta)}$
 $= \frac{2 \sin(\frac{\pi}{6} + \theta) \sin(\frac{\pi}{6} - \theta)}{2 \cos(\frac{\pi}{6} + \theta) \cos(\frac{\pi}{6} - \theta)}$
 $= \frac{\cos(\frac{\pi}{6} + \theta - \frac{\pi}{6} + \theta) - \cos(\frac{\pi}{6} + \theta + \frac{\pi}{6} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{6} + \theta - \frac{\pi}{6} + \theta) + \cos(\frac{\pi}{6} + \theta + \frac{\pi}{6} - \theta)}$
 $= \frac{\cos 2\theta - \cos \frac{\pi}{3}}{\cos 2\theta + \cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\cos 2\theta - \frac{1}{2}}{\cos 2\theta + \frac{1}{2}}$
 $= \frac{2 \cos 2\theta - 1}{2 \cos 2\theta + 1} = \text{R.H.S. (Proved)}$

5.(b) $\sin(\alpha + \beta + \gamma) + \sin(\alpha - \beta - \gamma) + \sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma) = 4 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma$

L.H.S. = $\sin(\alpha + \beta + \gamma) + \sin(\alpha - \beta - \gamma)$
 $+ \sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma)$
 $= \sin\{\alpha + (\beta + \gamma)\} + \sin\{\alpha - (\beta + \gamma)\} +$
 $\sin\{\alpha + (\beta - \gamma)\} + \sin\{\alpha - (\beta - \gamma)\}$
 $= 2 \sin \alpha \cos(\beta + \gamma) + 2 \sin \alpha \cos(\beta - \gamma)$
 $= 2 \sin \alpha \{ \cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma) \}$
 $= 2 \sin \alpha \cdot 2 \cos \beta \cos \gamma$
 $= 4 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma = \text{R.H.S. (Prived)}$

6. $\sin x = k \sin y$ হলে দেখাও যে,
 $\tan \frac{x-y}{2} = \frac{k-1}{k+1} \tan \frac{x+y}{2}$ [প.গ.প. '৯৭]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sin x = k \sin y$
 $\Rightarrow \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{k}{1} \Rightarrow \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{k+1}{k-1}$
 $\Rightarrow \frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}} = \frac{k+1}{k-1}$
 $\Rightarrow \frac{\tan \frac{x+y}{2}}{\tan \frac{x-y}{2}} = \frac{k+1}{k-1}$
 $\therefore \tan \frac{x-y}{2} = \frac{k-1}{k+1} \tan \frac{x+y}{2}$

7. $x \sin \varphi = y \sin(2\theta + \varphi)$ হলে দেখাও যে,
 $\cot(\theta + \varphi) = \frac{x-y}{x+y} \cot \theta$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $x \sin \varphi = y \sin(2\theta + \varphi)$
 $\Rightarrow \frac{\sin(2\theta + \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{x}{y}$
 $\Rightarrow \frac{\sin(2\theta + \varphi) - \sin \varphi}{\sin(2\theta + \varphi) + \sin \varphi} = \frac{x-y}{x+y}$
 $\Rightarrow \frac{2 \cos \frac{2\theta + \varphi + \varphi}{2} \sin \frac{2\theta + \varphi - \varphi}{2}}{2 \sin \frac{2\theta + \varphi + \varphi}{2} \cos \frac{2\theta + \varphi - \varphi}{2}} = \frac{x-y}{x+y}$
 $\Rightarrow \frac{\cot(\theta + \varphi)}{\cot \theta} = \frac{x-y}{x+y}$
 $\therefore \cot(\theta + \varphi) = \frac{x-y}{x+y} \cot \theta$ (Showed)

প্রশ্নমালা -VII D

প্রমাণ কর যে,

1. (a) $\frac{1 + \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \cot \theta$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \frac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{2\cos^2 \theta}{2\sin \theta \cos \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \cot \theta = \text{R.H.S.} \quad (\text{proved}) \end{aligned}$$

$$1(b) \quad \sin 2x \tan 2x = \frac{4 \tan^2 x}{1 - \tan^4 x}$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \sin 2x \tan 2x \\ &= \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \times \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\ &= \frac{4 \tan^2 x}{1 - \tan^4 x} = \text{R.H.S.} \quad (\text{proved}) \end{aligned}$$

$$1(c) \quad \tan \theta + 2 \tan 2\theta + 4 \tan 4\theta + 8 \cot 8\theta = \cot \theta \quad [\text{য.}'০২; \text{সি.}'০৮]$$

$$\begin{aligned} \text{প্রমাণ : } & 4 \tan 4\theta + 8 \cot 8\theta \\ &= 4\left(\frac{\sin 4\theta}{\cos 4\theta} + 2 \frac{\cos 8\theta}{\sin 8\theta}\right) \\ &= 4\left(\frac{\sin 4\theta}{\cos 4\theta} + \frac{2 \cos 8\theta}{2 \sin 4\theta \cos 4\theta}\right) \\ &= 4\left(\frac{\sin^2 4\theta + 1 - 2 \sin^2 4\theta}{\sin 4\theta \cos 4\theta}\right) \\ &= 4 \frac{1 - \sin^2 4\theta}{\sin 4\theta \cos 4\theta} = 4\left(\frac{\cos^2 4\theta}{\sin 4\theta \cos 4\theta}\right) \\ &= 4 \cot 4\theta \end{aligned}$$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় ,

$$\begin{aligned} 2 \tan 2\theta + 4 \cot 4\theta &= 2 \cot 2\theta \text{ এবং} \\ \tan \theta + 2 \cot 2\theta &= \cot \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \tan \theta + 2 \tan 2\theta + 4 \tan 4\theta + 8 \cot 8\theta \\ &= \tan \theta + 2 \tan 2\theta + 4 \cot 4\theta \\ &= \tan \theta + 2 \cot 2\theta = \cot \theta = \text{R.H.S.} \quad (\text{Proved}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.(a) \quad 4(\sin^3 10^\circ + \cos^3 20^\circ) &= 3(\sin 10^\circ + \cos 20^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= 4(\sin^3 10^\circ + \cos^3 20^\circ) \\ &= 4 \sin^3 10^\circ + 4 \cos^3 20^\circ \\ &= 3 \sin 10^\circ - \sin(3.10^\circ) + \cos(3.20^\circ) \\ &\quad + 3 \cos 20^\circ \\ &= 3(\sin 10^\circ + \cos 20^\circ) - \sin 30^\circ + \cos 60^\circ \\ &= 3(\sin 10^\circ + \sin 20^\circ) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 3(\sin 10^\circ + \cos 20^\circ) = \text{R.H.S.} \quad (\text{Proved}) \end{aligned}$$

$$(b) \quad \sin^2(60^\circ + A) + \sin^2 A + \sin^2(60^\circ - A) = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \sin^2(60^\circ + A) + \sin^2 A + \sin^2(60^\circ - A) \\ &= \frac{1}{2} \{1 - \cos 2(60^\circ + A) + 1 - \cos 2A + 1 \\ &\quad - \cos 2(60^\circ - A)\} \\ &= \frac{1}{2} \{3 - \cos(120^\circ + 2A) - \cos(120^\circ - 2A) \\ &\quad - \cos 2A\} \\ &= \frac{1}{2} [3 - \{\cos(120^\circ + 2A) + \\ &\quad \cos(120^\circ - 2A)\} - \cos 2A] \\ &= \frac{1}{2} \{3 - 2 \cdot \cos 120^\circ \cos 2A - \cos 2A\} \\ &= \frac{1}{2} \{3 - 2(-\frac{1}{2}) \cos 2A - \cos 2A\} \\ &= \frac{1}{2} \{3 + \cos 2A - \cos 2A\} = \frac{3}{2} = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

$$2(c) \quad \sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \quad [\text{রা.}'১১]$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \{1 - \cos 2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2}\right)\} - \frac{1}{2} \{1 - \cos 2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2}\right)\} \\ &= \frac{1}{2} \{1 - \cos(\frac{\pi}{4} + \theta) - 1 + \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)\} \\ &= \frac{1}{2} \{ \cos(\frac{\pi}{4} - \theta) - \cos(\frac{\pi}{4} + \theta)\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

$$2.(d) \quad \cos^2(A - 120^\circ) + \cos^2 A + \cos^2(A + 120^\circ) = 3/2 \quad [\text{ঢ.}'০৩; \text{কু.}'০৭; \text{য.}'০৮]$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \cos^2(A - 120^\circ) + \cos^2 A \\ &\quad + \cos^2(A + 120^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \{1 + \cos 2(A - 120^\circ) + 1 + \cos 2A + 1 \\ &\quad + \cos 2(A + 120^\circ)\} \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা VII D

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \{ 3 + \cos(2A - 240^\circ) + \cos(2A + 240^\circ) \\
 &\quad + \cos 2A \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ 3 + 2\cos 2A \cos 240^\circ + \cos 2A \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ 3 + 2\cos 2A \cos(180^\circ + 60^\circ) + \cos 2A \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ 3 + 2\cos 2A(-\cos 60^\circ) + \cos 2A \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ 3 + 2 \cdot \cos 2A \left(-\frac{1}{2}\right) + \cos 2A \} \\
 &= \frac{1}{2} (3 - \cos 2A + \cos 2A) = \frac{3}{2} = \text{R.H.S.}
 \end{aligned}$$

2(e) $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{A}{2}\right) + \cos^2 \left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

L.H.S. = $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{A}{2}\right) + \cos^2 \left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \{ 1 + \cos 2 \cdot \frac{A}{2} + 1 + \cos 2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{A}{2}\right) + 1 \\
 &\quad + \cos 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{A}{2}\right) \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ 3 + \cos A + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + A\right) + \\
 &\quad \cos \left(\frac{2\pi}{3} - A\right) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \{ 3 + \cos A + 2 \cos \frac{2\pi}{3} \cos A \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ 3 + \cos A + 2 \left(-\frac{1}{2}\right) \cos A \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ 3 + \cos A - \cos A \} = \frac{3}{2} = \text{R.H.S.}
 \end{aligned}$$

(f) $\tan \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \tan \left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4 \sin 2\alpha}{1 - 4 \sin^2 \alpha}$

L.H.S. = $\tan \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \tan \left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)} + \frac{\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)} \\
 &= \frac{\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)} \\
 &= \frac{\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} + \alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2} (\cos 2\alpha + \cos 2 \cdot \frac{\pi}{3})} = \frac{2 \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + (-\frac{1}{2})} \\
 &= \frac{4 \sin 2\alpha}{2 \cos 2\alpha - 1} = \frac{4 \sin 2\alpha}{2(1 - 2 \sin^2 \alpha) - 1} \\
 &= \frac{4 \sin 2\alpha}{1 - 4 \sin^2 \alpha} = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

3.(a) $\cos^3 x + \cos^3 (60^\circ - x) + \cos^3 (60^\circ + x) = \frac{1}{4} (6 \cos x - \cos 3x)$

L.H.S. = $\cos^3 x + \cos^3 (60^\circ - x) + \cos^3 (60^\circ + x)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \{ 3 \cos x + \cos 3x + 3 \cos (60^\circ - x) + \\
 &\quad \cos 3(60^\circ - x) + 3 \cos (60^\circ + x) + \cos 3(60^\circ + x) \} \\
 &= \frac{1}{4} [3 \{ \cos x + \cos (60^\circ + x) + \cos (60^\circ - x) \} \\
 &\quad + \cos 3x + \cos (180^\circ + 3x) + \cos (180^\circ - 3x)] \\
 &= \frac{1}{4} [3(\cos x + 2 \cos 60^\circ \cos x) + \\
 &\quad \cos 3x - \cos 3x - \cos 3x] \\
 &= \frac{1}{4} [3(\cos x + 2 \cdot \frac{1}{2} \cos x) - \cos 3x] \\
 &= \frac{1}{4} (3 \cdot 2 \cos x - \cos 3x) \\
 &= \frac{1}{4} (6 \cos x - \cos 3x) = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

(b) $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \cos^3 2x$ [ঝ. '০৩]

L.H.S. = $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} (\cos 3x + 3 \cos x) \cos 3x +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x) \sin 3x \\
 &= \frac{1}{4} (\cos^2 3x + 3 \cos x \cos 3x + \\
 &\quad 3 \sin x \sin 3x - \sin^2 3x) \\
 &= \frac{1}{4} \{\cos 2.3x + 3 \cos(3x - x)\} \\
 &= \frac{1}{4} \{\cos 3.2x + 3 \cos 2x\} = \cos^3 2x = \text{R.H.S.}
 \end{aligned}$$

3. (c) $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S.} &= \cos^4 x = (\cos^2 x)^2 \\
 &= \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right)^2 \\
 &= \frac{1}{4}\{1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x\} \\
 &= \frac{1}{4}\{1 + 2 \cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\} \\
 &= \frac{1}{4}\{1 + 2 \cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x\} \\
 &= \frac{1}{4}\{\frac{3}{2} + 2 \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x\} \\
 &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x = \text{R.H.S.}
 \end{aligned}$$

3(d) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S.} &= \sin^4 x + \cos^4 x \\
 &= (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 \\
 &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\
 &= 1^2 - \frac{1}{2}(2 \sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2}(\sin 2x)^2 \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \text{R.H.S.} \text{ (Proved)}
 \end{aligned}$$

4.(a) $\sec \theta = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos 4\theta}}}$ [দি.'০৯; জ.'১৮]

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S.} &= \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{2}{2 \cos \theta} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{4 \cos^2 \theta}} = \frac{2}{\sqrt{2(1 + \cos 2\theta)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\sqrt{2 + 2 \cos 2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{4 \cos^2 2\theta}}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos 4\theta)}}} = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos 4\theta}}} \\
 &= \text{R.H.S.}
 \end{aligned}$$

4.(b) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$ [কু.'০৬; রা.'০৭;
জ.'০৭; চ., ব.'০৮; পি.'১১; পি.'১২; ঘ.'১৩]

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S.} &= \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} \\
 &= \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ}{\frac{1}{2} \sin 10^\circ \cos 10^\circ} \\
 &= \frac{\cos 60^\circ \cos 10^\circ - \sin 60^\circ \sin 10^\circ}{\frac{1}{4} \sin 20^\circ} \\
 &= \frac{4 \cos(60^\circ + 10^\circ)}{\sin(90^\circ - 70^\circ)} = \frac{4 \cos 70^\circ}{\cos 70^\circ} = 4 = \text{R.H.S.}
 \end{aligned}$$

4(c) $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} = 4$ [ঢ.'১০; চ.'১৮]

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S.} &= \frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} \\
 &= \frac{\sqrt{3} \cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ} \\
 &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ \cos 20^\circ} \\
 &= \frac{\cos 30^\circ \cos 20^\circ - \sin 30^\circ \sin 10^\circ}{\frac{1}{4} \sin 40^\circ} \\
 &= \frac{4 \cos(30^\circ + 20^\circ)}{\sin(90^\circ - 50^\circ)} = \frac{4 \cos 50^\circ}{\cos 50^\circ} = 4 = \text{R.H.S.}
 \end{aligned}$$

5. (a) $\tan \theta = \frac{1}{7}$ এবং $\tan \varphi = \frac{1}{3}$ হলে দেখাও
যে, $\cos 2\theta = \sin 4\varphi$.

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\tan \theta = \frac{1}{7}$, $\tan \varphi = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1 - (1/7)^2}{1 + (1/7)^2} \\ &= \frac{1 - 1/49}{1 + 1/49} = \frac{49 - 1}{49 + 1} = \frac{48}{50} = \frac{24}{25}\end{aligned}$$

$$\sin 4\varphi = 2 \sin 2\varphi \cos 2\varphi$$

$$\begin{aligned}&= 2 \frac{2 \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} \frac{1 - \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} \\ &= \frac{4 \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{9}\right)}{\left(1 + \frac{1}{9}\right)^2} = \frac{4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{9}}{\left(\frac{10}{9}\right)^2} = \frac{32}{27} \times \frac{81}{100} = \frac{24}{25}\end{aligned}$$

$$\cos 2\theta = \sin 4\varphi \quad (\text{Showed})$$

5.(b) $2\tan \alpha = 3\tan \beta$ হলে প্রমাণ কর যে,

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $2 \tan \alpha = 3 \tan \beta$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{2} \tan \beta$$

$$\text{L.H.S.} = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2} - 1\right) \tan \beta}{1 + \frac{3}{2} \tan^2 \beta} = \frac{\tan \beta}{2 + 3 \tan^2 \beta}$$

$$= \frac{\frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{2 + 3 \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}} = \frac{\sin \beta \cos \beta}{2 \cos^2 \beta + 3 \sin^2 \beta}$$

$$= \frac{2 \sin \beta \cos \beta}{2.2 \cos^2 \beta + 3.2 \sin^2 \beta}$$

$$= \frac{\sin 2\beta}{2(1 + \cos 2\beta) + 3(1 - \cos 2\beta)}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\sin 2\beta}{2 + 2\cos 2\beta + 3 - 3\cos 2\beta} = \frac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta} \\ &= \text{R.H.S. (Proved)}$$

6.(a) $x = \sin \frac{\pi}{18}$ হলে দেখাও যে,

$$8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$$

প্রমাণ : আমরা জানি, $4 \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - \sin 3\theta$

$$\therefore 4 \sin^3 \frac{\pi}{18} = 3 \sin \frac{\pi}{18} - \sin 3 \frac{\pi}{18}$$

$$\Rightarrow 4x^3 = 3x - \sin \frac{\pi}{6} \quad [x = \sin \frac{\pi}{18}]$$

$$\Rightarrow 4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{এখন, } 8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

$$= 2x(4x^3 - 3x + \frac{1}{2}) + 1(4x^3 - 3x + \frac{1}{2})$$

$$= 2x \times 0 + 1 \times 0 = 0 \quad (\text{Showed})$$

6(b) প্রমাণ কর : $\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$ [ৱা.'১১]

প্রমাণ : $\cos 5\theta = \cos(3\theta + 2\theta)$

$$= \cos 3\theta \cos 2\theta - \sin 3\theta \sin 2\theta$$

$$= (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)(2 \cos^2 \theta - 1) - (3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta) \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 8 \cos^5 \theta - 6 \cos^3 \theta - 4 \cos^3 \theta + 3 \cos \theta - 2 \cos \theta (3 \sin^2 \theta - 4 \sin^4 \theta)$$

$$= 8 \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta + 3 \cos \theta - 2 \cos \theta \{3(1 - \cos^2 \theta) - 4(1 - \cos^2 \theta)^2\}$$

$$= 8 \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta + 3 \cos \theta - 2 \cos \theta \{3 - 3\cos^2 \theta - 4(1 - 2\cos^2 \theta + \cos^4 \theta)\}$$

$$= 8 \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta + 3 \cos \theta - (6 \cos \theta - 6 \cos^3 \theta - 8 \cos \theta + 16 \cos^3 \theta - 8 \cos^5 \theta)$$

$$= 8 \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta + 3 \cos \theta - 6 \cos \theta + 6 \cos^3 \theta + 8 \cos \theta - 16 \cos^3 \theta + 8 \cos^5 \theta$$

$$\therefore \cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$$

7.(a) $\tan \alpha \tan \beta = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ হলে প্রমাণ কর যে,

$$(a - b \cos 2\alpha)(a - b \cos 2\beta) = a^2 - b^2$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\tan \alpha \tan \beta = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha \tan^2 \beta = \frac{a-b}{a+b}$$

$$\Rightarrow (a-b) = (a+b) \tan^2 \alpha \tan^2 \beta \dots\dots(1)$$

$$\text{L.H.S} = (a-b \cos 2\alpha) (a-b \cos 2\beta)$$

$$= \left\{ a-b \frac{1-\tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha} \right\} \left\{ a-b \frac{1-\tan^2 \beta}{1+\tan^2 \beta} \right\}$$

$$= \frac{a+a \tan^2 \alpha - b + b \tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha} \times$$

$$\frac{a+a \tan^2 \beta - b + b \tan^2 \beta}{1+\tan^2 \beta}$$

$$= \frac{(a-b) + (a+b) \tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha} \times$$

$$\frac{(a-b) + (a+b) \tan^2 \beta}{1+\tan^2 \beta}$$

$$= \frac{(a+b) \tan^2 \alpha \tan^2 \beta + (a+b) \tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha} \times$$

$$\frac{(a+b) \tan^2 \alpha \tan^2 \beta + (a+b) \tan^2 \beta}{1+\tan^2 \beta}$$

$$= \frac{(a+b) \tan^2 \alpha (\tan^2 \beta + 1)}{1+\tan^2 \alpha} \times$$

$$\frac{(a+b) \tan^2 \alpha (\tan^2 \beta + 1)}{1+\tan^2 \beta}$$

$$= (a+b)^2 \tan^2 \alpha \tan^2 \beta = (a+b)^2 \frac{a-b}{a+b}$$

$$= a^2 - b^2 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

7. (b) যদি α ও β কোণদ্য ধনাত্মক ও সূচ এবং

$$\cos 2\alpha = \frac{3 \cos 2\beta - 1}{3 - \cos 2\beta} \text{ হয়, তবে দেখাও যে,}$$

$$\tan \alpha = \pm \sqrt{2} \tan \beta$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\cos 2\alpha = \frac{3 \cos 2\beta - 1}{3 - \cos 2\beta}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{3 - \cos 2\beta}{3 \cos 2\beta - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{3 - \cos 2\beta - 3 \cos 2\beta + 1}{3 - \cos 2\beta + 3 \cos 2\beta - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{4(1 - \cos 2\beta)}{2(1 + \cos 2\beta)}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{2 \cdot 2 \sin^2 \beta}{2 \cos^2 \beta} = 2 \tan^2 \beta$$

$$\therefore \tan \alpha = \pm \sqrt{2} \tan \beta \quad (\text{Showed})$$

7(c) $\cos A \sin(A - \frac{\pi}{6})$ এর মান বৃহত্তম হলে A
এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\cos A \sin(A - \frac{\pi}{6})$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cos A \cos(A - \frac{\pi}{6})$$

$$= \frac{1}{2} \{ \sin(A + A - \frac{\pi}{6}) - \sin(A - A + \frac{\pi}{6}) \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ \sin(2A - \frac{\pi}{6}) - \sin \frac{\pi}{6} \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ \sin(2A - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2} \}$$

ইহা বৃহত্তম হলে, $\sin(2A - \frac{\pi}{6}) = 1$

$$\Rightarrow \sin(2A - \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore 2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2A = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi + \pi}{6}$$

$$\Rightarrow 2A = \frac{4\pi}{6} \therefore A = \frac{\pi}{3} \quad (\text{Ans.})$$

অতিরিক্ত অশ্ল (সমাধানসহ)

প্রমাণ কর যে,

1(a) $\tan \theta (1 + \sec 2\theta) = \tan 2\theta$

L.H.S. = $\tan \theta (1 + \sec 2\theta)$

$$= \tan \theta \left(1 + \frac{1}{\cos 2\theta} \right)$$

$$= \tan \theta \left(1 + \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta} \right)$$

$$= \tan \theta \left(\frac{1 - \tan^2 \theta + 1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta} \right)$$

$$= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \tan 2\theta = \text{R.H.S. (proved)}$$

$$1.(b) \frac{\sin A + \sin 2A}{1 + \cos A + \cos 2A} = \tan A$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin A + \sin 2A}{1 + \cos A + \cos 2A}$$

$$= \frac{\sin A + 2\sin A \cos A}{1 + \cos A + 2\cos^2 A - 1}$$

$$= \frac{\sin A(1 + 2\cos A)}{\cos A(1 + 2\cos A)} = \tan A = \text{R.H.S.}$$

$$1.(c) \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos x + \sin x} = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)(\cos^2 x + \sin^2 x - \cos x \sin x)}{\cos x + \sin x}$$

$$= 1 - \cos x \sin x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x = \text{R.H.S.}$$

$$2. \frac{\tan^2(\theta + \frac{\pi}{4}) - 1}{\tan^2(\theta + \frac{\pi}{4}) + 1} = \sin 2\theta$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\tan^2(\theta + \frac{\pi}{4}) - 1}{\tan^2(\theta + \frac{\pi}{4}) + 1}$$

$$= - \frac{1 - \tan^2(\theta + \frac{\pi}{4})}{1 + \tan^2(\theta + \frac{\pi}{4})} = - \cos 2(\theta + \frac{\pi}{4})$$

$$= - \cos (\frac{\pi}{2} + 2\theta) = - (- \sin 2\theta)$$

$$= \sin 2\theta = \text{R.H.S.} \text{ (Proved)}$$

$$3. 4 \cos^3 x \sin 3x + 4 \sin^3 x \cos 3x = 3 \sin 4x$$

$$\text{L.H.S.} = 4 \cos^3 x \sin 3x + 4 \sin^3 x \cos 3x$$

$$= (\cos 3x + 3 \cos x) \sin 3x + (3 \sin x - \sin 3x) \cos 3x$$

$$= \cos 3x \sin 3x - \sin 3x \cos 3x + 3 (\sin 3x \cos x + \sin x \cos 3x)$$

$$= 3 \sin (3x + x)$$

$$= 3 \sin 4x = \text{R.H.S.} \text{ (Proved)}$$

$$4. \tan^2 \theta = 1 + 2 \tan^2 \varphi \text{ হলে দেখাও যে, } \cos 2\varphi = 1 + 2 \cos 2\theta$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\tan^2 \theta = 1 + 2 \tan^2 \varphi$

$$\text{এখন, } 1 + 2 \cos 2\theta = 1 + 2 \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$= \frac{1 + \tan^2 \theta + 2 - 2 \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{3 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$= \frac{3 - 1 - 2 \tan^2 \varphi}{1 + 1 + 2 \tan^2 \varphi} = \frac{2(1 - \tan^2 \varphi)}{2(1 + \tan^2 \varphi)}$$

$$= \frac{1 - \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} = \cos 2\varphi$$

$$\cos 2\varphi = 1 + 2 \cos 2\theta \text{ (Showed)}$$

বিকল্প পদ্ধতি: দেওয়া আছে, $\tan^2 \theta = 1 + 2 \tan^2 \varphi$

$$\Rightarrow \tan^2 \theta - 1 = 2 \tan^2 \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan^2 \varphi} = \frac{2}{\tan^2 \theta - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{2 - \tan^2 \theta + 1}{2 + \tan^2 \theta - 1}$$

[যোজন-বিয়োজন করে]

$$\Rightarrow \cos 2\varphi = \frac{3 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$= \frac{1 + \tan^2 \theta + 2(1 - \tan^2 \theta)}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$= \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} + 2 \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\therefore \cos 2\varphi = 1 + 2 \cos 2\theta$$

$$5. \cos \alpha = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) \text{ হলে প্রমাণ কর যে, } \cos 2\alpha$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{x^2}), \cos 3\alpha = \frac{1}{2}(x^3 + \frac{1}{x^3})$$

$$, \cos 4\alpha = \frac{1}{2}(x^4 + \frac{1}{x^4})$$

$$\text{প্রমাণ : দেওয়া আছে, } \cos \alpha = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left(\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right)^2 - 1 \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{4} \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) - 1 \\
 &= \frac{1}{2} \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 2 \right) = \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \left(\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \\
 &= 4 \cdot \frac{1}{8} \left(x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \\
 &\quad - 3 \cdot \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right) - 3x - 3 \cdot \frac{1}{x} \\
 &= \frac{1}{2} \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \cos 3\alpha = \frac{1}{2} \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right)$$

$$\cos 4\alpha = \cos 2 \cdot 2\alpha = 2 \cos^2 2\alpha - 1$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \right\}^2 - 1 \\
 &= \frac{1}{2} \left(x^4 + 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) - 1 \\
 &= \frac{1}{2} \left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} - 2 \right) \\
 &\cos 4\alpha = \left(x^4 + \frac{1}{x^4} \right)
 \end{aligned}$$

$$6 \tan \theta = \frac{\tan x + \tan y}{1 + \tan x \tan y} \text{ হলে দেখাও যে,}$$

$$\sin 2\theta = \frac{\sin 2x + \sin 2y}{1 + \sin 2x \cdot \sin 2y}$$

$$\text{প্রমাণঃ দেওয়া আছে, } \tan \theta = \frac{\tan x + \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y + \sin x \sin y} \\
 \therefore \tan \theta &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)} \\
 \sin 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{2 \frac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)}}{1 + \left\{ \frac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)} \right\}^2} \\
 &= \frac{2 \sin(x+y) \times \frac{\cos^2(x-y)}{\cos^2(x-y) + \sin^2(x+y)}}{2 \sin(x+y) \cos(x-y)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \{1 + \cos 2(x-y)\} + \frac{1}{2} \{1 - \cos 2(x+y)\}}{2 \sin(x+y) \cos(x-y)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \{2 + \cos 2(x-y) - \cos 2(x+y)\}}{2 \sin(x+y) \cos(x-y)} \\
 &= \frac{\sin 2x + \sin 2y}{1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{2(x-y) + 2(x+y)}{2} \sin \frac{2(x+y) - 2(x-y)}{2}} \\
 \therefore \sin 2\theta &= \frac{\sin 2x + \sin 2y}{1 + \sin 2x + \sin 2y} \quad (\text{Showed}) \\
 7. \tan \theta &= \frac{y}{x} \text{ হলে দেখাও যে,} \\
 &\quad x \cos 2\theta + y \sin 2\theta = x. \\
 \text{প্রমাণঃ} & \text{দেওয়া আছে, } \tan \theta = \frac{y}{x} \\
 &x \cos 2\theta + y \sin 2\theta \\
 &= x \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} + y \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \\
 &= x \frac{1 - \frac{y^2}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} + y \frac{\frac{2y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \\
 &= x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + y \left(\frac{2y}{x} \times \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) \\
 &= \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}
 \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা VII D
বইয়ের ক্ষেত্র

$$\frac{x^3 - xy^2 + 2xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{x(x^2 + y)}{x^2 + y^2}$$

$x \cos 2\theta + y \sin 2\theta = x$ (Showed)

১. $\sqrt{2} \cos A = \cos B + \cos^3 B$ এবং $\sqrt{2} \sin A = \sin B - \sin^3 B$ হলে দেখাও যে, $\sin(A-B) = \pm \frac{1}{3}$.

অঙ্গ ১: দেওয়া আছে, $\sqrt{2} \cos A = \cos B + \cos^3 B$
 $\sqrt{2} \sin A = \sin B - \sin^3 B$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin B - \sin^3 B) \cos B - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin B (\cos B + \cos^3 B)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \sin(A-B) = \sin B \cos B - \sin^3 B \cos B - \sin B \cos B - \sin B \cos^3 B$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \sin(A-B) = -\sin B \cos B (\sin^2 B + \cos^2 B)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \sin(A-B) = -\frac{1}{2} \sin 2B$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2} \sin(A-B) = -\sin 2B \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cos(A-B) &= \sqrt{2} \cos A \cos B - \sqrt{2} \sin A \sin B \\ &= (\cos B + \cos^3 B) \cos B - \sin B (\sin B - \sin^3 B) \\ &= \cos^2 B + \sin^2 B + \cos^4 B - \sin^4 B \\ &= 1 + (\cos^2 B + \sin^2 B) (\cos^2 B - \sin^2 B) \\ \sqrt{2} \cos(A-B) &= 1 + \cos 2B \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \cos(A-B) - 1 = \cos 2B \quad \dots \dots \dots (2)$$

(2) করে যোগ করলে আমরা পাই,

$$\begin{aligned} -\sqrt{2})^2 \sin^2(A-B) + (\sqrt{2})^2 \cos^2(A-B) + \\ -2\sqrt{2} \cos(A-B) = \sin^2 2B + \cos^2 2B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 8 \{ 1 - \cos^2(A-B) \} + 2 \cos^2(A-B) \\ &\quad + 1 - 2\sqrt{2} \cos(A-B) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 8 - 8 \cos^2(A-B) + 2 \cos^2(A-B) \\ &\quad - 2\sqrt{2} \cos(A-B) = 0 \end{aligned}$$

$$= 6 \cos^2(A-B) - 2\sqrt{2} \cos(A-B) - 8 = 0$$

$$= 3 \cos^2(A-B) - \sqrt{2} \cos(A-B) - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} &= 3 \cos^2(A-B) - 3\sqrt{2} \cos(A-B) \\ &\quad + 2\sqrt{2} \cos(A-B) - 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 3 \cos(A-B) \{ \cos(A-B) - \sqrt{2} \} \\ &\quad + 2\sqrt{2} \{ \cos(A-B) - \sqrt{2} \} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \{\cos(A-B) - \sqrt{2}\} \{3\cos(A-B) + 2\sqrt{2}\} = 0$$

$$\therefore \cos(A-B) = \sqrt{2} \text{ অথবা, } \cos(A-B) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

কিন্তু $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ বলে $\cos(A-B) \neq \sqrt{2}$

$$\therefore \cos(A-B) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin(A-B) &= \pm \sqrt{1 - \sin^2(A-B)} \\ &= \pm \sqrt{1 - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{8}{9}} \end{aligned}$$

$$\therefore \sin(A-B) = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} = \pm \frac{1}{3}$$

২. দেখাও যে, $\frac{\tan 2^n \theta}{\tan \theta} = (1 + \sec 2\theta)(1 + \sec 2^2 \theta)(1 + \sec 2^3 \theta) \dots \dots (1 + \sec 2^n \theta)$

অঙ্গ ২: $\tan \theta (1 + \sec 2\theta) = \tan \theta$

$$\left(1 + \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta}\right) = \tan \theta$$

$$\left(\frac{1 - \tan^2 \theta + 1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta}\right)$$

$$= \tan \theta \frac{2}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \tan 2\theta$$

$$\therefore \frac{\tan 2\theta}{\tan \theta} = 1 + \sec 2\theta$$

অনুসৃতভাবে আমরা পাই, $\frac{\tan 2^2 \theta}{\tan 2\theta} = 1 + \sec 2^2 \theta$

$$\theta, \frac{\tan 2^3 \theta}{\tan 2^2 \theta} = 1 + \sec 2^3 \theta, \dots, \frac{\tan 2^n \theta}{\tan 2^{n-1} \theta} = 1 + \sec 2^n \theta$$

∴

$$\begin{aligned} &\frac{\tan 2\theta}{\tan \theta} \cdot \frac{\tan 2^2 \theta}{\tan 2\theta} \cdot \frac{\tan 2^3 \theta}{\tan 2^2 \theta} \dots \frac{\tan 2^n \theta}{\tan 2^{n-1} \theta} = \\ &(1 + \sec 2\theta)(1 + \sec 2^2 \theta) \dots \end{aligned}$$

$$(1 + \sec 2^3 \theta) \dots \dots (1 + \sec 2^n \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan 2^n \theta}{\tan \theta} = (1 + \sec 2\theta)(1 + \sec 2^2 \theta) \dots$$

$$(1 + \sec 2^3 \theta) \dots \dots (1 + \sec 2^n \theta)$$

10.(a) দেখাও যে, $\frac{2\cos 2^n \theta + 1}{2\cos \theta + 1} = (2\cos \theta - 1)$

$$(2\cos 2\theta - 1)(2\cos 2^2 \theta - 1) \dots (2\cos 2^{n-1} \theta - 1)$$

প্রমাণ : আমরা পাই,

$$(2\cos \theta + 1)(2\cos \theta - 1) = 4\cos^2 \theta - 1$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) - 1 = 2 + 2\cos 2\theta - 1$$

$$2\cos \theta - 1 = \frac{2\cos 2\theta + 1}{2\cos \theta + 1}$$

অনুরূপভাবে,

$$2\cos 2\theta - 1 = \frac{2\cos 2^2 \theta + 1}{2\cos 2\theta + 1}$$

$$2\cos 2^2 \theta - 1 = \frac{2\cos 2^3 \theta + 1}{2\cos 2^2 \theta + 1}$$

$$2\cos 2^{n-1} \theta - 1 = \frac{2\cos 2^n \theta + 1}{2\cos 2^{n-1} \theta + 1}$$

গুণ করে আমরা পাই,

$$(2\cos \theta - 1)(2\cos 2\theta - 1) \dots (2\cos 2^{n-1} \theta - 1)$$

$$\frac{2\cos 2\theta + 1}{2\cos \theta + 1} \cdot \frac{2\cos 2^2 \theta + 1}{2\cos 2\theta + 1} \cdot \frac{2\cos 2^3 \theta + 1}{2\cos 2^2 \theta + 1}$$

$$\dots \dots \frac{2\cos 2^n \theta + 1}{2\cos 2^{n-1} \theta + 1} = \frac{2\cos 2^n \theta + 1}{2\cos \theta + 1}$$

$$\frac{2\cos 2^n \theta + 1}{2\cos \theta + 1} = (2\cos \theta - 1)(2\cos 2\theta - 1) \dots (2\cos 2^{n-1} \theta - 1)$$

10.(b) $13\theta = \pi$ হলে দেখাও যে, $\cos \theta \cos 2\theta \cos 3\theta \cos 4\theta \cos 5\theta \cos 6\theta = \frac{1}{2^6}$

$$\cos 3\theta \cos 4\theta \cos 5\theta \cos 6\theta = \frac{1}{2^6}$$

প্রমাণ : $\cos \theta \cos 2\theta \cos 3\theta \cos 4\theta \cos 5\theta \cos 6\theta$

আমরা জানি, $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$

$$\Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \cos 2\theta$$

$$= \frac{1}{2^2} \sin 4\theta$$

অনুরূপভাবে, $\sin \theta \cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta = \frac{1}{2^3} \sin 8\theta$

$$\sin \theta \cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta \cos 8\theta = \frac{1}{2^3} \sin 16\theta$$

$$\sin \theta \cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta \cos 8\theta \cos 16\theta$$

$$\cos 32\theta = \frac{1}{2^6} \sin 64\theta$$

$$\Rightarrow \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta \cos (13\theta - 5\theta) \cos (13\theta + 3\theta) \cos (26\theta + 6\theta)$$

$$= \frac{1}{2^6} \sin(65\theta - \theta)$$

$$\Rightarrow \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta \cos (\pi - 5\theta) \cos (\pi + 3\theta) \cos (2\pi + 6\theta)$$

$$= \frac{1}{2^6} \sin(5\pi - \theta)$$

$$\Rightarrow \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta (-\cos 5\theta) (-\cos 3\theta) \cos 6\theta = \frac{1}{2^6} (\sin \theta)$$

$$\therefore \cos \theta \cos 2\theta \cos 3\theta \cos 4\theta$$

$$\cos 5\theta \cos 6\theta = \frac{1}{2^6} \text{ (Showed)}$$

10.(c) $\theta = \frac{\pi}{2^n + 1}$ হলে প্রমাণ কর যে, $2^n \cos \theta \cos 2\theta \cos 2^2 \theta \dots \cos 2^{n-1} \theta = 1$.

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\theta = \frac{\pi}{2^n + 1} \Rightarrow 2^n \theta + \theta = \pi$

$$\Rightarrow 2^n \theta = \pi - \theta \Rightarrow \sin 2^n \theta = \sin(\pi - \theta)$$

$$\Rightarrow 2 \sin 2^{n-1} \theta \cos 2^{n-1} \theta = \sin \theta$$

$$\Rightarrow 2 \cos 2^{n-1} \theta (2 \sin 2^{n-2} \theta \cos 2^{n-2} \theta) = \sin \theta$$

$$\Rightarrow 2^2 \cos 2^{n-1} \theta \cos 2^{n-2} \theta \sin 2^{n-2} \theta = \sin \theta$$

প্রশ্নমালা-VII E

$$\Rightarrow 2^n \cos 2^{n-1} \theta \cos 2^{n-2} \theta \cos 2^{n-3} \theta \dots \\ \sin 2^{n-n} \theta \cos 2^{n-n} \theta = \sin \theta$$

$$\Rightarrow 2^n \cos 2^{n-1} \theta \cos 2^{n-2} \theta \cos 2^{n-3} \theta \dots \\ \sin 2^0 \theta \cos 2^0 \theta = \sin \theta$$

$$\Rightarrow 2^n \cos 2^{n-1} \theta \cos 2^{n-2} \theta \cos 2^{n-3} \theta \dots \\ \sin \theta \cos \theta = 1$$

$$2^n \cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 2^2 \theta \dots \cos 2^{n-1} \theta = 1$$

(Showed)

প্রশ্নমালা-VII E

প্রমাণ কর যে,

$$1. (a) \frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)^2} = \left(\frac{1 - \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} \right)^2$$

$$= \left(\frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{x}{2}} \right)^2 = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = \text{R.H.S}$$

$$1. (b) \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} - 60^\circ \right) + \\ \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} + 60^\circ \right) = \frac{3}{2}$$

$$\text{L.H.S.} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} - 60^\circ \right) \\ + \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} + 60^\circ \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos 2 \cdot \frac{\alpha}{2} + 1 + \cos 2 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} - 60^\circ \right) \right. \\ \left. + 1 + \cos 2 \left(\frac{\alpha}{2} + 60^\circ \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \{ 3 + \cos \alpha + \cos(\alpha - 120^\circ) + \cos(\alpha + 120^\circ) \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ 3 + \cos \alpha + 2 \cos \alpha \cos 120^\circ \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ 3 + \cos \alpha + 2 \cos \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ 3 + \cos \alpha - \cos \alpha \} = \frac{3}{2}$$

$$1. (c) \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} - 36^\circ \right) + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + 36^\circ \right)$$

$$= \frac{1}{4} \{ 4 - (\sqrt{5} - 1) \cos \alpha \}$$

$$\text{L.H.S.} = \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} - 36^\circ \right) + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + 36^\circ \right)$$

$$= \frac{1}{2} \{ 1 - \cos 2 \left(\frac{\alpha}{2} - 36^\circ \right) + 1 - \cos 2 \left(\frac{\alpha}{2} + 36^\circ \right) \}$$

$$= \frac{1}{2} [2 - \{ \cos(\alpha - 72^\circ) + \cos(\alpha + 72^\circ) \}]$$

$$= \frac{1}{2} \{ 2 - 2 \cos \alpha \cos 72^\circ \} = 1 - \cos \alpha \cos 72^\circ$$

$$= 1 - \cos \alpha \cdot \cos(90^\circ - 18^\circ)$$

$$= 1 - \cos \alpha \sin 18^\circ$$

$$= 1 - \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1) \cos \alpha$$

$$= \frac{1}{4} \{ 4 - (\sqrt{5} - 1) \cos \alpha \} = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$2. (a) 2 \cos \frac{\pi}{16} = 2 \cos 11^\circ 15'$$

$$= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \quad [\text{কু.}'09; \text{চ.}'01; \text{না.}'03]$$

$$\text{R.H.S.} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{2 + \sqrt{2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}}$$

$$= \sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos 45^\circ)}}$$

$$= \sqrt{2 + \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 22^\circ 30'}} = \sqrt{2 + 2 \cos 22^\circ 30'} = \sqrt{2(1 + \cos 22^\circ 30')}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 11^\circ 15'} = 2 \cos 11^\circ 15' = \text{M.H.S.}$$

$$\text{আবার}, 2\cos \frac{\pi}{16} = 2\cos 11^\circ 15'$$

$$2\cos \frac{\pi}{16} = 2\cos 11^\circ 15' = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

$$2. (\text{b}) \cos(7\frac{1}{2})^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

[ৱা '০২; কু. '১০]

$$\text{R.H.S.} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos 30^\circ)}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2.2 \cos^2 15^\circ}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2 \cos 15^\circ}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2(1 + \cos 15^\circ)} = \frac{1}{2}\sqrt{2.2 \cos^2(7\frac{1}{2})^\circ}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cos(7\frac{1}{2})^\circ = \cos(7\frac{1}{2})^\circ = \text{R.H.S.}$$

$$2(\text{c}) \tan(7\frac{1}{2})^\circ = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$$

$$\text{L.H.S.} = \tan(7\frac{1}{2})^\circ = \tan 7^\circ 30'$$

$$= \frac{\sin 7^\circ 30'}{\cos 7^\circ 30'} = \frac{2 \sin^2 7^\circ 30'}{2 \sin 7^\circ 30' \cos 7^\circ 30'}$$

$$= \frac{1 - \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{1 - \cos(45^\circ - 30^\circ)}{\sin(45^\circ - 30^\circ)}$$

$$= \frac{1 - (\cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ)}{\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{(2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{6} - 3 - \sqrt{3} + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1}{3 - 1}$$

$$= \frac{2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} - 4 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$3. \frac{\sec \alpha - \tan \alpha}{\sec \alpha + \tan \alpha} = \cot^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sec \alpha - \tan \alpha}{\sec \alpha + \tan \alpha}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2})^2}{(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2})^2} = \left(\frac{\cos \frac{\alpha}{2} (\cot \frac{\alpha}{2} - 1)}{\cos \frac{\alpha}{2} (\cot \frac{\alpha}{2} + 1)} \right)^2$$

$$= \left(\frac{\cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\pi}{2} - 1}{\cot \frac{\pi}{2} + \cot \frac{\alpha}{2}} \right)^2 = \left(\cot \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right)^2$$

$$= \cot^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$4. \cos \Theta = \frac{a \cos \varphi - b}{a - b \cos \varphi} \text{ হলে দেখাও যে,$$

$$\frac{\tan \frac{1}{2} \theta}{\sqrt{a+b}} = \frac{\tan \frac{1}{2} \varphi}{\sqrt{a-b}}$$

$$\text{প্রমাণ : } \text{দেওয়া আছে, } \cos \Theta = \frac{a \cos \varphi - b}{a - b \cos \varphi}$$

প্রশ্নমূলা VII E
বিশ্লেষণ কর

$$\Rightarrow \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{a \frac{1 - \tan^2 \frac{\phi}{2}}{2} - b}{a - b \frac{1 + \tan^2 \frac{\phi}{2}}{2}}$$

or, $\frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{a(1 - \tan^2 \frac{\phi}{2}) - b(1 + \tan^2 \frac{\phi}{2})}{a(1 + \tan^2 \frac{\phi}{2}) - b(1 - \tan^2 \frac{\phi}{2})}$

or, $\frac{2}{-2 \tan^2 \frac{\theta}{2}} =$

$$\frac{a(1 - \tan^2 \frac{\phi}{2} + 1 + \tan^2 \frac{\phi}{2}) - b(1 + \tan^2 \frac{\phi}{2} + 1 - \tan^2 \frac{\phi}{2})}{a(1 - \tan^2 \frac{\phi}{2} - 1 - \tan^2 \frac{\phi}{2}) - b(1 + \tan^2 \frac{\phi}{2} - 1 + \tan^2 \frac{\phi}{2})}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-\tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2a - 2b}{-2a \tan^2 \frac{\phi}{2} - 2b \tan^2 \frac{\phi}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{a - b}{(a + b) \tan^2 \frac{\phi}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan^2 \frac{1}{2}\theta}{a + b} = \frac{\tan^2 \frac{1}{2}\phi}{a - b}$$

$$\therefore \frac{\tan \frac{1}{2}\theta}{\sqrt{a + b}} = \frac{\tan \frac{1}{2}\phi}{\sqrt{a - b}} \quad (\text{Showed})$$

5. (a) $\sec(\theta + \alpha) + \sec(\theta - \alpha) = 2 \sec \theta$

হলে দেখাও যে, $\cos \theta = \pm \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.

প্রমাণ : $\sec(\theta + \alpha) + \sec(\theta - \alpha) = 2 \sec \theta$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos(\theta + \alpha)} + \frac{1}{\cos(\theta - \alpha)} = \frac{2}{\cos \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(\theta - \alpha) + \cos(\theta + \alpha)}{\cos(\theta + \alpha) \cos(\theta - \alpha)} = \frac{2}{\cos \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cos \theta \cos \alpha}{\cos^2 \theta - \sin^2 \alpha} = \frac{2}{\cos \theta}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta \cos \alpha = \cos^2 \theta - \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta (1 - \cos \alpha) = \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 1 + \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \cos \theta = \pm \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \quad (\text{Showed})$$

5(b) $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sin B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে দেখাও যে

$$\tan \frac{A+B}{2} \cot \frac{A-B}{2} = 5 + 2\sqrt{6}$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sin B = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \quad [\text{যোজন-বিয়োজন করে}]$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$\Rightarrow \tan \left(\frac{A+B}{2} \right) \cot \left(\frac{A-B}{2} \right) = \frac{3 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2}{3 - 2}$$

$$\therefore \tan \left(\frac{A+B}{2} \right) \cot \left(\frac{A-B}{2} \right) = 5 + 2\sqrt{6}$$

(Showed)

6 (a) $\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\phi}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে,

$$\cos \phi = \frac{\cos \theta - e}{1 - e \cos \theta} \quad [\text{চ.'০৮; সি.'০৮, '১২; রা.'০৯}]$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\phi}{2}$

$$\Rightarrow \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1-e}{1+e} \tan^2 \frac{\phi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1-e}{1+e} \frac{1}{\tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{(1-e)\cos^2 \frac{\theta}{2}}{(1+e)\sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1-\tan^2 \frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{(1-e)\cos^2 \frac{\theta}{2} - (1+e)\sin^2 \frac{\theta}{2}}{(1-e)\cos^2 \frac{\theta}{2} + (1+e)\sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}) - e(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2})}{(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}) - e(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2})}$$

$$\cos \varphi = \frac{\cos \theta - e}{1 - e \cos \theta}$$

6.(b) $A + B \neq 0$ এবং $\sin A + \sin B = 2 \sin(A+B)$
 $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \frac{1}{3}$

[ক্ষ. '০১]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sin A + \sin B = 2 \sin(A+B)$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$$

$$= 2 \times 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$$

$$\Rightarrow \sin \frac{1}{2}(A+B) \{ \cos \frac{1}{2}(A-B) - 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \} = 0$$

$A + B \neq 0$ বলে $\sin \frac{1}{2}(A+B) \neq 0$

$$\cos \frac{1}{2}(A-B) - 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) = 0$$

$$\Rightarrow \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} - 2(\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow 3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} = \frac{1}{3}$$

$\therefore \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \frac{1}{3}$ (Showed)

7.(a) $\sin \theta = \frac{a-b}{a+b}$ হলে প্রমাণ কর যে,

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sin \theta = \frac{a-b}{a+b}$

$$\text{L.H.S.} = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$= \frac{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)} = \frac{\sin 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \cos 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$= \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)} = \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{1 + \sin \theta} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2}}{1 + \frac{a-b}{a+b}}$$

www.boighar.com

$$= \frac{\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2}}{\frac{a+b}{a+b+a-b}} = \frac{\sqrt{4ab}}{2a}$$

$$= \frac{2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2a} = \sqrt{\frac{b}{a}} = \text{R.H.S.}$$

বিকল্প পদ্ধতি : দেওয়া আছে, $\sin \theta = \frac{a-b}{a+b}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin \theta} = \frac{a+b}{a-b} \Rightarrow \frac{1-\sin \theta}{1+\sin \theta} = \frac{a+b-a+b}{a+b+a-b}$$

[বিয়োজন-যোজন করে]

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{2b}{2a}$$

প্রশ্নমালা VII E

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}\right)^2} &= \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{b}{a}} \\ \Rightarrow \frac{1 - \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan \frac{\theta}{2}} &= \sqrt{\frac{b}{a}} \Rightarrow \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{b}{a}} \\ \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) &= \sqrt{\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

7. (b) $a \cos \theta + b \sin \theta = c$ সমীকরণটি θ এর দুইটি ভিন্ন মান α, β দ্বারা সিদ্ধ হলে দেখাও যে,

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

সমাধান : $\cos \theta + b \sin \theta = c$ সমীকরণটি θ এর দুইটি ভিন্ন মান α ও β দ্বারা সিদ্ধ বলে,

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = c$$

$$\text{এবং } a \cos \beta + b \sin \beta = c$$

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = a \cos \beta + b \sin \beta$$

$$\Rightarrow a(\cos \alpha - \cos \beta) = b(\sin \beta - \sin \alpha)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a \cdot 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \\ = b \cdot 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

$$\alpha \neq \beta \text{ বলে, } \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \neq 0$$

$$a \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = b \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\Rightarrow \tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{b}{a}$$

$$\text{এখন, L.H.S.} = \sin(\alpha + \beta) = \sin 2 \cdot \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{1 + \tan^2 \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{2 \frac{b}{a}}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \\ &= \frac{2b}{a} \times \frac{a^2}{a^2 + b^2} = \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

প্রশ্ন কর যে,

$$\begin{aligned} 1. \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - 18^\circ\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + 18^\circ\right) \\ = \frac{1}{4} \{ 4 + (\sqrt{5} + 1) \cos \alpha \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - 18^\circ\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + 18^\circ\right) \\ &= \frac{1}{2} \{ 1 + \cos 2\left(\frac{\alpha}{2} - 18^\circ\right) + 1 + \cos 2\left(\frac{\alpha}{2} + 18^\circ\right) \}, \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \{ 2 + \cos(\alpha - 36^\circ) + \cos(\alpha + 36^\circ) \}$$

$$= \frac{1}{2} (2 + 2 \cos \alpha \cos 36^\circ)$$

$$= \{ 1 + \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1) \cos \alpha \}$$

$$= \frac{1}{4} \{ 4 + (\sqrt{5} + 1) \cos \alpha \} = \text{R.H.S.} \text{ (Proved)}$$

$$2.(a) \sin(292.5)^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\text{L.H.S.} = \sin(292.5)^\circ$$

$$= \sin\{270^\circ + (22.5)^\circ\} = -\cos(22.5)^\circ$$

$$= -\sqrt{\cos^2(22.5)^\circ} = -\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 45^\circ)}$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})} = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$$

$$= -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} = \text{R.H.S.}$$

$$2.(b) \cot(142.5)^\circ = \sqrt{2} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{6}$$

$$\text{L.H.S.} = \cot(142.5)^\circ = \cot 142^\circ 30'$$

$$= \cot(180^\circ - 37^\circ 30') = -\cot 37^\circ 30'$$

$$= -\frac{\cos 37^\circ 30'}{\sin 37^\circ 30'} = -\frac{2 \cos^2 37^\circ 30'}{2 \sin 37^\circ 30' \cos 37^\circ 30'}$$

$$= -\frac{1 + \cos 75^\circ}{\sin 75^\circ} = -\frac{1 + \cos(45^\circ + 30^\circ)}{\sin(45^\circ + 30^\circ)}$$

$$= -\frac{1 + \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2}} = -\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \\
 &= -\frac{(2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\
 &= -\frac{2\sqrt{6} + 3 - \sqrt{3} - 2\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1}{3 - 1} \\
 &= -\frac{2\sqrt{6} + 4 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{2} \\
 &= -(\sqrt{6} + 2 - \sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{6} \\
 2(c) \tan(82.5)^0 &= \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2 \\
 \text{L.H.S.} &= \tan(82.5)^0 = \tan 82^0 30' \\
 &= \tan(90^0 - 7^0 30') = \cot 7^0 30' \\
 &= \frac{\cos 7^0 30'}{\sin 7^0 30'} = \frac{2 \cos^2 7^0 30'}{2 \sin 7^0 30' \cos 7^0 30'} \\
 &= \frac{1 + \cos 15^0}{\sin 15^0} = \frac{1 + \cos(45^0 - 30^0)}{\sin(45^0 - 30^0)} \\
 &= \frac{1 + \cos 45^0 \cos 30^0 + \sin 45^0 \sin 30^0}{\cos 45^0 \cos 30^0 - \sin 45^0 \cos 30^0} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \\
 &= \frac{(2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\
 &= \frac{2\sqrt{6} + 3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1}{3 - 1} \\
 &= \frac{2\sqrt{6} + 4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{2} \\
 &= \sqrt{6} + 2 + \sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{6} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

3. $a \sin \theta + b \sin \varphi = c = a \cos \theta + b \cos \varphi$
হলে মনে করি,

$$\cos \frac{1}{2}(\theta - \varphi) = \pm \sqrt{\frac{2c^2 - (a-b)^2}{4ab}}$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $a \sin \theta + b \sin \varphi = c$
 $\Rightarrow a^2 \sin^2 \theta + b^2 \sin^2 \varphi + 2ab \sin \theta \sin \varphi = c^2$
... (1)

এবং $a \cos \theta + b \cos \varphi = c$
 $\Rightarrow a^2 \cos^2 \theta + b^2 \cos^2 \varphi + 2ab \cos \theta \cos \varphi = c^2$
... (2)

(1) ও (2) যোগ করে পাই,
 $a^2 + b^2 + 2ab(\sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi) = 2c^2$
 $\Rightarrow 2ab \cos(\theta - \varphi) = 2c^2 - a^2 - b^2$
 $\Rightarrow 2ab \{2 \cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi) - 1\} = 2c^2 - a^2 - b^2$
 $\Rightarrow 4ab \cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi) = 2c^2 - a^2 - b^2 + 2ab$
 $= 2c^2 - (a - b)^2$
 $\Rightarrow \cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi) = \frac{2c^2 - (a - b)^2}{4ab}$
 $\therefore \cos \frac{1}{2}(\theta - \varphi) = \pm \sqrt{\frac{2c^2 - (a - b)^2}{4ab}}$

4. দেখাও যে, $\sin x = 2^n \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^n}$.

$$\cos \frac{x}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} \cdot \sin \frac{x}{2^n}$$

প্রমাণ : $\sin x = \sin 2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$
 $= 2 \cos \frac{x}{2} \cdot \sin 2 \cdot \frac{x}{2^2} = 2 \cos \frac{x}{2} \cdot 2 \sin \frac{x}{2^2} \cdot \cos \frac{x}{2^2}$
 $= (2 \cos \frac{x}{2}) \cdot (2 \cos \frac{x}{2^2}) \cdot \sin \frac{x}{2^2}$
 $= (2 \cos \frac{x}{2}) \cdot (2 \cos \frac{x}{2^2}) \cdot (2 \cos \frac{x}{2^3}) \cdot \sin \frac{x}{2^3}$
 $= (2 \cos \frac{x}{2}) \cdot (2 \cos \frac{x}{2^2}) \cdot (2 \cos \frac{x}{2^3}) \cdot$
 $(2 \cos \frac{x}{2^{n-1}}) (2 \cos \frac{x}{2^n}) \cdot \sin \frac{x}{2^n}$
 $\therefore \sin x = 2^n \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} \cdot \sin \frac{x}{2^n}$

প্রশ্নমালা VII-F

$$A + B + C = \pi \text{ হলে প্রমাণ কর যে,$$

$$1. (a) \sin A + \sin B + \sin C$$

$$= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \quad [\text{য.'০২}]$$

প্রমাণ : L.H.S. = $\sin A + \sin B + \sin C$

$$\begin{aligned} &= 2\sin \frac{1}{2}(A+B)\cos \frac{1}{2}(A-B) + 2\sin \frac{C}{2}\cos \frac{C}{2} \\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\cos \frac{1}{2}(A-B) + 2\sin \frac{C}{2}\cos \frac{C}{2} \\ &= 2\cos \frac{C}{2} \cos \frac{1}{2}(A-B) + 2\sin \frac{C}{2}\cos \frac{C}{2} \\ &= 2\cos \frac{C}{2} \left\{ \cos \frac{1}{2}(A-B) + \sin \frac{C}{2} \right\} \\ &= 2\cos \frac{C}{2} \left\{ \cos \frac{1}{2}(A-B) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}\right) \right\} \\ &= 2\cos \frac{C}{2} \left\{ \cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) \right\} \\ &= 2\cos \frac{C}{2} \left(2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \right) \\ &= 4\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \text{R.H.S.} \quad (\text{Proved}) \end{aligned}$$

$$1.(b) \sin A + \sin B - \sin C =$$

$$4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \quad [\text{য.'০৮}]$$

প্রমাণ : L.H.S. = $\sin A + \sin B - \sin C$

$$\begin{aligned} &= 2\sin \frac{1}{2}(A+B)\cos \frac{1}{2}(A-B) - 2\sin \frac{C}{2}\cos \frac{C}{2} \\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\cos \frac{1}{2}(A-B) - 2\sin \frac{C}{2}\cos \frac{C}{2} \\ &= 2\cos \frac{C}{2} \cos \frac{1}{2}(A-B) - 2\sin \frac{C}{2}\cos \frac{C}{2} \\ &= 2\cos \frac{C}{2} \left\{ \cos \frac{1}{2}(A-B) - \sin \frac{C}{2} \right\} \\ &= 2\cos \frac{C}{2} \left\{ \cos \frac{1}{2}(A-B) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}\right) \right\} \\ &= 2\cos \frac{C}{2} \left\{ \cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

$$= 2\cos \frac{C}{2} \left(2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \right)$$

$$= 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \text{R.H.S.} \quad (\text{Proved})$$

$$1. (c) \sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4\cos A \sin B \cos C \quad [\text{য.'০১}]$$

প্রমাণ : L.H.S. = $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C$

$$\begin{aligned} &= 2 \sin \frac{2A - 2B}{2} \cos \frac{2A + 2B}{2} + \cos 2C \\ &= 2 \sin(A - B) \cos(A + B) + 2 \sin C \cos C \\ &= 2 \sin(A - B) \cos(\pi - C) + 2 \sin C \cos C \\ &= -2 \cos C \sin(A - B) + 2 \sin C \cos C \\ &= 2\cos C \{ \sin C - \sin(A - B) \} \\ &= 2 \cos C [\sin\{\pi - (A + B)\} - \sin(A - B)] \\ &= 2\cos C \{ \sin(A + B) - \sin(A - B) \} \\ &= 2\cos C \cdot 2 \sin B \cos A = 4\cos A \sin B \cos C \\ &= \text{R.H.S.} \quad (\text{Proved}) \end{aligned}$$

$$1.(d) \cos 2A - \cos 2B + \cos 2C = 1 - 4\sin A \cos B \sin C$$

প্রমাণ : L.H.S. = $\cos 2A - \cos 2B + \cos 2C$

$$\begin{aligned} &= \cos 2A + \cos 2C - \cos 2B \\ &= 2\cos(A + C) \cos(A - C) - (2\cos^2 B - 1) \\ &= 2\cos(\pi - B) \cos(A - C) - 2\cos^2 B + 1 \\ &= -2\cos B \cos(A - C) - 2\cos^2 B + 1 \\ &= 1 - 2\cos B \{ \cos(A - C) + \cos B \} \\ &= 1 - 2\cos B [\cos(A - C) + \cos\{\pi - (A + C)\}] \\ &= 1 - 2\cos B \{ \cos(A - C) - \cos(A + C) \} \\ &= 1 - 2\cos B \cdot 2 \sin A \sin C \\ &= 1 - 4\sin A \cos B \sin C = \text{R.H.S.} \quad (\text{Proved}) \end{aligned}$$

$$(e) \frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2 \quad [\text{ব.'১১}]$$

প্রমাণ :

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} \\ &= \frac{\cos A \sin A + \cos B \sin B + \cos C \sin C}{\sin A \sin B \sin C} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{2\sin A \sin B \sin C}$$

এখন, $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$$= 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C \cos C$$

$$= 2\sin(\pi - C) \cos(A-B) + 2\sin C \cos C$$

$$= 2\sin C \cos(A-B) + 2\sin C \cos C$$

$$= 2\sin C \{ \cos(A-B) + \cos C \}$$

$$= 2\sin C \{ \cos(A-B) + \cos(\pi - A + B) \}$$

$$= 2\sin C \{ \cos(A-B) - \cos(A+B) \}$$

$$= 2\sin C \cdot 2\sin A \sin B = 4\sin A \sin B \sin C$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{4\sin A \sin B \sin C}{2\sin A \sin B \sin C} = 2 = \text{R.H.S.}$$

$$2.(a) \sin(B+2C) + \sin(C+2A) + \sin(A+2B)$$

$$= 4 \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{C-A}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

প্রমাণ : L.H.S. = $\sin(B+2C) + \sin(C+2A) + \sin(A+2B)$

$$= \sin\{A+B+C+(C-A)\} + \sin\{A+B+C+(A-B)\} + \sin\{A+B+C+(B-C)\}$$

$$= \sin\{\pi-(A-C)\} + \sin\{\pi-(B-A)\} + \sin\{\pi-(C-B)\}$$

$$= \sin(A-C) + \sin(B-A) + \sin(C-B)$$

$$= 2\sin \frac{1}{2}(A-C+B-A) \cos \frac{1}{2}(A-C-B+A) - \sin(B-C)$$

$$= 2\sin \frac{1}{2}(B-C) \cos \frac{1}{2}(2A-B-C) -$$

$$2\sin \frac{1}{2}(B-C) \cos(B-C)$$

$$= 2\sin \frac{1}{2}(B-C) \{ \cos \frac{1}{2}(2A-B-C) - \cos(B-C) \}$$

$$= 2\sin \frac{B-C}{2} \{ 2\sin \frac{1}{2} \left(\frac{2A-B-C+B+C}{2} \right) \}$$

$$\sin \frac{1}{2} \left(\frac{B-C-2A+B+C}{2} \right)$$

$$= 2\sin \frac{B-C}{2} \cdot 2 \sin \frac{A-C}{2} \sin \frac{B-A}{2}$$

$$= 4\sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{C-A}{2} \sin \frac{A-B}{2} = \text{R.H.S.}$$

$$2.(b) \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} =$$

$$4 \cos \frac{\pi-A}{4} \cos \frac{\pi-B}{4} \cos \frac{\pi-C}{4}$$

$$\text{R.H.S.} = 4 \cos \frac{\pi-A}{4} \cos \frac{\pi-B}{4} \cos \frac{\pi-C}{4}$$

$$= 2 \cdot 2 \cos \frac{B+C}{4} \cos \frac{C+A}{4} \cos \frac{A+B}{4}$$

$$= 2[\cos(\frac{B+C}{4} + \frac{C+A}{4})$$

$$+ \cos(\frac{B+C}{4} - \frac{C+A}{4})] \cos \frac{A+B}{4}$$

$$= 2[\cos \frac{A+B+2C}{4} + \cos \frac{B-A}{4}] \cos \frac{A+B}{4}$$

$$= 2\cos \frac{A+B+2C}{4} \cos \frac{A+B}{4} +$$

$$2 \cos \frac{B-A}{4} \cos \frac{A+B}{4}$$

$$= \cos \frac{A+B+C}{2} + \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos(-\frac{A}{2})$$

$$= \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}$$

$$= 0 + \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}$$

$$= \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} = \text{R.H.S.} (\text{Proved})$$

$$3.(a) \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} +$$

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 1$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $A+B+C=\pi$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

$$\therefore \tan(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}) = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2})$$

প্রশ্নমালা বিষয় পর্যায়

$$\Rightarrow \frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} = \cot \frac{C}{2} = \frac{1}{\tan \frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = 1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}$$

$$\cdot \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 1$$

৩(b) $\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1$ [প.ত.প. '০৫]

প্রমাণ : দেওয়া আছে $A + B + C = \pi$

$$\Rightarrow A+B = \pi-C \Rightarrow \cot(A+B) = \cot(\pi-C)$$

$$\Rightarrow \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A} = -\cot C$$

$$\Rightarrow \cot A \cot B - 1 = -\cot B \cot C - \cot C \cot A$$

$$\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1$$

4. (a) $\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin A$

cos B sin C [জ. '০২; চ. '০২, '১৩; পি. '০৭; গ্র. '১১]

প্রমাণ : L.H.S. = $\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B) - \sin^2 B$$

$$= 1 - \sin^2 B - \frac{1}{2} \cdot 2 \cos(A+C) \cos(A-C)$$

$$= \cos^2 B - \cos(\pi-B) \cos(A-C)$$

$$= \cos^2 B + \cos B \cos(A-C)$$

$$= \cos B \{\cos B + \cos(A-C)\}$$

$$= \cos B [\cos\{\pi-(A+C)\} + \cos(A-C)]$$

$$= \cos B [-\cos(A+C) + \cos(A-C)]$$

$$= \cos B \cdot 2 \sin A \sin C$$

$$= 2 \sin A \cos B \sin C = R.H.S. \text{ (Proved)}$$

b) $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2 \sin A$

sin B cos C [জ. '০৭, '০৯, '০৯; ঘ. '০৭]

প্রমাণ : L.H.S. = $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) - \cos^2 C$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos(A+B) \cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$= 1 + \cos(\pi-C) \cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$= 1 - \cos C \cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$= 1 - \cos C \{\cos(A-B) + \cos C\}$$

$$= 1 - \cos C [\cos(A-B) + \cos\{\pi - (A+B)\}]$$

$$= 1 - \cos C [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$= 1 - 2 \cos C \sin A \sin B = R.H.S$$

(c) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A$
 $\cos B \cos C$ [সি. '০২, '০৭; পি. '০৯; জ. '১১, চ. '১৩]

প্রমাণ : L.H.S. = $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) + \cos^2 C$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos(A+B) \cos(A-B) + \cos^2 C$$

$$= 1 + \cos(\pi-C) \cos(A-B) + \cos^2 C$$

$$= 1 - \cos C \cos(A-B) + \cos^2 C$$

$$= 1 - \cos C [\cos(A-B) - \cos C]$$

$$= 1 - \cos C [\cos(A-B) - \cos\{\pi - (A+B)\}]$$

$$= 1 - \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

$$= 1 - \cos C \cdot 2 \cos A \cos B$$

$$= 1 - 2 \cos A \cos B \cos C = R.H.S.$$

4(d) $\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 1 + 2 \cos 2A \cos 2B \cos 2C$

প্রমাণ : L.H.S. = $\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C$

$$= \frac{1}{2}[1 + \cos 4A + 1 + \cos 4B] + \cos^2 2C$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 2(A+B) \cos 2(A-B) + \cos^2 2C$$

$$= 1 + \cos(2\pi - 2C) \cos 2(A-B) + \cos^2 2C$$

$$= 1 + \cos 2C \{\cos 2(A-B) + \cos 2C\}$$

$$= 1 + \cos 2C [\cos 2(A-B) + \cos\{2\pi - 2(A+B)\}]$$

$$= 1 + \cos 2C [\cos 2(A-B) + \cos 2(A+B)]$$

$$= 1 + \cos 2C \cdot 2 \cos 2A \cos 2B$$

$$= 1 + 2 \cos 2A \cos 2B \cos 2C = R.H.C.$$

(Proved)

4(e) $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2$

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad [\text{ক. '০৯}]$$

প্রমাণ : L.H.S. = $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos A + 1 - \cos B) + \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B) + \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$= 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) \cos \frac{1}{2}(A-B) + \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$= 1 - \sin \frac{C}{2} \cos \frac{1}{2}(A-B) + \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$= 1 - \sin \frac{C}{2} \left\{ \cos \frac{1}{2}(A-B) - \sin \frac{C}{2} \right\}$$

$$= 1 - \sin \frac{C}{2} \left[\cos \frac{1}{2}(A-B) - \sin \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(A+B) \right\} \right]$$

$$= 1 - \sin \frac{C}{2} \left[\cos \frac{1}{2}(A-B) - \cos \frac{1}{2}(A+B) \right]$$

$$= 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \text{R.H.S. (Proved)}$$

৫. $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে,

(a) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin A \sin B \sin C = 1$ [সি.বা.'০১; মা., দি.'১২; কু.'১৪]

প্রমাণ : L.H.S. = $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin A \cos B \sin C$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B) + \sin^2 C + 2 \sin A \cos B \sin C$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cos(A+B) \cos(A-B) + \sin^2 C + 2 \sin A \cos B \sin C$$

$$= 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) \cos(A-B) + \sin^2 C + 2 \sin A \cos B \sin C$$

$$= 1 - \sin C \cos(A-B) + \sin^2 C + 2 \sin A \sin B \sin C$$

$$= 1 - \sin C \{ \cos(A-B) - \sin C \} + 2 \sin A \cos B \sin C$$

$$= 1 - \sin C [\cos(A-B) - \sin\left\{\frac{\pi}{2} - (A+B)\right\}] + 2 \sin A \cos B \sin C$$

$$= 1 - \sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)] + 2 \sin A \cos B \sin C$$

$$= 1 - \sin C \cdot 2 \sin A \sin B + 2 \sin A \cos B \sin C$$

$$= 1 - 2 \sin A \sin B \sin C + 2 \sin A \sin B \sin C$$

$$= 1 = \text{R.H.S.}$$

৫(b) $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cot B \cot C$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $A + B + C = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow A + B = \frac{\pi}{2} - C$$

$$\Rightarrow \cot(A+B) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A} = \tan C$$

$$\Rightarrow \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A} = \frac{1}{\cot C}$$

$$\Rightarrow \cot A + \cot B = \cot A \cot B \cot C + \cot C$$

$$\therefore \cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cot B \cot C$$

৬. (a) $A + B + C = 2\pi$ হলে প্রমাণ কর যে,
 $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C = 1$ [সি.'০১]

প্রমাণ : L.H.S. = $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) + \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos(A+B) \cos(A-B) + \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C$$

$$= 1 + \cos(2\pi - C) \cos(A-B) + \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C$$

$$= 1 + \cos C \{ \cos(A-B) + \cos C \} - 2 \cos A \cos B \cos C$$

$$= 1 + \cos C [\cos(A-B) + \cos\{2\pi - (A+B)\} - 2 \cos A \cos B \cos C]$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \cos C [\cos(A - B) + \cos(A + B)] \\
 &\quad - 2 \cos A \cos B \cos C \\
 &= 1 + \cos C \cdot 2 \cos A \cos B - 2 \cos A \cos B \cos C \\
 &= 1 - 2 \cos A \cos B \cos C + 2 \cos A \cos B \cos C \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6(b) A + B + C = 0 \text{ হলে প্রমাণ কর যে, } \cos A + \cos B + \cos C &= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - 1 \\
 \text{প্রমাণ : L.H.S.} &= \cos A + \cos B + \cos C \\
 &= 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B) + 2 \cos^2 \frac{1}{2}C - 1 \\
 &= 2 \cos \frac{1}{2}(-C) \cos \frac{1}{2}(A-B) + 2 \cos^2 \frac{1}{2}C - 1 \\
 &= 2 \cos \frac{1}{2}C [\cos \frac{1}{2}(A-B) + \cos \frac{1}{2}\{-(A+B)\}] - 1 \\
 &= 2 \cos \frac{1}{2}C [\cos \frac{1}{2}(A-B) + \cos \frac{1}{2}(A+B)] - 1 \\
 &= 2 \cos \frac{1}{2}C \cdot 2 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B - 1 \\
 &= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - 1 = R.H.S. \text{ (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$6. (c) A + B + C = (2n+1) \frac{\pi}{2} \text{ হলে দেখাও যে,}$$

$$\tan A \tan C + \tan C \tan A + \tan A \tan B = 1$$

$$\text{প্রমাণ : দেওয়া আছে, } A + B + C = (2n+1) \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow A + B = (n\pi + \frac{\pi}{2}) - C$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \tan(A+B) &= \tan\left\{(n\pi + \frac{\pi}{2}) - C\right\} \\
 &= \tan\left\{n\pi + \left(\frac{\pi}{2} - C\right)\right\} \\
 &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \cot C
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{1}{\tan C}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \tan A \tan C + \tan B \tan C &= 1 - \tan A \tan B \\
 \tan A \tan C + \tan C \tan A + \tan A \tan B &= 1
 \end{aligned}$$

$$7. (a) A + B + C = \pi \text{ এবং } \cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3} \text{ হলে দেখাও যে, } A = B = C. [ব. '০৭]$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $A + B + C = \pi$

$$\Rightarrow A + B = \pi - C$$

$$\Rightarrow \cot(A + B) = \cot(\pi - C)$$

$$\Rightarrow \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A} = -\cot C$$

$$\Rightarrow \cot A \cot B - 1 = \cot B \cot C - \cot C \cot A$$

$$\Rightarrow \cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

এখন, $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2 (\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A) &= 3(\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A) \\
 \Rightarrow \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C - (\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{1}{2} \{(\cot A - \cot B)^2 + (\cot B - \cot C)^2 + (\cot C - \cot A)^2\} &= 0
 \end{aligned}$$

প্রত্যেকটি শূন্য না হলে তিনটি বর্গের সমষ্টি শূন্য হতে পারে না।

$$\cot A - \cot B = 0 \Rightarrow \cot A = \cot B$$

$$\cot B - \cot C = 0 \Rightarrow \cot B = \cot C$$

$$\cot A = \cot B = \cot C$$

$$\Rightarrow A = B = C$$

$$7(b) A + B + C = \pi \text{ এবং } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \sin B \sin C + \sin C \sin A + \sin A \sin B \text{ হলে দেখাও যে, } A = B = C$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C =$

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A$$

$$\Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - (\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{1}{2} \{(\sin A - \sin B)^2 + (\sin B - \sin C)^2 + (\sin C - \sin A)^2\} &= 0
 \end{aligned}$$

প্রত্যেকটি শূন্য না হলে তিনটি বর্গের সমষ্টি শূন্য হতে পারে না।

$$\begin{aligned} \sin A - \sin B = 0 &\Rightarrow \sin A = \sin B \\ \Rightarrow \sin A = \sin B &= \sin(\pi - B) \\ \sin A = \sin B &\text{ অথবা, } \sin A = \sin(\pi - B) \\ A = B &\text{ অথবা, } A = \pi - B \Rightarrow A + B = \pi \\ \text{কিন্তু } A + B + C &= \pi \text{ বলে, } A + B = \pi \\ &\text{হতে পারে না।} \\ A &= B \text{ অনুরূপভাবে, } B = C \\ A &= B = C \quad (\text{Showed}) \end{aligned}$$

7.(c) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$
 $\tan C$ হলে দেখাও যে, $A + B + C = n\pi$, যখন
 $n \in \mathbb{Z}$.

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tan A + \tan B &= -\tan C(1 - \tan A \tan B) \\ \Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} &= -\tan C \\ \Rightarrow \tan(A + B) &= -\tan C = \tan(\pi - C) \\ \tan(2\pi - C) &= \tan(3\pi - C) = \dots \\ &= \tan(n\pi - C), \text{ যেখানে } n \in \mathbb{Z}. \\ A + B &= n\pi - C \Rightarrow A + B + C = n\pi \quad (\text{Showed}) \end{aligned}$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

$A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ কর যে,

1. $\cos A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - 1$

প্রমাণ : L.H.S. = $\cos A + \cos B - \cos C$

$$\begin{aligned} &= 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B) - (1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2}) \\ &= 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) \cos \frac{1}{2}(A-B) + 2 \sin^2 \frac{C}{2} - 1 \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{1}{2}(A-B) + 2 \sin^2 \frac{C}{2} - 1 \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \left\{ \cos \frac{1}{2}(A-B) + \sin \frac{C}{2} \right\} - 1 \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \left\{ \cos \frac{1}{2}(A-B) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \right) \right\} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \sin \frac{C}{2} \left\{ \cos \left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2} \right) + \cos \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) \right\} - 1 \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} (2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}) - 1 \\ &= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - 1 = R.H.S. \quad (\text{Proved}) \end{aligned}$$

2.(a) $\sin(B+C-A) + \sin(C+A-B) + \sin(A+B-C) = 4 \sin A \sin B \sin C$

প্রমাণ : L.H.S. = $\sin(B+C-A) + \sin(C+A-B) + \sin(A+B-C)$

$$\begin{aligned} &= \sin(A+B+C-2A) + \sin(A+B+C-2B) \\ &+ \sin(A+B+C-2C) \\ &= \sin(\pi - 2A) + \sin(\pi - 2B) + \sin(\pi - 2C) \\ &= \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\ &= 2 \sin \frac{1}{2}(2A+2B) \cos \frac{1}{2}(2A-2B) + \cos 2C \\ &= 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C \\ &= 2 \sin(\pi - C) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C \\ &= 2 \sin C \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C \\ &= 2 \sin C \{ \cos(A-B) + \cos C \} \\ &= 2 \sin C \{ \cos(A-B) + \cos(\pi - A+B) \} \\ &= 2 \sin C \{ \cos(A-B) - \cos(A+B) \} \\ &= 2 \sin C \cdot 2 \sin A \sin B = 4 \sin A \sin B \sin C \\ &= R.H.S. \quad (\text{Proved}) \end{aligned}$$

2. (b) $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 1 + 4 \sin \frac{B+C}{4} \sin \frac{C+A}{4} \sin \frac{A+B}{4}$

$$\begin{aligned} &= 1 + 4 \sin \frac{\pi - A}{4} \sin \frac{\pi - B}{4} \sin \frac{\pi - C}{4} \\ M.H.S. &= 1 + 4 \sin \frac{B+C}{4} \sin \frac{C+A}{4} \sin \frac{A+B}{4} \\ &= 1 + 2 \cdot 2 \sin \frac{B+C}{4} \sin \frac{C+A}{4} \sin \frac{A+B}{4} \\ &= 1 + 2 \left[\cos \frac{B+C-C-A}{4} - \right. \\ &\quad \left. \cos \frac{B+C+C+A}{4} \right] \sin \frac{A+B}{4} \end{aligned}$$

અધ્યાત્મિક VII F

$$\begin{aligned}
 &= 1 + 2\cos \frac{B-A}{4} \sin \frac{A+B}{4} - \\
 &\quad 2\cos \frac{A+B+2C}{4} \sin \frac{A+B}{4} \\
 &= 1 + \sin \left(\frac{A+B}{4} + \frac{B-A}{4} \right) + \\
 &\quad \sin \left(\frac{A+B}{4} - \frac{B-A}{4} \right) - \\
 &\quad \left\{ \sin \left(\frac{A+B}{4} + \frac{A+B+2C}{4} \right) + \right. \\
 &\quad \left. \sin \left(\frac{A+B}{4} - \frac{A+B+2C}{4} \right) \right\} \\
 &= 1 + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} - \text{www.boighar.com} \\
 &\quad \sin \frac{A+B+C}{2} - \sin \left(-\frac{C}{2} \right) \\
 &= 1 + \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} - \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{C}{2} \\
 &= 1 + \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} - 1 \\
 &= \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = \text{L.H.S.} \\
 \text{Again, } &1 + 4\sin \frac{B+C}{4} \sin \frac{C+A}{4} \sin \frac{A+B}{4} \\
 &= 1 + 4\sin \frac{\pi-A}{4} \sin \frac{\pi-B}{4} \sin \frac{\pi-C}{4} = \text{R.H.S.}
 \end{aligned}$$

(c) $\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B = \sin A \sin B \sin C$

પ્રમાણ : L.H.S. = $\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B$

$$\begin{aligned}
 &= (\sin A \cos B + \sin B \cos A) \cos C + \\
 &\quad \sin C \cos A \cos B \\
 &= \sin(A+B) \cos C + \sin C \cos A \cos B \\
 &= \sin(\pi - C) \cos\{\pi - (A+B)\} + \\
 &\quad \sin C \cos A \cos B \\
 &= \sin C \{-\cos(A+B) + \cos A \cos B\} \\
 &= \sin C (-\cos A \cos B + \sin A \sin B + \\
 &\quad \cos A \cos B) \\
 &= \sin A \sin B \sin C = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

3. $\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A \tan 2B \tan 2C$

પ્રમાણ : દેખો આછે, $A + B + C = \pi$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow 2A + 2B = 2\pi - 2C \\
 &\Rightarrow \tan(2A + 2B) = \tan(2\pi - 2C) \\
 &\Rightarrow \frac{\tan 2A + \tan 2B}{1 - \tan 2A \tan 2B} = -\tan 2C \\
 &\Rightarrow \tan 2A + \tan 2B = -\tan 2C \\
 &\quad + \tan 2A \tan 2B \tan 2C \\
 &\therefore \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C \\
 &\quad = \tan 2A \tan 2B \tan 2C
 \end{aligned}$$

4. $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}$

$$\begin{aligned}
 &= 2 + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\
 \text{પ્રમાણ : L.H.S.} &= \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \\
 &= \frac{1}{2}(1 + \cos A + 1 + \cos B + \cos^2 \frac{C}{2}) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B) + \cos^2 \frac{C}{2} \\
 &= 1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) \cos \frac{1}{2}(A-B) + \cos^2 \frac{C}{2} \\
 &= 1 + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{1}{2}(A-B) + 1 - \sin^2 \frac{C}{2} \\
 &= 2 + \sin \frac{C}{2} \{ \cos \frac{1}{2}(A-B) - \sin \frac{C}{2} \} \\
 &= 2 + \sin \frac{C}{2} \left[\cos \frac{1}{2}(A-B) - \right. \\
 &\quad \left. \sin \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(A+B) \right\} \right] \\
 &= 2 + \sin \frac{C}{2} \left[\cos \frac{1}{2}(A-B) - \cos \frac{1}{2}(A+B) \right] \\
 &= 2 + \sin \frac{C}{2} \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \\
 &= 2 + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$5. A + B + C = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \text{ হলে দেখাও যে, } \\ \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \pm 4 \cos A \cos B \cos C$$

প্রমাণ : $\sin\{(2n+1)\frac{\pi}{2} - \theta\} = \sin\{n\pi + (\frac{\pi}{2} - \theta)\}$

$$= \pm \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \pm \cos \theta$$

এখন, $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$$= 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C$$

$$= 2 \sin\{(2n+1)\frac{\pi}{2} - C\} \cos(A-B) +$$

$$2 \sin\{(2n+1)\frac{\pi}{2} - (A+B)\} \cos C$$

$$= 2(\pm \cos C) \cos(A-B) + 2\{\pm \cos(A+B)\} \cos C$$

$$= \pm 2 \cos C \{ \cos(A-B) + \cos(A+B) \}$$

$$= \pm 2 \cos C (2 \cos A \cos B)$$

$$\pm 4 \cos A \cos B \cos C$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C =$$

$$\pm 4 \cos A \cos B \cos C$$

$$6. \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1 \text{ হলে দেখাও যে, } A \pm B \pm C = (2n+1) \pi, \text{ যেখানে } n \text{ যে কোন অখণ্ড সংখ্যা।}$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) + \cos^2 C + \cos C \cdot 2 \cos A \cos B = 1$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos(A+B) \cos(A-B) + \cos^2 C + \cos C \{ \cos(A+B) + \cos(A-B) \} = 1$$

$$\Rightarrow \cos(A+B) \cos(A-B) + \cos^2 C + \cos C \cos(A+B) + \cos(A-B) \cos C = 0$$

$$\Rightarrow \cos(A-B) \{ \cos(A+B) + \cos C \} + \cos C \{ \cos(A+B) + \cos C \} = 0$$

$$\Rightarrow \{ \cos(A+B) + \cos C \} \{ \cos(A-B) + \cos C \} = 0$$

$$\cos(A \pm B) + \cos C = 0$$

$$\Rightarrow \cos(A \pm B) = -\cos C = \cos(\pi \pm C) = \cos(3\pi \pm C) = \cos\{(2n+1)\pi \pm C\}, \text{ যেখানে } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow A \pm B = (2n+1)\pi \pm C$$

$$\Rightarrow A \pm B \pm C = (2n+1)\pi$$

$$7. x + y + z = xyz \text{ হলে প্রমাণ কর যে, }$$

$$\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} = \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2z}{1-z^2}$$

মনে করি, $x = \tan A \Rightarrow A = \tan^{-1} x$

$$y = \tan B \Rightarrow B = \tan^{-1} y$$

$$z = \tan C \Rightarrow C = \tan^{-1} z$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C (1 - \tan A \tan B)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$

$$\Rightarrow \tan(A+B) = \tan(\pi - C)$$

$$\Rightarrow A+B = \pi - C$$

$$\Rightarrow 2A + 2B = 2\pi - 2C$$

$$\Rightarrow \tan(2A+2B) = \tan(2\pi - 2C)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan 2A + \tan 2B}{1 + \tan 2A \tan 2B} = -\tan 2C$$

$$\Rightarrow \tan 2A + \tan 2B = \tan 2C + \tan A \tan B \tan C$$

$$\Rightarrow \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan A \tan B \tan C$$

$$\Rightarrow \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} + \frac{2 \tan B}{1 - \tan^2 B} + \frac{2 \tan C}{1 - \tan^2 C} =$$

$$\frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \cdot \frac{2 \tan B}{1 - \tan^2 B} \cdot \frac{2 \tan C}{1 - \tan^2 C}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{1-x^2} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{2x}{1-x^2} =$$

$$\frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2x}{1-x^2}$$

$$8. x + y + z = xyz \text{ হলে প্রমাণ কর যে, }$$

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}$$

$$= \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \cdot \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \cdot \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}$$

প্রমাণ ৪ মনে করি, $x = \tan A$, $y = \tan B$, $z = \tan C$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

$$\tan C \quad [\because x + y + z = xy z]$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B = \tan C (\tan A \cdot \tan B - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$

$$\Rightarrow \tan(A + B) = \tan(\pi - C)$$

$$A + B = \pi - C$$

$$\Rightarrow 3A + 3B + 3C = 3\pi$$

$$\tan(3A + 3B + 3C) = \tan 3\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\tan 3A + \tan 3B + \tan 3C - \tan 3A \cdot \tan 3B \cdot \tan 3C}{1 - \tan 3A \cdot \tan 3B - \tan 3B \cdot \tan 3C - \tan 3C \cdot \tan 3A} = 0$$

$$\Rightarrow \tan 3A + \tan 3B + \tan 3C =$$

$$\tan 3A \cdot \tan 3B \cdot \tan 3C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A} + \frac{3 \tan B - \tan^3 B}{1 - 3 \tan^2 B}$$

$$+ \frac{3 \tan C - \tan^3 C}{1 - 3 \tan^2 C}$$

$$= \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A} \cdot \frac{3 \tan B - \tan^3 B}{1 - 3 \tan^2 B}$$

$$\frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$$

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}$$

$$= \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \cdot \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \cdot \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} \quad (\text{Proved})$$

৯. $yz + zx + xy = 1$ হলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}{xy} + \frac{(y^2 - 1)(z^2 - 1)}{yz} +$$

$$\frac{(z^2 - 1)(x^2 - 1)}{zx} = 4$$

প্রমাণ ৫ মনে করি, $x = \cot A \Rightarrow A = \cot^{-1} x$

$$y = \cot B \Rightarrow B = \cot^{-1} y$$

$$z = \cot C \Rightarrow C = \cot^{-1} z$$

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C +$$

$$\cot C \cot A = 1$$

$$\Rightarrow \cot A \cot B - 1 = -(\cot B + \cot A) \cot C$$

$$\Rightarrow \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot C$$

$$\Rightarrow \cot(A + B) = \cot(\pi - C)$$

$$\Rightarrow A + B = \pi - C$$

$$\Rightarrow 2A + 2B = 2\pi - 2C$$

$$\Rightarrow \cot(2A + 2B) = \cot(2\pi - 2C)$$

$$\Rightarrow \frac{\cot 2A \cot 2B - 1}{\cot 2B + \cot 2A} = -\cot 2C$$

$$\Rightarrow \cot 2A \cot 2B + \cot 2B \cot 2C + \cot 2C \cot 2A = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A} \frac{\cot^2 B - 1}{2 \cot B} +$$

$$\frac{\cot^2 B - 1}{2 \cot B} \frac{\cot^2 C - 1}{2 \cot C} +$$

$$\frac{\cot^2 C - 1}{2 \cot C} \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A} = 1$$

$$\frac{x^2 - 1}{2x} \frac{y^2 - 1}{2y} + \frac{y^2 - 1}{2y} \cdot \frac{z^2 - 1}{2z} +$$

$$\frac{z^2 - 1}{2z} \frac{x^2 - 1}{2x} = 1$$

$$\therefore \frac{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}{xy} + \frac{(y^2 - 1)(z^2 - 1)}{yz} +$$

$$\frac{(z^2 - 1)(x^2 - 1)}{zx} = 4 \quad (\text{Showed})$$

1. (a) Solⁿ: $\sec(-135^\circ) = \sec 135^\circ$
 $= \sec(180^\circ - 45^\circ) = -\sec 45^\circ = -\sqrt{2}$

(b) Solⁿ: $\sec \theta = \pm \sqrt{1 + \tan^2 \theta}$
 $= \pm \sqrt{1 + \frac{25}{144}} = \pm \frac{13}{12} \quad \cos \theta = \pm \frac{12}{13}$

(c) Solⁿ: $\cot 45^\circ + \cot(\pi + 45^\circ) + \cot(2\pi + 45^\circ) + \dots + \cot(9\pi + 45^\circ)$
 $= (9+1) \cot 45^\circ = 10 \cdot 1 = 10$

(d) Solⁿ: A ও B পূরক কোণ হলে,

$$\sin A = \cos B \quad \text{Ans. A.}$$

(e) Solⁿ: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, $\sin 15^\circ$ এবং $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ এর আসন্ন মান = 0.258 ∴ Ans. C.

(f) Solⁿ: $\cos 68^\circ 20' \cos 8^\circ 20' + \cos 81^\circ 40' \cos 21^\circ 40' = \cos(68^\circ 20' - 8^\circ 20')$
 $= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

(g) Solⁿ: $\frac{\cos 8^\circ + \sin 8^\circ}{\cos 8^\circ - \sin 8^\circ} = \frac{1 + \tan 8^\circ}{1 - \tan 8^\circ}$
 $= \frac{\tan 45^\circ + \tan 8^\circ}{\tan 45^\circ - \tan 8^\circ} = \tan(45^\circ + 8^\circ) = \tan 53^\circ$

(h) Solⁿ: সবগুলি তথ্য সত্য। ∴ Ans. D.

(i) Solⁿ: $\tan \theta = \pm \frac{\sqrt{13^2 - 12^2}}{12} = \pm \frac{5}{12}$
 Ans. A

(j) Solⁿ: $\angle C = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}/2}{1/\sqrt{2}} = \frac{6}{2} = 3 \quad \therefore \text{Ans. B}$$

(k) Solⁿ: $\theta = 20^\circ$ ধরে অদ্বিতীয় রাশি = 0.766 এবং $\cos 2\theta = 0.766$. ∴ Ans. C

(l) Solⁿ: $\tan \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}}$

$$= \pm \sqrt{\frac{25 - 24}{25 + 24}} = \pm \frac{1}{7}$$

(m) Solⁿ: $9^2 + 40^2 = 41^2 \therefore$ ত্রিভুজটি সমকোণী

ত্রিভুজ, যার পরিবৃজ্জের ব্যাসার্ধ = $\frac{41}{2} = 20.5$

ABC ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে,

2. (a) $\frac{a-b}{a+b} = \tan \frac{A-B}{2} \tan \frac{C}{2}$

[চ. '০৩; য. '০৯; ঝ. '১০]

প্রমাণ : L.H.S. = $\frac{a-b}{a+b} = \frac{2R \sin A - 2R \sin B}{2R \sin A + 2R \sin B}$

$$= \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(A-B) \cos \frac{1}{2}(A+B)}{2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}$$

$$= \tan \frac{A-B}{2} \cot \frac{A+B}{2} = \tan \frac{A-B}{2} \cot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right)$$

$$= \tan \frac{A-B}{2} \tan \frac{C}{2} = \text{R.H.S. (Proved)}$$

2(b) $\cos \frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{a} \sin \frac{A}{2}$ [য. '১০; ঝ. '১২]

প্রমাণ : R.H.S. = $\frac{b+c}{a} \sin \frac{A}{2}$

$$= \frac{2R \sin B + 2R \sin C}{2R \sin A} \sin \frac{A}{2}$$

$$= \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} \sin \frac{A}{2}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} \sin \frac{A}{2}$$

$$= \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) \cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \cos \frac{B-C}{2} = \text{L.H.S.}$$

3.(a) $a^2(\cos^2 B - \cos^2 C) + b^2(\cos^2 C - \cos^2 A) + c^2(\cos^2 A - \cos^2 B) = 0$
[R. '09, S. '09, '12]

$$\begin{aligned}
 \text{证明 : L.H.S.} &= a^2(\cos^2 B - \cos^2 C) + \\
 &b^2(\cos^2 C - \cos^2 A) + c^2(\cos^2 A - \cos^2 B) \\
 &= 4R^2 \sin^2 A (\cos^2 B - \cos^2 C) + \\
 &4R^2 \sin^2 B (\cos^2 C - \cos^2 A) + \\
 &4R^2 \sin^2 C (\cos^2 A - \cos^2 B) \\
 &= 4R^2 (\sin^2 A \cos^2 B - \sin^2 A \cos^2 C + \\
 &\quad \sin^2 B \cos^2 C - \cos^2 A \sin^2 B + \\
 &\quad \sin^2 C \cos^2 A - \cos^2 B \sin^2 C) \\
 &= 4R^2 \{ \sin^2 A (1 - \sin^2 B) - \sin^2 A (1 - \sin^2 C) \\
 &\quad + \sin^2 B (1 - \sin^2 C) - \sin^2 B (1 - \sin^2 A) + \\
 &\quad \sin^2 C (1 - \sin^2 A) - \sin^2 C (1 - \sin^2 B) \} \\
 &= 4R^2 (\sin^2 A - \sin^2 A \sin^2 B - \sin^2 A + \sin^2 A \\
 &\quad \sin^2 C + \sin^2 B - \sin^2 B \sin^2 C - \sin^2 B \\
 &\quad + \sin^2 B \sin^2 A + \sin^2 C - \sin^2 C \sin^2 A - \\
 &\quad \sin^2 C + \sin^2 C \sin^2 B) \\
 &= 4R^2 \times 0 = 0 = \text{R.H.S. (proved)}
 \end{aligned}$$

$$3(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a+b+c \quad [\text{ব.'০৫ ; সি.'০৩, '০৭ ; মা.'১৪}]$$

证明 : L.H.S. = $(b + c) \cos A + (c + a) \cos B$
 $- (a + b) \cos C$
 $= b \cos A + c \cos A + c \cos B + a \cos B +$
 $a \cos C + b \cos C$
 $= (c \cos B + b \cos C) + (c \cos A + a \cos C)$
 $- (b \cos A + a \cos B) = a + b + c = \text{R.H.S.}$

[由上得 $a = c \cos B + b \cos C]$

$$3(c) a^2 (\sin^2 B - \sin^2 C) + b^2 (\sin^2 C - \sin^2 A) \\ + c^2 (\sin^2 A - \sin^2 B) = 0 \quad [J.'00, S.'08]$$

$$\begin{aligned}
 \text{प्रमाण : } L.H.S. &= a^2 (\sin^2 B - \sin^2 C) + \\
 &b^2 (\sin^2 C - \sin^2 A) + c^2 (\sin^2 A - \sin^2 B) \\
 &= (2R \sin A)^2 (\sin^2 B - \sin^2 C) + (2R \sin B)^2 \\
 &\quad \sin^2 C - \sin^2 A + (2R \sin C)^2 (\sin^2 A - \sin^2 B) \\
 &= 4 R^2 \{ \sin^2 A \sin^2 B - \sin^2 A \sin^2 C + \\
 &\quad \sin^2 B \sin^2 C - \sin^2 B \sin^2 A + \\
 &\quad \sin^2 C \sin^2 A - \sin^2 C \sin^2 B \}
 \end{aligned}$$

$$= 4 R^2 \times 0 = 0 = \text{R.H.S.} \quad (\text{Proved})$$

$$4. (a) a(\cos C - \cos B) = 2(b - c) \cos^2 \frac{A}{2}$$

असाधः : $LHS = 2(\cos C - \cos B)$

$$\begin{aligned} &= a \cos C - a \cos B \\ &= (b - c \cos A) - (c - b \cos A) \\ &= b - c + (b - c) \cos A \end{aligned}$$

$$= 2(b - c) \cos^2 \frac{A}{2} = \text{R.H.S.}$$

$$4(b) \quad a(\cos B + \cos C) = 2(b+c) \sin^2 \frac{A}{2}$$

प्रमाण : L.H.S. = $a(\cos B + \cos C)$

$$\begin{aligned}
 &= a \cos B + a \cos C \\
 &= c - b \cos A + b - c \cos A \\
 &= b + c - (b + c) \cos A = (b + c) \{ 1 - \cos A \} \\
 &= (b + c) 2 \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \\
 &= 2 (b + c) \sin^2 \frac{A}{2} = \text{R.H.S.}
 \end{aligned}$$

$$4(c) b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B = 4\Delta$$

$$\text{প্রমাণ : } L.H.S. = b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B \\ = b^2 2\sin C \cos C + c^2 2\sin B \cos B$$

$$= 2b^2 \frac{c}{2R} \cos C + 2c^2 \frac{b}{2R} \cos B$$

$$= \frac{bc}{R} (\cos C + \cos B) = \frac{bc}{R} a$$

$$= \frac{abc}{R} = 4\Delta = \text{R.H.S.}$$

$$4(d) \quad a^3 \cos(B - C) + b^3 \cos(C - A) + c^3 \cos(A - B) = 3abc \quad [v. '03]$$

$$\text{প্রমাণ: } a^3 \cos(B - C)$$

$$= a(a^2 \cos B \cos C + a^2 \sin B \sin C)$$

$$= a \{ (c - b \cos A)(b - c \cos A) + b \sin A \cdot c \sin A \}$$

$$\begin{aligned}
 &= a\{bc - b^2 \cos A - c^2 \cos A + bc \cos^2 A \\
 &\quad + bc \sin^2 A\} \\
 &= a\{bc - (b^2 + c^2) \cos A + bc\} \\
 &= 2abc - a(b^2 + c^2) \cos A.
 \end{aligned}$$

অনুরূপভাবে আমরা পাই,

$$\begin{aligned}
 b^3 \cos(C - A) &= 2abc - b(c^2 + a^2) \cos B \text{ এবং} \\
 c^3 \cos(A - B) &= 2abc - c(a^2 + b^2) \cos C \\
 \text{এখন, L.H.S.} &= a^3 \cos(B - C) + b^3 \cos(C - A) \\
 &\quad + c^3 \cos(A - B) \\
 &= 6abc - a(b^2 + c^2) \cos A - b(c^2 + a^2) \\
 &\quad \cos B - c(a^2 + b^2) \cos C \\
 &= 6abc - ab^2 \cos A - c^2 a \cos A - bc^2 \cos B - \\
 &\quad a^2 b \cos B - ca^2 \cos C - b^2 c \cos C \\
 &= 6abc - bc(c \cos B + b \cos C) - ab(a \cos B + \\
 &\quad b \cos A) - ca(c \cos A + a \cos C) \\
 &= 6abc - bc.a - ab.c - ca.b \\
 &= 6abc - 3abc = 3abc = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$5.(a) a^3 \sin(B - C) + b^3 \sin(C - A) + c^3 \sin(A - B) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{প্রমাণ : } a^3 \sin(B - C) &= a^2 \cdot a \sin(B - C) \\
 &= a^2 \cdot 2R \sin A \sin(B - C) \\
 &= 2R a^2 \sin\{\pi - (B + C)\} \sin(B - C) \\
 &= 2R a^2 \sin(B + C) \sin(B - C) \\
 &= 2R \cdot 4R^2 \sin^2 A (\sin^2 B - \sin^2 C) \\
 &= 8R^3 \sin^2 A (\sin^2 B - \sin^2 C)
 \end{aligned}$$

অনুরূপভাবে আমরা পাই,

$$\begin{aligned}
 b^3 \sin(C - A) &= 8R^3 \sin^2 B (\sin^2 C - \sin^2 A) \text{ এবং} \\
 c^3 \sin(A - B) &= 8R^3 \sin^2 C (\sin^2 A - \sin^2 B) \\
 \text{এখন, L.H.S.} &= a^3 \sin(B - C) + b^3 \sin(C - A) \\
 &\quad + c^3 \sin(A - B) \\
 &= 8R^3 (\sin^2 A \sin^2 B - \sin^2 A \sin^2 B + \sin^2 B \sin^2 C \\
 &\quad - \sin^2 A \sin^2 B + \sin^2 C \sin^2 A - \sin^2 B \sin^2 C) \\
 &= 8R^3 \times 0 = 0 = \text{R.H.S. (Proved).}
 \end{aligned}$$

$$5.(b) (b^2 - c^2) \cot A + (c^2 - a^2) \cot B + (a^2 - b^2) \cot C = 0$$

প্রমাণ :

$$(b^2 - c^2) \frac{R}{abc} (b^2 + c^2 - a^2)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{R}{abc} \{ (b^2 - c^2)(b^2 + c^2) - a^2(b^2 - c^2) \} \\
 &= \frac{R}{abc} \{ b^4 - c^4 - a^2(b^2 - c^2) \}
 \end{aligned}$$

অনুরূপভাবে আমরা পাই,

$$\begin{aligned}
 (c^2 - a^2) \cot B &= \frac{R}{abc} \{ c^4 - a^4 - b^2(c^2 - a^2) \}, \\
 (a^2 - b^2) \cot C &= \frac{R}{abc} \{ a^4 - b^4 - c^2(a^2 - b^2) \} \\
 \text{L.H.S.} &= (b^2 - c^2) \cot A + (c^2 - a^2) \cot B \\
 &\quad + (a^2 - b^2) \cot C \\
 &= \frac{R}{abc} \{ b^4 - c^4 + c^4 - a^4 + a^4 - b^4 - (a^2 b^2 - c^2 a^2 \\
 &\quad + b^2 c^2 - a^2 b^2 + c^2 a^2 - b^2 c^2) \} \\
 &= \frac{R}{abc} \times 0 = 0 = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$5(c) (a - b)^2 \cos^2 \frac{C}{2} + (a + b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} = c^2$$

[ক্ষ. '০১]

$$\begin{aligned}
 \text{প্রমাণ: L.H.S.} &= (a - b)^2 \cos^2 \frac{C}{2} + (a + b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} \\
 &= (a - b)^2 \frac{1}{2} (1 + \cos C) + (a + b)^2 \frac{1}{2} (1 - \cos C) \\
 &= \frac{1}{2} \{ \{(a - b)^2 + (a + b)^2\} - \\
 &\quad \{(a + b)^2 - (a - b)^2\} \cos C \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \cdot \{ 2(a^2 + b^2) - 4ab \cos C \} \\
 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C = c^2 = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. (a) (s - a) \tan \frac{A}{2} &= (s - b) \tan \frac{B}{2} = \\
 (s - c) \cot \frac{C}{2}
 \end{aligned}$$

প্রমাণ :

$$\begin{aligned}
 (s - a) \tan \frac{A}{2} &= (s - a) \frac{\sqrt{(s - b)(s - c)}}{\sqrt{s(s - a)}} \\
 &= \frac{\sqrt{s - a} \sqrt{s - a} \sqrt{(s - b)(s - c)}}{\sqrt{s(s - a)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}} \\
 (s-b) \tan \frac{B}{2} &= (s-b) \frac{\sqrt{(s-c)(s-a)}}{\sqrt{s(s-b)}} \\
 &= \frac{\sqrt{s-b} \sqrt{s-b} \sqrt{(s-c)(s-a)}}{\sqrt{s(s-b)}} \\
 &= \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}} \\
 (s-c) \tan \frac{C}{2} &= (s-c) \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)}}{\sqrt{s(s-c)}} \\
 &= \frac{\sqrt{s-c} \sqrt{s-c} \sqrt{(s-a)(s-b)}}{\sqrt{s(s-c)}} \\
 &= \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}}
 \end{aligned}$$

$$\therefore (s-a) \tan \frac{A}{2} = (s-b) \tan \frac{B}{2} = (s-c) \cot \frac{C}{2}$$

$$6(b) \sin A + \sin B + \sin C = \frac{s}{R}$$

ଆପଣ : L.H.S. = $\sin A + \sin B + \sin C$

$$= \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{a+b+c}{2R}$$

$$= \frac{2s}{2R} = \frac{s}{R} = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$6(c) a \sin \left(\frac{A}{2} + B \right) = (b+c) \sin \frac{A}{2}$$

[କ୍ର. ୦୩; ମି. ୦୯, ୧୧; ଟା. ୧୦; ଟ. ୧୧]

ଆପଣ : R.H.S. = $(b+c) \sin \frac{A}{2}$

$$= (2R \sin B + 2R \sin C) \sin \frac{A}{2}$$

$$= 2R (\sin B + \sin C) \sin \frac{A}{2}$$

$$= 2R 2 \cdot \sin \frac{1}{2}(B+C) \cos \frac{1}{2}(B-C) \sin \frac{A}{2}$$

$$= 4R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{B-C}{2} \right) \sin \frac{A}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2R 2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{\pi+B-C}{2} \\
 &= 2R \sin A \sin \frac{A+B+C+B-C}{2} \\
 &= a \sin \left(\frac{A}{2} + B \right) = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$7.(a) a \sin B \sin C + b \sin C \sin A + c \sin A \sin B = \frac{3\Delta}{R}$$

ଆପଣ : L.H.S. = $a \sin B \sin C + b \sin C \sin A + c \sin A \sin B$

$$\begin{aligned}
 &= a \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} + b \cdot \frac{c}{2R} \cdot \frac{a}{2R} + c \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \\
 &= \frac{abc}{4R^2} + \frac{abc}{4R^2} + \frac{abc}{4R^2} = \frac{3abc}{4R^2} \\
 &= \frac{abc}{4R} \cdot \frac{3}{R} = \Delta \cdot \frac{3}{R} = \frac{3\Delta}{R} = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$7(b) \frac{1}{a} \sin A + \frac{1}{b} \sin B + \frac{1}{c} \sin C = \frac{6\Delta}{abc}$$

[ଆ.ଭ.ପ. ୩୫]

ଆପଣ : L.H.S. = $\frac{1}{a} \sin A + \frac{1}{b} \sin B + \frac{1}{c} \sin C$

$$= \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{R} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4\Delta}{abc} = \frac{6\Delta}{abc} = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$\begin{aligned}
 8.(a) \frac{\cos B \cos C}{bc} + \frac{\cos C \cos A}{ca} + \frac{\cos A \cos B}{ab} \\
 &= \frac{1}{4R^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S.} &= \frac{\cos B \cos C}{bc} + \frac{\cos C \cos A}{ca} + \frac{\cos A \cos B}{ab} \\
 &= \frac{a \cos B \cos C + b \cos C \cos A + c \cos A \cos B}{abc}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{abc} \{ 2R \sin A \cos B \cos C + \\
 &\quad 2R \sin B \cos C \cos A + 2R \sin C \cos A \cos B \} \\
 &= \frac{2R}{abc} \{ (\sin A \cos B + \sin B \cos A) \cos C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sin C \cos A \cos B \} \\
 & = \frac{2R}{abc} \{ \sin(A+B) \cos C + \cos A \cos B \sin C \} \\
 & = \frac{2R}{abc} \{ \sin(\pi - C) \cos C + \cos A \cos B \sin C \} \\
 & = \frac{2R}{abc} [\sin C \sin(\pi - (A+B)) \\
 & \quad + \cos A \cos B \sin C] \\
 & = \frac{2R}{abc} \sin C \{-\cos(A+B) + \cos A \cos B\} \\
 & = \frac{2R}{abc} \sin C (-\cos A \cos B + \sin A \sin B + \\
 & \quad \cos A \cos B) \\
 & = \frac{2R}{abc} \sin A \sin B \sin C = \frac{2R}{abc} \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \\
 & = \frac{1}{4R^2} = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8(b) \frac{b^2 - c^2}{a^2} \sin 2A + \frac{c^2 - a^2}{b^2} \sin 2B \\
 + \frac{a^2 - b^2}{c^2} \sin 2C = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{প্রমাণ : } & \frac{b^2 - c^2}{a^2} \sin 2A \\
 & = \frac{4R^2 (\sin^2 B - \sin^2 C)}{4R^2 \sin^2 A} \cdot 2 \sin A \cos A \\
 & = 2 \cos A \frac{\sin(B+C) \sin(B-C)}{\sin A} \\
 & = 2 \cos A \frac{\sin(\pi - A) \sin(B-C)}{\sin A} \\
 & = \frac{2 \cos(\pi - (B+C)) \sin A \sin(B-C)}{\sin A} \\
 & = -2 \cos(B+C) \sin(B-C) \\
 & = -(\sin 2B - \sin 2C) = \sin 2C - \sin 2B
 \end{aligned}$$

অনুরূপভাবে আমরা পাই,

$$\frac{c^2 - a^2}{b^2} \sin 2B = \sin 2A - \sin 2C,$$

$$\frac{a^2 - b^2}{c^2} \sin 2C = \sin 2B - \sin 2A$$

$$\begin{aligned}
 \text{এখন L.H.S.} &= \frac{b^2 - c^2}{a^2} \sin 2A \\
 &+ \frac{c^2 - a^2}{b^2} \sin 2B + \frac{a^2 - b^2}{c^2} \sin 2C \\
 &= \sin 2C - \sin 2B + \sin 2A - \sin 2C \\
 &\quad + \sin 2B - \sin 2A \\
 &= 0 = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. (a) a^4 + b^4 + c^4 &= 2c^2(a^2 + b^2) \\
 \text{হলে দেখাও যে, } C &= 45^\circ \text{ অথবা } 135^\circ \text{ [ষ.'০৬, '১১; } \\
 \text{চ.'১৪; রা.'১০, '১৮; ঢ.'০৬, '১১, '১৮; কু.'০৬, '০৮]
 \end{aligned}$$

প্রমাণ :

$$\begin{aligned}
 a^4 + b^4 + c^4 &= 2c^2(a^2 + b^2) \\
 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 - 2c^2a^2 - 2b^2c^2 &= 0 \\
 \Rightarrow (a^2)^2 + (b^2)^2 + (-c^2)^2 + 2a^2b^2 + \\
 &2b^2(-c^2) + 2(-c^2)a^2 = 2a^2b^2 \\
 \Rightarrow (a^2 + b^2 - c^2)^2 &= 2a^2b^2 \\
 \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 &= \pm \sqrt{2} ab \\
 \Rightarrow 2ab \cos C &= \pm \sqrt{2} ab \Rightarrow \cos C = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$\cos C = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ হলে, } \cos C = \cos 45^\circ \quad C = 45^\circ$$

$$\cos C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ হলে, } \cos C = -\cos 45^\circ$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \cos C &= \cos(180^\circ - 45^\circ) = \cos 135^\circ \\
 C &= 135^\circ
 \end{aligned}$$

$C = 45^\circ$ অথবা, 135° (Showed)

$$9(b) c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0 \quad \text{হলে দেখাও যে, } C = 60^\circ \text{ অথবা } 120^\circ$$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান : } & \text{দেওয়া আছে,} \\
 & c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0 \\
 & \Rightarrow c^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0 \\
 & \Rightarrow (a^2)^2 + (b^2)^2 + (-c^2)^2 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 \\
 & \quad - 2b^2c^2 = a^2b^2 \\
 & \Rightarrow (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 4a^2b^2 \cdot \frac{1}{4} \\
 & \Rightarrow \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2 = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos^2 C = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos C = \pm \frac{1}{2}$$

$$\cos C = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ \Rightarrow C = 60^\circ$$

$$\text{অথবা, } \cos C = -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ \Rightarrow C = 120^\circ$$

$$C = 60^\circ \text{ অথবা, } 120^\circ$$

10.(a) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো 13, 14 এবং 15 হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[ব.'০২; চ.'০৫; য.'০৭; ঢ.'০৯]

সমাধান : মনে করি $a = 13, b = 14, c = 15$

$$\text{অর্ধপরিসীমা } s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$= \frac{1}{2}(13 + 14 + 15) = \frac{1}{2} \times 42 = 21$$

$$\begin{aligned} \text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} \\ &= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

10(b) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো $\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}$ এবং

$\frac{x}{y} + \frac{y}{z}$ হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি.বো.০৭]

সমাধান : মনে করি, $a = \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, b = \frac{z}{x} + \frac{x}{y}$ এবং

$$c = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$$

$$\text{অর্ধপরিসীমা } s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} \right) = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}$$

$$s - a = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} - \frac{y}{z} - \frac{z}{x} = \frac{x}{y}$$

$$s - b = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} - \frac{z}{x} - \frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$

$$s - c = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} - \frac{x}{y} - \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$$

$$\text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} \right) \frac{x}{y} \frac{y}{z} \frac{z}{x}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} \right)} \quad (\text{Ans.})$$

10. (e) $(a + b + c)(b + c - a) = 3bc$ হলে, A

কোণের মান নির্ণয় কর। [চ.'০০; য.'০৫, '০৮;

রা.'০৭, '১১, '১৩; ঢ.'০৮; সি.'১০; দি.'১১, '১৪]

সমাধান : ৪ দেওয়া আছে,

$$(a + b + c)(b + c - a) = 3bc$$

$$\Rightarrow (b + c)^2 - a^2 = 3bc$$

$$\Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 - a^2 = 3bc$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc \Rightarrow 2bc \cos A = bc$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ \therefore A = 60^\circ \quad (\text{Ans.})$$

10(d) ΔABC -এ যদি $A = 60^\circ$ হয়, তবে দেখাও

$$\text{যে, } b + c = 2a \cos \frac{B-C}{2}$$

[ঢ., সি. '১০; ব.'০৯; রা.'০৯, '১৪]

প্রমাণ : $b + c = 2R(\sin B + \sin C)$

$$2R \cdot 2 \sin \frac{1}{2}(B+C) \cos \frac{1}{2}(B-C)$$

$$= 4R \sin \frac{1}{2}(120^\circ) \cos \frac{1}{2}(B-C)$$

$$[\because A = 60^\circ \therefore B + C = 120^\circ]$$

$$= 4R \cos 60^\circ \cos \frac{1}{2}(B-C)$$

$$= 2.2R \cos A \cos \frac{1}{2}(B-C)$$

$$= 2a \cos \frac{1}{2}(B-C) = \text{R.H.S.}$$

(e) ΔABC -এ $C = 60^\circ$ হলে দেখাও যে

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$$

11.(a) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো সমান্তর প্রামাণ ভুক্ত হলে
সেখাও যে, $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}$ ও $\cot \frac{C}{2}$ সমান্তর প্রামাণ ভুক্ত।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের বাহু a, b, c
সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

$$a - b = b - c$$

$$\Rightarrow (s - b) - (s - a) = (s - c) - (s - b)$$

$$\Rightarrow s(s - b) - s(s - a) = s(s - c) - s(s - b)$$

$$\Rightarrow \frac{s(s - b)}{\Delta} - \frac{s(s - a)}{\Delta} = \frac{s(s - c)}{\Delta} - \frac{s(s - b)}{\Delta}$$

$$\Rightarrow \cot \frac{B}{2} - \cot \frac{A}{2} = \cot \frac{C}{2} - \cot \frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \cot \frac{A}{2} - \cot \frac{B}{2} = \cot \frac{B}{2} - \cot \frac{C}{2}$$

$$\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2} \text{ ও } \cot \frac{C}{2} \text{ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।}$$

11(b) a^2, b^2 ও c^2 সমান্তর প্রামাণ ভুক্ত হলে

প্রমাণ কর যে, $\cot A, \cot B$ ও $\cot C$ সমান্তর
প্রামাণ ভুক্ত।

প্রমাণ : a^2, b^2 ও c^2 সমান্তরাল শ্রেণীভুক্ত বলে,

$$a^2 - b^2 = b^2 - c^2 \Rightarrow 2a^2 - 2b^2 = 2b^2 - 2c^2$$

$$\Rightarrow 2b^2 - 2a^2 = 2c^2 - 2b^2$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 - c^2 - a^2 + b^2 = c^2 + a^2 - b^2 - a^2 - b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow \frac{R}{abc} \{ (b^2 + c^2 - a^2) - (c^2 + a^2 - b^2) \}$$

$$= \frac{R}{abc} \{ (c^2 + a^2 - b^2) - (a^2 + b^2 - c^2) \}$$

$$\Rightarrow \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc} - \frac{R(c^2 + a^2 - b^2)}{abc}$$

$$= \frac{R(c^2 + a^2 - b^2)}{abc} - \frac{R(a^2 + b^2 - c^2)}{abc}$$

$$\Rightarrow \cot A - \cot B = \cot B - \cot C$$

$\therefore \cot A, \cot B$ ও $\cot C$ সমান্তরাল শ্রেণীভুক্ত।

11(c) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো $m, n, \sqrt{m^2 + mn + n^2}$ হলে, বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর।

সমাধান : m, n এবং $\sqrt{m^2 + mn + n^2}$ একটি

ত্রিভুজের বাহু বলে, প্রত্যেকেই ধনাত্মক এবং m ও n

এর যেকোন ধনাত্মক মানের জন্য,

$$\sqrt{m^2 + mn + n^2} > m \text{ বা, } n$$

$\therefore \sqrt{m^2 + mn + n^2}$ বৃহত্তম বাহু। বৃহত্তম কোণ A হলে,

$$\cos A = \frac{m^2 + n^2 - (\sqrt{m^2 + mn + n^2})^2}{2mn}$$

$$= \frac{m^2 + n^2 - m^2 - mn - n^2}{2mn}$$

$$= -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ \therefore A = 120^\circ$$

অতএব ত্রিভুজটি স্থূলকোণী।

11.(d) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো $2x+3, x^2+3x+3$, x^2+2x হলে, বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর।

সমাধান : $2x+3, x^2+3x+3$ এবং x^2+2x

একটি ত্রিভুজের বাহু বলে, প্রত্যেকেই ধনাত্মক।

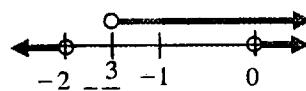
$$2x+3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{2},$$

$$x^2+3x+3 > 0 \Rightarrow (x + \frac{3}{2})^2 + 3 - \frac{9}{4} > 0$$

$$\Rightarrow (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \text{যা } x\text{-এর সকল বাস্তব মানের জন্য সত্য এবং}$$

$$x^2+2x > 0 \Rightarrow x(x+2) > 0$$

$$x > 0 \text{ অথবা } x < -2$$



$\therefore x > 0$ - এর সকল বাস্তব মানের জন্য $2x+3$

x^2+3x+3 ও x^2+2x প্রত্যেকেই ধনাত্মক এবং

$x^2+3x+3 > 2x+3, x^2+3x+3 > x^2+2x$.

$\therefore x^2+3x+3$ বৃহত্তম বাহু। বৃহত্তম কোণ A হলে,

$$(x^2+3x+3)^2 = (2x+3)^2 + (x^2+2x)^2 - 2(2x+3)(x^2+2x)\cos A$$

$$\Rightarrow x^4 + 9x^2 + 9 + 6x^3 + 18x + 6x^2 = 4x^2 + 9 + 12x + x^4 + 4x^2 + 4x^3$$

$$- 2(2x^3 + 7x^2 + 6x)\cos A$$

$$\Rightarrow 2 + 7x^2 + 6x = - 2(2x^3 + 7x^2 + 6x)\cos A$$

$$- 2(2x^3 + 7x^2 + 6x)\cos A$$

$$\Rightarrow \cos A = -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ \quad A = 120^\circ$$

11(e) যদি কোন ত্রিভুজের যে কোন দুইটি কোণের কোসাইন তাদের বিপরীত বাহুর সথে ব্যস্ত ভেদে অন্বিত হয়, তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমবিবাহু অথবা সমকোণী।
প্রমাণ : মনে করি, $\triangle ABC$ -এ,

$$\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{2R \sin B}{2R \sin A}$$

$$\Rightarrow \cos A \sin A = \cos B \sin B$$

$$\Rightarrow 2 \sin A \cos A = 2 \sin B \cos B$$

$$\Rightarrow \sin 2A = \sin 2B$$

$$\Rightarrow \sin 2A - \sin 2B = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin(A - B) \cos(A + B) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(A - B) \cos(A + B) = 0$$

$$\sin(A - B) = 0 \Rightarrow \sin(A - B) = \sin 0$$

$$A - B = 0 \Rightarrow A = B$$

$$\text{অথবা, } \cos(A + B) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(A + B) = \cos 90^\circ \Rightarrow A + B = 90^\circ$$

$$C = 90^\circ$$

$$\text{অতএব, ত্রিভুজটি সমবাহু অথবা সমকোণী।}$$

11(f) দেখাও যে, কোন ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 3, 5 ও 7 হলে ত্রিভুজটি একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ ; স্থূলকোণটির মান নির্ণয় কর। [চ., কু. '১০; দি. '১২]

প্রমাণ : এখানে, বৃহত্তম বাহু = 7.

∴ বৃহত্তম কোণটি A হলে আমরা পাই,

$$\cos A = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{9 + 25 - 49}{30}$$

$$= \frac{34 - 49}{30} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ$$

$$A = 120^\circ, \text{ যা স্থূলকোণ।}$$

অতএব, ত্রিভুজটি একটি স্থূলকোণী এবং স্থূলকোণটির মান 120°

12.(a) $\triangle ABC$ -এ যদি $A = 75^\circ, B = 45^\circ$

হয়, তবে দেখাও যে, $c : b = \sqrt{3} : \sqrt{2}$ [ব. '০৭]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\triangle ABC$ -এ $A = 75^\circ, B = 45^\circ$

$$\therefore C = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\text{ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{b}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$c : a = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$$

12. (b) $\triangle ABC$ - এ যদি $A = 45^\circ, B = 75^\circ$ হয়, তবে দেখাও যে, $a + \sqrt{2}c = 2b$.

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\triangle ABC$ -এ $A = 45^\circ, B = 75^\circ$

$$\therefore C = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ}$$

এখন, $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{b}{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = k \text{ (ধরি)}$$

$$a = \frac{k}{\sqrt{2}}, b = \frac{k(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}, c = \frac{\sqrt{3}}{2}k$$

$$\text{এখন, } a + \sqrt{2}c = \frac{k}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}k = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}k$$

$$= 2 \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}k = 2b$$

$$a + \sqrt{2}c = 2b$$

12(c) $a = 2b$ এবং $A = 3B$ হলে, ত্রিভুজের কোণগুলি নির্ণয় কর। [কু. '০৯, '১২; প.স.প'০৩]

সমাধান : দেওয়া আছে, $a = 2b$(1)

$$\text{এবং } A = 3B.....(2)$$

$$(1) \text{ হতে পাই, } 2R \sin A = 2 \cdot 2R \sin B$$

$$\Rightarrow \sin A = 2 \sin B \Rightarrow \sin 3B = 2 \sin B ; (2) \text{ দ্বারা,}$$

$$\Rightarrow 3 \sin B - 4 \sin^3 B = 2 \sin B$$

$$\Rightarrow 4\sin^3 B - \sin B = 0 \Rightarrow \sin B(4\sin^2 B - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin B(2\sin B + 1)(2\sin B - 1) = 0$$

$$\sin B = 0 \text{ হলে}, B = 0$$

$$2 \sin B + 1 = 0 \text{ হলে}, \sin B = -\frac{1}{2}$$

$$B = 150^\circ \text{ এবং } A = 3B = 450^\circ$$

কিন্তু ABC ত্রিভুজের জন্য, $B = 0$ এবং $A = 450^\circ$ সম্ভব নয়।

$$\sin B \neq 0 \text{ এবং } \sin B \neq -1/2.$$

$$\sin B = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ \Rightarrow B = 30^\circ$$

$$A = 3B = 3 \times 30^\circ = 90^\circ \text{ এবং}$$

$$C = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ)$$

$$= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

ত্রিভুজের কোণ তিনটি $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

13. (a) ΔABC -এ, $a = 2$, $b = \sqrt{3} + 1$ এবং $C = 60^\circ$ হলে ত্রিভুজটির অপর বাহু ও কোণদ্বয় নির্ণয় কর। [প.ড.প'০২]

সমাধান : দেওয়া আছে; ΔABC -এ $a = 2$, $b = \sqrt{3} + 1$ এবং $C = 60^\circ$. ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই,

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ &= 2^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 - 2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} + 1) \cos 60^\circ \\ &= 4 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 4(\sqrt{3} + 1)/2 \\ &= 8 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2 = 6 \quad c = \sqrt{6} \end{aligned}$$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin A} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sin B} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin A} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{3}/2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sin A = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ \Rightarrow A = 45^\circ$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \sin 75^\circ \Rightarrow B = 75^\circ$$

ত্রিভুজটির অপর বাহু $c = \sqrt{6}$ এবং কোণদ্বয় $A = 45^\circ$ ও $B = 75^\circ$

13(b) ΔABC -এ, $A = 45^\circ$, $C = 105^\circ$ এবং $c = \sqrt{3} + 1$ হলে ত্রিভুজটির অপর কোণ ও বাহুদ্বয় নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, ΔABC -এ $A = 45^\circ$

$$C = 105^\circ \text{ এবং } c = \sqrt{3} + 1.$$

$$\therefore B = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sin 105^\circ}$$

$$\text{এখন, } \sin 105^\circ = \sin (60^\circ + 45^\circ)$$

$$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{b}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow \sqrt{2}a = 2b = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a = 2, b = \sqrt{2}$$

ত্রিভুজটির অপর কোণ 30° এবং বাহুদ্বয় 2 ও $\sqrt{2}$

13(c) ΔABC -এ, $B = 30^\circ$, $C = 45^\circ$ এবং $a = (\sqrt{3} + 1)$ সেমি. দেখাও যে, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$ বর্গ সেমি।।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, ΔABC -এ $B = 30^\circ$, $C = 45^\circ$ এবং $a = (\sqrt{3} + 1)$ সেমি।।

$$\therefore A = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin 105^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ}$$

$$\text{এখন, } \sin 105^\circ = \sin (60^\circ + 45^\circ)$$

$$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{c}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow 2\sqrt{2} = \sqrt{2}c \Rightarrow c = 2$$

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}ac \sin B$ বর্গ একক

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 1) \times 2 \sin 30^\circ \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 1) \times 2 \times \frac{1}{2} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 1) \text{ বর্গ সে.মি.}$$

14. ABC ত্রিভুজে A, B ও C কোণের বিপরীত বাহু যথাক্রমে a, b ও c . ত্রিভুজটির জোড়ে প্রমাণ কর যে,

(a) $\tan A = \tan B + \tan C$, যখন $\cos A = \cos B \cos C$. [য.'০৩, '০৯; ব., কু., দি.'১৩; রা.'১৪]

(b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4$

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad [\text{চ.'১২}; \text{কু.'০৬}; \text{ব.'১২}]$$

(c) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ [ব.'১১; য.'১১, '১৮;

$$\text{চ.'১০; দি.'১১; রা.'১৩; মা.'১০, '১২, '১৮]$$

অথবা, প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য তার বিপরীত কোণের সাইন (sine)-এর সমানুপাতিক।

$$[\text{চ.'১৩}; \text{ব.'১০, '১৪; রা.'১২; কু.'১০; য.'০৮; দি.'১০, '১৩; চ.'১৪]$$

সমাধান : (a) প্রশ্নমালা VII B এর উদাহরণ 7 দ্রষ্টব্য।

(b) প্রশ্নমালা VII F এর উদাহরণ 2 দ্রষ্টব্য।

(c) প্রশ্নমালা VII G এর কোসাইন সূত্র ও সাইন সূত্র দ্রষ্টব্য।

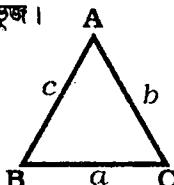
15. পাশের চিত্রে, ABC একটি ত্রিভুজ।

(a) ত্রিভুজটির বাহু তিনটি $a = 3$

একক, $b = 5$ একক ও $c = 7$

একক হলে, এর পরিব্যাসাধা

নির্ণয় কর।



(b) $A = \frac{\pi}{16}$ হলে প্রমাণ কর যে,

$$2 \sin A = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$[\text{য.'১৪; কু.'০৩; ব.'১০, '১৪; রা.'১২, '১৪; চ.'১৪}]$$

(c) $\cos A = \sin B - \cos C$ হলে দেখাও যে,
ত্রিভুজটি সমকোণী। [কু.'১৩; রা.'১২; চ.'০৮;

য.'০৯, '১২, '১৪; সি.'১১; ঢা.'০৭, '১৩; ব.'১০, '১২;
মা.'০৯, '১৪ ও প.'০৪, '০৫]

সমাধান : (a) ত্রিভুজটির অর্ধপরিসীমা,

$$s = \frac{3+5+7}{2} = 7.5 \text{ একক।}$$

ত্রিভুজটির বেত্রফল,

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{7.5(7.5-3)(7.5-5)(7.5-7)}$$

$$= \sqrt{7.5 \times 4.5 \times 2.5 \times 0.5}$$

$$= 6.495 \text{ বর্গ একক।}$$

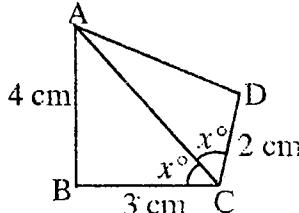
$$\text{ত্রিভুজটির পরিব্যাসাধা}, R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{3 \times 5 \times 7}{4 \times 6.495}$$

$$= \frac{3 \times 5 \times 7}{4 \times 6.495} = 4.041 \text{ একক (প্রায়)}$$

(b) প্রশ্নমালা VII D এর উদাহরণ 1 দ্রষ্টব্য।

(c) প্রশ্নমালা VII G এর উদাহরণ 2 দ্রষ্টব্য।

16.



সমাধান: (a) $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$$\cos x^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}, \sin x^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

(b) $\triangle ADC$ এ কোসাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cos x^\circ \\ &= 5^2 + 2^2 - 2 \times 5 \times 2 \times \frac{3}{5} \\ &= 25 + 4 - 12 = 17 \text{ বর্গ সে.মি.} \end{aligned}$$

(c) $ABCD$ চতুর্ভুজের বেত্রফল = ABC ত্রিভুজের বেত্রফল + ACD ত্রিভুজের বেত্রফল

$$= \frac{1}{2}(AB \times BC) + \frac{1}{2}(AC \times CD \sin x^\circ)$$

$$= \frac{1}{2}(4 \times 3) + \frac{1}{2}(5 \times 2 \times \frac{4}{5}) \\ = 6 + 4 = 10 \text{ বর্গ সে.মি.।}$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

ABC ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে,

1(a) $(b - c) \sin A + (c - a) \sin B + (a - b) \sin C = 0$

প্রমাণ : L.H.S. = $(b - c) \sin A + (c - a) \sin B + (a - b) \sin C$

$$= (2R \sin B - 2R \sin C) \sin A + (2R \sin C - 2R \sin A) \sin B + (2R \sin A - 2R \sin B) \sin C \\ = 2R (\sin A \sin B - \sin A \sin C + \sin B \sin C - \sin A \sin B + \sin A \sin C - \sin B \sin C) \\ = 2R \times 0 = 0 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

1(b) $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$

প্রমাণ : L.H.S. = $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B)$
 $= 2R \sin A (\sin B - \sin C) + 2R \sin B (\sin C - \sin A) + 2R \sin C (\sin A - \sin B)$
 $= 2R(\sin A \sin B - \sin A \sin C + \sin B \sin C - \sin A \sin B + \sin A \sin C - \sin B \sin C)$
 $= 2R \times 0 = 0 = \text{R.H.S. (Proved)}$

2.(a) $(b^2 - c^2) \sin^2 A + (c^2 - a^2) \sin^2 B + (a^2 - b^2) \sin^2 C = 0$

প্রমাণ : L.H.S. = $(b^2 - c^2) \sin^2 A + (c^2 - a^2) \sin^2 B + (a^2 - b^2) \sin^2 C$
 $= (4R^2 \sin^2 B - 4R^2 \sin^2 C) \sin^2 A + (4R^2 \sin^2 C - 4R^2 \sin^2 A) \sin^2 B + (4R^2 \sin^2 A - 4R^2 \sin^2 B) \sin^2 C$
 $= 4R^2 (\sin^2 A \sin^2 B - \sin^2 C \sin^2 A + \sin^2 B \sin^2 C - \sin^2 A \sin^2 B + \sin^2 C \sin^2 A - \sin^2 B \sin^2 C)$
 $= 4R^2 \times 0 = 0 = \text{R.H.S. (Proved)}$

2(b) $a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) = 0$

[ক্ল. '০০]

প্রমাণ : L.H.S. = $a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B)$

$$= 2R \sin A (\sin B \cos C - \cos B \sin C) +$$

$$2R \sin B (\sin C \cos A - \cos C \sin A) + 2R \sin C (\sin A \cos B - \cos A \sin B)$$

$$= 2R(\sin A \sin B \cos C - \sin A \cos B \sin C + \cos A \sin B \sin C - \sin A \sin B \cos C + \sin A \cos B \sin C - \cos A \sin B \sin C)$$

$$= 2R \times 0 = 0 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

3. (a) $\frac{a^2 \sin(B - C)}{\sin A} + \frac{b^2 \sin(C - A)}{\sin B} + \frac{c^2 \sin(A - B)}{\sin C} = 0$

প্রমাণ : $\frac{a^2 \sin(B - C)}{\sin A}$

$$= \frac{(2R \sin A)^2 \sin(B - C)}{\sin A}$$

$$= 4R^2 \sin A \sin(B - C)$$

$$= 4R^2 \sin\{\pi - (B + C)\} \sin(B - C)$$

$$= 4R^2 \sin(B + C) \sin(B - C)$$

$$= 4R^2 (\sin^2 B - \sin^2 C)$$

অনুরূপভাবে আমরা পাই,

$$\frac{b^2 \sin(C - A)}{\sin B} = 4R^2 (\sin^2 C - \sin^2 A) \text{ এবং}$$

$$\frac{c^2 \sin(A - B)}{\sin C} = 4R^2 (\sin^2 A - \sin^2 B)$$

এখন, L.H.S. = $\frac{a^2 \sin(B - C)}{\sin A} + \frac{b^2 \sin(C - A)}{\sin B} + \frac{c^2 \sin(A - B)}{\sin C}$

$$= 4R^2 (\sin^2 B - \sin^2 C + \sin^2 C - \sin^2 A + \sin^2 A - \sin^2 B)$$

$$= 4R^2 \times 0 = 0 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

3(b) $a \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B - C}{2} + b \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C - A}{2}$

$$+ c \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A - B}{2} = 0$$
 [ঝ. '০৩]

$$\text{প্রমাণ : } a \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2}$$

$$= 2R \sin A \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{B-C}{2}$$

$$= 2R \sin A \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2} \right) \sin \frac{B-C}{2}$$

$$= 2R \sin A \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}$$

$$= R \sin A (\sin B - \sin C)$$

অনুরূপভাবে আমরা পাই,

$$b \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C-A}{2} = R \sin B (\sin C - \sin A) \text{ এবং}$$

$$c \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A-B}{2} = R \sin C (\sin A - \sin B)$$

$$\text{এখন, L.H.S.} = a \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2} + b \sin \frac{B}{2}$$

$$\sin \frac{C-A}{2} + c \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$= R(\sin A \sin B - \sin C \sin A + \sin B \sin C - \sin A \sin B + \sin C \sin A - \sin B \sin C)$$

$$= R \times 0 = 0$$

$$4(a) \frac{2 \cot A + \cot B + \cot C}{\cot A - \cot B + 2 \cot C} = \frac{b^2 + c^2}{2b^2 - c^2}$$

$$\text{প্রমাণ : } 2 \cot A + \cot B + \cot C$$

$$= 2 \frac{R}{abc} (b^2 + c^2 - a^2) + \frac{R}{abc} (c^2 + a^2 - b^2) + \frac{R}{abc} (a^2 + b^2 - c^2)$$

$$= \frac{R}{abc} (2b^2 + 2c^2 - 2a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2)$$

$$= \frac{R}{abc} (2b^2 + 2c^2) = \frac{2R}{abc} (b^2 + c^2)$$

$$\text{এবং } \cot A - \cot B + 2 \cot C = \frac{R}{abc} \{b^2 + c^2 - a^2 - (c^2 + a^2 - b^2) + 2(a^2 + b^2 - c^2)\}$$

$$= \frac{R}{abc} (b^2 + c^2 - a^2 - c^2 - a^2 + b^2 + 2a^2 + 2b^2 - 2c^2)$$

$$= \frac{R}{abc} (4b^2 - 2c^2) = \frac{2R}{abc} (2b^2 - c^2)$$

$$\text{এখন, L.H.S.} = \frac{2 \cot A + \cot B + \cot C}{\cot A - \cot B + 2 \cot C}$$

$$= \frac{\frac{2R}{abc} (b^2 + c^2)}{\frac{2R}{abc} (2b^2 - c^2)} = \frac{b^2 + c^2}{2b^2 - c^2} = \text{R.H.S.}$$

$$4(b) 4\Delta(\cot A + \cot B + \cot C) = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{প্রমাণ : } \text{L.H.S.} = 4\Delta(\cot A + \cot B + \cot C)$$

$$= 4\Delta \frac{R}{abc} (b^2 + c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2)$$

$$= 4 \cdot \frac{abc}{4R} \frac{R}{abc} (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$5(a) (a + b + c)(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}) = 2c \cot \frac{C}{2}$$

$$\text{প্রমাণ : } \text{L.H.S.} = (a + b + c) (\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2})$$

$$= (a + b + c) \left(\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta} + \frac{(s-c)(s-a)}{\Delta} \right)$$

$$= (s-c)(a+b+c) \frac{2s-b-a}{\Delta}$$

$$= (s-c) \cdot 2s \frac{a+b+c-b-a}{\Delta}$$

$$= 2c \cdot \frac{s(s-c)}{\Delta} = 2c \cot \frac{C}{2} = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$(b) (b + c - a) \tan \frac{A}{2} = (c + a - b)$$

$$\tan \frac{B}{2} = (a + b - c) \tan \frac{C}{2}$$

$$\text{প্রমাণ : } \text{L.H.S.} = (b + c - a) \tan \frac{A}{2}$$

$$= (a + b + c - 2a) \frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

$$= (2s - 2a) \frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

$$= \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

$$\text{M.H.S.} = (c+a-b) \tan \frac{B}{2}$$

$$= (2s-2b) \frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$$

$$= \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

$$\text{R.H.S.} = (a+b-c) \tan \frac{C}{2}$$

$$= (2s-2c) \frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$$

$$= \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

$\therefore \text{L.H.S.} = \text{M.H.S.} = \text{R.H.S.}$ (Proved)

$$6.(a) \frac{1}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{1}{b} \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{1}{c} \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{s^2}{abc}$$

[প্র.গ.প. '০০]

$$\text{L.H.S.} = \frac{1}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{1}{b} \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{1}{c} \cos^2 \frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{a} \frac{s(s-a)}{bc} + \frac{1}{b} \frac{s(s-b)}{ca} + \frac{1}{c} \frac{s(s-c)}{ab}$$

$$= \frac{s(s-a) + s(s-b) + s(s-c)}{abc}$$

$$= \frac{3s^2 - s(a+b+c)}{abc} = \frac{3s^2 - s.2s}{abc}$$

$$= \frac{s^2}{abc} = \text{R.H.S.}$$

$$6.(b) \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin(A-B)} = \Delta$$

$$\text{প্রমাণ : } \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin(A-B)}$$

$$= \frac{4R^2(\sin^2 A - \sin^2 B)}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin(A-B)}$$

$$= \frac{2R^2 \sin(A+B) \sin(A-B) \sin A \sin B}{\sin(A-B)}$$

$$= 2R^2 \sin(\pi - (A+B)) \sin A \sin B$$

$$= 2R^2 \sin A \sin B \sin C = 2R^2 \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R}$$

$$= \frac{abc}{4R} = \Delta = \text{R.H.S.} \text{ (Proved)}$$

$$7. (a) \frac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} + \frac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} + \frac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} = 0$$

$$\text{প্রমাণ : } \frac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} = \frac{4R^2 (\sin^2 B - \sin^2 C)}{\cos B + \cos C}$$

$$= \frac{4R^2 (\cos^2 C - \cos^2 B)}{\cos B + \cos C}$$

$$= \frac{4R^2 (\cos C + \cos B)(\cos C - \cos B)}{\cos B + \cos C}$$

$$= 4R^2 (\cos C - \cos B)$$

অনুরূপভাবে আমরা পাই,

$$\frac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} = 4R^2 (\cos A - \cos C) \text{ এবং}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} = 4R^2 (\cos B - \cos A)$$

$$\text{এখন, L.H.S.} = \frac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} + \frac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} + \frac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B}$$

$$= 4R^2 \{ \cos C - \cos B + \cos A - \cos C \\ \cos B - \cos A \}$$

$$= 4R^2 \times 0 = 0 = \text{R.H.S.} \text{ (Proved)}$$

$$7.(b) \frac{b-c}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{c-a}{b} \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{a-b}{c} \cos^2 \frac{C}{2} = 0$$

$$\text{প্রমাণ : L.H.S.} = \frac{b-c}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{c-a}{b} \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{a-b}{c} \cos^2 \frac{C}{2}$$

$$= \frac{b-c}{a} \times \frac{s(s-a)}{bc} + \frac{c-a}{b} \times \frac{s(s-b)}{ca}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{a-b}{c} \times \frac{s(s-c)}{ab} \\
 = \frac{s}{abc} & \{(b-c)(s-a) + (c-a)(s-b) \\
 & + (a-b)(s-c)\} \\
 = \frac{s}{abc} & \{s(b-c+c-a+a-b) + \\
 & (-ab+ca-bc+ab-ca+bc)\} \\
 = \frac{s}{abc} & \{s \times 0 + 0\} = 0 = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

8(a) ΔABC -তে $\frac{b+c}{11} = \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13}$ হলে

প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos A}{7} = \frac{\cos B}{19} = \frac{\cos C}{25}$

প্রমাণ ১ দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned}
 \frac{b+c}{11} &= \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13} = \frac{b+c+c+a+a+b}{11+12+13} \\
 \Rightarrow \frac{b+c}{11} &= \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13} = \frac{2(a+b+c)}{36} \\
 \Rightarrow \frac{b+c}{11} &= \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13} = \frac{a+b+c}{18} \\
 \frac{a+b+c}{18} &= \frac{b+c}{11} = \frac{a+b+c-b-c}{18-11} = \frac{a}{7}, \text{ এবং} \\
 \frac{a+b+c}{18} &= \frac{c+a}{12} = \frac{a+b+c-c-a}{18-12} = \frac{b}{6} \\
 \frac{a+b+c}{18} &= \frac{a+b}{13} = \frac{a+b+c-a-b}{18-13} = \frac{c}{5} \\
 \frac{a}{7} &= \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = k \text{ (say)}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = 7k, b = 6k, c = 5k$$

এখন,

$$\begin{aligned}
 \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36k^2 + 25k^2 - 49k^2}{2.6k.5k} \\
 &= \frac{61 - 49}{60} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{25k^2 + 49k^2 - 36k^2}{2.5k.7k} \\
 &= \frac{74 - 36}{70} = \frac{38}{70} = \frac{19}{35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{49k^2 + 36k^2 - 25k^2}{2.7k.6k} \\
 &= \frac{85 - 25}{84} = \frac{60}{84} = \frac{5}{7}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \cos A : \cos B : \cos C = \frac{1}{5} : \frac{19}{35} : \frac{5}{7} = 7 : 19 : 25$$

$$\frac{\cos A}{7} = \frac{\cos B}{19} = \frac{\cos C}{25} \text{ (Showed)}$$

8. (b) ΔABC -এ, $a = 6$, $b = 3\sqrt{3}$ এবং $A = 90^\circ$ হলে B কোণের মান নির্ণয় কর।

সমাধান ৪ দেওয়া আছে, ΔABC -এ $a = 6, b = 3\sqrt{3}$ ও $A = 90^\circ$

$$\begin{aligned}
 \text{ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, } \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \\
 \Rightarrow \frac{6}{\sin 90^\circ} &= \frac{3\sqrt{3}}{\sin B} \Rightarrow \frac{6}{1} = \frac{3\sqrt{3}}{\sin B} \\
 \Rightarrow \sin B &= \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ \quad B = 60^\circ
 \end{aligned}$$

ব্যবহারিক অনুশীলনী

1. একটি ত্রিভুজের বাহ্যগুণ যথাক্রমে 40 সে.মি., 50 সে.মি. এবং 60 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম ৪ একটি ত্রিভুজের বাহ্যগুণ যথাক্রমে 40 সে.মি., 50 সে.মি. এবং 60 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয়।

মূলতন্ত্র ৪ মনে করি, ΔABC একটি ত্রিভুজ যার ভিন্নটি বাহু যথাক্রমে $a = 40$ সে.মি., $b = 50$ সে.মি. এবং $c = 60$ সে.মি। ΔABC -তে বৃহত্তম বাহু $c = 60$ সে.মি. এর বিপরীত কোণ $\angle C$ বৃহত্তম কোণ এবং ক্ষুদ্রতম বাহু $a = 40$ সে.মি. এর বিপরীত কোণ $\angle A$ ক্ষুদ্রতম কোণ। তাহলে প্রদত্ত উপারের সাহায্যে ΔABC অঙ্কন করে ঠাঁদার সাহায্যে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয় করি এবং সূত্র $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ ও

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ থেকে প্রাপ্ত মানের সাথে সম্পর্ক যাচাই করি।

$$= \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

$$\text{M.H.S.} = (c+a-b) \tan \frac{B}{2}$$

$$= (2s-2b) \frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$$

$$= \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

$$\text{R.H.S.} = (a+b-c) \tan \frac{C}{2}$$

$$= (2s-2c) \frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$$

$$= \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

L.H.S. = M.H.S. = R.H.S. (Proved)

$$6.(a) \frac{1}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{1}{b} \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{1}{c} \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{s^2}{abc}$$

[প.গ.প. '০০]

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \frac{1}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{1}{b} \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{1}{c} \cos^2 \frac{C}{2} \\ &= \frac{1}{a} \frac{s(s-a)}{bc} + \frac{1}{b} \frac{s(s-b)}{ca} + \frac{1}{c} \frac{s(s-c)}{ab} \\ &= \frac{s(s-a) + s(s-b) + s(s-c)}{abc} \\ &= \frac{3s^2 - s(a+b+c)}{abc} = \frac{3s^2 - s.2s}{abc} \\ &= \frac{s^2}{abc} = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

$$6.(b) \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin(A-B)} = \Delta$$

$$\text{প্রমাণ : } \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin(A-B)}$$

$$= \frac{4R^2(\sin^2 A - \sin^2 B)}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin(A-B)}$$

$$= \frac{2R^2 \sin(A+B) \sin(A-B) \sin A \sin B}{\sin(A-B)}$$

$$= 2R^2 \sin\{\pi - (A+B)\} \sin A \sin B$$

$$=.2R^2 \sin A \sin B \sin C = 2R^2 \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R}$$

$$= \frac{abc}{4R} = \Delta = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$7. (a) \frac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} + \frac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} + \frac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{প্রমাণ : } \frac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} &= \frac{4R^2(\sin^2 B - \sin^2 C)}{\cos B + \cos C} \\ &= \frac{4R^2(\cos^2 C - \cos^2 B)}{\cos B + \cos C} \\ &= \frac{4R^2(\cos C + \cos B)(\cos C - \cos B)}{\cos B + \cos C} \\ &= 4R^2(\cos C - \cos B) \end{aligned}$$

অনুরূপভাবে আমরা পাই,

$$\frac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} = 4R^2(\cos A - \cos C) \text{ এবং}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} = 4R^2(\cos B - \cos A)$$

$$\begin{aligned} \text{এখন, L.H.S.} &= \frac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} \\ &\quad + \frac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} + \frac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} \end{aligned}$$

$$= 4R^2 \{ \cos C - \cos B + \cos A - \cos C \}$$

$$\cos B - \cos A \}$$

$$= 4R^2 \times 0 = 0 = \text{R.H.S. (Proved)}$$

$$7.(b) \frac{b-c}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{c-a}{b} \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{a-b}{c} \cos^2 \frac{C}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{প্রমাণ : L.H.S.} &= \frac{b-c}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{c-a}{b} \cos^2 \frac{B}{2} \\ &\quad + \frac{a-b}{c} \cos^2 \frac{C}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{b-c}{a} \times \frac{s(s-a)}{bc} + \frac{c-a}{b} \times \frac{s(s-b)}{ca}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{a-b}{c} \times \frac{s(s-c)}{ab} \\
 = \frac{s}{abc} & \{(b-c)(s-a) + (c-a)(s-b) \\
 & + (a-b)(s-c)\} \\
 = \frac{s}{abc} & \{s(b-c+c-a+a-b) + \\
 & (-ab+ca-bc+ab-ca+bc)\} \\
 = \frac{s}{abc} & \{s \times 0 + 0\} = 0 = \text{R.H.S. (Proved)}
 \end{aligned}$$

8(a) ΔABC -তে $\frac{b+c}{11} = \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13}$ হলে

প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos A}{7} = \frac{\cos B}{19} = \frac{\cos C}{25}$

প্রমাণ ১ দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned}
 \frac{b+c}{11} &= \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13} = \frac{b+c+c+a+a+b}{11+12+13} \\
 \Rightarrow \frac{b+c}{11} &= \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13} = \frac{2(a+b+c)}{36} \\
 \Rightarrow \frac{b+c}{11} &= \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13} = \frac{a+b+c}{18} \\
 \frac{a+b+c}{18} &= \frac{b+c}{11} = \frac{a+b+c-b-c}{18-11} = \frac{a}{7}, \\
 \frac{a+b+c}{18} &= \frac{c+a}{12} = \frac{a+b+c-c-a}{18-12} = \frac{b}{6} \text{ এবং} \\
 \frac{a+b+c}{18} &= \frac{a+b}{13} = \frac{a+b+c-a-b}{18-13} = \frac{c}{5}
 \end{aligned}$$

$$\frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = k \text{ (say)}$$

$$\Rightarrow a = 7k, b = 6k, c = 5k$$

এখন,

$$\begin{aligned}
 \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36k^2 + 25k^2 - 49k^2}{2.6k.5k} \\
 &= \frac{61 - 49}{60} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{25k^2 + 49k^2 - 36k^2}{2.5k.7k} \\
 &= \frac{74 - 36}{70} = \frac{38}{70} = \frac{19}{35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{49k^2 + 36k^2 - 25k^2}{2.7k.6k} \\
 &= \frac{85 - 25}{84} = \frac{60}{84} = \frac{5}{7}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \cos A : \cos B : \cos C = \frac{1}{5} : \frac{19}{35} : \frac{5}{7} = 7 : 19 : 25$$

$$\frac{\cos A}{7} = \frac{\cos B}{19} = \frac{\cos C}{25} \text{ (Showed)}$$

8. (b) ΔABC -এ, $a = 6$, $b = 3\sqrt{3}$ এবং $A = 90^\circ$ হলে B কোণের মান নির্ণয় কর।

সমাধান ১: দেওয়া আছে, ΔABC -এ $a = 6$, $b = 3\sqrt{3}$ এবং $A = 90^\circ$

ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$$\Rightarrow \frac{6}{\sin 90^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{\sin B} \Rightarrow \frac{6}{1} = \frac{3\sqrt{3}}{\sin B}$$

$$\Rightarrow \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ \quad B = 60^\circ$$

ব্যবহারিক অনুশীলনী

1. একটি ত্রিভুজের বাহ্যগুণ যথাক্রমে 40 সে.মি., 50 সে.মি. এবং 60 সে.মি. হলে এই ত্রিভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম ১ একটি ত্রিভুজের বাহ্যগুণ যথাক্রমে 40 সে.মি., 50 সে.মি. এবং 60 সে.মি. হলে এই ত্রিভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয়।

মূলতন্ত্র ১: মনে করি, ΔABC একটি ত্রিভুজ যার তিনটি বাহু যথাক্রমে $a = 40$ সে.মি., $b = 50$ সে.মি. এবং $c = 60$ সে.মি.। ΔABC -তে বৃহত্তম বাহু $c = 60$ সে.মি. এর বিপরীত কোণ $\angle C$ বৃহত্তম কোণ এবং ক্ষুদ্রতম বাহু $a = 40$ সে.মি. এর বিপরীত কোণ $\angle A$ ক্ষুদ্রতম কোণ। তাহলে প্রদত্ত উপাত্তের সাহায্যে ΔABC অঙ্কন করে টাঁদার সাহায্যে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ নির্ণয় করি এবং সূত্র $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ এ

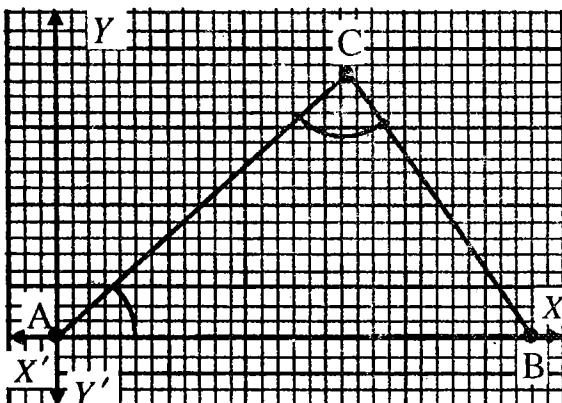
$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ থেকে প্রাপ্ত মানের সাথে সত্যতা যাচাই করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেসিল (ii) স্কেল (iii) থাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেসিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ৪

১. একটি থাফ পেপারে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'AX$ ও YAY' আঁকি।

২. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের ১ বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 সে.মি. ধরি।



৩. থাফ পেপারে AX বরাবর ক্ষুদ্রতম ($60 \div 2$) অর্ধাং 30 বর্গের বাহুর সমান করে বৃহত্তম বাহু $AB = 60$ সে.মি. কেটে নেই।

৪. A কে কেন্দ্র করে ক্ষুদ্রতম ($50 \div 2$) অর্ধাং 25 বর্গের বাহুর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি এবং B কে কেন্দ্র করে ($40 \div 2$) অর্ধাং 20 বর্গের বাহুর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে আরও একটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর C বিপুলতে ছেদ করে। A, B এবং B, C যোগ করি। তাহলে $\triangle ABC$ তে $AB = c = 60$ সে.মি., $BC = a = 40$ সে.মি. এবং $AC = b = 50$ সে.মি. সূচিত করে।

৫. চাঁদার সাহায্যে বৃহত্তম কোণ $\angle C$ এবং ক্ষুদ্রতম কোণ $\angle A$ নির্ণয় করি।

$$\text{হিসাব : } \cos C = \frac{40^2 + 50^2 - 60^2}{2 \times 40 \times 50}$$

$$= \frac{1600 + 2500 - 3600}{4000} = \frac{500}{4000} = 0.125$$

$$\angle C = 82.82^\circ$$

$$\cos A = \frac{50^2 + 60^2 - 40^2}{2 \times 50 \times 60}$$

$$= \frac{2500 + 3600 - 1600}{6000} = \frac{4500}{6000} = 0.75$$

$$\angle A = 41.41^\circ$$

ফল সংক্ষেপ :

বৃহত্তম কোণ C নির্ণয়		ক্ষুদ্রতম কোণ A নির্ণয়	
থাফ থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান	থাফ থেকে প্রাপ্ত মান	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান
$\angle C$ $= 83^\circ$	$\angle C$ $=$	$\angle A$ $= 41.5^\circ$	$\angle A$ $= 41.41^\circ$

ফলাফল : নির্ণেয় বৃহত্তম কোণ $\angle C = 83^\circ$ এবং ক্ষুদ্রতম কোণ $\angle A = 41.5^\circ$ ।

মন্তব্য : থাফ থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

২. একটি ত্রিভুজের কোণগুলি $105^\circ, 60^\circ, 15^\circ$ হলে ত্রিভুজটির বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম : একটি ত্রিভুজের কোণগুলি $105^\circ, 60^\circ, 15^\circ$ হলে ত্রিভুজটির বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয়

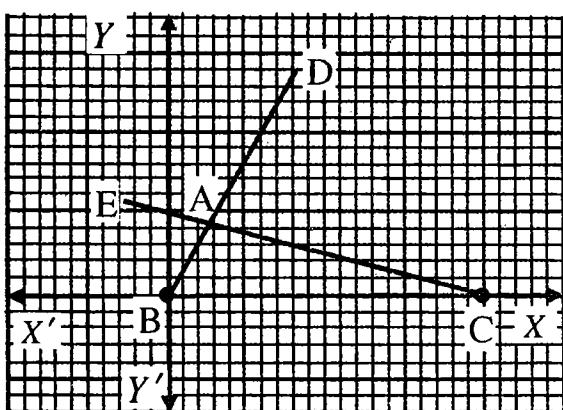
মূলত্ব : মনে করি, $\triangle ABC$ এর কোণগুলি $\angle A = 105^\circ, \angle B = 60^\circ$ ও $\angle C = 15^\circ$ এর বিপরীত বাহুগুলি যথাক্রমে a, b ও c । তাহলে প্রদত্ত উপাদ হতে থাফের সাহায্যে এবং $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ সূত্রের সাহায্যে a, b ও c এর অনুপাত নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেসিল (ii) স্কেল (iii) থাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেসিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ৫

১. একটি থাফ পেপারে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'BX$ ও YBY' আঁকি।

২. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 সে.মি. ধরে $BC = a = 10$ সে.মি. কেটে নেই।



3. ঢাঁদার সাহায্যে B বিন্দুতে $\angle CBD = 60^\circ$ ও C বিন্দুতে $\angle BCE = 15^\circ$ অঙ্কন করি। BD ও CE রেখা পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।
4. গ্রাফ থেকে ঢাঁদার সাহায্যে $\angle A$ এবং পেপিল কল্পাসের সাহায্যে AB ও AC বাহুর দৈর্ঘ্য মেপে BX বরাবর বিসিয়ে যথাত্রুমে c ও b বাহুয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

হিসাব ৪ আমরা জানি, $\triangle ABC$ তে

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle A + 60^\circ + 15^\circ = 180^\circ$$

$$\angle A = 105^\circ$$

$$\text{আবার, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin 105^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 15^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{0.966} = \frac{b}{0.866} = \frac{c}{0.259}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{0.966 \times 10} = \frac{b}{0.866 \times 10} = \frac{c}{0.259 \times 10}$$

$$\frac{0.966}{0.966} \quad \frac{0.866}{0.966} \quad \frac{0.259 \times 10}{0.966}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{8.96} = \frac{c}{2.68}$$

$$a : b : c = 10 : 8.96 : 2.68$$

ফল সংকলন ৪

$a : b : c$ নির্ণয়

গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত অনুপাত :	সূত্র থেকে প্রাপ্ত অনুপাত :
$a : b : c$ $= 10 : 9 : 2.7$	$a : b : c$ $= 10 : 8.96 : 2.68$

ফলাফল ৪ নির্ণেয় অনুপাত

$$a : b : c = 10 : 8.96 : 2.68$$

মন্তব্য ৪ গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

3. একটি ত্রিভুজের একটি বাহু 20 সে.মি. এবং এ বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ 70° ও 50° দেওয়া আছে, অপর কোণ ও বাহুদ্যন্ত নির্ণয় কর।

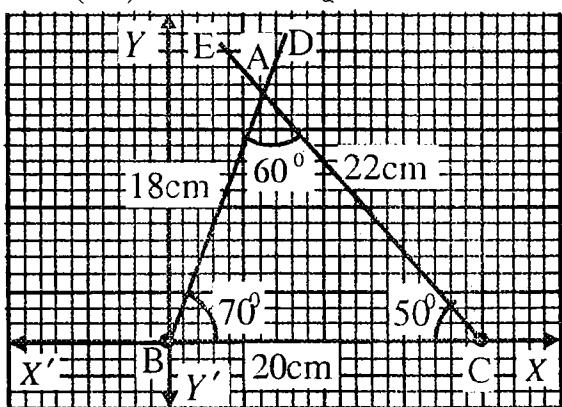
পরীক্ষণের নাম ৪ একটি ত্রিভুজের একটি বাহু 20 সে.মি. এবং এ বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ 70° ও 50° দেওয়া আছে, অপর কোণ ও বাহুদ্যন্ত নির্ণয় করতে হবে।

মূলতন্ত্র ৪ মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ যার একটি বাহু $a = 20$ সে.মি. এবং এ বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle B = 70^\circ$ $\angle C = 50^\circ$ দেওয়া আছে। তাহলে প্রদত্ত উপাত্ত থেকে a বাহুর বিপরীত কোণ $\angle A$ এবং $\angle B$ ও $\angle C$ কোণের বিপরীত বাহু যথাত্রুমে b ও c ধাফের সাহায্যে এবং $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ও

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ৪ (i) পেপিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইঁড়েজার (v) শার্পনার (vi) ঢাঁদা (vii) পেপিল কল্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।



কার্যপদ্ধতি ৪

- একটি গ্রাফ পেপারে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'BX$ ও YBY' আঁকি।
- x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 সে.মি. ধরে BX বরাবর ক্ষুদ্রতম 20 বর্গের বাহুর সমান করে $BC = 20$ সে.মি. কেটে নেই।
- চাঁদার সাহায্যে BC রেখার B বিপুতে $\angle CBD = 70^\circ$ এবং C বিপুতে $\angle BCE = 50^\circ$ অঙ্কন করি। BD ও CE রেখা পরস্পরকে A বিপুতে ছেদ করে।

হিসাব ৪ আমরা জানি, ΔABC তে

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A + 70^\circ + 50^\circ = 180^\circ$$

$$\angle A = 60^\circ$$

$$\text{আবার}, \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{20}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 70^\circ}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sin 70^\circ}{\sin 60^\circ} \times 20 = \frac{0.939}{0.866} \times 20$$

$$= 21.69 \text{ সে.মি. (প্রায়)}$$

$$\text{ত্রুপ}, \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{20}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 50^\circ}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 60^\circ} \times 20 = \frac{0.766}{0.866} \times 20$$

$$= 17.69 \text{ সে.মি. (প্রায়)}$$

ফল সংকলন :

	গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান :	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান :
$\angle A$	60°	60°
b	22 সে.মি.	21.69 সে.মি. (প্রায়)
c	18 সে.মি.	17.69 সে.মি. (প্রায়)

ফলাফল ৪ নির্ণয় $\angle A = 60^\circ$

b বাহুর দৈর্ঘ্য $AC = 21.69$ সে.মি. (প্রায়) ও c বাহুর দৈর্ঘ্য $AB = 17.69$ সে.মি. (প্রায়)

মন্তব্য ৪ গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণীত মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

- একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 9 সে.মি. 6 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° দেওয়া আছে, অপর বাহু ও কোণদ্বয় নির্ণয় করি।

পরীক্ষণের নাম ৪ একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 9 সে.মি., 6 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° দেওয়া আছে, অপর বাহু ও কোণদ্বয় নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব ৪ মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ যার দুইটি বাহু $BC = a = 9$ সে.মি., $AB = c = 6$ সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle B = 60^\circ$ দেওয়া আছে। তাহলে প্রদত্ত উপাস্ত থেকে a বাহুর বিপরীত কোণ $\angle A$, c বাহুর বিপরীত কোণ $\angle C$ এবং $AC = b$ ও ফেরে সাহায্যে এবং $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ও

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

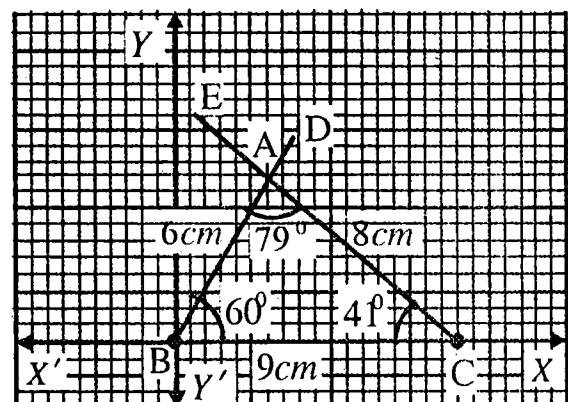
সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ৪ (i) পেপিল (ii) টেক্স (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) চাঁদা (vii) পেপিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ৫

- একটি গ্রাফ পেপারে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'BX$ ও YBY' আঁকি।

- x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 সে.মি. ধরে BX বরাবর ক্ষুদ্রতম 18 বর্গের বাহুর সমান করে $BC = a = 9$ সে.মি. কেটে নেই।



- চাঁদার সাহায্যে BC রেখার B বিপুতে $\angle CBD = 60^\circ$ অঙ্কন করি।

4. BD রেখা হতে ক্ষুদ্রতম 12 বর্গাত্তুর সমান করে
 $BA = c = 6$ সে.মি. কেটে নেই। A, C যোগ করি।

4. গ্রাফ থেকে ঢাকার সাহায্যে $\angle A$, $\angle C$ এবং
পেপিল কলাসের সাহায্যে AC বাহুর দৈর্ঘ্য মেপে BX
বরাবর বসিয়ে b বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

হিসাব :

$$\text{আমরা জানি, } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ = 9^2 + 6^2 - 2 \times 9 \times 6 \cos 60^\circ \\ = 81 + 36 - 108(0.5)$$

$$\Rightarrow b^2 = 117 - 54 = 63 \\ b = 7.94 \text{ সে.মি. (প্রায়)}$$

$$\text{আবার, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{9}{\sin A} = \frac{7.94}{\sin 60^\circ}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{9 \times 0.866}{7.94} =$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{17.32}{18} = 0.982$$

$$A = 78.99^\circ \text{ (প্রায়)}$$

$$\text{অন্তর্প, } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{7.94}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{6 \times 0.866}{7.94} = 0.65$$

$$C = 40.87^\circ \text{ (প্রায়)}$$

ফল সংকলন :

	গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান :	সূত্র থেকে প্রাপ্ত মান :
b	8 সে.মি.	7.94 সে.মি.(প্রায়)
$\angle A$	79° (প্রায়)	78.99° (প্রায়)
$\angle C$	41° (প্রায়)	40.87° (প্রায়)

ফলাফল : নির্ণেয় $b = 7.94$ সে.মি. (প্রায়), $\angle A = 79^\circ$
এবং $\angle C = 41^\circ$

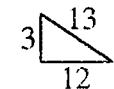
মন্তব্য : গ্রাফ থেকে প্রাপ্ত মান এবং গাণিতিকভাবে নির্ণীত
মান প্রায় সমান। অতএব ফলাফল সঠিক।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ প্রশ্ন উভয়সহ :

1.(a) $\tan \theta = \frac{5}{12}$ এবং θ সূস্পর্শকোণ হলে
 $\sin \theta + \sec(-\theta)$ এর মান – [DU 08-09]

(b) যদি $\cos A = \frac{4}{5}$ হয়, তবে $\frac{1+\tan^2 A}{1-\tan^2 A}$ এর
মান – [BUET 06-07]

Sol": (a) θ সূস্পর্শকোণ বলে



$$\sin \theta + \sec(-\theta) = \frac{5}{13} + \frac{13}{12} = \frac{229}{156}$$

(b) $\tan A = \frac{3}{4} \quad \frac{1+\tan^2 A}{1-\tan^2 A} = \frac{25}{7}$



(ক্যালকুলেটরের সাহায্যে)

2. $\cot A - \tan A$ সমান – [DU 08-09]

Sol": $\cot A - \tan A = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$

$$= \frac{2 \cos 20}{2 \sin \theta \cos \theta} = 2 \cot 20$$

3.(a) $\cos^2 0^\circ + \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots +$
 $\cos^2 90^\circ$ এর মান – [DU 08-09]

(b) $\cos^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 90^\circ +$
 $+ \cos^2 180^\circ$ এর মান – [BUET 06-07]

Sol": (a) এখানে পদ সংখ্যা = $\frac{90-0}{10} + 1 = 10$

অর্থাৎ 5 জোড়া পদ। Ans. 5

(b) এখানে পদ সংখ্যা = $\frac{180-30}{30} + 1 = 6$ অর্থাৎ 3

জোড়া পদ। Ans. 3

4. $\cos 75^\circ$ এর সঠিক মান – [BUET, DU 07-08]

A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ C. $\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ D. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

Sol": ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, $\cos 75^\circ = 0.2588$
Option D = 0.2588 Ans. D

5. $\sin(780^\circ) \cos(390^\circ) - \sin(330^\circ) \cos(-300^\circ)$ এর
মান – [DU 02-03, 05-06; JU 05-06, 08-09]

Sol": ক্যালকুলেটরের সাহায্যে রাশি মান = 1.

৬. $\tan 54^\circ - \tan 36^\circ$ এর মান-

[DU 03-04; BUET 03-04]

$$Sol'': \text{পদক্ষেপ মান} = 2 \tan(54^\circ - 36^\circ)$$

$$= 2 \tan 18^\circ \quad [\text{নিয়ম : } A + B = 90^\circ \text{ হলে}$$

$$\tan A - \tan B = 2 \tan(A - B)]$$

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যে করতে হবে।

৭. $\sin 65^\circ + \cos 65^\circ$ সমান-

[DU 02-03; KU 06-07]

$$\text{পদক্ষেপ মান} = \sqrt{2} \sin(65^\circ + 45^\circ) = \sqrt{2} \sin 115^\circ$$

$$= \sqrt{2} \cos(65^\circ - 45^\circ) = \sqrt{2} \cos 20^\circ$$

নিয়ম : $a \cos A + b \sin A$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(A + \tan^{-1} \frac{b}{a})$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(A - \tan^{-1} \frac{b}{a})$$

৮. $\tan 15^\circ$ এর মান- [DU 00-01; CU 07-08]

A. $2 + \sqrt{2}$ B. $2 - \sqrt{3}$

C. $2 + \sqrt{3}$ D. $3 + \sqrt{2}$

$$Sol'': \text{ক্যালকুলেটরের সাহায্যে, } \tan 15^\circ = 0.268$$

Option B = 0.268 . Ans.B

৯. $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}$ এর মান-

[DU 99-00, 04-05]

$$Sol'': \text{পদক্ষেপ রাশি} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}$$

$$= \tan(45^\circ - 15^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

নিয়ম : ১. $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \tan(45^\circ - A)$

২. $\frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \tan(45^\circ + A)$

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যে পদক্ষেপ রাশি = 0.57735

১০. $\cot \frac{\pi}{20} \cot \frac{3\pi}{20} \cot \frac{5\pi}{20} \cot \frac{7\pi}{20} \cot \frac{9\pi}{20}$

[RU 07-08]

Sol'': ক্যালকুলেটরের সাহায্যে পদক্ষেপ মান = 1

$$\frac{\pi}{20} = \frac{180}{20} = 9$$

1	:	+	tan	Ans	tan	3	Ans	tan	5	Ans
tan	7	Ans	tan	9	Ans	=				

$$11. \frac{1 - \cos 2\theta + \sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta + \sin 2\theta} = ?$$

[CU 02-03, RU 07-08]

- A. $\sec \theta$ B. $\sin \theta$ C. $\tan \theta$ D. $\cot \theta$

$$Sol'': \theta = 30^\circ \text{ বসিয়ে পদক্ষেপ রাশি} = 0.5773$$

$$\tan 30^\circ = 0.5773 \quad \text{Ans. D}$$

১২. n একটি পূর্ণ সংখ্যা হলে $\cos((2n+1)\pi + \pi/3)$

[SU 06-070]

- A. $-\frac{1}{2}$ B. 0 C. 1 D. কোনটিই নয়।

$$Sol'': n=0 \text{ হলে পদক্ষেপ রাশি} = \cos(\pi + \pi/3) = -\frac{1}{2}$$

$$n=1 \text{ হলে পদক্ষেপ রাশি} = \cos(3\pi + \pi/3) = -\frac{1}{2}$$

13.(a) $\tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ \tan 18^\circ$ এর মান- [IU 05-06]

(b) $\tan 75^\circ - \tan 30^\circ - \tan 75^\circ \tan 30^\circ$ এর মান- [DU 03-04]

$$Sol'': (a) পদক্ষেপ রাশি = $\tan(27^\circ + 18^\circ) = 1$$$

$$(b) \text{পদক্ষেপ রাশি} = 1$$

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যে পদক্ষেপ রাশি = 1

নিয়ম : (a) $A + B = n\pi + \pi/4$ হলে,

$$\tan A + \tan B + \tan A \tan B = 1$$

(b) $A - B = \pi/4$ হলে,

$$\tan A - \tan B - \tan A \tan B = 1$$

অথবা, ক্যালকুলেটরের সাহায্যে পদক্ষেপ রাশি = 1

$$14. \sin A = \frac{1}{2} \text{ এবং } \tan B = \sqrt{3} \text{ হয় তবে}$$

$\sin A \cos B + \cos A \sin B$ এর মান- [KU 03-04]

$$Sol'': A = 30^\circ, B = 60^\circ$$

$$\text{পদক্ষেপ রাশি} = \sin(A + B) = \sin 90^\circ = 1$$

$$16. A + B + C = \pi \text{ হলে} \sin 2A + \sin 2B +$$

$\sin 2C$ এর মান- [KU ; RU 07-08]

$$a. 4 \sin A \sin B \sin C \quad b. 4 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C$$

c. $1 - 4\sin A \sin B \sin C$ d. $4\sin A \sin B \sin C - 1$

Sol": : $A=B=C=60^\circ$ ধরে পদ্ধতি রাশি = 2.598

Option গুলোতে $A=B=C=60^\circ$ বসালে $a = 2.598$

17. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$
হলে $A + B + C$ এর মান কত? [EA 05-06]

- A. $\pi/2$ B. 0 C. π D. 2π

Sol": : Ans. π

18. $\sin^2(60^\circ + A) + \sin^2 A + \sin^2(60^\circ - A)$ এর
মান -

Sol": : $A = 30^\circ$ ধরে,

$$\begin{array}{ccccccccc} (\sin & 9 & 0 &) & x^2 & + & (\sin & 3 & 0 \\ (\text{arg}) & & &) & & & (\text{arg}) & & \\ x & x^2 & + & (\sin & 3 & 0 &) & x^2 & = \end{array}$$

19. ABC ত্রিভুজে $\cos A + \cos C = \sin B$ হলে,
 $\angle C$ সমান - [DU 04-05]

- A. 30° B. 60° C. 90° D. 45°

কৌশল ৪ কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের cosine
অনুপাতের যোগফল অপর কোণের sine এর সমান হলে
ত্রিভুজটি সমকোণী এবং cosine এর সাথের কোণগুলোর
মেকোন একটি কোণ সমকোণ।

Sol": : Ans. C

20. ABC ত্রিভুজে $a = 8$, $b = 4, c = 6$ হলে

$\angle A = ?$ [SU 08-09] A. $\sin^{-1} \frac{\sqrt{5}}{8}$

B. $2\sin^{-1} \frac{\sqrt{5}}{8}$ C. $\sin^{-1} \frac{4}{5}$ D. $2\sin^{-1} \frac{4}{5}$

Sol": : $\cos A = \frac{4^2 + 6^2 - 8^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = -\frac{1}{4}$

$A = 104.48^\circ$

Option গুলোতে $D = 106.26^\circ = 104.48^\circ$

21. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার $a = 10$ cm এবং
 $b = c$ ত্রিভুজটির পরিপূর্ণিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 cm হলে
 $\angle B = ?$ [SU 08-09]

Sol": : $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{10}{2 \cdot 10}$

$\Rightarrow A = 30^\circ \therefore B + C = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

$B = 150^\circ / 2 = 75^\circ$

22. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর পরিমাপ যথাক্রমে 3, 5 ও
7 হলে স্কুলকোণটির মান - [IU 06-07; RU 07-08]

Sol": : স্কুলকোণটি = $\cos^{-1} \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 120^\circ$

23. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো 13, 14, 15 হলে
ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল - [RU 07-08; BUET 06-07]

Sol": : $S = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$

ক্ষেত্রফল = $\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$

24. ABC ত্রিভুজে $\angle A = 60^\circ, \angle B = 75^\circ$ এবং
 $c = \sqrt{6} \text{ cm}$ হলে $a = ?$ [SU 06-07]

Sol": : $\angle C = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow a = \sqrt{6} \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 3$$

25. $(a-b)^2 \cos^2 \frac{C}{2} + (a+b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} = ?$

[SU 06-07]

পদ্ধতি রাশি = $a^2 + b^2 - 2ab(\cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2})$

= $a^2 + b^2 - 2ab \cos C = c^2$

26. ABC একটি ত্রিভুজ হলে $2(bc \cos A +$
 $ca \cos B + ab \cos C) = ?$ [RU 06-07]

Sol": : পদ্ধতি রাশি = $2bc \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} +$

$2ca \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + 2bc \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

= $a^2 + b^2 + c^2$

27. যেকোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রে $bc \cos^2 \frac{A}{2} +$

$ca \cos^2 \frac{B}{2} + ab \cos^2 \frac{C}{2} = ?$ [IU 05-06]

Sol": : পদ্ধতি রাশি = $bc \frac{s(s-a)}{bc} + ca \frac{s(s-b)}{ca}$

+ $ab \frac{s(s-c)}{ab} = s \{3s - 2(a+b+c)\}$

= $s(3s - 2s) = s^2$

কিছু বিশেষ সূত্র / কৌশল যা ভর্তি পরীক্ষায় দ্রুত উত্তর করতে সাহায্য করবে :

$$1. \ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ হলে, } f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a},$$

ডোমেন $f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$, রেজ $f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$

$$2. \ f(x) = ax + b \text{ হলে, } f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a},$$

ডোমেন $f = \mathbb{R}$, রেজ $f = \mathbb{R}$

$$3. \ f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a} \text{ হলে,}$$

ডোমেন $f = \mathbb{R} - \{a\}$, রেজ $f = \mathbb{R} - \{2a\}$

$$4. \ f(x) = \sqrt{x^2 - a^2} \text{ হলে,}$$

ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -a \text{ or } x \geq a\}$,

রেজ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

$$5. \ f(x) = \sqrt{x^2 - a^2} \text{ হলে,}$$

ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : -a \leq x \leq a\} = [-a, a]$,

রেজ $f = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq a\} = [0, a]$

$$6. \ f(x) = \log(a + bx) \text{ হলে,}$$

ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{a}{b}\}$, রেজ $f = \mathbb{R}$

$$7. \ f(x) = e^x \text{ হলে, ডোমেন } f = \mathbb{R},$$

রেজ $f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

প্রশ্নমালা VIII

1. (a) $Sol^n : f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : [0, 2] \rightarrow$ ফাংশনটি একক কিন্তু সার্বিক নয়।

$[0, 2]$ এর ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের ছবি ভিন্ন ভিন্ন কিন্তু \mathbb{R} সেটের সকল উপাদানই A সেটের উপাদানের ছবি নয়। \therefore Ans. C.

- (b) $Sol^n : [-2, 2]$ এর ভিন্ন উপাদান -2 ও 2 এর ছবি 4 কিন্তু $[0, 4]$ সেটের সকল উপাদানই $[-2, 2]$ সেটের উপাদানের ছবি। \therefore Ans. B.

- (c) Sol^n : সবগুলি তথ্য সত্য। \therefore Ans. D.

- (d) Sol^n : দিঘাত ফাংশনের লেখ y অক্ষ অথবা y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম হয়।

Ans.B.

- (e) Sol^n : $f(x)$ এর বৃপ্তাত্তির ফাংশন $f(x-4)$ ডানে স্থানান্তরিত হয়। Ans. B.

- (f) Sol^n : x অক্ষের সাপেক্ষে $y = x^2$ এর প্রতিচ্ছবি $y = -x^2$

- (g) Sol^n : 3 বিজোড় বলে $\text{cosec}^3(4\theta + \frac{\pi}{3})$ এর

$$\text{পর্যায়} = \frac{\pi}{|4|} = \frac{\pi}{4}. \quad \therefore \text{Ans.D.}$$

- (h) $Sol^n : 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \quad \therefore \text{Ans. B}$

- (i) Sol^n : $x > 0$ হলে $\frac{x}{|x|} = 1$, $x < 0$ হলে $\frac{x}{|x|} = -1$

বিস্তার $f = \{-1, 1\}$ \therefore Ans. A.

- (j) Sol^n : $f(x)$ ফাংশনের গ্রাফ থেকে এর বৃপ্তাত্তির ফাংশন $f(x+2)$ এর গ্রাফ 2 একক স্থানান্তরিত হবে বামে। \therefore Ans. A.

- (k) Sol^n : $f(x) = x + 1$ এবং $g(x) = 2x$ হলে,

- $(fog)(2) = f(g(2)) = f(2 \times 2) = f(4) = 4 + 1 = 5$ এর মান নিচের কোনটি?

D. একক নয়, সার্বিক নয় $g(x) = 2x \quad \therefore g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

$$(fog^{-1})(2) = f(g^{-1}(2)) = f(\frac{2}{2}) = f(1) = 1 + 1 = 2$$

2. (a) দেওয়া আছে, $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x > 3 \\ x^2 - 2, & -2 \leq x \leq 3 \\ 2x + 3, & x < -2 \end{cases}$

[ঢ. '১২; য. '০৭, রা. '০৮; চ. '০৮, '১২; কু. '১৩]

$$f(2) = 2^2 - 2 \quad [\because -2 \leq 2 \leq 3] \\ = 4 - 2 = 2$$

$$f(4) = 3 \times 4 - 1 \quad [4 > 3] \\ = 12 - 1 = 11$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 2 \quad [\because -2 \leq -1 \leq 3] \\ = 1 - 2 = -1$$

$$f(-3) = 2 \times (-3) + 3 \quad [-3 < -2] \\ = -6 + 3 = -3$$

2(b) $f(x) = x^2 + ax + b$, $f(1) = 1$ এ $f(2) = 2$
হলে, $f(3)$ এর মান নির্ণয় কর। [চ. '০৮]

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + ax + b \dots (1)$

$$f(1) = 1^2 + a \cdot 1 + b = 1 \Rightarrow a + b = 0 \dots (2)$$

$$f(2) = 2^2 + a \cdot 2 + b = 1$$

$$\Rightarrow 2a + b = -3 \dots (3)$$

$$(3) থেকে (2) বিয়োগ করে পাই, $a = -3$$$

$$(2) থেকে পাই, $-3 + b = 0 \Rightarrow b = 3$$$

$$(1) \Rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 3$$

$$f(3) = 3^2 - 3 \times 3 + 3 = 9 - 9 + 3 = 3 \text{ (Ans.)}$$

2.(c) $A = [-3, 5]$ এবং $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনটি
 $f(x) = 2x^2 - 7$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $f(2)$, $f(6)$
এবং $f(t-2)$ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $2 \in A = [-3, 5]$, সূতরাং $f(2)$ সংজ্ঞায়িত

$$\text{এবং } f(2) = 2 \cdot 2^2 - 7 = 8 - 7 = 1$$

$6 \notin A = [-3, 5]$, সূতরাং $f(6)$ অসংজ্ঞায়িত।

যদি $t-2 \in A = [-3, 5]$ i.e. $-3 \leq t-2 \leq 5$

i.e. $-1 \leq t \leq 7$ হয় তবে $f(t-2)$ সংজ্ঞায়িত হবে

$$\text{এবং } f(t-2) = 2(t-2)^2 - 7$$

$$= 2(t^2 - 4t + 4) - 7 = 2t^2 - 8t + 8 - 7 \\ = 2t^2 - 8t + 1$$

3.(a) $f(x) = b \frac{x-a}{b-a} + a \frac{x-b}{a-b}$ হলে, দেখাও যে,
 $f(a) + f(b) = f(a+b)$ [ব. '০৮; য. '১২; ঢ. '০৭;
রা. '০৮, '১৩; কু. '০৮]

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $f(x) = b \frac{x-a}{b-a} + a \frac{x-b}{a-b}$

$$f(a) = b \frac{a-a}{b-a} + a \frac{a-b}{a-b} = a$$

$$f(b) = b \frac{b-a}{b-a} + a \frac{b-b}{a-b} = b \text{ এবং}$$

$$f(a+b) = b \frac{a+b-a}{b-a} + a \frac{a+b-b}{a-b}$$

$$= \frac{b^2}{b-a} + \frac{a^2}{a-b} = \frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)} = a+b$$

$$= f(a) + f(b)$$

$$f(a) + f(b) = f(a+b) \text{ (Showed)}$$

3(b) $f(x) = \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$, $g(x) = \frac{1}{2}(3 - 3^{-x})$

হলে, প্রমাণ কর যে, $f(x+y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ [য. '০৯; সি. '১২; দি. '১৩; চ. '১৪]

প্রমাণঃ L.H.S. = $f(x+y) = \frac{1}{2}(3^{x+y} + 3^{-x-y})$

R.H.S. = $f(x)f(y) + g(x)g(y)$

$$= \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x}) \frac{1}{2}(3^y + 3^{-y}) +$$

$$\frac{1}{2}(3^x - 3^{-x}) \frac{1}{2}(3^y - 3^{-y})$$

$$= \frac{1}{4}(3^{x+y} + 3^{x-y} + 3^{-x+y} + 3^{-x-y} + 3^{x+y}$$

$$- 3^{x-y} - 3^{-x+y} + 3^{-x-y})$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2(3^{x+y} + 3^{-x-y}) = \frac{1}{2}(3^{x+y} + 3^{-x-y})$$

L.H.S. = R.H.S. (Proved)

4(a) $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$ হলে, x এর মাধ্যমে

$f(y)$ এর মান নির্ণয় কর। [য. '০৭; প্র.ভ.প. '০৮]

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx-a} \Rightarrow f(y) = \frac{ay+b}{cy-a} \dots (1)$$

এবং $y = \frac{ax + b}{cx - a} \Rightarrow cxy - ay = ax + b$
 $\Rightarrow cxy - ax = ay + b$ www.boighar.com
 $\Rightarrow (cy - a)x = ay + b$
 $\Rightarrow x = \frac{ay + b}{cy - a} = f(y)$ [(1) দ্বারা]

$$f(y) = x$$

4(b) $\phi(x) = \frac{x-1}{x+1}$ হলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\phi(x) - \phi(y)}{1 + \phi(x)\phi(y)} = \frac{x-y}{1+xy}$$
 [য.'০২; সি.'০৫]

প্রমাণ : দেওয়া আছে,

$$\phi(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad \phi(y) = \frac{y-1}{y+1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x) - \phi(y)}{1 + \phi(x)\phi(y)} &= \frac{\frac{x-1}{x+1} - \frac{y-1}{y+1}}{1 + \frac{x-1}{x+1} \frac{y-1}{y+1}} \\ &= \frac{xy+x-y-1-(xy-x+y-1)}{(x+1)(y+1)} \\ &= \frac{xy+x-y-1-xy+x-y+1}{(x+1)(y+1)} \\ &= \frac{xy+x-y-1-xy+x-y+1}{2xy+2} = \frac{2(x-y)}{2(1+xy)} \\ &= \frac{\phi(x) - \phi(y)}{1 + \phi(x)\phi(y)} = \frac{x-y}{1+xy} \text{ (Proved)} \end{aligned}$$

3(c) যদি $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর

$$\text{যে, } \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = 2x \quad [\text{দি.'১০; ব.'১৩}]$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{1} = \frac{2x+1}{2x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{(2x+1)+(2x-1)}{(2x+1)-(2x-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{4x}{2} \quad \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = 2x$$

[যোজন-বিয়োজন করে]

4(d) যদি $f(x) = \frac{3x+5}{3x-5}$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $\frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{3x}{5}$. [চ.'১১]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{3x+5}{3x-5}$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{1} = \frac{3x+5}{3x-5}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{(3x+5)+(3x-5)}{(3x+5)-(3x-5)}$$

[যোজন-বিয়োজন করে]

$$\Rightarrow \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{6x}{10} \quad \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{3x}{5}$$

4(e) যদি $y = f(x) = \frac{5x+3}{4x-5}$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $x = f(y)$. [ঢ.'১১; সি.'১৩]

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $y = f(x) = \frac{5x+3}{4x-5}$

$$f(y) = \frac{5y+3}{4y-5}, [\because f(x) = \frac{5x+3}{4x-5}]$$

$$\text{এখন, } y = \frac{5x+3}{4x-5} \Rightarrow 4xy - 5y = 5x + 3$$

$$\Rightarrow 4xy - 5x = 5y + 3$$

$$\Rightarrow (4y-5)x = 5y + 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{5y+3}{4y-5} = f(y) \quad \therefore x = f(y)$$

4(f) $y = f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$ হলে, প্রমাণ কর যে,

$$f(y) = x \quad [\text{ঢ.'১২; ব.'১১; চ.'১২; দি.'০৯,'১৪; সি.'০৯; ঢ.কু.'১৩]]$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $y = \frac{4x-7}{2x-4}$

$$\Rightarrow 4x-7 = 2xy-4y$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4x - 2xy &= -4y + 7 \\ \Rightarrow -x(2y - 4) &= -(4y - 7) \\ \Rightarrow x = \frac{4y - 7}{2y - 4} &\quad \dots \text{(i)} \end{aligned}$$

আবার, $f(x) = \frac{4x - 7}{2x - 4}$
 $f(y) = \frac{4y - 7}{2y - 4} \dots \text{(ii)}$

(i) ও (ii) হতে পাই, $f(y) = x$

4(g) $f(x) = \frac{1+x^2+x^4}{x^2}$ হলে, দেখাও যে,

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \quad [\text{রা. }'06; \text{ মা. }'03]$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1+x^2+x^4}{x^2}$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^4} \times \frac{x^2}{1} \\ &= \frac{1+x^2+x^4}{x^2} = f(x) \end{aligned}$$

5(a) $f(x) = e^x + e^{-x}$ হলে, প্রমাণ কর যে,
 $f(x+y)f(x-y) = f(2x) + f(2y)$

[চ. '০৯, '১৩; কু. '১০; রা. '১০, '১৮; ব. '০৯; সি. '০৭;
 চ. '১২; ঘ. '০৮, '১২]

প্রমাণ : L.H.S. = $f(x+y)f(x-y)$
 $= \{e^{x+y} + e^{-(x+y)}\} \{e^{x-y} + e^{-(x-y)}\}$
 $= e^{x+y+x-y} + e^{x+y-x+y} + e^{-x-y+x-y} + e^{-x-y-x+y}$
 $= e^{2x} + e^{2y} + e^{-2y} + e^{-2x}$
 $= (e^{2x} + e^{-2x}) + (e^{2y} + e^{-2y})$
 $= f(2x) + f(2y) = \text{R.H.S.}$
 L.H.S. = R.H.S. (Proved)

5(b) $\phi(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ হলে, দেখাও যে, $\phi(y) + \phi(z) = \phi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)$ [রা. '১০; ঘ. '০৬; কু. '১১; ব. '১২]

প্রমাণ : $\phi(y) + \phi(z) = \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) + \ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$

$$= \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right)\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = \ln\frac{1-y-z+yz}{1+y+z+yz}$$

$$\phi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right) = \ln\frac{1-\frac{y+z}{1+yz}}{1+\frac{y+z}{1+yz}} = \ln\frac{1+yz-y-z}{1+yz+y+z}$$

$$\phi(y) + \phi(z) = \phi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)$$

5(c) $f(x) = \ln(\sin x)$ ও $\phi(x) = \ln(\cos x)$ হলে,
 দেখাও যে, $e^{2\phi(x)} - e^{2f(x)} = e^{\phi(2x)}$

[ঘ. '১০; ব. '১০, '১৮; চ. '১০; সি. '০৮, '১০, '১৪; রা. '০৯]

প্রমাণ : $f(x) = \ln(\sin x) \quad f(a) = \ln(\sin a)$

$\phi(x) = \ln(\cos x) \therefore \phi(a) = \ln(\cos a)$ এবং

$\phi(2a) = \ln(\cos 2a)$

এখন, $e^{2\phi(a)} - e^{2f(a)} = e^{2\ln(\cos a)} - e^{2\ln(\sin a)}$

$$= e^{\ln(\cos^2 a)} - e^{\ln(\sin^2 a)} = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= \cos 2a = e^{\ln(\cos 2a)} = e^{\phi(2a)}$$

$$e^{2\phi(a)} - e^{2f(a)} = e^{\phi(2a)} \text{ (Showed)}$$

5(d) $f(x) = \ln(\sin x)$ ও $\phi(x) = \ln(\cos x)$

হলে, দেখাও যে, $e^{2\phi(x)} + e^{2f(x)} = 1$ [প্র.গ.প. '১১]

প্রমাণ : $f(x) = \ln(\sin x) \therefore f(a) = \ln(\sin a)$ এবং

$\phi(x) = \ln(\cos x) \quad \phi(a) = \ln(\cos a)$

এখন, $e^{2\phi(a)} + e^{2f(a)} = e^{2\ln(\cos a)} + e^{2\ln(\sin a)}$

$$= e^{\ln(\cos^2 a)} + e^{\ln(\sin^2 a)} = \cos^2 a + \sin^2 a$$

$$e^{2\phi(a)} + e^{2f(a)} = 1 \text{ (Showed)}$$

5(e) $f(x) = \ln(x)$ ও $\phi(x) = x^3$ হলে, দেখাও যে,
 $f(\phi(x)) = 3f(x)$ [ব. '০২]

প্রমাণ : $f(\phi(x)) = f(x^3)$ [$\because \phi(x) = x^3$]

$$= \ln(x^3) \quad [\because f(x) = \ln(x)]$$

$$= 3 \ln(x) = 3f(x) \quad [\because f(x) = \ln(x)]$$

$$f(\phi(x)) = 3f(x) \text{ (Showed)}$$

৫(f) $f(x) = \ln(x)$ এ $\phi(x) = x^n$ হলে, দেখাও যে,
 $f(\phi(x)) = n f(x)$ [ঢা. '০৩, '০৭; সি. '০৬]

প্রমাণ : $f(\phi(x)) = f(x^n)$ [∵ $\phi(x) = x^n$]
 $= \ln(x^n)$ [∵ $f(x) = \ln(x)$]
 $= n \ln(x) = n f(x)$ [∵ $f(x) = \ln(x)$]
 $f(\phi(x)) = nf(x)$ (Showed)

6. (a) $f(x) = \cos x$ হলে, দেখাও যে,

$$f(2x) = 2\{f(x)\}^2 - 1 \text{ এবং}$$

$$f(3x) = 4\{f(x)\}^3 - 3f(x) \quad [\text{ঢা. '০১, য. '১৩}]$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} f(2x) &= \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \\ &= 2(\cos x)^2 - 1 \end{aligned}$$

$$f(2x) = 2\{f(x)\}^2 - 1 \quad (\text{Showed})$$

$$f(3x) = \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$= 4(\cos x)^3 - 3 \cos x$$

$$\therefore f(3x) = 4\{f(x)\}^3 - 3f(x) \quad (\text{Showed})$$

6(b) $f(x) = \sin^3 x \cos x$ হলে, $f(x - \frac{3\pi}{2})$ এর

মান নির্ণয় কর। [প.ভ.প. '০৬]

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = \sin^3 x \cos x$

$$f(x - \frac{3\pi}{2}) = \sin^3(x - \frac{3\pi}{2}) \cos(x - \frac{3\pi}{2})$$

$$= [\sin(-(\frac{3\pi}{2} - x))]^3 \cos(-(\frac{3\pi}{2} - x))$$

$$= [-\sin(\frac{3\pi}{2} - x)]^3 \cos(\frac{3\pi}{2} - x)$$

$$= [+ \cos x]^3 \{-\sin x\}$$

$$= -\cos^3 x \sin x \quad (\text{Ans.})$$

6.(c) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ হলে, প্রমাণ কর যে,

$$f(\cos \theta) = \tan^2 \frac{\theta}{2} \quad [\text{কু. '০৭, '০৯, '১৪; দি. '১১; সি. '১১}]$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

$$f(\cos \theta) = \frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta} = \frac{2\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2\cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$f(\cos \theta) = \tan^2 \frac{\theta}{2} \quad (\text{Showed})$$

7.(a) $\phi(x) = \tan x$ হলে, দেখাও যে,

$$\phi(a-b) = \frac{\phi(a) - \phi(b)}{1 + \phi(a)\phi(b)} \quad [\text{সি. '০৩}]$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\phi(x) = \tan x$

$$\phi(a) = \tan a, \phi(b) = \tan b \text{ এবং}$$

$$\phi(a-b) = \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\phi(a-b) = \frac{\phi(a) - \phi(b)}{1 + \phi(a)\phi(b)} \quad (\text{Showed})$$

7(b) $f(x) = \tan x$ হলে, দেখাও যে,

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)} \quad [\text{ঢা. '০৫}]$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $f(x) = \tan x$

$$f(y) = \tan y \text{ এবং}$$

$$f(x+y) = \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)} \quad (\text{Showed})$$

7(c) $f(x) = \cos(\ln x)$ হলে, $f(x) f(y) - \frac{1}{2}[f(\frac{x}{y}) + f(xy)]$ এর মান নির্ণয় কর।

$$[\text{য. '০৫; কু. '০৭, '০৯; সি., দি. '১১}]$$

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = \cos(\ln x)$

$$f(x) f(y) - \frac{1}{2}[f(\frac{x}{y}) + f(xy)]$$

$$= \cos(\ln x) \cos(\ln y) -$$

$$\frac{1}{2}[\cos(\ln \frac{x}{y}) + \cos(\ln xy)]$$

$$= \cos(\ln x) \cos(\ln y) -$$

$$\frac{1}{2}[\cos(\ln x - \ln y) + \cos(\ln x + \ln y)]$$

$$= \cos(\ln x) \cos(\ln y) -$$

$$\frac{1}{2} [2\cos(\ln x) \cos(\ln y)] \\ = \cos(\ln x) \cos(\ln y) - \cos(\ln x) \cos(\ln y) \\ = 0 \quad (\text{Ans.})$$

8. (a) দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - 2|x|$ এবং

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$(i) (gof)(-4) = g(f(-4)) \quad [\text{চ.}'05; \text{সি}'08]$$

$$= g((-4)^2 - 2|-4|) = g(16 - 2 \cdot 4) \\ = g(16 - 8) = g(8) = 8^2 + 1 \\ = 64 + 1 = 65$$

$$(ii) (fog)(5) = f(g(5)) \quad [\text{চ.}'05; \text{সি}'08]$$

$$= f(5^2 + 1) = f(25 + 1) = f(26) \\ = 26^2 - 2|26| = 676 - 2 \times 26 \\ = 676 - 52 = 624$$

$$(iii) (gof)(3) = g(f(3)) \quad [\text{ব.}'07]$$

$$= g(3^2 - 2|3|) = g(9 - 6) \\ = g(3) = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$(iv) (fog)(-2) = f(g(-2)) \quad [\text{ব.}'03; \text{ব.}'07]$$

$$= f((-2)^2 + 1) = f(4 + 1) = f(5) \\ = 5^2 - 2|5| = 25 - 10 = 15$$

8. (b) দেওয়া আছে, $f(x) = 2x - 5$ এবং

$$g(x) = x^2 + 6$$

[ব.}'06; সি.'06; চ.'07; ব.}'06, '09; রা.'13]

$$g(f(2)) = g(2 \times 2 - 5) = g(4 - 5) \\ = g(-1) = (-1)^2 + 6 = 1 + 6 = 7$$

$$f(g(5)) = f(5^2 + 6) = f(25 + 6) = f(31) \\ = 2 \times 31 - 5 = 62 - 5 = 57$$

8(c) দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এবং

$$g(x) = 2x - 3 \quad [\text{চ.}'07; \text{ব.}'12; \text{দি.}'13]$$

$$(gof)(2) = g(f(2)) = g(2^2 + 3 \cdot 2 + 1) \\ = g(4 + 6 + 1) = g(11) = 2 \times 11 - 3 \\ = 22 - 3 = 19$$

$$fog(2) = f(g(2)) = f(2 \cdot 2 - 3) = f(4 - 3) \\ = f(1) = 1^2 + 3 \times 1 + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$$

(d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, যেখানে $f(x) = x^2$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, যেখানে $g(x) = x^3 + 1$ এবং $x = -3$ হলে দেখাও যে, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

[চ.}'07, '11]

8(e) দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 2x - 3$ এবং

$$g(x) = 3x - 4 \quad [\text{কু.}'06; \text{দি.}'10; \text{সি.}'12]$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 4)$$

$$= (3x - 4)^2 + 2(3x - 4) - 3$$

$$= 9x^2 - 24x + 16 + 6x - 8 - 3$$

$$= 9x^2 - 18x + 5 \quad (\text{Ans.})$$

$$(f \circ g)(3) = 9 \times 3^2 - 18 \times 3 + 5$$

$$= 81 - 54 + 5 = 32 \quad (\text{Ans.})$$

$$8(f) f(x) = 2x^3 + 3 \text{ এবং } g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}$$

হলে, দেখাও যে, $(fog)(x) = (g \circ f)(x)$ [প.ভ.প.}'03]

$$\text{সমাধান: } (fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}\right)$$

$$= 2\left(\sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}\right)^3 + 3 = 2 \times \frac{x-3}{2} + 3$$

$$= x - 3 + 3 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x^3 + 3)$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2x^3 + 3 - 3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

$$\therefore (fog)(x) = (g \circ f)(x) \quad (\text{Showed})$$

9.(a) নিম্নের ফাংশনসমূহের ডোমেন ও রেজেল নির্ণয় কর

$$(i) f(x) = \frac{x}{x-1} \quad [\text{ব.}'10] \quad (ii) f(x) = \frac{x}{|x|}$$

$$(iii) f(x) = \sqrt{x^2 - 9} \quad (iv) f(x) = \sqrt{16 - x^2}$$

$$(i) f(x) = \frac{x}{x-1} \in \mathbb{R} \text{ হবে যদি ও কেবল যদি } x \in \mathbb{R}$$

এবং $x-1 \neq 0$ i.e., $x \neq 1$ হয়।

ডোমেন $f = \mathbb{R} - \{1\}$.

মনে করি, f এর অধীন x এর ছবি y

$$y = f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow xy - y = x$$

$$\Rightarrow xy - x = y \Rightarrow x(y - 1) = y \Rightarrow x = \frac{y}{y-1}$$

$x = \frac{y}{y-1} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং

$y - 1 \neq 0$ i.e. $y \neq 1$ হয়।

রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \{1\}$

(ii) $x = 0$ ব্যতীত সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য প্রদত্ত ফাংশন

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \text{ সংজ্ঞায়িত হয়।}$$

ডোমেন $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$x > 0$ হলে $|x| = x$ অতএব, ডোমেন f এর সকল

$$x > 0 \text{ উপাদানের জন্য, } f(x) = \frac{x}{x} = 1$$

$x < 0$ হলে $|x| = -x$ অতএব, ডোমেন f এর সকল

$$x < 0 \text{ উপাদানের জন্য, } f(x) = \frac{x}{-x} = -1$$

রেঞ্চ $f = \{-1, 1\}$

(iii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি

$$x \in \mathbb{R} \text{ এবং } x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 3) \geq 0$$

অর্থাৎ $x \geq 3$ অথবা, $x \leq -3$ হয়।

ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \text{ অথবা, } x \leq -3\}$

$x = \pm 3 \in$ ডোমেন f এর জন্য $f(x) = 0$ এবং

$x > 3$ অথবা $x < -3$ এর জন্য $f(x) > 0$.

রেঞ্চ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

(iv) $f(x) = \sqrt{16 - x^2} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি

$$x \in \mathbb{R} \text{ এবং } 16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 16 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x - 4)(x + 4) \leq 0 \text{ অর্থাৎ } -4 \leq x \leq 4 \text{ হয়।}$$

ডোমেন $= \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 4\}$

$x = \pm 4$ এর জন্য $f(x) = 0$, যা $f(x)$ এর স্থুদত্তম মান
এবং $x = 0$ এর জন্য $f(x) = 4$, যা $f(x)$ এর বৃহত্তম
মান।

রেঞ্চ $f = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$

9.(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনটি (i) $f(x) = x^3$

(ii) $f(x) = x^2 + 1$ ঘারা প্রকাশিত হলে, উহাদের
রেঞ্জ নির্ণয় কর। [কু. '০৭]

(i) প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = x^3$

$x \in \mathbb{R}$ এর যেকোন মানের জন্য $f(x) = x^3$ এর মান
যেকোন বাস্তব সংখ্যা।

রেঞ্জ $f = \mathbb{R}$

(ii) প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = x^2 + 1$

মনে করি, f এর অধীন x এর ছবি y

$$y = f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{y-1} \in \mathbb{R} \text{ যদি ও কেবল যদি } x \in \mathbb{R} \text{ এবং } y \geq 1$$

রেঞ্জ $f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$ (Ans.)

9(c) \mathbb{R} বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $A = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$; $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + x + 1$

ঘারা সংজ্ঞায়িত হলে, $f(x)$ এর রেঞ্জ নির্ণয় কর। [ষ.'০০]

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } f(-3) &= (-3)^2 + (-3) + 1 \\ &= 9 - 3 + 1 = 7 \end{aligned}$$

$$f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$$

$$f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

$$f(3) = 3^2 + 3 + 1 = 9 + 3 + 1 = 13$$

$f(x)$ -এর রেঞ্জ $= \{7, 1, 3, 13\}$

9(d) $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ এবং $f : A \rightarrow \mathbb{R}$
ফাংশনটি $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ঘারা সংজ্ঞায়িত।
 f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর। [চ.'০১]

$$\text{সমাধান : } f(-4) = (-4)^2 + 2(-4) + 3$$

$$= 16 - 8 + 3 = 11$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) + 3 = 4 - 4 + 3 = 3$$

$$f(0) = 0^2 + 2 \times 0 + 3 = 3$$

$$f(2) = 2^2 + 2 \times 2 + 3 = 4 + 4 + 3 = 11$$

$$f(4) = 4^2 + 2 \times 4 + 3 = 16 + 8 + 3 = 27$$

$$\therefore f -\text{এর রেঞ্জ} = \{11, 3, 3, 11, 27\}$$

$$= \{3, 11, 27\} \text{ (Ans.)}$$

9(e) দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x}$ এবং

$$g(x) = x^2 - 1 \quad [চ.'০২ ; সি.'০৫]$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1)$$

$$= \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{fog} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$(\text{fog})(x) = \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{(x-1)(x+1)} \in \mathbb{R}$ হবে
যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং $(x-1)(x+1) \geq 0$.

$$x \geq 1 \text{ অথবা } x \leq -1 \quad [\because 1 > -1]$$

$$\text{ডোমেন } (\text{fog}) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \text{ অথবা } x \leq -1\}$$

$x = 1 \in \text{ডোমেন } (\text{fog})$ অথবা $x = -1 \in \text{ডোমেন } (\text{fog})$ এর জন্য $(\text{fog})(x) = 0$; যা fog এর শূন্যতম মান এবং এর বৃহস্পতি মান $\rightarrow \infty$.

$$\text{রেঞ্জ } (\text{fog}) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < \infty\}$$

$$\text{আবার, } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x})$$

$$= (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$$

$$g \circ f = x - 1$$

এখন, $g \circ f = x - 1 \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$
ডোমেন $(gof) = \mathbb{R}$

সকল $x \in \text{ডোমেন } (gof) = \mathbb{R}$ এর জন্য gof এর
মান বাস্তব সংখ্যা।

$$\text{রেঞ্জ } (g \circ f) = \mathbb{R}$$

10. (a) নিম্নের ফাংশনসমূহে কোনটি এক-এক এবং সার্বিক কারণসহ উল্লেখ কর। এক - এক এবং সার্বিক ফাংশনগুলোর জন্য পিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর।

$$(i) f(x) = 2x - 3 \quad [চ.'১০; রা.'১১]$$

সমাধান ৪ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = 2x - 3$

যদি সম্ভব হয় কল্পনা করি, $f(x) = 2x - 3$ একটি
এক - এক ফাংশন নয় এবং যেকোন দুইটি অসমান
উপাদান $x_1, x_2 \in \text{ডোমেন } f$ এর ছবি সমান, অর্থাৎ

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2$$

$x_1 = x_2$; যা আমাদের কল্পনাকে অযোক্তিক প্রতিপন্ন
করে, কেননা $x_1 \neq x_2$

$f(x)$ একটি এক - এক ফাংশন নয় তা সম্ভব নয়।

$f(x)$ একটি এক - এক ফাংশন।

$x \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য, $f(x) = 2x - 3$ এর
মান সকল বাস্তব সংখ্যা।

$$\text{রেঞ্জ } f = \mathbb{R}. \text{ অর্থাৎ, } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

এখন, $f(x) = 2x - 3$

$$f(f^{-1}(x)) = 2 f^{-1}(x) - 3$$

$$\Rightarrow x = 2 f^{-1}(x) - 3 \Rightarrow 2 f^{-1}(x) = x + 3$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

$$(ii) \text{ প্রদত্ত ফাংশন, } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^3 + 5$$

[সি.'০৩; র.'১৩]

যেকোন $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ -এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ যদি
ও কেবল যদি, $x_1^3 + 5 = x_2^3 + 5$

$$\Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$f(x)$ একটি এক - এক ফাংশন।

$x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $f(x) = x^3 + 5$ এর মান সকল
বাস্তব সংখ্যা।

$$\text{রেঞ্জ } f = \mathbb{R}. \text{ i.e., } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

যদি ফাংশন f -এর অধীন x এর ছবি y অর্থাৎ

$y = f(x)$ হয়, তবে ফাংশন f^{-1} -এর অধীন y এর ছবি
 x অর্থাৎ $x = f^{-1}(y)$ হবে।

$$\text{এখন, } y = f(x) \Rightarrow y = x^3 + 5 \Rightarrow x^3 = y - 5$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{y-5} \quad \therefore f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-5}$$

$$y \text{ কে } x \text{ দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই, } f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$$

$$10(a) (iii) \text{ প্রদত্ত ফাংশন, } A = \mathbb{R} - \{3\}, B = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$, f : A \rightarrow B \text{ এবং } f(x) = \frac{x-2}{x-3}$$

যেকোন $x_1, x_2 \in A$ -এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ হবে

$$\text{যদি ও কেবল যদি, } \frac{x_1-2}{x_1-3} = \frac{x_2-2}{x_2-3}$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 - 3x_1 - 2x_2 + 6 = x_1 x_2 - 2x_1 - 3x_2 + 6$$

$$\Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

অতএব, $f(x)$ একটি এক - এক ফাংশন।

মনে করি, f -এর অধীন x এর ছবি y

$$y = f(x) = \frac{x-2}{x-3} \Rightarrow xy - 3y = x - 2$$

$$\Rightarrow x(y-1) = 3y - 2 \Rightarrow x = \frac{3y-2}{y-1} \dots\dots (1)$$

এখন, $x = \frac{3y-2}{y-1} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি

$y \in \mathbb{R}$ এবং $y-1 \neq 0$ i.e., $y \neq 1$ হয়।

$$\text{রেঞ্জ } f = \mathbb{R} - \{1\} = B$$

$$f(A) = B$$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

$$(1) \text{ হতে পাই}, x = \frac{3y - 2}{y - 1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{3y - 2}{y - 1} [\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$$

$$y \text{ কে } x \text{ দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই}, f^{-1}(x) = \frac{3x - 2}{x - 1}$$

10(a) (iv) প্রদত্ত ফাংশন, $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
এবং $f: A \rightarrow A$, $f(x) = x^2$

যেকোন $x_1, x_2 \in A$ -এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ হবে
যদি ও কেবল যদি, $x_1^2 = x_2^2$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 [\because x \geq 0]$$

অতএব, $f(x)$ একটি এক-এক ফাংশন।

মনে করি, $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x^2 = y$

$$\Rightarrow x = \sqrt{y} \quad (1) \quad [\because x \geq 0]$$

$x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং
 $y \geq 0$ হয়।

$$\text{রেজিম } f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = A$$

$$f(A) = A$$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

এখন, (1) হতে পাই, $x = \sqrt{y}$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y} [\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

10(a) (v) প্রদত্ত ফাংশন, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$x_1 = 1, x_2 = -1 \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য,

$$f(x_1) = f(1) = (1)^2 = 1 \text{ এবং}$$

$$f(x_2) = f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$f(x_1) = f(x_2) = 1, \text{ কিন্তু } x_1 \neq x_2.$$

অতএব, $f(x)$ এক-এক ফাংশন নয়।

মনে করি, $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x^2 = y$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{y}$$

$x = \pm \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং
 $y \geq 0$ হয়।

$$\text{রেজিম } f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$$

$$\text{অর্থাৎ } \text{রেজিম } f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \subset \mathbb{R}$$

$$f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন নয়।

10(a)(vi) প্রদত্ত ফাংশন, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$

যেকোন $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ -এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ হবে
যদি ও কেবল যদি $x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1$

$$\Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

অতএব, $f(x)$ একটি এক-এক ফাংশন।

এখন, $x \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য, $f(x) = x^3 + 1$

-এর মান সকল বাস্তব সংখ্যা।

$$\text{রেজিম } f = \mathbb{R} \text{ i.e., } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

এখন, $y = f(x) = x^3 + 1 \Rightarrow x^3 = y - 1$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{y - 1}$$

$$\therefore f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y - 1} [\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

10(a) (vii) প্রদত্ত ফাংশন,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 1|$$

$x_1 = 0, x_2 = 2 \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য,

$$f(x_1) = f(0) = |0 - 1| = |-1| = 1 \text{ এবং}$$

$$f(x_2) = f(2) = |2 - 1| = |1| = 1$$

$$f(x_1) = f(x_2) = 1, \text{ কিন্তু } x_1 \neq x_2.$$

অতএব, $f(x)$ এক-এক ফাংশন নয়।

$x \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য, $f(x) = |x - 1|$ এর
মান সকল বাস্তব সংখ্যা।

$$\text{রেজিম } f = \mathbb{R} \text{ অর্থাৎ } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

10(a) (viii) প্রদত্ত ফাংশন, $A = [-2, 2]$

$$B = [0, 4], f: A \rightarrow B, f(x) = x^2$$

$x_1 = -2, x_2 = 2 \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য,

$$f(x_1) = f(-2) = (-2)^2 = 4 \text{ এবং}$$

$$f(x_2) = f(2) = 2^2 = 4$$

$$f(x_1) = f(x_2) = 4, \text{ কিন্তু } x_1 \neq x_2$$

অতএব, $f(x)$ এক – এক ফাংশন নয়।

সকল $x \in$ ডোমেন f এর জন্য, $f(x) = x^2$ এর মান
অবশ্যগত্তে এবং $x \leq 4$

$$\text{রেজ} f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ এবং } x \leq 4\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\} = [0, 4] = B$$

$$f(A) = B$$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

10.(b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $f : A \rightarrow B$ ফাংশনটি $f(x) = x + 1$ দ্বারা
প্রকাশিত। ফাংশনটির ডোমেন এবং রেজ নির্ণয় কর।
ফাংশনটি কি এক–এক? [ক্ষ.'১২; প.ত.প. ০৫]

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = x + 1$

$$f(1) = 1 + 1 = 2, f(2) = 2 + 1 = 3$$

$$f(3) = 4, f(4) = 5$$

$$\text{ডোমেন } f = \{1, 2, 3, 4\} = A$$

$$\text{রেজ } f = \{2, 3, 4, 5\}$$

প্রতীয়মান হয় যে, $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের
জন্য $f(x) = x + 1$ এর ভিন্ন ভিন্ন মান পাওয়া যায়।

অতএব, $f(x)$ একটি এক – এক ফাংশন।

10(c) বাস্তব সংখ্যা সেট \mathbb{R} এর উপর $S = \{(x, y) : y = \sqrt{x}\}$
অন্ধয়ের ডোমেন এবং রেজ নির্ণয় কর।
 S^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : y = \sqrt{x}\}$

S সেটের বর্ণনাকারী শর্ত, $y = \sqrt{x}$.

$y = \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং
 $x \geq 0$ হয়।

$$\text{ডোমেন } S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

সকল $x \in$ ডোমেন S এর জন্য, $f(x) = x^2$ এর মান
অবশ্যগত্তে।

$$\text{রেজ } S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

$$\text{এখন, } y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$$

$$S^{-1} = \{(y, x) : x = y^2\}$$

x কে y দ্বারা y এবং x কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,
 $S^{-1} = \{(x, y) : y = x^2\}$

10.(d) $A = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ এবং $B = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

বাস্তব সংখ্যার সেট \mathbb{R} -এর দুইটি উপসেট এবং
 $f : A \rightarrow B$; যেখানে $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$. দেখাও যে,
ফাংশনটি এক–এক ও সার্বিক।

[জ. '০৯]

সমাধান: যেকোন $x_1, x_2 \in A = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ এর

জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ যদি ও কেবল যদি,
 $\frac{x_1-3}{2x_1+1} = \frac{x_2-3}{2x_2+1}$

$$\Rightarrow 2x_1x_2 - 6x_2 + x_1 - 3x_1 - 1 \\ = 2x_1x_2 - 6x_2 + x_1 - 3x_1 - 3$$

$$\Rightarrow 7x_1 = 7x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

অতএব, $f(x)$ একটি এক – এক ফাংশন।

$$\text{ধরি, } y = f(x) = \frac{x-3}{2x+1} \Rightarrow 2xy + y = x - 3$$

$$\Rightarrow (2y-1)x = -y-3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{1-2y}$$

$$\text{এখন, } x = \frac{y+3}{1-2y} \in A = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\} \text{ যদি ও}$$

কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং $1-2y \neq 0$ অর্থাৎ $y \neq \frac{1}{2}$.

$$\text{রেজ } f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} = B.$$

$$f(A) = B.$$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

10(e) $A = \mathbb{R} - \{3\}$ এবং $B = \mathbb{R} - \{1\}$ বাস্তব
সংখ্যার সেট \mathbb{R} -এর দুইটি উপসেট এবং $f : A \rightarrow B$;

যেখানে $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$. দেখাও যে, ফাংশনটি এক–
এক ও সার্বিক।

সমাধান: যেকোন $x_1, x_2 \in A = \mathbb{R} - \{3\}$ এর জন্য,

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ যদি ও কেবল যদি, } \frac{x_1-2}{x_1-3} = \frac{x_2-2}{x_2-3}$$

$$\Rightarrow x_1x_2 - 2x_2 - 3x_1 + 6$$

$$\begin{aligned}
 &= x_1x_2 - 2x_1 - 3x_2 + 6 \\
 \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \\
 \text{অতএব, } f(x) \text{ একটি এক-এক ফাংশন।} \\
 \text{ধরি, } y = f(x) = \frac{x-2}{x-3} \Rightarrow xy - 3y = x - 2 \\
 \Rightarrow (y-1)x = 3y - 2 \Rightarrow x = \frac{3y-2}{y-1} \\
 \text{এখন, } x = \frac{3y-2}{y-1} \in A = \mathbb{R} - \{3\} \text{ হবে যদি ও} \\
 \text{কেবল যদি } y \in \mathbb{R} \text{ এবং } y-1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1 \text{ হয়।} \\
 \text{ঋজু } f = \mathbb{R} - \{1\} = B.
 \end{aligned}$$

$$f(A) = B.$$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

11.(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত
করা হলে, মান নির্ণয় কর :

- (i) $f^{-1}(25)$ [কু. '০৫; ঘ. '১১]
(ii) $f^{-1}(-16)$ [ঘ. '০৮, '১১]
(iii) $f^{-1}([16,36])$ (iv) $f^{-1}(\{16,36\})$

সমাধান : (i) মনে করি, $f^{-1}(25) = x$
 $f(x) = 25$ [$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]
 $\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$
 $f^{-1}(25) = \{-5, 5\}$

(ii) মনে করি, $f^{-1}(-16) = x$

$$f(x) = -16 \Rightarrow x^2 = -16$$

x এর এমন কোন বাস্তব মান নেয় যার বর্গ ঋগ্যাত্মক।

$$f^{-1}(-16) = \emptyset$$

(iii) মনে করি, $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y}$
 $f^{-1}(y) = \pm \sqrt{y}$
 $[\quad y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$
 $f^{-1}(16) = \pm \sqrt{16} = \pm 4$ এবং
 $f^{-1}(36) = \pm \sqrt{36} = \pm 6$
 $f^{-1}([16,36]) = [-6, -4] \cup [4, 6]$
 $= \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x \leq -4 \text{ অথবা } 4 \leq x \leq 6\}$

(iv) মনে করি, $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y}$
 $f^{-1}(y) = \pm \sqrt{y}$
 $[\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$
 $f^{-1}(16) = \pm \sqrt{16} = \pm 4$ এবং
 $f^{-1}(36) = \pm \sqrt{36} = \pm 6$
 $f^{-1}(\{16,36\}) = \{-6, -4, 4, 6\}$ (Ans.)

11(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ কে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা
সংজ্ঞায়িত করা হলে, মান নির্ণয় কর :

- (i) $f^{-1}(5)$ [চ. '০০] (ii) $f^{-1}(0)$ [ঘ. '১১]
(iii) $f^{-1}([5,37])$ [ঘ. '১১]
(iv) $f^{-1}(-5)$ [কু. '০৩; ঘ. '০৮]
(v) $f^{-1}(10)$ [ঘ. '০৮] (vi) $f^{-1}(\{1,10\})$

(i) মনে করি, $f^{-1}(5) = x$
 $f(x) = 5$, [$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]
 $\Rightarrow x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$
 $f^{-1}(5) = \{-2, 2\}$

(ii) মনে করি, $f^{-1}(0) = x$
 $f(x) = 0$ [$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]
 $\Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$; যা x এর বাস্তব মানের
জন্য সম্ভব নয়।

$$f^{-1}(0) = \emptyset$$

(iii) মনে করি, $y = f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y-1}$
 $f^{-1}(y) = \pm \sqrt{y-1}$
 $[\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x]$
 $f^{-1}(5) = \pm \sqrt{5-1} = \pm 2$ এবং
 $f^{-1}(37) = \pm \sqrt{37-1} = \pm 6$
 $f^{-1}([16,36]) = [-6, -2] \cup [2, 6]$
 $= \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x \leq -2 \text{ অথবা } 2 \leq x \leq 6\}$

(iv) মনে করি, $f^{-1}(-5) = x$ $f(x) = -5$
 $[\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x]$

$\Rightarrow x^2 + 1 = -5 \Rightarrow x^2 = -6$; যা x এর বাস্তব মানের জন্য সম্ভব নয়।

$$f^{-1}(-5) = \emptyset$$

(v) মনে করি, $f^{-1}(10) = x \quad f(x) = 10$
 $[\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$

 $\Rightarrow x^2 + 1 = 10 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$
 $f^{-1}(10) = \{-3, 3\}$

(vi) মনে করি, $y = f(x) = x^2 + 1$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{y-1}$$

$$f^{-1}(y) = \pm \sqrt{y-1}$$

$$[\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$$

$$f^{-1}(1) = \pm \sqrt{1-1} = 0 \text{ এবং}$$

$$f^{-1}(10) = \pm \sqrt{10-1} = \pm 3$$

$$f^{-1}(\{1, 10\}) = \{-3, 0, 3\}$$

11.(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ কে $f(x) = x^2 - 7$ ঘারা সংজ্ঞায়িত করা হলে, মান নির্ণয় কর :

(i) $f^{-1}(2)$ [চ.'০৩; রা.'১০] (ii) $f^{-1}(-3)$

(i) মনে করি, $f^{-1}(2) = x$

$$f(x) = 2 \quad [\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$$

$$\Rightarrow x^2 - 7 = 2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$f^{-1}(2) = \{-3, 3\}$$

(ii) মনে করি, $f^{-1}(-3) = x$

$$f(x) = -3 \quad [\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$$

$$\Rightarrow x^2 - 7 = -3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\therefore f^{-1}(-3) = \{-2, 2\}$$

(d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^3 + 7$ ঘারা সংজ্ঞায়িত হলে $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(34)$ এবং $f^{-1}(-57)$ এর মান নির্ণয় কর। [প.ত.প.'০৮]

সমাধান : মনে করি, $y = f(x) = x^3 + 7$

$$x^3 = y - 7 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-7}$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-7}$$

$$[\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$$

y এর পরিবর্তে x লিখে পাই,

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-7} \quad (\text{Ans.})$$

$$f^{-1}(2) = \sqrt[3]{34-7} = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ এবং}$$

$$f^{-1}(-57) = \sqrt[3]{-57-7} = \sqrt[3]{-64} = -4$$

12(a) $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ হলে, দেখাও যে,

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right).$$

প্রমাণ : ধরি, $y = f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

$$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \cdots (1) \text{ এবং}$$

$$y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} = e^y$$

$$\Rightarrow e^y + x e^y = 1 - x \Rightarrow x + x e^y = 1 - e^y$$

$$\Rightarrow (1 + e^y)x = 1 - e^y \Rightarrow x = \frac{1 - e^y}{1 + e^y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1 - e^y}{1 + e^y} \quad [(1) \text{ ঘারা}]$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} \quad (\text{Showed})$$

12(b) $f(2x-1) = x+2$ হলে, $f(x+3)$ এবং $f^{-1}(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ : ধরি, $2x-1 = y \therefore f(y) = x+2$ এবং

$$2x = y+1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y+1)$$

$$\Rightarrow x+2 = 2 + \frac{1}{2}(y+1) = \frac{4+y+1}{2}$$

$$\Rightarrow f(y) = \frac{y+5}{2}$$

$$f(x+3) = \frac{x+3+5}{2} = \frac{x+8}{2} \quad (\text{Ans.})$$

$$\text{আবার, } f(2x-1) = x+2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x+2) = 2x-1$$

$$f^{-1}((x-2)+2) = 2(x-2)-1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 4 - 1 = 2x - 5 \text{ (Ans.)}$$

12(c) $\varphi(x) = \cot^{-1}(1 + x + x^2)$ হলে দেখাও যে,

$$\varphi(0) + 2\varphi(1) + \varphi(2) = \frac{\pi}{2} \quad [\text{স. } '09]$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\varphi(x) = \cot^{-1}(1 + x + x^2)$

$$\varphi(0) = \cot^{-1}(1 + 0 + 0) = \cot^{-1}(1) = \tan^{-1}(1)$$

$$\varphi(1) = \cot^{-1}(1 + 1 + 1) = \cot^{-1}(3) = \tan^{-1} \frac{1}{3}$$

$$\varphi(2) = \cot^{-1}(1 + 2 + 4) = \cot^{-1}(7) = \tan^{-1} \frac{1}{7}$$

$$\varphi(0) + 2\varphi(1) + \varphi(2)$$

$$= \tan^{-1}(1) + 2 \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{7}$$

$$= \{ \tan^{-1}(1) + \tan^{-1} \frac{1}{7} \} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{3}$$

$$= \tan^{-1} \frac{1 + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}} + \tan^{-1} \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - (\frac{1}{3})^2}$$

$$= \tan^{-1} \frac{7+1}{7-1} + \tan^{-1} \left(\frac{2}{3} \times \frac{9}{9-1} \right)$$

$$= \tan^{-1} \frac{4}{3} + \tan^{-1} \frac{6}{8} = \tan^{-1} \frac{4}{3} + \cot^{-1} \frac{4}{3}$$

$$\varphi(0) + 2\varphi(1) + \varphi(2) = \frac{\pi}{2} \text{ (Showed),}$$

$$[\because \tan^{-1} \theta + \cot^{-1} \theta = \frac{\pi}{2}]$$

12(d) যদি $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 0$ হয়, তবে

$f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর এবং $f^{-1}(\frac{1}{2})$ -এর মান নির্ণয় কর।

[রা.'11]

সমাধান : ধরি, $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$$y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 - y^2$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{1-y^2}, [\because -1 \leq x \leq 0]$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = -\sqrt{1-y^2} \quad f^{-1}(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

$$[\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$$

$$\text{এখন, } f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\sqrt{\frac{4-1}{4}}$$

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (Ans.)}$$

13. (a) $F = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ এবং $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1\}$. অস্বয় F এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। F^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান : F সেটের বর্ণনাকারী শর্ত $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{16} \Rightarrow y^2 = \frac{9}{16}(16 - x^2)$$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2} \dots \dots \dots (1)$$

$y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি

$$x \in \mathbb{R} \text{ এবং } 16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+4) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4 \text{ হয়।}$$

$$\text{ডোমেন } F = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 4\} = [-4, 4]$$

এখন, $x=0 \in$ ডোমেন F এর জন্য,

$$y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{16 - 0^2} = \pm \frac{3}{4} \times 4 = \pm 3 \quad \text{যা } F \text{ এর যথাক্রমে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান।}$$

$$\text{রেঞ্জ } F = [-3, 3]$$

$$F^{-1} = \{(y, x) : y \in [-3, 3], x \in [-4, 4]\} \text{ এবং}$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1\}$$

x কে y দ্বারা এবং y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$$F^{-1} = \{(x, y) : x \in [-3, 3], y \in [-4, 4]\} \text{ এবং}$$

$$\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1\}$$

$$F^{-1} = \{(x, y) : x \in [-3, 3], y \in [-4, 4]\}$$

$$\text{এবং } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1\}$$

$$13(b) f(x) = \sqrt{x^2 + 4} \text{ দ্বারা প্রকাশিত } f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

অস্বয়ের রেঞ্জ নির্ণয় কর। $f^{-1}([\sqrt{5}, \frac{5}{2}])$ ও নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

$f(0) = \sqrt{4} = 2$ যা $x \in [-2, 2]$ এর জন্য $f(x)$ অর্থাৎ রেঞ্জ f এর ক্ষুদ্রতম মান।

$$f(\pm 2) = \sqrt{(\pm 2)^2 + 4} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

যা $x \in [-2, 2]$ এর জন্য $f(x)$ অর্থাৎ রেঞ্জ f এর বৃহত্তম মান।

$$\text{রেঞ্জ } f = [2, 2\sqrt{2}]$$

মনে করি, $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

$$y^2 = x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = y^2 - 4$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 - 4}$$

$$f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y^2 - 4}$$

$$[y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)]$$

$$f^{-1}(\sqrt{5}) = \pm\sqrt{5-4} = \pm 1 \text{ এবং}$$

$$f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{25}{4}-4} = \pm\sqrt{\frac{25-16}{4}} = \pm\frac{3}{2}$$

$$f^{-1}\left([\sqrt{5}, \frac{5}{2}]\right) = \left[-\frac{3}{2}, -1\right] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

13(c) $f(x) = 5 - 3x$ দ্বারা প্রকাশিত $f: [-5, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয় কর। $f^{-1}([-4, \frac{1}{2}])$ ও নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = 5 - 3x$

$$f(-5) = 5 - 3 \times (-5) = 5 + 20 = 20$$

যা $x \in [-5, 3]$ এর জন্য $f(x)$ এর বৃহত্তম মান।

$$f(3) = 5 - 3 \times (3) = 5 - 9 = -4 \quad \text{যা } x \in [0, 2] \text{ এর জন্য } f(x) \text{ এর ক্ষুদ্রতম মান।}$$

রেঞ্জ $f = [-4, 20]$ (Ans.)

মনে করি, $y = f(x) \quad y = 5 - 3x$

$$\Rightarrow 3x = 5 - y \Rightarrow x = \frac{5-y}{3}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{5-y}{3}$$

$$[y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)]$$

$\therefore f^{-1}(-4) = \frac{5+4}{3} = 3$; যা $y \in [-4, \frac{1}{2}]$ এর

জন্য $f^{-1}(y)$ এর বৃহত্তম মান।

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5-\frac{1}{2}}{3} = \frac{9}{2 \times 3} = \frac{3}{2}; \text{ যা } y \in [-4, \frac{1}{2}]$$

এর জন্য $f^{-1}(y)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

$$f^{-1}\left([-4, \frac{1}{2}]\right) = \left[\frac{3}{2}, 3\right] \text{ (Ans.)}$$

13(d) $f(x) = 2x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয় কর। $f^{-1}\left(\left[\frac{3}{2}, 3\right]\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = 2x^2 + 1$

$$f(0) = 2 \times (0)^2 + 1 = 1; \text{ যা } x \in [0, 2] \text{ এর জন্য } f(x) \text{ এর ক্ষুদ্রতম মান।}$$

$f(2) = 2 \times (2)^2 + 1 = 9$; যা $x \in [0, 2]$ এর জন্য $f(x)$ এর বৃহত্তম মান।

$$\text{রেঞ্জ } f = [1, 9] \text{ (Ans.)}$$

$$\text{মনে করি, } y = f(x) \quad y = 2x^2 + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 = y - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{y-1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{y-1}{2}} \quad [x \in [0, 2]]$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y-1}{2}}$$

$$[y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)]$$

$$\therefore f^{-1}(3) = \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1; \text{ যা } y \in [\frac{3}{2}, 3]$$

এর জন্য $f^{-1}(y)$ এর বৃহত্তম মান।

$$f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}-1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}; \text{ যা } y \in [\frac{3}{2}, 3]$$

এর জন্য $f^{-1}(y)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

$$f^{-1}\left(\left[\frac{3}{2}, 3\right]\right) = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ (Ans.)}$$

14(a) $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x+2$ হলে $f(x+3)$ এবং

$f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $\frac{1-x}{1+x} = y \Rightarrow f(y) = x + 2$

এবং $y + x = 1 - x \Rightarrow x(y + 1) = 1 - y$

$$\Rightarrow x = \frac{1-y}{1+y} \Rightarrow x + 2 = \frac{1-y}{1+y} + 2$$

$$\Rightarrow f(y) = \frac{1-y+2+2y}{1+y} [\because f(y) = x + 2]$$

$$\Rightarrow f(y) = \frac{3+y}{1+y}$$

$$f(x+3) = \frac{3+(x+3)}{1+(x+3)} = \frac{x+6}{x+4} \quad (\text{Ans.})$$

২য় অংশ: দেওয়া আছে, $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x + 2$

$$\Rightarrow f^{-1}(x+2) = \frac{1-x}{1+x}$$

$$f^{-1}\{(x-2)+2\} = \frac{1-(x-2)}{1+(x-2)}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3-x}{x-1} \quad (\text{Ans.})$$

14 (b) $f(2x-1) = x+2$ হলে $f(x+3)$ এবং $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $2x-1 = y \Rightarrow f(y) = x+2$

এবং $2x = y+1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$

$$\Rightarrow x+2 = \frac{y+1}{2} + 2$$

$$\Rightarrow f(y) = \frac{y+1+4}{2} [\because f(y) = x+2]$$

$$\Rightarrow f(y) = \frac{y+5}{2}$$

$$f(x+3) = \frac{(x+3)+5}{2} = \frac{x+8}{2} \quad (\text{Ans.})$$

২য় অংশ: দেওয়া আছে, $f(2x-1) = x+2$

$$\Rightarrow f^{-1}(x+2) = 2x-1$$

$$f^{-1}\{(x-2)+2\} = 2(x-2)-1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2x-5 \quad (\text{Ans.})$$

14(c) দেখাও যে, $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ এবং $f: A \rightarrow A, f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশনের $f^{-1}(x)$ বিদ্যমান। $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

যেকোন $x_1, x_2 \in A$ এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি, $x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ হয়। [$\because x \geq 0$]

$f(x)$ একটি এক- এক ফাংশন।

ধরি, $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x^2 = y$

$$\Rightarrow x = \sqrt{y} \dots\dots (1) \quad [\because x \geq 0]$$

এখন, $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি, $y \in \mathbb{R}$ এবং $y \geq 0$

রেঞ্জ $f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = A$
 $f(A) = A$

$f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

যেহেতু $f(x)$ একটি এক - এক ও সার্বিক ফাংশন
সূতরাং $f(x)$ -এর বিপরীত ফাংশন বিদ্যমান।

এখন (1) হতে পাই, $x = \sqrt{y}$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad [\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থান করে পাই, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

14 (d) $A, B \subseteq \mathbb{R}$ এবং $f(x) : A \rightarrow B$ হলে
এবং (i) $f(x) = \sqrt{x-2}$ (ii) $f(x) = x^2$
(iii) $f(x) = (x-1)^2$ ফাংশনগুলোর বিপরীত ফাংশন
 $f^{-1}(x)$ বিদ্যমান থাকলে A এবং B সেটের মান
নির্ণয় কর ; যেখানে A বৃত্তম।

(i) যেহেতু $f(x) = \sqrt{x-2}$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন
 f^{-1} বিদ্যমান সূতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি এক - এক
এবং সার্বিক।

রেঞ্জ $f = B$.

এখন, $f(x) = \sqrt{x-2} \in B$ হবে যদি ও কেবল যদি,
 $x \in A$ এবং $x-2 \geq 0$ i.e., $x \geq 2$ হয়।

ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$

ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$ এর জন্য, $f(x) = \sqrt{x-2}$ একটি এক - এক ফাংশন।

$A = \text{ডোমেন } f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$

$x \in \text{ডোমেন } f$ এর জন্য, $f(x)$ এর মান অস্থগাতাক।

রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

(ii) যেহেতু $f(x) = x^2$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান, সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি এক - এক এবং সার্বিক।

$$\text{রেঞ্জ } f = B$$

এখন, $f(x) = x^2 \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ডোমেন } f = \mathbb{R}$$

ডোমেন $f = \mathbb{R}$ এর জন্য, $f(x) = x^2$ ফাংশনটি এক - এক নয়।

কিন্তু ডোমেন f -এর সর্বাধিক মান $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ অথবা $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ এর জন্য $f(x) = x^2$ ফাংশনটি এক - এক।

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \text{ অথবা } A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

$x \in \text{ডোমেন } f$ এর জন্য, $f(x)$ -এর মান অস্থগাতাক।

$$\text{রেঞ্জ } f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

(iii) যেহেতু $f(x) = (x-1)^2$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান, সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি এক - এক এবং সার্বিক।

$$\text{রেঞ্জ } f = B$$

এখন, $f(x) = (x-1)^2 \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি, $x \in \mathbb{R}$

$$\text{ডোমেন } f = \mathbb{R}$$

ডোমেন $f = \mathbb{R}$ -এর জন্য, পদত্তি ফাংশন $f(x) = (x-1)^2$ এক - এক নয়।

কিন্তু ডোমেন f -এর সর্বাধিক মান $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ অথবা $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$ এর জন্য $f(x) = (x-1)^2$ ফাংশনটি এক - এক।

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \text{ অথবা } A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$$

$x \in \text{ডোমেন } f$ এর জন্য, $f(x)$ এর মান অস্থগাতাক।

$$\text{রেঞ্জ } f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

15. নিম্নের অস্থয়গুলোর লেখ অঙ্কন কর। কোনগুলো ফাংশন এবং কোনগুলো ফাংশন নয় তা লেখচিত্র থেকে কালসহ উল্লেখ কর।

সমাধান :

(a) নিচের তালিকায় $x \in [-3, 3]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = x^2$ এর প্রতিবৃত্তি মান নির্ণয় করি।

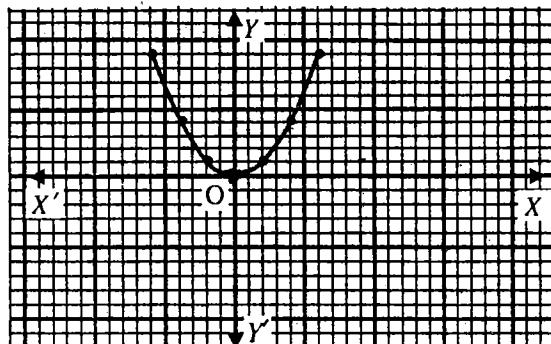
x	± 3	± 2	± 1	0
$y = x^2$	9	4	1	0

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ :

x -অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

y -অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 1 একক।



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $R = \{(x, y) : y = x^2 \text{ এবং } -3 \leq x \leq 3\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

$-3 \leq x \leq 3$ সীমার মধ্যে y -অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উল্লম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রিটির একটি মাত্র বিন্দু আছে। অতএব, প্রদত্ত অন্বয় একটি ফাংশন।

15(b) নিচের তালিকায় $x \in [0, 4]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y^2 = x \Rightarrow y = \pm \sqrt{x}$ এর প্রতিবৃত্তি মান নির্ণয় করি :

x	0	1	2	3	4
$y = \pm \sqrt{x}$	0	± 1	± 1.42	± 1.73	± 2

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

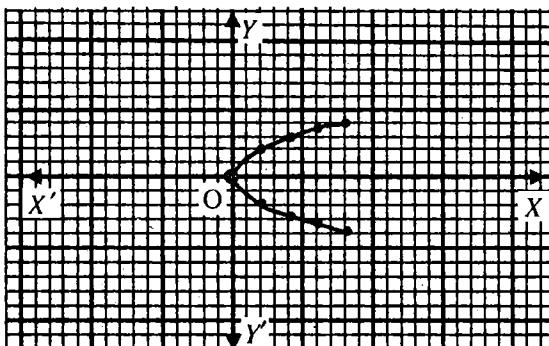
স্কেল নির্ধারণ :

x -অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

y -অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে

বক্রাকারে যোগ করে $R = \{(x, y) : y^2 = x \text{ এবং } 0 \leq x \leq 4\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।



$0 < x \leq 4$ সীমার মধ্যে y -অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উল্লম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্দরের লেখচিত্রটির একটি মাত্র বিন্দু আছে। অতএব, প্রদত্ত অন্দর ফাংশন নয়।

15(c) নিচের তালিকায় $x \in [0, 4]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y^2 = x \Rightarrow y = \sqrt{x} \quad (y \geq 0)$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

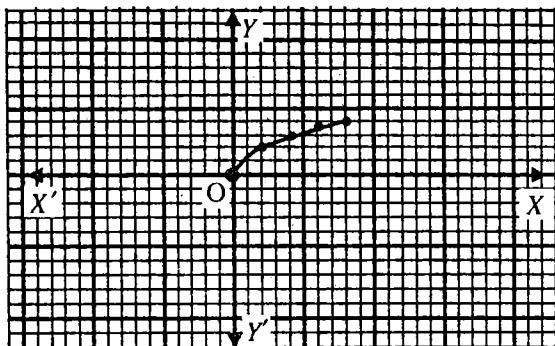
x	0	1	2	3	4
$y = \sqrt{x}$	0	1	1.42	1.73	2

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নির্ধারণ :

x -অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু $= 1$ একক।

y -অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু $= 1$ একক।

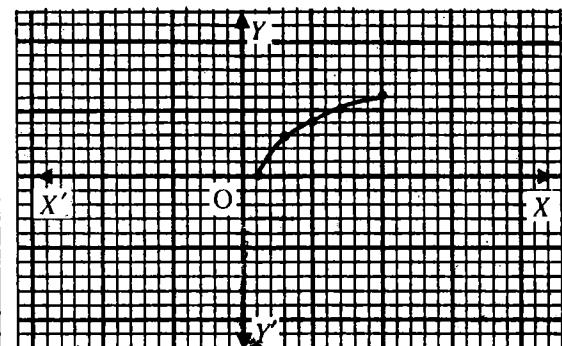


এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $R = \{(x, y) : y^2 = x, 0 \leq x \leq 4 \text{ এবং } y \geq 0\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

$0 \leq x \leq 4$ সীমার মধ্যে y -অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উল্লম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্দরের লেখচিত্রটির একটি মাত্র বিন্দু আছে। অতএব, প্রদত্ত অন্দর একটি ফাংশন।

15(d) নিচের তালিকায় $x \in [0, 10]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = \sqrt{x-1}$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি

x	1	3	5	7	10
$y = \sqrt{x-1}$	0	1.42	2	2.45	3



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $R = \{(x, y) : y = \sqrt{x-1} \text{ এবং } 1 \leq x \leq 10\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

$1 \leq x \leq 10$ সীমার মধ্যে y -অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উল্লম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্দরের লেখচিত্রটির একটি মাত্র বিন্দু আছে। অতএব, প্রদত্ত অন্দর একটি ফাংশন।

15(e) প্রদত্ত অন্দর R এর বর্ণনাকারী সমীকরণ

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \text{ একটি বৃত্ত, যার কেন্দ্রের স্থানাংক } (1, -2) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } 3.$$

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

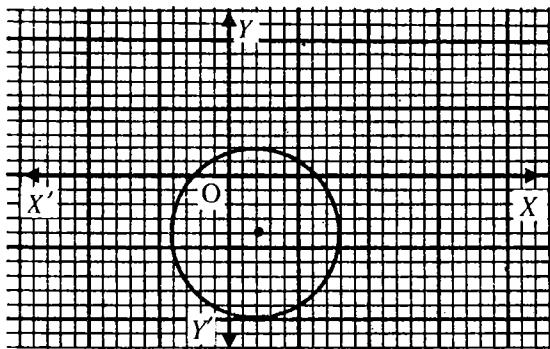
স্কেল নির্ধারণ :

x -অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু $= 1$ একক।

y -অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু $= 1$ একক।

$(1, -2)$ বিন্দুকে কেন্দ্র করে 3 একক ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি।

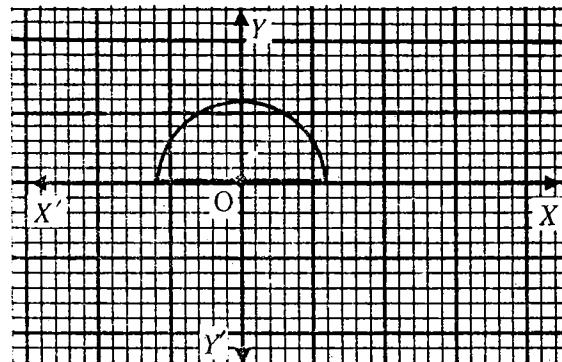
$R = \{(x, y) : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।



$2 < x < 4$ সীমার মধ্যে y -অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উল্লম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একাধিক (দুইটি) বিন্দু আছে। অতএব, প্রদত্ত অন্বয় ফাংশন নয়।

15(f) প্রদত্ত অন্বয় R এর বর্ণনাকারী শর্ত $x^2 + y^2 = 9$ এবং $y \geq 0$ একটি অর্ধবৃত্ত ধার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ 3

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁক।



চৰকল নির্ধারণ ৪:

x -অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

y -অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

y -অক্ষের সমান্তরাল কোন সরললেখা প্রদত্ত অন্বয়ের লেখকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করেন। অতএব প্রদত্ত অন্বয় একটি ফাংশন।

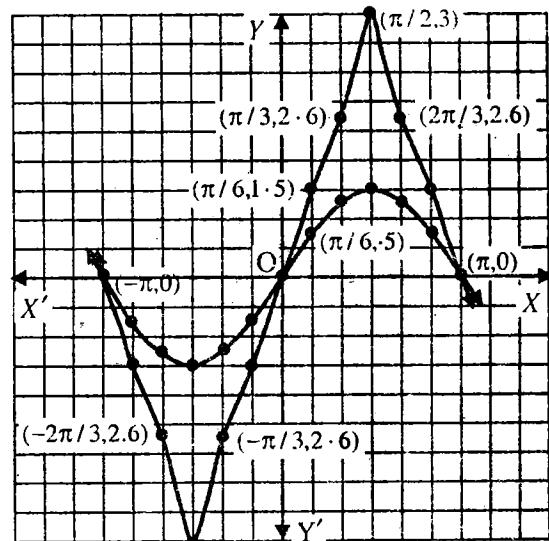
$y \geq 0$ সীমার মধ্যে y -অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উল্লম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একটি মাত্র বিন্দু আছে। অতএব, প্রদত্ত অন্বয় একটি ফাংশন।

16. (a) $y = \sin x$, $-\pi \leq x \leq \pi$ এর গ্রাফ হতে $y = 3 \sin x$ এর ধার্ঘ অঙ্কন কর।

সমাধান: x -অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের এক বাহু = 30°

এবং y -অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 3 বাহু = 1 ধরে।
 $y = \sin x$, $-\pi \leq x \leq \pi$ লেখচিত্র অঙ্কন করি।

$y = \sin x$ এর বৃপ্তাভ্যরিত ফাংশন $y = 3 \sin x$, y অক্ষের দিকে সংকুচিত হয়। $y = \sin x$ লেখের প্রতিটি বিন্দুর y -স্থানাঙ্ককে 3 গুণ বৃদ্ধি করে বিন্দুটিকে উপরের দিকে সরিয়ে $y = 3 \sin x$ লেখ নিচে অঙ্কন করা হলো।।



(b) $y = e^x$ এর লেখ হতে $y = \ln x$ এর লেখ অঙ্কন কর।

নিচের তালিকায় x এর ডিম্ব ডিম্ব মানের জন্য $y = e^x$ এর প্রতিবূপী মান নির্ণয় করি:

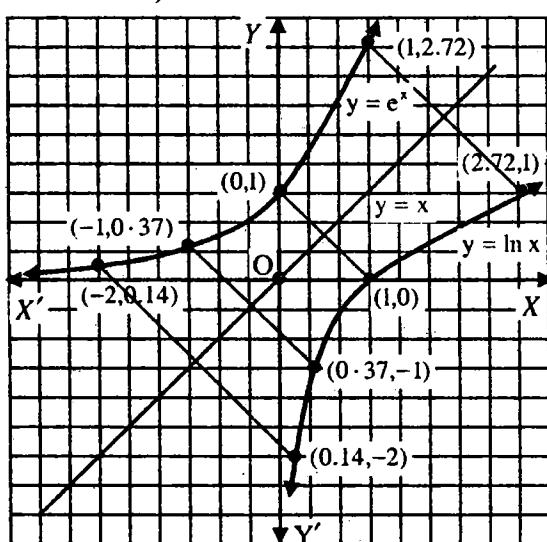
x	-2	-1	0	1	2
$y = e^x$	0.14	0.37	1	2.72	7.39

x -অক্ষ ও y -অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 3 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেসিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হলে বক্রাকারে যোগ করে $f(x) = e^x$ এর লেখ অঙ্কন করি।

$f(x) = e^x$ ফাংশনের লেখের উপরস্থ (-2, 0.14), (-1, 0.37), (0,1) ও (1, 2.72) বিন্দুগুলির x স্থান ও y স্থানাঙ্কের স্থান বিনিময় করে যথাক্রমে (0.14, -2) (0.37, -1), (1,0) ও (2.72,1) বিন্দুগুলি ছক

কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেপিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f(x) = e^x$ এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \ln x$ এর লেখ অঙ্কন করা হলো। (অন্যভাবে, $y = x$ সরলরেখা হতে $(-2, 0.14)$

$(-1, 0.37), (0, 1)$ ও $(1, 2.72)$ বিন্দুগুলির সমন্বয়ে বিন্দুগুলির সাহায্যে $f^{-1}(x) = \ln x$ এর লেখ অঙ্কন করা যায়।)



17. ফাংশনগুলির পর্যায় নির্ণয় কর: (a) $\sin(5\theta + \frac{\pi}{4})$ (b) $7 \tan(-3\theta)$ (c) $\cos \frac{1}{2}\theta \tan \theta$

সমাধান: (a) ধরি, $f(\theta) = \sin(5\theta + \frac{\pi}{4})$

$$f(\theta) = \sin(5\theta + \frac{\pi}{4} + 2\pi)$$

$\because \sin \theta$ এর পর্যায় 2π

$$= \sin 5(\theta + \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}) = f(\theta + \frac{2\pi}{5})$$

$\sin(5\theta + \frac{\pi}{4})$ এর পর্যায় $\frac{2\pi}{5}$.

- (b) ধরি, $f(\theta) = 7 \tan(-3\theta)$

$$f(\theta) = 7 \tan(-3\theta + \pi)$$

$\because \tan \theta$ এর পর্যায় π

$$= 7 \tan 3(-\theta + \frac{\pi}{3}) = f(\theta + \frac{\pi}{3})$$

$7 \tan(-3\theta)$ এর পর্যায় $\frac{\pi}{3}$.

$$(c) \text{ ধরি, } f(\theta) = \cos \frac{1}{2}\theta \tan \theta$$

$$\cos \frac{1}{2}\theta = \cos(\frac{1}{2}\theta + 2\pi) = \cos \frac{1}{2}(\theta + 4\pi)$$

$[\because \sin \theta$ এর পর্যায় $2\pi]$

$$\text{এবং } \tan \theta = \tan(\theta + \pi) = \tan(\theta + 2\pi)$$

$$= \tan(\theta + 3\pi) = \tan(\theta + 4\pi)$$

$[\because \tan \theta$ এর পর্যায় $\pi]$

$$f(\theta) = \cos \frac{1}{2}(\theta + 4\pi) \tan(\theta + 4\pi)$$

$$= f(\theta + 4\pi)$$

$\cos \frac{1}{2}\theta \tan \theta$ এর পর্যায় 4π .

18. দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 3x + 1$,

$$g(x) = 2x - 3.$$

- (a) $g(\frac{1}{2})$ এর মান নির্ণয় কর। $f(x) = 19$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর।

- (b) $(g \circ f)(2)$ এবং $(f \circ g)(2)$ নির্ণয় কর।

[চ.'০৭; ব.'১২; দি.'১৩]

- (c) $f(x)$ ফাংশনের এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $f(x+4)$ ও $f(x-4)$ এর ক্ষেত্রে অঙ্কন কর।

সমাধান: (a) দেওয়া আছে, $g(x) = 2x - 3$

$$g(\frac{1}{2}) = 2 \times \frac{1}{2} - 3 = 1 - 3 = -2$$

$$f(x) = 19 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 19$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (x+6)(x-3) = 0$$

$$x+6=0 \text{ হলে, } x=-6$$

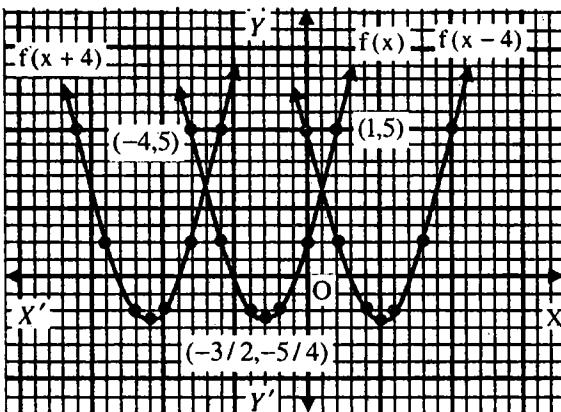
$$x-3=0 \text{ হলে, } x=3.$$

- (b) ৮(c) দ্রষ্টব্য।

- (c) নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এর প্রতিবৃত্তী মান নির্ণয় করি :

x	0	-1	-2	-3	1	-4	$\frac{3}{2}$
$f(x) = x^2 + 3x + 1$	1	-1	-1	1	5	5	$\frac{5}{4}$

x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেসিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এর ক্ষেত্র অঙ্কন করি ।



$f(x)$ ফাংশনের লেখের প্রতিটি বিন্দুকে 4 একক অর্থাৎ 8 ঘর বামে সরিয়ে $f(x)$ এর রূপান্তরিত ফাংশন $f(x+4)$ এবং 4 একক অর্থাৎ 8 ঘর ডানে সরিয়ে $f(x-4)$ এর ক্ষেত্র অঙ্কন করা হলো ।

19. দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$.

(a) $g^{-1}(\{-1, 8\})$ এর মান নির্ণয় কর ।

(b) $(fog)(x)$ এবং $(gof)(x)$ নির্ণয় কর । প্রথম

[চ.'০৯ ; সি.'০৫ ; ব.'০৯]

(c) $g(x)$ ফাংশনের এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $g(2x)$ ও $f(0.5x)$ এর ক্ষেত্র অঙ্কন কর ।

সমাধান : ধরি, $y = g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = y + 1$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{y+1}$$

$$g^{-1}(y) = \pm \sqrt{y+1}$$

www.boighar.com [$y = g(x)$ iff $x = g^{-1}(y)$]

$$\text{এখন}, g^{-1}(-1) = \pm \sqrt{-1+1} = 0 \text{ এবং}$$

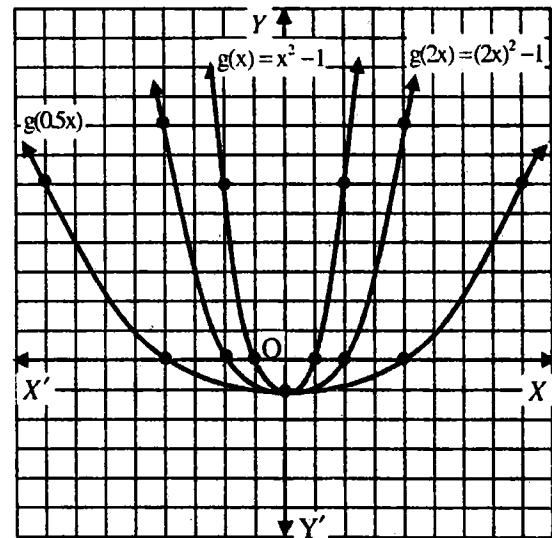
$$g^{-1}(8) = \pm \sqrt{8+1} = \pm \sqrt{9} = \pm 3$$

$$g^{-1}(\{-1, 8\}) = \{-3, 0, 3\}$$

(b) 9(e) দ্রষ্টব্য ।

$$f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^2 - 1$$

(c) x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে $g(x)$ ফাংশনের এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $g(2x)$ ও $g(0.5x)$ এর নিচে ক্ষেত্র অঙ্কন করা হলো ।



20. $f: \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ কে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে ,

সমাধান : (a) $x = 0$ হলে $f(0) = 0 + 1 = 1$, যা $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান এবং $x > 0$ হলে $f(x) > 1$.

$f(x)$ এর রেজেন্সি = $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$

(b) মনে করি, $y = f(x) = x^2 + 1$

$$\Rightarrow x^2 = y - 1 \Rightarrow x = \sqrt{y-1}, [\because x \geq 0]$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$$

[$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$$f^{-1}(1) = \sqrt{1-1} = 0 \text{ এবং}$$

$$f^{-1}(10) = \sqrt{10-1} = 3$$

$$f^{-1}([1,10]) = [0, 3] \text{ এবং}$$

$$f^{-1}(\{1,10\}) = \{0,3\}$$

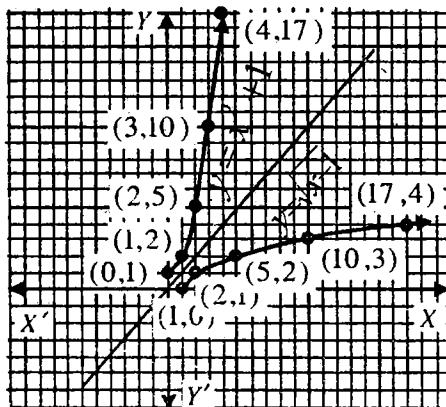
(c) $f(x)$ এর লেখচিত্র থেকে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

2. সংযুক্ত তালিকায় $x \geq 0$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = x^2 + 1$ এর প্রতিবৃত্তী মান নির্ণয় করি :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	5	10	17

x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেসিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = x^2 + 1$ এর লেখ অঙ্কন করি।



$y = x$ সরলরেখার লেখ অঙ্কন করি। $y = x$ রেখা হতে $(0, 1), (1, 2), (2, 5), (3, 10), (4, 17)$ ইত্যাদি বিন্দুগুলির সমদূরবর্তী যথাক্রমে $(1,0), (2,1), (5,2), (10,3), (17,4)$ ইত্যাদি বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f(x)$ এর লেখ থেকে $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x}$ এর লেখ অঙ্কন করা হলো।

ব্যবহারিক অনুশীলনী

1. $y = -x^2$ ফাংশনের এবং বৃপ্তান্তরিত $y = -(x+3)^2$ ও $y = (x-3)^2$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

পরীক্ষণের নাম : $y = -x^2$ ফাংশনের ও বৃপ্তান্তরিত $y = -(x+3)^2$ ও $y = (x-3)^2$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

মূলতন্ত্র : $y = -x^2$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে এবং অক্ষ y -অক্ষ। $y = -x^2$ এর লেখ নিজের সমান্তরালে 3 একক বামে সরিয়ে দিয়ে $y = -(x+3)^2$ পরাবৃত্তের লেখ পাওয়া যায় যার শীর্ষবিন্দু $(-3, 0)$ । আবার, x অক্ষের সাপেক্ষে $y = -x^2$ এর প্রতিচ্ছবি $y = x^2$ এর লেখকে 3 একক ডানে সরিয়ে দিয়ে $y = (x-3)^2$ পরাবৃত্তের লেখ পাওয়া যায় যার শীর্ষবিন্দু $(3, 0)$ ।

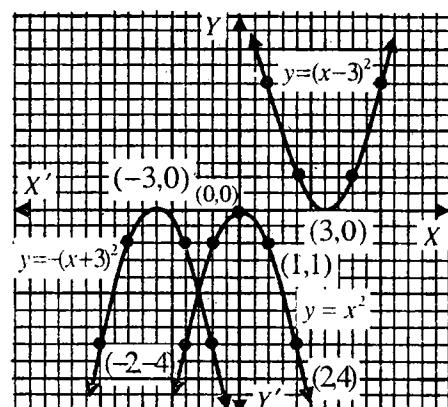
প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেসিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইয়েজার (v) শার্পনার (vi) পেপিল কম্পাস (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি :

- একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।
- নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = -x^2$ এর প্রতিবৃত্তী মান নির্ণয় করি :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	-1	0	-1	-4

3. x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেসিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = -x^2$ এর লেখ অঙ্কন করি।



4. লেখচিত্র প্রতিটি বিন্দুকে 2×3 বা 6 বর্গের বাহুর সমান অর্থাৎ 3 একক বাম দিকে সরিয়ে $y = -(x + 3)^2$ এর লেখ অঙ্কন করি।

5. আবার, x অক্ষের সাপেক্ষে $y = -x^2$ এর প্রতিচ্ছবি $y = x^2$ এর লেখের প্রতিটি বিন্দুকে 2×3 বা 6 বর্গের বাহুর সমান অর্থাৎ 3 একক ডানে সরিয়ে দিয়ে $y = (x - 3)^2$ এর লেখ অঙ্কন করি।

বৈশিষ্ট্য : (i) লেখচিত্র তিনটি পরাবৃত্ত। $y = -x^2$ এর শীর্ষবিন্দু $(0, 0)$, $y = -(x + 3)^2$ এর শীর্ষবিন্দু $(-3, 0)$ এবং $y = (x - 3)^2$ এর শীর্ষবিন্দু $(3, 0)$ ।
(ii) $y = -x^2$ এর লেখ y অক্ষের সাপেক্ষে, $y = -(x + 3)^2$ এর লেখ $x = -3$ রেখার সাপেক্ষে ও $y = (x - 3)^2$ এর লেখ $x = 3$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

2. $y = x^2$ ফাংশনের ও বৃপ্তান্তরিত $y = -2x^2 + 4x - 5$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

পরীক্ষণের নাম : $y = x^2$ ফাংশনের ও বৃপ্তান্তরিত $y = -2x^2 + 4x - 5$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

মূলতত্ত্ব : $y = x^2$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে এবং অক্ষ y -অক্ষ। $y = x^2$ এর লেখ থেকে $y = -2x^2 + 4x - 5 = -2(x^2 - 2x + 1) - 3 = -2(x - 1)^2 - 3$ এর লেখ অঙ্কন করা যায়।

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেসিল (ii) স্কেল (iii) ধারণ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেসিল কম্পাস (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি :

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

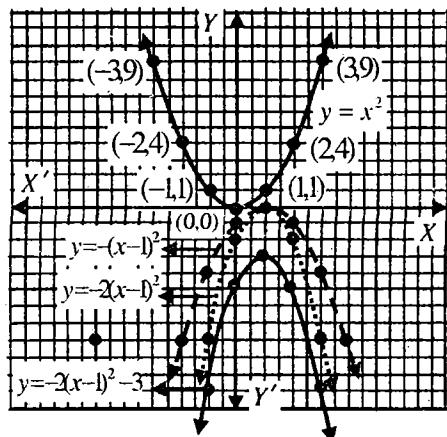
2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = x^2$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	± 1	± 2	± 3
$f(x)$	0	1	4	9

3. x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক

ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সবু পেসিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = x^2$ এর লেখ অঙ্কন করি।

4. x অক্ষের সাপেক্ষে $y = x^2$ এর প্রতিচ্ছবি $y = -x^2$ এর লেখের প্রতিটি বিন্দুকে 2×1 বা 2 বর্গের বাহুর সমান অর্থাৎ 1 একক ডানে সরিয়ে দিয়ে $y = -(x - 1)^2$ এর লেখ অঙ্কন করি। এ লেখকে y অক্ষের দিকে 2 গুণ সংকৃতিত করে $y = -2(x - 1)^2$ এর লেখ অঙ্কন করি। সর্বশেষে এ লেখের প্রতিটি বিন্দুকে 3 একক নিচে স্থানান্তরিত করে $y = -2(x - 1)^2 - 3$ এর লেখ অঙ্কন করা হলো।



বৈশিষ্ট্য : (i) লেখচিত্র দুইটি পরাবৃত্ত। $y = x^2$ এর শীর্ষবিন্দু $(0, 0)$, এবং $y = -2(x - 1)^2 - 3$ এর শীর্ষবিন্দু $(1, -3)$ ।

(ii) $y = x^2$ এর লেখ y অক্ষের সাপেক্ষে, $y = y = -2(x - 1)^2 - 3$ এর লেখ $x = 1$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

3. একই লেখচিত্রে $y = 2x + 5$ ফাংশনের ও তার বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

পরীক্ষণের নাম : একই লেখচিত্রে $f(x) = y = 2x + 5$ ফাংশনের ও তার বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$ এর লেখচিত্র অঙ্কন

মূলতন্ত্র : $f(x) = 2x + 5$ লেখের উপরস্থি বিদ্যুগুলির ভূজ
ও কোটির স্থান বিনিময় করে $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$ এর
লেখচিত্র অঙ্কন করা যায় অথবা $y = x$ রেখার সাপেক্ষে
 $f(x) = 2x + 5$ এর প্রতিচ্ছবি অঙ্কন করে
 $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$ এর লেখ পাওয়া যায়।

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেসিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ
পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেসিল কম্পাস
(vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

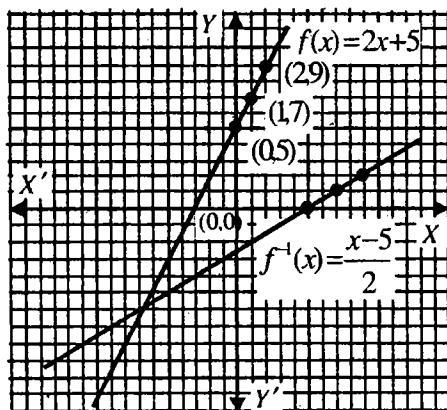
কার্যপদ্ধতি :

- একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আকি।
- নিচের তালিকায় x এর ভিত্তি তিনি মানের জন্য $y = 2x + 5$ এর প্রতিবৃত্তী মান নির্ণয় করি।

x	0	1	2
y	5	7	9

- x -অক্ষ ও y -অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিদ্যুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেসিল দিয়ে স্থাপিত বিদ্যুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = 2x + 5$ এর লেখ অঙ্কন করি।
- একই স্কেলে $(5, 0), (7, 1), (9, 2)$ বিদ্যুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেসিল দিয়ে স্থাপিত বিদ্যুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে

$$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2} \text{ এর লেখ অঙ্কন করি।}$$



4. $y = 5^x$ সূচক ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম : $y = 5^x$ ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয়।

মূলতন্ত্র : x এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য $f(x) = 5^x$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে এবং লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় করতে হবে।

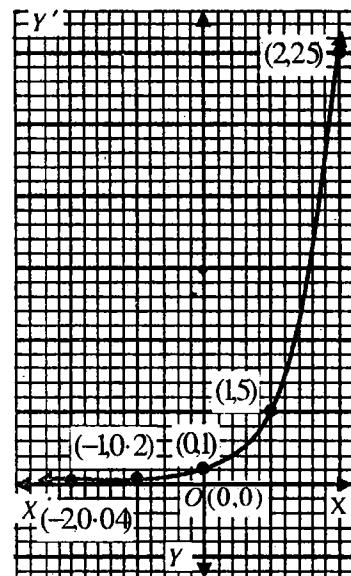
প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেসিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ
পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেসিল কম্পাস
(vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি :

- একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আকি।
- নিচের তালিকায় x এর ভিত্তি তিনি মানের জন্য $y = 5^x$ এর প্রতিবৃত্তী মান নির্ণয় করি।

x	-2	-1	0	1	2
y	0.04	0.2	1	5	25

- x -অক্ষ ও y -অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিদ্যুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেসিল দিয়ে স্থাপিত বিদ্যুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f(x) = 5^x$ এর লেখ অঙ্কন করি।



- বৈশিষ্ট্য :** (1) লেখচিত্রটি x অক্ষের নিচে আসবে না।
(2) x অক্ষটি লেখচিত্রের একটি অসীমতট রেখা।

- (3) লেখচিত্রটি y অক্ষকে $(0, 1)$ কিন্দুতে হেদ করে।
 (4) x অক্ষ বা y অক্ষের সাপেক্ষে লেখচিত্রটি প্রতিসম নয়।
 (v) লেখচিত্রটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিদ্যমান।

5. $y = \log_{10} x$ লগারিদমিক ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয়।

পরীক্ষণের নাম : $y = \log_{10} x$ লগারিদমিক ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয়।

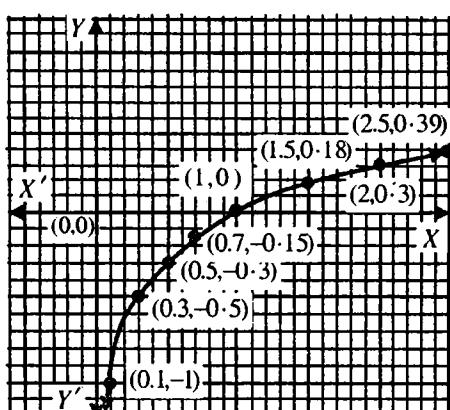
মূলতত্ত্ব : $y = \log_{10} x$ সমীকরণটি $x \leq 0$ এর জন্য অসংজ্ঞায়িত হয় বিধায় $x > 0$ এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য $y = \log_{10} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে এবং লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় করতে হবে।

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেসিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেসিল কম্পাস (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ৪

- একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।
- নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x) = \log_{10} x$ এর প্রতিবৃত্তী মান নির্ণয় করি।

x	0.1	0.3	0.5	0.7
$\log_{10} x$	-1	-0.5	-0.3	-0.15
x	1	1.5	2	2.5
$\log_{10} x$	0	0.18	0.3	0.39



3. x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 10° একক ধরে তালিকাভুক্ত কিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেসিল দিয়ে স্থাপিত কিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = \log_{10} x$ এর লেখ অঙ্কন করি।

বৈশিষ্ট্য : (i) লেখচিত্রটি x অক্ষ বা y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম নয়।

(ii) লেখচিত্রটি ১ম চতুর্ভাগ ও ৪র্থ চতুর্ভাগে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

(iii) লেখচিত্রটি x অক্ষকে $(1, 0)$ কিন্দুতে হেদ করে।

(iv) y অক্ষ লেখচিত্রে একটি অসীমতট রেখা।

(v) লেখচিত্রটি y অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিদ্যমান।

6. $y = \cos^{-1} x$ ত্রিকোণমিতিক ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয়।

পরীক্ষণের নাম : $y = \cos^{-1} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয়, যখন $-1 \leq x \leq 1$.

মূলতত্ত্ব : $x \in [-1, 1]$ এর বিভিন্ন বাস্তব মানের জন্য $y = \cos^{-1} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে এবং লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় করতে হবে।

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেসিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

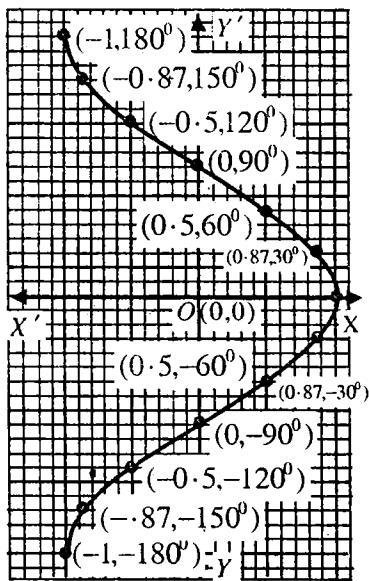
- একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

- নিচের তালিকায় $x \in [-1, 1]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = \cos^{-1} x$ এর প্রতিবৃত্তী মান নির্ণয় করি।

x	-1	-0.87	-0.5	0
y	$\pm 180^\circ$	$\pm 150^\circ$	$\pm 120^\circ$	$\pm 90^\circ$
x	0.5	0.87	1	
y	$\pm 60^\circ$	$\pm 30^\circ$	90°	

3. x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 10° একক ধরে তালিকাভুক্ত কিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেসিল দিয়ে স্থাপিত কিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = \cos^{-1} x$ এর লেখ অঙ্কন করি।

হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = \cos^{-1} x$ এর লেখ অঙ্কন করি।



বৈশিষ্ট্য : (i) লেখচিত্রটি অবিছ্নিল। (ii) লেখচিত্রটি ঢেউয়ের আকৃতি। (iii) লেখচিত্রটি মূলবিন্দুগামী নয়।

৭. $y = |2x - 1|$ পরমমান ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয়।

পরীক্ষণের নাম : $y = |x|$ পরমমান ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব : $y = |2x - 1|$ সমীকরণে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান অঞ্চলাত্মক।

$$|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1, & \text{যখন } 2x - 1 \geq 0 \\ -(2x - 1)x, & \text{যখন } 2x - 1 < 0 \end{cases}$$

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেসিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি :

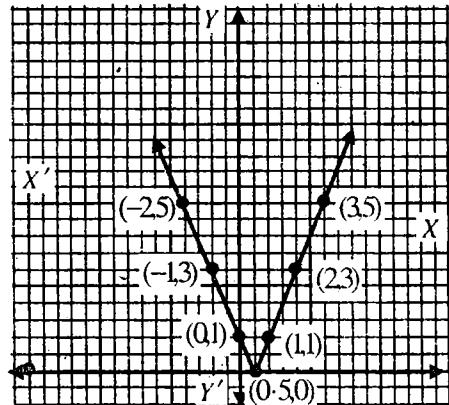
১. একটি ছক কাগজে স্থান করে অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' অঁকি।

২. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = |2x - 1|$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি।

x	0	-2	-1	1	2	3	0.5
y	1	5	3	1	3	5	0

৩. x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষেত্রম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন

করি এবং সরু পেসিলের সাহায্যে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = |x|$ এর লেখ অঙ্কন করি।



বৈশিষ্ট্য : (i) লেখচিত্রটি $x = \frac{1}{2}$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। (ii) লেখচিত্রটি ১ম চতুর্ভাগ ও ২য় চতুর্ভাগে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত। (iii) লেখচিত্রটি মূলবিন্দুতে ছেদ করে না। (iv) লেখচিত্রটি y অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিদ্যমান।

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

$$1(a) 4f(x) + 2x f\left(\frac{1}{x}\right) = 10x + 17 \text{ হলে, } f(x)$$

এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$4 f(x) + 2x f\left(\frac{1}{x}\right) = 10x + 17 \quad (i)$$

x কে $\frac{1}{x}$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$$4 f\left(\frac{1}{x}\right) + 2 \frac{1}{x} f(x) = 10 \frac{1}{x} + 17$$

$$\Rightarrow 4x f\left(\frac{1}{x}\right) + 2 f(x) = 10 + 17x$$

$$\Rightarrow 2 f(x) + 4x f\left(\frac{1}{x}\right) = 17x + 10 \dots \quad (ii)$$

$$(i) \times 2 - (ii) \Rightarrow$$

$$(8 - 2) f(x) = (20 - 17)x + 34 - 10$$

$$\Rightarrow 6 f(x) = 3x + 24$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 4 \quad (\text{Ans.})$$

1(b) $2f(x) + 3f(-x) = x^2 - x + 1$ হলে,
 $f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।
সমাধান ৩ দেওয়া আছে,

$$2f(x) + 3f(-x) = x^2 - x + 1 \quad \dots (i)$$

x কে $(-x)$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$$2f(-x) + 3f(x) = (-x)^2 - (-x) + 1$$

$$\Rightarrow 3f(x) + 2f(-x) = x^2 + x + 1 \quad \dots (ii)$$

$$(ii) \times 3 - (i) \times 2 \Rightarrow$$

$$(9-4)f(x) = (3-2)x^2 + (3+2)x + 3-2$$

$$\Rightarrow 5f(x) = x^2 + 5x + 1$$

$$f(x) = \frac{1}{5}(x^2 + 5x + 1)$$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ হলে $f(\cos\theta)$ এর মান নির্ণয় কর। [RU 07-08; JU 09-10]

$$Sol^n.: f(\cos\theta) = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \tan^2\frac{\theta}{2}$$

2. $f(x) = \frac{x}{1+x}$ হলে $f(2/3) + f(3/2)$ সমান- [DU 04-05]

$$Sol^n.: f(2/3) + f(3/2) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} = 1$$

3. $f(a) = \ln(a)$ হলে $f(\frac{1}{a})$ = কত? [KUET 05-06; JU 09-10]

$$Sol^n.: f(\frac{1}{a}) = \ln(\frac{1}{a}) = \ln(a^{-1}) = -\ln(a)$$

4. $g(\theta) = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$ হলে $g(\frac{\pi}{4}-\theta) = ?$ [KUET 08-09]

$$Sol^n.: g(\theta) = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} = \tan(\frac{\pi}{4}-\theta)$$

$$g(\frac{\pi}{4}-\theta) = \tan\{\frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{4}-\theta)\} = \tan\theta$$

5. $f(x) = x^2 + 4$ এবং $g(x) = 2x - 1$ হলে $(gof)(x) = ?$ [DU 07-08, 05-06; Jt.U 05-06; JU, CU 09-10]

$$Sol^n.: (gof)(x) = g(x^2 + 4)$$

$$= 2(x^2 + 4) - 1 = 2x^2 + 7$$

6. $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$ হলে $f(g(\frac{\sqrt{\pi}}{2})) = ?$ [DU 09-10]

$$Sol^n.: f(g(\frac{\sqrt{\pi}}{2})) = f(\frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

7. $f(x) = 3x^3 + 2$, $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-2}{2}}$ হলে

$(fog)(5)$ এর মান হবে— [BUET 08-09]

$$Sol^n.: (fog)(5) = f(\sqrt[3]{\frac{5-2}{2}}) = f(1) = 3 \cdot 1^3 + 2$$

8. $f(x) = x^2 + 3$ হলে $f(f(-3)) = ?$ [KUET 07-08]

$$Sol^n.: f(f(-3)) = f((-3)^2 + 3) = f(12)$$

$$= 12^2 + 3 = 147$$

9. $f(x) = x^3 + 5$ এর বিপরীত ফাংশন [JU 09-10]

$$Sol^n.: f(f^{-1}(x)) = \{f^{-1}(x)\}^3 + 5$$

$$\Rightarrow x = \{f^{-1}(x)\}^3 + 5 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$$

10. একটি ফাংশন $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ দ্বারা
সংজ্ঞায়িত করা হলে $f^{-1}(2)$ এর মান হবে—

[BUET 06-07; JU, RU 09-10]

$$Sol^n.: f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \therefore f^{-1}(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

11. যদি $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ এবং $f(x) = x^2$ হয়
তবে $f^{-1}(4) =$ কত? [CU 04-05; JU, Jt.U, RU 09-10]

$$Sol^n.: x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$$

12. $f(x) = \frac{5x+3}{4x-5}$ হলে $f^{-1}(x) = ?$ [DU 10-11]

$$Sol^n.: f^{-1}(x) = \frac{5x+3}{4x-5} \quad [\text{সূত্র ব্যবহার করে।}]$$

13. একটি ফাংশন $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ যদি
সংজ্ঞায়িত করা হলে $f^{-1}(0)$ সমান- [BUET 08-09]

$$Sol^n.: f^{-1}(x) = \frac{+3x-2}{x-1} \quad f^{-1}(0) = 2$$

14. $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ এবং $x \neq -\frac{1}{2}$ হলে
 $f^{-1}(-2)$ এর মান- [DU, RU 08-09]

$$Sol^n.: f^{-1}(x) = \frac{-x-3}{2x-1}$$

$$f^{-1}(-2) = \frac{-(-2)-3}{2(-2)-1} = \frac{2-3}{-4-1} = \frac{1}{5}$$

15. $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$ ফাংশনের ডোমেন, রেঞ্জ এবং
বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর। [IU, SU 07-08; CU
05-06, 08-09; JU 09-10]

$$Sol^n.: \text{ডোমেন} = \mathbb{R} - \{2\}, \text{রেঞ্জ} = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{1}\right\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\text{এবং } f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-(-2)} = \frac{-2x-1}{x+2}$$

16. $\log(5x^2 - 7)$ ফাংশনের ডোমেন হবে-
[CU 07-08]

$$Sol^n.: 5x^2 - 7 > 0 \Rightarrow x^2 - \frac{7}{5} > 0$$

$$\Rightarrow (x - \sqrt{7/5})(x + \sqrt{7/5}) > 0$$

$$\text{ডোমেন} = \{x \in \mathbb{R} : x > \sqrt{7/5} \text{ অথবা } x < -\sqrt{7/5}\}$$

17. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ফাংশনের ডোমেন ও বিস্তার হবে-
[CU 04-05, 06, 07]

$$Sol^n.: \text{ডোমেন } f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, \infty) - \{0\}$$

$$\text{বিস্তার } f = \{-1, 1\}$$

18. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ ফাংশনটির ডোমেন কত?
[SU 05-06]

- A. (0,1) B. [0,1] C. (0,1] D. [0,1]

$$Sol^n.: f(x) \in \mathbb{R} \text{ iff } (1-x)x \geq 0 \text{ but } x \neq 0$$

$$\Rightarrow (x-0)(x-1) \leq 0 \text{ but } x \neq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 1$$

19. $f(x) = x^2 - 1$ যদি
ডোমেন $[-1, 1]$ হলে রেঞ্জ কত? [IU 04-05]

$$Sol^n.: f(0) = 0^2 - 1 = -1; \text{ যা } x \in [-1, 1] \text{ এর
জন্য } f(x) \text{ এর ক্ষুদ্রতম মান।}$$

$$f(\pm 1) = (\pm 1)^2 - 1 = 0; \text{ যা } x \in [-1, 1] \text{ এর
জন্য } f(x) \text{ এর বৃহত্তম মান। } f \text{ এর রেঞ্জ} = [-1, 0]$$

20. $f(x) = \sqrt{x+1}$ হলে এর ডোমেন এবং রেঞ্জ কত?
[CU '03-04]

$$Sol^n.: \text{এখানে ডোমেন হল সকল অর্থগাত্রক সংখ্যার
সেট অর্থাৎ } [0, \infty) \text{ ; } f(0) = \sqrt{0+1} = 1; \text{ যা } x \in [0, \infty) \text{ এর জন্য } f(x) \text{ এর ক্ষুদ্রতম মান।}$$

$$\text{রেঞ্জ } f = [1, \infty)$$

21. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ফাংশনের ডোমেন কত?

[CU 03-04, 08-09]

$$Sol^n.: 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ডোমেন } f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$$

22. $f(x) = \sqrt{x-2}$ এবং $g(x) = x^2 + 1$ হয়
— fog এর ডোমেন হবে- [BUET 10-11]

$$Sol^n.: fog = f(g(x)) = f(x^2 + 1)$$

$$= \sqrt{x^2 + 1 - 2} = \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{(x-1)(x+1)}$$

$$\text{For Dom, } (x-1)(x+1) \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \text{ or, } x \geq 1$$

$$\text{Dom (fog)} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

ফাংশনে ক্যালকুলেটরের ব্যবহার :

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \text{ হলে } f(2/5) + f(5/2) \text{ সমান}-$$

SOLVE=

CALC Screen এ দেখাবে x?

Press 2 ab/c 5 = মান আসে 2 / 7

Again, press = Screen এ দেখাবে x?

Press 5 ab/c 2 = মান আসে 5 / 7

Press 2 / 7 ÷ 5 / 7 = Screen এ আসে

2/5. Ans. 2/5.

বেস্ট সীমাগুলির মান নির্ণয় কর :

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

সমাধান : ধরি $x = 2 + h \therefore h \rightarrow 0$, যখন $x \rightarrow 2$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{(2+h)^2 - 5(2+h) + 6} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{4 + 4h + h^2 - 10 - 5h + 6} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+4)}{h(h-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+4}{h-1} \\ &= \frac{0+4}{0-1} = -4 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

বিকল্প পদ্ধতি :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{2+2}{2-3} = -4 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1(b) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+4)^3 - (x-8)^2}{x(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 12x^2 + 48x + 64 - x^2 + 16x - 64}{x(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 12x^2 + 48x + 64 - x^2 + 16x - 64}{x(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 11x^2 + 64x}{x(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 + 11x + 64)}{x(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 11x + 64}{x-3} = \frac{0^2 + 11.0 + 64}{0-3} \\ &= \frac{64}{-3} = -21\frac{1}{3} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

$$2(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-4x}}{x} \quad [\text{সি. } '03]$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-4x})(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x})}{x(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+3x})^2 - (\sqrt{1-4x})^2}{x(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+3x-1+4x}{x(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{x(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7}{\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{1+3.0} + \sqrt{1-4.0}} = \frac{7}{1+1} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$2(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x}}{x} \quad [\text{ব. } '09, '13]$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x})(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-3x})}{x(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-3x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2x})^2 - (\sqrt{1-3x})^2}{x(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-3x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x-1+3x}{x(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-3x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-3x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-3x}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{1+2.0} + \sqrt{1-3.0}} = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

$$2(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^3} - \sqrt{1+x}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^3} - \sqrt{1+x}} \times \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{\sqrt{1+x^3} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^3} + \sqrt{1+x}} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2 - 1-x)(\sqrt{1+x^3} + \sqrt{1+x})}{(1+x^3 - 1-x)(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)(\sqrt{1+x^3} + \sqrt{1+x})}{x(x^2-1)(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)(\sqrt{1+x^3} + \sqrt{1+x})}{(x^2-1)(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x})} \\
 &= \frac{(0-1)(\sqrt{1+0^3} + \sqrt{1+0})}{(0^2-1)(\sqrt{1+0^2} + \sqrt{1+0})} = \frac{2}{2} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3(a) \quad &\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{6x^4 + x^3 - 3x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4(2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4})}{x^4(6 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{6 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}} = \frac{2-0+0}{6+0-0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3(b) \quad &\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} \quad [ব.০০] \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x(1 - \frac{1}{3^{2x}})}{3^x(1 + \frac{1}{3^{2x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{3^{2x}}}{1 + \frac{1}{3^{2x}}} \\
 &= \frac{1-0}{1+0} = \frac{1-0}{1+0} = 1
 \end{aligned}$$

$$3(c) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \{ \ln(2x-1) - \ln(x+5) \} \quad [গ.ভ.প.০৮]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{2x-1}{x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x(2-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{5}{x})} = \ln 2$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{5}{x}} = \ln \frac{2-0}{1+0} \\
 &= \ln 2 \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$3.(d) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x \sin \frac{b}{2^x} \quad [সি.০৮]$$

ধরি, $\frac{b}{2^x} = \theta$. এখানে $x \rightarrow \infty$ বলে $2^x \rightarrow \infty$

$$\theta = \frac{b}{2^x} \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x \sin \frac{b}{2^x} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{b}{\theta} \sin \theta \\
 &= b \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = b \cdot 1 = b
 \end{aligned}$$

$$4.(a) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{7/2} - a^{7/2}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} \quad [ঢ.০৩]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\lim(x^{7/2} - a^{7/2})}{\lim(x^{1/2} - a^{1/2})} = \frac{\lim \frac{x^{7/2} - a^{7/2}}{x-a}}{\lim \frac{x^{1/2} - a^{1/2}}{x-a}} \\
 &= \frac{\frac{7}{2} a^{\frac{7}{2}-1}}{\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}-1}} \quad [\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = n a^{n-1}] \\
 &= (\frac{7}{2} \times \frac{2}{1}) a^{\frac{7}{2}-1-\frac{1}{2}+1} = 7 a^{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}} = 7 a^3 \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$4(b) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{5/2} - a^{5/2}}{x^{3/5} - a^{3/5}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\lim(x^{5/2} - a^{5/2})}{\lim(x^{3/5} - a^{3/5})} = \frac{\lim \frac{x^{5/2} - a^{5/2}}{x-a}}{\lim \frac{x^{3/5} - a^{3/5}}{x-a}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{5}{2}a^{\frac{5}{2}-1}}{\frac{3}{5}a^{\frac{3}{5}-1}} \quad [\because \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}]$$

$$= \left(\frac{5}{2} \times \frac{5}{3}\right) a^{\frac{5}{2}-\frac{3}{5}+1} = \frac{25}{6} a^{\frac{5}{2}-\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{25}{6} a^{\frac{25-6}{10}} = \frac{25}{6} a^{\frac{19}{10}} \text{ (Ans.)}$$

$$5(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 3x}{3x^2} \quad [\text{প.গ. } ৮৫]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{3x}{2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{3x}{2}}{\frac{9x^2}{4} \cdot \frac{4}{3}}$$

$$= \frac{2 \cdot 3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(3x/2)}{3x/2} \right\}^2 = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

$$5.(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 7x}{3x^2} \quad [\text{সি. } ০৮, '১২; কু. '১১;$$

জা. '০৭, '১০; চ. '০৬; য. '০৮, '১২; ব. '০৮; ঢ. '১০; পি. '১১]

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{7x}{2}}{3 \cdot \frac{49x^2}{4} \cdot \frac{4}{49}}$$

$$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{49}{4}\right) \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(7x/2)}{7x/2} \right\}^2$$

$$= \frac{49}{6} \cdot 1 = \frac{49}{6} \text{ (Ans.)}$$

$$6. (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2} \quad [\text{ব. } ০১; \text{ মা. } ০৫ \text{ সি. } ০৮]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{1}{2}(2x+3x) \sin \frac{1}{2}(3x-2x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{5x}{2} \sin \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= 2 \times 1 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2} \text{ (Ans.)}$$

$$6(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2} \quad [\text{কু. } ০৩]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{1}{2}(2x+4x) \sin \frac{1}{2}(4x-2x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin 3x \sin x}{x^2}$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times 3$$

$$= 2 \times 1 \times 1 \times 3 = 6 \text{ (Ans.)}$$

$$6. (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} \quad [\text{ব. } ১২; \text{ য. } ১৩]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{1}{2}(ax+bx) \sin \frac{1}{2}(bx-ax)}{x^2}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{(a+b)x}{2}}{\frac{(a+b)x}{2}} \times \frac{a+b}{2} \times$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{(b-a)x}{2}}{\frac{(b-a)x}{2}} \times \frac{b-a}{2}$$

$$= 2 \times 1 \times \frac{a+b}{2} \times 1 \times \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$6(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\cos x + \cos 2x}{x^2}$$

[য. '০৫; কু. '১৪]

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\cos x + 2\cos^2 x - 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos x(\cos x - 1)}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x (-2 \sin^2 \frac{x}{2})}{x^2} \\
 &= -4 \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(x/2)}{x/2} \right\} \times \frac{1}{4} \times \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \\
 &= -4 \times 1 \times \frac{1}{4} \times \cos 0 = -1 \times 1 = -1
 \end{aligned}$$

6(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cos x + \cos 2x)}{\sin x}$ [য. '০৯; রা. '১১; চ. '১৩]

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \times \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \cos 2x) \\
 &= 1 \times (\cos 0 + \cos 0) \\
 &= 1 + 1 = 1 \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

7.(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ [রা. '০৯; ব. '১১, '১৪; কু. '১০; সি. '০৯; মা. '১৩]

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(x/2)}{x/2} \right\}^2 \times \frac{1}{4} \\
 &= 2 \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

7(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^3}$ [মা. '০৮, '০৯]

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x(1 - \cos 2x)}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x \cdot 2 \sin^2 x}{x^3} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2x} \times 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \\
 &= 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 4 \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

7(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ex - \cot x}{x}$ [ঢ. '০৯]

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2} \\
 &= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

7(d) $\lim_{x \rightarrow y} \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$ [কু. '০৫]

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow y} \frac{2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}}{x-y} \\
 &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow y} \frac{\sin \frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}} \times \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow y} \cos \frac{x+y}{2} \\
 &= 2 \times 1 \times \frac{1}{2} \cos \frac{y+y}{2} = \cos y \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

7(e) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\tan x - \tan \alpha}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{x - \alpha}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha}{(x - \alpha) \cos x \cos \alpha} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin(x - \alpha)}{(x - \alpha) \cos x \cos \alpha} \\
 &= \frac{1}{\cos \alpha} \lim_{(x-\alpha) \rightarrow 0} \frac{\sin(x - \alpha)}{x - \alpha} \times \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{\cos x} \\
 &= \frac{1}{\cos \alpha} \times 1 \times \frac{1}{\cos \alpha} = \sec^2 \alpha \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

8.(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx}$ [ঢ. '০৫]

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{\lim_{ax \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} \times a}{\lim_{bx \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{bx} \times b} \\
 &= \frac{1 \times a}{1 \times b} = \frac{a}{b} \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$8(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{2 \sin^2 \frac{bx}{2}}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(ax/2)}{ax/2} \right\}^2 \times \frac{a^2}{4}}{\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(bx/2)}{bx/2} \right\}^2 \times \frac{b^2}{4}} = \frac{1 \times \frac{a^2}{4}}{1 \times \frac{b^2}{4}} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$8(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 9x}{\cos 3x - \cos 5x} \quad [\text{ট.}'05; \text{ক.}'09]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{1}{2}(7x + 9x) \sin \frac{1}{2}(9x - 7x)}{2 \sin \frac{1}{2}(3x + 5x) \sin \frac{1}{2}(5x - 3x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x \sin x}{\sin 4x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 4x \cos 4x}{\sin 4x}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \cos 4x = 2 \cos 0 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$8(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin x}{\sin 6x} \quad [\text{চ.}, \text{শ.}'03; \text{দি.}'12]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{1}{2}(7x - x) \cos \frac{1}{2}(7x + x)}{\sin 6x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x \cos 4x}{2 \sin 3x \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x}{\cos 3x}$$

$$= \frac{\cos 0}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1 \quad (\text{Ans.})$$

$$8(e) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \{ \sec x (\sec x - \tan x) \} \quad [\text{ট.}'09]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \frac{1}{\cos x} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}}{2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{2 - \sin^2 x}$$

[চ. '01]

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1}{1 + \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$8(f) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right)$$

[চ. '08; ব. '10; সি. '18; প.ভ.প. '08]

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \tan \frac{x}{2}$$

$$= \tan \frac{0}{2} = \tan 0 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

$$8(g) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\tan \theta} \right) \quad [\text{ট.}'01; \text{জা.}'13]$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta \sin \theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\theta \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (\text{Ans.})$$

$$8(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x}{\cos x}$$

[জা. '08]

$$= \frac{1 + \sin 0}{\cos 0} = \frac{1 + 0}{1} = 1 \quad (\text{Ans.})$$

$$9(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x^2 + x}$$

[চ. '02]

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x(2x+1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times 2}{\lim_{x \rightarrow 0} (2x+1)}$$

$$= \frac{1 \times 2}{2 \times 0 + 1} = 2 \text{ (Ans.)}$$

9(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x^2 \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} x$
 $= 1 \times 0 = 0 \text{ (Ans.)}$

10.(a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ [য. '০৮; ব. '০৬; ঢ. '১৩ আ. '১৮]

ধরি, $x = \frac{\pi}{2} + h$. $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \sin(\frac{\pi}{2} + h)}{\cos(\frac{\pi}{2} + h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{-\sin h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{h}{2}}{-2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2}} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \tan \frac{h}{2} = -\tan \frac{0}{2} = -\tan 0 = 0 \end{aligned}$$

10(b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x) \tan x$ [ব. '১০]

ধরি, $\frac{\pi}{2} - x = h$. $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x) \tan x \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} h \tan(\frac{\pi}{2} - h) = \lim_{h \rightarrow 0} h \cot h \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\tan h} = 1 \end{aligned}$$

10(c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x - \tan x}{\frac{\pi}{2} - x}$ [ব. '০২]

ধরি, $\frac{\pi}{2} - x = h$. $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x - \tan x}{\frac{\pi}{2} - x} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sec(\frac{\pi}{2} - h) - \tan(\frac{\pi}{2} - h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\csc h - \cot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin h} - \frac{\cos h}{\sin h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h \sin h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h \cdot 2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

10(d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$ [য. '০৬, '১০; কূ. '০৮]

ধরি, $\frac{\pi}{2} - x = h$. $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \sin(\frac{\pi}{2} - h)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(h/2)}{(h/2)^2 \times 4} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(h/2)}{h/2} \right\}^2 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

11.(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x}$

ধরি, $\sin^{-1} x = \theta \Rightarrow \sin \theta = x$

$x \rightarrow 0 \quad \theta \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin \theta} = 1$$

$$11(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1}(3x)}{4x}$$

ଧ୍ୱନି, $\sin^{-1}(3x) = \theta \Rightarrow \sin \theta = 3x$

$$\begin{aligned} & x \rightarrow 0 \quad \theta \rightarrow 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1}(3x)}{4x} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{4 \cdot \frac{3}{4} \sin \theta} \\ &= \frac{3}{4} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin \theta} = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

$$12. (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - (1+x)^7}{\ln(1+x)}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{1+2x+\frac{(2x)^2}{2!} \dots\} - (1+7x+21x^2 + \dots)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-7)x + (2-21)x^2 + \dots}{x(1-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5-19x + \dots}{1-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots} \\ &= \frac{-5-19 \times 0 + 0 + \dots}{1-\frac{0}{2} + \frac{0^2}{3} - 0 + \dots} \\ &= \frac{-5}{1} = -5 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

$$12(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{1+x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots\} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\ln a + \frac{x(\ln a)^2}{2!} + \frac{x^2(\ln a)^3}{3!} + \dots)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \{ \ln a + \frac{x(\ln a)^2}{2!} + \frac{x^2(\ln a)^3}{3!} + \dots \} \end{aligned}$$

$$= \ln a + \frac{0 \times (\ln a)^2}{2!} + \frac{0^2 (\ln a)^3}{3!} + \dots$$

$$= \ln a$$

$$12(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \quad [\text{କ୍ଲ.'୦୧; ମା.ବୋ.'୦୯; ରା.'୧୨}]$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!} + \dots\} - 1}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!} + \dots}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin x}{2!} + \frac{\sin^2 x}{3!} + \dots\right) \\ &= 1 + \frac{\sin 0}{2!} + \frac{\sin^2 0}{2!} + \dots = 1 + 0 + 0 \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$12(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{-x}}{x} \quad [\text{ସ.ତ.ଗ.'୦୬}]$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\{1+x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots\} \right. \\ &\quad \left. - \{1-x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} - \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots\} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \{2x \ln a + 2 \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots\} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \ln a + \frac{x^2 (\ln a)^3}{3!} + \frac{x^4 (\ln a)^5}{5!} + \dots \right\} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \ln a + \frac{0^2 (\ln a)^3}{3!} + \frac{0^4 (\ln a)^5}{5!} + \dots \right\} \\ &= 2 \ln a \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

$$12(e) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{b}{x})^{\frac{x}{a}}, a > 0, b > 0$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{a}} \cdot \frac{\frac{x}{a} \left(\frac{x}{a} - 1\right)}{\frac{x}{a} \left(\frac{x}{a} - 1\right)} \cdot \frac{b}{x}^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{x(\frac{x}{a}-1)(\frac{x}{a}-2)}{3!} \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \dots \\
 = & \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{b}{a} + \frac{\frac{x^2}{a^2}(1-\frac{a}{x})}{2!} \frac{b^2}{x^2} + \right. \\
 & \left. \frac{\frac{x^3}{a^3}(1-\frac{a}{x})(1-\frac{2a}{x})}{3!} \frac{b^3}{x^3} + \dots \right\} \\
 = & \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{b}{a} + \frac{1-\frac{a}{x}}{2!} \frac{b^2}{a^2} + \right. \\
 & \left. \frac{(1-\frac{a}{x})(1-\frac{2a}{x})}{3!} \frac{b^3}{a^3} + \dots \right\} \\
 = & 1 + \frac{b}{a} + \frac{1-0}{2!} \frac{b^2}{a^2} + \frac{(1-0)(1-0)}{3!} \frac{b^3}{a^3} + \dots \\
 = & 1 + \frac{b}{a} + \frac{1}{2!} \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{b}{a} \right)^3 + \dots \dots = e^{\frac{b}{a}}
 \end{aligned}$$

12(i) $f(x) = \sin x$ হলে, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+nh)-f(x)}{h}$
এর মান নির্ণয় কর। [প.গ.০০]

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+nh)-f(x)}{h} \\
 & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+nh)-\sin x}{h} \\
 & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{nh}{2} \cos \frac{1}{2}(2x+nh)}{h} \\
 & = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\frac{nh}{2}} \times \frac{n}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \cos \frac{1}{2}(2x+nh) \\
 & = 2 \times 1 \times \frac{n}{2} \times \cos \frac{1}{2}(2x+n \times 0) \\
 & = n \cos x \quad (\text{Ans.})
 \end{aligned}$$

13. (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$

$$\begin{aligned}
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6n^3} \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} = \frac{(1+0)(2+0)}{6} \\
 & = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad (\text{Ans.})
 \end{aligned}$$

13(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{r=1}^n r^3$

$$\begin{aligned}
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4(1+\frac{1}{n})^2}{4n^4} \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{4} = \frac{(1+0)^2}{4} = \frac{1}{4} \quad (\text{Ans.})
 \end{aligned}$$

13(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1.3 + 2.4 + \dots + n(n+2)}{n^3}$

সমাধান : মনে করি, $1.3 + 2.4 + \dots + n(n+2)$ ধারার
nতম পদ u_n .

$$u_n = n(n+2) = n^2 + 2n$$

$$\begin{aligned}
 1.3 + 2.4 + \dots + n(n+2) & = \sum_{n=1}^n n^2 + 2 \sum_{n=1}^n n \\
 & = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \frac{n(n+1)}{2} \\
 & = n(n+1) \left(\frac{2n+1}{6} + 1 \right) \\
 & = n(n+1) \frac{2n+1+6}{6} = \frac{n(n+1)(n+7)}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1.3 + 2.4 + \dots + n(n+2)}{n^3} \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(n+7)}{6n^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{6}{n}\right)}{6n^3} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{6} = \frac{(1+0)(1+0)}{6} \\
 &= \frac{1}{6} \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

14. যদি $f(x) = \frac{2x}{1-x}$ হয়, তবে (i) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
এবং $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি $x = 1 + h$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2(1+h)}{1-(1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2+2h}{1-1-h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2+2h}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(-\frac{2}{h} - 2\right) \\
 &= -\infty - 2 = -\infty \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2(1+h)}{1-(1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2+2h}{1-1-h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2+2h}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(-\frac{2}{h} - 2\right) \\
 &= +\infty - 2 = +\infty \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ এবং $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান : } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1-x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x(\frac{1}{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{1}{x}-1} \\
 &= \frac{2}{0-1} = -2 \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1-x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x(\frac{1}{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\frac{1}{x}-1} \\
 &= \frac{2}{-0-1} = -2 \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

15. স্যান্ডউইচ উপপাদ্যের সাহায্যে মান নির্ণয় কর:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

সমাধান: আমরা পাই, $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1, x \neq 0$

এবং $x^2 \geq 0$

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

এখন, $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = -0^2 = 0$ অদৃপ, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

স্যান্ডউইচ এর উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$x \neq 0$ এর জন্য আমরা পাই, $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

$x > 0$ এর জন্য, $-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$ এবং

$x < 0$ এর জন্য, $-x \geq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x$

$$\Rightarrow x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq -x$$

যেহেতু, $\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x$, সুতরাং স্যান্ডউইচ

এর উপপাদ্য অনুসারে পাই, $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

সমাধান: আমরা পাই, $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}, [\because x \rightarrow \infty, \therefore x > 0]$$

এখন, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ এবং $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

স্যান্ডউইচ এর উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

15. (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \cos x}{x + 3}$

সমাধান : আমরা পাই, $-1 \leq \cos x \leq +1$

$$\Rightarrow +1 \geq -\cos x \geq -1, \quad [\text{উভয় পক্ষকে } (-1) \text{ দ্বারা গুণ করে।}]$$

$$\Rightarrow -1 \leq -\cos x \leq +1$$

$$\Rightarrow 2 - 1 \leq 2 - \cos x \leq 2 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+3} \leq \frac{2 - \cos x}{x+3} \leq \frac{3}{x+3}$$

$$[\because x \rightarrow \infty, \therefore x+3 > 0]$$

যেহেতু $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+3} = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x+3}$, স্যান্ডউইচ এর

উপপাদ্য অনুসারে পাই, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \cos x}{x+3} = 0$

15. (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos^2(2x)}{3 - 2x}$

সমাধান : আমরা পাই, $-1 \leq \cos(2x) \leq +1$

$$\Rightarrow 0 \leq \cos^2(2x) \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{0}{3-2x} \geq \frac{\cos^2(2x)}{3-2x} \geq \frac{1}{3-2x}$$

$$[\because x \rightarrow \infty, \therefore 3-2x > 0]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3-2x} \leq \frac{\cos^2(2x)}{3-2x} \leq \frac{0}{3-2x}$$

যেহেতু $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3-2x} = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} 0$, স্যান্ডউইচ এর

উপপাদ্য অনুসারে পাই, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos^2(2x)}{3-2x} = 0$

15. (f) $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 \cos\left(\frac{2}{x}\right)$

সমাধান : আমরা পাই, $-1 \leq \cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq +1$

$$\Rightarrow -x^3 \geq x^3 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \geq +x^3$$

$$[\because x \rightarrow 0^-, \therefore x^3 < 0]$$

$$\Rightarrow x^3 \leq x^3 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq -x^3$$

যেহেতু $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^3)$, স্যান্ডউইচ এর

উপপাদ্য অনুসারে পাই, $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

15. (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 + \sin^2 x)}{x + 100}$

সমাধান : আমরা পাই, $-1 \leq \sin x \leq +1$

$$\Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 2 \leq 2 + \sin^2 x \leq 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 \leq x^2(2 + \sin^2 x) \leq 3x^2$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{x+100} \leq \frac{x^2(2 + \sin^2 x)}{x+100} \leq \frac{3x^2}{x+100}$$

$$[\because x \rightarrow \infty, \therefore x+100 > 0]$$

এখন, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x+100} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x(1 + \frac{100}{x})}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1 + \frac{100}{x}} = \frac{2 \times \infty}{1 + 0} = \infty$$

অদৃশ, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x+100} = \infty$

স্যান্ডউইচ এর উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 + \sin^2 x)}{x+100} = \infty \quad (\text{বিদ্যমান নাই})$$

$$15. (h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - \sin(3x)}{x^2 + 10}$$

সমাধান : আমরা পাই, $-1 \leq \sin(3x) \leq +1$

$$\Rightarrow +1 \geq -\sin(3x) \geq -1$$

$$\Rightarrow -1 \leq -\sin(3x) \leq +1$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 1 \leq 5x^2 - \sin(3x) \leq 5x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{5x^2 - 1}{x^2 + 10} \geq \frac{5x^2 - \sin(3x)}{x^2 + 10} \geq \frac{5x^2 + 1}{x^2 + 10}$$

$[\because x \rightarrow -\infty, x^2 + 10 < 0]$

$$\Rightarrow \frac{5x^2 + 1}{x^2 + 10} \leq \frac{5x^2 - \sin(3x)}{x^2 + 10} \leq \frac{5x^2 - 1}{x^2 + 10}.$$

$$\text{এখন, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 1}{x^2 + 100} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(5 + 1/x^2)}{x^2(1 + 100/x^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 1/x^2}{1 + 100/x^2} = \frac{5+0}{1+0} = 5$$

$$\text{সূত্র, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 1}{x^2 + 100} = 5$$

স্যান্ডউইচ এর উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - \sin(3x)}{x^2 + 10} = 5$$

অতিক্রি প্রশ্ন (সমাধানসহ)

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+5 - 2x-6}{(x-1)(x+3)(3x+5)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+3)(3x+5)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+3)(3x+5)} = \frac{1}{(1+3)(3.1+5)}$$

$$= \frac{1}{4.8} = \frac{1}{32} \text{ (Ans.)}$$

$$2.(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{3^2 - (x^2+5)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-x^2-5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (3+\sqrt{x^2+5}) = 3+\sqrt{2^2+5}$$

$$= 3+3 = 6 \text{ (Ans.)}$$

$$2(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1}} \quad [\text{প.ভ.গ. ৪৩}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x-1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x-1})}{(x^2-1) - (x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x-1})}{x^2-1-x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x-1})}{x(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x-1}}{x}$$

$$= \frac{\sqrt{1^2-1} - \sqrt{1-1}}{1} = \frac{0}{1} = 0 \text{ (Ans.)}$$

$$2(c) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{1/2} - x^{1/2}}{h} \quad [\text{সি.০১}]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^{1/2} - x^{1/2}\} \{(x+h)^{1/2} + x^{1/2}\}}{h \{(x+h)^{1/2} + x^{1/2}\}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^{1/2}\}^2 - \{x^{1/2}\}^2}{h \{(x+h)^{1/2} + x^{1/2}\}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h\{(x+h)^{1/2} + x^{1/2}\}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h\{(x+h)^{1/2} + x^{1/2}\}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(x+h)^{1/2} + x^{1/2}} \\
 &= \frac{1}{(x+0)^{1/2} + x^{1/2}} = \frac{1}{x^{1/2} + x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

$$2.(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a - \sqrt{a^2 - x^2})(a + \sqrt{a^2 - x^2})}{x^2(a + \sqrt{a^2 - x^2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 - (\sqrt{a^2 - x^2})^2}{x^2(a + \sqrt{a^2 - x^2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 - a^2 + x^2}{x^2(a + \sqrt{a^2 - x^2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(a + \sqrt{a^2 - x^2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - 0^2}} = \frac{1}{a+a} = \frac{1}{2a}
 \end{aligned}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{6 + x - 3x^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 + \frac{1}{x^2})}{x^2(\frac{6}{x^2} + \frac{1}{x} - 3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{\frac{6}{x^2} + \frac{1}{x} - 3} = \frac{2+0}{0+0-3} = -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$4.(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$4(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 1 \cdot \sin \frac{0}{2} \\
 &= 1 \cdot 0 = 0 \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin \pi x - \sin 3\pi x}{x^3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin^3 \pi x}{x^3} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^3 \cdot \pi^3 \\
 &= 4 \times 1 \times \pi^3 = 4\pi^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \times 5}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times 3} \\
 &= \frac{1 \times 5}{1 \times 3} = \frac{5}{3} \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$6(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 2x}{2x + 3 \sin 4x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(6 - \frac{\sin 2x}{2x})}{x(2 + 3 \frac{\sin 4x}{4x})} = \frac{6 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times 2}{2 + 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \times 4}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{6 - 1 \times 2}{2 + 3 \times 1 \times 4} = \frac{6 - 2}{2 + 12} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \text{ (Ans.)}$$

7(a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x}$ [প.ভ.প. ৪৬]

এবং, $x = \frac{\pi}{4} + h$. $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ $h \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2(\frac{\pi}{4} + h)}{\cos 2(\frac{\pi}{4} + h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \sin(\frac{\pi}{2} + 2h)}{\cos(\frac{\pi}{2} + 2h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2h}{-\sin 2h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 h}{-2 \sin h \cos h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \tan h$$

$$= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan h}{h} \times h = -1 \times 0 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

7(b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$

এবং, $\pi - x = h$. $x \rightarrow \pi$ $h \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \text{ (Ans.)}$$

8(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{1+x-e^x}$

$$x - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots)}{1+x-1-x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \dots}$$

$$x - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \dots$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}}{1+x-1-x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \dots}$$

$$x^2 (\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \dots)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (-\frac{1}{2!} - \frac{x}{3!} - \dots)}{x^2 (-\frac{1}{2!} - \frac{x}{3!} - \dots)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \dots}{-\frac{1}{2!} - \frac{x}{3!} - \dots}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{0}{3} + \frac{0^2}{4} - \dots}{-\frac{1}{2!} - \frac{0}{3!} - \dots} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$$

8(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{\ln(1-5x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - \frac{(5x)^2}{2} + \frac{(5x)^3}{3} - \frac{(5x)^4}{4} + \dots}{-5x - \frac{(5x)^2}{2} - \frac{(5x)^3}{3} - \frac{(5x)^4}{4} - \dots}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 - \frac{5^2 x}{2} + \frac{5^3 x^2}{3} - \frac{5^4 x^3}{4} + \dots}{-5 - \frac{5^2 x}{2} - \frac{5^3 x^2}{3} - \frac{5^4 x^3}{4} - \dots}$$

$$= \frac{5 - \frac{5^2 \cdot 0}{2} + \frac{5^3 0^2}{3} - \frac{5^4 0^3}{4} + \dots}{-5 - \frac{5^2 \cdot 0}{2} - \frac{5^3 0^2}{3} - \frac{5^4 0^3}{4} - \dots}$$

$$= \frac{5}{-5} = -1 \text{ (Ans.)}$$

8(c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{(2x+5)/x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{2+5/x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^2 \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{5}{x}}$$

$$= (1+2 \cdot 0)^2 \times \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right\}^{10}$$

$$= e^{10} \text{ (Ans.)}$$

9. (a) $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|/2}, & \text{যখন } -1 < x < 0 \\ x^2, & \text{যখন } 0 < x < 2 \end{cases}$ হলে

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান আছে?

সমাধান : $x = 0$ বিন্দুতে

ডানদিকবর্তী সীমিটি $= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^2 = 0$

$$\text{বামদিকবর্তী লিমিট} = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-|x|^2/2} = e^{-|0|^2/2} = e^0 = 1$$

বামদিকবর্তী লিমিট ও ডানদিকবর্তী লিমিট বিদ্যমান আছে কিন্তু সমান নয়।

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ বিদ্যমান নাই।}$$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র :

L'Hospital's rule : কার্যপ্রণালী ৪ যদি $x = a$ এর জন্য $\frac{f(x)}{g(x)}$ ভগ্নাংশটি অনিশ্চয় আকার যেমন $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$

হয়, তবে অনিশ্চয় আকার থেকে না হওয়া পর্যন্ত ভগ্নাংশের লব এবং হুলকে পৃথকভাবে অন্তরীকরণ (differentiation) করতে হবে। অতঃপর নতুন ভগ্নাংশে পদ্ধতি $x = a$ স্থাপন করে ফাংশনের সীমায়িত মান নির্ণয় করতে হয়।

$$1. \text{ যখন } x \rightarrow 0, \text{ লিমিট } \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{x}$$

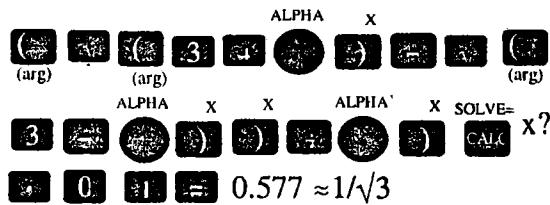
কত? [DU 04-05, NU 08-09, 05-06]

$$Sol^n : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{3+x}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}}{1} (-1)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

By Calculator : (Mode Radian এ নিতে হবে)



$$2. \text{ যখন } x \rightarrow 0, \text{ লিমিট } \frac{x(\cos x + \cos 2x)}{\sin x} \text{ কত?}$$

[DU 03-04, RU 06-07, 04-05; KU 03-04]

$$Sol^n : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cos x + \cos 2x)}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x + \cos 2x).1 + x(-\sin x - 2\sin x)}{\cos x}$$

$$= \frac{(\cos 0 + \cos 2.0).1 + 0.(-\sin 0 - 2\sin 0)}{\cos 0}$$

$$= 2$$

$$3. \text{ যখন } x \rightarrow 0, \text{ লিমিট } \frac{\sin 3x}{x} \text{ কত?}$$

[DU 99-00, RU 06-07]

$$Sol^n : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos 3x}{1}$$

$$= 3\cos 0 = 3$$

$$4. \text{ যখন } x \rightarrow 0, \text{ লিমিট } \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \text{ কত?}$$

[KU 03-04]

$$Sol^n : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - \cos x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sec^2 x \tan x + \sin x}{6x}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \{ 2(\sec^2 x \cdot \sec^2 x + \tan x \cdot 2\sec^2 x \tan x) + \cos x \}$$

$$= \frac{1}{6} \{ 2(1+0) + 1 \} = \frac{1}{2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)^2}{x} = ?$$

[DU 08-09]

$$Sol^n : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(4x^2) \cdot 8x}{1}$$

$$= \cos(4.0) \cdot 8.0 = 0$$

$$6. \text{ যখন } x \rightarrow \frac{\pi}{2}, \text{ লিমিট } \frac{1 - \sin x}{\cos x} \text{ কত?}$$

[DU 00-01, RU 06-07]

$$Sol^n : \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{0}{1} = 0$$

7. যখন $x \rightarrow 2$, সিমিটি $\frac{\sin(x-2)}{x-2}$ কত? [CU 07-08]

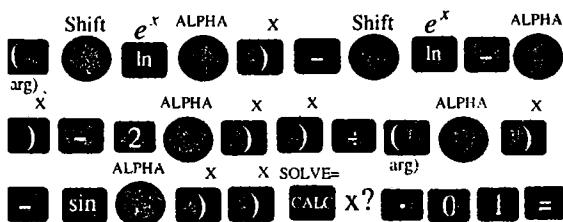
$$Sol^n : \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(x-2)}{1}$$

$$= \cos(2-2) = \cos 0 = 1$$

8. যখন $x \rightarrow 0$, সিমিটি $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ কত? [SU 04-05]

$$Sol^n : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$



$$1.99 \approx 2$$

9. যখন $x \rightarrow 0$, সিমিটি $\frac{a^x - 1}{x}$ কত? [CU 08-09; RU 02-03]

$$Sol^n : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a}{1} = a^0 \log_e a \\ = \log_e a$$

www.boighar.com

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-2x}}{\ln(1+x)}$, $0 < x < 1$ এর মান কত?

[SU 04-05, KU 03-04]

$$Sol^n : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-2x}}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-2x}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-2x}}{1+x}$$

$$= 2$$

11. যখন $x \rightarrow 0$, সিমিটি $\frac{\sin^{-1} x}{x}$ কত? [CU 08-09; RU 07-08; IU 04-05]

$$Sol^n : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1$$

12. যখন $x \rightarrow 0$, সিমিটি $\frac{\tan^{-1} x}{x}$ কত? [DU 06-07]

$$Sol^n : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \frac{1}{1+0^2} = 1$$

13. যখন $x \rightarrow 0$, সিমিটি $\frac{\tan^{-1}(2x)}{x}$ কত?

[DU 07-08; CU 07-08; NU 06-07]

$$Sol^n : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+4x^2}}{1} = \frac{2}{1+4.0^2} \\ = 2$$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = ?$ [BUET 03-04]

$$Sol^n : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{3x^2} = ?$ [BUET 07-08]

$$Sol^n : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + 7 \sin 7x}{6x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + 49 \cos 7x}{6} = \frac{49}{6}$$

16. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = ?$ [KUET 05-06]

$$Sol^n : \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x}{2} \\ = \frac{3.3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$1. \text{ যদি } f(x) = \begin{cases} -x, & \text{যখন } x \leq 0 \\ x, & \text{যখন } 0 < x < 1 \text{ হয়, তবে} \\ 1-x, & \text{যখন } x \geq 1 \end{cases}$$

দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন এবং $x = 1$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন।

$$\text{সমাধান: } x = 0 \text{ বিন্দুতে, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 \text{ এবং } f(0) = -0 = 0$$

$$\text{যেহেতু } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \quad \text{সুতরাং} \\ x = 0 \text{ বিন্দুতে } f(x) \text{ অবিচ্ছিন্ন।}$$

$$x = 1 \text{ বিন্দুতে, } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x) = 1-1=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$$

$$\text{যেহেতু } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \text{ সুতরাং } x = 1 \\ \text{বিন্দুতে } f(x) \text{ বিচ্ছিন্ন।}$$

$$2. \text{ যদি } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 ax}{x^2}, & \text{যখন } x \neq 0 \text{ হয়, তবে} \\ 1 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$$

প্রমাণ কর যে $a = 1$ না হলে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হবে।

প্রমাণ: $x = 0$ বিন্দুতে,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin ax}{ax} \right)^2 \cdot a^2 \\ = 1 \times a^2 = a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin ax}{ax} \right)^2 \cdot a^2 \\ = 1 \times a^2 = a^2 \text{ এবং } f(0) = 1$$

$$a \neq 1 \text{ হলে, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq f(0)$$

এবং $a = 1$ হলে, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$

কাজেই, $a = 1$ না হলে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হবে।

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{যখন } x \neq 2 \\ 3 & \text{যখন } x = 2 \end{cases}$$

একটি বাস্তব ফাংশন। দেখাও যে, f ফাংশনটি $x = 2$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। f ফাংশনটিকে এরূপে সংজ্ঞায়িত কর যেন তা $x = 2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়।

প্রমাণ: $x = 2$ বিন্দুতে, $f(2) = 3$,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2) \\ = 2+2=4$$

$$\text{এবং } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+2) \\ = 2+2=4$$

যেহেতু $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq f(2)$ সুতরাং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ বিচ্ছিন্ন।

(বিটীয় অংশ): $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার জন্য নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হলো-

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{যখন } x \neq 2 \\ 4 & \text{যখন } x = 2 \end{cases}$$

প্রশ্নমালা IX C

1. (a) $[0, 4]$ ব্যবধিতে $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ ফাংশনের জন্য ল্যাপ্রাঙ্গের গড়মান উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর।

সমাধান: এখানে, $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

$$= x^3 - 5x^2 + 6x - x^2 + 5x - 6$$

$$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$Rf'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [(x+h)^3 - 6(x+h)^2 + 11(x+h) - 6 - (x^3 + 6x^2 - 11x + 6)]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 6x^2 - 12xh - 6h^2 + 11x + 11h - x^3 + 6x^2 - 11x]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 12xh - 6h^2 + 11h]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} [3x^2 + 3xh + h^2 - 12x - 6h + 11]$$

$$= 3x^2 - 12x + 11$$

$$\text{জ্ঞপ, } Lf'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} [3x^2 + 3xh + h^2 - 12x - 6h + 11]$$

$$= 3x^2 - 12x + 11$$

যেহেতু $Rf'(x) = Lf'(x)$, কাজেই x এর সকল মানের জন্য $f(x)$ ফাংশন $[0, 4]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং $[0, 4]$ খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য।

$f(x)$ ফাংশন ল্যাপ্রাঙ্গের গড়মান উপপাদ্যের সকল শর্ত পালন করে। অতএব ল্যাপ্রাঙ্গের গড়মান উপপাদ্যের শর্তানুসারে অন্তত: পক্ষে একটি বিন্দু $c \in]0, 4[$ এর জন্য $f(4) - f(0) = (4-0)f'(c) \dots (1)$ হবে।

$$\text{এখন, } f(4) = (4-1)(4-2)(4-3) = 6$$

$$\text{এবং } f(0) = (0-1)(0-2)(0-3) = -6$$

প্রদত্ত সমীকরণকে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$

$$f'(c) = 3c^2 - 12c + 11$$

$$(1) \text{ হতে } 6 + 6 = 4(3c^2 - 12c + 11)$$

$$\Rightarrow 3 = 3c^2 - 12c + 11$$

$$\Rightarrow 3c^2 - 12c + 8 = 0$$

$$c = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 96}}{2 \times 3} = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{12 \pm 4\sqrt{3}}{2 \times 3} = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$c = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \in]0, 4[$$

$\therefore]0, 4[$ ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশনে ল্যাপ্রাঙ্গের গড়মান উপপাদ্যের সত্যতা প্রমাণিত হলো।

(b) $]1, 1[$ ব্যবধিতে $f(x) = \frac{1}{x}$ ফাংশনের জন্য ল্যাপ্রাঙ্গের গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর।

সমাধান: প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f(0) = \frac{1}{0}, \text{ বিদ্যমান নয়।}$$

অর্থাৎ $x = 0$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশন অবিচ্ছিন্ন নয়।

$]1, 1[$ ব্যবধিতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন নয়।

সুতরাং প্রদত্ত ব্যবধিতে ফাংশনটির জন্য ল্যাপ্রাঙ্গের গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য নয়।

(c) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{যখন } -1 \leq x < 0 \\ x, & \text{যখন } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ ফাংশনের জন্য

$[-1, 1]$ ব্যবধিতে ল্যাপ্রাঙ্গের গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর।

সমাধান: প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{যখন } -1 \leq x < 0 \\ x, & \text{যখন } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

$$Rf'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (1) = 1$$

$$Lf'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} (-1) = -1$$

যেহেতু $Rf'(0) \neq Lf'(0)$, সেহেতু $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

∴ প্রদত্ত ব্যবধিতে ফাংশনটির জন্য ল্যাপ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য নয়।

2. x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনগুলির অন্তরক সহগ নির্ণয় কর : ১

$$2(a) (2x)^n - b^n \quad \text{[চ.'০২]}$$

$$\text{ধরি, } y = (2x)^n - b^n = 2^n x^n - b^n$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2^n \frac{d}{dx}(x^n) - \frac{d}{dx}(b^n) \\ &= 2^n(nx^{n-1}) - 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\{(2x)^n - b^n\} = 2^n nx^{n-1} \quad (\text{Ans.})$$

$$2(b) \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x} + x^2\sqrt{x} + \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} + \frac{5}{2} x^{\frac{5}{2}-1} - \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$= 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad (\text{Ans.})$$

$$2(c) \frac{d}{dx}(a^x + x^a - e^x)$$

$$= \frac{d}{dx}(a^x) + \frac{d}{dx}(x^a) - \frac{d}{dx}(e^x)$$

$$= a^x \ln a + a x^{a-1} - e^x \quad (\text{Ans.})$$

$$2(d) \frac{d}{dx}(\log_a x + \log x^a + e^{\ln x} + \ln x + e^x)$$

$$= \frac{d}{dx}(\log_a x + a \log x + x + \ln x + e^x)$$

$$= \frac{1}{x \ln a} + a \frac{1}{x \ln 10} + 1 + \frac{1}{x} + e^x$$

$$(e) \frac{d}{dx}(3 \sin x + 4 \ln x - 2 a^x + \ln x^a)$$

$$= \frac{d}{dx}(3 \sin x + 4 \ln x - 2 a^x + a \ln x)$$

$$= 3 \cos x + 4 \cdot \frac{1}{x} - 2 a^x \ln x + a \frac{1}{x}$$

3. মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনগুলির অন্তরক সহগ নির্ণয় কর :

$$(a) \sin 2x \quad \text{[চ.'০৫; ব.'১৩]}$$

$$\text{মনে করি, } f(x) = \sin 2x$$

$$f(x+h) = \sin 2(x+h) = \sin(2x+2h)$$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin 2x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(2x+2h) - \sin 2x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [2 \cos \frac{2x+2h+2x}{2} \sin \frac{2x+2h-2x}{2}]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot 2 \cos(2x+h) \sin h$$

$$= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos(2x+h)$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \cos(2x+0) = 2 \cos 2x$$

$$3.(b) \cos 3x \quad \text{[চ.'০২; বা.'১১]}$$

$$\text{মনে করি, } f(x) = \cos 3x.$$

$$f(x+h) = \cos 3(x+h) = \cos(3x+3h)$$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos 3x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(3x+3h) - \cos 3x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [2 \sin \frac{3x+3h+3x}{2} \sin \frac{3x-3h-3x}{2}]$$

$$= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \sin(3x+\frac{3h}{2}) \times - \lim_{\frac{3h}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin(3h/2)}{3h/2} \times \frac{3}{2}$$

$$[\because h \rightarrow 0 \therefore \frac{3h}{2} \rightarrow 0]$$

$$= 2 \sin(3x + 0) \cdot (-1 \cdot \frac{3}{2}) = -3 \sin 3x$$

3(c) $\cos ax$

[রা.'০১]

মনে করি, $f(x) = \cos ax$.

$$f(x+h) = \cos a(x+h) = \cos(ax+ah)$$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx} \{ f(x) \} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx} (\cos ax) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(ax+ah)-\cos ax}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [2 \sin \frac{ax+ah+ax}{2} \sin \frac{ax-ah-ax}{2}]$$

$$= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \sin(ax + \frac{ah}{2}) \times -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(ah/2)}{ah/2} \times \frac{a}{2}$$

$$= 2 \sin(ax + 0) \cdot (-1 \cdot \frac{a}{2}) = -a \sin ax$$

3(d) $\tan 2x$

[চ.'০১]

মনে করি, $f(x) = \tan 2x$.

$$f(x+h) = \tan 2(x+h) = \tan(2x+2h)$$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx} \{ f(x) \} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx} (\tan 2x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(2x+2h)-\tan 2x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\frac{\sin(2x+2h)}{\cos(2x+2h)} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x}]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\frac{\sin(2x+2h)\cos 2x - \sin 2x \cos(2x+2h)}{\cos(2x+2h)\cos 2x}]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{\sin(2x+2h-2x)}{\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{2h} \times 2 \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= 1 \times 2 \times \frac{1}{\cos(2x+0)\cos 2x} = \frac{2}{\cos^2 x}$$

$$= 2 \sec^2 2x$$

3(e) $\sec 2x$

[ষ. '০২,'০৭; চ.'০৭,'১০]

মনে করি, $f(x) = \sec 2x$.

$$f(x+h) = \sec 2(x+h) = \sec(2x+2h)$$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx} \{ f(x) \} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx} (\sec 2x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sec(2x+2h)-\sec 2x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\frac{1}{\cos(2x+2h)} - \frac{1}{\cos 2x}]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos(2x+2h)}{h \cos(2x+2h) \cos 2x}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{2x+2x+2h}{2} \sin \frac{2x+2h-2x}{2}}{h \cos(2x+2h) \cos 2x}$$

$$= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(2x+h)}{\cos(2x+2h) \cos 2x} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= 2 \frac{\sin(2x+0)}{\cos(2x+0) \cos 2x} \times 1$$

$$= \frac{2 \sin 2x}{\cos 2x \cos 2x} = 2 \tan 2x \sec 2x$$

3(f) e^{2x}

[রা.'০৩]

মনে করি, $f(x) = e^{2x}$.

$$f(x+h) = e^{2(x+h)} = e^{2x+2h}$$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx} \{ f(x) \} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx} (e^{2x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2x+2h}-e^{2x}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2x} \cdot e^{2h} - e^{2x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2x}}{h} (e^{2h}-1)$$

$$= e^{2x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2h}-1}{2h} \times 2$$

$$= e^{2x} \times 1 \times 2 = 2e^{2x}, [\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1]$$

3. (g) $\operatorname{cosec} ax$

মনে করি, $f(x) = \operatorname{cosec} ax$.

$$f(x+h) = \operatorname{cosec}(ax+ah)$$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ f(x) \} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ \frac{d}{dx} (\cosec ax) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosec(ax+ah) - \cosec ax}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{\sin(ax+ah)} - \frac{1}{\sin ax} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin ax - \sin(ax+ah)}{h \sin(ax+ah) \sin ax} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{ax - ax - ah}{2} \cos \frac{ax + ax + ah}{2}}{h \sin(ax+ah) \sin ax} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin(-h) \cos(ax+h)}{h \sin(ax+ah) \sin ax} \\ &= -2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(ax+h)}{\sin(ax+ah) \sin ax} \\ &= -2 \times 1 \times \frac{\cos(ax+0)}{\sin(ax+0) \sin ax} \\ &= -2 \times \frac{\cos ax}{\sin ax \sin ax} \\ &= -2 \cot ax \cosec ax \end{aligned}$$

3(h) $\cos 2x$ [মা.বো. '08; ব.'11]

মনে করি, $f(x) = \cos 2x$.

$$f(x+h) = \cos 2(x+h) = \cos(2x+2h)$$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ f(x) \} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ \frac{d}{dx} (\cos 2x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(2x+2h) - \cos 2x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [2 \sin \frac{2x+2h+2x}{2} \sin \frac{2x-2h-2x}{2}] \\ &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \sin(2x+h) \times -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= 2 \sin(2x+0). (-1) = -2 \sin 2x \end{aligned}$$

3(i) e^{ax} [ব.'০৫, '০৯; ঢ.'০৬; য., দি.'১১; কু.'১৩].

মনে করি, $f(x) = e^{ax}$.

$$f(x+h) = e^{a(x+h)} = e^{ax+ah}$$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ f(x) \} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ \frac{d}{dx} (e^{ax}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ax+ah} - e^{ax}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ax} \cdot e^{ah} - e^{ax}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ax}}{h} (e^{ah} - 1) \\ &= e^{ax} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\left\{ (1+ah + \frac{(ah)^2}{2!} + \frac{(ah)^3}{3!} + \dots) - 1 \right\} \right] = \\ &\quad e^{ax} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(ah + \frac{a^2 h^2}{2!} + \frac{a^3 h^3}{3!} + \dots \right) \\ &= e^{ax} \lim_{h \rightarrow 0} \left(a + \frac{a^2 h}{2!} + \frac{a^3 h^2}{3!} + \dots \right) + h - \text{এর উচ্চাত} \\ &\quad \text{সম্প্রলিপ্ত পদসমূহ} \\ &= e^{ax} (a + 0 + 0 + \dots) = ae^{ax} \end{aligned}$$

3(j) $\log_a x$ [চ.'০৮; ঢ.'১১; য.'১২, '১৪; দি.'১৪]

ধরি, $f(x) = \log_a x = \log_a e \times \log_e x$

$$= \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$f(x+h) = \frac{\ln(x+h)}{\ln a}$$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx} \{ f(x) \} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx} (\log_a x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{\ln(x+h)}{\ln a} - \frac{\ln x}{\ln a} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h \ln a} \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h \ln a} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{\ln a} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{h}{x} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3} \frac{h^3}{x^3} - \dots \right]$$

$$= \frac{1}{\ln a} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{h}{x^2} + h - \text{এর উচ্চাত সম্প্রলিপ্ত পদসমূহ} \right]$$

$$= \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x} - 0 = \frac{1}{x \ln a}$$

4.(a) মূল নিয়মে $x = 2$ -তে x^5 এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = x^5$. $f(2) = 2^5$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 2^5}{x - 2} \\ &= 5 \times (2)^4 \quad [\because \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}] \\ &= 5 \times 16 = 80 \end{aligned}$$

4(b) মূল নিয়মে $x = a$ -তে e^{mx} এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

$$\begin{aligned} \text{মনে করি, } f(x) &= e^{mx} \quad f(a) = e^{ma} \\ f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{mx} - e^{ma}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{ma}(e^{mx-ma} - 1)}{x - a} \\ &= e^{ma} \lim_{x-a \rightarrow 0} \frac{e^{m(x-a)} - 1}{m(x-a)} \times m \\ &= me^{ma} \cdot 1 \quad [\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1] \\ &= me^{ma} \end{aligned}$$

4(c) মূল নিয়মে $x = \frac{\pi}{4}$ -তে $\tan x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

$$\text{মনে করি, } f(x) = \tan x. \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}}{(x - \frac{\pi}{4}) \cos x \cos \frac{\pi}{4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{(x - \frac{\pi}{4}) \cos x \cos \frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} \times \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x \cos \frac{\pi}{4}} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{(1/\sqrt{2})^2} = 2 \end{aligned}$$

প্রশ্নাবলী IX D

x এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর :

$$\begin{aligned} 1(a) \quad &\frac{d}{dx} \{ x^2 \ln(x) \} \\ &= x^2 \frac{d}{dx} \{ \ln(x) \} + \ln(x) \frac{d}{dx} (x^2) \\ &= x^2 \frac{1}{x} + \ln(x) \cdot (2x) = x + 2x \ln(x) \end{aligned}$$

$$1(b) \quad 5e^x \log_a x \quad [\text{ব.'০৮; পি.'১৩}]$$

$$\begin{aligned} \text{মনে করি, } y &= 5e^x \log_a x \\ \frac{dy}{dx} &= 5 \{ e^x \frac{d}{dx} (\log_a x) + \log_a x \frac{d}{dx} (e^x) \} \\ &= 5 \{ e^x \frac{1}{x \ln a} + \log_a x \cdot e^x \} \\ \therefore \frac{d}{dx} \{ 5e^x \log_a x \} &= 5e^x \{ \frac{1}{x \ln a} + \log_a x \} \end{aligned}$$

$$1(c) \quad \log_{10} x \quad [\text{পি.'১১, '১৩}]$$

$$\begin{aligned} \text{মনে করি, } y &= \log_{10} x = \log_{10} e \times \log_e x \\ \Rightarrow y &= \frac{1}{\log_e 10} \times \ln x = \frac{1}{\ln 10} \times \ln x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\ln 10} \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x} \\ \frac{d}{dx} (\log_{10} x) &= \frac{1}{x \ln 10} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

$$1(d) \quad \log_a x \quad [\text{জ.'১৩}]$$

$$\begin{aligned} \text{মনে করি, } y &= \log_a x = \log_a e \times \log_e x \\ \Rightarrow y &= \frac{1}{\log_e a} \times \ln x = \frac{1}{\ln a} \times \ln x \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln a} \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} \quad (\text{Ans.})$$

2. (a) $a^x \ln(x) + b e^x \sin x$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ a^x \ln(x) + b e^x \sin x \} &= a^x \frac{d}{dx} \{ \ln(x) \} \\ &+ \ln(x) \frac{d}{dx}(a^x) + b \{ e^x \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \frac{d}{dx}(e^x) \} \\ &= a^x \frac{1}{x} + \ln(x)(a^x \ln a) + b \{ e^x(\cos x) + \sin x(e^x) \} \\ &= a^x \left\{ \frac{1}{x} + \ln a \ln(x) \right\} + b e^x(\cos x + \sin x) \end{aligned}$$

2(b) $x^2 \log_a x - x^3 \ln a^x + 6x e^x \ln x$

ধরি, $y = x^2 \log_a x - x^3 \ln a^x + 6x e^x \ln x$
 $= x^2 \log_a x - x^4 \ln a + 6x e^x \ln x$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{d}{dx}(\log_a x) + \log_a x \frac{d}{dx}(x^2) - \ln a \frac{d}{dx}(x^4) + 6 \{ x e^x \frac{d}{dx}(\ln x) + x \ln x \frac{d}{dx}(e^x) + e^x \ln x \frac{d}{dx}(x) \} \\ &= x^2 \frac{1}{x \ln a} + \log_a x \cdot (2x) - \ln a \cdot (4x^3) \\ &\quad + 6 \{ x e^x \cdot \frac{1}{x} + x \ln x \cdot e^x + e^x \ln x \cdot 1 \} \\ &= x \left(\frac{1}{\ln a} + 2 \log_a x - 4x^2 \ln a \right) \\ &\quad + 6 e^x (1 + x \ln x + \ln x) \end{aligned}$$

3. (a) মনে করি, $y = \frac{x}{x^2 + a^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + a^2) \frac{d}{dx}(x) - x \frac{d}{dx}(x^2 + a^2)}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + a^2) \cdot 1 - x(2x + 0)}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{x^2 + a^2 - 2x^2}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x^2 + a^2} \right) = \frac{a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^2}$$

3(b) $\frac{d}{dx} \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right) \quad [\text{দি. } '10; \text{ ব. } '13]$

$$\begin{aligned} &= \frac{(1 + \tan x) \frac{d}{dx}(1 - \tan x) - (1 - \tan x) \frac{d}{dx}(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2} \\ &= \frac{(1 + \tan x)(-\sec^2 x) - (1 - \tan x)(\sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2} \\ &= \frac{(-1 - \tan x - 1 + \tan x) \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} \\ &= \frac{-2 \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

3(c) $\frac{d}{dx} \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \right) = \quad [\text{ক. } '08]$

$$\frac{(1 + \cos x) \frac{d}{dx}(1 + \sin x) - (1 + \sin x) \frac{d}{dx}(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)^2} =$$

$$\frac{(1 + \cos x)(\cos x) - (1 + \sin x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + \sin x + 1}{(1 + \cos x)^2} \quad (\text{Ans.})$$

3(d) $\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

[ট. '13; ব. '07; গো. '09; চ. '12; দি. '18]

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) =$$

প্রশ্নমালা IX D

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\sin x) \frac{d}{dx}(1+\sin x)-(1+\sin x) \frac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2} \\ &= \frac{(1-\sin x)(\cos x)-(1+\sin x) \frac{d}{dx}(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} \\ &= \frac{(1-\sin x+1+\sin x) \cos x}{(1-\sin x)^2} \\ &= \frac{2 \cos x}{(1-\sin x)^2} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

3(e) $\frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$

[ব.'১০; রা., কু.'০৮; য.'১৩; ঢা.'১৮]

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x} &= \frac{\cos x - (2 \cos^2 x - 1)}{1 - \cos x} \\ &= \frac{1 + \cos x - 2 \cos^2 x}{1 - \cos x} \\ &= \frac{(1 - \cos x)(1 + 2 \cos x)}{1 - \cos x} = 1 + 2 \cos x \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x} \right) &= -2 \sin x \end{aligned}$$

3(f) $\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$ [ঢা.'০৯; ব.'০৯, '১১; য.'১৮]

$$\begin{aligned} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} &= \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}} \\ &= \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2}} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} = 1 \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} \right) &= 0 \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

3(g) ধরি, $y = \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}}$ [প্র.ভ.গ.'০৫]

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{1+x^2} \frac{d}{dx}(x \ln x) - x \ln x \frac{d}{dx}(\sqrt{1+x^2})}{(\sqrt{1+x^2})^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \left[\sqrt{1+x^2} \left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \right) - x \ln x \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1+x^2} \left[\frac{(1+x^2)(1+\ln x) - x^2 \ln x}{\sqrt{1+x^2}} \right] \\ &\quad \frac{d}{dx} \left(\frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1+x^2 + \ln x}{(\sqrt{1+x^2})^3} \end{aligned}$$

বিকল্প পদ্ধতি : ধরি, $y = \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx}(x) + \frac{1}{\ln x} \frac{d}{dx}(\ln x) - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{d}{dx}(\sqrt{1+x^2}) \right] \\ &= \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right] \\ &= \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{\ln x(1+x^2) + 1+x^2 - x^2 \ln x}{x(1+x^2) \ln x} \\ &\quad \frac{d}{dx} \left(\frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1+x^2 + \ln x}{(\sqrt{1+x^2})^3} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা IX E

1.(a) $(1 + \sin 2x)^2$

[চ.'০৮]

ধরি, $y = (1 + \sin 2x)^2$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2(1 + \sin 2x) \frac{d}{dx}(1 + \sin 2x) \\ &= 2(1 + \sin 2x)(0 + \cos 2x) \frac{d}{dx}(2x) \\ &= 2(1 + \sin 2x) \cos 2x \quad (2.1) \\ \frac{d}{dx} \{(1+\sin 2x)^2\} &= 4 \cos 2x(1 + \sin 2x) \end{aligned}$$

1(b) a^{px+q}

[চ.'০১]

ধরি, $y = a^{px+q}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a^{px+q} \cdot \ln a \frac{d}{dx}(px+q) \\ &\quad [\because \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a] \\ &= a^{px+q} \cdot \ln a (p \cdot 1 + 0) \\ \frac{d}{dx}(a^{px+q}) &= p a^{px+q} \cdot \ln a \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

1(c) $a^{\cos x}$

[ট. '০০]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(a^{\cos x}) &= a^{\cos x} \cdot \ln a \cdot \frac{d}{dx}(\cos x) \\ &= a^{\cos x} \cdot \ln a \cdot (-\sin x) \\ &= -a^{\cos x} \sin x \cdot \ln a \end{aligned}$$

1(d) $10^{\ln(\sin x)}$

[সি. '০২ '০৫; ট. '০৯]

ধরি, $y = 10^{\ln(\sin x)}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 10^{\ln(\sin x)} \cdot \ln 10 \cdot \frac{d}{dx}\{\ln(\sin x)\} \\ &= 10^{\ln(\sin x)} \cdot \ln 10 \cdot \frac{1}{\sin x} \frac{d}{dx}(\sin x) \\ &= 10^{\ln(\sin x)} \cdot \ln 10 \cdot \frac{1}{\sin x} (\cos x) \\ \frac{d}{dx}\{10^{\ln(\sin x)}\} &= 10^{\ln(\sin x)} \cdot \ln 10 \cdot \cot x \end{aligned}$$

1(e) $10^{\ln(\tan x)}$ ধরি, $y = 10^{\ln(\tan x)}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 10^{\ln(\tan x)} \cdot \ln 10 \cdot \frac{d}{dx}\{\ln(\tan x)\} \\ &= 10^{\ln(\tan x)} \cdot \ln 10 \cdot \frac{1}{\tan x} \frac{d}{dx}(\tan x) \\ &= 10^{\ln(\sin x)} \cdot \ln 10 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} (\sec^2 x) \\ &= 10^{\ln(\sin x)} \cdot \ln 10 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= 10^{\ln(\sin x)} \cdot \ln 10 \cdot \frac{2}{2 \sin x \cos x} \\ &= 10^{\ln(\sin x)} \cdot \ln 10 \cdot \frac{2}{\sin 2x} \\ &= 2 \operatorname{cosec} 2x \cdot 10^{\ln(\sin x)} \cdot \ln 10 \end{aligned}$$

1(f) $a^{\ln(\cos x)}$

[রা. '০৫]

ধরি, $y = a^{\ln(\cos x)}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a^{\ln(\cos x)} \cdot \ln a \cdot \frac{d}{dx}\{\ln(\cos x)\} \\ &= a^{\ln(\cos x)} \cdot \ln a \cdot \frac{1}{\cos x} \frac{d}{dx}(\cos x) \\ &= a^{\ln(\cos x)} \cdot \ln a \cdot \frac{1}{\cos x} (-\sin x) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\{a^{\ln(\cos x)}\} = -\tan x a^{\ln(\cos x)} \ln a$$

1(g) $e^{2 \ln(\tan 5x)}$ [ব. '০৬, '১১; কু. '০৭; সি. '১০, '১৩]

$$e^{2 \ln(\tan 5x)} = e^{\ln(\tan 5x)^2} = (\tan 5x)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\{e^{2 \ln(\tan 5x)}\} &= 2 \tan 5x \frac{d}{dx}(\tan 5x) \\ &= 2 \tan 5x (\sec^2 5x) \frac{d}{dx}(5x) \\ &= 2 \tan 5x \sec^2 5x (5) \\ &= 10 \tan 5x \sec^2 5x \end{aligned}$$

1(h) $(\ln \sin x^2)^n$

[সি. '০৬; রা. '০৯]

ধরি, $y = (\ln \sin x^2)^n$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= n (\ln \sin x^2)^{n-1} \frac{d}{dx}(\ln \sin x^2) \\ &= n (\ln \sin x^2)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sin x^2} \frac{d}{dx}(\sin x^2) \\ &= n (\ln \sin x^2)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sin x^2} (\cos x^2) (2x) \\ \frac{d}{dx}\{(\ln \sin x^2)^n\} &= nx \cot x^2 (\ln \sin x^2)^{n-1} \end{aligned}$$

1(i) $\cos(e^{\tan^2 2x})$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\{\cos(e^{\tan^2 2x})\} &= \frac{d\{\cos(e^{\tan^2 2x})\}}{d(e^{\tan^2 2x})} \\ &\quad \frac{d(e^{\tan^2 2x})}{d(\tan^2 2x)} \frac{d(\tan^2 2x)}{d(2x)} \frac{d(2x)}{dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\sin(e^{\tan^2 2x}) \cdot e^{\tan^2 2x} \cdot 2 \tan 2x \cdot \sec^2 2x \cdot 2 \\ &= -4 \tan 2x \sec^2 2x \sin(e^{\tan^2 2x}) e^{\tan^2 2x} \end{aligned}$$

1(j) $\frac{d}{dx}(\sin^3 x^2)$

[ট. '০৯]

$$\begin{aligned} &= \frac{d(\sin x^2)^3}{d(\sin x^2)} \frac{d(\sin x^2)}{d(x^2)} \frac{d(x^2)}{dx} \\ &= 3(\sin x^2)^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x \\ &= 6x \sin^2 x^2 \cos x^2 \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

1(k) $e^{5 \ln(\tan x)}$

[ট. '১২]

$$e^{\ln(\tan x)^5} = (\tan x)^5$$

$$\frac{d}{dx} \{ e^{5 \ln(\tan x)} \} = 5 \tan^4 x \frac{d}{dx} (\tan x)$$

$$= 5 \tan^4 x \sec^2 x$$

1(l) $x^n \ln(2x)$

[ট. '০৭]

মনে করি, $y = x^n \ln(2x)$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^n \frac{d}{dx} \{ \ln(2x) \} + \ln(2x) \cdot \frac{d}{dx} (x^n) \\ &= x^n \frac{1}{2x} \cdot \frac{d}{dx} (2x) + \ln(2x) \cdot n x^{n-1} \\ &= x^{n-1} \frac{1}{2} \cdot (2) + n x^{n-1} \ln(2x) \\ \frac{d}{dx} \{ x^n \ln(2x) \} &= x^{n-1} \{ 1 + n \ln(2x) \} \end{aligned}$$

1(m) $x\sqrt{\sin x}$

[ট. '০৮]

$$\begin{aligned} \text{মনে করি, } y &= x\sqrt{\sin x} = x(\sin x)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{dy}{dx} &= x \frac{d}{dx} \{ (\sin x)^{\frac{1}{2}} \} + (\sin x)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} (x) \\ &= x \cdot \frac{1}{2} (\sin x)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} (\sin x) + \sqrt{\sin x} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2} x \frac{1}{\sqrt{\sin x}} (\cos x) + \sqrt{\sin x} \\ \frac{d}{dx} (x\sqrt{\sin x}) &= \frac{x \cos x + 2 \sin x}{2\sqrt{\sin x}} \end{aligned}$$

1(n) $e^{ax} \tan^2 x$

[ট. '০৯]

মনে করি, $y = e^{ax} \tan^2 x$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{ax} \frac{d}{dx} (\tan^2 x) + \tan^2 x \frac{d}{dx} (e^{ax}) \\ &= e^{ax} (2 \tan x) \frac{d}{dx} (\tan x) + \tan^2 x \cdot e^{ax} \cdot (a) \\ &= e^{ax} \tan x (2 \sec^2 x + a \tan x) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

2.(a) $\ln(\cos x)$

[ঝ. '০৩, '০৮, '১০]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ \ln(\cos x) \} &= \frac{1}{\cos x} \frac{d}{dx} (\cos x) \\ &= \frac{1}{\cos x} (-\sin x) = -\tan x \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ \ln(e^x + e^{-x}) \} &= \frac{1}{e^x + e^{-x}} \frac{d}{dx} (e^x + e^{-x}) \\ &= \frac{1}{e^x + e^{-x}} (e^x - e^{-x}) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

2(c) $\log_x a$

[ঝ. '০১; ট. '০৬, '০৮]

$$\begin{aligned} \log_x a &= \log_x e \times \log_e a = \ln a \frac{1}{\log_e x} \\ &= \ln a \frac{1}{\ln x} = \ln a (\ln x)^{-1} \\ \therefore \frac{d}{dx} (\log_x a) &= \ln a \{-1(\ln x)^{-2} \frac{d}{dx} (\ln x)\} \\ &= -\ln a \frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\ln a}{x(\ln x)^2} \end{aligned}$$

2(d) $\log_{10} 3x$

[ঝ. '০৬, '১৩]

$$\begin{aligned} \log_{10} 3x &= \log_{10} e \times \log_e 3x = \frac{1}{\log_e 10} \ln(3x) \\ \frac{d}{dx} (\log_{10} 3x) &= \frac{1}{\ln 10} \frac{1}{3x} \frac{d}{dx} (3x) \\ &= \frac{1}{\ln 10} \frac{1}{3x} (3.1) = \frac{1}{x \ln 10} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

2(e) $\log_a x + \log_x a$

$$\begin{aligned} &= \log_a e \times \log_e x + \log_x e \times \log_e a \\ &= \frac{1}{\log_e a} \times \ln x + \frac{1}{\log_e x} \times \ln a \\ &= \frac{1}{\ln a} \times \ln x + \ln a \times (\ln x)^{-1} \\ \frac{d}{dx} (\log_a x + \log_x a) &= \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x} + \ln a \times \{-1(\ln x)^{-2} \frac{1}{x}\} \\ &= \frac{1}{x \ln a} - \frac{\ln a}{x(\ln x)^2} \end{aligned}$$

2(f) ধরি, $y = \log_x \tan x = \log_x e \times \log_e \tan x$

$$= \frac{1}{\log_e x} \times \ln(\tan x) = \frac{\ln(\tan x)}{\ln x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\ln x \frac{d}{dx} \{ \ln(\tan x) \} - \ln(\tan x) \frac{d}{dx} (\ln x)}{(\ln x)^2} \\ &= \frac{\ln x \frac{1}{\tan x} \sec^2 x - \ln(\tan x) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} \\ &= \frac{\ln x \frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x} \ln(\tan x)}{(\ln x)^2} \\ &= \frac{\ln x \frac{2}{\sin 2x} - \frac{1}{x} \ln(\tan x)}{(\ln x)^2} \\ &= \frac{2x \ln x \cos 2x - \ln(\tan x)}{x(\ln x)^2} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

2(g) $\ln(\sin 2x)$ [জ. '১১; সি. '১৩]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ \ln(\sin 2x) \} &= \frac{1}{\sin 2x} \frac{d}{dx} (\sin 2x) \\ &= \frac{1}{\sin 2x} (\cos 2x) \frac{d}{dx} (2x) = 2 \cot 2x \end{aligned}$$

(h) $\ln(\sin x^2)$ [জ. '১২]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ \ln(\sin x^2) \} &= \frac{1}{\sin x^2} \frac{d}{dx} (\sin x^2) \\ &= \frac{1}{\sin x^2} (\cos x^2) \frac{d}{dx} (x^2) = 2x \cot x^2 \end{aligned}$$

3(a) $\ln [x - \sqrt{x^2 - 1}]$ [জ. '০২; কু. '০৩; ন. '০৫]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ \ln (x - \sqrt{x^2 - 1}) \} &= \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \frac{d}{dx} (x - \sqrt{x^2 - 1}) \\ &= \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \left\{ 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} (2x) \right\} \\ &= \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \left\{ \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right\} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

3(b) $\ln [x - \sqrt{x^2 + 1}]$ [জ. '০২; কু. '০৩, '১০]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ \ln (x - \sqrt{x^2 + 1}) \} &= \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \frac{d}{dx} (x - \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \left\{ 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} (2x) \right\} \\ &= \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \left\{ \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right\} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

3(c) $\ln (\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b})$ [কু. '০১]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ \ln (\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}) \} &= \frac{1}{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}} \frac{d}{dx} (\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{x-a}} + \frac{1}{2\sqrt{x-b}} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}} \left\{ \frac{\sqrt{x-b} + \sqrt{x-a}}{2\sqrt{x-a}\sqrt{x-b}} \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

3(d) $\ln \left\{ e^x \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{3/2} \right\}$ [ন. '০০]

$$\begin{aligned} \text{ধরি, } y &= \ln \left\{ e^x \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{3/2} \right\} \\ &= \ln e^x + \frac{3}{2} \{ \ln (x-1) - \ln (x+1) \} \\ &= x + \frac{3}{2} \{ \ln (x-1) - \ln (x+1) \} \\ \frac{dy}{dx} &= 1 + \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right\} \\ &= 1 + \frac{3}{2} \left\{ \frac{x+1-x-1}{(x-1)(x+1)} \right\} \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{3}{2} \left\{ \frac{2}{x^2 - 1} \right\} = \frac{x^2 - 1 + 3}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \quad (\text{Ans.})$$

www.boighar.com

4. (a) $\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$ [চ. '০৭; য. '০৬]

$$\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{-\cos 2x}{1} = -\cos 2x$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} \right) = \sin 2x \cdot 2 = 2 \sin 2x$$

4(b) $\left(\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} \right)^2$ [ক. '০৩]

$$= \left(\frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} \right)^2 = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 = \tan^2 x$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} \right)^2 &= 2 \tan x \frac{d}{dx} (\tan x) \\ &= 2 \tan x \sec^2 x \end{aligned}$$

4(c) $\ln \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ [জ. '০৭, '১৩; রা. '১১; কু. '১৪]

$$= \ln \sqrt{\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}} = \ln \sqrt{\tan^2 \frac{x}{2}} = \ln \tan \frac{x}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \ln \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \right\} = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x \quad (\text{Ans.})$$

4(d) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

[প.ত.প. '৮৩; রা. '১১]

$$\text{ধরি, } y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x} \frac{d}{dx}(\sqrt{1+x}) - \sqrt{1+x} \frac{d}{dx}(\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1-x})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \cdot 1 - \sqrt{1+x} \frac{1}{2\sqrt{1-x}} (-1)}{1-x}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \cdot 1 - \sqrt{1+x} \frac{1}{2\sqrt{1-x}} (-1)}{1-x}$$

$$= \frac{1-x+1+x}{2(1-x)\sqrt{(1+x)(1-x)}} = \frac{2}{2(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

4.(e) $\ln^3 \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ [দি. '১২; প.ত.প. '০৫]

$$= \ln \left(\frac{2 \sin^2(x/2)}{2 \cos^2(x/2)} \right)^{1/3} = \frac{1}{3} \ln \tan^2 \frac{x}{2}$$

$$= \frac{2}{3} \ln \tan \frac{x}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\ln^3 \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \right) = \frac{2 \sec^2(x/2)}{3 \tan(x/2)} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}} = \frac{2}{3} \frac{1}{2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1}{\sin x} = \frac{2}{3} \cos ec x$$

5. (a) $\sin^2 [\ln (\sec x)]$ [রা. '০৭, '১৩; কু.সি., মা.বো. '০৯; চ. '১১; জ. '১২; য., দি. '১৩]

$$\text{ধরি, } y = \sin^2 [\ln (\sec x)]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d\{\sin[\ln(\sec x)]\}^2}{d\{\sin[\ln(\sec x)]\}} \cdot \frac{d\{\sin[\ln(\sec x)]\}}{d\{\ln(\sec x)\}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d\{\ln(\sec x)\}}{d(\sec x)} \frac{d(\sec x)}{dx} \\ &= 2 \sin[\ln(\sec x)] \cos[\ln(\sec x)] \frac{1}{\sec x} \\ &\quad \sec x \tan x \\ &= \tan x \sin[2 \ln(\sec x)] \end{aligned}$$

5(b) $\sin^2\{\ln(x^2)\}$ [ঝ. '০৭, '০৮; ব. '০৬, '১৩; ঢ. সি. '১৪]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\sin^2\{\ln(x^2)\}] &= \frac{d[\sin\{\ln(x^2)\}]^2}{d[\sin\{\ln(x^2)\}]} \\ &= \frac{d[\sin\{\ln(x^2)\}]}{d[\ln(x^2)]} \frac{d[\ln(x^2)]}{d(x^2)} \frac{d(x^2)}{dx} \\ &= 2 \sin\{\ln(x^2)\} \cos\{\ln(x^2)\} \frac{1}{x^2} \cdot 2x \\ &= \frac{2}{x} \sin\{2 \ln(x^2)\} = \frac{2}{x} \sin\{4 \ln(x)\} \end{aligned}$$

5(c) $\sqrt{\sin \sqrt{x}}$ [ঢ. '০১; ঢ. '০৫, '০৭]

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} (\sqrt{\sin \sqrt{x}}) \\ &= \frac{d(\sqrt{\sin \sqrt{x}})}{d(\sin \sqrt{x})} \frac{d(\sin \sqrt{x})}{d(\sqrt{x})} \frac{d(\sqrt{x})}{dx} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sin \sqrt{x}}} \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\cos \sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin \sqrt{x}}} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

5(d) $\cos(\ln x) + \ln(\tan x)$ [ঝ. '০৩; সি. '০৬]

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \{\cos(\ln x) + \ln(\tan x)\} \\ &= \frac{d}{dx} \{\cos(\ln x)\} + \frac{d}{dx} \{\ln(\tan x)\} \\ &= -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x \\ &= -\frac{1}{x} \sin(\ln x) + \frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{2 \sin x \cos x} - \frac{1}{x} \sin(\ln x) \\ &= 2 \operatorname{cesec} 2x - \frac{1}{x} \sin(\ln x) \end{aligned}$$

5(e) $2 \operatorname{cosec} 2x \cos(\ln \tan x)$ [ঝ. '০৬]

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \{2 \operatorname{cosec} 2x \cos(\ln \tan x)\} \\ &= 2 [\operatorname{cosec} 2x \frac{d}{dx} \{\cos(\ln \tan x)\} + \\ &\quad \cos(\ln \tan x) \frac{d}{dx} (\operatorname{cosec} 2x)] \\ &= 2 [\operatorname{cosec} 2x \{-\sin(\ln \tan x)\} \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot \\ &\quad \sec^2 x + \cos(\ln \tan x) (-\operatorname{cosec} 2x \cot 2x \cdot 2)] \\ &= 2 [-\operatorname{cosec} 2x \sin(\ln \tan x) \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \operatorname{cosec} 2x \cot 2x \cos(\ln \tan x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2[-\operatorname{cosec} 2x \sin(\ln \tan x) \frac{2}{2 \sin x \cos x} - 2 \operatorname{cosec} 2x \cot 2x \cos(\ln \tan x)] \\ &= -4[\operatorname{cosec}^2 2x \sin(\ln \tan x) + \operatorname{cosec} 2x \cot 2x \cos(\ln \tan x)] \end{aligned}$$

5(f) $\frac{d}{dx} \{1 + \tan(1 + \sqrt{x})\}^{1/3}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \{1 + \tan(1 + \sqrt{x})\}^{\frac{1}{3}-1} \{0 + \sec^2(1 + \sqrt{x})\} \\ &\quad \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{x}} \{1 + \tan(1 + \sqrt{x})\}^{-\frac{2}{3}} \sec^2(1 + \sqrt{x})$$

5(g) $\frac{d}{dx} (\sqrt{\tan e^{x^2}})$ [ঝ. '০৯]

$$= \frac{d(\sqrt{\tan e^{x^2}})}{d(\tan e^{x^2})} \frac{d(\tan e^{x^2})}{d(e^{x^2})} \frac{d(e^{x^2})}{d(x^2)} \frac{d(x^2)}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\tan e^{x^2}}} \sec^2 e^x \cdot e^x \cdot 2x = \frac{x e^x \sec^2 e^x}{\sqrt{\tan e^x}}$$

5(h) $\frac{d}{dx} \{ \sin^2 \log(\sec x) \}$ [সি.'১২]

$$= 2 \sin \{ \log(\sec x) \} \cdot \cos \{ \log(\sec x) \} \times \frac{d}{dx} \{ \log(\sec x) \}$$

$$= \sin \{ 2 \log(\sec x) \} \times \frac{1}{\sec x \ln 10} \frac{d}{dx} (\sec x)$$

$$= \frac{\sin \{ 2 \log(\sec x) \}}{\sec x \ln 10} \sec x \cdot \tan x$$

$$= \frac{\sin \{ 2 \log(\sec x) \} \cdot \tan x}{\ln 10}$$

5(i) $\frac{d}{dx} (\sin \sqrt{x})$ [সি.'১২; কু.'১৩]

$$= \cos \sqrt{x} \frac{d}{dx} (\sqrt{x})$$

$$= \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

6.(a) ধরি, $y = x^2 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ [রা.'০১]

$$\therefore \ln y = 2 \ln x + \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]$$

ইহাকে এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= 2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} (-1) \right] \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= y \left[\frac{2}{x} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} \right\} \right] \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \left[\frac{2}{x} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} \right\} \right] \\ &= 2x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{x^2}{\sqrt{(1+x)(1-x)^{3/2}}} \end{aligned}$$

6(b) $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$ [কু.'০৮; ঢা.'০৬, '০৯; য.'১৩]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\sqrt{e^{\sqrt{x}}}) &= \frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}} \frac{d}{dx} (e^{\sqrt{x}}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}} e^{\sqrt{x}} \frac{d}{dx} (\sqrt{x}) \\ &= \frac{(e^{\sqrt{x}})^{1-\frac{1}{2}}}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}{4\sqrt{x}} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

6.(c) $\frac{1}{\sqrt{x+1+\sqrt{x+2}}}$ [বি.'০০]

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})} \\ &= \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}}{x+1 - x-2} = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1+\sqrt{x+2}}} \right) &= \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\ &= -\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{(x+2)(x+1)}} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

6(d) $\frac{d}{dx} \left\{ \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x} \right\}$ [কু.'০৯]

$$\begin{aligned} &= \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x} \left[\frac{1}{(x+1)^2} \frac{d}{dx} (x+1)^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{x-1}} \frac{d}{dx} (\sqrt{x-1}) - \frac{1}{(x+4)^3} \frac{d}{dx} (x+4)^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{e^x} \frac{d}{dx} (e^x) \right] \\ &= \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x} \left[\frac{2(x+1)}{(x+1)^2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{x-1}} \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{3(x+4)^2}{(x+4)^3} - \frac{1}{e^x} (e^x) \right] \\ &= \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x} \left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1 \right] \end{aligned}$$

7.(a) $\frac{\ln(\cos x)}{x}$ [জ.'০৬; সি.'০৭; '০৯, '০১, '১১; ব.'১০]

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{\ln(\cos x)}{x} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x \frac{d}{dx} \{ \ln(\cos x) - \ln(\cos x) \frac{d}{dx}(x) \}}{x^2} \\
 &= \frac{x \frac{1}{\cos x} (-\sin x) - \ln(\cos x).1}{x^2} \\
 &= \frac{\{x \tan x + \ln(\cos x)\}}{x^2}
 \end{aligned}$$

7(b) ধরি, $y = \frac{e^{-3x}(3x+5)}{7x-1}$ [য. '০৫]

$$\begin{aligned}
 \ln y &= \ln e^{-3x} + \ln(3x+5) - \ln(7x-1) \\
 &= -3x + \ln(3x+5) - \ln(7x-1)
 \end{aligned}$$

ইহাকে এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= -3 + \frac{1}{3x+5}(3) - \frac{1}{7x-1}(7) \\
 &= \frac{-3(21x^2 + 32x - 5) + 21x - 3 - 21x - 35}{(3x+5)(7x-1)} \\
 \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= y \frac{-63x^2 - 96x + 15 - 38}{(3x+5)(7x-1)} \\
 \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{e^{-3x}(3x+5)}{7x-1} \cdot \frac{-(63x^2 + 96x + 23)}{(3x+5)(7x-1)} \\
 &= \frac{-(63x^2 + 96x + 23)e^{-3x}}{(7x-1)^2}
 \end{aligned}$$

7. (c) $\frac{x^4}{\ln x}$ [ঢ. '০৮]

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left(\frac{x^4}{\ln x} \right) &= \frac{\ln x \frac{d}{dx}(x^4) - x^4 \frac{d}{dx}(\ln x)}{(\ln x)^2} \\
 &= \frac{\ln x(4x^3) - x^4 \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{x^3(4 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}
 \end{aligned}$$

8. (a) $\cos x^\circ$ [ঝ. '০৮]

$$\cos x^\circ = \cos \frac{\pi x}{180}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} (\cos x^\circ) &= -\sin \frac{\pi x}{180} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi x}{180} \right) \\
 &= -\sin x^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180} \sin x^\circ
 \end{aligned}$$

8(b) $e^{5x} \sin x^\circ$

[সি. '০২]

$$\begin{aligned}
 &= e^{5x} \sin \frac{\pi x}{180} \\
 \frac{d}{dx} (e^{5x} \sin \frac{\pi x}{180}) &= e^{5x} \cdot \cos \frac{\pi x}{180} \\
 \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi x}{180} \right) + \sin \frac{\pi x}{180} \cdot e^{5x} \frac{d}{dx}(5x) \\
 &= e^{5x} \cdot \cos x^\circ \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right) + \sin x^\circ \cdot e^{5x} \cdot 5
 \end{aligned}$$

$$= e^{5x} \left(\frac{\pi}{180} \cos x^\circ + 5 \sin x^\circ \right)$$

8(c) $2x^\circ \cos 3x^\circ$ [চ. '০৩; য. '০৫; ক. '১০, '১৩;
সি. '০৬, '০৮, '১১; ব., ঝ. '০৭, '১৪; পি. '০৯, '১১]

$$2x^\circ \cos 3x^\circ = 2 \frac{\pi x}{180} \cos \frac{3\pi x}{180}$$

$$\frac{d}{dx} (2x^\circ \cos 3x^\circ) = \frac{\pi}{90} [x(-\sin \frac{3\pi x}{180})]$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{3\pi x}{180} \right) + \cos \frac{3\pi x}{180} \frac{d}{dx}(x)$$

$$= \frac{\pi}{90} [x(-\sin 3x^\circ) \cdot \left(\frac{3\pi}{180} \right) + \cos 3x^\circ \cdot 1]$$

$$= \frac{\pi}{90} (\cos 3x^\circ - \frac{\pi}{60} x \sin 3x^\circ)$$

প্রশ্নমালা IX F

1. (a) $\sqrt{\sin^{-1} x^5}$

[ঝ. '০৮, '০৬]

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} (\sqrt{\sin^{-1} x^5}) &= \frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1} x^5}} \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x^5) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1} x^5}} \frac{1}{\sqrt{1-(x^5)^2}} \frac{d}{dx}(x^5) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1} x^5} \sqrt{1-x^{10}}} (5x^4) \\
 &= \frac{5x^4}{2\sqrt{\sin^{-1} x^5} \sqrt{1-x^{10}}}
 \end{aligned}$$

1.(b) $\tan^{-1}(\sin e^x)$

[চ. '০৫; ব. '০৫; য. '০৫]

$$\frac{d}{dx} \{ \tan^{-1}(\sin e^x) \} = \frac{d\{\tan^{-1}(\sin e^x)\}}{d(\sin e^x)}$$

$$\frac{d(\sin e^x)}{d(e^x)} \frac{d(e^x)}{dx}$$

$$= \frac{1}{1 + (\sin e^x)^2} (\cos e^x) \cdot e^x = \frac{e^x \cos e^x}{1 + \sin^2 e^x}$$

1(c) $\sin^{-1}(\sin e^x) = e^x$ [ସ. '୦୮]

$$\frac{d}{dx} \{ \sin^{-1}(\sin e^x) \} = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

1(d) $\frac{d}{dx} (\sin^{-1} \sqrt{x e^x})$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x e^x})^2}} \frac{d}{dx} (\sqrt{x e^x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x e^x}} \frac{1}{2\sqrt{x e^x}} \frac{d}{dx} (x e^x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x e^x (1 - x e^x)}} (x e^x + e^x)$$

$$= \frac{e^x (1 + x)}{2\sqrt{x e^x (1 - x e^x)}} \text{ (Ans.)}$$

1(e) $\sin^{-1}(\tan^{-1} x)$ [ସି. '୦୧]

$$\frac{d}{dx} \{ \sin^{-1}(\tan^{-1} x) \}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (\tan^{-1} x)^2}} \frac{d}{dx} (\tan^{-1} x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (\tan^{-1} x)^2}} \frac{1}{1 + x^2}$$

$$= \frac{1}{(1 + x^2) \sqrt{1 - (\tan^{-1} x)^2}}$$

1(f) $\frac{d}{dx} \{ \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) \}$

$$= \frac{1}{1 + \frac{a-b}{a+b} \tan^2 \frac{x}{2}} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \frac{d}{dx} \left(\tan \frac{x}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{(a-b)\sin^2(x/2)}{(a+b)\cos^2(x/2)}} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{(a+b)\cos^2(x/2)}{a(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}) + b(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2})}$$

$$\cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} \frac{1}{\cos^2(x/2)}$$

$$= \frac{\sqrt{(a-b)(a+b)}}{2(a+b \cos x)} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2(a+b \cos x)}$$

1.(g) $\frac{d}{dx} \{ \sin^{-1} \left(\frac{a+b \cos x}{b+a \cos x} \right) \}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a+b \cos x}{b+a \cos x} \right)^2}}$$

$$\frac{(b+a \cos x)(-b \sin x) - (a+b \cos x)(-a \sin x)}{(b+a \cos x)^2}$$

$$= \frac{b+a \cos x}{\sqrt{(b+a \cos x)^2 - (a+b \cos x)^2}}$$

$$\frac{(-b^2 + a^2) \sin x}{(b+a \cos x)^2}$$

$$= \frac{(a^2 - b^2) \sin x}{(b+a \cos x) \sqrt{b^2 + a^2 \cos^2 x - a^2 - b^2 \cos^2 x}}$$

$$= \frac{-(b^2 - a^2) \sin x}{(b+a \cos x) \sqrt{(b^2 - a^2)(1 - \cos^2 x)}}$$

$$= \frac{-(b^2 - a^2) \sin x}{(b+a \cos x) \sqrt{(b^2 - a^2) \sin^2 x}}$$

$$= \frac{-\sqrt{b^2 - a^2}}{b+a \cos x}$$

1(h) ଧରି, $y = \sec^{-1} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right) = -\sec^{-1} \frac{1+x^2}{1-x^2}$

$$= -\cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2} = -2 \tan^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} = -2 \frac{d}{dx} (\tan^{-1} x) = \frac{-2}{1+x^2}$$

2. (a) $x \sin^{-1} x$

[সি.'০১]

$$\frac{d}{dx} (x \sin^{-1} x) = x \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x) + \sin^{-1} x \frac{d}{dx} (x)$$

$$= x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1} x \cdot 1$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1} x$$

2(b) $x^2 \sin^{-1}(1-x)$ [গো.'০৬; ব.'০৮; ঢা.'১৮]

$$\frac{d}{dx} \{x^2 \sin^{-1}(1-x)\}$$

$$= x^2 \frac{d}{dx} \{ \sin^{-1}(1-x) \} + \sin^{-1}(1-x) \frac{d}{dx} (x^2)$$

$$= x^2 \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} (-1) + \sin^{-1}(1-x) \cdot 2x$$

$$= -\frac{x^2}{\sqrt{1-1+2x-x^2}} + 2x \sin^{-1}(1-x)$$

$$= 2x \sin^{-1}(1-x) - \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$2(c) \frac{d}{dx} \{e^x \sin^{-1} x\}$$

[ষ.'০৮]

$$= e^x \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x) + \sin^{-1} x \frac{d}{dx} (e^x)$$

$$= e^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1} x \cdot e^x$$

$$= e^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1} x \right)$$

$$2.(d) \tan^{-1} \frac{x^2}{e^x} + \tan^{-1} \frac{e^x}{x^2}$$

$$= \tan^{-1} \frac{\frac{x^2}{e^x} + \frac{e^x}{x^2}}{1 - \frac{x^2}{e^x} \cdot \frac{e^x}{x^2}} = \tan^{-1} \frac{\frac{x^2}{e^x} + \frac{e^x}{x^2}}{1-1}$$

$$= \cot^{-1} \frac{1-1}{\frac{x^2}{e^x} + \frac{e^x}{x^2}} = \cot^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \{ \tan^{-1} \frac{x^2}{e^x} + \tan^{-1} \frac{e^x}{x^2} \} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$2(e) \frac{d}{dx} (\tan x \sin^{-1} x)$$

[ঢা.'০৫]

$$= \tan x \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x) + \sin^{-1} x \frac{d}{dx} (\tan x)$$

$$= \tan x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1} x \cdot (\sec^2 x)$$

$$= \frac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}} + \sec^2 x \sin^{-1} x$$

$$2(f) (x^2 + 1) \tan^{-1} x - x$$

মনে করি, $y = (x^2 + 1) \tan^{-1} x - x$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 1) \frac{d}{dx} (\tan^{-1} x) +$$

$$\tan^{-1} x \frac{d}{dx} (x^2 + 1) - \frac{d}{dx} (x)$$

$$= (x^2 + 1) \frac{1}{1+x^2} + \tan^{-1} x \times (2x) - 1$$

$$= 1 + 2x \tan^{-1} x - 1$$

$$\frac{d}{dx} \{ (x^2 + 1) \tan^{-1} x - x \} = 2x \tan^{-1} x$$

$$3.(a) \tan^{-1} \frac{1-x}{1+x}$$

[কু.'০৫]

$$= \tan^{-1} \frac{1-x}{1+1.x} = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1} x$$

$$= \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x$$

$$\frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x \right)$$

$$= 0 - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} \text{ (Ans.)}$$

$$3(b) \cot^{-1} \frac{1-x}{1+x}$$

[চ.'০১, '১০; ষ.'০৮]

$$= \tan^{-1} \frac{1+x}{1-x} = \tan^{-1} \frac{1+x}{1-1.x}$$

$$= \tan^{-1}(1) + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left\{ \cot^{-1} \frac{1-x}{1+x} \right\} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4} + \tan^{-1} x \right)$$

$$= 0 + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$3(c) \tan^{-1} \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

[কু. '০০]

$$= \tan^{-1} \frac{1-\sqrt{x}}{1+1.\sqrt{x}} = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1} \sqrt{x}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} \sqrt{x}$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \tan^{-1} \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right\} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} \sqrt{x} \right)$$

$$= 0 - \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \frac{d}{dx} (\sqrt{x})$$

$$= -\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

$$3(d) \tan^{-1} \frac{a+bx}{a-bx} [য. '০২, '১১; জ. '০৯, '১১; ব. '০৯;$$

চ. '১২; কু. '১৩ প্র.ভ.প. '০৬]

$$= \tan^{-1} \frac{a(1+\frac{b}{a}x)}{a(1-\frac{b}{a}x)} = \tan^{-1} \frac{1+\frac{b}{a}x}{1-1.\frac{b}{a}x}$$

$$= \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(\frac{b}{a}x) = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}(\frac{b}{a}x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left\{ \tan^{-1} \frac{a+bx}{a-bx} \right\} = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} \left(\frac{b}{a}x \right) \right\}$$

$$= 0 - \frac{1}{1+(\frac{b}{a}x)^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{b}{a}x \right)$$

$$= \frac{a^2}{a^2+b^2x^2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{a^2+b^2x^2}$$

$$3(e) \tan^{-1} \frac{a \cos x - b \sin x}{b \cos x + a \sin x} [প্র.ভ.প. '৯৬]$$

$$= \tan^{-1} \frac{\frac{a \cos x}{b \cos x} - \frac{b \sin x}{b \cos x}}{\frac{b \cos x}{b \cos x} + \frac{a \sin x}{b \cos x}} = \tan^{-1} \frac{\frac{a}{b} - \tan x}{1 + \frac{a}{b} \cdot \tan x}$$

$$= \tan^{-1} \frac{a}{b} - \tan^{-1} \tan x = \tan^{-1} \frac{a}{b} - x$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \tan^{-1} \frac{a \cos x - b \sin x}{b \cos x + a \sin x} \right\} = 0 - 1 = -1$$

$$3(f) \cot^{-1} \frac{1+x}{1-x} [চ. '০৬; সি. '০৮; রা. ঘ. ০৭]$$

$$= \tan^{-1} \frac{1-x}{1+x} = \tan^{-1} \frac{1-x}{1+1.x}$$

$$= \tan^{-1}(1) - \tan^{-1} x = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \cot^{-1} \frac{1+x}{1-x} \right\} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x \right)$$

$$= 0 - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} \text{ ((Ans.)}$$

$$3(g) \text{ধরি, } y = \cos^{-1} \left(\frac{1+x}{2} \right)^{1/2} [চ. '০৯]$$

এবং $x = \cos \theta$. তাহলে, $\theta = \cos^{-1} x$ এবং

$$y = \cos^{-1} \left\{ \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \right\}^{1/2} = \cos^{-1} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{1/2}$$

$$= \cos^{-1} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \cos^{-1} x$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{1+x}{2} \right)^{1/2} \right\} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \cos^{-1} x \right)$$

$$= \frac{1}{-2\sqrt{1-x^2}}$$

$$3(h) \tan^{-1} \frac{a+bx}{b-ax} [ব. '১৩; বুয়েট. '০৯]$$

$$= \tan^{-1} \frac{\frac{b(a}{b} + x)}{b(1 - \frac{a}{b}x)} = \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) + \tan^{-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \tan^{-1} \frac{a+bx}{b-ax} \right\} = \frac{d}{dx} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) \right\} +$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \tan^{-1}(x) \right\}$$

$$= 0 + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= 2 \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 = \frac{4}{1+4x^2} \quad (\text{Ans.})$$

4.(a) ধৰি, $y = \sin^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}$ [য.'০২, '১২, '১৮]

এবং $x = \tan \theta$. তাহলে, $\theta = \tan^{-1} x$ এবং

$$y = \sin^{-1} \frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta} = \sin^{-1} \cos 2\theta$$

$$= \sin^{-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \frac{\pi}{2} - 2\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1} x\right) = 0 - 2 \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \frac{-2}{1+x^2}$$

4(b) $\cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \tan^{-1} x$ [য.'০৬; চ.'০৭]

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \frac{d}{dx}(2 \tan^{-1} x)$$

$$= 2 \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} \quad (\text{Ans.})$$

4(c) $\sec^{-1} \frac{1+x^2}{1-x^2}$ [য.'০৬; চ.'০৯; সি.'১০]

$$= \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \tan^{-1} x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} \frac{1+x^2}{1-x^2}\right) = \frac{d}{dx}(2 \tan^{-1} x)$$

$$= 2 \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} \quad (\text{Ans.})$$

4(d) $\tan^{-1} \frac{4x}{1-4x^2}$ [য.'০৮]

$$= \tan^{-1} \frac{2.2x}{1-(2x)^2} = 2 \tan^{-1}(2x)$$

$$[\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2} = 2 \tan^{-1} x]$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} \frac{4x}{1-4x^2}\right) = \frac{d}{dx}\{2 \tan^{-1}(2x)\}$$

4(e) $\tan^{-1} \frac{4\sqrt{x}}{1-4x}$

[চ.'০৯; রা.'০৬; সি.'০৯, '১২; ব.'১১; দি.'১৩]

$$= \tan^{-1} \frac{2.2\sqrt{x}}{1-(2\sqrt{x})^2} = 2 \tan^{-1}(2\sqrt{x})$$

$$[\because \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2} = 2 \tan^{-1} x]$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} \frac{4\sqrt{x}}{1-4x}\right) = \frac{d}{dx}\{2 \tan^{-1}(2\sqrt{x})\}$$

$$= 2 \frac{1}{1+(2\sqrt{x})^2} \frac{d}{dx}(2\sqrt{x})$$

$$= \frac{2}{1+4x} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}(1+4x)} \quad (\text{Ans.})$$

4(f) $\sin^{-1} \frac{4x}{1+4x^2}$

[সি.'০২]

$$= \sin^{-1} \frac{2.2x}{1+(2x)^2} = 2 \tan^{-1}(2x).$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} \frac{4x}{1+4x^2}\right) = \frac{d}{dx}\{2 \tan^{-1}(2x)\}$$

$$= 2 \frac{1}{1+(2x)^2} \frac{d}{dx}(2x) = \frac{4}{1+4x^2} \quad (\text{Ans.})$$

4(g) $\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} = 2 \tan^{-1} x$

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{d}{dx}(2 \tan^{-1} x)$$

$$= \frac{2}{1+x^2} \quad (\text{Ans.})$$

4(h) $\sin^{-1} \frac{6x}{1+9x^2}$

[চ.'০১]

$$= \sin^{-1} \frac{2.3x}{1+(3x)^2} = 2 \tan^{-1}(3x)$$

$$[\because \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} = 2 \tan^{-1} x]$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\sin^{-1} \frac{6x}{1+9x^2} \right) &= \frac{d}{dx} \{ 2 \tan^{-1}(3x) \} \\ &= 2 \frac{1}{1+(3x)^2} \frac{d}{dx}(3x) = \frac{2}{1+9x^2} \cdot 3 \\ &= \frac{9}{1+9x^2} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

4.(i) $\tan^{-1} \frac{2\sqrt{x}}{1-x}$ [চ.'০৬, '১১; জ.'০৭; সি.'১১]

$$\begin{aligned} &= \tan^{-1} \frac{2\sqrt{x}}{1-(\sqrt{x})^2} = 2 \tan^{-1} \sqrt{x} \\ \frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \frac{2\sqrt{x}}{1-x} \right) &= \frac{d}{dx} \{ 2 \tan^{-1}(\sqrt{x}) \} \\ &= 2 \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{2}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

5.(a) ধরি, $y = \cos^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$
, [ষ.'০১, '১০; কু.'১০]

এবং $x = \sin \theta$. তাহলে, $\theta = \sin^{-1} x$ এবং

$$\begin{aligned} y &= \cos^{-1}(2\cos\theta\sqrt{1-\cos^2\theta}) \\ &= \cos^{-1}(2\cos\theta\sin\theta) = \cos^{-1}\sin 2\theta \\ &= \cos^{-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right) = \frac{\pi}{2}-2\theta \\ &= \frac{\pi}{2}-2\sin^{-1} x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-2\sin^{-1} x\right) \\ &= 0-2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

5(b) ধরি, $y = \sin^{-1}\{2ax\sqrt{1-a^2x^2}\}$ [কু.'০৮; সি.'১৩]

এবং $ax = \sin \theta$. তাহলে, $\theta = \sin^{-1}(ax)$ এবং

$$\begin{aligned} y &= \sin^{-1}\{2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\} \\ &= \sin^{-1}\{2\sin\theta\cos\theta\} = \sin^{-1}\sin 2\theta \\ &= 2\theta = 2\sin^{-1}(ax) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2 \frac{1}{\sqrt{1-(ax)^2}} \frac{d}{dx}(ax) \\ &= \frac{2a}{\sqrt{1-a^2x^2}} \end{aligned}$$

5(c) ধরি, $y = \tan^{-1} \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$ [রা.'০২]

এবং $2x = \sin \theta$.

$$\begin{aligned} y &= \tan^{-1} \frac{2\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \tan^{-1} \frac{2\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= \tan^{-1}(2\tan\theta) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+(2\tan\theta)^2} \frac{d}{dx}(2\tan\theta) \\ &= \frac{2\sec^2\theta}{1+4\tan^2\theta} = \frac{2/\cos^2\theta}{1+\frac{4\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} \\ &= \frac{2}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta} = \frac{2}{1+3\sin^2\theta} \\ &= \frac{2}{1+3(2x)^2} = \frac{2}{1+12x^2} \end{aligned}$$

5(d) ধরি, $y = \sin^{-1} \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}$ এবং

$x = \sin \theta$. তাহলে, $\theta = \sin^{-1} x$ এবং

$$\begin{aligned} y &= \sin^{-1} \frac{\sin\theta+\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sqrt{2}} \\ &= \sin^{-1}(\sin\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta) \\ &= \sin^{-1}(\sin\theta \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} \cos\theta) \\ &= \sin^{-1}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \theta + \frac{\pi}{4} = \sin^{-1} x + \frac{\pi}{4} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

6.(a) ধরি, $y = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ [রা.'০৩]

এবং $x = \sec \theta$. তাহলে, $\theta = \sec^{-1} x$ এবং

$$\begin{aligned}y &= \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}} = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \theta}} \\&= \tan^{-1} \frac{1}{\tan \theta} = \tan^{-1} \cot \theta = \tan^{-1} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\&\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} x \\&\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{2} - \sec^{-1} x \right) = 0 - \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\end{aligned}$$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

6.(b) $\tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ [সি.'০৫,'০৭; প্র.ভ.প.'৯০]

ধরি, $y = \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ এবং $x = \cos \theta$.

তাহলে, $\theta = \cos^{-1} x$ এবং

$$\begin{aligned}y &= \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)}} \\&= \tan^{-1} \sqrt{\tan^2 \frac{\theta}{2}} = \tan^{-1} \tan \frac{\theta}{2} \\&= \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \cos^{-1} x \\&\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\cos^{-1} x) = \frac{1}{2} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

6(e) $\sin^4 \left(\cot^{-1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$ [বুয়েট,'০৯]

ধরি, $y = \sin^4 \left(\cot^{-1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$ এবং $x = \cos \theta$

$$\begin{aligned}y &= \sin^4 \left(\cot^{-1} \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}} \right) \\&= \sin^4 \left(\cot^{-1} \sqrt{\frac{2\cos^2(\theta/2)}{2\sin^2(\theta/2)}} \right) \\&\doteq \sin^4 \left(\cot^{-1} \cot \frac{\theta}{2} \right) = \sin^4 \frac{\theta}{2} = \left\{ \frac{1}{2} (2\sin^2 \frac{\theta}{2}) \right\}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \left\{ \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) \right\}^2 = \frac{1}{4} (1-x)^2 \\&\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} \times 2(1-x) \times (-1) = -\frac{1}{2} (1-x)\end{aligned}$$

6(f) $\tan(\sin^{-1} x)$ [চ.'০২,'০৯; কু.'০৮,'১১; রা.'০৮; ব.'০৯,'১২; ঢা.বি.'১০; ঢা.'১২; দি.'১৩]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \{ \tan(\sin^{-1} x) \} &= \sec^2(\sin^{-1} x) \cdot \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x) \\&= \frac{1}{\cos^2(\sin^{-1} x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\&= \frac{1}{1-\sin^2(\sin^{-1} x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\&= \frac{1}{1-\{ \sin(\sin^{-1} x) \}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\&= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \text{ (Ans.)}\end{aligned}$$

7.(a) $\tan^{-1}(\sec x + \tan x)$ [সি.'১৮; ব.'০৭; চ.'১৩]

$$\begin{aligned}&= \tan^{-1} \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1+\sin x}{\cos x} \right) \\&= \tan^{-1} \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} \\&= \tan^{-1} \frac{\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)^2}{\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)} \\&= \tan^{-1} \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} \\&= \tan^{-1} \frac{\cos \frac{x}{2} \left(1 + \tan \frac{x}{2} \right)}{\cos \frac{x}{2} \left(1 - \tan \frac{x}{2} \right)} = \tan^{-1} \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \\&= \tan^{-1}(1) + \tan^{-1} \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \{ \tan^{-1}(\sec x + \tan x) \} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \\ = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

7(b) $\tan^{-1} \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ [ঢ. '০৫, '১৩]

$$= \tan^{-1} \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ = \tan^{-1} \frac{(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2})}{(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})^2} \\ = \tan^{-1} \frac{\cos \frac{x}{2}(1 - \tan \frac{x}{2})}{\cos \frac{x}{2}(1 + \tan \frac{x}{2})} = \tan^{-1} \frac{1 - \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} \\ = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1} \tan(\frac{x}{2}) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \\ = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

7(c) $\tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ [ঢ. '১০; কু. '১১; ব. '১২]

$$= \tan^{-1} \sqrt{\frac{2 \sin^2(x/2)}{2 \cos^2(x/2)}} = \tan^{-1} \sqrt{\tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \tan^{-1} \tan \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

7(d) $\sin \left(2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \right)$ [ব. '০২; চ. '০৮; ঢ. '০৯, '১১; দি. '০৯, '১১]

ধরি, $y = \sin \left(2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \right)$ এবং $x = \cos \theta$

তাহলে, $\theta = \cos^{-1} x$ এবং

$$y = \sin \left(2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \right) \\ = \sin \left(2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{2 \sin^2(\theta/2)}{2 \cos^2(\theta/2)}} \right) \\ = \sin(2 \tan^{-1} \tan \frac{\theta}{2}) = \sin(2 \cdot \frac{\theta}{2}) = \sin \theta \\ = \sin(\cos^{-1} x) = \sin \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2} \\ = \sqrt{1 - x^2} \\ \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\sqrt{1 - x^2}) = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) \\ \frac{d}{dx} \{ \sin(2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}) \} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

প্রশ্নমালা IX G

$\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর : 1. (a) $x = \sqrt{t}$, $y = t - \frac{1}{\sqrt{t}}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{t}) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \text{ এবং}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left(t - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) = \frac{d}{dt} \left(t - t^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$= 1 - \left(-\frac{1}{2} \right) t^{-\frac{1}{2}-1} = 1 + \frac{1}{2t\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}} \left(2\sqrt{t} + \frac{1}{t} \right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \left(2\sqrt{t} + \frac{1}{t} \right) \times \frac{2\sqrt{t}}{1} \\ = 2\sqrt{t} + \frac{1}{t}$$

1.(b) $x = \frac{3at}{1+t^3} \dots\dots(1)$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3} \dots(2)$

$$(2) \div (1) \Rightarrow \frac{y}{x} = t$$

$$(1) \text{ হতে পাই, } x = \frac{3a \frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3} = \frac{3ay}{x} \times \frac{x^3}{x^3 + y^3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3ax^2y}{x^3 + y^3} \Rightarrow x^3 + y^3 = 3axy$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 3a(x \frac{dy}{dx} + y)$$

$$\Rightarrow (y^2 - ax) \frac{dy}{dx} = ay - x^2 \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

$$1(c) \quad x = a(\cos \phi + \phi \sin \phi), \quad y = a(\sin \phi - \phi \cos \phi)$$

$$\frac{dx}{d\phi} = \frac{d}{d\phi} \{a(\cos \phi + \phi \sin \phi)\}$$

$$= a(-\sin \phi + \phi \cos \phi + \sin \phi) = a\phi \cos \phi$$

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{d}{d\phi} \{a(\sin \phi - \phi \cos \phi)\}$$

$$= a(\cos \phi + \phi \sin \phi - \cos \phi) = a\phi \sin \phi$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\phi}}{\frac{dx}{d\phi}} = \frac{a\phi \sin \phi}{a\phi \cos \phi} = \tan \phi$$

$$1(d) \quad x = \sqrt{a^{\sin^{-1} t}}, \quad y = \sqrt{a^{\cos^{-1} t}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a^{\sin^{-1} t}}} a^{\sin^{-1} t} \ln a \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \frac{\ln a \sqrt{a^{\sin^{-1} t}}}{2\sqrt{1-t^2}} = \frac{x \ln a}{2\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} (\sqrt{a^{\cos^{-1} t}})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a^{\cos^{-1} t}}} a^{\cos^{-1} t} \ln a \frac{1}{-\sqrt{1-t^2}}$$

$$= -\frac{\ln a \sqrt{a^{\cos^{-1} t}}}{2\sqrt{1-t^2}} = -\frac{y \ln a}{2\sqrt{1-t^2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = -\frac{y \ln a}{2\sqrt{1-t^2}} \times \frac{2\sqrt{1-t^2}}{x \ln a}$$

$$= -\frac{y}{x}$$

$$2. (a) \quad x^x \quad [\text{ব.}'08; \text{চ.}'13; \text{সি.}'07, '09; \text{ঢ.}, \text{ষ.}'08]$$

$$\frac{d}{dx}(x^x) = x^x \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) \right]$$

$$[\quad \frac{d}{dx}(u^v) = u^v \left\{ v \frac{d}{dx}(\ln u) + \ln u \frac{dv}{dx} \right\}]$$

$$= x^x \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \ln x \frac{d}{dx}(x^{-1}) \right]$$

$$= x^x \left[\frac{1}{x^2} + \ln x \cdot (-x^{-2}) \right] = x^x \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right)$$

$$= x^x \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} = x^{x-2} (1 - \ln x) \quad (\text{Ans.})$$

$$2. (b) \quad \frac{d}{dx} (1+x)^x \quad [\text{ব.}'13]$$

$$= (1+x)^x \left[x \frac{d}{dx} \{ \ln(1+x) \} + \ln(1+x) \frac{d}{dx}(x) \right]$$

$$[\quad \frac{d}{dx}(u^v) = u^v \left\{ v \frac{d}{dx}(\ln u) + \ln u \frac{dv}{dx} \right\}]$$

$$= (1+x)^x \left[x \frac{1}{1+x} + \ln(1+x) \cdot 1 \right]$$

$$= (1+x)^x \left\{ \frac{x}{1+x} + \ln(1+x) \right\}$$

$$2(c) \quad (1+x^2)^{2x} \quad [\text{ষ.}'06]$$

$$\frac{d}{dx} \{ (1+x^2)^{2x} \} = (1+x^2)^{2x}$$

$$[2x \frac{d}{dx} \{ \ln(1+x^2) \} + \ln(1+x^2) \frac{d}{dx}(2x)]$$

$$= (1+x^2)^{2x} \left[\frac{2x}{1+x^2} (2x) + \ln(1+x^2) \cdot (2) \right]$$

$$= 2(1+x^2)^{2x} \left[\frac{2x^2}{1+x^2} + \ln(1+x^2) \right]$$

$$2(d) \quad (1+x^2)^{x^2} \quad [\text{সি.}'01]$$

$$\frac{d}{dx} (1+x^2)^{x^2} = (1+x^2)^{x^2}$$

$$\begin{aligned}
 & [x^2 \frac{d}{dx} \{\ln(1+x^2)\} + \ln(1+x^2) \frac{d}{dx}(x^2)] \\
 &= (1+x^2)^{x^2} \left[\frac{x^2}{1+x^2} (2x) + \ln(1+x^2). (2x) \right] \\
 &= 2x(1+x^2)^{x^2} \left[\frac{x^2}{1+x^2} + \ln(1+x^2) \right] \\
 2(e) (\sqrt{x})^{\sqrt{x}} & \quad [\text{ব.}'12; চ. '10; কু. '11; প.ত.প. '06] \\
 \frac{d}{dx} \{(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\} & \\
 &= (\sqrt{x})^{\sqrt{x}} \left[\sqrt{x} \frac{d}{dx}(\ln \sqrt{x}) + \ln \sqrt{x} \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) \right] \\
 &= (\sqrt{x})^{\sqrt{x}} \left[\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \ln \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right] \\
 &= (\sqrt{x})^{\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \sqrt{x} \right] \\
 &= (\sqrt{x})^{\sqrt{x}} \left[\frac{1+\ln \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \right] \quad (\text{Ans.})
 \end{aligned}$$

2(f) ধরি, $y = x^{\ln x}$ [জা. '02; কু. '08; সি. '11]

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= x^{\ln x} \left[\ln x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(\ln x) \right] \\
 &\quad [\quad \frac{d}{dx}(u^v) = u^v \left[v \frac{d}{dx}(\ln u) + \ln u \frac{dv}{dx} \right] \\
 &= x^{\ln x} \left[2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \right] = \frac{2 \ln x}{x} x^{\ln x} \\
 \text{অর্থাৎ, } \frac{d}{dx}(x^{\ln x}) &= \frac{2 \ln x}{x} x^{\ln x}
 \end{aligned}$$

2(g) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)^x = (\sin^{-1} x)^x$

$$\begin{aligned}
 & [x \frac{d}{dx} \{\ln(\sin^{-1} x)\} + \ln(\sin^{-1} x) \frac{d}{dx}(x)] \\
 &= (\sin^{-1} x)^x \left[x \frac{1}{\sin^{-1} x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \ln(\sin^{-1} x) \cdot 1 \right] \\
 &= (\sin^{-1} x)^x \left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x} + \ln(\sin^{-1} x) \right]
 \end{aligned}$$

2(h) $\frac{d}{dx}(\sin x)^x$ [ঘ. '07]

$$\begin{aligned}
 &= (\sin x)^x \left[x \frac{d}{dx} \{\ln(\sin x)\} + \ln(\sin x) \frac{d}{dx}(x) \right] \\
 &= (\sin x)^x \left[x \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \ln(\sin x) \cdot 1 \right] \\
 &= (\sin x)^x [x \cot x + \ln(\sin x)] \\
 2(i) \quad \frac{d}{dx}(\ln x)^x & \\
 &= (\ln x)^x \left[x \frac{d}{dx} \{\ln(\ln x)\} + \ln(\ln x) \frac{d}{dx}(x) \right] \\
 &= (\ln x)^x \left[x \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} + \ln(\ln x) \cdot 1 \right] \\
 &= (\ln x)^x \left[\frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x) \right] \\
 2(j) \quad \frac{d}{dx}(\log x)^x &= (\log x)^x \\
 &\quad [x \frac{d}{dx} \{\ln(\log x)\} + \ln(\log x) \frac{d}{dx}(x)] \\
 &= (\log x)^x \left[x \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x \ln 10} + \ln(\log x) \cdot 1 \right] \\
 &= (\log x)^x \left[\frac{1}{\ln 10 \log x} + \ln(\log x) \right] \\
 2(k) x^{\cos^{-1} x} & \quad [কু. '10, '13; সি. '06, '08; ট. '10, '13; জা. '05, '07; ব. '06, '10; পি. '09; ঘ. '10] \\
 \frac{d}{dx}(x^{\cos^{-1} x}) & \\
 &= x^{\cos^{-1} x} \left[\cos^{-1} x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) \right] \\
 &= x^{\cos^{-1} x} \left[\cos^{-1} x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \right] \\
 &= x^{\cos^{-1} x} \left[\frac{\cos^{-1} x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} \right] \\
 2(l) \quad \frac{d}{dx}(x^{-1/x}) & \quad [বুয়েট '07] \\
 &= x^{-1/x} \left[-\frac{1}{x} \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(-\frac{1}{x}) \right] \\
 &= x^{-1/x} \left[-\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \ln x \left\{ -\left(-\frac{1}{x^2}\right) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$= x^{-1/x} \times \frac{1}{x^2} (\ln x - 1) = \frac{1}{x^{2+1/x}} (\ln x - 1)$$

୩(a) $\frac{d}{dx}(e^{x^x}) = e^{x^x} \frac{d}{dx}(x^x)$

$$= e^{x^x} x^x [x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x)]$$

$$= e^{x^x} \cdot x^x \left\{ x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 \right\}$$

$$= e^{x^x} \cdot x^x (1 + \ln x)$$

୩(b) $\frac{d}{dx}(x^{e^x})$

$$= x^{e^x} \left[e^x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(e^x) \right]$$

$$= x^{e^x} \left[e^x \frac{1}{x} + \ln x \cdot e^x \right]$$

$$= x^{e^x} e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$$

(c) $\frac{d}{dx}(a^{ax})$ [ଫି.'୧୨]

$$= a^{ax} \cdot \ln a \cdot \frac{d}{dx}(a^x)$$

$$= a^{ax} \ln a \cdot a^x \cdot \ln a = a^{ax} a^x (\ln a)^2$$

୩(d) $(\cot x)^{\tan x}$ [ଟ.'୦୫; ବ., ଫି.'୦୯; ଯ.'୧୨]

$$\frac{d}{dx} (\cot x)^{\tan x} = (\cot x)^{\tan x}$$

$$[\tan x \frac{d}{dx} \{ \ln(\cot x) \} + \ln(\cot x) \frac{d}{dx} (\tan x)]$$

$$= (\cot x)^{\tan x} \left[\frac{\tan x}{\cot x} (-\operatorname{cosec}^2 x) + \ln(\cot x) \cdot (\sec^2 x) \right]$$

$$= (\cot x)^{\tan x} \left[-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} + \ln(\cot x) \cdot (\sec^2 x) \right]$$

$$= (\cot x)^{\tan x} [-\sec^2 x + \ln(\cot x) \cdot (\sec^2 x)]$$

$$= (\cot x)^{\tan x} \cdot \sec^2 x [\ln(\cot x) - 1]$$

୪. (a) x^{x^x} [ରା.'୦୬, '୦୮; ଯ.'୧୧; ପ୍ର.ଭ.ଗ.'୦୮]

$$\frac{d}{dx}(x^{x^x}) = x^{x^x} \left[x^x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x^x) \right]$$

$$= x^{x^x} \left[x^x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot x^x \left\{ x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x) \right\} \right]$$

$$= x^{x^x} \cdot x^x \left[\frac{1}{x} + \ln x \cdot \left\{ x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 \right\} \right]$$

$$= x^{x^x} \cdot x^x \left[\frac{1}{x} + \ln x \cdot (1 + \ln x) \right]$$

୪(b) $(x^x)^x$ [ସ., ମା.'୦୯; କ୍ଷ. '୦୫; ଡ., ବ., ଫି.'୧୧; ରା.'୧୨]

$$(x^x)^x = x^{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(x^x)^x = x^{x^2} \left[x^2 \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x^2) \right]$$

$$= x^{x^2} \left[x^2 \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot (2x) \right]$$

$$= x^{x^2} [x + 2x \ln x] = (x^x)^x \cdot x [1 + 2 \ln x]$$

୪(c) $\frac{d}{dx}(\sec x)^{x^x} = (\sec x)^{x^x}$

$$\left[x^x \frac{d}{dx} \{ \ln(\sec x) \} + \ln(\sec x) \frac{d}{dx}(x^x) \right]$$

$$= (\sec x)^{x^x} \left[x^x \frac{1}{\sec x} \cdot \sec x \tan x + \ln(\sec x) \cdot x^x \left\{ x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x) \right\} \right]$$

$$= (\sec x)^{x^x} \cdot x^x \left[\tan x + \ln(\sec x) \left\{ x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 \right\} \right]$$

$$= (\sec x)^{x^x} \cdot x^x [\tan x + (1 + \ln x) \ln(\sec x)]$$

୫.(a) $\frac{d}{dx}(x^x \ln x)$ [କ୍ଷ. '୦୮; ଫି.'୧୦; ବ.'୧୨]

$$= x^x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x^x)$$

$$= x^x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot x^x \left\{ x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x) \right\}$$

$$= x^x \left[\frac{1}{x} + \ln x \cdot \left\{ x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 \right\} \right]$$

$$= x^x \left\{ \frac{1}{x} + \ln x \cdot (1 + \ln x) \right\}$$

$$= x^{-1/x} \times \frac{1}{x^2} (\ln x - 1) = \frac{1}{x^{2+1/x}} (\ln x - 1)$$

3(a) $\frac{d}{dx}(e^{x^x}) = e^{x^x} \frac{d}{dx}(x^x)$
 $= e^{x^x} x^x [x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x)]$
 $= e^{x^x} \cdot x^x \left\{ x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 \right\}$
 $= e^{x^x} \cdot x^x (1 + \ln x)$

3(b) $\frac{d}{dx}(x^{e^x})$
 $= x^{e^x} \left[e^x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(e^x) \right]$
 $= x^{e^x} \left[e^x \frac{1}{x} + \ln x \cdot e^x \right]$
 $= x^{e^x} e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$

(c) $\frac{d}{dx}(a^{ax})$ [দি.'১২]

$$= a^{ax} \cdot \ln a \cdot \frac{d}{dx}(a^x)$$
 $= a^{ax} \ln a \cdot a^x \cdot \ln a = a^{ax} a^x (\ln a)^2$

3(d) $(\cot x)^{\tan x}$ [চ.'০৫; ব., দি.'০৯; ঘ.'১২]

$$\frac{d}{dx} (\cot x)^{\tan x} = (\cot x)^{\tan x}$$
 $[\tan x \frac{d}{dx} \{ \ln(\cot x) \} + \ln(\cot x) \frac{d}{dx} (\tan x)]$

$$= (\cot x)^{\tan x} \left[\frac{\tan x}{\cot x} (-\operatorname{cosec}^2 x) + \ln(\cot x) \cdot (\sec^2 x) \right]$$

$$= (\cot x)^{\tan x} \left[-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} + \ln(\cot x) \cdot (\sec^2 x) \right]$$

$$= (\cot x)^{\tan x} [-\sec^2 x + \ln(\cot x) \cdot (\sec^2 x)]$$
 $= (\cot x)^{\tan x} \cdot \sec^2 x [\ln(\cot x) - 1]$

4. (a) x^{x^x} [ঝ.'০৬, '০৮; ঘ.'১১; প্র.ভ.গ.'০৫]

$$\frac{d}{dx}(x^{x^x}) = x^{x^x} \left[x^x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x^x) \right]$$

$$= x^{x^x} \left[x^x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot x^x \left\{ x \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x) \right\} \right]$$
 $= x^{x^x} \cdot x^x \left[\frac{1}{x} + \ln x \cdot \left\{ x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 \right\} \right]$
 $= x^{x^x} \cdot x^x \left[\frac{1}{x} + \ln x \cdot (1 + \ln x) \right]$

4(b) $(x^x)^x$ [ঘ., মা.'০৯; কু.'০৫; ঢ., ব., দি.'১১; ঝ.'১২]

$$(x^x)^x = x^{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(x^x)^x = x^{x^2} \left[x^2 \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x^2) \right]$$
 $= x^{x^2} \left[x^2 \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot (2x) \right]$
 $= x^{x^2} [x + 2x \ln x] = (x^x)^x \cdot x [1 + 2 \ln x]$

4(c) $\frac{d}{dx}(\sec x)^{x^x} = (\sec x)^{x^x}$

$$\left[x^x \frac{d}{dx} \{ \ln(\sec x) \} + \ln(\sec x) \frac{d}{dx}(x^x) \right]$$
 $= (\sec x)^{x^x} \left[x^x \frac{1}{\sec x} \cdot \sec x \tan x + \ln(\sec x) \cdot x^x \left\{ x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x) \right\} \right]$
 $= (\sec x)^{x^x} \cdot x^x \left[\tan x + \ln(\sec x) \left\{ x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 \right\} \right]$
 $= (\sec x)^{x^x} \cdot x^x [\tan x + (1 + \ln x) \ln(\sec x)]$

5.(a) $\frac{d}{dx}(x^x \ln x)$ [কু.'০৮; দি.'১০; ব.'১২]

$$= x^x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x^x)$$
 $= x^x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot x^x \left\{ x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x) \right\}$
 $= x^x \left[\frac{1}{x} + \ln x \cdot \left\{ x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 \right\} \right]$
 $= x^x \left\{ \frac{1}{x} + \ln x \cdot (1 + \ln x) \right\}$

$$5(b) \frac{d}{dx} (ax)^{bx}$$

$$= (ax)^{bx} [bx \frac{d}{dx} \{ \ln(ax) \} + \ln(ax) \frac{d}{dx} (bx)]$$

$$= (ax)^{bx} [bx \cdot \frac{1}{ax} \cdot a + \ln(ax) \cdot b]$$

$$= (ax)^{bx} \cdot b [1 + \ln(ax)]$$

$$5(c) ধরি, y = (x e^x)^{\sin x}$$

$$\ln y = \ln(x e^x)^{\sin x} = \sin x (\ln x + \ln e^x) \\ = \sin x (\ln x + x)$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \sin x \left(\frac{1}{x} + 1 \right) + (\ln x + x) \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left[\left(\frac{1}{x} + 1 \right) \sin x + (\ln x + x) \cos x \right] \\ = (x e^x)^{\sin x} \left[\sin x \left(\frac{1}{x} + 1 \right) + (\ln x + x) \cos x \right]$$

$$5(d) \frac{d}{dx} (e^{x^2} + x^{x^2}) \quad [গ.'০৬, '১২]$$

$$= \frac{d}{dx} (e^{x^2}) + \frac{d}{dx} (x^{x^2})$$

$$= e^{x^2} (2x) + x^{x^2} [x^2 \frac{d}{dx} (\ln x) + \ln x \frac{d}{dx} (x^2)]$$

$$= 2x e^{x^2} + x^{x^2} \left[\frac{x^2}{x} + \ln x \cdot (2x) \right]$$

$$= 2x e^{x^2} + x^{x^2} [x + 2x \ln x]$$

$$5(e) \frac{d}{dx} \{ (\tan x)^x + x^{\tan x} \}$$

$$= \frac{d}{dx} (\tan x)^x + \frac{d}{dx} (x^{\tan x})$$

$$= (\tan x)^x \left[x \frac{d}{dx} \{ \ln(\tan x) \} + \ln(\tan x) \frac{d}{dx} (x) \right]$$

$$+ x^{\tan x} \left[\tan x \frac{d}{dx} (\ln x) + \ln x \frac{d}{dx} (\tan x) \right]$$

$$= (\tan x)^x \left[x \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x + \ln(\tan x) \cdot 1 \right]$$

$$+ x^{\tan x} \left[\tan x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \sec^2 x \right]$$

$$= (\tan x)^x \left[x \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \ln(\tan x) \right]$$

$$+ x^{\tan x} \left[\frac{1}{x} \tan x + \sec^2 x \ln x \right]$$

$$= (\tan x)^x [2x \cos ec 2x + \ln(\tan x)]$$

$$+ x^{\tan x} \left[\frac{1}{x} \tan x + \sec^2 x \ln x \right]$$

$$5(f) \frac{d}{dx} (x^{\ln x} + x^{\log x})$$

$$= \frac{d}{dx} (x^{\ln x}) + \frac{d}{dx} (x^{\log x})$$

$$= x^{\ln x} \left[\ln x \frac{d}{dx} (\ln x) + \ln x \frac{d}{dx} (\ln x) \right]$$

$$+ x^{\log x} \left[\log x \frac{d}{dx} (\log x) + \ln x \frac{d}{dx} (\log x) \right]$$

$$= x^{\ln x} \left[2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + x^{\log x} \left[\log x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \frac{1}{x \ln 10} \right] \right]$$

$$= \frac{2 \ln x}{x} \cdot x^{\ln x} + x^{\log x} \left[\frac{\log x}{x} + \frac{\ln x}{x \ln 10} \right]$$

$$5(g) \frac{d}{dx} \{ (\ln x)^x + (\log x)^x \}$$

$$= \frac{d}{dx} (\ln x)^x + \frac{d}{dx} (\log x)^x$$

$$= (\ln x)^x \left[x \frac{d}{dx} \{ \ln(\ln x) \} + \ln(\ln x) \frac{d}{dx} (x) \right] +$$

$$(\log x)^x \left[x \frac{d}{dx} \{ \ln(\log x) \} + \ln(\log x) \frac{d}{dx} (x) \right]$$

$$= (\ln x)^x \left[x \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} + \ln(\ln x) \cdot 1 \right] +$$

$$(\log x)^x \left[x \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x \ln 10} + \ln(\log x) \cdot 1 \right]$$

$$= (\ln x)^x \left[\frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x) \right] +$$

$$(\log x)^x \left[\frac{1}{\ln 10 \log x} + \ln(\log x) \right]$$

$$5(h) \frac{d}{dx} \{ (\tan x)^{\cot x} + (\cot x)^{\tan x} \}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d}{dx} (\tan x)^{\cot x} + \frac{d}{dx} (\cot x)^{\tan x} \\
 &= (\tan x)^{\cot x} \left[\cot x \frac{d}{dx} \{ \ln(\tan x) \} + \ln(\tan x) \right. \\
 &\quad \left. \frac{d}{dx} (\cot x) \right] + (\cot x)^{\tan x} \left[\tan x \frac{d}{dx} \{ \ln(\cot x) \} \right. \\
 &\quad \left. + \ln(\cot x) \frac{d}{dx} (\tan x) \right] \\
 &= (\tan x)^{\cot x} \left[\frac{\cot x}{\tan x} \sec^2 x + \ln(\tan x) \cdot (-\cosec^2 x) \right] + (\cot x)^{\tan x} \left[\frac{\tan x}{\cot x} \right. \\
 &\quad \left. (-\cosec^2 x) + \ln(\cot x) \cdot (\sec^2 x) \right] \\
 &= (\tan x)^{\cot x} \left[\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} - \ln(\tan x) \cdot \cosec^2 x \right] + (\cot x)^{\tan x} \left[-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \right. \\
 &\quad \left. + \ln(\cot x) \cdot (\sec^2 x) \right] \\
 &= (\tan x)^{\cot x} \cdot \cosec^2 x [1 - \ln(\tan x)] + (\cot x)^{\tan x} \cdot \sec^2 x [\ln(\cot x) - 1]
 \end{aligned}$$

5(i) $\frac{d}{dx}(x^x \log x)$ [চ.'১২]

$$\begin{aligned}
 &= x^x \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}(x^x) \\
 &= x^x \frac{1}{x \ln 10} + \log x \left[x^x \left\{ x \frac{d}{dx}(\ln x) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \ln x \frac{d}{dx}(x) \right\} \right] \\
 &= \frac{x^x}{x \ln 10} + x^x \log x \left\{ x \frac{1}{x} + \ln x \right\} \\
 &= \frac{x^x}{x \ln 10} + x^x \log x \{1 + \ln x\}
 \end{aligned}$$

প্রশ্নালী IX H

1. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

(a) $x^a y^b = (x-y)^{a+b}$ [প.স.প. '০৬]

$$\ln(x^a y^b) = \ln(x-y)^{a+b}$$

$$\Rightarrow \ln(x^a) + \ln(y^b) = (a+b) \ln(x-y)$$

$$\Rightarrow a \ln x + b \ln y = (a+b) \ln(x-y)$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$a \cdot \frac{1}{x} + b \cdot \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = (a+b) \frac{1}{x-y} \left(1 - \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\text{or, } \left(\frac{b}{y} + \frac{a+b}{x-y}\right) \frac{dy}{dx} = \frac{a+b}{x-y} - \frac{a}{x}$$

$$\text{or, } \frac{bx - by + ay + by}{y(x-y)} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{ax + bx - ax + ay}{x(x-y)}$$

$$\text{or, } \frac{bx + ay}{y(x-y)} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{bx + ay}{x(x-y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

1(b) $y = \sin(x+y)^2$ [রা.'০৮; কূ.'০৭; য.'১১]

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x+y)^2 \frac{d}{dx}(x+y)^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(x+y)^2 \cdot 2(x+y) \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \{1 - 2(x+y) \cos(x+y)^2\} \frac{dy}{dx} = 2(x+y) \cos(x+y)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x+y) \cos(x+y)^2}{1 - 2(x+y) \cos(x+y)^2}$$

1(c) $x+y = \sin^{-1}(y/x)$

$$\Rightarrow \sin(x+y) = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \sin(x+y)$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = x \cos(x+y) \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) + \sin(x+y)$$

$$\Rightarrow \{1 - x \cos(x+y)\} \frac{dy}{dx} = x \cos(x+y) + \sin(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cos(x+y) + \sin(x+y)}{1 - x \cos(x+y)}$$

1. (d) $x^2 = 5y^2 + \sin y$ [প.ত.প.'০৬]

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x = 10y \frac{dy}{dx} + \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{10y + \cos y} \quad (\text{Ans.})$$

1(e) $(\cos x)^y = (\sin y)^x$ [প.ত.প.'০৩]

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\begin{aligned} & (\cos x)^y \left[y \frac{d}{dx} \{ \ln(\cos x) \} + \ln(\cos x) \frac{dy}{dx} \right] \\ &= (\sin y)^x \left[x \frac{d}{dx} \{ \ln(\sin y) \} + \ln(\sin y) \frac{d}{dx} (x) \right] \\ &\Rightarrow \frac{y}{\cos x} (-\sin x) + \ln(\cos x) \frac{dy}{dx} \\ &\quad = \frac{x}{\sin y} (\cos y) \frac{dy}{dx} + \ln(\sin y) \cdot 1 \\ &\quad [\because (\cos x)^y = (\sin y)^x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \{ \ln(\cos x) - x \cot y \} \frac{dy}{dx} = \ln(\sin y) + y \tan x \\ &\frac{dy}{dx} = \frac{\ln(\sin y) + y \tan x}{\ln(\cos x) - x \cot y} \end{aligned}$$

1(f) $\sqrt{x/y} + \sqrt{y/x} = 1$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow x + y = \sqrt{xy}$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{xy}} (x \frac{dy}{dx} + y \cdot 1)$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\right) \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{y} - \sqrt{x}}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y} - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}(\sqrt{y} - 2\sqrt{x})}{\sqrt{x}(2\sqrt{y} - \sqrt{x})} \quad (\text{Ans.})$$

2. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

2(a) $x^y = e^{x-y}$ [য.বো.'০৫]

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$x^y \left[y \frac{d}{dx} (\ln x) + \ln x \frac{dy}{dx} \right] = e^{x-y} \left(1 - \frac{dy}{dx} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} + \ln x \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} \quad [x^y = e^{x-y}]$$

$$\Rightarrow (1 + \ln x) \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x} = \frac{x - y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x(1 + \ln x)}$$

2(b) $y + x = x^{-y}$ [রা.'১১; য.'১৩; প.ত.প. '৯৮]

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} + 1 = x^{-y} \left[-y \frac{d}{dx} (\ln x) + \ln x \frac{d}{dx} (-y) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + 1 = x^{-y} \left[\frac{-y}{x} - \ln x \frac{dy}{dx} \right]$$

$$\Rightarrow (1 + x^{-y} \ln x) \frac{dy}{dx} = -1 - y \cdot x^{-y-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + yx^{-y-1}}{1 + x^{-y} \ln x} \quad (\text{Ans.})$$

2(c) $x^y + y^x = 1$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$x^y \left[y \frac{d}{dx} (\ln x) + \ln x \frac{dy}{dx} \right] +$$

$$y^x \left[x \frac{d}{dx} (\ln y) + \ln y \frac{d}{dx} (x) \right] = 0$$

$$\Rightarrow x^y \left[\frac{y}{x} + \ln x \frac{dy}{dx} \right] + y^x \left[\frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \ln y \cdot 1 \right] = 0$$

$$\Rightarrow (x^y \ln x + xy^{x-1}) \frac{dy}{dx} = -(x^{y-1}y + y^x \ln y)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^{y-1}y + y^x \ln y}{x^y \ln x + xy^{x-1}}$$

2(d) $x^p y^p = (x+y)^{p+q}$

$$p \ln x + q \ln y = (p+q) \ln(x+y)$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{p+q}{x+y} \left(1 + \frac{dy}{dx} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{q}{y} - \frac{p+q}{x+y} \right) \frac{dy}{dx} = \frac{p+q}{x+y} - \frac{p}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{qx + qy - py - qy}{y(x+y)} \frac{dy}{dx} = \frac{px + qx - px - py}{(x+y)x}$$

$$\Rightarrow \frac{qx - py}{y(x+y)} \frac{dy}{dx} = \frac{qx - py}{(x+y)x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (\text{Ans.})$$

$$2(e) \quad y = x^y \therefore \ln y = y^x \ln x \dots (1)$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = y^x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(y^x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = y^x \frac{1}{x} + \ln x \cdot y^x \left\{ \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \ln y \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{\ln y}{x \ln x} + \ln y \left\{ \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \ln y \right\}$$

[(1) দ্বারা]

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y} \ln y \right) \frac{dy}{dx} = \ln y \left(\frac{1}{x \ln x} + \ln y \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-x \ln y}{y} \right) \frac{dy}{dx} = \ln y \left(\frac{1+x \ln x \ln y}{x \ln x} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y (1+x \ln x \ln y)}{x \ln x (1-x \ln y)}$$

$$(f) y = \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} \dots \infty = \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} \dots \infty$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{xy} \Rightarrow y^2 = xy \Rightarrow y = x$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = 1 \quad (\text{Ans.})$$

$$2.(g) \quad \ln(xy) = x + y \quad [\text{রা. }'05; \text{ কু. }'06]$$

$$\Rightarrow \ln x + \ln y = x + y$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow y + x \frac{dy}{dx} = xy + xy \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow x(1-y) \frac{dy}{dx} = y(x-1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)} \quad (\text{Ans.})$$

$$2(h) \quad \log(x^n y^n) = x^n + y^n \quad [\text{বুয়েট }'07-08]$$

$$\Rightarrow n \log x + n \log y = x^n + y^n$$

$$\Rightarrow n \log_{10} e \times \log_e x + n \log_{10} e \times \log_e y \\ = x^n + y^n$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$n \frac{\log_{10} e}{x} + n \frac{\log_{10} e}{y} \frac{dy}{dx} = nx^{n-1} + ny^{n-1} \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\log_{10} e}{y} - y^{n-1} \right) \frac{dy}{dx} = x^{n-1} - \frac{\log_{10} e}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\log_{10} e - y^n}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{x^n - \log_{10} e}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x^n - \log_{10} e)}{x(\log_{10} e - y^n)}$$

$$3. (a) \quad \tan y = \sin x \quad \text{হলে, দেখাও যে,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \quad [\text{প.ভ.গ. }'78]$$

$$\text{প্রমাণ : } \tan y = \sin x$$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1} \sin x$$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1} \tan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx}(x) - x \frac{d}{dx}(\sqrt{1-x^2})}{(\sqrt{1-x^2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot 1 - x \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2}$$

$$= \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$$

3(b) $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ হলে, দেখাও যে,
 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$ [প.ভ.প. '০২, '০৮]

প্রমাণ : $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$
 $\Rightarrow x\sqrt{1+y} = -y\sqrt{1+x}$
 $\Rightarrow x^2(1+y) = y^2(1+x)$ [বর্গ করে।]
 $\Rightarrow x^2 + x^2y = y^2 + xy^2$
 $\Rightarrow x^2 - y^2 + xy(x-y) = 0$
 $\Rightarrow (x-y)(x+y+xy) = 0$
 $x+y+xy = 0$ হলে, $(1+x)y = -x$
 $\Rightarrow y = \frac{-x}{1+x} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)(-1)+x(1)}{(1+x)^2}$
 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1-x+x}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$

3.(c) $x = a(t - \sin t)$ এবং $y = a(1+\cos t)$ হলে,
দেখাও যে, $t = \frac{5\pi}{3}$ যখন $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}$.
[প.ভ.প. '৮৮]

প্রমাণ : $\frac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$, $\frac{dy}{dt} = a(0-\sin t)$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{-a \sin t}{a(1-\cos t)}$
 $= \frac{-2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = -\cot \frac{t}{2}$

এখন, $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}$ হলে, $\cot \frac{t}{2} = -\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan \frac{t}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\tan \frac{\pi}{6} = \tan(\pi - \frac{\pi}{6})$

$\Rightarrow \tan \frac{t}{2} = \tan \frac{5\pi}{6} \quad \frac{t}{2} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{5\pi}{3}$

3(d) $f(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$ হলে, প্রমাণ কর যে,
 $f'(0) = (2\ln \frac{a}{b} + \frac{b^2 - a^2}{ab})(\frac{a}{b})^{a+b}$

প্রমাণ: $f(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x} \quad f(0) = \left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$

এবং $\ln\{f(x)\} = (a+b+2x)\{\ln(a+x) - \ln(b+x)\}$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = (a+b+2x)\left\{\frac{1}{a+x} - \frac{1}{b+x}\right\} + \{\ln(a+x) - \ln(b+x)\} 2$$

$$f'(0) = f(0) \left[(a+b)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + 2(\ln a - \ln b) \right]$$

$$\Rightarrow f'(0) = \left(\frac{a}{b}\right)^{a+b} \left[(a+b)\left(\frac{b-a}{ab}\right) + 2 \ln \frac{a}{b} \right]$$

$$f'(0) = \left(2 \ln \frac{a}{b} + \frac{b^2 - a^2}{ab}\right) \left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$$

(e) $y = \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \dots}}} \infty$ হলে,

প্রমাণ কর যে, $(2y-1) \frac{dy}{dx} + \sin x = 0$.

প্রমাণ : $y = \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \dots}}}$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \dots}}}}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\cos x + y} \Rightarrow y^2 = \cos x + y$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y \frac{dy}{dx} = -\sin x + \frac{dy}{dx} \quad \begin{array}{l} \text{triangle} \\ \sqrt{1-x^2} \end{array}$$

$$\Rightarrow (2y-1) \frac{dy}{dx} + \sin x = 0$$

3(f) $x^y = y^x$ হলে দেখাও যে,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^{n+1}(n \ln x - 1)}{x^{n+1}(n \ln y - 1)} \quad [\text{বুয়েট } 08-09]$$

প্রমাণ : $x^y = y^x \therefore y^n \ln x = x^n \ln y \dots (1)$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{y^n}{x} + \ln x.(ny^{n-1}) \frac{dy}{dx} = \frac{x^n}{y} \frac{dy}{dx} + \ln y.nx^{n-1}$$

$$\Rightarrow y^{n+1} + x \ln x.ny^n \frac{dy}{dx} = x^{n+1} \frac{dy}{dx} + y \ln y.nx^n$$

$$\Rightarrow (nx \ln x \cdot y^n - x^{n+1}) \frac{dy}{dx} = y \ln y \cdot nx^n - y^{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{nyx^n \ln y - y^{n+1}}{nxy^n \ln x - x^{n+1}}$$

$$= \frac{ny \cdot y^n \ln x - y^{n+1}}{nx \cdot x^n \ln y - x^{n+1}} \quad [(1) \text{ দ্বারা}]$$

$$= \frac{y^{n+1}(n \ln x - 1)}{x^{n+1}(n \ln y - 1)}$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনগুলির অন্তরক সহগ নির্ণয় কর :

$$1. \frac{d}{dx} (5x^3 + 3x^2 - 4x - 9)$$

$$= 5 \frac{d}{dx} (x^3) + 3 \frac{d}{dx} (x^2) - 4 \frac{d}{dx} (x) - \frac{d}{dx} (9)$$

$$= 5(3x^2) + 3(2x) - 4 - 0$$

$$= 15x^2 + 6x - 4 \quad (\text{Ans.})$$

$$2. \frac{d}{dx} (2x^3 - 4x^{\frac{5}{2}} + \frac{7}{2}x^{-\frac{2}{3}} + 7)$$

$$= 2(3x^2) - 4(\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}) + \frac{7}{2}(-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}) + 0$$

$$= 6x^2 - 10x^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{3}x^{-\frac{5}{3}} \quad (\text{Ans.})$$

3(a) মূল নিয়মে $x = 2$ -তে $\sqrt[3]{x}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$$\therefore f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^{1/3} - 2^{1/3}}{x - 2}$$

$$= \frac{1}{3} \times 2^{\frac{1}{3}-1} \quad [\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}]$$

$$= \frac{1}{3} \times 2^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times 4^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

3(b) মূল নিয়মে $x = a$ -তে $\cos^2 x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয়।

মনে করি, $f(x) = \cos^2 x$. $f(a) = \cos^2 a$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos^2 x - \cos^2 a}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x+a)\sin(a-x)}{x-a}$$

$$[\because \cos^2 B - \cos^2 A = \sin(A+B)\sin(A-B)]$$

$$= -\lim_{x-a \rightarrow 0} \frac{\sin(x-a)}{x-a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \sin(x+a)$$

$$= -1 \cdot \sin(a+a) = -\sin 2a \quad (\text{Ans.})$$

4. $(2x)^n - b^n$ [চ.'০২]

$$(2x)^n - b^n = 2^n x^n - b^n$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \{ (2x)^n - b^n \} = 2^n \frac{d}{dx} (x^n) - \frac{d}{dx} (b^n)$$

$$= 2^n n x^{n-1} - 0 = 2^n n x^{n-1}$$

5(a) $x^2 \log_a x + 7e^x \cos x$ [সি.'০৮]

$$\frac{d}{dx} (x^2 \log_a x + 7e^x \cos x) = x^2 \frac{d}{dx} (\log_a x) +$$

$$+ \log_a x \frac{d}{dx} (x^2) + 7 \{ e^x \frac{d}{dx} (\cos x) +$$

$$\cos x \frac{d}{dx} (e^x) \}$$

$$= x^2 \frac{1}{x \ln a} + \log_a x (2x) +$$

$$7 \{ e^x (-\sin x) + \cos x \cdot e^x \}$$

$$= x \left(\frac{1}{\ln a} + 2 \log_a x \right) + 7e^x (\cos x - \sin x)$$

5(b) $\sin^2 2x + e^{2 \ln(\cos 2x)}$ [প.ভ.প.'৯৩]

$$\sin^2 2x + e^{2 \ln(\cos 2x)} = \sin^2 2x + e^{\ln(\cos 2x)^2}$$

$$= \sin^2 2x + (\cos 2x)^2$$

$$= \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$$

$$\frac{d}{dx} \{ \sin^2 2x + e^{2 \ln(\cos 2x)} \} = \frac{d}{dx} (1) = 0$$

5(c) $5e^x \ln x$ [ঘ.'০৮]

মনে করি, $y = 5e^x \ln x$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 5\left\{ e^x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(e^x) \right\} \\ &= 5\{e^x \cdot \frac{1}{x} + \ln x (e^x)\} \\ \frac{d}{dx}(5e^x \ln x) &= 5e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)\end{aligned}$$

6.(a) $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^n + \tan x}{e^x - \cot x} \right) =$

$$\begin{aligned}&\frac{(e^x - \cot x) \frac{d}{dx}(x^n + \tan x) - (x^n + \tan x) \frac{d}{dx}(e^x - \cot x)}{(e^x - \cot x)^2} \\ &= \frac{(e^x - \cot x)(nx^{n-1} + \sec^2 x) - (x^n + \tan x) \frac{d}{dx}(e^x + \cos ec^2 x)}{(e^x - \cot x)^2}\end{aligned}$$

6(b) $\frac{d}{dx} \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)$

$$\begin{aligned}&= \frac{(1 + \cos x) \frac{d}{dx}(1 - \cos x) - (1 - \cos x) \frac{d}{dx}(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{(1 + \cos x)(\sin x) - (1 - \cos x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{\sin x(1 + \cos x + 1 - \cos x)}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{2\sin x}{(1 + \cos x)^2}\end{aligned}$$

6(c) $\frac{x \sin x}{x + \cos x}$ [রা. '০০]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\frac{x \sin x}{x + \cos x} \right) &= \frac{1}{(x + \cos x)^2} [(x + \cos x) \\ &\quad \frac{d}{dx}(x \sin x) - x \sin x \frac{d}{dx}(x + \cos x)] \\ &= \frac{1}{(x + \cos x)^2} [(x + \cos x)(x \cos x + \sin x) \\ &\quad - x \sin x (1 - \sin x)] \\ &= \frac{1}{(x + \cos x)^2} [(x^2 \cos x + x \sin x + x \cos^2 x + \\ &\quad \cos x \sin x - x \sin x + x \sin^2 x)]\end{aligned}$$

$$= \frac{x(\sin^2 x + \cos^2 x) + x^2 \cos x + \cos x \sin x}{(x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{x + (x^2 + \sin x) \cos x}{(x + \cos x)^2} \text{ (Ans.)}$$

6.(d) $\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ [সি. '০১]

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} &= \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x} \\ &= 1 - \cos x \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \right) = \sin x\end{aligned}$$

6(e) $\frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$ [ষ. '০১]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \right) &= \frac{(1 + \sin^2 x) \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1 + \sin^2 x)}{(1 + \sin^2 x)^2} \\ &= \frac{(1 + \sin^2 x)(-\sin x) - \cos x(2 \sin x \cos x)}{(1 + \sin^2 x)^2} \\ &= \frac{-\sin x(1 + \sin^2 x + 2 \cos^2 x)}{(1 + \sin^2 x)^2} \\ &= \frac{-\sin x(2 + \cos^2 x)}{(1 + \sin^2 x)^2}\end{aligned}$$

7(a) ধরি, $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^n$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= n(x + \sqrt{1 + x^2})^{n-1} \frac{d}{dx}(x + \sqrt{1 + x^2}) \\ &= n(x + \sqrt{1 + x^2})^{n-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x \right\} \\ &= n(x + \sqrt{1 + x^2})^{n-1} \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}((x + \sqrt{1 + x^2})^n) = \frac{n(x + \sqrt{1 + x^2})^n}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\begin{aligned}
 7(b) \frac{d}{dx} \{ \operatorname{cosec}(e^{x^2}) \} \\
 &= \frac{d\{\operatorname{cosec}(e^{x^2})\}}{d(e^{x^2})} \frac{d(e^{x^2})}{d(x^2)} \frac{d(x^2)}{dx} \\
 &= -\operatorname{cosec}(e^{x^2}) \cot(e^{x^2}) \cdot (e^{x^2}) \cdot 2x \\
 &= -2x e^{x^2} \operatorname{cosec}(e^{x^2}) \cot(e^{x^2}) \quad (\text{Ans.})
 \end{aligned}$$

$$8(a) \log_x 5 \quad [\text{প.গ.প. } '৪৮]$$

$$\begin{aligned}
 \log_x 5 &= \log_x e \times \log_e 5 = \ln 5 \frac{1}{\log_e x} \\
 &= \ln 5 \frac{1}{\ln x} = \ln 5 (\ln x)^{-1} \\
 \therefore \frac{d}{dx} (\log_x a) &= \ln 5 \left\{ -1(\ln x)^{-2} \frac{d}{dx} (\ln x) \right\} \\
 &= -\ln 5 \frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\ln 5}{x(\ln x)^2}
 \end{aligned}$$

$$8(b) \ln(\sin e^{x^2}) \quad [\text{প.গ.প. } '৪৮]$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \{ \ln(\sin e^{x^2}) \} \\
 &= \frac{1}{\sin(e^{x^2})} \{ \cos(e^{x^2}) \} e^{x^2} \cdot 2x \\
 &= 2x e^{x^2} \cot(e^{x^2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8(c) \frac{d}{dx} \{ \ln(\tan \frac{x}{2}) \} \\
 &= \frac{d\{\ln(\tan \frac{x}{2})\}}{d(\tan \frac{x}{2})} \frac{d(\tan \frac{x}{2})}{d(\frac{x}{2})} \frac{d(\frac{x}{2})}{dx} \\
 &= \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} \frac{1}{\cos^2(x/2)} \\
 &= \frac{1}{2 \sin(x/2) \cos(x/2)} = \frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosecx}
 \end{aligned}$$

$$9. (a) \frac{d}{dx} \{ \ln(ax^2 + bx + c) \}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{ax^2 + bx + c} \frac{d}{dx} (ax^2 + bx + c) \\
 &= \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} \quad (\text{Ans.}) \\
 9(b) \frac{d}{dx} \{ \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) \} \\
 &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \frac{d}{dx} (x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) \\
 &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}} (2x) \right\} \\
 &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left\{ \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \quad (\text{Ans.}) \\
 9.(c) \ln \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \\
 &= \ln(\sqrt{x+1}-1) - \ln(\sqrt{x+1}+1) \\
 &\frac{d}{dx} \{ \ln \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x+1}-1} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\
 &= \frac{\sqrt{x+1}+1-\sqrt{x+1}+1}{2\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} \\
 10(a) \left(\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} \right)^2 &= \left(\frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 = \tan^2 x \\
 \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} \right)^2 &= 2 \tan x \frac{d}{dx} (\tan x) \\
 &= 2 \tan x \cdot \sec^2 x \\
 &= \frac{2}{2\sqrt{x+1}(x+1-1)} = \frac{1}{x\sqrt{x+1}} \quad (\text{Ans.})
 \end{aligned}$$

$$10(b) \left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right]^n$$

[ଆଜାନ୍ତର ପରୀକ୍ଷା]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right]^n &= n \left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right]^{n-1} \\ &\quad \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot 1 - x \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x)}{(\sqrt{1-x^2})^2} \\ &= n \left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right]^{n-1} \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \\ &= n \left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right]^{n-1} \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$10(c) \frac{d}{dx} \{ x \ln x \ln(\ln x) \}$$

$$\begin{aligned} &= x \ln x \frac{d}{dx} \{ \ln(\ln x) \} + x \ln(\ln x) \frac{d}{dx} (\ln x) \\ &\quad + \ln x \ln(\ln x) \frac{d}{dx} (x) \\ &= x \ln x \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} + x \ln(\ln x) \frac{1}{x} + \\ &\quad \ln x \ln(\ln x) \cdot 1 \\ &= 1 + \ln(\ln x)(1 + \ln x) \end{aligned}$$

$$10(d) \frac{d}{dx} (\sin x \sin 2x \sin 3x)$$

$$\begin{aligned} &= \sin x \sin 2x \frac{d}{dx} (\sin 3x) + \sin x \sin 3x \\ &\quad \frac{d}{dx} (\sin 2x) + \sin 2x \sin 3x \frac{d}{dx} (\sin x) \\ &= \sin x \sin 2x (\cos 3x) \cdot 3 + \sin x \sin 3x (\cos 2x) \cdot 2 + \sin 2x \sin 3x (\cos x) \cdot 1 \\ &= 3 \sin x \sin 2x \cos 3x + 2 \sin x \sin 3x \cos 2x + \sin 2x \sin 3x \cos x \end{aligned}$$

$$11(a) \frac{d}{dx} (e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}})$$

$$\begin{aligned} &= e^{\sqrt{x}} \frac{d}{dx} (\sqrt{x}) + e^{-\sqrt{x}} \frac{d}{dx} (-\sqrt{x}) \\ &= e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$11(a) \frac{d}{dx} (e^{-x} + e^x)$$

$$\begin{aligned} &= e^{-x} \frac{d}{dx} (-x) + e^x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= -e^{-x} \cdot 1 + e^x \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\left(e^{-x} + \frac{1}{x^2} e^x \right) \end{aligned}$$

$$12(a) \text{ ଧରି, } y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \{ \ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x) \} \\ &\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos x}{1+\sin x} - \frac{(-\cos x)}{1-\sin x} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\cos x(1-\sin x+1+\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \sec x \end{aligned}$$

$$12(b) \text{ ଧରି, } y = \cos \frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x} \quad [\text{ଆଜାନ୍ତର ପରୀକ୍ଷା}]$$

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = -\sin \frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x} \right) \\ &= -\sin \frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \\ &= -\sin \frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x} \frac{(1+x^2)(-2x) - (1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2} \\ &= -\sin \frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x} \frac{2x(-1-x^2-1+x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{4x}{(1+x^2)^2} \sin \frac{x^{-1}-x}{x^{-1}+x} \end{aligned}$$

$$12(c) e^{3x} \cos x^\circ = e^{3x} \cos \frac{\pi x}{180}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} (e^{3x} \cos x^\circ) = e^{3x} \left(-\sin \frac{\pi x}{180} \right) \\ &\quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi x}{180} \right) + \cos \frac{\pi x}{180} \cdot e^{3x} \frac{d}{dx} (3x) \\ &= -e^{3x} \cdot \sin x^\circ \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right) + \cos x^\circ \cdot e^{3x} \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{3x} \left(3 \cos x^{\circ} - \frac{\pi}{180} \sin x^{\circ} \right) \\
 13(a) \quad &\frac{d}{dx} \left\{ \sin^{-1}(e^{\tan^{-1} x}) \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-(e^{\tan^{-1} x})^2}} \frac{d}{dx} (e^{\tan^{-1} x}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-e^{2\tan^{-1} x}}} e^{\tan^{-1} x} \frac{1}{1+x^2} \\
 &= \frac{e^{\tan^{-1} x}}{(1+x^2)\sqrt{1-e^{2\tan^{-1} x}}} \\
 13(b) \quad &\frac{d}{dx} \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{a+b \cos x}{b+a \cos x} \right) \right\} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a+b \cos x}{b+a \cos x}\right)^2}} \\
 &\quad \frac{(b+a \cos x)(-b \sin x)-(a+b \cos x)(-a \sin x)}{(b+a \cos x)^2} \\
 &= -\frac{b+a \cos x}{\sqrt{(b+a \cos x)^2-(a+b \cos x)^2}} \\
 &\quad \frac{(-b^2+a^2) \sin x}{(b+a \cos x)^2} \\
 &= \frac{-(a^2-b^2) \sin x}{(b+a \cos x) \sqrt{b^2+a^2 \cos^2 x-a^2-b^2 \cos^2 x}} \\
 &= \frac{(b^2-a^2) \sin x}{(b+a \cos x) \sqrt{(b^2-a^2)(1-\cos^2 x)}} \\
 &= \frac{(b^2-a^2) \sin x}{(b+a \cos x) \sqrt{(b^2-a^2) \sin^2 x}} \\
 &= \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b+a \cos x} \\
 13(c) \quad &\sin^{-1} \left(\frac{2x^{-1}}{x+x^{-1}} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{2/x}{x+1/x} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sin^{-1} \left(\frac{2}{x^2+1} \right) \\
 \therefore \quad &\frac{d}{dx} \left\{ \sin^{-1} \left(\frac{2x^{-1}}{x+x^{-1}} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{(x^2+1)^2}}} 2 \frac{d}{dx} (x^2+1)^{-1} \\
 &= \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+2x^2+1-4}} 2(-1)(x^2+1)^{-2} \cdot 2x \\
 &= \frac{-4x(x^2+1)^{-1}}{\sqrt{x^4+2x^2-3}} = \frac{-4x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2-3}} \\
 13(d) \quad &\frac{d}{dx} \left\{ \cos^{-1} x \ln(\sin^{-1} x) \right\} \quad [\text{এ.ভ.প. '08}] \\
 &= \cos^{-1} x \frac{d}{dx} \left\{ \ln(\sin^{-1} x) \right\} + \\
 &\quad \ln(\sin^{-1} x) \frac{d}{dx} (\cos^{-1} x) \\
 &= \cos^{-1} x \frac{1}{\sin^{-1} x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\ln(\sin^{-1} x)}{-\sqrt{1-x^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ \frac{\cos^{-1} x}{\sin^{-1} x} - \ln(\sin^{-1} x) \right\} \\
 13(e) \quad &\cot^{-1} \left(\frac{x^2}{e^x} \right) + \cot^{-1} \left(\frac{e^x}{x^2} \right) \quad [\text{এ.ভ.প. '06}] \\
 &= \tan^{-1} \left(\frac{e^x}{x^2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{x^2}{e^x} \right) \\
 &= \tan^{-1} \frac{\frac{e^x}{x^2} + \frac{x^2}{e^x}}{1 - \frac{e^x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{e^x}} = \tan^{-1} \frac{\frac{e^x}{x^2} + \frac{x^2}{e^x}}{1-1} \\
 &= \cot^{-1} \frac{\frac{1-1}{e^x+x^2}}{\frac{e^x}{x^2}+\frac{x^2}{e^x}} = \cot^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} \\
 \therefore \quad &\frac{d}{dx} \left\{ \cot^{-1} \left(\frac{x^2}{e^x} \right) + \cot^{-1} \left(\frac{e^x}{x^2} \right) \right\} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$13(f) \tan^{-1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{1 - \sqrt{ax}} \quad [\text{প.ভ.প. } '৯৬]$$

$$= \tan^{-1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{1 - \sqrt{x}\sqrt{a}} = \tan^{-1} \sqrt{x} + \tan^{-1} \sqrt{a}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left\{ \tan^{-1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{1 - \sqrt{ax}} \right\}$$

$$= \frac{d}{dx} (\tan^{-1} \sqrt{x}) + \frac{d}{dx} (\tan^{-1} \sqrt{a})$$

$$= \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \frac{d}{dx} (\sqrt{x}) + 0$$

$$= \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

$$14(a) \text{ ধরি, } y = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} \text{ এবং}$$

$$x^2 = \cos \theta. \text{ তাহলে, } \theta = \cos^{-1} x^2 \text{ এবং}$$

$$y = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+\cos \theta} - \sqrt{1-\cos \theta}}{\sqrt{1+\cos \theta} + \sqrt{1-\cos \theta}}$$

$$= \tan^{-1} \frac{\sqrt{2\cos^2(\theta/2)} - \sqrt{2\sin^2(\theta/2)}}{\sqrt{2\cos^2(\theta/2)} + \sqrt{2\sin^2(\theta/2)}}$$

$$= \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}\{\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)\}}{\sqrt{2}\{\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\}}$$

$$= \tan^{-1} \frac{\cos(\theta/2)\{1 - \tan(\theta/2)\}}{\cos(\theta/2)\{1 + \tan(\theta/2)\}}$$

$$= \tan^{-1} \frac{1 - \tan(\theta/2)}{1 + \tan(\theta/2)} = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1} \tan \frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tan^{-1} x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{1+(x^2)^2} \right\} (2x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$14(b) \text{ ধরি, } y = \sec^{-1} \frac{1}{2x^2 - 1} \text{ এবং } x = \cos \theta$$

$$\text{তাহলে, } \theta = \cos^{-1} x \text{ এবং}$$

$$y = \sec^{-1} \frac{1}{2\cos^2 \theta - 1} = \sec^{-1} \frac{1}{\cos 2\theta}$$

$$= \sec^{-1} \sec 2\theta = 2\theta = 2\cos^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (2\cos^{-1} x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} \text{ (Ans.)}$$

$$14(c) \frac{d}{dx} \{ \sin^{-1}(\tan^{-1} x) \} \quad [\text{সি. } '০১]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(\tan^{-1} x)^2}} \frac{d}{dx} (\tan^{-1} x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(\tan^{-1} x)^2}} \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-(\tan^{-1} x)^2}} \text{ (Ans.)}$$

$$14(d) \tan^{-1} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \quad [\text{প.ভ.প. } '০৫]$$

$$= \tan^{-1} \frac{\cos x(1 - \tan x)}{\cos x(1 + \tan x)} = \tan^{-1} \frac{1 - \tan x}{1 + 1 \cdot \tan x}$$

$$= \tan^{-1} 1 - \tan^{-1}(\tan x) = \frac{\pi}{4} - x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left\{ \tan^{-1} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right\} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$= 0 - 1 = -1 \text{ ((Ans.)}$$

$\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর : ৪

$$15(a) x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 + \cos \theta) \quad [\text{প.ভ.প. } '০৬]$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \{ a(\theta - \sin \theta) \} = a(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \{ a(1 + \cos \theta) \} = a(0 - \sin \theta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{-a \sin \theta}{a(1 - \cos \theta)}$$

$$= \frac{-2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = -\cot \frac{\theta}{2}$$

$$15(b) \frac{d}{dx} (\sin x)^{\ln x} = (\sin x)^{\ln x}$$

$$\begin{aligned} & [\ln x \frac{d}{dx} \{\ln(\sin x)\} + \ln(\sin x) \frac{d}{dx} (\ln x)] \\ &= (\sin x)^{\ln x} \left[\ln x \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \ln(\sin x) \cdot \frac{1}{x} \right] \\ &= (\sin x)^{\ln x} \left[\ln x \cdot \cot x + \frac{\ln(\sin x)}{x} \right] \end{aligned}$$

$$15(c) \frac{d}{dx} (\sin x)^{\tan x} = (\sin x)^{\tan x}$$

$$\begin{aligned} & [\tan x \frac{d}{dx} \{\ln(\sin x)\} + \ln(\sin x) \frac{d}{dx} (\tan x)] \\ &= (\sin x)^{\tan x} \left[\frac{\sin x}{\cos x} \frac{\cos x}{\sin x} + \ln(\sin x) \cdot \sec^2 x \right] \\ &= (\sin x)^{\tan x} [1 + \sec^2 x \cdot \ln(\sin x)] \end{aligned}$$

$$15(d) \frac{d}{dx} (\tan x)^{\ln x} = (\tan x)^{\ln x}$$

$$\begin{aligned} & [\ln x \frac{d}{dx} \{\ln(\tan x)\} + \ln(\tan x) \frac{d}{dx} (\ln x)] \\ &= (\tan x)^{\ln x} \left[\ln x \frac{1}{\tan x} \sec^2 x + \ln(\tan x) \cdot \frac{1}{x} \right] \\ &= (\tan x)^{\ln x} \left[\ln x \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\ln(\tan x)}{x} \right] \\ &= (\tan x)^{\ln x} \left[\ln x \frac{2}{2 \sin x \cos x} + \frac{\ln(\tan x)}{x} \right] \\ &= (\tan x)^{\ln x} [2 \ln x \cdot \csc 2x + \frac{\ln(\tan x)}{x}] \end{aligned}$$

$$15(e) \frac{d}{dx} (\ln x)^{\ln x} = (\ln x)^{\ln x}$$

$$\begin{aligned} & [\ln x \frac{d}{dx} \{\ln(\ln x)\} + \ln(\ln x) \frac{d}{dx} (\ln x)] \\ &= (\ln x)^{\ln x} \left[\ln x \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} + \ln(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \right] \\ &= \frac{1}{x} (\ln x)^{\ln x} [1 + \ln(\ln x)] \end{aligned}$$

$$15(f) \frac{d}{dx} (\ln x)^{\tan^{-1} x} = (\ln x)^{\tan^{-1} x}$$

$$[\tan^{-1} x \frac{d}{dx} \{\ln(\ln x)\} + \ln(\ln x) \frac{d}{dx} (\tan^{-1} x)]$$

$$= (\ln x)^{\tan^{-1} x} \left[\tan^{-1} x \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{\ln(\ln x)}{1+x^2} \right]$$

$$= (\ln x)^{\tan^{-1} x} \left[\frac{\tan^{-1} x}{x \ln x} + \frac{\ln(\ln x)}{1+x^2} \right]$$

$$(g) \frac{d}{dx} (\tan x)^{\cos^{-1} x} = (\tan x)^{\cos^{-1} x}$$

$$[\cos^{-1} x \frac{d}{dx} \{\ln(\tan x)\} + \ln(\tan x) \frac{d}{dx} (\cos^{-1} x)]$$

$$= (\tan x)^{\cos^{-1} x} \left[\frac{\sec^2 x \cdot \cos^{-1} x}{\tan x} - \frac{\ln(\tan x)}{\sqrt{1-x^2}} \right]$$

$$(h) (\sin^{-1} x)^{\ln x}$$

[ଆ.ଭ.ପ. ୨୫]

$$\frac{d}{dx} (\sin^{-1} x)^{\ln x} = (\sin^{-1} x)^{\ln x}$$

$$[\ln x \frac{d}{dx} \{\ln(\sin^{-1} x)\} + \ln(\sin^{-1} x) \frac{d}{dx} (\ln x)]$$

$$= (\sin^{-1} x)^{\ln x} \left[\frac{\ln x}{\sin^{-1} x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\ln(\sin^{-1} x)}{x} \right]$$

$$= (\sin^{-1} x)^{\ln x} \left[\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x} + \frac{\ln(\sin^{-1} x)}{x} \right]$$

$$16.(a) \frac{d}{dx} (x^x + x^{1/x}) = \frac{d}{dx} (x^x) + \frac{d}{dx} (x^{1/x})$$

$$\begin{aligned} &= x^x \left\{ x \frac{d}{dx} (\ln x) + \ln x \frac{d}{dx} (x) \right\} + \\ &\quad x^{1/x} \left\{ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (\ln x) + \ln x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= x^x \left\{ x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 \right\} + x^{1/x} \left\{ \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right\}$$

$$= x^x (1 + \ln x) + x^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2} (1 - \ln x)$$

$$= x^x (1 + \ln x) + x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x)$$

$$16(b) \frac{d}{dx} (x^x \cdot x^{\cos^{-1} x})$$

$$= x^x \frac{d}{dx} (x^{\cos^{-1} x}) + x^{\cos^{-1} x} \frac{d}{dx} (x^x)$$

$$= x^x \cdot x^{\cos^{-1} x} [\cos^{-1} x \frac{d}{dx} (\ln x)]$$

$$\begin{aligned}
 & + \ln x \frac{d}{dx} (\cos^{-1} x)] + x^{\cos^{-1} x} \cdot x^x [x \frac{d}{dx} (\ln x) \\
 & + \ln x \frac{d}{dx} (x)] \\
 & = x^x \cdot x^{\cos^{-1} x} \left[\frac{\cos^{-1} x}{x} + \frac{-\ln x}{\sqrt{1-x^2}} \right] \\
 & \quad + x^{\cos^{-1} x} \cdot x^x \left[x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 \right] \\
 & = x^x \cdot x^{\cos^{-1} x} \left[\frac{\cos^{-1} x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 + \ln x \right]
 \end{aligned}$$

$$17(a) \quad x = y \cdot \ln(xy) \Rightarrow \frac{x}{y} = \ln x + \ln y$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\begin{aligned}
 & \frac{y \cdot 1 - x \cdot \frac{dy}{dx}}{y^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} \\
 & \Rightarrow xy - x^2 \frac{dy}{dx} = y^2 + xy \frac{dy}{dx} \\
 & \Rightarrow y(x-y) = x(x+y) \frac{dy}{dx} \\
 & \frac{dy}{dx} = \frac{y(x-y)}{x(x+y)}
 \end{aligned}$$

$$17(b) \quad y = \cot(x+y) \Rightarrow \cot^{-1} y = x+y$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{1+y^2} \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \\
 & \Rightarrow \left(-\frac{1}{1+y^2} - 1 \right) \frac{dy}{dx} = 1 \\
 & \Rightarrow -\frac{1+1+y^2}{1+y^2} \frac{dy}{dx} = 1 \\
 & \frac{dy}{dx} = -\frac{1+y^2}{2+y^2} \quad (\text{Ans.})
 \end{aligned}$$

$$17(c) \quad y = \tan(x+y)$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} y = x+y$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1+y^2} \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \\
 & \Rightarrow \left(\frac{1}{1+y^2} - 1 \right) \frac{dy}{dx} = 1 \\
 & \Rightarrow \frac{1-1-y^2}{1+y^2} \frac{dy}{dx} = 1 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1+y^2}{y^2}
 \end{aligned}$$

$$17(d) \quad x^2 + y^2 = \sin(xy)$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = \cos(xy) (x \frac{dy}{dx} + y)$$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow \{2y - x \cos(xy)\} \frac{dy}{dx} = y \cos(xy) - 2x \\
 & \frac{dy}{dx} = \frac{y \cos(xy) - 2x}{2y - x \cos(xy)}
 \end{aligned}$$

$$(e) \cos y = x \cos(a+y) \Rightarrow x = \frac{\cos y}{\cos(a+y)}$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\begin{aligned}
 & 1 = \frac{\cos(a+y)(-\sin y) \frac{dy}{dx} - \cos y (-\sin(a+y)) \frac{dy}{dx}}{\cos^2(a+y)} \\
 & 1 = \frac{\{\sin(a+y) \cos y - \cos(a+y) \sin y\} \frac{dy}{dx}}{\cos^2(a+y)}
 \end{aligned}$$

$$1 = \frac{\{\sin(a+y) \cos y - \cos(a+y) \sin y\} \frac{dy}{dx}}{\cos^2(a+y)}$$

$$\cos^2(a+y) = \sin(a+y-y) \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a} \quad (\text{Ans.})$$

$$17(f) \quad e^{2x} + 5y^3 = 3 \cos(xy) \quad [\text{প.ত.প. } '৮৫]$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\begin{aligned}
 & e^{2x} \cdot 2 + 15y^2 \frac{dy}{dx} = 3 \{-\sin(xy)\} \frac{d}{dx}(xy) \\
 & \Rightarrow 2e^{2x} + 15y^2 \frac{dy}{dx} = -3\sin(xy)(x \frac{dy}{dx} + y) \\
 & \Rightarrow \{15y^2 + 3x \sin(xy)\} \frac{dy}{dx} \\
 & \qquad \qquad \qquad = 2e^{2x} + 3y \sin(xy)
 \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2x} + 3y \sin(xy)}{15y^2 + 3x \sin(xy)}$$

18(a) $y = x^y$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = x^y [y \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{dy}{dx}]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y[\frac{y}{x} + \ln x \frac{dy}{dx}] \quad [\because x^y = y]$$

$$\Rightarrow (1 - y \ln x) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(1 - y \ln x)} \quad (\text{Ans.})$$

18(b) $x^y y^x = 1$

[প্র.স.গ. '০২]

$$y \ln x + x \ln y = 0$$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y \frac{1}{x} + \ln x \frac{dy}{dx} + x \cdot \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} + \ln y = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + xy \ln x \frac{dy}{dx} + x^2 \frac{dy}{dx} + xy \ln y = 0$$

$$\Rightarrow (xy \ln x + x^2) \frac{dy}{dx} = -(xy \ln y + y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(x \ln y + y)}{x(y \ln x + x)}$$

18(c) $(\sin x)^{\cos y} + (\cos x)^{\sin y} = a$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(\sin x)^{\cos y} [\cos y \frac{d}{dx} \{ \ln(\sin x) \} + \ln(\sin x)]$$

$$\frac{d}{dx} (\cos y)] + (\cos x)^{\sin y} [\sin y \frac{d}{dx} \{ \ln(\cos x) \}]$$

$$+ \ln(\cos x) \frac{d}{dx} (\sin y) = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x)^{\cos y} [\cos y \cot x + \ln(\sin x)]$$

$$(-\sin y) \frac{dy}{dx} + (\cos x)^{\sin y} [\sin y (-\tan x) +$$

$$\ln(\cos x) \cos y \frac{dy}{dx}] = 0$$

$$\Rightarrow \{ (\cos x)^{\sin y} \ln(\cos x) \cos y$$

$$-(\sin x)^{\cos y} \ln(\sin x) \sin y \} \frac{dy}{dx} = (\cos x)^{\sin y}$$

$$\sin y \tan x - (\sin x)^{\cos y} \cos y \cot x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(\cos x)^{\sin y} \sin y \tan x - (\sin x)^{\cos y} \cos y \cot x}{(\cos x)^{\sin y} \ln(\cos x) \cos y - (\sin x)^{\cos y} \ln(\sin x) \sin y}$$

19. $y = \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ হলে, দেখাও যে,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

প্রমাণ : ধরি, $x = \cos \theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1} x$

$$y = \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{2\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2\cos \frac{\theta}{2}}}$$

$$= \tan^{-1} \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \cos^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

20. $x = 1$ বিন্দুতে $y = x^2$ ফাংশনের অন্তরক আকার সমীকরণ থেকে dy এবং δy নির্ণয় কর যখন

$$dx = \delta x = 2.$$

সমাধান : ধরি, $f(x) = y = x^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dy = 2x dx$$

$$\Rightarrow dy = 2 \times 1 \times 2, [\because x = 1, dx = 2]$$

$$\Rightarrow dy = 4$$

$$\text{আবার, } \delta y = f(x + \delta x) - f(x)$$

$$= f(1+2) - f(1) = f(3) - f(1)$$

$$= 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8.$$

21. $x = 3$ বিন্দুতে $y = \frac{x^2}{3} + 1$ ফাংশনের অন্তরক

আকার সমীকরণ থেকে dy এবং δy নির্ণয় কর যখন
 $dx = \delta x = 3$.

সমাধান : ধরি, $f(x) = y = \frac{x^2}{3} + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x \Rightarrow dy = \frac{2}{3}x \, dx$$

$$\Rightarrow dy = \frac{2}{3} \times 3 \times 3, [\because x = 3, dx = 3]$$

$$dy = 6$$

আবার, $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$

$$= f(3 + 3) - f(3) = f(6) - f(3)$$

$$= \left(\frac{6^2}{3} + 1\right) - \left(\frac{3^2}{3} + 1\right)$$

$$= 12 - 3 = 9$$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. $y = x^{-\frac{1}{x}}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান- [BUET 07-08]

$$Sol^n : \frac{dy}{dx} = x^{-\frac{1}{x}} \left[-\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \ln x + \frac{1}{x^2} \right]$$

$$= x^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} (\ln x - 1) = \frac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}} (\ln x - 1)$$



Option গুলোতে $x = \frac{1}{2}$ ক্ষেত্রে $\frac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}} (\ln x - 1)$

$$= 27.09 \text{ হয়।}$$

2. $\frac{d}{dx} (\log_x e) = ?$ [DU 08-09]

$$Sol^n : \frac{d}{dx} (\log_x e) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\ln x} \right) = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$$

3. $\frac{d}{dx} \{ \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \} = ?$ [DU 07-08]

$$Sol^n : \frac{d}{dx} \{ \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \}$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

4. $y = \sqrt{\sec x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ [DU 00-01]

$$Sol^n : \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\sec x}} \cdot \sec x \tan x$$

$$= \frac{\sqrt{\sec x} \tan x}{2} = \frac{y}{2} \tan x$$

5. $y = \cos \sqrt{x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ [DU 03-04]

$$Sol^n : \frac{dy}{dx} = -\sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

6. $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$ হলে, $\frac{df}{dx} = ?$ [DU 01-02]

$$Sol^n : \frac{df}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{4\sqrt{x}\sqrt{1 - \sqrt{x}}}$$

7. $y = \log_e (2x)^{1/3}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ [DU 98-99]

$$Sol^n : \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \frac{d}{dx} \{ \log_e (2x) \} = \frac{1}{3 \cdot 2x} (2) = \frac{1}{3x}$$

8. $y = \sin^{-1} \sin(x+1)$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

[DU 97-98 ; SU 06-07]

$$Sol^n : y = \sin^{-1} \sin(x+1) = x+1 \therefore \frac{dy}{dx} = 1$$

9. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ [NU 07-08]

$$Sol^n : \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} \cdot 1 - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x}{(\sqrt{x^2 + 1})^2}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

10. $\frac{d}{dx} (a^x) = ?$ [KU, RU 07-08; IU 02-03]

$$Sol^n : \frac{d}{dx} (a^x) = a^x \ln a$$

11. $\frac{d}{dx} (\log_a m^2) = ?$ [CU 07-08]

$$Sol^n : \frac{d}{dx} (\log_a m^2) = \theta$$

12. $x = \frac{1}{2}$ হলে, $\frac{d}{dx}(x^2 e^{2x} \log_e 2x) = ?$

[RU 07-08]

Sol: $\frac{d}{dx}(x^2 e^{2x} \log_e 2x)$

$$\begin{aligned} &= x^2 e^{2x} \cdot \frac{1}{2x} (2) + x^2 (e^{2x} \cdot 2) \log_e 2x \\ &\quad + (2x)e^{2x} \log_e 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \text{ হলে}, \frac{d}{dx}(x^2 e^{2x} \log_e 2x) \\ &= \frac{1}{4} e \cdot 2 + 0 + 0 = \frac{1}{2} e \end{aligned}$$

13. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots \infty}}}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

[SU 06-07, 05-06; RU 03-04; IU 06-07]

Sol: $y = \sqrt{x + y} \Rightarrow y^2 = x + y$

$$2y \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y - 1}$$

14. $y = \cos^{-1} \frac{x - x^{-1}}{x + x^{-1}}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

[RU 06-07]

Sol: $y = \cos^{-1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = -2 \tan^{-1} x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{1+x^2}$$

15. $y = (\log_a x)(\log x)$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ [RU 05-06]

Sol: $\frac{dy}{dx} = (\log_a x) \frac{1}{x \ln 10} + \frac{1}{x \ln a} (\log x)$

i.e. $\frac{dy}{dx} = (\log_a x) \frac{\log_a e}{x} + \frac{\log_{10} a}{x} (\log x)$

16. $y = \tan^{-1} \frac{1+x}{1-x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ [IU 05-06;

CU 02-03]

Sol: $y = \tan^{-1} \frac{1+x}{1-x} = \tan^{-1}(1) + \tan^{-1} x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

17. $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ হলে,

$$\frac{dy}{dx} = ? \quad [\text{SU 04-05; JU 06-07}]$$

Sol: $y = \tan^{-1} \frac{2t}{1-t^2} = 2 \tan^{-1} t$,

$$x = \sin^{-1} \frac{2t}{1+t^2} = 2 \tan^{-1} t \therefore y = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$$

18. $x^y = e^{x-y}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ [SU 06-07]

Sol: $y \ln x = x - y \Rightarrow y = \frac{x}{1+\ln x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\ln x).1 - x \cdot \frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} = \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$$

19. $y = f(x)$ হলে, $\frac{d}{dx}(e^y) = ?$ [CU 07-08]

Sol: $\frac{d}{dx}(e^y) = e^y \frac{dy}{dx}$

20. $x^2 + 3xy + 5y^2 = 1$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

[DU 07-08]

Sol: $2x + 3(x \frac{dy}{dx} + y \cdot 1) + 10y \frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow (3x + 10y) \frac{dy}{dx} = -(2x + 3y)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 3y}{3x + 10y}$$

21. $y = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}$ হলে, $3(y^2 - 1) \frac{dy}{dx} = ?$

[DU 04-05]

Sol: $y^3 = x + x^{-1} + 3x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})$

$$\Rightarrow y^3 = x + \frac{1}{x} + 3y$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} + 3 \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 3(y^2 - 1) \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} \quad (\text{Ans.})$$

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী :

$$1. D^n(x^n) = n! \quad 2. D^n(e^{ax}) = a^n e^{ax}$$

$$3. D^n\left(\frac{1}{ax+b}\right) = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$4. D^n \{ \ln(ax+b) \} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot a^n}{(ax+b)^n}$$

$$5. D^n \{ \sin(ax+b) \} = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$$

$$6. D^n \{ \cos(ax) \} = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$$

$$7. D^n \{ e^{ax} \cos(bx+c) \} = (a^2 + b^2)^{n/2}$$

$$e^{ax} \cos(bx+c + n \tan^{-1} \frac{b}{a})$$

$$1. y = 4x^{\frac{3}{2}} - 3 + 2x^{\frac{1}{2}} \text{ হলে, } y_2 \text{ নির্ণয় কর।}$$

এবং $x=4$ হলে, y_2 এর মান নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান: এখানে, } y = 4x^{\frac{3}{2}} - 3 + 2x^{\frac{1}{2}}$$

x -এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = 4 \times \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} - 0 + 2 \times \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = 6x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y_2 = 6 \times \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} + (-\frac{1}{2}) x^{-\frac{1}{2}-1} = 3x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$$

$$x = 4 \text{ হলে, } y_2 = 3 \cdot 4^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{24-1}{16} = \frac{23}{16}$$

$$2. y = \sin x \text{ হলে, দেখাও যে, } y_4 - y = 0$$

[রা. '08; ব. '08]

প্রমাণ : এখানে, $y = \sin x$

x -এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = -\sin x, \quad y_3 = -\cos x,$$

$$y_4 = \sin x = y$$

$y_4 - y = 0$ (Showed)

$$3.(a) y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ হলে, দেখাও যে, } 2x \frac{dy}{dx} +$$

$$y = 2\sqrt{x} \quad [\text{চ. } '07; \text{ য. } '07; \text{ কু. } '08; \text{ প.ত.গ. } '08]$$

প্রমাণ : এখানে, $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x}y = x + 1$

উভয় পক্ষকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\sqrt{x} \frac{dy}{dx} + y \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x+1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \frac{dy}{dx} + y \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$$

উভয় পক্ষকে $2\sqrt{x}$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$2x \frac{dy}{dx} + y = 2\sqrt{x} \quad (\text{Showed})$$

$$3(b) y = \sqrt{(1-x)(1+x)} \text{ হলে, দেখাও যে,}$$

$$(1-x^2) \frac{dy}{dx} + xy = 0 \quad [\text{য. } '08]$$

প্রমাণ : এখানে, $y = \sqrt{(1-x)(1+x)} = \sqrt{1-x^2}$

উভয় পক্ষকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x) = \frac{-x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow (1-x^2) \frac{dy}{dx} = -x\sqrt{1-x^2} = -xy$$

$$(1-x^2) \frac{dy}{dx} + xy = 0 \quad (\text{Showed})$$

$$3(c) y = px + \frac{q}{x} \text{ হলে, দেখাও যে, } x \frac{d^2y}{dx^2} +$$

$$2 \frac{dy}{dx} = 2p \quad [\text{কু. } '02; \text{ চ. } '05; \text{ য., চ. } '09]$$

প্রমাণ : এখানে, $y = px + \frac{q}{x} \Rightarrow xy = px^2 + q$

উভয় পক্ষকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$x \frac{dy}{dx} + y \cdot 1 = p(2x) + 0 \Rightarrow x \frac{dy}{dx} + y = 2px$$

পুনরায় x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot 1 + \frac{dy}{dx} = 2p$$

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = 2p \quad (\text{Showed})$$

$$4.(a) \quad y = ax^2 + \frac{b}{\sqrt{x}} \quad \text{হলে, দেখাও যে, } 2x^2y_2 - xy_1 - 2y = 0$$

[ব. '০২; জ. '০৬; কু. '০৯; সি. '১৩; ঘ.দি. '১৮]

$$\text{প্রমাণ : এখানে, } y = ax^2 + \frac{b}{\sqrt{x}} = ax^2 + bx^{-\frac{1}{2}}$$

এখন x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = 2ax - \frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}-1} = 2ax - \frac{1}{2}bx^{-\frac{3}{2}}$$

$$y_2 = 2a + \frac{3}{4}bx^{-\frac{3}{2}-1} = 2a + \frac{3}{4}bx^{-\frac{5}{2}}$$

$$\text{এখন, } 2x^2y_2 - xy_1 - 2y = 4ax^2 + \frac{3}{2}bx^{-\frac{1}{2}}$$

$$- (2ax^2 - \frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}}) - (2ax^2 + 2bx^{-\frac{1}{2}})$$

$$= 4ax^2 + \frac{3}{2}bx^{-\frac{1}{2}} - 2ax^2 + \frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}}$$

$$- 2ax^2 - 2bx^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 4ax^2 - 4ax^2 + 2bx^{-\frac{1}{2}} - 2bx^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$2x^2y_2 - xy_1 - 2y = 0 \quad (\text{Showed})$$

$$4.(b) \quad y = px^2 + qx^{-\frac{1}{2}} \quad \text{হলে, দেখাও যে,}$$

$$2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 2y \quad [\text{ঝ. '০৬; ঘ. '১২; কু. '০৬; সি. '০৮, '১০; মা. '০৯; চ. '১১, '১৩; দি. '১১; জ. '১৩}]$$

$$\text{প্রমাণ : এখানে, } y = px^2 + qx^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2px - \frac{1}{2}qx^{-\frac{3}{2}}, \frac{d^2y}{dx^2} = 2p + \frac{3}{4}qx^{-\frac{5}{2}}$$

$$\text{এখন, } 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 4px^2 + \frac{3}{2}qx^{-\frac{1}{2}}$$

$$- (2px^2 - \frac{1}{2}qx^{-\frac{1}{2}})$$

$$= 4px^2 + \frac{3}{2}qx^{-\frac{1}{2}} - 2px^2 + \frac{1}{2}qx^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2px^2 + 2qx^{-\frac{1}{2}} = 2(px^2 + qx^{-\frac{1}{2}}) = 2y$$

$$2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 2y \quad (\text{Showed})$$

$$5.(a) \quad y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{হলে, দেখাও যে,}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = y^2 \quad [\text{চ. '০৩}]$$

$$\text{প্রমাণ : } y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \Rightarrow 2y = e^x + e^{-x} \dots (1)$$

$$2 \frac{dy}{dx} = e^x - e^{-x}$$

$$\Rightarrow 4 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (e^x - e^{-x})^2 \quad [\text{বর্গ করে।}]$$

$$= (e^x + e^{-x})^2 - 4e^x e^{-x}$$

$$= (2y)^2 - 4 \quad [\because e^x + e^{-x} = 2y]$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = y^2 \quad (\text{Showed})$$

$$5(b) \quad y = Ae^{mx} + Be^{-mx} \quad \text{হলে, দেখাও যে,}$$

$$y_2 - m^2 y = 0 \quad [\text{ঝ. '০৭; ব. '০৮, '১৩; সি. '১০; সি. '১১}]$$

$$\text{প্রমাণ : এখানে, } y = Ae^{mx} + Be^{-mx}$$

$$y_1 = \frac{d}{dx}(Ae^{mx} + Be^{-mx}) = Ame^{mx} - Bme^{-mx}$$

$$y_2 = Am^2 e^{mx} + Bm^2 e^{-mx}$$

$$= m^2(Ae^{mx} + Be^{-mx})$$

$$= m^2 y \quad [\because y = Ae^{mx} + Be^{-mx}]$$

$$y_2 - m^2 y = 0 \quad (\text{Showed})$$

$$6.(a) \quad y = \sec x \quad \text{হলে, দেখাও যে, } y_2 = y(2y^2 - 1)$$

$$[\text{ঝ. '০৭; চ. '০৬, '০৮, '১৪; সি. '০৭; ব. '০৬; ঘ. '০৮, '১১; কু. '১০; মা. '১২, '১৪]$$

$$\text{প্রমাণ : এখানে, } y = \sec x$$

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \\y_2 &= \sec x \cdot \sec^2 x + \tan x \cdot \sec x \tan x \\&= \sec x (\sec^2 x + \tan^2 x) \\&= \sec x (\sec^2 x + \sec^2 x - 1) \\y_2 &= y(2y^2 - 1) \quad [\because y = \sec x]\end{aligned}$$

6(b) $y = \tan x + \sec x$ হলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$$

[রা. '১০, '১৮; কু. '০৩; সি. '১৩; ব., ঢ. '১৮]

প্রমাণ : এখানে, $y = \tan x + \sec x \dots (1)$

(1) -এর উভয় পক্ষকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ

$$\text{করে পাই, } \frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \sec x \tan x$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} \\&= \frac{1 + \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \frac{1}{1 - \sin x} \dots (2)\end{aligned}$$

(2) -এর উভয় পক্ষকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে

$$\text{পাই, } \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{(1 - \sin x)^2} \frac{d}{dx}(1 - \sin x)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\cos x (\cos^2 x + 2 \sin x + 2 \sin^2 x)}{\cos^4 x}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2} \quad (\text{Showed})$$

6(c) $y = \sin(\sin x)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2 + y_1 \tan x + y \cos^2 x = 0$

[য. '০৫; সি. '০৬, '১১; কু. '০৭; ব. '০৯]

প্রমাণ : এখানে, $y = \sin(\sin x) \dots \dots (1)$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \cos(\sin x) \cdot \cos x \dots (2)$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\begin{aligned}y_2 &= \cos(\sin x) \cdot (-\sin x) + \\&\quad \cos x \cdot \{-\sin(\sin x)\} \cdot \cos x\end{aligned}$$

$$= -\sin x \cos(\sin x) - \cos^2 x \cdot \sin(\sin x)$$

$$= -\sin x \cdot \frac{y_1}{\cos x} - \cos^2 x \cdot y \quad [(1) \text{ ও } (2) \text{ হতে }]$$

$$= -y_1 \tan x - y \cos^2 x \\y_2 + y_1 \tan x + y \cos^2 x = 0 \quad (\text{Showed})$$

$$7. \text{ (a) } y = (p + qx)e^{-2x} \text{ হলে, প্রমাণ কর যে, } \frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 0 \quad [\text{য. '০২; ব. '০৯; সি. '১৩}]$$

প্রমাণ : এখানে, $y = (p + qx)e^{-2x} \dots (1)$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = (p + qx) \cdot e^{-2x} (-2) + e^{-2x} (0 + q)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2y + qe^{-2x} \quad [(1) \text{ দ্বারা }]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + 2y = qe^{-2x} \quad \dots (2)$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = -2qe^{-2x}$$

$$= -2 \left(\frac{dy}{dx} + 2y \right) \quad [(2) \text{ দ্বারা }]$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 0 \quad (\text{Showed})$$

$$7(b) \text{ } y = (e^x + e^{-x}) \sin x \text{ হলে, প্রমাণ কর যে, } y_4 + 4y = 0 \quad [\text{ড. '০৮; রা. '০৬; সি. '১২}]$$

প্রমাণ : এখানে, $y = (e^x + e^{-x}) \sin x \dots (1)$

$$y_1 = (e^x + e^{-x}) \cos x + (e^x - e^{-x}) \sin x$$

$$y_2 = (e^x + e^{-x})(-\sin x) + (e^x - e^{-x}) \cos x$$

$$+ (e^x - e^{-x}) \cos x + (e^x + e^{-x}) \sin x$$

$$= 2(e^x - e^{-x}) \cos x$$

$$y_3 = 2 \{ (e^x + e^{-x}) \cos x - (e^x - e^{-x}) \sin x \}$$

$$y_4 = 2 \{ \{ (e^x - e^{-x}) \cos x - (e^x + e^{-x}) \sin x \}$$

$$- \{ (e^x + e^{-x}) \sin x + (e^x - e^{-x}) \cos x \} \}$$

$$= 2 \{ (e^x - e^{-x}) \cos x - (e^x + e^{-x}) \sin x \}$$

$$- (e^x + e^{-x}) \sin x - (e^x - e^{-x}) \cos x \}$$

$$= 2 \{ -2(e^x + e^{-x}) \sin x \}$$

$$= -4y \\ y_4 + 4y = 0$$

[(1) দ্বারা।]
 (Showed)

7(c) $y = e^x \cos x$ হলে, দেখাও যে,
 $y_2 - 2y_1 + 2y = 0$ [দি.'১০; চ.'১২; ব.'১৩; মা.'১৮]

প্রমাণ : এখানে, $y = e^x \cos x$... (1)

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = e^x \cos x + e^x(-\sin x)$$

$$\Rightarrow y_1 = y - e^x \sin x$$

[(1) দ্বারা।]

$$\Rightarrow y_1 - y = -e^x \sin x$$

... (2)

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_2 - y_1 = -e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$= y_1 - y - y$$

[(1) ও (2) দ্বারা।]

$$y_2 - 2y_1 + 2y = 0$$

(Showed)

7(d) $y = e^{ax} \sin bx$ হলে, দেখাও যে,

$$y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$$

[সি.'০২]

প্রমাণ : এখানে, $y = e^{ax} \sin bx$... (1)

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = e^{ax} \cdot \cos bx \cdot b + \sin bx \cdot e^{ax} \cdot a$$

$$= b e^{ax} \cos bx + a y$$

[(1) দ্বারা।]

$$\Rightarrow y_1 - ay = b e^{ax} \cos bx$$

... (2)

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_2 - a y_1 = b \{ae^{ax} \cos bx - be^{ax} \sin bx\}$$

$$\Rightarrow y_2 - a y_1 = a(b e^{ax} \cos bx) - b^2 e^{ax} \sin bx$$

= a(y_1 - ay) - b^2 y

[(1) ও (2) দ্বারা।]

$$y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$$

8.(a) $y = a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x)$ হলে, দেখাও যে, $x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$

[চ.'০৭; ঢ.'০৯; বা.'১৩; সি.'১৮]

প্রমাণ : $y = a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x)$... (1)

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = a\{-\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\} + b \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow xy_1 = -a \sin(\ln x) + b \cos(\ln x)$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$xy_2 + y_1 \cdot 1 = -a \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} - b \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x^2 y_2 + xy_1 = -\{a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x)\}$$

$$\Rightarrow x^2 y_2 + xy_1 = -y$$

[(1) দ্বারা।]

$$x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$$

(Showed)

8(b) $y = x^2 \ln(x)$ হলে, দেখাও যে, $y_3 x = 2$

[প.ভ.প.'০৬]

প্রমাণ : এখানে, $y = x^2 \ln(x)$

$$y_1 = x^2 \frac{1}{x} + \ln(x) \cdot 2x = x + 2x \ln(x)$$

$$y_2 = 1 + 2\left\{x \frac{1}{x} + \ln(x) \cdot 1\right\} = 1 + 2 + 2 \ln(x)$$

$$y_3 = 0 + 2 \cdot \frac{1}{x} \quad y_3 x = 2$$

(Showed)

8(c) $y = \ln(\sin x)$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$

প্রমাণ : এখানে, $y = \ln(\sin x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \{\ln(\sin x)\} = \frac{1}{\sin x} (\cos x)$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} (\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} (-\operatorname{cosec}^2 x)$$

$$= -2 \operatorname{cosec} x (-\operatorname{cosec} x \cot x)$$

$$= 2 \operatorname{cosec}^2 x \cot x = 2 \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$$

(Showed)

9.(a) $y = (x + \sqrt{1+x^2})^m$ হলে, প্রমাণ কর যে,

$$(1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2 y = 0$$

[য.'১০; ব.'১০, '১৪; সি.'১২]

প্রমাণ : এখানে, $y = (x + \sqrt{1+x^2})^m$... (1)

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\begin{aligned}
 y_1 &= m(x + \sqrt{1+x^2})^{m-1} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \\
 &= m(x + \sqrt{1+x^2})^{m-1} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\
 &= \frac{m(x + \sqrt{1+x^2})^m}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{my}{\sqrt{1+x^2}} \\
 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} y_1 &= my \\
 \Rightarrow (1+x^2) y_1^2 &= m^2 y^2 \quad [\text{উভয় পক্ষকে বর্গ করে}] \\
 \text{ইহাকে } x &\text{-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,} \\
 (1+x^2).2y_1 y_2 + y_1^2 (0+2x) &= m^2 2yy_1 \\
 \text{উভয় পক্ষকে } 2y_1 &\text{ দ্বারা ভাগ করে পাই,} \\
 (1+x^2)y_2 + y_1 x &= m^2 y \\
 (1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2 y &= 0 \quad (\text{Showed})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9(b) y &= \sqrt{(4+3\sin x)} \quad \text{হলে, দেখাও যে,} \\
 2y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 &= 4 \quad [\text{য.'১৩; কু.'১১,'১৮;} \\
 \text{চ.'১০; ঢ.'০৮; রা.'১২; সি.'১২; দি.'১১}] \\
 \text{প্রমাণ : } y &= \sqrt{(4+3\sin x)} \Rightarrow y^2 = 4+3\sin x \\
 \Rightarrow y^2 - 4 &= 3\sin x \dots (1) \\
 \text{ইহাকে } x &\text{-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,} \\
 2y \frac{dy}{dx} &= 3\cos x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ইহাকে } x &\text{-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,} \\
 2y \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} &= 3(-\sin x) \\
 \Rightarrow 2y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= -(y^2 - 4) \quad [(1) \text{ দ্বারা }] \\
 2y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9(c) y &= \ln[x + \sqrt{a^2 + x^2}] \quad \text{হলে, দেখাও যে,} \\
 (a^2 + x^2)y_2 + xy_1 &= 0 \quad [\text{চ.'১০,'১৮; য.'১৮}] \\
 \text{প্রমাণ : এখানে, } y &= \ln[x + \sqrt{a^2 + x^2}] \dots (1) \\
 \text{ইহাকে } x &\text{-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}}\right) \\
 &= \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\
 \Rightarrow y_1 \sqrt{a^2 + x^2} &= 1 \Rightarrow y_1^2(a^2 + x^2) = 1 \\
 \text{ইহাকে } x &\text{-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,} \\
 y_1^2(0+2x) + (a^2 + x^2) 2y_1 y_2 &= 0 \\
 \text{উভয় পক্ষকে } 2y_1 &\text{ দ্বারা ভাগ করে পাই,} \\
 (a^2 + x^2)y_2 + xy_1 &= 0 \quad (\text{Showed}) \\
 10.(a) y &= e^{a \sin^{-1} x} \quad \text{হলে, দেখাও যে, } (1-x^2)y_2 \\
 - xy_1 &= a^2 y \\
 \text{[য.'০৯; ঢ.'১১,'১৮; সি.'০৯; ব.'১১; কু.'১২; রা.'১৮]} \\
 \text{প্রমাণ : এখানে, } y &= e^{a \sin^{-1} x} \dots (1) \\
 \text{ইহাকে } x &\text{-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,} \\
 y_1 &= e^{a \sin^{-1} x} \cdot \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} \\
 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} y_1 &= ay \quad [(1) \text{ দ্বারা }] \\
 \Rightarrow (1-x^2) y_1^2 &= a^2 y^2 \\
 \text{ইহাকে } x &\text{-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,} \\
 (1-x^2) 2y_1 y_2 + y_1^2 (0-2x) &= a^2 (2yy_1) \\
 \text{উভয় পক্ষকে } 2y_1 &\text{ দ্বারা ভাগ করে পাই,} \\
 (1-x^2) y_2 - xy_1 &= a^2 y \quad (\text{Showed})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10(b) y &= e^{4 \sin^{-1} x} \quad \text{হলে, দেখাও যে, } (1-x^2)y_2 \\
 - xy_1 &= 16y \quad [\text{চ.'০২}] \\
 \text{প্রমাণ : এখানে, } y &= e^{4 \sin^{-1} x} \dots (1) \\
 \text{ইহাকে } x &\text{-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,} \\
 y_1 &= e^{4 \sin^{-1} x} \cdot \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \\
 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} y_1 &= 4y \quad [(1) \text{ দ্বারা }] \\
 \Rightarrow (1-x^2) y_1^2 &= 16y^2 \\
 \text{ইহাকে } x &\text{-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,} \\
 (1-x^2) 2y_1 y_2 + y_1^2 (0-2x) &= 16(2yy_1) \\
 \text{উভয় পক্ষকে } 2y_1 &\text{ দ্বারা ভাগ করে পাই,}
 \end{aligned}$$

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 16y \quad (\text{Showed})$$

$$10(c) y = e^{\tan^{-1} x} \text{ হলে, প্রমাণ কর যে, } (1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0 \quad [\text{য.}'08; \text{কু.}'06; \text{ব.}'07; \text{দি.}'09]$$

$$\text{প্রমাণ : এখানে, } y = e^{\tan^{-1} x} \quad \dots(1)$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = e^{\tan^{-1} x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = y \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad [(1) \text{ দ্বারা }]$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = y$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(1+x^2)y_2 + y_1(0+2x) = y_1$$

$$(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0 \quad (\text{Showed})$$

$$10.(d) y = \tan^{-1} x \text{ হলে, প্রমাণ কর যে, } (1+x_2)y_2 + 2xy_1 = 0 \quad [\text{রা.}'02; \text{জ.}'05; \text{কু.}'05]$$

$$\text{প্রমাণ : এখানে, } y = \tan^{-1} x \quad \dots(1)$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)y_1 = 1$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(1+x^2)y_2 + y_1(0+2x) = 0$$

$$(1+x_2)y_2 + 2xy_1 = 0 \quad (\text{Showed})$$

$$10(e) \ln y = a \sin^{-1} x \text{ হলে, দেখাও যে, } (1-x^2)y_2 - x y_1 - a^2 y = 0 \quad [\text{জ.}'07]$$

$$\text{প্রমাণ : এখানে, } \ln y = a \sin^{-1} x$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{y}y_1 = a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}y_1 = ax$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = a^2 y^2 \quad [\text{উভয় পক্ষকে বর্গ করে।}]$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(1-x^2)2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = a^2 \cdot 2yy_1$$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 = a^2 y$$

$$(1-x^2)y_2 - x y_1 - a^2 y = 0$$

$$10(f) \ln(y) = \tan^{-1} x \text{ হলে, দেখাও যে, } (1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$$

$$[\text{রা.}'05; \text{০৮}, \text{'১০}; \text{য.}'10; \text{কু.}'11; \text{জ.ব.}'12]$$

$$\text{প্রমাণ : এখানে, } \ln(y) = \tan^{-1} x$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{y}y_1 = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)y_1 = y$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(1+x^2)y_2 + y_1(0+2x) = y_1$$

$$(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$$

$$10(g) y = \sin^{-1} x \text{ হলে, প্রমাণ কর যে, } (1-x^2)y_2 - xy_1 = 0 \quad [\text{সি.}'01, '05]$$

$$\text{প্রমাণ : এখানে, } y = \sin^{-1} x$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y_1 \sqrt{1-x^2} = 1$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = 1 \quad [\text{উভয় পক্ষকে বর্গ করে।}]$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(1-x^2)2y_1y_2 + y_1(-2x) = 0$$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0 \quad (\text{Showed})$$

$$11.(a) y = \tan(m \tan^{-1} x) \text{ হলে, দেখাও যে, } (1+x^2)y_2 - my_1 = m(1+y^2) \quad [\text{কু.}'12; \text{য.}'11; \text{চ.}'12; \text{জ.}'13]$$

$$\text{প্রমাণ : এখানে, } y = \tan(m \tan^{-1} x) \dots(1)$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \sec^2(m \tan^{-1} x) \cdot \frac{m}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m\{1+\tan^2(m \tan^{-1} x)\}$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m(1+y^2) \quad [(1) \text{ দ্বারা}]$$

$$11(b) y = \tan(m \tan^{-1} x) \text{ হলে, দেখাও যে, } (1+x^2)y_2 - 2(my-x)y_1 = 0 \quad [\text{সি.}'06]$$

$$\text{প্রমাণ : এখানে, } y = \tan(m \tan^{-1} x) \dots(1)$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \sec^2(m \tan^{-1} x) \cdot \frac{m}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m\{1 + \tan^2(m \tan^{-1} x)\}$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = m(1+y^2) \quad [(1) দ্বারা]$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(1+x^2)y_2 + y_1(2x) = m \cdot 2yy_1$$

$$(1+x^2)y_2 - 2(my-x)y_1 = 0$$

11(e) $y = \sin(m \sin^{-1} x)$ হলে, দেখাও যে,
 $(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$

[ব.'১১; ঢ.'১০; রা.'০৯; কু.'১৩; দি.'১৪]

প্রমাণঃ এখানে, $y = \sin(m \sin^{-1} x) \dots (1)$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \cos(m \sin^{-1} x) \cdot \frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y_1 \sqrt{1-x^2} = m \cos(m \sin^{-1} x)$$

$$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = m^2 \cos^2(m \sin^{-1} x)$$

$$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = m^2 \{1 - \sin^2(m \sin^{-1} x)\}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = m^2(1-y^2) \quad [(1) দ্বারা]$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(1-x^2)2y_1y_2 + y_1(-2x) = m^2(-2yy_1)$$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$(1-x^2)v_2 - xy_1 = -m^2y$$

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0 \quad (\text{Showed})$$

11(d) $y = \cos(2 \sin^{-1} x)$ হলে, দেখাও যে,
 $(1-x^2)y_2 - xy_1 + 4y = 0 \quad [\text{প.ত.গ.'০৬}]$

প্রমাণঃ এখানে, $y = \cos(2 \sin^{-1} x) \dots (1)$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = -\sin(2 \sin^{-1} x) \cdot \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow y_1 \sqrt{1-x^2} = -2 \sin(2 \sin^{-1} x)$$

$$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = 4 \sin^2(2 \sin^{-1} x)$$

$$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = 4\{1 - \cos^2(2 \sin^{-1} x)\}$$

$$(1-x^2)y_1^2 = 4(1-y^2) \quad [(1) দ্বারা]$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(1-x^2)2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = 4(-2yy_1)$$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 = -4y$$

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 + 4y = 0 \quad (\text{Showed})$$

11(e) $y = (\sin^{-1} x)^2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0 \quad [\text{ব.'০৮; রা.'১১}]$

প্রমাণঃ এখানে, $y = (\sin^{-1} x)^2 \quad (1)$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = 2(\sin^{-1} x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} y_1 = 2(\sin^{-1} x)$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = 4(\sin^{-1} x)^2 = 4y$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(1-x^2).2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = 4y,$$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 2$$

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0 \quad (\text{Showed})$$

11(f) $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2$ হলে, প্রমাণ কর যে,

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 - 1 = 0 \quad [\text{প.ত.গ.'০৫}]$$

প্রমাণঃ এখানে, $2y = (\sin^{-1} x)^2 \dots (1)$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y_1 = 2(\sin^{-1} x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} y_1 = (\sin^{-1} x)$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = (\sin^{-1} x)^2 = 2y$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(1-x^2).2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = 2y,$$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 1$$

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 - 1 = 0 \quad (\text{Showed})$$

12(a) $\cos\sqrt{y} = x$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)y_2$

$$-xy_1 - 2 = 0 \quad [\text{ব.'০৬, '০৮, '১২; চ.'০৬; রা.'০৭, '০৯; }$$

$$\text{সি.'১০; ব.'১০; ঢ.'১১}]$$

প্রমাণ ৪ এখানে, $\cos \sqrt{y} = x \dots \dots (1)$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$-\sin \sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} y_1 = 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y} = -y_1 \sin \sqrt{y}$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$$4y = y_1^2 \sin^2 \sqrt{y} = y_1^2 (1 - \cos^2 \sqrt{y})$$

$$\Rightarrow 4y = y_1^2 (1 - x^2) \quad [(1) \text{ দ্বারা}]$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$4y_1 = 2y_1 y_2 (1 - x^2) + y_1^2 (-2x)$$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$2 = y_2 (1 - x^2) - xy_1$$

$$(1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0 \text{ (Showed)}$$

$$12(b) x = \sin \sqrt{y} \text{ হলে, দেখাও যে, } (1 - x^2)y_2$$

$$-xy_1 - 2 = 0 \quad [ব.'১২; ঢা.'০৮; কু.'০৮; চ.'১১]$$

প্রমাণ ৫ এখানে, $x = \sin \sqrt{y} \dots \dots (1)$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\cos \sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} y_1 = 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y} = y_1 \cos \sqrt{y}$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$$4y = y_1^2 \cos^2 \sqrt{y} = y_1^2 (1 - \sin^2 \sqrt{y})$$

$$\Rightarrow 4y = y_1^2 (1 - x^2) \quad [(1) \text{ দ্বারা}]$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$4y_1 = 2y_1 y_2 (1 - x^2) + y_1^2 (-2x)$$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$2 = y_2 (1 - x^2) - xy_1$$

$$(1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0 \text{ (Showed)}$$

$$12(c) y = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \text{ হলে, দেখাও যে, } x^2 y_2 + xy_1$$

$$+ (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$$

[প.ঙ.প.'০৮]

প্রমাণ ৫ $y = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sin x = \sqrt{x}y \dots \dots (1)$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\cos x = \sqrt{x} y_1 + y \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow 2\cos x = \frac{2xy_1 + y}{\sqrt{x}}$$

$$-2\sin x = \frac{\sqrt{x}(2xy_2 + 2y_1 + y_1) - (2xy_1 + y)}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{x}y = \frac{1}{2x\sqrt{x}} [2x(2xy_2 + 2y_1 + y_1) - 2xy_1 - y]$$

$$\Rightarrow -4x^2 y = 4x^2 y_2 + 6x y_1 - 2xy_1 - y$$

$$\Rightarrow -4x^2 y = 4x^2 y_2 + 4x y_1 - y$$

$$\Rightarrow 4(x^2 y_2 + x y_1 + x^2 y) = y$$

$$\Rightarrow x^2 y_2 + x y_1 + x^2 y = \frac{y}{4}$$

$$x^2 y_2 + x y_1 + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$$

$$13.(a) x = a(\theta + \sin \theta) \text{ ও } y = a(1 - \cos \theta)$$

হলে, $\frac{\theta}{2}$ এর মাধ্যমে $\frac{dy}{dx}$ ও $\frac{d^2 y}{dx^2}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos \theta), \frac{dy}{d\theta} = a \sin \theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{a \sin \theta}{a(1 + \cos \theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$= \sec^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a(1 + \cos \theta)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{a \cdot 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2a} \sec^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{4a} \sec^4 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

13(b) $2x = t + t^{-1}$ এবং $2y = t - t^{-1}$ হলে,
দেখাও যে, $\frac{dy}{dx} = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8t^3}{(t^2 - 1)^3}$

প্রমাণ : এখানে, $2x = t + t^{-1} = t + \frac{1}{t} = \frac{t^2 + 1}{t}$

$$2 \frac{dx}{dt} = \frac{t(2t+0)-(t^2+1).1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2}$$

এবং $2y = t - t^{-1} = t - \frac{1}{t} = \frac{t^2 - 1}{t} = \frac{t^2 - 1}{t}$

$$2 \frac{dy}{dt} = \frac{t(2t-0)-(t^2-1).1}{t^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{t^2+1}{t^2} \times \frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t^2+1}{t^2-1}$$

$$\text{এখন, } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{t^2+1}{t^2-1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{t^2+1}{t^2-1} \right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{(t^2-1).2t - (t^2+1).2t}{(t^2-1)^2} \times \frac{2t^2}{t^2-1}$$

$$= \frac{2t(t^2-1-t^2-1)}{(t^2-1)^2} \times \frac{2t^2}{t^2-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8t^2}{(t^2-1)^3}$$

14. নিচের ফাংশনগুলোর n তম অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

(a) মনে করি, $y = \ln x$

$$y_1 = \frac{1}{x} = x^{-1} = (-1)^{1-1} x^{-1}$$

$$y_2 = (-1)x^{-2} = (-1)^{2-1} x^{-2}$$

$$y_3 = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2 (1.2)x^{-3}$$

$$= (-1)^{3-1} \{1.(3-1)\} x^{-3}$$

$$y_4 = (-1)(-2)(-3)x^{-2} = (-1)^3 (1.2.3)x^{-4}$$

$$= (-1)^3 \{1.2.(4-1)\} x^{-4}$$

অনুরূপভাবে,

$$y_n = (-1)^{n-1} \{1.2.3.\dots\dots(n-1)\} x^{-n}$$

$$\therefore \ln x \text{ এর } n \text{ তম অন্তরক সহগ} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$$

$$14(b) \text{ মনে করি, } y = \frac{1}{a-x} = (a-x)^{-1}$$

$$y_1 = (-1)(a-x)^{-2}(-1) = 1.(a-x)^{-1-1}$$

$$y_2 = (-2)(a-x)^{-3}(-1) = (1.2)(a-x)^{-2-1}$$

$$y_3 = (1.2)(-3)(x-a)^{-4}(-1)$$

$$= (1.2.3)(a-x)^{-3-1}$$

$$\text{অনুরূপভাবে, } y_n = (1.2.3.\dots\dots n)(x-a)^{-n-1}$$

$$\frac{1}{a-x} \text{ এর } n \text{ তম অন্তরক সহগ} = \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$$

$$14(c) \cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(\cos^3 x) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{d^n}{dx^n}(3\cos x) + \right.$$

$$\left. \frac{d^n}{dx^n}(\cos 3x) \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \{ 3\cos(\frac{n\pi}{2} + x) + 3^n \cos(\frac{n\pi}{2} + 3x) \}$$

$$14(d) e^{3x} \sin^2 x$$

[প.ড.প '০১]

$$= e^{3x} \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2} \{ e^{3x} - e^{3x} \cos 2x \}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{3x} \sin^2 x) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d^n}{dx^n}(e^{3x}) - \right.$$

$$\left. \frac{d^n}{dx^n}(e^{3x} \cos 2x) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 3^n e^{3x} - (3^2 + 2^2)^{\frac{n}{2}} e^{3x} \right\}$$

$$\cos(2x + n \tan^{-1} \frac{2}{3}) \}$$

$$= \frac{e^{3x}}{2} \left\{ 3^n - (\sqrt{13})^n \cos(2x + n \tan^{-1} \frac{2}{3}) \right\}$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

$$1. \quad y = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} \text{ হলে, } \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ এবং } \frac{d^3 y}{dx^3} \text{ নির্ণয় কর।}$$

$$\text{সমাধান: } y = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 - 2 + x^{-2}$$

x -এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 0 + (-2)x^{-3}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 + (-2)(-3)x^{-4} = 2 + \frac{6}{x^4}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = (-2)(-3)(-4)x^{-5} = -\frac{24}{x^5}$$

$$2. \quad y = a \cos x + b \sin x \text{ হলে, দেখাও যে,}$$

$$y_4 - y = 0$$

$$\text{প্রমাণ: } 8 \text{ এখানে, } y = a \cos x + b \sin x$$

x -এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = a(-\sin x) + b \cos x$$

$$y_2 = a(-\cos x) + b(-\sin x)$$

$$y_3 = a \sin x + b(-\cos x)$$

$$y_4 = a \cos x + b \sin x = y$$

$$y_4 - y = 0 \text{ (Showed)}$$

$$3. \quad y = \frac{x}{x+2} \text{ হলে, দেখাও যে, } xy_1 = y(1-y)$$

$$\text{প্রমাণ: } 8 \text{ এখানে, } y = \frac{x}{x+2} \Rightarrow x+2 = \frac{x}{y}$$

উভয় পক্ষকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$1 = \frac{y \cdot 1 - xy_1}{y^2} \Rightarrow y^2 = y - xy_1$$

$$\Rightarrow xy_1 = y - y^2 \therefore xy_1 = y(1-y) \text{ (Showed)}$$

$$4.(a) \quad y = a x^{n+1} + b x^{-n} \text{ হলে, দেখাও যে,}$$

$$x^2 y_2 = n(n+1)y$$

$$\text{প্রমাণ: } 8 \text{ এখানে, } y = a x^{n+1} + b x^{-n}$$

x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = a(n+1)x^n + b(-n)x^{-n-1}$$

$$y_2 = a(n+1)nx^{n-1} + b(-n)(-n-1)x$$

$$\text{এখন, } x^2 y_2 = n(n+1)ax^{n+1} + n(n+1)bx^{-n}$$

$$\Rightarrow x^2 y_2 = n(n+1)(ax^{n+1} + bx^{-n})$$

$$x^2 y_2 = n(n+1)y \text{ (Showed)}$$

$$4(b) \quad y = \sqrt{ax^2 + bx + c} \text{ হলে, দেখাও যে,}$$

$$4y^3 y_2 = 4ac - b^2$$

$$\text{প্রমাণ: } 8 \text{ এখানে, } y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

x -এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \frac{1}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} (2ax + b)$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} \cdot (2a) - \frac{(2ax + b)^2}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}}{(2\sqrt{ax^2 + bx + c})^2}$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{4a(ax^2 + bx + c) - 4ax^2 - 4abx - b^2}{4(\sqrt{ax^2 + bx + c})^3}$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{4a^2x^2 + 4abx + 4ac - 4ax^2 - 4abx - b^2}{4y^3}$$

$$4y^3 y_2 = 4ac - b^2 \text{ (Showed)}$$

$$5(a) \quad y = \sqrt{\cos 2x} \text{ হলে, দেখাও যে,}$$

$$(yy_1)^2 = 1 - y^4$$

$$\text{প্রমাণ: } 8 \text{ এখানে, } y = \sqrt{\cos 2x} \Rightarrow y^2 = \cos 2x$$

উভয় পক্ষকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2yy_1 = -\sin 2x \cdot 2 \Rightarrow yy_1 = -\sin 2x$$

$$\Rightarrow (yy_1)^2 = \sin^2 2x \quad [\text{উভয় পক্ষকে বর্গ করে।}]$$

$$\Rightarrow (yy_1)^2 = 1 - \cos^2 2x$$

$$= 1 - (y^2)^2 \quad [\because y^2 = \cos 2x]$$

$$(yy_1)^2 = 1 - y^4 \text{ (Showed)}$$

$$5(b) \quad y = \tan \sqrt{1-x} \text{ হলে, দেখাও যে,}$$

$$2y_1 \sqrt{1-x^2} + (1+y^2) = 0$$

$$\text{প্রমাণ: } 8 \text{ এখানে, } y = \tan \sqrt{1-x} \quad \dots(1)$$

উভয় পক্ষকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\begin{aligned} y_1 &= \sec^2 \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x}} (-1), \\ \Rightarrow 2y_1 \sqrt{1-x} &= -(1 + \tan^2 \sqrt{1-x}) \\ \Rightarrow 2y_1 \sqrt{1-x} &= -(1 + y^2) \quad [(1) দ্বারা] \\ 2y_1 \sqrt{1-x} + (1 + y^2) &= 0 \quad (\text{Showed}) \end{aligned}$$

$$5(c) y = \frac{4}{\sqrt{\sec x}} \text{ হলে, দেখাও যে, } 2\cot x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\text{প্রমাণ : এখানে, } y = \frac{4}{\sqrt{\sec x}} \Rightarrow y^2 \sec x = 16$$

উভয় পক্ষকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y^2 \sec x \tan x + \sec x \cdot 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

উভয় পক্ষকে $y \sec x$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$y \tan x + 2 \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{y}{\cot x} + 2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2 \cot x \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (\text{Showed})$$

$$6. y = (a + bx)e^{2x} \text{ হলে, প্রমাণ কর যে, } y_2 - 2y_1 - 2be^{2x} = 0$$

$$\text{প্রমাণ : এখানে, } y = (a + bx)e^{2x} \dots \dots (1)$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = (a + bx).e^{2x} (2) + e^{2x} (0 + b)$$

$$\Rightarrow y_1 = 2y + be^{2x} \quad (2) \quad [(1) \text{ দ্বারা}]$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_2 = -2y_1 + be^{2x} \cdot 2$$

$$y_2 - 2y_1 - 2be^{2x} = 0 \quad (\text{Showed}).$$

$$7(a) y = x^n \ln x \text{ হলে, দেখাও যে, } x y_1 = ny + x^n$$

$$\text{প্রমাণ : এখানে, } y = x^n \ln x \dots \dots (1)$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$= x^n \frac{1}{x} + \ln x \cdot nx^{n-1}$$

উভয় পক্ষকে x দ্বারা গুণ করে পাই,

$$y_1 = x^n + nx^n \ln x = x^n + ny \quad [(1) \text{ দ্বারা}]$$

$$x y_1 = n y + x^n \quad (\text{Showed})$$

$$7(b) y = \sqrt{1+x^2} \ln (x + \sqrt{1+x^2}) \text{ হলে, দেখাও যে, } (1+x^2)(y_1 - 1) = xy$$

$$\text{প্রমাণ : } y = \sqrt{1+x^2} \ln (x + \sqrt{1+x^2}) \dots \dots (1)$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \sqrt{1+x^2} \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left\{ 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right\} +$$

$$\ln (x + \sqrt{1+x^2}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} (2x)$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} +$$

$$\sqrt{1+x^2} \ln (x + \sqrt{1+x^2}) \cdot \frac{x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 + y \cdot \frac{x}{1+x^2} \quad [(1) \text{ দ্বারা}]$$

$$\Rightarrow (1+x^2) y_1 = (1+x^2) + xy$$

$$(1+x^2)(y_1 - 1) = xy \quad (\text{Showed})$$

$$8. y = \sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x - x \text{ হলে, দেখাও যে, } (1-x^2)y_2 - x(y_1 - 2) + y = 0$$

$$\text{প্রমাণ : এখানে, } y = \sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x - x \dots \dots (1)$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin^{-1} x}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x) - 1$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 - \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 = -\frac{x\sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow (1-x^2) y_1 = -x(y+x) \quad [(1) \text{ দ্বারা}]$$

$$\Rightarrow (1-x^2) y_1 + xy + x^2 = 0$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(1-x^2) y_2 + y_1(-2x) + xy_1 + y + 2x = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2) y_2 - xy_1 + y + 2x = 0$$

$$(1-x^2) y_2 - x(y_1 - 2) + y = 0$$

$$9(a) y = \sin \sqrt{x} \text{ হলে, দেখাও যে,}$$

$$4x(y_1)^2 + y^2 = 1$$

$$\text{প্রমাণ : এখানে, } y = \sin \sqrt{x}$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} y_1 = \cos \sqrt{x}$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$$4x y_1^2 = \cos^2 \sqrt{x} = 1 - \sin^2 \sqrt{x} = 1 - y^2$$

$$4x y_1^2 + y^2 = 1 \quad (\text{Showed})$$

9(b) $y = \cos \sqrt{x}$ হলে, দেখাও যে, $4x(y_1)^2 + y^2 = 1$

প্রমাণ : এখানে, $y = \cos \sqrt{x}$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = -\sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} y_1 = -\sin \sqrt{x}$$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$$4x y_1^2 = \sin^2 \sqrt{x} = 1 - \cos^2 \sqrt{x} = 1 - y^2$$

$$4x y_1^2 + y^2 = 1 \quad (\text{Showed})$$

10. $y = (1-x^2)^n$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)y_1 + 2nxy = 0$

প্রমাণ : এখানে, $y = (1-x^2)^n$

উভয় পক্ষকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = n(1-x^2)^{n-1} (-2x)$$

উভয় পক্ষকে $(1-x^2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$y_1(1-x^2) = -2nx(1-x^2)^n = -2nxy$$

$$(1-x^2)y_1 + 2nxy = 0 \quad (\text{Showed})$$

11. $y = \tan x$ হলে, দেখাও যে, $y_2 = 2y(1+y^2)$

প্রমাণ : এখানে, $y = \tan x$

$$y_1 = \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$y_2 = \frac{d}{dx}(\sec^2 x) = 2 \sec x \cdot \sec x \tan x$$

$$= 2 \tan x \sec^2 x = 2 \tan x(1 + \tan^2 x)$$

$$y_2 = 2y(1+y^2) \quad (\text{Showed})$$

12. $y = ax \sin x$ হলে, দেখাও যে,

$$x^2 y_2 - 2xy_1 + (x^2 + 2)y = 0$$

প্রমাণ : $y = ax \sin x \Rightarrow \frac{y}{x} = a \sin x \cdots (1)$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{xy_1 - y \cdot 1}{x^2} = a \cos x$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{x^2(xy_2 + y_1 \cdot 1 - y_1) - (xy_1 - y) \cdot 2x}{x^4} = -a \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{x(x^2 y_2 - 2xy_1 + 2y)}{x^4} = -\frac{y}{x} \quad [(1) \text{ দ্বারা }]$$

$$\Rightarrow x^2 y_2 - 2xy_1 + 2y = -x^2 y$$

$$x^2 y_2 - 2xy_1 + (x^2 + 2)y = 0$$

(Showed)

13. $x = \sin t$ এবং $y = \sin pt$ হলে, দেখাও যে,
 $(1-x^2)y_2 - x y_1 + p^2 y = 0$.

প্রমাণ : এখানে, $x = \sin t$ এবং $y = \sin pt$

$$t = \sin^{-1} x \text{ এবং } pt = \sin^{-1} y$$

$$p \sin^{-1} x = \sin^{-1} y$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$p \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} y_1$$

$$\Rightarrow p^2(1-y^2) = (1-x^2)y_1^2$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$p^2(-2yy_1) = (1-x^2)2y_1y_2 + (-2x)y_1^2$$

উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$-p^2 y = (1-x^2)y_2 - xy_1$$

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 + p^2 y = 0.$$

14. নিচের ফাংশনগুলির n তম অস্ত্ররজ (y_n) নির্ণয় কর।

(a) $\frac{1}{x}$ [চ.'০২] (b) $\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

(c) $\sin x \sin 3x$

(a) মনে করি, $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$$y_1 = (-1)x^{-2} = (-1) x^{-1-1}$$

$$y_2 = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2 (1.2)x^{-2-1}$$

$$y_3 = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = (-1)^3(1.2.3)x^{-3-1}$$

অনুরূপভাবে, $y_n = (-1)^n(1.2.3.\dots\cdot n)x^{-n-1}$

$$\frac{1}{x} \text{ এর } n\text{তম অন্তরক সহগ} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \text{ (Ans.)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{14(b) ধরি, } y &= \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\
 &= \frac{1^2 + 1}{(x-1)(1-2)(1-3)} + \frac{2^2 + 1}{(2-1)(x-2)(2-3)} \\
 &\quad + \frac{3^2 + 1}{(3-1)(3-2)(x-3)} \\
 &= \frac{2}{(x-1)(-1)(-2)} + \frac{5}{(1)(x-2)(-1)} + \frac{10}{(2)(1)(x-3)} \\
 &= \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3} \\
 y_n &= \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x-1} \right) - 5 \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x-2} \right) + \\
 &\quad 5 \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x-3} \right) \\
 &= \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \\
 \frac{5(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} &+ \frac{5(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}
 \end{aligned}$$

$$(c) \sin x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^n}{dx^n} (\sin x \sin 3x) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} (\cos 2x) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{d^n}{dx^n} (\cos 4x) \right\}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 2^n \cos \left(\frac{n\pi}{2} + 2x \right) - 4^n \cos \left(\frac{n\pi}{2} + 3x \right) \right\}$$

প্রশ্নমালা IX J

$$1. y = x^3 - 2x^2 + 2 \text{ বকরেখার } (2, 2) \text{ বিন্দুতে$$

সর্পকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০১; ঢ.'০৭]

$$\text{সমাধান : } y = x^3 - 2x^2 + 2 \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$$

$$(2, 2) \text{ বিন্দুতে } \frac{dy}{dx} = 3.2^2 - 4(2) = 12 - 8 = 4$$

প্রদত্ত বকরেখার $(2, 2)$ বিন্দুতে সর্পকের সমীকরণ
 $y - 2 = 4(x - 2) \Rightarrow 4x - y - 6 = 0$

$$2. x^2 - y^2 = 7 \text{ বকরেখার } (4, -3) \text{ বিন্দুতে সর্পক ও$$

অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'১২; সি.'১৩]

$$\text{সমাধান : } x^2 - y^2 = 7$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x - 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$(4, -3) \text{ বিন্দুতে } \frac{dy}{dx} = \frac{4}{-3}$$

প্রদত্ত বকরেখার $(4, -3)$ বিন্দুতে সর্পকের
 সমীকরণ $y + 3 = \frac{4}{-3}(x - 4)$

$$\Rightarrow 4x - 16 = -3y - 9 \therefore 4x + 3y - 7 = 0$$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y + 3 = \frac{3}{4}(x - 4)$

$$\Rightarrow 4y + 12 = 3x - 12 \therefore 3x - 4y - 24 = 0$$

$$3(a) y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0 \text{ বকরেখাটি যে$$

সমস্ত বিন্দুতে x -অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুগুলোতে
 সর্পক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$$[চ.'০৯; ঘ.'১০; চ.'১০; দি.'১১; কু.'১৮]$$

$$\text{সমাধান : } y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$$

$$\Rightarrow y(x^2 - 5x + 6) - x + 7 = 0 \dots (1)$$

বকরেখাটি x -অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার কোটি
 $y = 0$. (1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই $x = 7$

বকরেখাটি x -অক্ষকে $(7, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$$(1) \text{ বকরেখাকে } x \text{-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে}$$

পাই, $(x^2 - 5x + 6) \frac{dy}{dx} + y(2x - 5) - 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - y(2x - 5)}{x^2 - 5x + 6}$$

$$(7, 0) \text{ বিন্দুতে } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{49 - 35 + 6} = \frac{1}{20}$$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y = \frac{1}{20}(x - 7)$

$$\Rightarrow x - 20y - 7 = 0$$

এবং অভিন্নস্বরূপ সমীকরণ, $y = -\frac{1}{20}(x - 7)$

$$\Rightarrow 20x + y - 140 = 0$$

৩(b) দেখাও যে, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্ররেখার যেকোন স্পর্শক ঘাড়া স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটি থেকে কর্তিত অংশের যোগফল একটি ধ্রুবক। [ব. '০২; কু. '০৯; রা. '১৪]

সমাধান : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ (1)

(1) কে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

বক্ররেখার উপর (x_1, y_1) যেকোন কিন্তুতে

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = \sqrt{a} \quad (2) \text{ এবং } \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$$

(x_1, y_1) কিন্তুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y - y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y\sqrt{x_1} - \sqrt{x_1}y_1 = -x\sqrt{y_1} + x_1\sqrt{y_1}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{y_1} + y\sqrt{x_1} = \sqrt{x_1}y_1 + x_1\sqrt{y_1}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{y_1} + y\sqrt{x_1} = \sqrt{x_1y_1}(\sqrt{y_1} + \sqrt{x_1})$$

$$\Rightarrow x\sqrt{y_1} + y\sqrt{x_1} = \sqrt{x_1y_1}\sqrt{a} \quad [(2) \text{ দ্বারা}]$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{a}\sqrt{x_1}} + \frac{y}{\sqrt{a}\sqrt{y_1}} = 1$$

অক্ষ দুইটি থেকে কর্তিত অংশের যোগফল

$$= \sqrt{a}\sqrt{x_1} + \sqrt{a}\sqrt{y_1} = \sqrt{a}(\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1})$$

$$= \sqrt{a}\sqrt{a} = a$$

যেকোন স্পর্শকের ক্ষেত্রে কর্তিত অংশের যোগফল $= a$, যা একটি ধ্রুবক।

4. $y = x^3 - 3x^2 + 2$ বক্ররেখার যে সকল কিন্তুতে

স্পর্শক x -অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[ঢ. '০২; রা. '০৫, '১০; য. '০৯; দি. '১২]

সমাধান : $y = x^3 - 3x^2 + 2$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x$$

স্পর্শক x -অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, 2$$

$$x = 0 \text{ হলে, } y = 2$$

$$x = 2 \text{ হলে, } y = 8 - 12 + 2 = -2$$

নির্ণেয় কিন্তু $(0, 2), (2, -2)$

5.(a) $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ বক্ররেখার যে সকল কিন্তুতে

স্পর্শক x -অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[ব. '০৮, '০৭; য. '০৮; চ. '০৬; কু. '০৬; ঢ. '১৩]

সমাধান : $x^2 + 2ax + y^2 = 0 \dots (1)$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + 2a + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x+a}{y}$$

স্পর্শক x -অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{dx}{dy} = 0$

$$-\frac{y}{x+a} = 0 \Rightarrow y = 0$$

(1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x^2 + 2ax = 0$

$$\Rightarrow x(x+2a) = 0 \therefore x = 0, -2a$$

নির্ণেয় কিন্তু $(0, 0), (-2a, 0)$

5(b) $x^2 + 4y^2 = 8$ উপরুক্তের যে সকল কিন্তুতে স্পর্শক x -অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[কু., রা., চ. '০৮; ব. '০৫; য. '০৬; সি. '০৭; দি. '০৯; কু. '১১]

সমাধান : $x^2 + 4y^2 = 8 \dots (1)$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + 8y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{8y} = -\frac{x}{4y}$$

স্পর্শক x -অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{dx}{dy} = 0$

$$-\frac{4y}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$$

(1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x^2 = 8 \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

নির্ণেয় কিন্তু $(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$

୫(c) $y = x^2 + \sqrt{1-x^2}$ ବକ୍ରରେଖାର ସେ ସଙ୍ଗ ବିଦ୍ୟୁତେ
ସର୍ଷକ x - ଅକ୍ଷେର ଉପର ଲମ୍ବ ତାଦେର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ୟ କର।
[ଡ.'୦୬, '୧୦; ଚ. '୦୭, '୧୧; ବ. '୦୯, '୧୮; ସି. '୦୯, '୧୨;
ରା. '୧୩; ସ. '୧୩]

ସମାଧାନ : $y = x^2 + \sqrt{1-x^2} \quad \dots (1)$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)$$

$$= \frac{x(2\sqrt{1-x^2} - 1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

ସର୍ଷକ x - ଅକ୍ଷେର ଉପର ଲମ୍ବ ହଲେ, $\frac{dx}{dy} = 0$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x(2\sqrt{1-x^2} - 1)} = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x = 1 \text{ ହଲେ, } y = 1^2 + \sqrt{1-1} = 1$$

$$x = -1 \text{ ହଲେ, } y = (-1)^2 + \sqrt{1-1} = 1$$

ନିର୍ଣ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ $(1, 1), (-1, 1)$

(d) $x^2 + 4x + y^2 = 0$ ବକ୍ରରେଖାର ସେ ସଙ୍ଗ ବିଦ୍ୟୁତେ ସର୍ଷକ x - ଅକ୍ଷେର ଉପର ଲମ୍ବ ତାଦେର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ୟ କର। [କ୍ର. '୦୩]

ସମାଧାନ : $x^2 + 4x + y^2 = 0 \quad \dots (1)$

ଇହାକେ x -ଏର ସାପେକ୍ଷ ଅନ୍ତରୀକ୍ରମ କରି ପାଇ,

$$2x + 4 + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x+2}{y}$$

ସର୍ଷକ x - ଅକ୍ଷେର ଉପର ଲମ୍ବ ହଲେ, $\frac{dx}{dy} = 0$

$$-\frac{y}{x+2} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$(1) \text{ ଏ } y = 0 \text{ ବସିଯେ ପାଇ, } x^2 + 4x = 0$$

$$\Rightarrow x(x+4) = 0 \Rightarrow x = 0, -4$$

ନିର୍ଣ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ $(0, 0), (-4, 0)$

୫(e) $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ ବକ୍ରରେଖାର ସେ ସମ୍ମତ ବିଦ୍ୟୁତେ ସର୍ଷକଗୁଲୋ ଅକ୍ଷ ଦୁଇଟିର ସାଥେ ସମାନ ସମାନ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ ତାଦେର ଭୂଜ ନିର୍ଣ୍ୟ କର। [ସି. '୦୮; କ୍ର. '୦୭,
'୧୩; ରା. '୦୮, '୧୨; ଦି. '୧୦; ଚ. '୧୧; ଚ. '୧୩; ସ. '୧୨]

ସମାଧାନ : $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1 \dots \dots (1)$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 2$$

ସର୍ଷକ ଅକ୍ଷ ଦୁଇଟିର ସାଥେ ସମାନ ସମାନ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ

$$\text{କରିଲେ, } \frac{dy}{dx} = \pm 1 \quad 3x^2 - 6x - 2 = \pm 1$$

$$+' \text{ ନିଯେ, } 3x^2 - 6x - 2 = 1$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$$

$$-' \text{ ନିଯେ, } 3x^2 - 6x - 2 = -1$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6}$$

$$= \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ବିନ୍ଦୁ ଭୂଜ } 1 \pm \sqrt{2}, \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

6. $y = (x+1)(x-1)(x-3)$ ବକ୍ରରେଖାର ସେ ସବ ବିଦ୍ୟୁତେ ସର୍ଷକ x - ଅକ୍ଷକେ ଛେଦ କରେ ଏ ବିଦ୍ୟୁଗୁଲୋତେ ସର୍ଷକେର ଢାଳ ନିର୍ଣ୍ୟ କର। [କ୍ର. ଚ. '୧୦; ସି. '୧୧; ଦି. '୧୩]

ସମାଧାନ : $y = (x+1)(x-1)(x-3) \dots (1)$

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)(x-1) \frac{d}{dx}(x-3) + (x+1)$$

$$, (x-3) \frac{d}{dx}(x-1) + (x-1)(x+3) \frac{d}{dx}(x+1)$$

$$= (x+1)(x-1) + (x+1)(x-3) + (x-1)(x-3)$$

ସେ ସବ ବିଦ୍ୟୁତେ ସର୍ଷକ x - ଅକ୍ଷକେ ଛେଦ କରେ ଏ ସବ ବିନ୍ଦୁ y -ସ୍ଥାନାଙ୍କ $= 0$

$$(1) \text{ ଏ } y = 0 \text{ ବସିଯେ ପାଇ, } x = -1, 1, 3$$

ବିନ୍ଦୁଗୁଲୋ $(-1, 0), (1, 0), (3, 0)$

$(-1, 0)$ ବିଦ୍ୟୁତେ ସର୍ଷକେର ଢାଳ $= (-2)(-4) = 8$

$(1, 0)$ ବିଦ୍ୟୁତେ ସର୍ଷକେର ଢାଳ $= (2)(-2) = -4$

$(3, 0)$ ବିଦ୍ୟୁତେ ସର୍ଷକେର ଢାଳ $= (4)(2) = 8$

7.(a) a -ଏର ମାନ କତ ହଲେ, $y = ax(1-x)$ ବକ୍ରରେଖାର ମୂଳବିଦ୍ୟୁତେ ସର୍ଷକ୍ତି x -ଅକ୍ଷେର ସାଥେ 60° କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ। [ସି. '୦୬, '୧୦, '୧୪; ବ. '୦୮, '୦୮, '୧୨; ଚ. '୦୬;

ব.'০৮,'০৮ ; মা.'০৮,'০৭,'০৯ ; ঢা.'০৮ ; কূ.'১২,'১৪]

সমাধান : $y = ax(1-x) = a(x - x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = c(1-2x)$$

$$\text{মূলবিদ্যুতে } \frac{dy}{dx} = a(1+0) = a$$

$$\text{কিম্বতু মূলবিদ্যুতে ঢাল}, \frac{dy}{dx} = \tan(\pm 60^\circ)$$

$$a = \tan(\pm 60^\circ) = \pm \sqrt{3}$$

(b) c -এর মান কত হলে, $y = cx(1+x)$ বক্ররেখার মূলবিদ্যুতে সর্ণকটি x -অক্ষের সাথে 30° কেশ উৎপন্ন করে। [ক.'০৬; ব.'০৬; ম.'০৭; ঢ.'১২; ঢা.'১৪]

সমাধান : $y = cx(1+x) = c(x + x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = c(1+2x)$$

$$\text{মূলবিদ্যুতে } \frac{dy}{dx} = c(1+0) = c$$

$$\text{কিম্বতু মূলবিদ্যুতে ঢাল}, \frac{dy}{dx} = \tan(\pm 30^\circ)$$

$$c = \tan(\pm 30^\circ) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

8(a) কোম সরলরেখায় একটি গতিশীল কণা t সময়ে $s = at^2 + bt + c$ দূরত্ব অতিক্রম করে। a, b, c শ্রবক এবং t সময় পরে কণাটির বেগ v হলে, দেখাও যে,

$$4a(s-c) = v^2 - b^2 \quad [\text{য., ঢ.'০৫; মি.'০৯; কূ.'১৪}]$$

সমাধান : এখানে $s = at^2 + bt + c \dots \dots (1)$

ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{ds}{dt} = 2at + b$$

$$t \text{ সেকেন্ডে পর কণাটির বেগ } v = 2at + b$$

$$\Rightarrow v^2 = 4a^2 t^2 + 4abt + b^2 \quad [\text{বর্ণ করে}]$$

$$\Rightarrow v^2 - b^2 = 4a(at^2 + bt)$$

$$\Rightarrow v^2 - b^2 = 4a(s-c) \quad [(1) \text{ ঘরা}]$$

$$4a(s-c) = v^2 - b^2$$

8(b) যদি কোন বৃক্ষের ব্যাসার্ধ সময়ের বৃদ্ধি পায়, তবে দেখাও যে, তার ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধিহার তার ব্যাসার্ধের সাথে সমানুপাতিক হবে। [ব.'০৬; ঢ.'০৮; মি.'১১; মা.'১৪]

প্রমাণ মনে করি, t সময়ে প্রদত্ত বৃক্ষের ব্যাসার্ধ r এবং ক্ষেত্রফল A . তাহলে, $A = \pi r^2$

ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} (\pi r^2) = 2r\pi \frac{dr}{dt}$$

প্রশ্নমতে, $\frac{dr}{dt} = \text{শ্রবক}$ $[\because \text{ব্যাসার্ধ সময়ের বৃদ্ধি পায়]$

$$\frac{dA}{dt} = \text{শ্রবক} \times r \quad [\because 2\pi \frac{dr}{dt} \text{ একটি শ্রবক}]$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} \propto r$$

ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধিহার তার ব্যাসার্ধের সমানুপাতিক।

9(c) যদি একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলো প্রতি সেকেন্ডে $\sqrt{3}$ সে.মি. এবং এর ক্ষেত্রফল প্রতি সেকেন্ডে 12 কৰ্ণ সে.মি. পরিমাণ বৃদ্ধি পায়, তাহলে সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [বুয়েট.'০৮]

সমাধান : ধরি, সমবাহু ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য x সে.মি. এবং এর ক্ষেত্রফল A কৰ্ণ সে.মি.। তাহলে,

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2x \frac{dx}{dt} \quad \dots (i)$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{dx}{dt} = \sqrt{3} \text{ এবং } \frac{dA}{dt} = 12$$

$$(i) \text{ হতে পাই, } 12 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2x \times \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8 \quad \text{বাহুর দৈর্ঘ্য } 8 \text{ সে.মি.।}$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1(a) $y = x^3 - 2x^2 + 4x$ বক্ররেখার (2 , 5) বিন্দুতে সর্ণকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৬]

সমাধান : $y = x^3 - 2x^2 + 4x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 4$$

$$(2, 5) \text{ বিন্দুতে } \frac{dy}{dx} = 3(2)^2 - 4(2) + 4$$

$$= 12 - 8 + 4 = 8$$

প্রদত্ত বক্ররেখার (2,5) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ
 $y - 5 = 8(x - 2) \Rightarrow 8x - y - 11 = 0$

(b) $x^2 - 5xy + y^2 - 5x + 6y + 9 = 0$ বক্ররেখার
 $(2,1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি.'০২]

$$\text{সমাধান : } x^2 - 5xy + y^2 - 5x + 6y + 9 = 0$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x - 5x \frac{dy}{dx} - 5y + 2y \frac{dy}{dx} - 5 + 6 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow -(5x - 2y - 6) \frac{dy}{dx} = -(2x - 5y - 5)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 5y - 5}{5x - 2y - 6}$$

$$(2, 1) \text{ বিন্দুতে } \frac{dy}{dx} = \frac{4 - 5 - 5}{10 - 2 - 6} = \frac{-6}{2} = -3$$

প্রদত্ত বক্ররেখার (2,1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$y - 1 = -\frac{1}{-3}(x - 2)$$

$$\Rightarrow 3y - 3 = x - 2 \quad x - 3y + 1 = 0$$

1(c) $x^3 - 3xy + y^3 = 3$ অধিবৃত্তের $(1,-1)$ বিন্দুতে
 স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা.'০৩]

$$\text{সমাধান : } x^3 - 3xy + y^3 = 3$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$3x^2 - 3x \frac{dy}{dx} - 3y + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 3(y^2 - x) \frac{dy}{dx} = 3(y - x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

$$(1, -1) \text{ বিন্দুতে } \frac{dy}{dx} = \frac{-1 - 1}{1 - 1}$$

$$\text{অর্থাৎ } \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(1,-1)} = \frac{0}{-2} = 0$$

\therefore প্রদত্ত বক্ররেখার $(1,-1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{(1,-1)} (y + 1) = x - 1$$

$$\Rightarrow 0.(y + 1) = x - 1 \quad \therefore x - 1 = 0$$

1(d) $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ বক্ররেখার (x_1, y_1)

বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ট.'০০]

$$\text{সমাধান : } x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$3x^2 - 3ax \frac{dy}{dx} - 3ay + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 3(y^2 - ax) \frac{dy}{dx} = 3(ay - x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

$$(x_1, y_1) \text{ বিন্দুতে } \frac{dy}{dx} = \frac{ay_1 - x_1^2}{y_1^2 - ax_1}$$

প্রদত্ত বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের

$$\text{সমীকরণ } y - y_1 = -\frac{y_1^2 - ax_1}{ay_1 - x_1^2}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow (y - y_1)(ay_1 - x_1^2) + (x - x_1)(y_1^2 - ax_1)$$

1(e) দেখাও যে, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে
 স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1 = 2a(x + x_1)$ [ব.'০১]

$$\text{প্রমাণ : } y^2 = 4ax$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y \frac{dy}{dx} = 4a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

$$(x_1, y_1) \text{ বিন্দুতে } \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y_1}$$

প্রদত্ত পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের

$$\text{সমীকরণ } y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow yy_1 - y_1^2 = 2a(x - x_1)$$

$$\Rightarrow yy_1 - 4ax_1 = 2a(x - x_1) \quad \text{যেহেতু}$$

$$(x_1, y_1) \text{ বিন্দু } y^2 = 4ax \text{ পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত।}$$

$$yy_1 = 2a(x + x_1) \quad (\text{Showed})$$

1(f) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ বকরেখার (x_1, y_1)
বিদ্যুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান: } x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \dots \dots (1)$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} + \frac{2}{3}y^{\frac{2}{3}-1} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}$$

$$(x_1, y_1) \text{ বিদ্যুতে } \frac{dy}{dx} = -\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{y_1^{-\frac{1}{3}}}$$

প্রদত্ত বকরেখার (x_1, y_1) বিদ্যুতে স্পর্শকের

$$\text{সমীকরণ } y - y_1 = -\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{y_1^{-\frac{1}{3}}} (x - x_1)$$

$$\Rightarrow yy_1^{-\frac{1}{3}} - y_1^{\frac{2}{3}} = -xx_1^{-\frac{1}{3}} + x_1^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow xx_1^{-\frac{1}{3}} + yy_1^{-\frac{1}{3}} = x_1^{\frac{2}{3}} + y_1^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad \text{যেহেতু} \\ (x_1, y_1) \text{ বিদ্যু (1) বকরেখার উপর অবস্থিত।}$$

$$xx_1^{-\frac{1}{3}} + yy_1^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (\text{Ans.})$$

2(a) $y^2 - 4x - 6y + 20 = 0$ বকরেখার (3,2)
বিদ্যুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০২]

$$\text{সমাধান: } y^2 - 4x - 6y + 20 = 0$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2y \frac{dy}{dx} - 4 - 6 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2(y-3) \frac{dy}{dx} = 4 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y-3}$$

$$(3, 2) \text{ বিদ্যুতে } \frac{dy}{dx} = \frac{2}{2-3} = -2$$

প্রদত্ত বকরেখার (3, 2) বিদ্যুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - 2 = -2(x - 3) \Rightarrow 2x + y = 8$$

$$\text{এবং অভিলম্বের সমীকরণ, } y - 2 = \frac{1}{2}(x - 3)$$

$$\Rightarrow 2y - 4 = x - 3 \quad \therefore x - 2y + 1 = 0$$

2(b) $y = x^3 - 2x^2 + 4$ বকরেখার (2, 4) বিদ্যুতে
স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৮, '১১]

$$\text{সমাধান: } y = x^3 - 2x^2 + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$$

$$(2, 4) \text{ বিদ্যুতে } \frac{dy}{dx} = 3 \times 4 - 8 = 4$$

প্রদত্ত বকরেখার (2, 4) বিদ্যুতে স্পর্শকের সমীকরণ
 $y - 4 = 4(x - 2)$

$$\Rightarrow y - 4 = 4x - 8 \quad \therefore 4x - y - 4 = 0$$

$$\text{এবং অভিলম্বের সমীকরণ, } y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

$$\Rightarrow 4y - 16 = -x + 2 \quad \therefore x + 4y - 18 = 0$$

2(c) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 21 = 0$ বৃক্ষের (1, 2)

বিদ্যুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[য.'০৩; রা.'১১]

$$\text{সমাধান: } x^2 + y^2 - 6x - 10y + 21 = 0$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} - 6 - 10 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2(y-5) \frac{dy}{dx} = -2(x-3)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x-3}{y-5}$$

$$(1, 2) \text{ বিদ্যুতে } \frac{dy}{dx} = -\frac{1-3}{2-5} = -\frac{2}{3}$$

প্রদত্ত বকরেখার (1, 2) বিদ্যুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 1)$$

$$\Rightarrow 3y - 6 = -2x + 2 \quad \therefore 2x + 3y - 8 = 0$$

$$\text{এবং অভিলম্বের সমীকরণ, } y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$$

$$\Rightarrow 2y - 4 = 3x - 3 \quad \therefore 3x - 2y + 1 = 0$$

2(d) $y = x^3 - 3x + 2$ বকরেখার $(2, -2)$ বিন্দুতে
সর্পিক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ট. ০৭]

সমাধান : $y = x^3 - 3x + 2$ $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$

$(2, -2)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 3 \times 4 - 3 = 9$

প্রদত্ত বকরেখার $(2, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের
সমীকরণ $y + 2 = 9(x - 2)$

$$\Rightarrow y + 2 = 9x - 18 \therefore 9x - y - 20 = 0$$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $y + 2 = -\frac{1}{9}(x - 2)$

$$\Rightarrow 9y + 18 = -x + 2 \therefore x - 9y - 16 = 0$$

3(a) $y(x - 2)(x - 3) - x + 3 = 0$ বকরেখাটি যে
সমস্ত বিন্দুতে x -অক্ষকে ছেদ করে, এই বিন্দুগুলোতে
স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. ০৫]

সমাধান : $y(x - 1)(x - 2) - x + 3 = 0$

$$\Rightarrow y(x^2 - 3x + 2) - x + 3 = 0 \dots (1)$$

বকরেখাটি x -অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার
কোটি $y = 0$. (1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই $x = 3$.

বকরেখাটি x -অক্ষকে $(3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(1) বকরেখাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে

পাই, $(x^2 - 3x + 2) \frac{dy}{dx} + y(2x - 3) - 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - y(2x - 3)}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(3, 0) \text{ বিন্দুতে } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{9 - 9 + 2} = \frac{1}{2}$$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $y = \frac{1}{2}(x - 3)$

$$\Rightarrow x - 2y - 3 = 0$$

3(b) প্রমাণ কর যে, $3x^2 + 4xy + 5y^2 - 4 = 0$
বকরেখাটি যে সমস্ত বিন্দুতে $3x + 2y = 0$ এবং

$2x + 5y = 0$ রেখাকে ছেদ করে, এই বিন্দুগুলোতে
অঙ্কিত স্পর্শক স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল।

প্রমাণ : $3x^2 + 4xy + 5y^2 - 4 = 0 \dots (1)$

$3x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x$ হতে y -এর মান (1) এ

$$\text{বসিয়ে পাই, } 3x^2 + 4x\left(-\frac{3}{2}x\right) + 5\left(-\frac{3}{2}x\right)^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x^2 + \frac{45x^2}{4} - 4 = 0$$

$$\Rightarrow -12x^2 + 45x^2 = 16 \quad x = \pm \frac{4}{\sqrt{33}}$$

www.boighar.com

$$x = \frac{4}{\sqrt{33}} \text{ হলে, } y = -\frac{3}{2} \times \left(\frac{4}{\sqrt{33}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{33}}$$

$$x = -\frac{4}{\sqrt{33}} \text{ হলে, } y = -\frac{3}{2} \times \left(-\frac{4}{\sqrt{33}}\right) = \frac{6}{\sqrt{33}}$$

(1) বকরেখাটি $3x + 2y = 0$ রেখাকে

$(\frac{4}{\sqrt{33}}, -\frac{6}{\sqrt{33}})$ ও $(-\frac{4}{\sqrt{33}}, \frac{6}{\sqrt{33}})$ বিন্দুতে ছেদ
করে।

(1) কে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$3x^2 + 4xy + 5y^2 - 4 = 0$$

$$6x + 4x \frac{dy}{dx} + 4y + 10y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2(2x + 5y) \frac{dy}{dx} = -2(3x + 2y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3x + 2y}{2x + 5y}$$

$$(\frac{4}{\sqrt{33}}, -\frac{6}{\sqrt{33}}) \text{ ও } (-\frac{4}{\sqrt{33}}, \frac{6}{\sqrt{33}}) \text{ উভয়}$$

$$\text{বিন্দুতে } 3x + 2y = 0 \text{ অর্থাৎ } \frac{dy}{dx} = -\frac{3x + 2y}{2x + 5y} = 0$$

\therefore এ বিন্দু দুইটিতে অঙ্কিত স্পর্শক x -অক্ষের সমান্তরাল।

আবার, $2x + 5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x$ হতে y -এর
মান (1) সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$3x^2 + 4xy + 5y^2 - 4 = 0$$

$$3x^2 + 4x\left(-\frac{2}{5}x\right) + 5\left(-\frac{2}{5}x\right)^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 15x^2 - 8x^2 + 4x^2 - 20 = 0$$

$$\Rightarrow 11x^2 = 20 \Rightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$$

$$x = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}} \text{ হলে}, y = -\frac{2}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}} = -\frac{4}{\sqrt{55}}$$

$$x = -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}} \text{ হলে}, y = -\frac{2}{5} \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}\right) = \frac{4}{\sqrt{55}}$$

$$(1) \text{ বক্ররেখাটি } 2x + 5y = 0 \text{ রেখাকে } \left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, -\frac{4}{\sqrt{55}}\right) \text{ ও } \left(-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, \frac{4}{\sqrt{55}}\right) \text{ বিন্দুতে ছেদ করে।}$$

$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, -\frac{4}{\sqrt{55}}\right) \text{ ও } \left(-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, \frac{4}{\sqrt{55}}\right) \text{ উভয় বিন্দুতে } 2x + 5y = 0 \text{ অর্থাৎ } \frac{dx}{dy} = -\frac{2x + 5y}{3x + 2y} = 0$$

এ বিন্দু দুইটিতে অঙ্কিত স্পর্শক x -অক্ষের সম্ম অর্থাৎ y -অক্ষের সমান্তরাল।

4(a) $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x - অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢ. '০০]

$$\text{সমাধান: } y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 6x - 6$$

$$\text{স্পর্শক } x\text{- অক্ষের সমান্তরাল হলে, } \frac{dy}{dx} = 0$$

$$12x^2 + 6x - 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x(x+1) - 1(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(2x-1) = 0 \therefore x = -1, \frac{1}{2}$$

$$x = -1 \text{ হলে, } y = -4 + 3 + 6 + 1 = 6$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ হলে, } y = 4 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} + 1 \\ = \frac{2+3-8}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{বিন্দু দুটি } (-1, 6), \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$$

4(b) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x - অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [মা.বো. '০৯; ব. '১৩]

$$\text{সমাধান: } x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \dots \dots (1)$$

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y}$$

স্পর্শক x - অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{1-x}{y} = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$(1) \text{ এ } x = 1 \text{ বসিয়ে পাই, } 1 + y^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$\text{নির্ণয় বিন্দু } (1, 2), (1, -2)$$

4(c) $y = (x-3)^2(x-2)$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x - অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢ. '০৫]

$$\text{সমাধান: } y = (x-3)^2(x-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x-3)^2 \cdot 1 + 2(x-3)(x-2) \\ &= (x-3)(x-3+2x-4) \\ &= (x-3)(3x-7) \end{aligned}$$

স্পর্শক x - অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$(x-3)(3x-7) = 0 \Rightarrow x = 3, \frac{7}{3}$$

$$x = 3 \text{ হলে, } y = (3-3)^2(3-2) = 0$$

$$x = \frac{7}{3} \text{ হলে, } y = \left(\frac{7}{3}-3\right)^2\left(\frac{7}{3}-2\right)$$

$$= \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

$$\text{নির্ণয় বিন্দু } (3, 0), \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{27}\right)$$

4(d) $y^3 = x^2(2a-x)$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x - অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[ঢ. '০৯]

$$\text{সমাধান: } y^3 = x^2(2a-x)$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = x^2(-1) + 2x(2a-x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x(-x+4a-2x)}{3y^2} = \frac{x(4a-3x)}{2y}$$

সর্বক x -অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{x(4a-3x)}{2y} = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{4a}{3}$$

$x = 0$ হলে, $y^3 = 0 \Rightarrow y = 0$

$$x = \frac{4a}{3} \text{ হলে, } y^3 = \frac{16a^2}{9}(2a - \frac{4a}{3})$$

$$\Rightarrow y^3 = \frac{16a^2}{9} \times \frac{2a}{3} \therefore y = \frac{2a\sqrt[3]{4}}{3}$$

নির্ণয় কিন্দু $(0, 0), (\frac{4}{3}a, \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}a)$

5(a) $y = 3x^2 + 2x - 1$ বক্ররেখার $(1, 0)$ কিন্দুতে সর্বকের ঢাল নির্ণয় কর। [রা.'০১]

$$\text{সমাধান : } y = 3x^2 + 2x - 1 \quad \frac{dy}{dx} = 6x + 2$$

$$(1, 0) \text{ কিন্দুতে } \frac{dy}{dx} = 6 \times 1 + 2 = 8$$

প্রদত্ত বক্ররেখার $(1, 0)$ কিন্দুতে সর্বকের ঢাল 8

5(b) $x^2 + xy + y^2 = 4$ বক্ররেখার $(2, -2)$ কিন্দুতে সর্বকের ঢাল নির্ণয় কর। [সি.'০৩]

$$\text{সমাধান : } x^2 + xy + y^2 = 4$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + x \frac{dy}{dx} + y + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2y) \frac{dy}{dx} = -(2x + y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

$$(2, -2) \text{ কিন্দুতে } \frac{dy}{dx} = -\frac{4-2}{2-4} = 1$$

প্রদত্ত বক্ররেখার $(2, -2)$ কিন্দুতে সর্বকের ঢাল 1.

5(c) $x^3 - 3xy + y^3 = 3$ বক্ররেখাটি $(2, 1)$ দিয়ে অতিক্রম করে। এ কিন্দুতে সর্বকের ঢাল নির্ণয় কর। [চ.'০৩]

$$\text{সমাধান : } x^3 - 3xy + y^3 = 3$$

ইহাকে x -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$3x^2 - 3x \frac{dy}{dx} - 3y \cdot 1 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow -3(x - y^2) \frac{dy}{dx} = -3(x^2 - y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$$

$$(2, 1) \text{ কিন্দুতে } \frac{dy}{dx} = \frac{4-1}{2-1} = 3$$

সর্বকের ঢাল 3

6(a) a -এর মান কৃত হলে, $y = ax(1-x)$ বক্ররেখার মূলকিন্দুতে সর্বকটি x -অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। [চ.'০৮]

$$\text{সমাধান : } y = ax(1-x) = a(x - x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = c(1 - 2x)$$

$$\text{মূলকিন্দুতে } \frac{dy}{dx} = a(1+0) = a$$

$$\text{কিন্তু মূলকিন্দুতে ঢাল, } \frac{dy}{dx} = \tan(\pm 30^\circ)$$

$$a = \tan(\pm 30^\circ) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

6(b) $y = ax^2 + bx + c$ বক্ররেখাটি মূলকিন্দু এবং $(1, 1)$ কিন্দু দিয়ে যায়। যদি মূলকিন্দুতে বক্ররেখাটির ঢাল 2 হয়, তবে a, b, c এর মান নির্ণয়। [চ.'০১]

$$\text{সমাধান : } y = ax^2 + bx + c$$

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b \therefore \text{মূলকিন্দুতে } \frac{dy}{dx} = b$$

$$\text{কিন্তু মূলকিন্দুতে ঢাল, } \frac{dy}{dx} = 2 \qquad \qquad \qquad b = 2$$

বক্ররেখাটি মূলকিন্দু এবং $(1, 1)$ কিন্দু দিয়ে যায়।

$$0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ এবং}$$

$$1 = a + b + c \Rightarrow 1 = a + 2 + 0 \Rightarrow a = -1$$

$$a = -1, b = 2, c = 0$$

7 (a) একটি গতিশীল কণার কোন সরলরেখায় t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = 63t - 6t^2 - t^3$ দ্বারা প্রকাশিত হয়। 2 সেকেন্ড পৰে তার কো এবং ধারার পূর্বে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। [চ.'০২; সি.'০৪]

$$\text{সমাধান } 3 \text{ এখানে } s = 63t - 6t^2 - t^3$$

ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{ds}{dt} = 63 - 12t - 3t^2$$

$$t \text{ সময় পর কণাটির বেগ} = 63 - 12t - 3t^2$$

$$2 \text{ সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ} = (63 - 24 - 12)$$

$$\text{একক/সেকেন্ড} = 27 \text{ একক/সেকেন্ড} \text{ (Ans.)}$$

$$\text{আবার কণাটির থেমে যাবে যখন বেগ } \frac{ds}{dt} = 0$$

$$63 - 12t - 3t^2 = 0 \Rightarrow t^2 + 4t - 21 = 0$$

$$\Rightarrow (t-3)(t+7) = 0 \therefore t = 3 \quad [\because t \neq -7]$$

$$\begin{aligned} \text{থামার পূর্বে কণাটি } 3 \text{ সেকেন্ড চলেছিল এবং } 3 \\ \text{সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব } s = (189 - 54 - 27) \\ = 108 \text{ একক।} \end{aligned}$$

$$\text{7(b)} \text{ একটি কণা সরলরেখায় এমনভাবে চলে যেন } s = \sqrt{t} \text{ হয়। দেখাও যে কণাটির ত্বরণ ঝণাত্মক এবং } \\ \text{বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক।} \quad [\text{সি.}'02]$$

$$\text{প্রমাণ : } s = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{এবং } \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) t^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4} t^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \text{কণাটির বেগ} = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \text{ এবং}$$

$$\text{ত্বরণ} = -\frac{1}{4} t^{-\frac{3}{2}} = -2\left(\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}\right)^3 = -2 \times (\text{বেগ})^3$$

ত্বরণ ঝণাত্মক এবং তা বেগের ঘনফলের সমানুপাতিক।

$$\text{7(c)} \text{ একটি বস্তুর গতির সমীকরণ } s = t^3 + \frac{1}{t^3} \text{ হলে}$$

$$\text{দেখাও যে, এর ত্বরণ সর্বদাই ধনাত্মক এবং } t = 10 \text{ হলে} \\ \text{এর গতিবেগ নির্ণয় কর।} \quad [\text{চ.}'01]$$

$$\text{প্রমাণ : গতির সমীকরণ } s = t^3 + \frac{1}{t^3}$$

$$t \text{ সময়ে গতিবেগ}, \frac{ds}{dt} = 3t^2 - \frac{3}{t^4}$$

$$\begin{aligned} \text{যখন } t = 10, \text{ গতিবেগ} &= 300 - \frac{3}{10^4} \\ &= 299.99 \text{ একক (প্রায়)} \end{aligned}$$

$$t = 10 \text{ হলে,}$$

$$\text{আবার } t \text{ সময়ে ত্বরণ}, \frac{d^2s}{dt^2} = 6t + \frac{12}{t^5} > 0 \\ [\because t > 0]$$

ত্বরণের মান সব সময় ধনাত্মক।

$$\text{7(d)} \text{ একটি কণা সরলরেখায় এমনভাবে চলে যেন } t \text{ সময়ে তার } \\ \text{অতিক্রান্ত দূরত্ব } s = \sqrt{2t} \text{ হয়। দেখাও যে, কণাটির ত্বরণ } \\ \text{বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক।} \quad [\text{চ.}'01]$$

$$\text{প্রমাণ : এখানে } s = \sqrt{2t} = \sqrt{2} t^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{কণাটির বেগ} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{ত্বরণ} &= \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} t^{-\frac{3}{2}} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} t^{-\frac{1}{2}}\right)^3 \\ &= -(\text{বেগ})^3 \end{aligned}$$

কণাটির ত্বরণ বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক।

$$\text{7(e)} \text{ একটি পুরুরের একটি বৃত্তাকার চেউ এর পরিধির \\ বৃক্ষির হার } 'a' \text{ ফুট/সেকেন্ড। দেখাও যে, এর ব্যাসার্ধের \\ বৃক্ষির হার } a/2\pi \text{ ফুট / সেকেন্ড।} \quad [\text{প.ভ.প.}'97]$$

$$\text{প্রমাণ মনে করি, } t \text{ সেকেন্ডে প্রদত্ত বৃত্তাকার চেউ এর } \\ \text{ব্যাসার্ধ } r \text{ ফুট এবং পরিধির } S \text{ ফুট}$$

$$\text{তাহলে, } S = 2\pi r$$

ইহাকে t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(2\pi r) = 2\pi \frac{dr}{dt}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{dS}{dt} = a \quad [\because \text{পরিধির বৃক্ষির হার } 'a']$$

$$a = 2\pi \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{a}{2\pi}$$

$$\text{ক্ষেত্রফলের বৃক্ষিহার } \frac{a}{2\pi} \text{ ফুট/সেকেন্ড।}$$

$$\text{7(f)} \text{ একটি গতিশীল কণার } t \text{ সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব } \\ s = ut + \frac{1}{2} ft^2 \text{ সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয় যেখানে } \\ u \text{ এবং } f \text{ ধ্রুবক। দেখাও যে, } t \text{ সময়ে তার বেগ } \\ u + ft \text{ এবং ত্বরণ } f.$$

প্রমাণ : এখানে $s = ut + \frac{1}{2} ft^2$

t সময়ে কণাটির বেগ, $\frac{ds}{dt} = u + ft$ এবং

t সময়ে কণাটির ত্বরণ, $\frac{d^2s}{dt^2} = f$

7. (g) একটি গতিশীল কণার কোন সরলরেখায় t সেকেন্ডে
অতিক্রম্য দূরত্ব $s = \frac{1}{2}t^3 + t^2 + 4t$ ঘটাই। 5 সেকেন্ড
শেষে কণাটির বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর। [সি.'০৫]

সমাধান : এখানে $s = \frac{1}{2}t^3 + t^2 + 4t$

t সেকেন্ডে কণাটির বেগ, $\frac{ds}{dt} = \frac{3}{2}t^2 + 2t + 4$

এবং t সময়ে কণাটির ত্বরণ, $\frac{d^2s}{dt^2} = 3t + 2$

\therefore 5 সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ $= \frac{3}{2} \cdot 25 + 10 + 4$
 $= 51.5 \text{ ms}^{-1}$

এবং ত্বরণ $= (3 \times 5 + 2) \text{ ms}^{-2} = 17 \text{ ms}^{-2}$

1. (a) Solⁿ : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2 \cdot 1} = \frac{-\cos 0}{2} = \frac{-1}{2}$

(b) Solⁿ : উপরের সরঙ্গলি তথ্য সত্ত্ব। \therefore Ans. D

(c) Solⁿ : $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$ \therefore Ans. A

(d) Solⁿ : বক্ররেখাটি পরাবৃত্ত নির্দেশ করে।

(e) Solⁿ : $f(x) = y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = x$

$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x - 1) = \frac{1}{2} + 1(x - 1)$

$= x - \frac{1}{2} = x - 0.5 \therefore$ Ans. D

(f) Solⁿ : $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$
 $= f(2+1) - f(2)$

$= \frac{1}{2}(3^2 - 2^2) = \frac{1}{2}(9 - 4) = \frac{5}{2} = 2.5$

(g) Solⁿ : $dx = \delta x = 1$
 $f'(x) = x \therefore f'(1) = 1$

$dy = f'(1) dx = 1 \times 1 = 1 \therefore$ Ans. A

(h) Solⁿ : $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$

চরমবিন্দুর জন্য, $f'(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

এখন, $f(1) = 3 - 6 + 4 = 1 \therefore$ চরমবিন্দু $(1, 1)$

(i) Solⁿ : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x^2)}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(4x^2) \times 8x}{1} = \cos 0 \times 8 \times 0 = 0$

Ans. B

(j) Solⁿ : $\frac{d}{dx}(x^x) = x^x \left[x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x) \right]$

$= x^x \left[x \times \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 \right] = x^x (1 + \ln x)$

Ans. D.

(k) Solⁿ : $f(x) = x + x^{-1} \therefore f'(x) = 1 - x^{-2}$,

$f''(x) = 2x^{-3}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = -1$ এর জন্য $f''(x) < 0$ এবং $f(x) = -2$

Ans. A.

(l) Solⁿ : $y = x^3 - 5x$ হলে $\frac{d^3y}{dx^3} = 3! = 6$.

(m) Solⁿ : $y = x + x^{-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$

রেখাটির ঢাল শূন্য হলে, $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$\Rightarrow x = \pm 1 \therefore$ Ans. B

2. (a) দেখাও যে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18x + 15$

একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18x + 15$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 6x + 18 \\&= 3(x^2 - 2x + 1) + 15 \\&= 3(x - 1)^2 + 15 > 0, \text{ সকল } x \in \mathbb{R} \text{ এর জন্য।} \\&\text{প্রদত্ত ফাংশনটি একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।}\end{aligned}$$

(b) দেখাও যে, $x = 1$ বিন্দুতে $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ ফাংশনটি ত্রাস পায়।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$
 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$
 $\therefore f'(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2 < 0$
 $x = 1$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনটি ত্রাস পায়।

3. নিচের ফাংশনগুলি কোন ব্যবধিতে ত্রাস পায় ও কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় নির্ণয় কর।

(a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 4, -1 \leq x \leq 2$

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$

$$f'(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

এখানে, $x = 1$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$ এবং $বিন্দুটি -1 \leq x \leq 2$ ব্যবধিকে $-1 \leq x < 1$ এবং $1 < x \leq 2$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $-1 \leq x < 1$ এর জন্য $6(x - 1) < 0$, কাজেই $f'(x) < 0$.

$-1 \leq x < 1$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন ত্রাস পায়।

আবার, $1 < x \leq 2$ এর জন্য $6(x - 1) > 0$, কাজেই $f'(x) > 0$.

$1 < x \leq 2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

(b) $f(x) = (x - 2)^3(x + 1)^2, -1 \leq x \leq 3$

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = (x - 2)^3(x + 1)^2$

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x - 2)^3 \times 2(x + 1) + (x + 1)^2 \times 3(x - 2)^2 \\&= (x - 2)^2(x + 1) \{2(x - 3) + 3(x + 1)\} \\&= (x - 2)^2(x + 1)(2x - 6 + 3x + 3) \\&= (x - 2)^2(x + 1)(5x - 3)\end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, 3/5, 2$$

$x = -1, 3/5, 2$ বিন্দুগুলি $-1 \leq x \leq 3$ ব্যবধিকে $-1 < x < 3/5, 3/5 < x < 2$ এবং $2 < x < 3$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $-1 < x < 3/5$ এর জন্য $f'(x) < 0$.

$-1 < x < 3/5$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন ত্রাস পায়।

$3/5 < x < 2$ এর জন্য $f'(x) > 0$.

$3/5 < x < 2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

$2 < x < 3$ এর জন্য $f'(x) > 0$.

$3/5 < x < 2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন বৃদ্ধি পায়।

4. (a) x এর কোন মানের জন্য নিচের ফাংশনগুলো পুরুমান অথবা লঘুমান পাওয়া যায়?

(i) ধরি, $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$ [ষ. '০৭]

$$\therefore f'(x) = \frac{(x - 10)(2x - 7) - (x^2 - 7x + 6).1}{(x - 10)^2}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$\frac{(x - 10)(2x - 7) - (x^2 - 7x + 6).1}{(x - 10)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 27x + 70 - x^2 + 7x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 20x + 64 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 4)(x - 16) = 0 \Rightarrow x = 4, 16$$

$x = 4$ ও 16 এর জন্য প্রদত্ত ফাংশনের গুরুমান অথবা লঘুমান থাকবে।

(ii) $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$ [ক্ষ. '০৮]

ধরি, $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$

$$\therefore f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + 6(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x = 1, 2, 3$$

$x = 1, 2$ ও 3 এর জন্য প্রদত্ত ফাংশনের গুরুমান
অথবা শব্দমান থাকবে।

4(b) $f(x) = x - x^2 - x^3$ এর সম্মিলিত নির্ণয়
কর।

সমাধান : $f(x) = x - x^2 - x^3$

$$f'(x) = 1 - 2x - 3x^2$$

সম্মিলিতে, $f'(x) = 0$

$$1 - 2x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3x - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3x(x+1) - 1(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(3x-1) = 0$$

$$x = -1, \frac{1}{3}$$

$$x = -1 \text{ হলে, } f(x) = -1 - 1 + 1 = -1$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ হলে, } f(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27}$$

$$= \frac{9-3-1}{27} = \frac{5}{27}$$

$$\text{নির্ণয় সম্মিলিত } (-1, -1), \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{27}\right)$$

5. নিচের ফাংশনগুলো গুরুমান ও শব্দমান নির্ণয় কর : ৷

(a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ [চ.'০৮; মা.'১১]

সমাধান : $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 \text{ এবং}$$

$$f''(x) = 12x - 18$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \therefore x = 1, 2$$

$$\text{এখন, } f''(1) = 12 \times 1 - 18 = -6 < 0$$

$f(x)$ গুরুমান হবে যখন $x = 1$ এবং

$$\text{এর মান } = f(1) = 2 - 9 + 12 + 5 = 19 - 9 = 10$$

$$\text{আবার, } f''(2) = 12 \times 2 - 18 = 24 - 18 = 6 > 0.$$

$f(x)$ শব্দমান হবে যখন $x = 2$ এবং

$$\text{এর মান } = f(2) = 2 \times 2^3 - 9 \times 2^2 + 12 \times 2 + 5$$

$$= 16 - 36 + 24 + 5 = 45 - 36 = 9$$

5(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$

[ঝা.'০৫, '১০; ব.'০৮; পি.'০৮; চ.'০৯, '১১]

সমাধান : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$

বইয়ের কম

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 45 \text{ এবং}$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 45 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+3) = 0 \therefore x = 5, -3$$

$$\text{এখন, } f''(-3) = 6 \times -3 - 6 = -24 < 0$$

$f(x)$ গুরুমান হবে যখন $x = -3$ এবং

$$\text{এর মান } = f(-3) = -27 - 27 + 135 + 13$$

$$= 148 - 54 = 94$$

$$\text{আবার, } f''(5) = 6 \times 5 - 6 = 24 > 0$$

$f(x)$ শব্দমান হবে যখন $x = 5$ এবং

$$\text{এর মান } = f(5) = 125 - 75 - 225 + 13$$

$$= 138 - 300 = -162$$

5(c) $x(12 - 2x)^2$ [ঝ.'০৫]

সমাধান : ধরি, $f(x) = x(12 - 2x)^2$

$$= 4x(6 - x)^2$$

$$(i) = 4x \cdot 2(6-x)(-1) + 4(6-x)^2 \cdot 1$$

$$= 4(6-x)(-2x+6-x)$$

$$= 4(6-x)(6-3x) = 12(6-x)(2-x)$$

$$\text{এবং } f''(x) = 12\{(6-x)(-1) + (2-x)(-1)\}$$

$$12(-6+x-2+x) = 24(x-4)$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow 12(6-x)(2-x) = 0 \therefore x = 2, 6$$

$$\text{এখন, } f''(2) = 24(2-4) = -48 < 0$$

$f(x)$ গুরুমান হবে যখন $x = 2$ এবং

$$\text{এর মান } = f(2) = 8(6-2)^2 = 128$$

$$\text{আবার, } f(6) = 24(6-4) > 0$$

$f(x)$ শব্দমান হবে যখন $x = 6$ এবং

$$\text{এর মান } = f(6) = 8(6-6)^2 = 0$$

5(d) $1 + 2\sin x + 3\cos^2 x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

[ঝ.'০১; চ.'০৮]

সমাধান : ধরি, $y = 1 + 2\sin x + 3\cos^2 x$

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos x + 6\cos x(-\sin x)$$

$$= 2\cos x(1 - 3\sin x) \text{ এবং}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= 2\cos x(-3\cos x) + 2(1-3\sin x)(-\sin x) \\ &= -6\cos^2 x - 2\sin x + 6\sin^2 x\end{aligned}$$

চরম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow 2\cos x(1-3\sin x) = 0$$

$$\cos x = 0, \sin x = \frac{1}{3}$$

$$\cos x = 0 \text{ হলে } \sin x = 1 \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = -2 + 6 > 0$$

প্রদত্ত ফাংশন লব্ধমান হবে যখন $\cos x = 0$ এবং
এর মান $= 1 + 2(1) + 3(0)^2 = 3$

$$\text{আবার, } \sin x = \frac{1}{3} \text{ হলে } \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -6 \cdot \frac{8}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{9} < 0$$

প্রদত্ত ফাংশন পুরুমান হবে যখন $\sin x = \frac{1}{3}$ এবং এর

$$\text{মান} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{8}{9} = \frac{3+2+8}{3} = \frac{13}{3}$$

$$5(e) \mathbf{u} = \frac{4}{x} + \frac{36}{y}, \text{ যখন } x+y=2.$$

$$\text{সমাধান: } \mathbf{u} = \frac{4}{x} + \frac{36}{2-x} \quad [x+y=2]$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{du}{dx} &= -\frac{4}{x^2} - \frac{36}{(2-x)^2}(-1) \\ &= -\frac{4}{x^2} + \frac{36}{(2-x)^2}\end{aligned}$$

$$\text{এবং } \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{8}{x^3} + \frac{72}{(2-x)^3}$$

চরম মানের জন্য, $\frac{du}{dx} = 0$

$$\Rightarrow -\frac{4}{x^2} + \frac{36}{(2-x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow -4(4-4x+x^2) + 36x^2 = 0$$

$$\Rightarrow -16 + 16x - 4x^2 + 36x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 32x^2 + 16x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2x+1)(x-1) = 0 \therefore x = 1, -\frac{1}{2}$$

$$x = 1 \text{ এর জন্য, } \frac{d^2u}{dx^2} = 8 + 72 > 0$$

$x = 1$ এর জন্য, u এর সংযোগ আছে।

$$\text{সংযোগ} = \frac{4}{x} + \frac{36}{2-x} = \frac{4}{1} + \frac{36}{2-1} = 40$$

আবার $x = -\frac{1}{2}$ এর জন্য,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -64 + \frac{72}{(2+\frac{1}{2})^3} = -64 + \frac{72 \times 8}{125} < 0$$

$x = -\frac{1}{2}$ এর জন্য, u এর পুরুমান আছে।

$$\text{পুরুমান} = \frac{4}{-\frac{1}{2}} + \frac{36}{2+\frac{1}{2}} = -8 + \frac{72}{5} = \frac{32}{5}$$

6.(a) দেখাও যে, $x + \frac{1}{x}$ এর পুরুমান তার লব্ধমান

অপেক্ষা স্থিতির। [রা.'০৬; কু.'০৮; ঢা.'০৫,'১১;
ব.'০৯; ব., চ., সি.'১০,'১৮]

প্রমাণ মনে করি, $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \text{ এবং } f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, 1$$

$$\text{এখন, } f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} < 0$$

$x = -1$ এর জন্য $f(x)$ এর পুরুমান আছে।

$$\text{পুরুমান} = f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$$

$$\text{আবার, } f''(1) = \frac{2}{1^3} > 0$$

1 এর জন্য $f(x)$ এর সংযোগ আছে।

প্রশ্নমালা IX K

বইয়ের কম

$$\text{লঘুমান} = f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$x + \frac{1}{x}$ এর পূর্বমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

6(b) দেখাও যে, $4e^x + 9e^{-x}$ এর লঘুমান 12.

[রা.'০৩,'০৮; ব.'০৫,'১০; কূ.'১০; চ.দি.'১৮]

প্রমাণ : মনে করি, $y = 4e^x + 9e^{-x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4e^x - 9e^{-x} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = 4e^x + 9e^{-x}$$

চরম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0 \therefore 4e^x - 9e^{-x} = 0$

$$\Rightarrow 4e^x = \frac{9}{e^x} \Rightarrow (e^x)^2 = \frac{9}{4} \quad e^x = \pm \frac{3}{2}$$

$$e^x = \frac{3}{2} \text{ হলে, } \frac{d^2y}{dx^2} = 4 \cdot \frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3} > 0$$

$\therefore e^x = \frac{3}{2}$ এর জন্য $4e^x + 9e^{-x}$ এর লঘুমান আছে।

$$\text{লঘুমান} = 4 \cdot \frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3} = 6 + 6 = 12$$

6(c) দেখাও যে, $\frac{x}{\ln(x)}$ এর লঘুমান e. [জ.'০৭; কূ.'০১]

প্রমাণ : মনে করি, $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

$$f'(x) = \frac{\ln(x) \cdot 1 - x \cdot \frac{1}{x}}{\{\ln(x)\}^2} = \frac{\ln(x) - 1}{\{\ln(x)\}^2} \text{ এবং}$$

$$f''(x) = \frac{\{\ln(x)\}^2 \cdot \frac{1}{x} - \{\ln(x) - 1\} 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x}}{\{\ln(x)\}^4} \\ = \frac{\ln(x)\{\ln(x) - 2 \ln(x) + 2\}}{x\{\ln(x)\}^4} = \frac{-\ln(x) + 2}{x\{\ln(x)\}^3}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$\frac{\ln(x) - 1}{\{\ln(x)\}^2} = 0 \Rightarrow \ln(x) = 1 \therefore x = e$$

$$\text{এখন, } f''(e) = \frac{-1+2}{e(1)^3} = \frac{1}{e} > 0.$$

$x = e$ এর জন্য $f(x)$ এর লঘুমান আছে।

$$\frac{x}{\ln(x)} \text{ এর লঘুমান} = f(e) = \frac{e}{1} = e$$

6(d) দেখাও যে, $\frac{\ln x}{x}$ এর লঘুমান $\frac{1}{e}$.

প্রমাণ মনে করি, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \text{ এবং}$$

$$f''(x) = \frac{x^2(-\frac{1}{x}) - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} \\ = \frac{-x - 2x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \therefore x = e$$

$$\text{এখন, } f''(e) = \frac{-3 + 2 \cdot 1}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0$$

$x = e$ এর জন্য $f(x)$ এর পূর্বমান আছে।

$$\frac{x}{\ln(x)} \text{ এর পূর্বমান} = f(e) = \frac{1}{e}$$

6. (e) দেখাও যে, $(x)^{\frac{1}{x}}$ এর পূর্বমান $(e)^{\frac{1}{e}}$.

প্রমাণ ধরি, $f(x) = (x)^{\frac{1}{x}}$

$$f'(x) = (x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) \right]$$

$$= (x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \ln x \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right]$$

$$= (x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \ln x \right] = (x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$$

$$\text{এবং } f''(x) = (x)^{\frac{1}{x}} \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= (x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2 \left(-\frac{1}{x}\right) - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} \\
 &\quad + \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right) (x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right) \\
 &= (x)^{\frac{1}{x}} \frac{-x(1+2-2\ln x)}{x^4} + (x)^{\frac{1}{x}} \frac{(1-\ln x)^2}{x^4} \\
 &= (x)^{\frac{1}{x}} \frac{-3+2\ln x}{x^3} + (x)^{\frac{1}{x}} \frac{(1-\ln x)^2}{x^4}
 \end{aligned}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$(x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \quad \therefore x = e$$

$$\text{এখন, } f''(e) = (e)^{\frac{1}{e}} \frac{-3+2 \cdot 1}{e^3} + 0 = (e)^{\frac{1}{e}} \frac{-1}{e^3} < 0$$

$x = e$ এর জন্য $f(x)$ এর গুরুমান আছে।

$$(x)^{\frac{1}{x}} \text{ এর গুরুমান} = f(e) = (e)^{\frac{1}{e}}$$

7. দেখাও যে, $\sin x(1+\cos x)$ গরিষ্ঠ হবে যখন

$$x = \frac{\pi}{3}.$$

প্রমাণ : মনে করি, $f(x) = \sin x(1+\cos x)$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \sin x(-\sin x) + (1+\cos x)\cos x \\
 &= -\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x \\
 &= \cos x + \cos 2x
 \end{aligned}$$

এবং $f''(x) = -\sin x - 2\sin 2x$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$\cos x + \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{এখন, } f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} - 2\sin \frac{2\pi}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

$\sin x(1+\cos x)$ গরিষ্ঠ হবে যখন $x = \frac{\pi}{3}$

8.(a) দেখাও যে, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 4$ এর কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই। [য. '০১, '১১]

প্রমাণ ১ এখানে $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 4$
 $\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 24 = 3(x^2 - 4x + 8) =$
 $= 3 \{(x-2)^2 + 4\}$, যা x এর কোন বাস্তব মানের জন্য শূন্য হতে পারে না।

প্রদত্ত ফাংশনের কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

8(b) দেখাও যে, $f(x) = \frac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}$ এর কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

প্রমাণ ১ এখানে $f(x) = \frac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}$

$$\begin{aligned}
 \therefore f'(x) &= \frac{1}{\sin^2(x+b)} [\sin(x+b).\cos(x+a) \\
 &\quad - \sin(x+a).\cos(x+b)]
 \end{aligned}$$

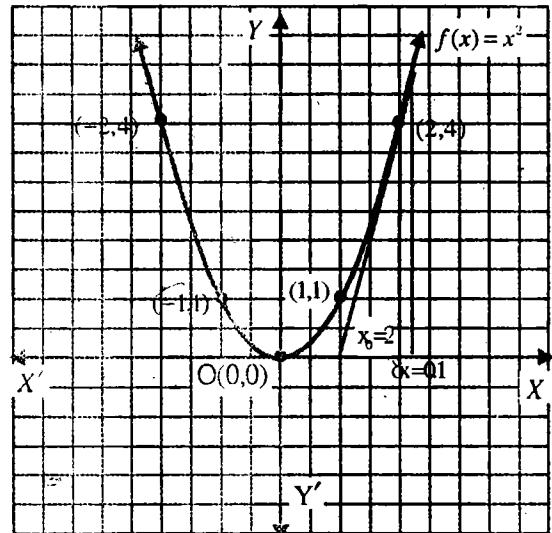
$$= \frac{\sin(x+b-x-a)}{\sin^2(x+b)} = \frac{\cos(b-a)}{\sin^2(x+b)}, \text{ যা } x \text{ এর}$$

কোন বাস্তব মানের জন্য শূন্য হতে পারে না।

প্রদত্ত ফাংশনের কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

9. (a) $f(x) = x^2$ এর সেখানিক ব্যবহার করে $(2 \cdot 1)^2$ এর প্রাসঙ্গিক নির্দল কর।

সমাধান:



মনে করি, $x_0 = 2$ এবং $x_0 + \delta x = 2 \cdot 1$

$$\delta x = 0 \cdot 1$$

এখন, $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$$f'(2) = 2 \times 2 = 4.$$

$$f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \delta x$$

$$\Rightarrow f(2 \cdot 1) \approx f(2) + f'(2) \times 0 \cdot 1$$

$$\Rightarrow (2 \cdot 1)^2 \approx 2^2 + 4 \times 0 \cdot 1$$

$$\Rightarrow (2 \cdot 1)^2 \approx 4 + 0 \cdot 4$$

$$(2 \cdot 1)^2 \approx 4 \cdot 4 \text{ (Ans.)}$$

(b) $x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x) = \sqrt{1+x}$ ফাংশনের লেখকে অসম্ভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা হ্রান্তিয়ভাবে প্রতিস্থাপন করে $\sqrt{0 \cdot 9}$ এবং $\sqrt{1 \cdot 1}$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$$f(0) = \sqrt{1+0} = 1 \text{ এবং } f'(0) = \frac{1}{2}$$

$x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x) = \sqrt{1+x}$ ফাংশনের লেখকে অসম্ভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা হ্রান্তিয়ভাবে প্রতিস্থাপন করে পাই,

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x - 0)$$

$$[f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ সূত্র দ্বারা }]$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \dots \dots (1)$$

(1) এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$\sqrt{1-0 \cdot 1} \approx 1 + \frac{1}{2}(-0 \cdot 1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{0 \cdot 9} \approx 1 - 0 \cdot 05 \Rightarrow \sqrt{0 \cdot 9} \approx 0 \cdot 95$$

আবার, (1) এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

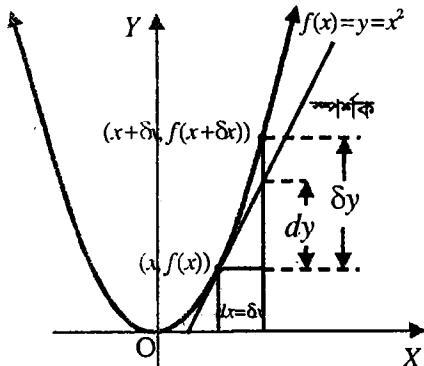
$$\sqrt{1+0 \cdot 1} \approx 1 + \frac{1}{2}(0 \cdot 1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 \cdot 1} \approx 1 + 0 \cdot 05 \Rightarrow \sqrt{1 \cdot 1} \approx 1 \cdot 05$$

$\sqrt{0 \cdot 9}$ এবং $\sqrt{1 \cdot 1}$ এর আসন্ন মান যথাক্রমে $0 \cdot 95$ এবং $1 \cdot 05$.

10. (a) $y = x^2$ কে অঙ্কন কর এবং তাতে δy ও dy চিহ্নিত কর। $x = 2$ ও $\delta x = dx = 1$ হলে δy ও dy নির্ণয় কর।

সমাধান: নিম্নে $f(x) = y = x^2$ কে অঙ্কন করে তাতে δy ও dy চিহ্নিত করা হলো।



$x = 2$ ও $\delta x = dx = 1$ হলে,

$$\delta y = f(x + \delta x) - f(x) = f(2 + 1) - f(2)$$

$$= f(3) - f(2) = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$$

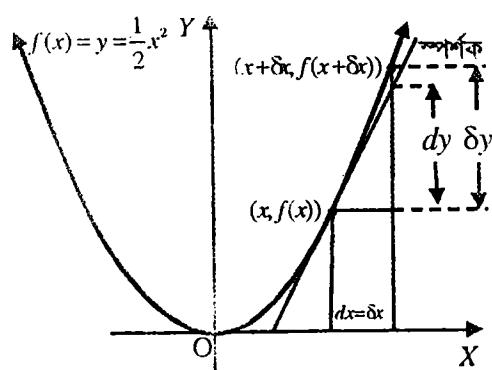
এখন, $f(x) = y = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$$dy = f'(x) dx = f'(2) \times 1 = 2 \times 2 = 4$$

(b) $y = \frac{1}{2}x^2$ কে অঙ্কন কর এবং তাতে δy ও dy

চিহ্নিত কর। $x = 3$ ও $\delta x = dx = 3$ হলে δy ও dy নির্ণয় কর।

সমাধান: নিম্নে $f(x) = y = x^2$ কে অঙ্কন করে তাতে δy ও dy চিহ্নিত করা হলো।



$x = 3$ ও $\delta x = dx = 3$ হলে,

$$\delta y = f(x + \delta x) - f(x) = f(3 + 3) - f(3)$$

$$= f(6) - f(3) = \frac{1}{2} (6^2 - 3^2) = \frac{1}{2} (36 - 9) \\ = 13.5$$

এখন, $f(x) = y = \frac{1}{2} x^2 \Rightarrow f'(x) = x$

$$dy = f'(x) dx = f'(3) \times 3 = 3 \times 3 = 9$$

১১. দেওয়া আছে, $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

(a) $x^{\cos^{-1} x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [কু.'১৩; ঘ.'১০,'১৪; সি.'০৮; ঢ.'১৩; রা.'১০,'১৪; ব.'১০; চ.'১৪]

(b) দেখাও যে, $f(x)$ এর শুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা শুধুতর। [কু.'০৮; ব.'০৯; ঘ.'১০,'১২; চ.'১০; সি.'১০,'১৪]

(c) $x = 1$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x)$ এর যোগাশ্রয়ী অসম্মান নির্ণয় কর। $x = 1$ ও $\delta x = dx = 1$ হলে δy ও dy নির্ণয় কর।

সমাধান: (c) দেওয়া আছে, $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(1) = 1 + 1 = 2, f'(1) = 1 - 1 = 0$$

$x = 1$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x)$ এর যোগাশ্রয়ী অসম্মান,

$$f(x) \approx 2 + f'(1)(x - 1)$$

$$[f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ সূত্র থারা}]$$

$$\Rightarrow f(x) \approx 2 \text{ (Ans.)}$$

এখন, $x = 1$ ও $\delta x = dx = 1$ হলে,

$$\delta y = f(x + \delta x) - f(x) = f(1+1) - f(1)$$

$$= f(2) - f(1) = 2 + \frac{1}{2} - (1 + \frac{1}{1})$$

$$= 2 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

এবং $dy = f'(x) dx = f'(1) \times 1 = 0 \times 1 = 0$

১২. $y(x-2)(x-3)-x+7=0$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ।

(a) মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য ও শ্যাখাঙ্গের গড়মান উপপাদ্য বর্ণনা কর।

(b) $y = \sqrt{(4 + 3 \sin x)}$ হলে, দেখাও যে,
 $2y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$ [ঘ.'১৩; কু.'১১,'১৪;
 চ.'১০; ঢ.'০৮; রা.'১২; সি.'১২; দি.'১১]

(c) প্রদত্ত বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে x -অক্ষকে হেদে যাবে, এ বিন্দুগুলোতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢ.'০৯; ঘ.'১০; চ.'১০; দি.'১১; কু.'১৪]

সমাধান: (a) মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য (Intermediate Value Theorem): যদি $f(x)$ ফাংশন $[a, b]$ বন্ধ ব্যবধিতে অবিছিন্ন এবং $d \in [f(a), f(b)]$ হয়, তবে অন্ততঃপক্ষে একটি বিন্দু $x = c \in [a, b]$ এর জন্য $f(c) = d$ হবে।

শ্যাখাঙ্গের গড়মান উপপাদ্য (Lagrange's Mean Value Theorem): যদি $f(x)$ ফাংশন $[a, b]$ বন্ধ ব্যবধিতে অবিছিন্ন হয় এবং $[a, b]$ বোলা ব্যবধিতে অন্ত রীতিপথে হয়, তবে অন্ততঃপক্ষে একটি বিন্দু $c \in]a, b[$ এর জন্য $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$

(b) অশ্বামা IX I এর ৭(b) দ্রষ্টব্য।

(c) অশ্বামা IX J এর ৩ দ্রষ্টব্য।

১৩. স্যান্ডউইচ উপপাদ্য (Sandwich or Princing Theorem): যদি $f(x)$, $g(x)$ এবং $h(x)$ ফাংশনতার $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ সিদ্ধ করে এবং $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ হয়, তবে $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

(a) $v^2 \sin^{-1}(1-x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [ব.'০৮; দি.'১২; ঢ.'১৪]

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর। [ঝ.'০৯; ঘ.'১১,'১৪; কু.'১০; সি.'০৯; মা.'১৩]

(c) স্যান্ডউইচ উপপাদ্যের সাহায্যে মান নির্ণয় কর:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 + \sin^2 x)}{x + 100}$

সমাধান: (a) অশ্বামা IX F এর 2(b) দ্রষ্টব্য।

(b) অশ্বামা IX A এর উদাহরণ দ্রষ্টব্য।

(c) প্রশ্নমালা IX A এর 15(g) দ্রষ্টব্য।

$$14. f(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3 \text{ একটি ফাংশন।}$$

(a) ইহার চরমবিন্দু নির্ণয় কর। (b) ইহা কোন ব্যবধিতে ক্রান্তি পায় নির্ণয় কর। (c) ইহার সর্বোচ্চ ও সর্বোন্নিম্ন মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমালা IX K এর উদাহরণ -3 দ্রষ্টব্য।

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. x এর কোন মানের জন্য, $x(12 - 2x)^2$ এর পুরুমান অথবা লঘুমান পাওয়া যায়?

$$\text{মনে করি, } f(x) = x(12 - 2x)^2$$

$$f'(x) = x \cdot 2(12 - 2x)(-2) + (12 - 2x)^2 \cdot 1$$

$$= (12 - 2x)(-4x + 12 - 2x)$$

$$= 12(6 - x)(2 - x)$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$12(6 - x)(2 - x) = 0 \Rightarrow x = 2, 6$$

$x = 2$ ও 6 এর জন্য প্রদত্ত ফাংশনের পুরুমান অথবা লঘুমান থাকবে।

2. নিচের ফাংশনগুলির পুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর।

$$(a) \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8 \quad [ব.'০৩]$$

$$\text{সমাধান : ধরি, } f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$$

$$f'(x) = x^2 + x - 6 \text{ এবং } f''(x) = 2x + 1$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0$$

$$x = -3, 2$$

এখন, $f''(-3) = -6 + 1 = -5 < 0$

$f(x)$ গৃহুমান হবে যখন $x = -3$ এবং

$$\text{এর মান } = f(-3) = -9 + \frac{9}{2} + 18 + 8 = \frac{43}{2}$$

আবার, $f''(2) = 4 + 1 = 5 > 0$

$f(x)$ লঘুমান হবে যখন $x = 2$ এবং

$$\text{এর মান } = f(2) = \frac{8}{3} + 2 - 12 + 8 = \frac{2}{3}$$

$$2. (b) x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1 \quad [কু.'০১]$$

$$\text{সমাধান : ধরি, } f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$$

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$$

$$\text{এবং } f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x$$

$$\text{চরম মানের জন্য, } f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x-1)(x-3) = 0 \therefore x = 0, 1, 3$$

$$\text{এখন, } f''(0) = 0, f''(1) = 20 - 60 + 30 < 0$$

$$\text{এবং } f''(3) = 540 - 540 + 90 > 0$$

$$f(x) \text{ গৃহুমান হবে যখন } x = 1 \text{ এবং}$$

$$\text{এর মান } f(1) = 1 - 5 + 5 - 1 = 0$$

$$\text{আবার, } f(x) \text{ লঘুমান হবে যখন } x = 3 \text{ এবং}$$

$$\text{এর মান } = f(3) = 243 - 405 + 135 - 1 = -28$$

3. দেখাও যে, $(1/x)^x$ এর পুরুমান $(e)^{\frac{1}{e}}$:

$$\text{প্রমাণ : ধরি, } f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x \left[x \frac{d}{dx} \left(\ln \frac{1}{x} \right) + \ln \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x) \right]$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)^x \left[x \frac{d}{dx} (-\ln x) - \ln x \frac{d}{dx} (x) \right]$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)^x \left[x \left(-\frac{1}{x}\right) - \ln x \cdot 1 \right] = -\left(\frac{1}{x}\right)^x (1 + \ln x)$$

$$\text{এবং } f''(x) = -\left(\frac{1}{x}\right)^x \frac{d}{dx} (1 + \ln x) -$$

$$(1 + \ln x) \frac{d}{dx} \left\{ \left(\frac{1}{x}\right)^x \right\}$$

$$= -\left(\frac{1}{x}\right)^x \frac{1}{x} - (1 + \ln x) \left\{ -\left(\frac{1}{x}\right)^x (1 + \ln x) \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)^x \left\{ -\frac{1}{x} + (1 + \ln x)^2 \right\}$$

$$\text{চরম মানের জন্য, } f'(x) = 0$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^x (1 + \ln x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$f''\left(\frac{1}{e}\right) = (e)^{\frac{1}{e}} (-e + 0) = -e \cdot (e)^{\frac{1}{e}} < 0$$

$$x = \frac{1}{e} \text{ এর জন্য } f(x) \text{ এর পুরুমান আছে।}$$

$$(1/x)^x \text{ এর গুরুমান} = f\left(\frac{1}{e}\right) = (e)^{\frac{1}{e}}$$

৪. দেখাও যে, x^x সংষিঠ হবে যখন $x = \frac{1}{e}$

প্রমাণ : ধরি, $f(x) = x^x$

$$\therefore f'(x) = x^x \left[x \frac{d}{dx} (\ln x) + \ln x \frac{d}{dx} (x) \right]$$

$$= x^x \left[x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 \right] = x^x (1 + \ln x)$$

$$\text{এবং } f''(x) = x^x \frac{d}{dx} (1 + \ln x) - \\ (1 + \ln x) \frac{d}{dx} (x^x)$$

$$= x^x \cdot \frac{1}{x} + (1 + \ln x) \{ x^x (1 + \ln x) \}$$

$$= x^x \left\{ \frac{1}{x} + (1 + \ln x)^2 \right\}$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$$x^x (1 + \ln x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1$$

$$\Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\text{এখন, } f''\left(\frac{1}{e}\right) = (e)^{\frac{1}{e}} (e + 0) = e \cdot (e)^{\frac{1}{e}} > 0$$

$$x^x \text{ সংষিঠ হবে যখন } x = \frac{1}{e}$$

৫. দেখাও যে, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 27x + 5$ এর কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

প্রমাণ : এখানে $f(x) = x^3 - 6x^2 + 27x + 5$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 27 = 3(x^2 - 4x + 9) = 3 \{(x-2)^2 + 5\}, \text{ যা } x \text{ এর কোন বাস্তব মানের জন্য} \\ \text{শূন্য হতে পারে না।}$$

প্রদত্ত ফাংশনের কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

৬. দেখাও যে, $f(x) = \frac{ax+b}{ax+c}$ এর কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

প্রমাণ : এখানে $f(x) = \frac{ax+b}{ax+c}$

$$f'(x) = \frac{(ax+c).a - (ax+b).a}{(ax+c)^2}$$

$$= \frac{(ax+c - ax-b)a}{(ax+c)^2} = \frac{(c-b)a}{(ax+c)^2}, \text{ যা } x \text{ এর}$$

কোন বাস্তব মানের জন্য শূন্য হতে পারে না।

প্রদত্ত ফাংশনের কোন গুরুমান অথবা লঘুমান নেই।

৭. u বেগে উর্ধমুখী দিকে নিষিদ্ধ কোনো কণা t সময়ে $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ উচ্চতায় অবস্থান করে। বৃহত্তম উচ্চতা এবং সেখানে পৌছার সময় নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান : } \text{এখানে } h = ut - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{dh}{dt} = u - \frac{1}{2} g \cdot 2t = u - gt \text{ এবং}$$

$$\frac{d^2h}{dt^2} = 0 - g = -g$$

$$\text{চরম মানের জন্য, } \frac{dh}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow u - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{u}{g}$$

$$\text{এখন, } t = \frac{u}{g} \text{ এর জন্য, } \frac{d^2h}{dt^2} = -g < 0$$

$$h = ut - \frac{1}{2}gt^2 \text{ বৃহত্তম হবে যখন } t = \frac{u}{g}$$

$$\text{বৃহত্তম উচ্চতা} = u \cdot \frac{u}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{u}{g}\right)^2$$

$$= \frac{u^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{g} = \frac{u^2}{2g}$$

$$\text{এবং সেখানে পৌছার সময়} = \frac{u}{g}$$

৮. u বেগে ভূমির সাথে α কোণে নিষিদ্ধ কোন কণা t সময়ে $usina.t - \frac{1}{2}g t^2$ উচ্চতায় অবস্থান করে। বৃহত্তম উচ্চতা এবং সেখানে পৌছার সময় নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $h = u \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}g t^2$

$$\frac{dh}{dt} = u \sin \alpha - \frac{1}{2} g \cdot 2t = u \sin \alpha - gt \text{ এবং}$$

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = 0 - g = -g$$

$$\text{চৰম মানের জন্য}, \frac{dh}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow u \sin \alpha - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{u \sin \alpha}{g}$$

$$\text{এখন}, t = \frac{u \sin \alpha}{g} \text{ এৱং জন্য}, \frac{d^2 h}{dt^2} = -g < 0$$

$$u \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \text{ বৃহত্তম হবে যখন } t = \frac{u \sin \alpha}{g}$$

$$\therefore \text{বৃহত্তম উচ্চতা} = u \sin \alpha \cdot \frac{u \sin \alpha}{g} -$$

$$\frac{1}{2} g \left(\frac{u \sin \alpha}{g} \right)^2$$

$$= \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{1}{2} \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{g} = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$\text{এবং সেখানে শৌধার সময়} = \frac{u \sin \alpha}{g}$$

৯. $y = x^2 + 2$ বক্ররেখা হতে $(3, 2)$ বিন্দুৰ ক্ষেত্ৰত দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰ।

সমাধান : $y = x^2 + 2$ বক্ররেখাৰ (x, y) বিন্দু হতে

$$(3, 2) \text{ বিন্দুৰ দূৰত্ব}, s = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{(x-3)^2 + x^4}, [\because y-2 = x^2]$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2} \sqrt{(x-3)^2 + x^4} \{2(x-3) + 4x^3\}$$

$$= (2x^3 + x - 3) \sqrt{(x-3)^2 + x^4} \text{ এবং}$$

$$\frac{d^2 s}{dx^2} = (2x^3 + x - 3)^2 \sqrt{(x-3)^2 + x^4} +$$

$$(6x+1) \sqrt{(x-3)^2 + x^4}$$

$$x = 1 \text{ এৱং জন্য}, \frac{ds}{dx} = 0 \text{ এবং } \frac{d^2 s}{dx^2} = 7\sqrt{5} > 0$$

$$\text{নিৰ্ণয় ক্ষেত্ৰত দূৰত্ব} = \sqrt{(1-3)^2 + 1^4} = \sqrt{5} \text{ একক}$$

বিকল্প পদ্ধতি $y = x^2 + 2$ বক্ররেখাৰ (x, y) বিন্দুতে

$$\text{সৰ্বকেৱ ঢাল}, \frac{dy}{dx} = 2x \text{ এৱং } (x, y) = (3, 2)$$

$$\text{বিন্দুগামী রেখাৰ ঢাল} = \frac{y-2}{x-3}.$$

$\therefore (3, 2)$ বিন্দু হতে $y = x^2 + 2$ বক্ররেখাৰ (x, y) বিন্দুটি ক্ষেত্ৰত দূৰত্বে অবস্থিত হলে,

$$2x \times \frac{y-2}{x-3} = -1 \Rightarrow 2x \cdot x^2 = -(x-3)$$

$$\Rightarrow 2x^3 + x - 3 = 0$$

$$x = 1 \text{ ও } y = 1^2 + 2 = 3$$

নিৰ্ণয় ক্ষেত্ৰত দূৰত্ব = $(1, 3)$ ও $(3, 2)$ বিন্দুয়োৱে
মধ্যবৰ্তী দূৰত্ব = $\sqrt{(1-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}$ একক।

১০. জনকে কৃষক ৪০০ ফুট দীৰ্ঘ তাৰেৱ বেড়াৰ সাহায্যে
বৃহত্তম ক্ষেত্ৰফল বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্ৰ ঘিৱে ফেলতে
পাৰে। ক্ষেত্ৰটিৰ দৈৰ্ঘ্য ও প্ৰস্থ কত হওয়াৰ দৰকাৰ।

সমাধান : মনে কৰি, ক্ষেত্ৰটিৰ দৈৰ্ঘ্য x ফুট ও প্ৰস্থ y
ফুট হাবলে,

$$2(x+y) = 800 \Rightarrow x+y = 400$$

$$\Rightarrow y = 400 - x$$

$$\text{এখন, আয়তক্ষেত্ৰেৰ ক্ষেত্ৰফল } A = xy = x(400-x) = 400x - x^2$$

$$\frac{dA}{dx} = 400 - 2x \text{ এবং } \frac{d^2 A}{dx^2} = -2$$

$$\text{বৃহত্তম ক্ষেত্ৰফলেৰ জন্য}, \frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 400 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = 200$$

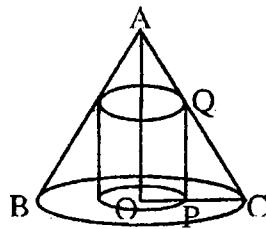
$$\text{এজেন্টে, } \frac{d^2 y}{dx^2} < 0, y = 400 - 200 = 200$$

$x = 200, y = 200$ এৱং A এৰ মান বৃহত্তম
হয়।

বৃহত্তম তাৰেৱ বেড়া দ্বাৰা যে বৃহত্তম ক্ষেত্ৰফল বিশিষ্ট
আয়তক্ষেত্ৰ ঘিৱে ফেলে তাৰ দৈৰ্ঘ্য ২০০ ফুট এবং প্ৰস্থ
২০০ ফুট।

১১. একটি সমবৃত্তুমিক কোণেৰ মধ্যে একটি খাড়া
বৃত্তাকাৰ সিলিন্ডাৰ স্থাপন কৰা আছে। সিলিন্ডাৰেৰ বক্রতল
বৃহত্তম হলে দেখো যে, সিলিন্ডাৰেৰ ব্যাসাৰ্ধ কোণেৰ
ব্যাসাৰ্ধেৰ অৰ্দেক।

সমাধান : মনে করি
কোণের উচ্চতা $OA = h$,
ভূমির ব্যাসার্ধ $OC = r$
এ কোণের মধ্যে একটি
সিলিন্ডার স্থাপন করা
আছে যার ভূমির ব্যাসার্ধ
 $OP = x$.



এখন, ΔPQC ও ΔAOC সদৃশকোণী ত্রিভুজ হতে

$$\text{পাই}, \frac{PQ}{OA} = \frac{PC}{OC} \Rightarrow \frac{PQ}{OA} = \frac{OC - OP}{OC}$$

$$\Rightarrow \frac{PQ}{h} = \frac{r - x}{r} \Rightarrow PQ = \frac{h(r - x)}{r}$$

সিলিন্ডারের বক্রতল S হলে, $S = 2\pi x \times PQ$

$$\Rightarrow S = 2\pi x \frac{h(r - x)}{r} = \frac{2\pi h}{r}(rx - x^2)$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{2\pi h}{r}(r - 2x), \frac{d^2S}{dx^2} = \frac{2\pi h}{r}(0 - 2)$$

এখন গরিষ্ঠ ও লবিষ্ঠ মানের জন্য, $\frac{dS}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{2\pi h}{r}(r - 2x) = 0 \Rightarrow x = \frac{r}{2}$$

অর্থাৎ সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2}$ (কোণের ভূমির ব্যাসার্ধ)

$$\text{এক্ষেত্রে}, \frac{d^2S}{dx^2} = -\frac{4\pi h}{r} < 0$$

সিলিন্ডারের বক্রতল বৃহস্পতি হলে, সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ
কোণের ব্যাসার্ধের অর্ধেক।

12. একটি আঘ বাগানে প্রতি একরে 30টি গাছ আছে
এবং প্রতি গাছে গড়ে 400টি আম ধরে। প্রতি একরে
অতিরিক্ত একটি গাছের জন্য মোটামোটি 10টি আমের
ফলন করে। আমের সর্বোচ্চ ফলন পাওয়ার জন্য প্রতি
একরে কতটি গাছ থাকা উচিত?

সমাধান : মনে করি, সর্বোচ্চ ফলনের জন্য প্রতি একরে
গাছের সংখ্যা $(30 + x)$ থাকা প্রয়োজন। তাহলে, প্রতি
গাছে আমের সংখ্যা $= (400 - 10x)$.

আমের ফলন y হলে, $y = (30 + x)(400 - 10x)$

$$\Rightarrow y = 1200 + 100x - 10x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 100 - 20x \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = -20$$

$$\text{সর্বোচ্চ ফলনের জন্য}, \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 100 - 20x = 0 \\ \Rightarrow x = 5$$

$$\text{এক্ষেত্রে}, \frac{d^2y}{dx^2} < 0.$$

$x = 5$ হলে ফলন সর্বোচ্চ হবে। অর্থাৎ আমের
সর্বোচ্চ ফলন পাওয়ার জন্য প্রতি একরে $(30 + 5)$
= 35 টি গাছ থাকা উচিত।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ

$$1. y = \cos x + \sin x \text{ হলে } \frac{d^2y}{dx^2} = ? \quad [\text{CU 07-08}]$$

$$Sol'' . \frac{dy}{dx} = -\sin x + \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x - \sin x$$

$$2. \text{ কি শর্তে } \frac{d^n}{dx^n} (ax + b)^m = 0$$

[SU 08-09; CU 03-04]

$$Sol'' n > m$$

$$3. y = x^n \text{ ফাংশনের } (n+1) \text{ তম অশ্তরক সহগ
কত?} \quad [\text{CU 07-08}]$$

$$Sol'' y_n = n! \quad y_{n+1} = 0$$

$$4. y = e^{ax} \text{ ফাংশনের } y_n \text{ কত হবে?} \quad [\text{CU 06-07}]$$

$$Sol'' y_n = a^n e^{ax}$$

$$5. y = (2x - 5)^3 \text{ হলে } \frac{d^3y}{dx^3} \text{ কত?} \quad [\text{IU 02-03}]$$

$$Sol'' \frac{d^3y}{dx^3} = {}^3P_3 \cdot 2^3 (2x - 5)^{3-3} = 6 \cdot 8 = 48$$

$$6. x^2 + y^2 = 25 \text{ হলে } (3, -4) \text{ বিন্দুতে } \frac{dy}{dx} \text{ কত?} \quad [\text{DU 01-02; NU 06-07}]$$

$$Sol'' 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$(3, -4) \text{ বিন্দুতে } \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}$$

৭. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে
নতির পরিমাণ কত? [DU 00-01]

$$Sol' . \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 12 = -12 \text{ (মূলবিন্দুতে)}$$

৮. $3x^2 - 7y^2 + 4xy - 8x = 0$ বক্ররেখাটির
(-1, 1) বিন্দুতে অঙ্কিত সর্পকের চাল কত? [DU 02-03]

$$Sol' . 6x - 14y \frac{dy}{dx} + 4x \frac{dy}{dx} + 4y - 8 = 0$$

$$\Rightarrow -6 - 14 \frac{dy}{dx} - 4 \frac{dy}{dx} + 4 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{10}{-18} = -\frac{5}{9}$$

৯. $y = x^{\frac{1}{2}}$ বক্ররেখার ঘেবিন্দুতে অঙ্কিত সর্পক x-
অক্ষের যোগবোধক দিকের সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে
তা হল- [CU 07-08, 04-05]

$$Sol' . \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \therefore \frac{1}{2\sqrt{x}} = \tan 45^0 = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ এবং } y = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \therefore \text{বিন্দু } \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

১০. $y = x^2 + 1$ হলে কোন বিন্দুতে y ও $\frac{dy}{dx}$ এর মান
সমান? [IU 07-08]

$$Sol' . \frac{dy}{dx} = 2x \quad y = \frac{dy}{dx} \Rightarrow x^2 + 1 = 2x$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1, y = 1 + 1 = 2$$

বিন্দুটি (1, 2)

১১. কোন গতিশীল বস্তু, সেকেন্ডে $5t + 2t^2$ ফুট
দ্রুত অতিক্রম করলে ৩ সেকেন্ড পর তার গতিবেগ কত
হবে? [KU 06-08]

$$Sol' . S = 5t + 2t^2 \Rightarrow \frac{ds}{dt} = v = 5 + 4t$$

$$3 \text{ সেকেন্ড পর গতিবেগ} = 5 + 12 = 17 \text{ ft/sec}$$

ব্যবহারিক অনুশীলনী

১. $x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x) = \sin x$ ফাংশনের
লেখকে অসম্ভাব্যে ঐ বিন্দুতে সর্পকের লেখ দ্বারা
স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন কর।

পরীক্ষণের নাম : $x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x) = \sin x$
ফাংশনের লেখকে অসম্ভাব্যে ঐ বিন্দুতে সর্পকের লেখ দ্বারা
স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন।

মূলত : $x = x_0$ বিন্দুর সন্নিকটে $f(x)$ ফাংশনকে
অসম্ভাব্যে ঐ বিন্দুতে সর্পক দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন
করার সূত্র, $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

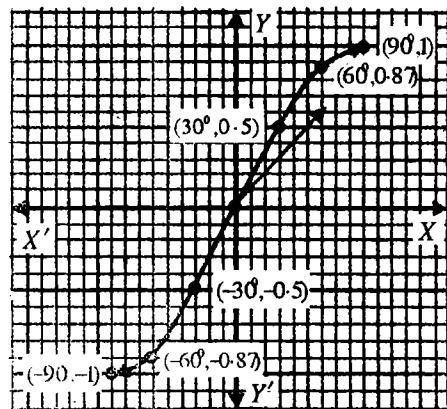
প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেসিল (ii) স্টেক্স (iii) থাফ
পেগার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক
ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি :

১. একটি দক্ষ কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X'OX
ও YOY' আঁকি।

২. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য
 $f(x) = \sin x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0°	$\pm 30^{\circ}$	$\pm 60^{\circ}$	$\pm 90^{\circ}$
y	0	$\pm .5$	$\pm .87$	± 1



৩. x অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু $= 10^0$ ও y -
অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু $= 1$ একক
ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি
এবং সরু পেসিলের সাহায্যে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে
বক্রাকারে যোগ করে $y = f(x) = \sin x$ এর লেখ
অঙ্কন করি।

৪. $= 0$ বিন্দুতে সর্পক অঙ্কন করি।

হিসাব : $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$$f(0) = \sin 0 = 0, f'(0) = \cos 0 = 1$$

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ হতে পাই,

$$\sin x \approx 0 + 1(x - 0) = x$$

ফলাফল : $x = 0$ বিন্দুর সন্নিকটে $y = f(x) = \sin x$ ফাংশনের লেখকে অসম্ভাব্যে ঐ বিন্দুতে স্পর্শক $y = x$ এর লেখ দ্বারা স্থানীয়ভাবে প্রতিস্থাপন করা হল। অন্যভাবে বলা যায়, x এর মান 0 এর সন্নিকটে হলে $\sin x$ এর পরিমাণ x এর কাছাকাছি হবে।

২. $x = 2$ তে $y = x^2$ ফাংশনের লেখ অঙ্কন করে dy ও δy নির্ণয় করে লেখচিত্রে প্রদর্শন কর, যেখানে $dx = \delta x = 1$.

পরীক্ষণের নাম : $y = x^2$ ফাংশনের জন্য, $x = 2$ বিন্দুতে dy ও δy নির্ণয়, যেখানে $dx = \delta x = 1$ এবং লেখচিত্রে dy ও δy প্রদর্শন।

মূলতন্ত্র : স্বাধীন চলক ও অধীন চলকের অন্তরকের মধ্যকার স্পর্শক $dy = f'(x)dx$ এবং স্বাধীন চলকের অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তন δx এর জন্য অধীন চলকের অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তন $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেসিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনাইর (vi) টাঁদা (vii) পেসিল কম্পাস (viii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

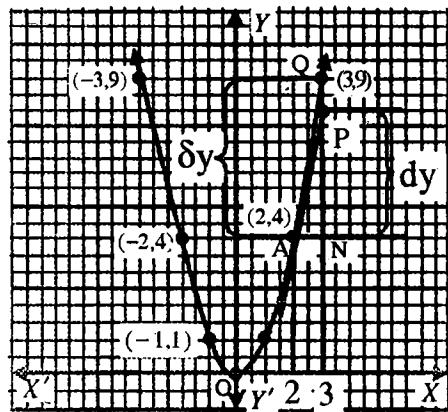
কার্যপদ্ধতি ১

১. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও $Y'OY'$ আঁকি।

২. নিচের তালিকায় x এর ডিম্ব ডিম্ব মানের জন্য $f(x) = x^2$ এর প্রতিবৃত্তী মান নির্ণয় করি :

x	0	± 1	± 2	± 3
$f(x) = x^2$	0	1	4	9

৩. x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্ণের 2 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাতৃত্ব বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সব পেসিলের সাহায্যে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্তাকারে যোগ করে $y = f(x) = x^2$ এর লেখ অঙ্কন করি।



৪. $A(2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন করি। $x = 3$ সরলরেখাকে স্পর্শকটি ও ফাংশনটি যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে।

হিসাব : $y = x^2$ হতে পাই, $\frac{dy}{dx} = 2x$.

$$\text{সূতরাঃ } dy = 2x \, dx = 2 \times 2 \times 1 = 4$$

$$\text{এবং } \delta y = f(x + \delta x) - f(x)$$

$$= (x + \delta x)^2 - (x)^2 = (2 + 1)^2 - 2^2$$

$$= 9 - 4 = 5$$

চিত্র হতে পাই, $AN = dx = \delta x = 1$, $PN = dy$ ও $QN = \delta y$

ফলাফল : $PN = dy = 4$ ও $QN = \delta y = 5$ লেখচিত্রে প্রদর্শন করা হলো।

নিচের যোগজুলির মান নির্ণয় কর :

$$1.(a) \int \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x} \right) dx$$

[জ.'০৫]

$$= \int (1 + x^{-2}) dx = x + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c$$

$$= x - \frac{1}{x} + c$$

$$1.(b) \int \frac{(e^x + 1)^2}{\sqrt{e^x}} dx$$

[জ.'০২]

$$= \int \frac{e^{2x} + 2e^x + 1}{e^{\frac{x}{2}}} dx$$

$$= \int (e^{2x-\frac{x}{2}} + 2e^{x-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) dx$$

$$= \int (e^{\frac{3x}{2}} + 2e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) dx$$

$$= \frac{e^{\frac{3x}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2 \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3} e^{\frac{3x}{2}} + 4e^{\frac{x}{2}} - 2e^{-\frac{x}{2}} + c$$

$$1.(c) \int (1 + x^{-1} + x^{-2}) dx$$

[জা.'০৬]

$$= \int (1 + \frac{1}{x} + x^{-2}) dx$$

$$= x + \ln x + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = x + \ln x - x^{-1} + c$$

নিয়ম ৪ হয়ের অনুবদ্ধি রাখি আরা শব্দ ও হরকে গুণ করে এবং হরকে \sqrt{x} গুণ করতে হয়।

$$2.(a) \int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{x - (x-1)} dx = \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{x - x + 1} dx$$

$$= \int \{x^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}\} dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{2}{3} [x^{3/2} + (x-1)^{3/2}] + c$$

$$2.(b) \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

[জা.'০২; পি.'১০]

$$= \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{(x+1) - (x-1)} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int [(x-1)^{1/2} - (x+1)^{1/2}] dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right] + c$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] + c$$

$$= \frac{1}{3} [(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}] + c \quad (\text{Ans.})$$

$$3.(a) \int \frac{dx}{1 - \sin x}$$

[জ.'০৭]

$$= \int \frac{(1 + \sin x) dx}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$$

$$= \int \frac{(1 + \sin x) dx}{1 - \sin^2 x} = \int \frac{(1 + \sin x) dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \sec x \tan x) dx \\ = \tan x + \sec x + c$$

3(b) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ [ষ. '০৭, '১৩; চ. '১০ প.ভ.প. '০৩]

$$= \int \frac{(1-\sin x)dx}{(1+\sin x)(1-\sin x)} \\ = \int \frac{(1-\sin x)dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)dx}{\cos^2 x} \\ = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx \\ = \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx \\ = \tan x - \sec x + c$$

3. (c) $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$ [কৰ. '০৮]

$$= \int \frac{dx}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2} \int \sec^2 x dx = \frac{1}{2} \tan x + c$$

3(d) $\int \sqrt{1+\cos x} dx$ [প.ভ.প. '০৮]

$$= \int \sqrt{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} dx \\ = 2\sqrt{2} \int \cos \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) \quad [\quad d\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} dx \quad] \\ = 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + c$$

3(e) $\int \sqrt{1-\cos 2x} dx$ [চ. '০৫, '০৯; সি. '০৬; ব. '০৮]

$$= \int \sqrt{2\sin^2 x} dx = \int \sqrt{2} \sin x dx \\ = \sqrt{2}(-\cos x) + c = -\sqrt{2} \cos x + c$$

3(f) $\int \sqrt{1-\cos 4x} dx$ [চ. '০৭]

$$= \int \sqrt{2\sin^2 2x} dx = \int \sqrt{2} \sin 2x dx \\ = \sqrt{2} \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) + c = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x + c$$

3(g) $\int \sec x(\sec x - \tan x) dx$ [ব. '১৩]

$$= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx \\ = \tan x - \sec x + c$$

4.(a) $\int \sqrt{1-\sin 2x} dx$

$$= \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x} dx \\ = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx \\ = \int (\sin x - \cos x) dx \text{ বা } \int (\cos x - \sin x) dx \\ = -\cos x - \sin x + c \text{ বা } \sin x + \cos x + c$$

4.(b) $\int \frac{-\cos 2x}{\sqrt{1-\sin 2x}} dx$

$$= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x}} dx \\ = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}} dx \\ = \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} dx \\ \text{বা, } \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x - \cos x} dx \\ = \int (\cos x + \sin x) dx \text{ বা, } - \int (\cos x + \sin x) dx \\ = \sin x - \cos x \text{ বা, } -(\sin x - \cos x)$$

4(c) $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$ [প.ভ.প. '৯০]

$$= \int (\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) dx \\ = \int (1 + \sin 2x) dx = x + \frac{1}{2} \cos 2x + c$$

5(a) $\int \sin 5x \sin 3x dx$ [ব. '০৮, '১২; ব. '১০; চ. '১২]

$$= \int \frac{1}{2} \{ \cos(5x - 3x) - \cos(5x + 3x) \} dx \\ = \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x) dx \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 8x}{8} \right) + c \\ = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + c$$

5(b) $\int \sin 4x \sin 2x \, dx$ [ব.'০৪; রা.৮০৬, সি.১১]

$$= \int \frac{1}{2} \{ \cos(4x - 2x) - \cos(4x + 2x) \} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 6x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 6x}{6} \right) + c$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{12} \sin 6x + c$$

5(c) $\int 3 \sin 3x \cos 4x \, dx$ [সি.০২, '০৩; ব.'০৬, '১০]

$$= \int \frac{3}{2} \{ \sin(4x + 3x) - \sin(4x - 3x) \} \, dx$$

$$= \frac{3}{2} \int (\sin 7x - \sin x) \, dx$$

$$= \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{7} \cos 7x + \cos x \right) + c$$

$$= \frac{3}{14} (7 \cos x - \cos 7x) + c$$

5.(d) $\int \sin 3x \cos 5x \, dx$ [কু.০৬; সি.,সি.১২]

$$= \int \frac{1}{2} \{ \sin(5x + 3x) - \sin(5x - 3x) \} \, dx$$

$$= \int \frac{1}{2} (\sin 8x - \sin 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{8} \cos 8x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) + c$$

$$= \frac{1}{16} (4 \cos 2x - \cos 8x) + c$$

5(e) $\int 4 \cos 4x \sin 5x \, dx$ [রা.০৩]

$$= \int 2 \{ \sin(5x + 4x) + \sin(5x - 4x) \} \, dx$$

$$= \int 2(\sin 9x + \sin x) \, dx$$

$$= 2 \left(-\frac{1}{9} \cos 9x - \cos x \right) + c$$

$$= -\frac{2}{9} (\cos 9x + 9 \cos x) + c$$

5(f) $\int 5 \cos 5x \sin 4x \, dx$ [জ.০৬; পি.,সি.১৮]

$$= \int \frac{5}{2} \{ \sin(5x + 4x) - \sin(5x - 4x) \} \, dx$$

$$= \int \frac{5}{2} (\sin 9x - \sin x) \, dx$$

$$= \frac{5}{2} \left(-\frac{1}{9} \cos 9x + \cos x \right) + c$$

$$= \frac{5}{18} (9 \cos x - \cos 9x) + c$$

5(g) $\int \sin px \cos qx \, dx, (p > q)$

[জ.০৩; সি.০৭]

$$= \int \frac{1}{2} \{ \sin(p+q)x + \sin(p-q)x \} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\cos(p+q)x}{p+q} - \frac{\cos(p-q)x}{p-q} \right\} + c$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos(p+q)x}{p+q} + \frac{\cos(p-q)x}{p-q} \right\} + c$$

6.(a) $\int \cos^2 x \, dx$

[ট.০৮]

$$= \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \{ \int dx + \int \cos 2x \, dx \}$$

$$= \frac{1}{2} (x + \frac{\sin 2x}{2}) + c$$

6(b) $\int \cos^2 2x \, dx$

[জ.০০]

$$= \int \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) \, dx = \frac{1}{2} (x + \frac{\sin 4x}{4}) + c$$

6(c) $\int (2 \cos x + \sin x) \cos x \, dx$

[জ.০৫]

$$= \int (2 \cos^2 x + \sin x \cos x) \, dx$$

$$= \int (1 + \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x) \, dx$$

$$= x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} (-\frac{1}{2} \cos 2x) + c$$

$$= x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + c$$

$$6(d) \int \sin^3 2x \, dx$$

$$= \int \frac{1}{4} (3 \sin 2x - \sin 6x) \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ 3 \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) + \frac{1}{6} \cos 6x \right\} + c$$

$$= \frac{1}{8} \left(-3 \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 6x \right) + c$$

$$6(e) \int \sin^4 x \, dx$$

[জ. '০১]

$$\sin^4 x \, dx = (\sin^2 x)^2 = \left\{ \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \right\}^2$$

$$= \frac{1}{4} \{1 - 2 \cos x + \cos^2 2x\}$$

$$= \frac{1}{4} \{1 - 2 \cos 2x + \frac{1}{2} (1 + \cos 4x)\}$$

$$= \frac{1}{4} [1 - 2 \cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} - 2 \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right]$$

$$\int \sin^4 x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} x - 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x \right) + c$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} x - \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) + c$$

$$6(f) \int \cos^4 x \, dx \quad [\text{জ. '০৭, '১৮; সি. '০৮; নি. '১৩; জ. '১৮}]$$

$$\cos^4 x \, dx = (\cos^2 x)^2 = \left\{ \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \right\}^2$$

$$= \frac{1}{4} \{1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x\}$$

$$= \frac{1}{4} \{1 + 2 \cos 2x + \frac{1}{2} (1 + \cos 4x)\}$$

$$= \frac{1}{4} [1 + 2 \cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} + 2 \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right]$$

$$\int \cos^4 x \, dx$$

$$= \int \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right) \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} x + 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x \right) + c$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} x + \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) + c \quad (\text{Ans.})$$

অতিরিক্ত অশ্ব (সমাধানসহ)

নিচের যোগানগুলি মান নির্ণয় কর : ।

$$1(a) \int \frac{4(\sqrt[3]{x^2} + 4)^2}{3\sqrt[3]{x}} \, dx = \frac{4}{3} \int \frac{(x^{\frac{2}{3}} + 4)^2}{x^{\frac{1}{3}}} \, dx$$

$$= \frac{4}{3} \int \frac{x^{\frac{4}{3}} + 8x^{\frac{2}{3}} + 16}{x^{\frac{1}{3}}} \, dx$$

$$= \frac{4}{3} \int (x^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} + 8x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} + 16x^{-\frac{1}{3}}) \, dx$$

$$= \frac{4}{3} \int (x + 8x^{\frac{1}{3}} + 16x^{-\frac{1}{3}}) \, dx$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{2} + 8 \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + 16 \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \right) + c$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2} + 8 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{4}{3}} + 16 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right) + c$$

$$= \frac{2}{3} (x^2 + 12x^{4/3} + 48x^{2/3}) + c$$

$$1(b) \int \frac{a \cot x + b \tan^2 x - c \sin^2 x}{\sin x} \, dx$$

$$= \int (a \frac{\cot x}{\sin x} + b \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin x} - c \sin x) \, dx$$

$$= \int (a \cot x \cosec x + b \tan x \sec x - c \sin x) \, dx$$

$$= -a \cos x \csc x + b \sec x + c \cos x + c_1$$

$$\begin{aligned}
 2(a) & \int \frac{\cos 2x - \cos 2\theta}{\cos x - \cos \theta} dx \\
 &= \int \frac{2\cos^2 x - 1 - (2\cos^2 \theta - 1)}{\cos x - \cos \theta} dx \\
 &= 2 \int \frac{\cos^2 x - \cos^2 \theta}{\cos x - \cos \theta} dx \\
 &= 2 \int \frac{(\cos x + \cos \theta)(\cos x - \cos \theta)}{\cos x - \cos \theta} dx \\
 &= 2 \int (\cos x + \cos \theta) dx \\
 &= 2 \left(\int \cos x dx + \cos \theta \int dx \right) \\
 &= 2(\sin x + \cos \theta \cdot x) + c \\
 &= 2(\sin x + x \cos \theta) + c \\
 2(b) & \int (\sec x + \tan x)^2 dx \\
 &= \int (\sec^2 x + \tan^2 x + 2 \sec x \tan x) dx \\
 &= \int (\sec^2 x + \sec^2 x - 1 + 2 \sec x \tan x) dx \\
 &= \int (2 \sec^2 x - 1 + 2 \sec x \tan x) dx \\
 &= 2 \tan x - x + 2 \sec x + c \\
 3(a) & \int \sqrt{1 \pm \sin x} dx \\
 &= \int \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \pm 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx \\
 &= \int \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} \pm \cos \frac{x}{2}\right)^2} dx \\
 &= \int \left(\sin \frac{x}{2} \pm \cos \frac{x}{2}\right) dx \text{ ev } \int \left(\cos \frac{x}{2} \pm \sin \frac{x}{2}\right) dx \\
 &= 2\left(-\cos \frac{x}{2} \pm \sin \frac{x}{2}\right) + c \\
 &\quad \text{বা } 2\left(\sin \frac{x}{2} \mp \cos \frac{x}{2}\right) + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3(b) & \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx \\
 &= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}} dx \\
 &= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2}} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int dx = x + c \\
 3(c) & \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} (1 - \sin 2x) dx \\
 &= \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} (\cos x - \sin x)^2 dx \\
 &= \int (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) dx \\
 &= \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int \cos 2x dx \\
 &= \frac{1}{2} \sin 2x + c \\
 3(d) & \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx \\
 &= \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right) dx \\
 &= \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + c \\
 4 & \int \cos^3 x dx = \int \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 3x) dx \\
 &= \frac{1}{4} (3 \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x) + c
 \end{aligned}$$

গণিতশালা X B

নিচের যোগজগুলি নির্ণয় কর :

$$\begin{aligned}
 1.(a) & \int \frac{1}{\sqrt[3]{(1-4x)}} dx = \int \frac{1}{(1-4x)^{1/3}} dx \\
 &= \int (1-4x)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{(1-4x)^{\frac{1}{3}+1}}{(-\frac{1}{3}+1)(-4)} + c \\
 &= \frac{(1-4x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}(-4)} + c = -\frac{3}{8}(1-4x)^{\frac{2}{3}} + c
 \end{aligned}$$

$$1(b) \int \frac{e^{5x} + e^{3x}}{e^x + e^{-x}} dx \quad [\text{এ.ভ.গ. '১২}]$$

$$= \int \frac{e^{4x}(e^x + e^{-x})}{e^x + e^{-x}} dx = \int e^{4x} dx = \frac{e^{4x}}{4} + c$$

$$1(c) \text{ ধরি, } I = \int \sin x^0 dx \quad [\text{ব. '০৮}]$$

$$\text{এবং } x^{\circ} = \frac{\pi x}{180} = z$$

$$\text{তাহলে } \frac{\pi}{180} dx = dz \Rightarrow dx = \frac{180}{\pi} dz \text{ এবং}$$

$$I = \frac{180}{\pi} \int \sin z dz = \frac{180}{\pi} (-\cos z) + c$$

$$\int \sin x^{\circ} dx = -\frac{180}{\pi} \cos x^{\circ} + c$$

$$2(a) \text{ ধরি, } I = \int \sin 5x dx \quad [\text{সি.}'05]$$

$$\text{এবং } 5x = z \text{ তাহলে } 5dx = dz \Rightarrow dx = \frac{1}{5} dz$$

$$\text{এবং } I = \frac{1}{5} \int \sin z dz = -\frac{1}{5} \cos z + c$$

$$\therefore \int \sin 5x dx = -\frac{1}{5} \cos 5x + c$$

$$2(b) \text{ ধরি, } I = \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad [\text{কু.}'00]$$

$$\text{এবং } \sqrt{x} = z \text{ তাহলে } \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dz \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dz$$

$$\text{এবং } I = 2 \int \cos z dz = 2 \sin z + c$$

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \sin \sqrt{x} + c$$

$$2(c) \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx \quad [\text{জ.}'08; \text{ষ.}'09]$$

$$\text{ধরি, } \frac{1}{x} = z \quad -x^{-2} dx = dz \Rightarrow \frac{1}{x^2} dx = -dz$$

$$\therefore \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \int \frac{\sin(1/x)}{x^2} dx$$

$$= - \int \sin z dz = -(-\cos z) + c = \cos \frac{1}{x} + c$$

$$3. (a) \text{ ধরি, } I = \int x e^{x^2} dx \quad [\text{ব.}'03]$$

$$\text{এবং } x^2 = z \text{ তাহলে, } 2x dx = dz \Rightarrow x dx = \frac{dz}{2}$$

$$\text{এবং } I = \frac{1}{2} \int e^z dz = \frac{1}{2} e^z + c = e^{x^2} + c$$

$$3(b) \text{ ধরি, } I = \int x^2 a^{x^3} dx \quad [\text{মা.}'09]$$

$$\text{এবং } x^3 = z \text{ তাহলে, } 3x^2 dx = dz \Rightarrow x dx = \frac{dz}{3}$$

$$\text{এবং } I = \frac{1}{3} \int a^z dz = \frac{a^z}{3 \ln a} + c = \frac{a^{x^3}}{3 \ln a} + c$$

$$3.(c) \int e^x \tan e^x \sec e^x dx$$

$$= \int \sec e^x \tan e^x d(e^x) \quad [d(e^x) = e^x dx]$$

$$= \sec e^x + c$$

$$3(d) \text{ ধরি, } I = \int e^{2x} \tan e^{2x} \sec e^{2x} dx \quad [\text{চ.}'09]$$

$$\text{এবং } e^{2x} = z \text{ তাহলে, } 2e^{2x} dx = dz \text{ এবং}$$

$$I = \frac{1}{2} \int \sec z \tan z dz = \frac{1}{2} \sec z + c$$

$$\therefore \int e^{2x} \tan e^{2x} \sec e^{2x} dx = \frac{1}{2} \sec e^{2x} + c$$

$$4. (a) \text{ ধরি, } I = \int \sin^2 x \cos x dx \quad [\text{জ.}'02]$$

$$\text{এবং } \sin x = z \text{ তাহলে, } \cos x dx = dz \text{ এবং}$$

$$I = \int z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 + c = \frac{1}{3} \sin^3 x + c$$

$$4(b) \text{ ধরি, } I = \int (1 + \cos x)^3 \sin x dx \quad [\text{কু.}'03]$$

$$\text{এবং } 1 + \cos x = z \text{ তাহলে, } -\sin x dx = dz \text{ এবং}$$

$$I = - \int z^3 dz = -\frac{z^4}{4} + c = -\frac{(1 + \cos x)^4}{4} + c$$

$$4(c) \text{ ধরি, } I = \int \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx \quad [\text{চ.}'03]$$

$$\text{এবং } \sin \frac{x}{2} = z \text{ তাহলে, } \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} dx = dz \text{ এবং}$$

$$I = 2 \int z^2 dz = 2 \cdot \frac{1}{3} z^3 + c = \frac{2}{3} \sin^3 \frac{x}{2} + c$$

$$4(d) \text{ ধরি, } I = \int \sqrt{1 - \sin x} \cos x dx \quad [\text{সি.}'01]$$

$$\text{এবং } 1 - \sin x = z \text{ তাহলে, } -\cos x dx = dz \text{ এবং}$$

$$I = - \int z^{\frac{1}{2}} dz = - \frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\therefore \int \sqrt{1-\sin x} \cos x dx = -\frac{2}{3}(1-\sin x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$4(e) \int \frac{\cos x dx}{(1-\sin x)^2} \quad [\text{রা. }'08; \text{কু. }'06; \text{ব. }'11]$$

ধরি, $1-\sin x = z$. তাহলে, $-\cos dx = dz$ এবং

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x dx}{(1-\sin x)^2} &= - \int \frac{dz}{z^2} = - \int z^{-2} dz \\ &= -\frac{z^{-2+1}}{-2+1} + c = z^{-1} + c = \frac{1}{1-\sin x} + c \end{aligned}$$

$$4(f) \int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6} dx \quad [\text{ব. }'09; \text{কু. }'08; \text{রা. }'11]$$

ধরি, $\tan^{-1} x^3 = z$

$$\frac{1}{1+(x^3)^2} \cdot 3x^2 dx = dz$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1+x^6} dx = \frac{1}{3} dz$$

$$\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6} dx = \frac{1}{3} \int z dz$$

$$= \frac{1}{3} \frac{z^2}{2} + c = \frac{1}{6} (\tan^{-1} x^3)^2 + c \quad (\text{Ans.})$$

$$5(a) \text{ ধরি, } I = \int \frac{1}{x(1+\ln x)^3} dx \quad [\text{জ. }'01]$$

এবং $1+\ln x = z$. তাহলে, $\frac{1}{x} dx = dz$ এবং

$$I = \int \frac{1}{z^3} dz = \int z^{-3} dz = \frac{z^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{2z^2} + c.$$

$$\therefore \int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = -\frac{1}{2(1+\ln x)^2} + c$$

$$5(b) \text{ ধরি, } I = \int \frac{(\log_{10} x)^2}{x} dx \quad [\text{প.ভ.প. }'87]$$

এবং $\log_{10} x = z$. তাহলে, $\frac{1}{x \ln 10} dx = dz$ এবং

$$I = \ln 10 \int z^2 dz = \ln 10 \cdot \frac{1}{3} z^3 + c$$

$$\therefore \int \frac{(\log_{10} x)^2}{x} dx = \frac{\ln 10}{3} (\log_{10} x)^3$$

$$6.(a) \text{ ধরি, } I = \int e^{\tan^{-1} x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

[দ. '09; মা. '12, '18]

এবং $\tan^{-1} x = z$. তাহলে, $\frac{1}{1+x^2} dx = dz$ এবং

$$I = \int e^z dz = e^z + c = e^{\tan^{-1} x} + c$$

$$6(b) \int e^{\sin^{-1} x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad [\text{চ. }'01; \text{প.ভ.প. }'06]$$

ধরি, $\sin^{-1} x = z$. তাহলে, $\frac{1}{1-x^2} dx = dz$ এবং

$$\begin{aligned} \int e^{\sin^{-1} x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int e^z dz = e^z + c \\ &= e^{\sin^{-1} x} + c \end{aligned}$$

$$6(c) \text{ ধরি, } I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad [\text{য. }'06; \text{মি. }'11; \text{জ. }'18]$$

এবং $1-x^2 = z$. তাহলে, $-2x dx = dz$ এবং

$$I = -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{z} + c$$

$$\therefore \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + c$$

$$6(d) \text{ ধরি, } I = \int \frac{\tan(\sin^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{এবং}$$

$\sin^{-1} x = z$ [কু. '09; ব. '11, '18; য. '09, '13; জ. '13]

তাহলে, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dz$ এবং

$$\begin{aligned} \therefore I &= \int \tan z dz = \ln |\sec z| + c \\ &= \ln |\sec(\sin^{-1} x)| + c \end{aligned}$$

7(a) ধরি, $I = \int \frac{\sin x}{3+4\cos x} dx$ [চ. '০৭, ব. '১৩]

এবং $3+4\cos x = z$. তাহলে, $-4\sin x dx = dz$

$$\text{এবং } I = -\frac{1}{4} \int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{4} \ln |3+4\cos x| + c$$

7(b) ধরি, $I = \int \frac{\sin x}{1+2\cos x} dx$ [ঝ. '০৩]

এবং $1+2\cos x = z$. তাহলে, $-2\sin x dx = dz$

$$\text{এবং } I = -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2} \ln |1+2\cos x| + c$$

7(c) $\int \frac{\sec^2 x}{3-4\tan x} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{-4\sec^2 x dx}{3-4\tan x}$

$$= -\frac{1}{4} \ln |3-4\tan x| + c$$

7(d) ধরি, $I = \int \frac{dx}{(1+x^2)\tan^{-1} x}$

[ব. '০৮; চ. '১০; সি. '১১; কু. '১৩]

এবং $\tan^{-1} x = z$. তাহলে, $\frac{1}{1+x^2} dx = dz$ এবং

$$I = \int \frac{dz}{z} = \ln |z| + c = \ln |\tan^{-1} x| + c$$

8 $\int \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$ [ব. '০৯; কু. '১২]

ধরি, $1+\ln x = z$. তাহলে, $\frac{1}{x} dx = dz$ এবং

$$\int \frac{1}{x(1+\ln x)} dx = \int \frac{dz}{z} = \ln |z| + c$$

$$= \ln (1+\ln x) + c$$

9.(a) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{(e^{3x}-0)dx}{e^{3x}-1}$

$$= \frac{1}{3} \ln |e^{3x}-1| + c$$

9.(b) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{d(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x}}$ [সি. '১০]

$$= \ln |e^x + e^{-x}| + c$$

9(c) $\int \frac{1}{e^x+1} dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)} dx$ [ষ. '১০]

$$= \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = - \int \frac{(0-e^{-x})dx}{1+e^{-x}}$$

$$= -\ln |1+e^{-x}| + c$$

10. (a) ধরি, $I = \int \frac{1}{\sqrt[3]{1-6x}} dx$ [প.ত.গ. '০৫]

এবং $1-6x = z$. তাহলে, $-6dx = dz$

$$I = -\frac{1}{6} \int \frac{1}{\sqrt[3]{z}} dz = -\frac{1}{6} \int \frac{dz}{z^{1/3}} = -\frac{1}{6} \int z^{-1/3} dz$$

$$= -\frac{1}{6} \frac{z^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = -\frac{1}{6} \frac{z^{2/3}}{\frac{2}{3}} + c$$

$$= -\frac{1}{4} (1-6x)^{2/3} + c$$

10(b) ধরি, $I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-2x^4}}$ [চ. '০১]

এবং $1-2x^4 = z$. তাহলে, $-8x^3 dx = dz$ এবং

$$I = -\frac{1}{8} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{z} + c = -\frac{1}{4} \sqrt{z} + c$$

$$\therefore \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-2x^4}} = -\frac{1}{4} \sqrt{1-2x^4} + c$$

10(c) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\tan x - 1}}$ [সি. '০২]

$$= \int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{\tan x - 1}} = \int \frac{(\sec^2 x - 0)dx}{\sqrt{\tan x - 1}}$$

$$= 2\sqrt{\tan x - 1} + c \quad [\because \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}]$$

10(d) ধরি, $I = \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$ [কু. '০৫; ঝ. '১০]

এবং $\sin x = z$. তাহলে, $\cos x dx = dz$ এবং

$$I = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + c = 2\sqrt{\sin x} + c$$

ধন্যবাদ X B
বইয়ের কম

$$10(e) \text{ ধরি, } I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$$

এবং $1+\ln x = z$. তাহলে, $\frac{1}{x} dx$ এবং

$$I = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + c = 2\sqrt{1+\ln x} + c$$

$$11(a) \int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{(2x)^2+3^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{2x}{3} + c = \frac{1}{6} \tan^{-1} \frac{2x}{3} + c$$

$$11(b) \int \frac{xdx}{x^4+1} \quad [বা.'০৮; ব.'১১]$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1}(x^2) + c$$

$$11(c) \text{ ধরি, } I = \int \frac{3x^2}{1+x^6} dx \quad [বা.'০১, চ.'০৮]$$

এবং $x^3 = z$. তাহলে, $3x^2 dx = dz$ এবং

$$I = \int \frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1} z + c$$

$$\int \frac{3x^2}{1+x^6} dx = \tan^{-1}(x^3) + c$$

$$11(d) \text{ ধরি, } I = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \quad [সি.'০৮]$$

এবং $e^x = z$. তাহলে, $e^x dx = dz$ এবং

$$I = \int \frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1} z + c = \tan^{-1}(e^x) + c.$$

$$11(e) \int \frac{5e^{2x}}{1+e^{4x}} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2e^{2x} dx}{1+(e^{2x})^2} \quad [চ.'০১, '১১]$$

$$= \frac{5}{2} \tan^{-1}(e^{2x}) + c$$

$$11(f) \int \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx \quad [চি.'০৬; ব.'০৫, '১২; বা.'০৭,$$

'১৮; ব.'০৫, '০৭, '০৯; চ.'০৮; কু.'১২, '১৪; দি.'১৩; মা.'১৪]

$$= \int \frac{e^x}{e^x(e^x+e^{-x})} dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2+1} dx$$

ধরি, $e^x = z$. তাহলে, $e^x dx = dz$ এবং

[কু.'০৩]

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx = \int \frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1} z + c \\ = \tan^{-1}(e^x) + c$$

$$12. (a) \int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}} = \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(x-\frac{1}{2})^2} \quad [\because d(x-\frac{1}{2})=dx]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}/2} \tan^{-1} \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2} + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$$

$$12(b) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+13-4}}$$

$$= \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+3^2}}$$

$$= \ln |\sqrt{(x+2)^2+3^2} + x+2| + c$$

$$= \ln |\sqrt{x^2+4x+13} + x+2| + c$$

$$12. (c) \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} \quad [ষ.'০২; প্রতিশ.'০৬]$$

ধরি, $x = a \tan \theta$. তাহলে $dx = a \sec^2 \theta d\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \int \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{(a^2+a^2 \tan^2 \theta)^{3/2}}$$

$$= \int \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{a^3(1+\tan^2 \theta)^{3/2}} = \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{a^2 \sec^3 \theta}$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \cos \theta d\theta = \frac{1}{a^2} \sin \theta + c = \frac{1}{a^2} \sin \theta + c = \frac{1}{a^2} \sin \theta + c$$

$$= \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + c$$

[চিত্র হতে $\tan \theta = \frac{x}{a}$ এবং $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$]

12(d) $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$

ধরি, $x = \sin \theta$. তাহলে $dx = \cos \theta d\theta$

$$\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$= \int \sin^2 \theta \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta$$

$$= \int \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \int \frac{1}{4} (2 \sin \theta \cos \theta)^2 d\theta$$

$$= \int \frac{1}{4} \sin^2 2\theta d\theta = \int \frac{1}{8} (1 - \cos 4\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \left(\theta - \frac{\sin 4\theta}{4} \right) + c = \frac{1}{8} \left(\theta - \frac{2 \sin 2\theta \cos 2\theta}{4} \right) + c$$

$$= \frac{1}{8} \left(\theta - \frac{2 \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta}{2} \right) + c$$

$$= \frac{1}{8} \left\{ \theta - \frac{2 \sin \theta \sqrt{1-\sin^2 \theta} (1-2\sin^2 \theta)}{2} \right\} + c$$

$$= \frac{1}{8} \{ \sin^{-1} x - x \sqrt{1-x^2} (1-2x^2) \} + c$$

13.(a) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{dx}{1^2-x^2}$ [ব.'০৩]

$$= \frac{1}{2.1} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c$$
 [সূত্র প্রয়োগ করে।]

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c$$

13(b) $\int \frac{dx}{9-4x^2} = \int \frac{dx}{3^2-(2x)^2}$ [সি.'১১]

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{3^2-(2x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2.3} \ln \left| \frac{3+2x}{3-2x} \right| + c$$

$$= \frac{1}{12} \ln \left| \frac{3+2x}{3-2x} \right| + c$$

13(c) ধরি, $I = \int \frac{dx}{9x^2-16}$ [ট. '০৩]

$$= \int \frac{dx}{(3x)^2-4^2} \text{ এবং } 3x = z \text{ . তাহলে, } 3dx = dz \text{ এবং }$$

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{dz}{z^2-4^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2.4} \ln \left| \frac{z-4}{z+4} \right| + c$$

$$\therefore \int \frac{dx}{9x^2-16} = \frac{1}{24} \ln \left| \frac{3x-4}{3x+4} \right| + c$$

13(d) $\int \frac{dx}{16-4x^2}$ [ক.'০০; সি.'০১]

$$= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{2^2-x^2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2.2} \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + c = \frac{1}{16} \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + c$$

13(e) $\int \frac{\cos x dx}{3+\cos^2 x}$ [প্র.ভ.গ.'০৫]

$$= \int \frac{\cos x dx}{3+1-\sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{2^2-(\sin x)^2}$$

$$= \frac{1}{2.2} \ln \left| \frac{2+\sin x}{2-\sin x} \right| + c = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+\sin x}{2-\sin x} \right| + c$$

13.(f) $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$ [ঝ. '০১; ঘ. '০২]

$$= \int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^x(e^x - e^{-x})} dx$$

$$= \int \frac{e^x}{(e^x)^2-1} dx = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2-1^2}$$

$$= \frac{1}{2.1} \ln \left| \frac{e^x-1}{e^x+1} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x-1}{e^x+1} \right| + c$$

14.(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5^2-x^2}}$ [সি.'১০; চ.'১৩]

$$= \sin^{-1} \frac{x}{5} + c$$

14(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$

$$[ঘ. '০৫; ক্ল. '০৯, '১০, '১৪; জ.ৰ. '১২; সি.'১৩]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3} dx}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} + c$$

$$14(c) \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x^2}}$$

[ସ.'୦୬, '୦୯; ରୀ.'୦୮; ଟା.'୦୯; ଚ.ୟ.'୧୧]

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - (2x)^2}}$$

ଧରି, $2x = z$. ତାହାରେ $2dx = dz$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - z^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{z}{\sqrt{5}} + c = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{2x}{\sqrt{5}} + c$$

$$14(d) \int \frac{dx}{\sqrt{25 - 16x^2}}$$

[ସି.'୦୮]

$$= \frac{1}{4} \int \frac{d(4x)}{\sqrt{5^2 - (4x)^2}}$$

[ୱ. $d(4x) = 4dx$]

$$= \frac{1}{4} \sin^{-1} \frac{4x}{5} + c.$$

$$14(e) \int \frac{\sin x}{\sqrt{5 - \cos^2 x}} dx$$

[କ୍ର.'୦୮]

$$= - \int \frac{-\sin x dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\cos x)^2}} = -\cos^{-1} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{5}} \right) + c$$

$$14(f) \text{ ଧରି, } I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^6}} dx$$

[ସ.'୦୮; ସ.'୧୧; ଦି.'୧୨]

ଏବଂ $x^3 = z$. ତାହାରେ, $3x^2 dx = dz$

$$I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - (x^3)^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{1}{3} \sin^{-1} z + c$$

$$= \frac{1}{3} \sin^{-1} x^3 + c$$

$$14(g) \int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

[ସ.'୦୯]

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x^2 - 2ax + a^2)}}$$

$$= \int \frac{(1-0)dx}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{x-a}{a} \right) + c$$

$$14(h) \text{ ଧରି, } I = \int \sqrt{1 - 9x^2} dx$$

[ସ.'୦୧]

ଏବଂ $3x = z$ ତାହାରେ, $3dx = dz$ ଏବଂ

$$I = \int \sqrt{1 - (3x)^2} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{1 - z^2} dz$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{z \sqrt{1 - z^2}}{2} + \frac{1}{2} \sin^{-1} z \right] + c$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{3x \sqrt{1 - (3x)^2}}{2} + \frac{1}{2} \sin^{-1}(3x) \right] + c$$

$$= \frac{1}{6} [3x \sqrt{1 - 9x^2} + \sin^{-1}(3x)] + c$$

$$15. \int \frac{3x - 2}{\sqrt{3 + 2x - 4x^2}} dx$$

$$= \int \frac{-\frac{3}{8}(-8x+2) + \frac{3}{4} - 2}{\sqrt{3 + 2x - 4x^2}} dx$$

$$= -\frac{3}{8} \int \frac{(-8x+2)dx}{\sqrt{3 + 2x - 4x^2}}$$

$$- \frac{5}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{-\{(2x)^2 - 2.2x \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2\} + 3 + \frac{1}{4}}}$$

$$= -\frac{3}{8} \int \frac{d(3 + 2x - 4x^2)}{\sqrt{3 + 2x - 4x^2}}$$

$$-\frac{5}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{\sqrt{13}}{2})^2 - (2x - \frac{1}{2})^2}}$$

$$= -\frac{3}{8} \cdot 2 \sqrt{3 + 2x - 4x^2}$$

$$-\frac{5}{4} \int \frac{\frac{1}{2} d(2x - \frac{1}{2})}{\sqrt{(\frac{\sqrt{13}}{2})^2 + (2x - \frac{1}{2})^2}}$$

$$= -\frac{3}{4} \sqrt{3 + 2x - 4x^2} - \frac{5}{8} \sin^{-1} \frac{2x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{13}}{2}} + c$$

$$= -\frac{3}{4} \sqrt{3+2x-4x^2} - \frac{5}{8} \sin^{-1} \frac{4x-1}{\sqrt{13}} + c$$

16.(a) $\int \frac{x+25}{x-25} dx$ [সি.'০৭]

$$\begin{aligned} &= \int \frac{x-25+50}{x-25} dx = \int \left(\frac{x-25}{x-25} + \frac{50}{x-25} \right) dx \\ &= \int \left(1 + \frac{50}{x-25} \right) dx = \int dx + 50 \int \frac{1}{x-25} dx \\ &= x + 50 \ln|x-25| + c \end{aligned}$$

16(b) $\int \frac{x^2 dx}{x^2 - 4}$ [সি.'০৮; ব.'০৮; রা.'০৮, '১১]

$$\begin{aligned} &= \int \frac{x^2 - 4 + 4}{x^2 - 4} dx = \int \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4} + \frac{4}{x^2 - 4} \right) dx \\ &= \int \left(1 + \frac{4}{x^2 - 4} \right) dx \\ &= x + \frac{4}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c = x + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \end{aligned}$$

16(c) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} dx$
[কু.'০৯; সি.'০৫, '১২; য.'০৯; ঢা.'১১; ব.'১৩]

$$\begin{aligned} &= \int \frac{x^2 - 4 + 3}{x^2 - 4} dx = \int \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4} + \frac{3}{x^2 - 4} \right) dx \\ &= \int \left(1 + \frac{3}{x^2 - 4} \right) dx = x + \frac{3}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \\ &= x + \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \end{aligned}$$

16(d) $\int \frac{xdx}{(1-x)^2} = - \int \frac{1-x-1}{(1-x)^2} dx$

$$= - \int \left\{ \frac{1-x}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2} \right\} dx$$

$$= - \int \frac{1}{1-x} dx + \int \frac{1}{(1-x)^2} dx$$

$$= - \int \frac{-d(1-x)}{1-x} - \int \frac{d(1-x)}{(1-x)^2}$$

$$= \ln|1-x| - \left(-\frac{1}{1-x} \right) + c$$

$$= \ln|1-x| + \frac{1}{1-x} + c$$

17(a) $\int \sqrt{\frac{5-x}{5+x}} dx = \int \frac{5-x}{\sqrt{5^2 - x^2}} dx$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{5}{\sqrt{5^2 - x^2}} dx - \int \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} dx \\ &= \int \frac{5}{\sqrt{5^2 - x^2}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{d(25 - x^2)}{\sqrt{25 - x^2}} \end{aligned}$$

$$= 5 \sin^{-1} \frac{x}{5} + \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{25 - x^2} + c$$

$$= 5 \sin^{-1} \frac{x}{5} + \sqrt{25 - x^2} + c$$

17(b) $\int x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int x \frac{\sqrt{1-x} \times \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} \times \sqrt{1-x}} dx$

$$= \int x \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{x - x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{(1-x^2) - \frac{1}{2}(-2x) - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int \sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{1-x^2} - \sin^{-1} x$$

$$= \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2} \sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2} - \sin^{-1} x + C$$

$$= \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{1}{2} \sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C \quad (\text{Ans.})$$

নিয়ম ৪: $\int \frac{1}{g(x)\sqrt{\varphi(x)}} dx$ আকারের জন্য,

(a) $g(x)$ ও $\varphi(x)$ উভয়ে এক্ষত হলে, $\varphi(x) = z^2$ ধরতে হয়।

(b) $g(x)$ এক্ষত ও $\varphi(x)$ দ্বিষত হলে, $g(x) = \frac{1}{z}$ ধরতে হয়।

(c) $g(x)$ দ্বিষত ও $\varphi(x)$ এক্ষত হলে, $\varphi(x) = z^2$ ধরতে হয়।

(d) $g(x)$ এবং $\varphi(x)$ উভয়ের দিঘাত হলে, $x = \frac{1}{z}$
ধরতে হয়।

$$(e) \int \frac{x}{g(x)\sqrt{\varphi(x)}} dx \text{ এবং } g(x) \text{ এবং } \varphi(x)$$

উভয়ের দিঘাত হলে, $\varphi(x) = z^2$ ধরতে হয়।

18.(a) ধরি, $I = \int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}$ এবং
[জ. '১০; ব. '১৩]

$x+1 = z^2$. তাহলে $dx = 2zdz$ এবং

$$I = \int \frac{2zdz}{(z^2 - 1 - 3)\sqrt{z^2}}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{2zdz}{(z^2 - 4)z} = 2 \int \frac{dz}{z^2 - 2^2} \\ = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z-2}{z+2} \right| + c = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}+2} \right| + c$$

$$18(b) \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-1}} \\ = \sec^{-1}(x-1) + c$$

নিয়ম ১: (a) যদি কোন যোগজ $\int \frac{a+bx^l}{p+qx^m} dx$ আকারের
থাকে, যেখানে l ও m উভয়ের ভাগ্নাংশ এবং তাদের হরের ল.স.গু.
ন হয়, তবে $x = z^n$ ধরতে হয়।

$$(b) \int \frac{dx}{x(a+bx^n)} \text{ আকারের যোগজের অন্য, } x^n = \frac{1}{z}$$

ধরতে হয়।

$$(c) \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^n}} \text{ আকারের যোগজের অন্য, } x^n = \frac{1}{z^2}$$

ধরতে হয়।

$$(d) \int \frac{dx}{x^m(a+bx)^n} \text{ আকারের যোগজের অন্য, } a+bx = zx \text{ ধরতে হয়।}$$

$$(e) \int \frac{dx}{(x-a)^m(x-b)^n} \text{ আকারের যোগজের অন্য,}$$

$$z = \frac{x-b}{x-a} \text{ ধরতে হয়।}$$

$$19.(a) \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{x^{1/2}}{1+x^{1/3}} dx \quad [চ. '০০]$$

ধরি, $x = z^6$. তাহলে, $dx = 6z^5 dz$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{\sqrt{z^6} 6z^5 dz}{1+\sqrt[3]{z^6}} \\ = \int \frac{z^3 \cdot 6z^5 dz}{1+z^2} = 6 \int \frac{z^8 dz}{1+z^2} \\ = 6 \int \frac{1}{z^2+1} \{z^6(z^2+1) - z^4(z^2+1) +$$

$$z^2(z^2+1) - (z^2+1) + 1\} dz$$

$$= 6 \int (z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{1+z^2}) dz$$

$$= 6(\frac{z^7}{7} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^3}{3} - z + \tan^{-1} z) + c$$

$$= \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{6}{3}x^{\frac{3}{6}} - 6x^{\frac{1}{6}} + \tan^{-1} x^{\frac{1}{6}} + c$$

$$19(b) \text{ ধরি, } I = \int \frac{dx}{x(4+5x^{20})} \text{ এবং } x^{20} = \frac{1}{z}$$

$$\text{তাহলে, } 20x^{19} dx = -\frac{dz}{z^2} \Rightarrow x^{19} dx = -\frac{dz}{20z^2}$$

www.boighar.com

$$\text{এবং } I = \int \frac{x^{19} dx}{x^{20}(4+5x^{20})} = \int \frac{\frac{-dz}{20z^2}}{\frac{1}{z}(4+5\frac{1}{z})}$$

$$= -\frac{1}{20} \int \frac{dz}{4z+5} = -\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{4} \int \frac{d(4z+5)}{4z+5}$$

$$= -\frac{1}{80} \ln |4z+5| + c = -\frac{1}{80} \ln \left| \frac{4}{x^{20}} + 5 \right| + c$$

$$19. (c) \text{ ধরি, } I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}} \quad [ক. '০১; ঝ. '১১]$$

$$\text{এবং } x^4 = \frac{1}{z^2}. \text{ তাহলে, } 4x^3 dx = -\frac{2dz}{z^3} \text{ এবং}$$

$$I = \int \frac{x^3 dx}{x^4 \sqrt{x^4-1}} = \int \frac{-\frac{2z^3}{z^3}}{\frac{1}{z^2} \sqrt{\frac{1}{z^2}-1}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{2} \cos^{-1} z + c$$

$$= \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{1}{x^2} \right) + c = \frac{1}{2} \sec^{-1}(x^2) + c$$

(d) ধরি, $I = \int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)^3}$ এবং $z = \frac{x-1}{x-2}$

$$\Rightarrow zx - 2z = x - 1 \Rightarrow x(1-z) = 1 - 2z$$

$$\Rightarrow x = \frac{1-2z}{1-z} \Rightarrow x-2 = \frac{1-2z}{1-z} - 2$$

$$\Rightarrow x-2 = \frac{1-2z-2+2z}{1-z} = -\frac{1}{1-z}$$

$$\Rightarrow dx = -\frac{dz}{(1-z)^2}$$

$$\therefore I = \int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2(x-2)^5} = \int \frac{-\frac{dz}{(1-z)^2}}{z^2 \cdot \frac{-1}{(1-z)^5}}$$

$$= \int \frac{(1-z)^3 dz}{z^2} = \int \frac{(1-3z+3z^2-z^3)dz}{z^2}$$

$$= \int \left(\frac{1}{z^2} - 3\frac{1}{z} + 3 - z \right) dz$$

$$= -\frac{1}{z} - 3\ln|z| + 3z - \frac{z^2}{2} + c$$

$$= -\frac{x-2}{x-1} - 3\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + 3\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2$$

20. (a) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(x^2+\frac{1}{x^2})} dx$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} dx = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + c$$

$$20(b) \int \frac{\bar{x}^2-1}{x^4+1} dx = \int \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^2(x^2+\frac{1}{x^2})} dx$$

$$= \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} dx = \int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}} \right| + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2+1-\sqrt{2}x}{x^2+1+\sqrt{2}x} \right| + c$$

(c) $\int \frac{x^2 dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+a^2)+(x^2-a^2)}{x^4+a^4} dx$

$$= \frac{1}{2} \left[\int \frac{x^2+a^2}{x^4+a^4} dx + \int \frac{x^2-a^2}{x^4+a^4} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int \frac{x^2(1+\frac{a^2}{x^2})}{x^2(x^2+\frac{a^4}{x^2})} dx + \int \frac{x^2(1-\frac{a^2}{x^2})}{x^2(x^2+\frac{a^4}{x^2})} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int \frac{d(x-\frac{a^2}{x})}{(x-\frac{a^2}{x})^2+(\sqrt{2}.a)^2} + \right.$$

$$\left. \int \frac{d(x+\frac{a^2}{x})}{(x+\frac{a^2}{x})^2-(\sqrt{2}.a)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}a} \tan^{-1} \frac{x-\frac{a^2}{x}}{\sqrt{2}a} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\sqrt{2}a} \ln \left| \frac{x+\frac{a^2}{x}-\sqrt{2}a}{x+\frac{a^2}{x}+\sqrt{2}a} \right| + c \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}a} \left[\tan^{-1} \frac{x^2-a^2}{\sqrt{2}ax} + \right]$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 + a^2 - \sqrt{2}ax}{x^2 + a^2 + \sqrt{2}ax} \right| + c = \frac{1}{128} (3x - \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x) + c$$

21(a) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ [ସ. '୦୮; ରା., ଜ. '୧୩]

$$= \int \frac{1}{4} (2 \sin x \cos x) dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} (x - \frac{1}{4} \sin 4x) + c$$

21(b) ଧରି, $I = \int \sin^3 x \cos^3 x dx$ [ସ. '୦୬]

$$= \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx \text{ ଏବଂ } \sin x = z.$$

ତାହାଲେ, $\cos x dx = dz$ ଏବଂ

$$I = \int z^3 (1 - z^2) dz = \int (z^3 - z^5) dz$$

$$= \frac{1}{4} z^4 - \frac{1}{6} z^6 + c = \frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + c$$

21(c) ଧରି, $I = \int \sin^3 x \cos^4 x dx$ [ରା. '୦୧]

$$= \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \sin x dx \text{ ଏବଂ } \cos x = z$$

ତାହାଲେ, $-\sin x dx = dz$ ଏବଂ

$$I = - \int (1 - z^2) z^4 dz = \int (z^6 - z^4) dz$$

$$= \frac{1}{7} z^7 - \frac{1}{5} z^5 + c = \frac{1}{7} \cos^7 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + c$$

21(d) ଧରି, $I = \int \sin^4 x \cos^4 x dx$

$$\sin^4 x \cos^4 x = \frac{1}{16} (2 \sin x \cos x)^4$$

$$= \frac{1}{16} \sin^4 2x = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 4x)^2$$

$$= \frac{1}{64} (1 - 2 \cos 4x + \cos^2 4x)$$

$$= \frac{1}{64} \{1 - 2 \cos 4x + \frac{1}{2} (1 + \cos 8x)\}$$

$$= \frac{1}{128} (3 - 4 \cos 4x + \cos 8x)$$

$$\therefore I = \int \frac{1}{128} (3 - 4 \cos 4x + \cos 8x) dx$$

$$= \frac{1}{128} (3x - 4 \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x) + c$$

21(e) $\int \sin^2 x \cos 2x dx$

[ଚ. '୦୯; ସ. '୦୫; ରା. '୦୭; ସି. '୧୧]

$$= \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \{\cos 2x - \frac{1}{2} (1 + \cos 4x)\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \{ \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} (x + \frac{1}{4} \sin 4x) \} + c$$

$$= \frac{1}{4} (\sin 2x - x - \frac{1}{4} \sin 4x) + c$$

21(f) $\int \sin^2 x \cos 2x dx$ [ଚ. '୦୨; ସ. '୦୫; ରା. '୧୧]

$$= \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \{\cos 2x - \frac{1}{2} (1 + \cos 4x)\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \{ \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} (x + \frac{1}{4} \sin 4x) \} + c$$

$$= \frac{1}{4} (\sin 2x - x - \frac{1}{4} \sin 4x) + c$$

22. (a) $\int \tan^2 x dx$ [ଜ. '୦୫, '୦୭]

$$\equiv \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + c$$

22(b) ଧରି, $I = \int \frac{\tan^2(\ln x)}{x} dx$ [ସ. '୦୨]

ଏବଂ $\ln x = z$ ତାହାଲେ, $\frac{1}{x} dx = dz$ ଏବଂ

$$I = \int \tan^2 z dz = \int (\sec^2 z - 1) dz$$

$$= \tan z - z + c = \tan(\ln x) - \ln x + c$$

22(c) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^3 x} dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int (\tan x \sec^2 x + \frac{2}{2 \sin x \cos x}) dx \\
 &= \int \tan x \sec^2 x dx + 2 \int \frac{dx}{\sin 2x} \\
 &= \int \tan x d(\tan x) + \int \sec 2x d(2x) \\
 &= \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\tan \frac{2x}{2}| + c \\
 &= \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\tan x| + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 23. \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx &= \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx \\
 &= \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln |\sin x + \cos x| + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 24. (a) \text{ধরি, } I &= \int \frac{\sin 4x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \text{ এবং} \\
 z &= \sin^4 x + \cos^4 x \text{ তাহলে,} \\
 dz &= (4 \sin^3 x \cos x - 4 \cos^3 x \sin x) dx \\
 &= 4 \sin x \cos x (\sin^2 - \cos^2) dx \\
 &= -2 \sin 2x \cos 2x dx = -\sin 4x dx \text{ এবং} \\
 I &= \int \frac{-dz}{z} = -\ln |z| + c \\
 &= -\ln |\sin^4 x + \cos^4 x| + c
 \end{aligned}$$

$$24(b) \text{ধরি, } I = \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} \quad [\text{রা. } '06]$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{\sec^2 x dx}{\sec^2 x (1 + \cos^2 x)} = \int \frac{\sec^2 x dx}{\sec^2 x + 1} \\
 &= \int \frac{\sec^2 x dx}{1 + \tan^2 x + 1} \text{ এবং } z = \tan x \Rightarrow dz = \sec^2 x dx \\
 \therefore I &= \int \frac{dz}{(\sqrt{2})^2 + z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right) + c \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 24(c) \int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx &\quad [\text{ব. } '03] \\
 &= \int \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} dx = \int \tan^2 x dx
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + c$$

$$24(d) \int \frac{1 - \cos 5x}{1 + \cos 5x} dx \quad [\text{ব. } '01; \text{ সি. } '02]$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{2 \sin^2 \frac{5x}{2}}{2 \cos^2 \frac{5x}{2}} dx = \int \tan^2 \frac{5x}{2} dx \\
 &= \int (\sec^2 \frac{5x}{2} - 1) dx = \frac{2}{5} \tan \frac{5x}{2} - x + c
 \end{aligned}$$

$$25(a) \text{ধরি, } I = \int \frac{dx}{(e^x - 1)^2} = \int \frac{dx}{\{e^x(1 - e^{-x})\}^2}$$

$$= \int \frac{dx}{e^{2x}(1 - e^{-x})^2} = \int \frac{e^{-x} \cdot e^{-x} dx}{(1 - e^{-x})^2} \text{ এবং}$$

$$e^{-x} = z. \text{ তাহলে } -e^{-x} dx = dz \text{ এবং}$$

$$I = - \int \frac{z dz}{(1-z)^2} = \int \frac{(1-z)-1}{(1-z)^2} dz$$

$$= \int \left\{ \frac{1}{1-z} - \frac{1}{(1-z)^2} \right\} dz$$

$$= - \int \left\{ \frac{1}{1-z} - \frac{1}{(1-z)^2} \right\} d(1-z)$$

$$= -\left\{ \ln |1-z| + \frac{1}{1-z} \right\} + c$$

$$= -\ln |1-e^{-x}| - \frac{1}{1-e^{-x}} + c$$

$$25(b) \int \frac{\sin x dx}{\sin(x+a)} = \int \frac{\sin x dx}{\sin x \cos a + \cos x \sin a}$$

$$\text{ধরি, } \sin x = l(\sin x \cos a + \cos x \sin a) + m(\cos x \cos a - \sin x \sin a) + n$$

$$\Rightarrow \sin x = (l \cos a - m \sin a) \sin x + (l \sin a \cos a) \cos x + n$$

উভয়পক্ষে $\sin x$, $\cos x$ ও শ্রবণদ সমীকৃত করে পাই,

$$n = 0, l \sin a + m \cos a = 0 \Rightarrow m = -\frac{l \sin a}{\cos a}$$

$$\text{এবং } l \cos a - m \sin a = 1$$

$$\Rightarrow l \cos a + \frac{l \sin a}{\cos a} \sin a = 1$$

$$\Rightarrow l(\sin^2 a + \cos^2 a) = \cos a \Rightarrow l = \cos a$$

$$\begin{aligned}
 m &= -\frac{\cos a \sin a}{\cos a} = -\sin a \\
 \int \frac{\sin x dx}{\sin(x+a)} &= \int \frac{\cos a \sin(x+a) dx}{\sin(x+a)} - \\
 \int \frac{\sin a (\cos x \cos a - \sin x \sin a)}{\sin x \cos a + \sin a \cos x} dx & \\
 = \cos a \int dx - \sin a \ln |\sin(x+a)| & \\
 = x \cos a - \sin a \ln |\sin(x+a)| + c &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 25(c) \int (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}) dx & \\
 = \int \left(\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}} \right) dx & \\
 = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}} dx = \sqrt{2} \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2 \sin x \cos x}} dx & \\
 = \sqrt{2} \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2}} dx & \\
 = \sqrt{2} \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2}} & \\
 = \sqrt{2} \sin^{-1}(\sin x - \cos x) + c &
 \end{aligned}$$

ଅତିରିକ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନ (ସମାଧାନସହ)
ନିଚେର ଯୋଗଜ୍ୟତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର:

$$\begin{aligned}
 1(a) \int (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) dx &= \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c \\
 &= 2(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) + c
 \end{aligned}$$

$$1(b) \int a^{4x} dx = \frac{a^{4x}}{\ln a} \cdot \frac{1}{4} + c = \frac{a^{4x}}{4 \ln a} + c$$

$$2.(a) \text{ ଧରି, } I = \int (2x+3)\sqrt{x^2+3x} dx \text{ ଏବଂ } x^2+3x = z. \text{ ତାହଲେ } 2x+3)dx = dz$$

$$\therefore I = \int z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3} z^{3/2} + c$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{3} (x^2 + 3x)^{3/2} + c \\
 2(b) \int x^2 \cos x^3 dx &= \frac{1}{3} \int \cos(x^3) (3x^2 dx) \\
 &= \frac{1}{3} \sin x^3 + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2(c) \int \frac{(1+\tan \frac{3x}{2})^2 dx}{1+\sin 3x} & \\
 = \int \frac{(1+\tan \frac{3x}{2})^2 dx}{1+\frac{2 \tan(3x/2)}{1+\tan^2(3x/2)}} & \\
 = \int \frac{(1+\tan(3x/2))^2 (1+\tan^2(3x/2)) dx}{1+\tan^2(3x/2)+2\tan(3x/2)} & \\
 = \int \frac{(1+\tan(3x/2))^2 (1+\tan^2(3x/2)) dx}{(1+\tan(3x/2))^2} & \\
 = \int (1+\tan^2(3x/2)) dx = \int \sec^2(3x/2) dx & \\
 = \frac{2}{3} \tan \frac{3x}{2} + c &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \int \frac{2x \sin^{-1} x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx & \\
 \text{ଧରି, } \sin^{-1} x^2 = z & \\
 \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot 2x dx = dz & \\
 \Rightarrow \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}} = dz & \\
 \int \frac{2x \sin^{-1} x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int z dz & \\
 = \frac{z^2}{2} + c = \frac{1}{2} (\sin^{-1} x^2)^2 + c & \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx &= \int (\ln x)^{-2} d(\ln x) \\
 &= \frac{(\ln x)^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{\ln x} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{5(a)} \int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \sin^{-1} x d(\sin^{-1} x) \\ &= \frac{(\sin^{-1} x)^2}{2} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{5(b)} \int \frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^2} dx &\quad [\text{প.ত.প. } '৯৩] \\ &= \int \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2} dx \\ &= \int (1+\tan x)^{-2} d(1+\tan x) \\ &= \frac{(1+\tan x)^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{1+\tan x} + c \end{aligned}$$

$$\text{5.(c)} \text{ ধরি, } I = \int \frac{\cos 2x}{(\sqrt{\sin 2x+3})^3} dx \quad [\text{প.ত.প. } '৯৫]$$

এবং $\sin 2x+3=z$. তাহলে, $2\cos 2x dx = dz$ এবং

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^{3/2}} = \frac{1}{2} \int z^{-\frac{3}{2}} dz \\ &= \frac{1}{2} \frac{z^{\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c = \frac{1}{2} \frac{z^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -\frac{1}{\sqrt{z}} + c \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\sin 2x+3}} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{6. (a)} \int \cos ec \frac{x}{2} dx &= \frac{1}{1/2} \ln |\tan(\frac{x/2}{2})| + c \\ &= 2 \ln |\tan \frac{x}{4}| + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{6(b)} \int \sec \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}} &= 2 \int \sec(\sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} dx \right) \\ &= 2 \ln |\sec \sqrt{x} + \tan \sqrt{x}| + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{6(c)} \int \left(\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x-2} \right) dx &\\ &= 3 \ln|x-1| - 4 \ln|x-2| + c \end{aligned}$$

$$\text{6(d)} \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx = - \int \frac{(-\sin x) dx}{1+\cos x}$$

$$= -\ln |1+\cos x| + c$$

$$\begin{aligned} \text{7.} \int \frac{1}{x \ln x} dx &\\ &= \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} \quad [d(\ln x) = \frac{1}{x} dx] \\ &= \ln(\ln x) + c \end{aligned}$$

$$\text{8. (a)} \int \frac{dx}{16+x^2} = \int \frac{dx}{4^2+x^2} = \frac{1}{4} \tan^{-1} \frac{x}{4} + c$$

$$\begin{aligned} \text{8(b)} \int \frac{4}{16a^2+x^2} dx &= 4 \int \frac{dx}{(4a)^2+x^2} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{4a} \tan^{-1} \frac{x}{4a} + c = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{4a} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{8 (c)} \int \frac{x^2 dx}{e^{x^3} + e^{-x^3}} &\quad [\text{প.ত.প. } '৮৯, '০১] \\ &= \int \frac{x^2 e^{x^3} dx}{e^{x^3} (e^{x^3} + e^{-x^3})} = \int \frac{x^2 e^{x^3} dx}{(e^{x^3})^2 + 1} \\ &\stackrel{d(e^{x^3})}{=} \int \frac{1}{1+(e^{x^3})^2} \cdot \frac{1}{3} dx \quad [d(e^{x^3}) = e^{x^3} 3x^2 dx] \\ &= \frac{1}{3} \tan^{-1}(e^{x^3}) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{9(a)} \int \frac{dx}{x^2+6x+25} &= \int \frac{dx}{(x+3)^2+25-9} \\ &= \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+4^2} = \frac{1}{4} \tan^{-1} \frac{x+3}{4} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{9(b)} \int \frac{dx}{(x^2+9)^2} &\quad [\text{প.ত.প. } '০০] \\ &= \frac{1}{18} \int \frac{(x^2+9)-(x^2-9)}{(x^2+9)^2} dx \\ &= \frac{1}{18} \left\{ \int \frac{x^2+9}{(x^2+9)^2} dx - \int \frac{x^2-9}{(x^2+9)^2} dx \right\} \\ &= \frac{1}{18} \left\{ \int \frac{dx}{x^2+9} - \int \frac{x^2(1-\frac{9}{x^2})}{x^2(x+\frac{9}{x})^2} dx \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{18} \left\{ \int \frac{dx}{x^2 + 3^2} - \int \frac{d(x + \frac{9}{x})}{(x + \frac{9}{x})^2} \right\} \\
 &= \frac{1}{18} \left\{ \frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{x}{3} - \left(-\frac{1}{x + \frac{9}{x}} \right) \right\} + c \\
 &= \frac{1}{18} \left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{x}{3} + \frac{x}{x^2 + 9} \right) + c
 \end{aligned}$$

ବିକଳ ପରିଭାଷା : ଧ୍ୟାନ, $x = 3 \tan \theta$. ତାହଙ୍କୁ

$$\theta = \tan^{-1} \frac{x}{3}$$
 ଏବଂ $dx = 3 \sec^2 \theta d\theta$

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^2} = \int \frac{3 \sec^2 \theta d\theta}{(9 \tan^2 \theta + 9)^2} \\
 &= \int \frac{3 \sec^2 \theta d\theta}{81(\tan^2 \theta + 1)^2} = \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{27 \sec^4 \theta} \\
 &= \frac{1}{27} \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{27} \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{54} (\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta) + c \\
 &= \frac{1}{54} \left(\theta + \frac{1}{2} \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \right) + c \\
 &= \frac{1}{54} \left(\tan^{-1} \frac{x}{3} + \frac{x/3}{1 + x^2/9} \right) + c \\
 &= \frac{1}{54} \left(\tan^{-1} \frac{x}{3} + \frac{3x}{9 + x^2} \right) + c
 \end{aligned}$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} \quad [\text{ଆ.ଭ.ପ.}' ୦୮]$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{dx}{(x - \frac{3}{2})^2 + 2 - \frac{9}{4}} = \int \frac{dx}{(x - \frac{3}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2} \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln \left| \frac{x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}} \right| + c = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + c
 \end{aligned}$$

$$11(a) \int \frac{dx}{\sqrt{x+4}\sqrt{x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 7x + 12}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{7}{2})^2 + 12 - \frac{49}{4}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{7}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}} \\
 &= \ln \left| \sqrt{(x + \frac{7}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2} + x + \frac{7}{2} \right| + c \\
 &= \ln \left| \sqrt{x^2 + 7x + 12} + x + \frac{7}{2} \right| + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11(b) \int \sqrt{16 - 9x^2} dx &= \frac{1}{3} \sqrt{(4)^2 - (3x)^2} d(3x) \\
 &= \frac{1}{3} \left[\frac{3x\sqrt{4^2 - (3x)^2}}{2} + \frac{4^2}{2} \sin^{-1} \frac{3x}{4} \right] + c \\
 &= \frac{x\sqrt{16 - 9x^2}}{2} + \frac{8}{3} \sin^{-1} \frac{3x}{4} + c \quad (\text{Ans.})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12(a) \int \frac{xdx}{\sqrt{4+x}} &= \int \frac{4+x-4}{\sqrt{4+x}} dx \\
 &= \int \left(\frac{4+x}{\sqrt{4+x}} - \frac{4}{\sqrt{4+x}} \right) dx \\
 &= \int \sqrt{4+x} dx - 4 \int \frac{1}{\sqrt{4+x}} dx \\
 &= \frac{(4+x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 4 \cdot 2 \sqrt{4+x} + c \\
 &= \frac{2}{3} (4+x)^{3/2} - 8\sqrt{4+x} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12(b) \int \frac{6x-10}{(2x+1)^2} dx &= \int \frac{3(2x+1)-13}{(2x+1)^2} dx \\
 &= \int \frac{3}{2x+1} dx - \int \frac{13}{(2x+1)^2} dx \\
 &= \frac{3}{2} \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} - \frac{13}{2} \int (2x+1)^{-2} d(2x+1) \\
 &= \frac{3}{2} \ln |2x+1| - \frac{13}{2} \frac{(2x+1)^{-2+1}}{-2+1} + c \\
 &= \frac{3}{2} \ln |2x+1| + \frac{13}{2(2x+1)} + c \quad (\text{Ans.})
 \end{aligned}$$

$$12(c) \int \frac{x dx}{4-x} = \int \frac{-(4-x-4)}{4-x} dx \quad [\text{ଆ.ଭ.ପ.}' ୯୮]$$

$$= - \int \frac{4-x}{4-x} dx + 4 \int \frac{dx}{4-x}$$

$$= - \int dx - 4 \int \frac{d(4-x)}{4-x} = -x - 4 \ln|4-x| + c$$

13(a) $\int \sqrt{\frac{a+x}{x}} dx = \int \frac{(\sqrt{a+x})^2}{\sqrt{x(a+x)}} dx$

$$= \int \frac{(a+x)dx}{\sqrt{x^2+ax}} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+a)+\frac{a}{2}}{\sqrt{x^2+ax}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(2x+a)dx}{\sqrt{x^2+ax}} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{x^2+ax} + \frac{a}{2} \ln \left| \sqrt{(x+\frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2} + x + \frac{a}{2} \right| + c$$

$$= \sqrt{x^2+ax} + \frac{a}{2} \ln \left| \sqrt{x^2+ax} + x + \frac{a}{2} \right| + c$$

13.(b) ধরি, $I = \int \frac{\sqrt{x+3}}{x+2} dx$ এবং $x+3 = z^2$

তাহলে, $dx = 2zdz$ এবং $I = \int \frac{\sqrt{z^2}}{z^2-3+2} 2zdz$

$$\Rightarrow I = \int \frac{2z^2 dz}{z^2-1} = 2 \int \frac{z^2-1+1}{z^2-1} dz$$

$$= 2 \int dz + 2 \int \frac{1}{z^2-1} dz$$

$$= 2z + 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 1} \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + c$$

$$= 2\sqrt{x+3} + \ln \left| \frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1} \right| + c$$

14(a) ধরি, $I = \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ এবং $1-x = \frac{1}{z}$

তাহলে $z = \frac{1}{1-x}$ এবং $-dx = -\frac{1}{z^2} dz$

$$I = \int \frac{dz}{z^2 \cdot \frac{1}{z} \sqrt{1-(1-\frac{1}{z})^2}}$$

$$= \int \frac{dz}{z \sqrt{1-1+2\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}}} = \int \frac{dz}{\sqrt{2z-1}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2z-1)}{\sqrt{2z-1}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2z-1} + c = \sqrt{2\frac{1}{1-x}-1} + c = \sqrt{\frac{2-1+x}{1-x}} + c$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + c \text{ (Ans.)}$$

14 (b) ধরি, $I = \int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{x^2+3x+2}}$ এবং

$$2x+3 = \frac{1}{z} \text{ তাহলে } z = \frac{1}{2x+3} \text{ এবং}$$

$$2dx = -\frac{1}{z^2} dz \Rightarrow dx = -\frac{dz}{2z^2}$$

$$\therefore I = \int \frac{-dz/2z^2}{\frac{1}{z} \sqrt{(\frac{1-3z}{2z})^2 + 3 \cdot \frac{1-3z}{2z} + 2}}$$

$$= - \int \frac{dz}{2z \sqrt{\frac{1-6z+9z^2}{4z^2} + \frac{3-9z}{2z} + 2}}$$

$$= - \int \frac{dz}{2z \sqrt{\frac{1-6z+9z^2+6z-18z^2+8z^2}{4z^2}}} = - \int \frac{dz}{2z \sqrt{\frac{1-12z+9z^2}{4z^2}}}$$

$$= - \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \cos^{-1} z + c$$

$$= \cos^{-1} \left(\frac{1}{2x+3} \right) + c = \sec^{-1} (2x+3) + c$$

বিকল্প পদ্ধতি : $\int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{x^2+3x+2}}$

$$= \int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{\frac{1}{4}(4x^2+12x+8)}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{dx}{(2x+3) \frac{1}{2} \sqrt{(2x+3)^2 - 1}} \\
 &= \int \frac{d(2x+3)}{(2x+3) \sqrt{(2x+3)^2 - 1}} \\
 &= \sec^{-1}(2x+3) + c
 \end{aligned}$$

15 (a) $\int \frac{x^{-3/4}}{1+\sqrt{x}} dx$

ধরি, $x = z^4$. তাহলে, $dx = 4z^3 dz$ এবং

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^{-3/4}}{1+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{(z^4)^{-3/4}}{1+z^2} 4z^3 dz \\
 &= \int \frac{z^{-3}}{1+z^2} 4z^3 dz = 4 \int \frac{dz}{1+z^2} \\
 &= 4 \tan^{-1} z + c = 4 \tan^{-1}(x^{1/4}) + c \quad (\text{Ans.})
 \end{aligned}$$

15(b) ধরি, $I = \int \frac{1+x^{1/4}}{1+x^{1/2}} dx$ এবং $x = z^4$.

তাহলে, $dx = 4z^3 dz$ এবং

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{(1+z)4z^3 dz}{1+z^2} = 4 \int \frac{z^4 + z^3}{1+z^2} dz \\
 &= 4 \int \frac{z^2(z^2+1) - (z^2+1) + z(z^2+1) - z - 1}{1+z^2} dz \\
 &= 4 \left\{ \int (z^2 - 1 + z) dz - \int \frac{z dz}{z^2 + 1} - \int \frac{dz}{z^2 + 1} \right\} \\
 &= 4 \left\{ \frac{z^3}{3} - z + \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(z^2 + 1) - \tan^{-1} z \right\} + c \\
 &= 4 \left\{ \frac{x^{3/4}}{3} - x^{1/4} + \frac{x^{1/2}}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^{1/2} + 1) \right. \\
 &\quad \left. - \tan^{-1} x^{1/4} \right\} + c
 \end{aligned}$$

15(c) ধরি, $I = \int \frac{dx}{x(x^3+2)}$ এবং $x^3 = \frac{1}{z}$

তাহলে, $3x^2 dx = -\frac{1}{z^2} dz \Rightarrow x^2 dx = -\frac{dz}{3z^2}$

$$\begin{aligned}
 \text{এবং } I &= \int \frac{x^2 dx}{x^3(x^3+2)} = \int \frac{-\frac{dz}{3z^2}}{\frac{1}{z}(\frac{1}{z}+2)} \\
 &= -\frac{1}{3} \int \frac{dz}{1+2z} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(1+2z)}{1+2z} \\
 &= -\frac{1}{6} \ln|1+2z| + c = -\frac{1}{6} \ln|1+\frac{2}{x^3}| + c
 \end{aligned}$$

15(d) ধরি, $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{2+3\sqrt{x}}}$ এবং $\sqrt{x} = \frac{1}{z^2}$

তাহলে, $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = -\frac{2}{z^3} dz \Rightarrow \frac{z^2}{2} dx = -\frac{2}{z^3} dz$

$$\Rightarrow dx = -\frac{4dz}{z^5} \text{ এবং } I = \int \frac{-\frac{4dz}{z^5}}{\frac{1}{z^4} \sqrt{2+\frac{3}{z^2}}}$$

$$= -4 \int \frac{dz}{\sqrt{2z^2 + 3}} = -4 \int \frac{dz}{\sqrt{2} \sqrt{z^2 + (\sqrt{3}/2)^2}}$$

$$= -2\sqrt{2} \ln|z + \sqrt{z^2 + \frac{3}{2}}| + c$$

$$= -2\sqrt{2} \ln|\frac{1}{x^{1/4}} + \sqrt{\frac{1}{x^{1/2}} + \frac{3}{2}}| + c$$

15(e) ধরি, $I = \int \frac{dx}{x+x^n}, n \neq 1$ এবং $x^{n-1} = \frac{1}{z}$

তাহলে, $(n-1)x^{n-2} dx = -\frac{dz}{z^2}$

$$\Rightarrow x^{n-2} dx = \frac{-dz}{(n-1)z^2}$$

$$\text{এবং } I = \int \frac{dx}{x(1+x^{n-1})} = \int \frac{x^{n-2} dx}{x^{n-1}(1+x^{n-1})}$$

$$= \int \frac{-\frac{dz}{(n-1)z^2}}{\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z})} = -\frac{1}{n-1} \int \frac{dz}{1+z}$$

$$= -\frac{1}{n-1} \ln|1+z| + c$$

$$= -\frac{1}{n-1} \ln |1 + \frac{1}{x^{n-1}}| + c$$

16(a) ধরি, $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^3+4}}$ এবং $x^3 = \frac{1}{z^2}$.

তাহলে, $3x^2 dx = -\frac{2dz}{z^3} \Rightarrow x^2 dx = -\frac{2dz}{3z^3}$ এবং

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2 dx}{x^3 \sqrt{x^3+4}} = \int \frac{-\frac{2dz}{3z^3}}{\frac{1}{z^2} \sqrt{\frac{1}{z^2} + 4}} \\ &= -\frac{2}{3} \int \frac{dz}{\sqrt{1+4z^2}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + z^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{3} \ln |z + \sqrt{\frac{1}{4} + z^2}| + c \\ &= -\frac{1}{3} \ln \left| \frac{1}{x^{3/2}} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{x^3}} \right| + c \end{aligned}$$

16(b) $\int \frac{dx}{x^3(3+5x)^2}$

ধরি, $3+5x = zx \Rightarrow (z-5)x = 3$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{z-5}. \text{ তাহলে, } dx = -\frac{3dz}{(z-5)^2} \text{ এবং}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3(3+5x)^2} &= \int \frac{\frac{-3dz}{(z-5)^2}}{\frac{27}{(z-5)^3} \left(3 + 5 \frac{3}{z-5}\right)^2} \\ &= \int \frac{-3(z-5)^3 dz}{27(3z-15+15)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{81} \int \frac{z^3 - 15z^2 + 75z - 125}{z^2} dz \\ &= -\frac{1}{81} \int \left(z - 15 + \frac{75}{z} - 125 \frac{1}{z^2}\right) dz \\ &= -\frac{1}{81} \left\{ \frac{z^2}{2} - 15z + 75 \ln |z| - 125 \left(-\frac{1}{z}\right) \right\} + c \\ &= -\frac{1}{81} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{3+5x}{x}\right)^2 - 15 \left(\frac{3+5x}{x}\right) + \right. \end{aligned}$$

$$75 \ln \left| \frac{3+5x}{x} \right| + 125 \left(\frac{x}{3+5x} \right) \} + c$$

$$\begin{aligned} 17(a) \int \frac{a^2 + x^2}{(x^2 - a^2)^2} dx &= \int \frac{x^2 (1 + \frac{a^2}{x^2})}{x^2 (x - \frac{a^2}{x})^2} dx \\ &= \int \frac{d(x - \frac{a^2}{x})}{(x - \frac{a^2}{x})^2} = -\frac{1}{x - \frac{a^2}{x}} + c = -\frac{x}{x^2 - a^2} + c \end{aligned}$$

17(b) $\int \frac{(x^2 - 1)dx}{x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1}$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(1-\frac{1}{x^2})dx}{=} \int \frac{(1-\frac{1}{x^2})dx}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 6(x + \frac{1}{x}) + 7} \\ &\quad (1-\frac{1}{x^2})dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{(1-\frac{1}{x^2})dx}{(x + \frac{1}{x})^2 + 6(x + \frac{1}{x}) + 5} \\ &\quad (1-\frac{1}{x^2})dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{(1-\frac{1}{x^2})dx}{(x + \frac{1}{x} + 3)^2 + 5 - 9} = \int \frac{d(x + \frac{1}{x} + 3)}{(x + \frac{1}{x} + 3)^2 - 2^2} \\ &\quad (1-\frac{1}{x^2})dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2.2} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} + 3 - 2}{x + \frac{1}{x} + 3 - 2} \right| + c \\ &\quad x + \frac{1}{x} + 3 - 2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^2 + 1 + x}{x^2 + 1 + 5x} \right| + c$$

18(a) $\int \cot^2 x dx = \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) dx$

$$= -\cot x - x + c$$

18(b) $\int \tan^2 \frac{x}{2} dx = \int (\sec^2 \frac{x}{2} - 1) dx$

$$= 2 \int \sec^2 \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) - \int dx = 2 \tan \frac{x}{2} - x + c$$

18(c) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^2 x} dx$

$$= \int \tan x \sec x dx + \int \cos ec x dx \\ = \sec x + \ln(\cos ec x - \cot x) + c$$

$$\begin{aligned} 19(a) \int \frac{dx}{4 - 5\sin^2 x} &= \int \frac{\sec^2 x dx}{\sec^2 x(4 - 5\sin^2 x)} \\ &= \int \frac{\sec^2 dx}{4\sec^2 x - 5\tan^2 x} \\ &= \int \frac{\sec^2 dx}{4(1 + \tan^2 x) - 5\tan^2 x} = \int \frac{\sec^2 dx}{4 - \tan^2 x} \\ &= \int \frac{d(\tan x)}{2^2 - (\tan x)^2} = \frac{1}{2.2} \ln \left| \frac{2 + \tan x}{2 - \tan x} \right| + c \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \tan x}{2 - \tan x} \right| + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19(b) \int \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x - 1}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int \left(\sin x + \cos x - \frac{1}{\sin x + \cos x} \right) dx \\ &= \cos x - \sin x - \int \frac{dx}{\sqrt{2}(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \cos x - \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} \\ &= \cos x - \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \cos ec(x + \frac{\pi}{4}) dx \\ &= \cos x - \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \tan \frac{1}{2}(x + \frac{\pi}{4}) \right| + c \\ &= \cos x - \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}) \right| + c \end{aligned}$$

$$20 \text{ ଧେରି, } I = \int \frac{dx}{\sqrt{x + \sqrt{1-x}}} \text{ ଏବଂ }$$

$$x = \sin^2 \theta. \text{ ତାହାରେ } dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta, \\ \sin \theta = \sqrt{x} \Rightarrow \theta = \sin^{-1} \sqrt{x} \text{ ଏବଂ }$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2 \sin \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \sqrt{1 - \sin^2 \theta}}} \\ &= \int \frac{2 \sin \theta \cos \theta d\theta}{\sin \theta + \cos \theta} \\ &= \int \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - 1}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta \\ &= \int \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta \\ &= \int \left(\sin \theta + \cos \theta - \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} \right) d\theta \\ &= \cos \theta - \sin \theta - \int \frac{d\theta}{\sqrt{2}(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{4})} \\ &= \cos \theta - \sin \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\theta}{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})} \\ &= \cos \theta - \sin \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \cos ec(\theta + \frac{\pi}{4}) d\theta \\ &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta} - \sin \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \tan \frac{1}{2}(\theta + \frac{\pi}{4}) \right| + c \\ &= \sqrt{1-x} - \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \tan \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} \sqrt{x} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + c \end{aligned}$$

ଶ୍ରୀମତୀ X C

$$[\text{ସ୍ଵର୍ଗ (MCQ ଏବଂ କ୍ଷେତ୍ର) } : \int x^n e^{nx} dx \\ \{ \frac{1}{n} x^n - \frac{1}{n^2} \frac{d}{dx} (x^n) + \frac{1}{n^3} \frac{d^2}{dx^2} (x^n) - \\ \frac{1}{n^4} \frac{d^3}{dx^3} (x^n) + \dots \dots \} e^{nx}]$$

$$\begin{aligned} 1.(a) \int x e^x dx \\ &= x \int e^x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (x) \int e^x dx \right\} dx \\ &= x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + c \\ (b) \int x^2 e^x dx & \quad [କ୍ଷ. '08; ମି. '08] \\ &= x^2 \int e^x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (x^2) \int e^x dx \right\} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x^2 e^x - \int (2x)e^x dx \\
 &= x^2 e^x - 2[x \int e^x - \int (\frac{d}{dx}(x) \int e^x dx) dx] \\
 &= x^2 e^x - 2[xe^x - \int 1 \cdot e^x dx] \\
 &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c \\
 &= (x^2 - 2x + 2)e^x + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{c}) \int x^2 e^{-3x} dx &= x^2 \int e^{-3x} dx - \int (\frac{d}{dx}(x^2) \int e^{-3x} dx) dx \\
 &= x^2 (-\frac{1}{3})e^{-3x} - \int (2x)(-\frac{1}{3})e^{-3x} dx \\
 &= -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} + \frac{2}{3}[x \int e^{-3x} - \\
 &\quad \int (\frac{d}{dx}(x) \int e^{-3x} dx) dx] \\
 &= -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} + \frac{2}{3}[x(-\frac{e^{-3x}}{3}) - \int (-\frac{e^{-3x}}{3}) dx] \\
 &= -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} + \frac{2}{3}[\frac{xe^{-3x}}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{e^{-3x}}{3})] + c \\
 &= -\frac{1}{3}(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9})e^{-3x} + c
 \end{aligned}$$

(d) ধরি, $I = \int x^3 e^{x^2} dx$ এবং $x^2 = z$. তাহলে

$$2xdx = dz \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dz \text{ এবং}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int x^2 e^{x^2} (xdx) = \frac{1}{2} \int ze^z dz \\
 &= \frac{1}{2} [z \int e^z dz - \int (\frac{d}{dz}(z) \int e^z dz) dz] \\
 &= \frac{1}{2} [ze^z - \int 1 \cdot e^z dz] = \frac{1}{2}(ze^z - e^z) + c \\
 &= \frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{x^2} + c
 \end{aligned}$$

২. স্লুট (MCQ এর জন্য): $\int x^n \sin x dx$
 $= x^n (-\cos x) - (nx^{n-1})(-\sin x) + \dots$

$$\begin{aligned}
 (\text{a}) \int x \sin 3x dx &= x \int \sin 3x dx - \int (\frac{d}{dx}(x) \int \sin 3x dx) dx \\
 &= x(-\frac{1}{3}\cos 3x) - \int 1 \cdot (-\frac{1}{3}\cos 3x) dx \\
 &= -\frac{1}{3}x \cos 3x + \frac{1}{3}(\frac{1}{3}\sin 3x) + c \\
 &= \frac{1}{9}\sin 3x - \frac{1}{3}x \cos 3x + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{b}) \int x^3 \sin x dx &= x^3 \int \sin x dx - \int (\frac{d}{dx}(x^3) \int \sin x dx) dx \\
 &= x^3(-\cos x) - \int 3x^2(-\cos x) dx \\
 &= -x^3 \cos x + 3[x^2 \int \cos x - \\
 &\quad \int (\frac{d}{dx}(x^2) \int \cos x dx) dx] \\
 &= -x^3 \cos x + 3[x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx] \\
 &= -x^3 \cos x + 3[x^2 \sin x - \\
 &\quad 2\{x(-\cos x) - \int 1(-\cos x) dx\}] \\
 &= -x^3 \cos x + 3[x^2 \sin x - \\
 &\quad 2(-x \cos x + \sin x)] + c \\
 &= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + c
 \end{aligned}$$

[MCQ এর ক্ষেত্রে, $\int x^3 \sin x dx = x^3(-\cos x)$
 $- (3x^2)(-\sin x) + (6x)(\cos x) - 6 \sin x$
 $= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + c]$

$$\begin{aligned}
 (\text{c}) \text{ধরি, } I &= \int e^{2x} \cos e^x dx \text{ এবং } e^x = z. \\
 \text{তাহলে } e^x dx &= dz \text{ এবং} \\
 I &= \int e^x \cos e^x (e^x dx) = \int z \cos z dz \\
 &= z \int \cos z dz - \int (\frac{d}{dz}(z) \int \cos z dz) dz \\
 &= z \sin z - \int 1 \cdot \sin z dz \\
 &= z \sin z - (-\cos z) + c
 \end{aligned}$$

$$= e^x \sin e^x + \cos e^x + c$$

(d) ধরি, $I = \int \sin \sqrt{x} dx$ এবং $\sqrt{x} = z$

তাহলে $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dz \Rightarrow dx = 2z dz$ এবং

$$I = \int 2z \sin z dz$$

$$= 2 \left[z \int \sin z dz - \int \left\{ \frac{d}{dz}(z) \int \sin z dz \right\} dz \right]$$

$$= 2 \left[z(-\cos z) - \int 1.(-\cos z) dz \right]$$

$$= -2z \cos z + 2 \sin z + c$$

$$= -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + c$$

3 (a) $\int x \sin^2 \frac{x}{2} dx$

[য.বো.'০২]

$$= \int x \frac{1}{2} (1 - \cos x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int x dx - \frac{1}{2} \int x \cos x dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \left[x \int \cos x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \int \cos x dx \right\} dx \right]$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} [x \sin x - \int 1. \sin x dx]$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} [x \sin x - (-\cos x)] + c$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} x \sin x - \frac{1}{2} \cos x + c$$

(b) $\int x^2 \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int x^2 \frac{1}{2} (1 + \cos x) dx$

$$= \frac{1}{2} \left[\int x^2 dx + \int x^2 \cos x dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} + x^2 (\sin x) - (2x)(-\cos x) + (2)(-\sin x) \right] + c$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x \right] + c$$

(c) $\int x \cos 2x \cos 3x dx$

$$= \int x \frac{1}{2} (\cos 5x - \cos x) dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[x \int \cos 5x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \int \cos 5x dx \right\} dx \right. \\ &\quad \left. + x \int \cos x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \int \cos x dx \right\} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[x \left(\frac{\sin 5x}{5} \right) - \int 1 \cdot \left(\frac{\sin 5x}{5} \right) dx \right. \\ &\quad \left. + x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} x \sin 5x + \frac{\cos 5x}{25} + x \sin x + \cos x \right] + c$$

4. (a) $\int x \sec^2 x dx$ [ঢ. '০১, '১৪]

$$= x \int \sec^2 x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \int \sec^2 x dx \right\} dx$$

$$= x \tan x - \int 1 \cdot \tan x dx$$

$$= x \tan x + \ln |\cos x| + c$$

4. (b) $\int x \sec^2 3x dx$ [ঢ. '০১]

$$= x \int \sec^2 3x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \int \sec^2 3x dx \right\} dx$$

$$= x \frac{\tan 3x}{3} - \int 1 \cdot \frac{\tan 3x}{3} dx$$

$$= \frac{x}{3} \tan 3x + \frac{1}{9} \ln |\cos 3x| + c$$

(c) $\int x \tan^2 x dx$ [ঢ. '০৫; সি. '০৫]

$$= \int x (\sec^2 x - 1) dx = \int x \sec^2 x dx - \int x dx$$

$$= x \int \sec^2 x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \int \sec^2 x dx \right\} dx - \frac{x^2}{2}$$

$$= x \tan x - \int 1 \cdot \tan x dx - \frac{x^2}{2}$$

$$= x \tan x + \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} + c$$

(d) ধরি, $I = \int \cos ec^3 x dx$

$$= \int \cos ec^2 x \cos ec x dx$$

$$= \cos ec x \int \cos ec^2 x dx -$$

$$\int \left\{ \frac{d}{dx}(\cos ec x) \int \cos ec^2 x dx \right\} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= -\cos ecx \cot x - \int (-\cos ecx \cot x).(-\cot x) dx = \\
 &- \cos ecx \cot x - \int \cos ecx(\cos ec^2 x - 1) dx \\
 &= -\cos ecx \cot x - \int \cos ec^3 x dx + \int \cos ecx dx \\
 \Rightarrow I &= -\cos ecx \cot x - I + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c_1 \\
 \Rightarrow 2I &= -\cos ecx \cot x + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c_1 \\
 \Rightarrow I &= -\frac{1}{2} \cos ecx \cot x + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{\pi}{2} \right| + \frac{1}{2} c_1 \\
 \Rightarrow I &= -\frac{1}{2} \cos ecx \cot x + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{\pi}{2} \right| + c
 \end{aligned}$$

৫. স্কুল (MCQ এর জন্য):

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x - \frac{1}{n+1})$$

$$(a) \int x \ln x dx \quad [\text{ব.}'০৩; ট.ী.'০৬; ব.ৰ.'০৮]$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln x \int x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\ln x) \int x dx \right\} dx \\
 &= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c
 \end{aligned}$$

$$(b) \int x^n \ln x dx \quad [\text{প.ভ.গ.}'৯৩]$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln x \int x^n dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\ln x) \int x^n dx \right\} dx \\
 &= \ln x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} dx \\
 &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx \\
 &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \\
 &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c
 \end{aligned}$$

$$(c) \int x^2 (\ln x)^2 dx \quad [\text{প.ভ.গ.}'০৫]$$

$$\begin{aligned}
 &= (\ln x)^2 \int x^2 dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\ln x)^2 \int x^2 dx \right\} dx \\
 &= (\ln x)^2 \frac{x^3}{3} - \int 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx \\
 &= \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \frac{2}{3} \int x^2 \ln x dx \\
 &= \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \\
 &\quad \frac{2}{3} [\ln x \int x^2 dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\ln x) \int x^2 dx \right\} dx] \\
 &= \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \frac{2}{3} [\ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx] \\
 &= \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \frac{2}{3} \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \right] \\
 &= \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \frac{2}{3} \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \right] + c \\
 &= \frac{x^3}{3} (\ln x)^2 - \frac{2}{3} \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right] + c \\
 &= \frac{x^3}{27} [9(\ln x)^2 - 6 \ln x + 2] + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (d) \int (\ln x)^2 dx \quad [\text{ব.}'০৫; ট.ী.'০৭; প.ভ.গ. '৯০] \\
 &= (\ln x)^2 \int dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\ln x)^2 \int dx \right\} dx \\
 &= (\ln x)^2 \cdot x - \int 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x dx \\
 &= x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx \\
 &= x(\ln x)^2 - 2[\ln x \int dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\ln x) \int dx \right\} dx] = \\
 &x(\ln x)^2 - 2[\ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx] \\
 &= x(\ln x)^2 - 2[x \ln x - \int dx] \\
 &= x(\ln x)^2 - 2[x \ln x - x] + c \\
 &= x\{(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2\} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (e) \text{ধরি, } I &= \int \frac{\ln(\ln x) dx}{x} \text{ এবং } \ln x = z. \\
 \text{তাহলে } \frac{1}{x} dx &= dz \text{ এবং } I = \int \ln z dz
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \ln z \int dz - \int \left\{ \frac{d}{dz} (\ln z) \int dz \right\} dz$$

$$= \ln z \cdot z - \int \frac{1}{z} \cdot z dz = z \ln z - \int dz$$

$$= z \ln z - z + c = \ln x \{\ln(\ln x) - 1\} + c$$

$$(f) \text{ ধরি, } I = \int \frac{\ln \sec^{-1} x}{x \sqrt{x^2 - 1}} dx \quad [\text{চা.}'08; \text{সি.}'18]$$

$$\text{এবং } \sec^{-1} x = z \Rightarrow \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} = dz$$

$$\therefore I = \int \ln z dz$$

$$= \ln z \int dz - \int \left\{ \frac{d}{dz} (\ln z) \int dz \right\} dz$$

$$= \ln z \cdot z - \int \frac{1}{z} \cdot z dz = z \ln z - \int dz$$

$$= z \ln z - z + c$$

$$= \{\ln(\sec^{-1} x) - 1\} \sec^{-1} x + c$$

$$6.(a) \int \tan^{-1} x dx \quad [\text{কু.}'02; \text{চা.}'08; \text{ব.}'10]$$

$$= \tan^{-1} x \int dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\tan^{-1} x) \int dx \right\} dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{(0+2x)dx}{1+x^2}$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

$$(b) \int x \sin^{-1} x dx \quad [\text{চা.}'09]$$

$$= \sin^{-1} x \int x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x) \int x dx \right\} dx$$

$$= \sin^{-1} x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \left[\int \sqrt{1-x^2} dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right]$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \left[\frac{x \sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2} \sin^{-1} x - \right.$$

$$\left. - \sin^{-1} x \right] + c \\ = \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \left[\frac{x \sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{1}{2} \sin^{-1} x \right] + c$$

$$(c) \int \sin^{-1} x dx \quad [\text{সি.}'03; \text{ব.}'10; \text{চা.}'18]$$

$$= \sin^{-1} x \int dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x) \int dx \right\} dx$$

$$= x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x \sin^{-1} x - \left(-\frac{1}{2} \right) \int \frac{(0-2x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{1-x^2} + c$$

$$= x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$(d) \int \cos^{-1} x dx \quad [\text{কু.}'05, '18; \text{চা.}'06; \text{ব.}'07; \text{চা.}'10]$$

$$= \cos^{-1} x \int dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\cos^{-1} x) \int dx \right\} dx$$

$$= x \cos^{-1} x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x \cos^{-1} x + \left(-\frac{1}{2} \right) \int \frac{(0-2x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x \cos^{-1} x - \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{1-x^2} + c$$

$$= x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + c$$

$$(e) \int x \sin^{-1} x^2 dx$$

[চা.}'04; ব.}'06; প্র.ভ.প. '08, '06]

$$= \sin^{-1} x^2 \int x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x^2) \int x dx \right\} dx$$

$$= \sin^{-1} x^2 \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x^2 - \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x^2 - \left(-\frac{1}{4} \right) \int \frac{d(1-x^4)}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x^2 + \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{1-x^4} + c$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^4} + c$$

6.(f) $\int x \tan^{-1} x dx$

[ষ.'০৬; পি. '০৮, '০৮; রা. '০৬; ক্ষ. '১০; ব. '১১]

$$= \tan^{-1} x \int x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\tan^{-1} x) \right\} \int x dx dx$$

$$= \tan^{-1} x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} (x - \tan^{-1} x) + c$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 + 1) \tan^{-1} x - \frac{1}{2} x + c \quad (\text{Ans.})$$

7.(a) $\int e^x \cos x dx$ [ঢ. '০২; পি. ক. গ. '০৮, '০৬]

ধরি, I = $\int e^x \cos x dx$

$$= e^x \int \cos x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (e^x) \right\} \int \cos x dx dx$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin dx$$

$$= e^x \sin x - e^x \int \sin x dx + \int \left\{ \frac{d}{dx} (e^x) \right\} \int \sin x dx dx$$

$$= e^x \sin x - e^x (-\cos x) + \int e^x (-\cos x) dx$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - I + c_1$$

$$\Rightarrow 2I = e^x \sin x + e^x \cos x + c_1$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + \frac{1}{2} c_1$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c$$

7.(b) $\int e^x \sin x dx$ [ক্ষ. '০৮, '১৩; মা. '০৯; রা. পি. '১৪]

ধরি, I = $\int e^x \sin x dx$

$$= e^x \int \sin x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (e^x) \right\} \int \sin x dx dx$$

$$= e^x (-\cos x) - \int e^x (-\cos x) dx$$

$$= -e^x \cos x + e^x \int \cos x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (e^x) \right\} \int \cos x dx dx$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$= e^x (\sin x - \cos x) - I + c_1$$

$$\Rightarrow 2I = e^x (\sin x - \cos x) + c_1$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} c_1$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$$

7(c) $\int e^{2x} \sin x dx$ [পি. '০২] www.boighar.com

ধরি, I = $\int e^{2x} \sin x dx$

$$= e^{2x} \int \sin x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (e^{2x}) \right\} \int \sin x dx dx$$

$$= e^{2x} (-\cos x) - \int 2e^{2x} (-\cos x) dx$$

$$= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \int \cos x dx -$$

$$2 \int \left\{ \frac{d}{dx} (e^{2x}) \right\} \int \cos x dx dx$$

$$= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 2 \int 2e^{2x} \sin x dx$$

$$= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4 \int e^{2x} \sin x dx$$

$$= e^{2x} (2 \sin x - \cos x) - 4I + c_1$$

$$\Rightarrow 5I = e^{2x} (2 \sin x - \cos x) + c_1$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^{2x}}{5} (2 \sin x - \cos x) + \frac{1}{5} c_1$$

$$\therefore I = \int e^{2x} \sin x dx = \frac{e^{2x}}{5} (2 \sin x - \cos x) + c$$

7(d) $\int e^{2x} \cos^2 x dx = \int e^{2x} \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) dx$

$$= \frac{1}{2} [\int e^{2x} dx + \int e^{2x} \cos 2x dx]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{e^{2x}}{2^2 + 2^2} (2 \cos 2x + 2 \sin 2x) \right] + c \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{e^{2x}}{8} (2 \cos 2x + 2 \sin 2x) \right] + c \\ &= \frac{1}{8} (2 + \cos 2x + \sin 2x) e^{2x} + c \end{aligned}$$

8.(a) $\int e^x (\sin x + \cos x) dx$

[সি. '০৫, '১১; ঢ. '১০; কু. '১১]

$$\begin{aligned} &= \int e^x \sin x dx + \int e^x \cos x dx \\ &= \int e^x \sin x dx + e^x \int \cos x dx - \\ &\quad \int \left\{ \frac{d}{dx} (e^x) \int \cos x dx \right\} dx \end{aligned}$$

$$= \int e^x \sin x dx + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$= e^x \sin x + c$$

বিকল্প পদ্ধতি :

$$\text{ধরি, } f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x \text{ এবং}$$

$$\begin{aligned} \int e^x (\sin x + \cos x) dx &= \int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx \\ &= e^x f(x) + c = e^x \sin x + c \end{aligned}$$

8(b) ধরি, I = $\int e^x \sec x (1 + \tan x) dx$

[রা. '০৩; য. '১১; চ. '১৩; প্র.ভ.প. '০৮]

$$\text{এবং } f(x) = \sec x, \quad f'(x) = \sec x \tan x \text{ এবং}$$

$$I = \int e^x (\sec x + \sec x \tan x) dx$$

$$= \int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx = e^x f(x) + c$$

$$\int e^x \sec x (1 + \tan x) dx = e^x \sec x + c$$

8.(c) ধরি, I = $\int e^x \left(\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$ এবং

$$f(x) = \tan^{-1} x, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ এবং}$$

$$I = \int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx = e^x f(x) + c$$

$$\int e^x \left(\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = e^x \tan^{-1} x + c$$

8(d) $\int e^x \{\tan x - \ln(\cos x)\} dx$ [প্র.ভ.প. '৯২]

ধরি, I = $\int e^x \{\tan x - \ln(\cos x)\} dx$ এবং

$$f(x) = -\ln(\cos x)$$

$$\therefore f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \text{ এবং}$$

$$I = \int e^x \{-\ln(\cos x) + \tan x\} dx$$

$$= \int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx = e^x f(x) + c$$

$$\therefore \int e^x \{\tan x + \ln(\sec x)\} dx = -e^x \ln(\cos x) + c$$

9.(a) $\int \frac{e^x}{x} (1 + x \ln x) dx$ [ব. '০১; য. '০৭; পি. '১৩]

ধরি, I = $\int \frac{e^x}{x} (1 + x \ln x) dx = \int e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) dx$

$$\text{এবং } f(x) = \ln x. \text{ তাহলে } f'(x) = \frac{1}{x} \text{ এবং}$$

$$I = \int e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) dx = \int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx$$

$$= e^x f(x) + c = e^x \ln x + c$$

$$\int \frac{e^x}{x} (1 + x \ln x) dx = e^x \ln x + c$$

9(b) $\int e^{-2x} \left(\frac{1}{x} - 2 \ln x \right) dx$ [কু. '০২]

$$= \int e^{-2x} \frac{1}{x} dx - 2 \int e^{-2x} \ln x dx$$

$$\begin{aligned} &= e^{-2x} \int \frac{1}{x} dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (e^{-2x}) \int \frac{1}{x} dx \right\} dx \\ &\quad - 2 \int e^{-2x} \ln x dx \end{aligned}$$

$$= e^{-2x} \ln x - \int (-2e^{-2x}) \ln x dx - 2 \int e^{-2x} \ln x dx$$

$$= e^{-2x} \ln x + 2 \int e^{-2x} \ln x dx - 2 \int e^{-2x} \ln x dx$$

$$\therefore \int e^{-2x} \left(\frac{1}{x} - 2 \ln x \right) dx = e^{-2x} \ln x + c$$

9(c) $\int e^{5x} \left\{ 5 \ln x + \frac{1}{x} \right\} dx$ [চ. '০৯; প্র.ভ.প. '৯৯]

$$= \int 5e^{5x} \ln x dx + \int e^{5x} \frac{1}{x} dx$$

$$= \int 5e^{5x} \ln x dx +$$

$$\begin{aligned} & e^{5x} \int \frac{1}{x} dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (e^{5x}) \int \frac{1}{x} dx \right\} dx \\ &= \int 5e^{5x} \ln x dx + e^{5x} \ln x - \int 5e^{5x} \ln x dx \\ & \quad \int e^{5x} \left\{ 5 \ln x + \frac{1}{x} \right\} dx = e^{5x} \ln x + c \end{aligned}$$

10.(a) $\int \frac{dx}{x^2 + x}$ [ব. '০৩]

$$\begin{aligned} &= \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \left\{ \frac{1}{x(0+1)} + \frac{1}{(x+1)(-1)} \right\} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln|x| - \ln|x+1| + c \end{aligned}$$

10(b) $\int \frac{x+35}{x^2 - 25} dx$ [চ. '০৮]

$$\begin{aligned} &= \int \frac{x+35}{(x-5)(x+5)} dx \\ &= \int \left\{ \frac{5+35}{(x-5)(5+5)} + \frac{-5+35}{(-5-5)(x+5)} \right\} dx \\ &= \int \left\{ \frac{40}{10(x-5)} - \frac{30}{10(x+5)} \right\} dx \\ &= \int \left\{ \frac{4}{x-5} - \frac{3}{x+5} \right\} dx \\ &= 4 \ln|x-5| - 3 \ln|x+5| + c \end{aligned}$$

10(c) $\int \frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)} dx$ [জ. '০৯]

$$\begin{aligned} &= \int \left\{ \frac{2.0-1}{x(0-1)(0-2)} + \frac{2.1-1}{1(x-1)(1-2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2.2-1}{2(2-1)(x-2)} \right\} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{2(x-2)} \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln|x| - \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|x-2| + c \end{aligned}$$

10(d) $\int \frac{x^2 dx}{x^4 - 1}$ [ঝ. '১১; প.ভ.প. '৯১]

$$= \int \frac{x^2 dx}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}$$

$$\begin{aligned} &= \int \left\{ \frac{1}{(x^2 - 1)(1+1)} + \frac{-1}{(-1-1)(x^2 + 1)} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 - 1^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + c \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + c \end{aligned}$$

10(e) ধরি, $I = \int \frac{dx}{e^{2x} - 3e^x}$ [প.ভ.প. '০৮]

এবং $e^x = z$. তাহলে $e^x dx = dz \Rightarrow dx = \frac{dz}{z}$ এবং

$$I = \int \frac{1}{z^2 - 3z} \frac{dz}{z} = \int \frac{dz}{z^2(z-3)}$$

এখন ধরি, $\frac{1}{z^2(z-3)} \equiv \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-3}$

$$\therefore 1 \equiv Az(z-3) + B(z-3) + Cz^2 \dots (1)$$

$$(1) \text{ এ } z=3 \text{ বসিয়ে পাই, } 1=9C \Rightarrow C=\frac{1}{9}$$

$$(1) \text{ এ } z=0 \text{ বসিয়ে পাই, } 1=-3B \Rightarrow B=-\frac{1}{3}$$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে z^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$0=A+C \Rightarrow A=-C=-\frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \int \left\{ -\frac{1}{9} \frac{1}{z} - \frac{1}{3} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{9(z-3)} \right\} dz \\ &= -\frac{1}{9} \ln|z| - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{z} \right) + \frac{1}{9} \ln|z-3| + c \\ &= \frac{1}{9} \ln \left| \frac{z-3}{z} \right| + \frac{1}{3z} + c \end{aligned}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{e^{2x} - 3e^x} = \frac{1}{9} \ln \left| \frac{e^x - 3}{e^x} \right| + \frac{1}{3e^x} + c$$

11. $\int \frac{1}{x^2(x-1)} dx$ [ক.র. '০২; ব. '০৫, '১০]

ধরি, $\frac{1}{x^2(x-1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$

$$\Rightarrow 1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2 \dots (1)$$

$$(1) \text{ এ } x=0 \text{ বসিয়ে পাই, } 1=-B \Rightarrow B=-1$$

(1) এ $x=1$ বসিয়ে পাই, $1=C \Rightarrow C=1$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$0=A+C \Rightarrow A=-C=-1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2(x-1)} dx &= \int \left\{ -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1} \right\} dx \\ &= -\ln|x| - \left(-\frac{1}{x} \right) + \ln|x-1| + c \\ &= \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + \frac{1}{x} + c \end{aligned}$$

12 ধরি, $I = \int \frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)} dx$ এবং

$$\frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow x+2 = A(x^2+4) + (Bx+C)(1-x) \cdots (1)$$

$$(1) \text{ এ } x=1 \text{ বসিয়ে পাই, } 1+2=5A \Rightarrow A=\frac{3}{5}$$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$0=A-B \Rightarrow B=A=\frac{3}{5}$$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে শ্রবণ সমীকৃত করে পাই,

$$2=4A+C \Rightarrow C=2-\frac{12}{5}=-\frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \frac{3}{5} \int \frac{1}{1-x} dx + \int \frac{\frac{3}{5}x - \frac{2}{5}}{x^2+4} dx \\ &= -\frac{3}{5} \ln|1-x| + \frac{3}{10} \int \frac{2xdx}{x^2+4} - \frac{2}{5} \int \frac{dx}{x^2+2^2} \\ &= -\frac{3}{5} \ln|1-x| + \frac{3}{10} \ln(x^2+4) - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} + c \\ &= -\frac{3}{5} \ln|1-x| + \frac{3}{10} \ln(x^2+4) - \frac{1}{5} \tan^{-1} \frac{x}{2} + c \end{aligned}$$

$$13(a) \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx = \int \frac{-x^3(1-x^4)+x^3}{(1-x^4)^2} dx$$

$$= \int \left\{ \frac{-x^3}{1-x^4} + \frac{x^3}{(1-x^4)^2} \right\} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{d(1-x^4)}{1-x^4} - \frac{1}{4} \int \frac{d(1-x^4)}{(1-x^4)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \ln|1-x^4| - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x^4} \right) + c \\ &= \frac{1}{4} (\ln|1-x^4| + \frac{1}{1-x^4}) + c \end{aligned}$$

$$13(b) \text{ ধরি, } I = \int \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} dx = \int \frac{x^2-4x+4}{x^2+2x+2} dx$$

$$= \int \frac{(x^2+2x+2)-6x+2}{x^2+2x+2} dx$$

$$= \int \left\{ 1 - \frac{6x-2}{(x+1)^2} \right\} dx \text{ এবং}$$

$$\frac{6x-2}{(x+1)^2} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow 6x-2 = A(x+1) + B \cdots (1)$$

$$(1) \text{ এ } x=-1 \text{ বসিয়ে পাই, } B=-6-2=-8$$

$$(1) \text{ এর উভয়পক্ষ থেকে } x \text{ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, } 6=A \Rightarrow A=6$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \int \left\{ 1 - \frac{6}{x+1} + \frac{8}{(x+1)^2} \right\} dx \\ &= x - 6 \ln|x+1| - \frac{8}{x+1} + c \end{aligned}$$

$$13(c) \text{ ধরি, } I = \int \frac{\sin 2x dx}{3+5 \cos x} = \int \frac{2 \sin x \cos x dx}{3+5 \cos x}$$

$$\text{এবং } \cos x = z \text{ . তাহলে } -\sin x dx = dz \text{ এবং}$$

$$I = \int \frac{-2z dz}{3+5z} = -\frac{2}{5} \int \frac{3+5z-3}{3+5z} dz$$

$$= -\frac{2}{5} \int \left(1 - \frac{3}{3+5z} \right) dz$$

$$= -\frac{2}{5} \left(z - \frac{3}{5} \ln|3+5z| \right) + c$$

$$= \frac{2}{25} (3 \ln|3+5z| - 5z) + c$$

$$= \frac{2}{25} (3 \ln|3+5 \cos x| - 5 \cos x) + c$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b})dx}{(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b})(\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b})} \\
 &= \int \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b})dx}{(x+a) - (x+b)} \\
 &= \int \frac{(x+a)^{1/2} - (x+b)^{1/2}}{a-b} dx \\
 &= \frac{1}{a-b} \left[\frac{(x+a)^{\frac{1+1}{2}}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{(x+b)^{\frac{1+1}{2}}}{\frac{1}{2}+1} \right] + c \\
 &= \frac{2}{3(a-b)} [(x+a)^{3/2} - (x+b)^{3/2}] + c
 \end{aligned}$$

2. $\int 3 \sin x \cos x dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{3}{2} (2 \sin x \cos x) dx = \frac{3}{2} \int \sin 2x dx \\
 &= \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) + c = -\frac{3}{4} \cos 2x + c
 \end{aligned}$$

3. (a) $\int 3 \cos 3x \cos x dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{3}{2} \{ \cos(3x+x) + \cos(3x-x) \} dx \\
 &= \int \frac{3}{2} (\cos 4x + \cos 2x) dx \\
 &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + c \\
 &= \frac{3}{8} (\sin 4x + 2 \sin 2x) + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3(b) \quad \int \cos^2 \frac{x}{2} dx &= \int \frac{1}{2} (1 + \cos x) dx \\
 &= \frac{1}{2} (x + \sin x) + c
 \end{aligned}$$

4(a) $\int \cos x \cos(\sin x) dx$

$$= \int \cos(\sin x) d(\sin x) = \cos(\sin x) + c$$

$$4(b) \text{ ধরি, } I = \int (e^x + \frac{1}{x})(e^x + \ln x) dx \quad [\text{রা. } ০১]$$

এবং $e^x + \ln x = z$. তাহলে $(e^x + \frac{1}{x})dx = dz$ এবং

$$I = \int z dz = \frac{1}{2} z^2 + c = \frac{1}{2} (e^x + \ln x)^2 + c$$

$$5 \int e^{3 \cos 2x} \sin 2x dx$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{6} \int e^{3 \cos 2x} (-6 \sin 3x) dx \\
 &= -\frac{1}{6} e^{3 \cos 2x} + c
 \end{aligned}$$

$$6(a) \text{ ধরি, } I = \int \sin^3 x \cos x dx$$

এবং $\sin x = z$. তাহলে, $\cos x dx = dz$ এবং

$$I = \int z^3 dz = \frac{1}{4} z^4 + c = \frac{1}{4} \sin^4 x + c$$

$$6(b) \text{ ধরি, } I = \int \tan^3 x \sec^2 x dx \text{ এবং } \tan x = z$$

তাহলে, $\sec^2 x dx = dz$ এবং

$$I = \int z^3 dz = \frac{z^{3+1}}{3+1} + c = \frac{1}{4} \tan^4 x + c$$

$$6(c) \int \sin^2(3x+2) dx$$

$$= \int \frac{1}{2} \{1 - \cos 2(3x+2)\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \{ \int dx - \int \cos(6x+4) dx \}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ x - \frac{\sin(6x+4)}{6} \right\} + c$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \sin(6x+4) + c$$

$$7.(a) \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int (\ln x)^2 d(\ln x)$$

$$= \frac{(\ln x)^{2+1}}{2+1} + c = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + c$$

$$7(b) \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$$

$$= \int (1+\ln x)^{\frac{1}{2}} d(1+\ln x)$$

$$= \frac{(1 + \ln x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}(1 + \ln x)^{3/2} + c$$

$$7(c) \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \int \cos(\ln x) d(\ln x) \\ = \sin(\ln x) + c$$

$$8. \int \frac{e^{-x} dx}{(5 + e^{-x})^2} \\ = \int (5 + e^{-x})^{-2} d(5 + e^{-x}).(-1) \\ = -\frac{(5 + e^{-x})^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{1}{5 + e^{-x}} + c$$

$$9. \int \frac{e^x (1+x) dx}{\cos^2(xe^x)}$$

$$\text{ধরি, } xe^x = z \quad e^x(x+1)dx = dz$$

$$\int \frac{e^x (1+x) dx}{\cos^2(xe^x)} = \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \int \sec^2 z dz \\ = \tan z + c = \tan(xe^x) + c$$

$$10(a) \text{ ধরি, } I = \int \frac{\sin(2 + 5 \ln x)}{x} dx \text{ এবং}$$

$$2 + 5 \ln x = z. \text{ তাহলে, } \frac{5}{x} dx = dz \text{ এবং}$$

$$I = \frac{1}{5} \int \sin z dz = \frac{1}{5}(-\cos z) + c \\ = -\frac{1}{5} \cos(2 + 5 \ln x) + c$$

$$10(b) \int \frac{dx}{\sin(x-a) \sin(x-b)} \\ = \int \frac{\sin\{(x-b)-(x-a)\} dx}{\sin(a-b) \sin(x-a) \sin(x-b)} \\ = \int \frac{\sin(x-b) \cos(x-a) - \cos(x-b) \sin(x-a) dx}{\sin(a-b) \sin(x-a) \sin(x-b)} \\ = \frac{1}{\sin(a-b)} \int \{\cot(x-a) - \cot(x-b)\} dx \\ = \frac{\ln |\sin(x-a)| - \ln |\sin(x-b)|}{\sin(a-b)} + c$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)} \right| + c$$

$$11(a) \int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{1+\tan x}} = \int \frac{d(1+\tan x)}{\sqrt{1+\tan x}} \\ = 2\sqrt{1+\tan x} + c$$

$$11(b) \int \frac{dx}{\sqrt{(\sin^{-1} x)\sqrt{1-x^2}}} = \int \frac{d(\sin^{-1} x)}{\sqrt{(\sin^{-1} x)}} \\ [\because d(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx] \\ = 2\sqrt{\sin^{-1} x} + c \quad [\because \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}]$$

$$11(c) \text{ ধরি, } I = \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\tan^{-1} x + 3}}$$

$$\text{এবং } \tan^{-1} x + 3 = z. \text{ তাহলে, } \frac{dx}{1+x^2} = dz \text{ এবং}$$

$$I = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + c \quad [\because \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}]$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\tan^{-1} x + 3}} = 2\sqrt{\tan^{-1} x + 3} + c$$

$$11(d) \int \frac{\tan(\ln|x|)}{x} dx = \int \tan(\ln|x|) d(\ln|x|)$$

$$= \ln \{\sec(\ln|x|)\} + c$$

$$12(a) \int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{1-\tan^2 x}} = \int \frac{d(\tan x)}{\sqrt{1-\tan^2 x}} \\ = \sin^{-1}(\tan x) + c$$

$$12(b) \int \frac{dx}{\sqrt{15-4x-4x^2}} \\ = \int \frac{dx}{\sqrt{16 - \{(2x)^2 + 2.2x.1 + 1^2\}}} \\ = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+1)}{\sqrt{4^2 - (2x+1)^2}} = \frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{4}\right) + c$$

12(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

 $= \int \frac{dx}{\sqrt{2^2 - (x^2 - 4x + 2^2)}}$
 $= \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{2^2 - (x-2)^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + c$

12(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2(1-x)^2}}$

 $= -\frac{1}{b} \int \frac{d(b-bx)}{\sqrt{a^2 - (b-bx)^2}}$
 $= -\frac{1}{b} \sin^{-1}\left(\frac{b-bx}{a}\right) + c$

12(e) ধরি, $I = \int \sqrt{\tan x} dx$ এবং $\tan x = z^2$
তাহলে, $\sec^2 x dx = 2z dz$

 $\Rightarrow dx = \frac{2z dz}{1 + \tan^2 x} = \frac{2z}{1 + z^4} \text{ এবং}$
 $I = \int \frac{2z^2 dz}{1 + z^4} = \int \frac{(z^2 + 1) - (z^2 - 1)}{1 + z^4} dz$
 $= \int \left[\frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} + \frac{z^2 - 1}{z^4 + 1} \right] dz$
 $= \int \left[\frac{1 + \frac{1}{z^2}}{z^2 + \frac{1}{z^2}} + \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{z^2 + \frac{1}{z^2}} \right] dz$
 $= \int \left[\frac{1 + \frac{1}{z^2}}{(z - \frac{1}{z})^2 + 2} + \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{(z + \frac{1}{z})^2 - 2} \right] dz$
 $= \int \frac{d(z - \frac{1}{z})}{(z - \frac{1}{z})^2 + (\sqrt{2})^2} + \int \frac{d(z + \frac{1}{z})}{(z + \frac{1}{z})^2 - (\sqrt{2})^2}$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{z - \frac{1}{z}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{z - \frac{1}{z} - \sqrt{2}}{z - \frac{1}{z} + \sqrt{2}} \right| + c$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{z^2 - 1}{\sqrt{2}z} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{z^2 - 1 - \sqrt{2}z}{z^2 - 1 + \sqrt{2}z} \right| + c$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{\tan x - 1}{\sqrt{2} \tan x} +$
 $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan x - \sqrt{2} \tan x - 1}{\tan x + \sqrt{2} \tan x - 1} \right| + c$

13. ধরি, $I = \int 3 \cos^3 x \cos 2x dx$

 $\cos^3 x \cos 2x = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 3x) \cos 2x$
 $= \frac{1}{4} [3 \cos x \cos 2x + \cos 3x \cos 2x]$
 $= \frac{1}{4} [3 \cdot \frac{1}{2} (\cos 3x + \cos x) + \frac{1}{2} (\cos 5x + \cos x)] =$
 $\frac{1}{8} (3 \cos 3x + 4 \cos x + \cos 5x)$
 $\therefore I = \frac{3}{8} \int (3 \cos 3x + 4 \cos x + \cos 5x) dx$
 $= \frac{3}{8} \left(3 \cdot \frac{1}{3} \sin 3x + 4 \sin x + \frac{1}{5} \sin 5x \right) + c$

14(a) ধরি, $I = \int e^{2x} \cos x dx$

 $= e^{2x} \int \cos x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (e^{2x}) \int \cos x dx \right\} dx$
 $= e^{2x} \sin x - \int 2e^{2x} \sin x dx$
 $= e^{2x} \sin x - 2e^{2x} \int \sin x dx +$
 $2 \int \left\{ \frac{d}{dx} (e^{2x}) \int \sin x dx \right\} dx$
 $= e^{2x} \sin x - 2e^{2x} (-\cos x) + 2 \int 2e^{2x} (-\cos x) dx$
 $= e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4 \int e^{2x} \cos x dx$
 $= e^{2x} (\sin x + 2 \cos x) - 4I + c_1$
 $\Rightarrow 5I = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x) + c_1$
 $\Rightarrow I = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + \frac{1}{5} c_1$
 $\therefore I = \int e^{2x} \sin x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + c$

14.(b) $\int e^{-3x} \cos 4x dx$

$$= \frac{e^{-3x}}{3^2 + 4^2} (-3\cos 4x + 4\sin 4x) + c$$

[সূত্র প্রয়োগ করে ।]

$$= \frac{e^{-3x}}{25} (-3\cos 4x + 4\sin 4x) + c$$

15(a) ধরি, $I = \int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx$

$$= \int e^x \left\{ \frac{1}{1+\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} \right\} dx$$

এবং $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

$$f'(x) = \frac{(1+\cos x)\cos x - \sin x(0-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$$
 এবং

$I = \int e^x \left\{ \frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} \right\} dx$

 $= \int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx = e^x f(x) + c$
 $\therefore I = \int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx = e^x \frac{\sin x}{1+\cos x} + c$

15(b) $\int e^{ax} (a \sin bx + b \cos bx) dx$

 $= \int ae^{ax} \sin bxdx + \int be^{ax} \cos bxdx$
 $= a \sin bx \int e^{ax} dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (a \sin bx) \int e^{ax} dx \right\} dx$
 $+ \int be^{ax} \cos bxdx$
 $= a \sin bx \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int (ab \cos bx) \left(\frac{e^{ax}}{a} \right) dx$
 $+ \int be^{ax} \cos bxdx$
 $= e^{ax} \sin bx - \int be^{ax} \cos bxdx$
 $+ \int be^{ax} \cos bxdx$

$\therefore \int e^{ax} (a \sin bx + b \cos bx) dx = e^{ax} \sin bx + c$

16(a) $\int \frac{x-3}{(1-2x)(1+x)} dx$

$$= \int \left[\frac{\frac{1}{2}-3}{(1-2x)(1+\frac{1}{2})} + \frac{-1-3}{\{1-2(-1)\}(1+x)} \right] dx$$

$$= \int \left[\frac{-\frac{5}{2}}{2(1-2x)} + \frac{-4}{3(1+x)} \right] dx$$

$$= -\frac{5}{3} \left(-\frac{1}{2} \right) \int \frac{d(1-2x)}{(1-2x)} - \frac{4}{3} \int \frac{1}{1+x} dx$$

$$= \frac{5}{6} \ln |1-2x| - \frac{4}{3} \ln |1+x| + c$$

16(b) $\int \frac{dx}{x^4 - 1} = \int \frac{dx}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}$

$$= \int \left\{ \frac{1}{(x^2 - 1)(1+1)} + \frac{1}{(-1-1)(x^2 + 1)} \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - 1^2} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \tan^{-1} x + c$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \tan^{-1} x + c$$

17(a) $\int \frac{1}{x(x+1)^2} dx$

ধরি, $\frac{1}{x(x+1)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

 $\Rightarrow 1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx \cdots (1)$

(1) এ $x=0$ বিনিয়ে পাই, $1=A \Rightarrow A=1$

(1) এ $x=-1$ বিনিয়ে পাই, $1=-C \Rightarrow C=-1$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই

 $0 = A + B \Rightarrow B = -A = -1$

$\therefore \int \frac{1}{x(x+1)^2} dx = \int \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right\} dz$

$$\begin{aligned} &= \ln|x| - \ln|x+1| - \left(-\frac{1}{x+1}\right) + c \\ &= \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17(b) \int \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx &= \int \frac{3(x+1)-2}{(x+1)^2} dx \\ &= \int \left\{ \frac{3(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^2} \right\} dx \\ &= \int \left\{ \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} \right\} dx \\ &= 3\ln|x+1| - 2\left(-\frac{1}{x+1}\right) + c \\ &= 3\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18. (a) \int \frac{dx}{x(x^2+1)} \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x(x^2+1)} dx \\ &= \int \left\{ \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right\} dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{(2x+0)dx}{x^2+1} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18(b) \text{ ধরি, } I &= \int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+4)} \text{ এবং} \\ \frac{x}{(x-1)(x^2+4)} &\equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \\ \Rightarrow x &= A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1) \dots (1) \end{aligned}$$

$$(1) \text{ এ } x=1 \text{ বসিয়ে পাই, } I = 5A \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$0 = A + B \Rightarrow B = -A = -\frac{1}{5}$$

(1) এর উভয়পক্ষ থেকে শ্রবণ সমীকৃত করে পাই,

$$0 = 4A - C \Rightarrow C = 4A = \frac{4}{5}$$

$$I = \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{-\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}}{x^2+4} dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{10} \int \frac{2xdx}{x^2+4} + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{x^2+2^2} \\ &= \frac{1}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{10} \ln(x^2+4) + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} + c \\ &= \frac{1}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{10} \ln(x^2+4) + \frac{2}{5} \tan^{-1} \frac{x}{2} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19.(a) \int xe^{-x} dx \\ &= x \int e^{-x} dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \int e^{-x} dx \right\} dx \\ &= -xe^{-x} - \int 1 \cdot (-e^{-x}) dx = -xe^x - e^{-x} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19(b) \int xe^{ax} dx \\ &= x \int e^{ax} dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \int e^{ax} dx \right\} dx \\ &= x \cdot \frac{1}{a} e^{ax} - \int 1 \cdot \left(\frac{1}{a} e^{ax} \right) dx = \frac{1}{a} xe^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax} + c \\ &= \frac{1}{a^2} (ax - 1)e^{ax} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19(c) \int x^3 e^{2x} dx \\ &= x^3 \int e^{2x} dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x^3) \int e^{2x} dx \right\} dx \\ &= x^3 \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) - \int (3x^2) \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{2} [x^2 \int e^{2x} - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x^2) \int e^{2x} dx \right\} dx] \\ &= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{2} [x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int (2x) \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx] \\ &= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{2} [\frac{x^2 e^{2x}}{2} - \{x \int e^{2x} - \int 1 \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx\}] \\ &= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{2} [\frac{x^2 e^{2x}}{2} - \{x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\}] + c \\ &= (\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{3}{8}) e^{2x} + c \end{aligned}$$

[MCQ এর ক্ষেত্রে:

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{2x} dx &= \left\{ \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{2^2} (3x^2) + \frac{1}{2^3} (6x) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2^4} \cdot 6 \right\} e^{2x} = \left\{ \frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{3}{8} \right\} e^{2x} \end{aligned}$$

$$20. (a) \int x \sin x dx$$

$$\begin{aligned} &= x \int \sin x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \int \sin x dx \right\} dx \\ &= x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \sin x + c \end{aligned}$$

$$20. (b) \int x \cos x dx$$

$$\begin{aligned} &= x \int \cos x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \int \cos x dx \right\} dx \\ &= x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

$$20(c) \int x^2 \sin x dx$$

$$\begin{aligned} &= x^2 \int \sin x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x^2) \int \sin x dx \right\} dx \\ &= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x) dx \\ &= -x^2 \cos x + 2[x \int \cos x - \end{aligned}$$

$$\int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \int \cos x dx \right\} dx]$$

$$\begin{aligned} &= -x^2 \cos x + 2[x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx] \\ &= -x^2 \cos x + 2[x \sin x - (-\cos x)] + c \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c \end{aligned}$$

$$20(d) ଧରି, I = \int \cos \sqrt{x} dx \text{ ଏବଂ } \sqrt{x} = z$$

$$\text{ତଥାଲେ } \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dz \Rightarrow dx = 2z dz \text{ ଏବଂ }$$

$$I = \int 2z \cos z dz$$

$$= 2 \left[z \int \cos z dz - \int \left\{ \frac{d}{dz}(z) \int \cos z dz \right\} dz \right]$$

$$= 2[z \sin z - \int 1 \cdot \sin z dz]$$

$$= 2z \sin z - 2(-\cos z) + c$$

$$= 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + c$$

$$21.(a) \int x^2 \cos^2 x dx$$

[ଆ.ଭ.ଗ. ୮୯, '୯୬]

$$\begin{aligned} &= \int x^2 \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int x^2 dx + \int x^2 \cos 2x dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) - (2x)(-\frac{1}{2} \cos 2x) \right. \\ &\quad \left. + 2(-\frac{1}{2} \sin 2x) \right] + c \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x \right] + c \end{aligned}$$

$$21(b) \int x \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int x \sin 2x dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [x \int \sin 2x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \int \sin 2x dx \right\} dx] \\ &= \frac{1}{2} [x(-\frac{\cos 2x}{2}) - \int 1 \cdot (-\frac{\cos 2x}{2}) dx] \\ &= \frac{1}{4} [-x \cos 2x + \frac{\sin 2x}{2}] + c \end{aligned}$$

$$21(c) \int x \sin x \sin 2x dx$$

$$\begin{aligned} &= \int x \frac{1}{2} (\cos x - \cos 3x) dx \\ &= \frac{1}{2} [x \int \cos x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \int \cos x dx \right\} dx \\ &\quad - x \int \cos 3x dx + \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \int \cos 3x dx \right\} dx] \\ &= \frac{1}{2} [x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx \\ &\quad - x \frac{\sin 3x}{3} + \int 1 \cdot \frac{\sin 3x}{3} dx] \\ &= \frac{1}{2} [x \sin x + \cos x - \frac{x \sin 3x}{3} - \frac{\cos 3x}{9}] + c \end{aligned}$$

$$4. (c) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = \int x \cos ec^2 x dx$$

$$\begin{aligned} &= x \int \cos ec^2 x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \int \cos ec^2 x dx \right\} dx \\ &= x(-\cot x) - \int 1 \cdot (-\cot x) dx \\ &= -x \cot x + \ln |\sin x| + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21(d) \text{ ধরি, } I &= \int \sec^3 x \, dx = \int \sec^2 x \sec x \, dx \\
 &= \sec x \int \sec^2 x \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(\sec x) \int \sec^2 x \, dx \right\} dx \\
 &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan x \cdot \tan x \, dx \\
 &= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx \\
 &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx \\
 \Rightarrow I &= \sec x \tan x - I + \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + c_1 \\
 \Rightarrow 2I &= \sec x \tan x + \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + c_1 \\
 \Rightarrow I &= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + \frac{1}{2} c_1 \\
 \Rightarrow I &= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + c
 \end{aligned}$$

$$22(a) \int x^2 \ln x \, dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln x \int x^2 \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(\ln x) \int x^2 \, dx \right\} dx \\
 &= \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx \\
 &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + c = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c
 \end{aligned}$$

$$22(b) \int x^3 \ln x \, dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln x \int x^3 \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(\ln x) \int x^3 \, dx \right\} dx \\
 &= \ln x \cdot \frac{x^4}{4} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^4}{4} \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx \\
 &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + c
 \end{aligned}$$

$$22(c) \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln x \int \frac{1}{x^2} \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(\ln x) \int \frac{1}{x^2} \, dx \right\} dx \\
 &= \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) - \int \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} \ln x + \left(-\frac{1}{x} \right) + c \\
 &= -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 23(a) \int 2^x \sin x \, dx &= \int e^{x \ln 2} \sin x \, dx \\
 &= \frac{e^{x \ln 2}}{(\ln 2)^2 + 1^2} [\ln 2 \cdot \sin x - 1 \cdot \cos x] + c
 \end{aligned}$$

[সূত্র প্রয়োগ করে।]

$$= \frac{2^x}{(\ln 2)^2 + 1} [\ln 2 \cdot \sin x - \cos x] + c$$

$$23(b) \int (3^x e^x + \ln x) \, dx \quad [প.গ.৮]$$

$$\begin{aligned}
 &= \int (3e)^x \, dx + \int \ln x \, dx \\
 &= \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} + \frac{1}{x} + c = \frac{3^x e^x}{\ln 3 + \ln e} + \frac{1}{x} + c \\
 &= \frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + \frac{1}{x} + c
 \end{aligned}$$

$$8(c) \text{ ধরি, } I = \int e^x \left\{ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(x-1)^2} \right\} dx \quad \text{এবং}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$$\therefore f'(x) = -(1-x)^{-1-1}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{এবং}$$

$$I = \int e^x \left\{ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} \right\} dx$$

$$= \int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx = e^x f(x) + c$$

$$\therefore \int e^x \left\{ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(x-1)^2} \right\} dx = \frac{e^x}{1-x} + c$$

$$24(a) \int e^{-x} \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right\} dx = \int \frac{e^{-x}}{x} \, dx + \int \frac{e^{-x}}{x^2} \, dx$$

$$= \frac{1}{x} \int e^{-x} \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) \int e^{-x} \, dx \right\} dx + \int \frac{e^{-x}}{x^2} \, dx$$

$$= \frac{1}{x} (-e^{-x}) - \int \left(-\frac{1}{x^2} \right) (-e^{-x}) \, dx + \int \frac{e^{-x}}{x^2} \, dx$$

$$= -\frac{e^{-x}}{x} - \int \frac{e^{-x}}{x^2} dx + \int \frac{e^{-x}}{x^2} dx$$

$$\int e^{-x} \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right\} dx = -\frac{e^{-x}}{x} + c$$

24(b) $\int e^x \{ \tan x + \ln(\sec x) \} dx$ [প.ত.প. '১১]

ধরি, $I = \int e^x \{ \tan x + \ln(\sec x) \} dx$ এবং

$$f(x) = \ln(\sec x)$$

$$\therefore f'(x) = \frac{\sec x \tan x}{\sec x} = \tan x \text{ এবং}$$

$$I = \int e^x \{ \ln(\sec x) + \tan x \} dx$$

$$= \int e^x \{ f(x) + f'(x) \} dx = e^x f(x) + c$$

$$\therefore \int e^x \{ \tan x + \ln(\sec x) \} dx = e^x \ln(\sec x) + c$$

25(a) ধরি, $I = \int e^x \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2} dx$ [প.ত.প. '০২]

$$= \int e^x \frac{x^2 - 1 + 2}{(x+1)^2} dx$$

$$= \int e^x \left\{ \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2} \right\} dx$$

$$= \int e^x \left\{ \frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right\} dx \text{ এবং } f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1).1 - (x-1).1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \text{ এবং}$$

$$I = \int e^x \{ f(x) + f'(x) \} dx = e^x f(x) + c$$

$$\int e^x \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2} dx = e^x \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + c$$

25(b) ধরি, $I = \int \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2} \right] dx$ এবং $\ln x \leq y$.

তাহলে, $x = e^y \Rightarrow dx = e^y dy$ এবং

$$I = \int e^y \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \right] dy = \int e^y \left[\frac{1}{y} + D\left(\frac{1}{y}\right) \right] dy$$

$$[\because D\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2}]$$

$$= \frac{e^y}{y} + c = \frac{x}{\ln x} + c$$

26. $\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} dx$

ধরি, $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$

$$\Rightarrow x = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2 \dots(1)$$

$$(1) \text{ এ } x=1 \text{ বসিয়ে পাই, } 1 = 3B \Rightarrow B = 1/3$$

$$(1) \text{ এ } x=-2 \text{ বসিয়ে পাই, } -2 = 9C \Rightarrow C = -2/9$$

$$(1) \text{ এর উভয়পক্ষ থেকে } x^2 \text{ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, } 0 = A + C \Rightarrow A = -C = 2/9$$

$$\therefore \int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} dx$$

$$= \int \left\{ \frac{2/9}{x-1} + \frac{1/3}{(x-1)^2} + \frac{-2/9}{x+2} \right\} dx$$

$$= \frac{2}{9} \ln|x-1| + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{x-1} \right) - \frac{2}{9} \ln|x+2| + c$$

$$= \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| - \frac{1}{3(x-1)} + c$$

27(a) ধরি, $I = \int \frac{x^2 + 1}{(x+2)^2} dx$

$$= \int \frac{x^2 + 4x + 4 - (4x+3)}{(x+2)^2} dx$$

$$= \int \left\{ 1 - \frac{4x+3}{(x+2)^2} \right\} dx \text{ এবং}$$

$$\frac{4x+3}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$\Rightarrow 4x+3 = A(x+2) + B \dots(1)$$

$$(1) \text{ এ } x=-2 \text{ বসিয়ে পাই, } B = -8+3 = -5$$

$$(1) \text{ এর উভয়পক্ষ থেকে } x \text{ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, } 4 = A \Rightarrow A = 4$$

$$\therefore I = \int \left\{ 1 - \frac{4}{x+2} + \frac{5}{(x+2)^2} \right\} dx$$

$$= x - 4 \ln|x+2| - \frac{5}{x+2} + c$$

ডক্ট পরীক্ষার MCQ

w

w

w

w

b

o

i

g

$$1. \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\tan x}} = ? \quad [\text{DU 07-08; NU06-07}]$$

$$\text{Sol}^n: I = \int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{\tan x}} = \int \frac{d(\tan x)}{\sqrt{\tan x}} = 2\sqrt{\tan x}$$

$$2. \int \frac{e^x (1+x)}{\cos^2(xe^x)} dx = ? \quad [\text{DU 07-08; NU07-08; KU 03-04}]$$

$$\text{Sol}^n: I = \int \sec^2(xe^x) d(xe^x) = \tan(xe^x)$$

$$3. \int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = ? \quad [\text{DU 02-03}]$$

$$\text{Sol}^n: I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = 2 \int \frac{d(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}$$

$$= 2 \ln(\sqrt{x}+1) + c$$

$$4. \int \sin^5 x \cos x dx = ? \quad [\text{DU 98-99}]$$

$$\text{Sol}^n: I = \int \sin^5 x d(\sin x) = \frac{1}{6} \sin^6 x + c$$

$$5. \int \frac{dx}{e^{x.} + e^{-x}} = ? \quad [\text{JU 06-07; CU 04-05}]$$

$$\text{Sol}^n: I = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \int \frac{d(e^x)}{1 + (e^x)^2}$$

$$= \tan^{-1}(e^x) + c$$

$$6. \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = ? \quad [\text{DU 95-96; JU 07-08}]$$

$$\text{Sol}^n: I = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + (-\frac{1}{2}) \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-x^2} = \sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2}$$

$$7. \int x e^x dx = ? \quad [\text{JU 07-08}]$$

$$\text{Sol}^n: I = (x+1)e^x + c$$

$$8. \int \frac{dx}{ay - bx} = ? \quad [\text{SU 06-07}]$$

$$\text{Sol}^n: I = -\frac{1}{b} \int \frac{d(ay - bx)}{ay - bx}$$

$$= -\frac{1}{6} \ln |ay - bx| + c$$

$$9. \int e^x \sec x (1 + \tan x) dx = ? \quad [\text{RU 06-07}]$$

$$\text{Sol}^n: I = \int e^x (\sec x + \sec x \tan x) dx$$

$$= \int e^x \{\sec x + D(\sec x)\} dx = e^x \sec x$$

$$10. \int -\sin \phi dt = ? \quad [\text{CU 04-05}]$$

$$\text{Sol}^n: I = -\sin \phi \int dt = -t \sin \phi + c$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{9-16x}} = ? \quad [\text{KU 03-04}]$$

$$\text{Sol}^n: I = \frac{1}{4} \int \frac{d(4x)}{\sqrt{3^2 - (4x)^2}} = \frac{1}{4} \sin^{-1} \frac{4x}{3}$$

$$12. \int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx = ? \quad [\text{DU 01-02; CU 02-03; RU 04-05, 05-06; JU 06-07; BUET 06-07}]$$

$$\text{Sol}^n: I = \int \frac{(x+1-1)e^x}{(x+1)^2} dx$$

$$= \int e^x \left\{ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right\} dx$$

$$= \int e^x \left\{ \frac{1}{x+1} + D\left(\frac{1}{x+1}\right) \right\} dx = \frac{e^x}{x+1} + c$$

$$13. \int x \cos x dx = ? \quad [\text{DU 96-97}]$$

$$= x \sin x - (1)(-\cos x) = x \sin x + \cos x + c$$

$$14. \int x \ln(1+2x) dx = ? \quad [\text{SU 96-97}]$$

$$\text{Sol}^n: I = \ln(1+2x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{2}{1+2x} \cdot \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(1+2x) - \int \frac{\frac{1}{2}x(2x+1) - \frac{1}{4}(2x+1) + \frac{1}{4}}{2x+1} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(1+2x) - \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{1}{2x+1} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(1+2x) - \left\{ \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} \ln(2x+1) \right\} + c$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(1+2x) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} \ln(2x+1) + c$$

15. $\int \log_3 x \, dx = ?$ [CU 06-07]

$$\text{Sol}'' : I = x \log_3 x - \int \frac{1}{x \ln 3} \cdot x \, dx$$

$$= x \log_3 x - \frac{x}{\ln 3} + c$$

অন্তরক ও যোগজের মিশ্রিত সমসা

16. $y = x^2$ হলে $\int (\frac{dy}{dx}) dx$ এর মান কত? [CU 02-03; IU 05-06]

$$\text{Sol}'' : \int (\frac{dy}{dx}) dx = y + c = x^2 + c$$

17. যদি $\frac{dy}{dx} = 2a$ হয় তাহলে y এর মান কত? [CU 02-03]

$$\text{Sol}'' : \frac{dy}{dx} = 2a \Rightarrow y = \int 2adx = 2ax + c$$

18. $\int f(x)dx = \cos x + k$ হলে $f(x)$ এর মান কত? [CU 02-03]

$$\text{Sol}'' : f(x) = \frac{d}{dx}(\cos x + k) = -\sin x$$

19. $\frac{d}{dx}(\int ydx)$ এর মান কত যখন $y = \sin x$? [CU 02-03]

$$\text{Sol}'' : \frac{d}{dx}(\int ydx) = y = \sin x$$

আংশিক ভাগারণ

20. $\frac{x+17}{(x-3)(x+2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2}$ হলে a ও b

এর মান কত? [DU 08-09; JU, CU 07-08]

$$\text{Sol}'' : a = \frac{3+17}{3+2} = 4; b = \frac{-2+17}{-2-3} = -3$$

21. $\frac{x+A}{(x+1)(x-3)} = \frac{B}{x+1} + \frac{1}{x-3}$

$$\text{Sol}'' : \frac{3+A}{3+1} = 1 \Rightarrow A = 1;$$

$$B = \frac{-1+A}{-1-3} = \frac{-1+1}{-4} = 0$$

মান নির্ণয় কর :

1.(a) $\int_0^3 (3 - 2x + x^2) dx$ [ক.'০৬, '০৭]

$$= \left[3x - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \{(3 \cdot 3 - 3^2 + \frac{3^3}{3}) - 0\}$$

$$= (9 - 9 + 9) = 9$$

(b) $\int_0^{\pi/2} (\sin \theta + \cos \theta) d\theta$ [ব.'০৮]

$$= [-\cos \theta + \sin \theta]_0^{\pi/2} = [-\cos \theta + \sin \theta]_0^{\pi/2}$$

$$= (\sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2}) - (\sin 0 - \cos 0)$$

$$= (1 - 0) - (0 - 1) = 2$$

(c) $\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin 2x) \right]_0^{\pi}$

$$= \frac{1}{2} \{(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi) - (0 - \frac{1}{2} \sin 2 \cdot 0)\} = \frac{\pi}{2}$$

(d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec x + 1}{\sec x} dx$ [ষ.'০৬; কু.'০৯]

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \frac{1}{\sec x}) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos x) dx$$

$$= x[1 + \sin x]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} - \{-\frac{\pi}{2} + \sin(-\frac{\pi}{2})\}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 1 - (-\frac{\pi}{2} - 1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 2 = \pi + 2$$

(e) $\int_{-1}^1 |x| dx$ [প.ভ.গ.'০৬]

$$= \int_{-1}^0 |x| dx + \int_0^1 |x| dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^1 x dx$$

$|\because |x|=x, x \geq 0; |x|=-x, x \leq 0|$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 = 1$$

2.(a) $\int_0^{\pi/3} \frac{1}{1 - \sin x} dx$

[ঢ. '০৯, '১৩; ষ. '০৯; সি. '১০; গা�.'১৩]

$$= \int_0^{\pi/3} \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} dx$$

$$= \int_0^{\pi/3} \frac{1 + \sin x}{1 - \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/3} \left\{ \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right\} dx$$

$$= \int_0^{\pi/3} \{\sec^2 x + \sec x \tan x\} dx$$

$$= [\tan x + \sec x]_0^{\pi/3}$$

$$= \tan \frac{\pi}{3} + \sec \frac{\pi}{3} - (\tan 0 + \sec 0)$$

$$= \sqrt{3} + 2 - 0 - 1 = \sqrt{3} + 1$$

2(b) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos x} dx$ [ব.'০৮; ঢ.সি.'১১]

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sec^2 \frac{x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[2 \tan \frac{x}{2} \right]_0^{\pi/2} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$$

3. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2\theta}{\cos^2 \theta} d\theta$ [ব.'১১]

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} (2 - \sec^2 \theta) dx = [2\theta - \tan \theta]_0^{\pi/4}$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{4} - (2 \cdot 0 - \tan 0) = \frac{\pi}{2} - 1$$

4.(a) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$ [ব.'০৮; গা�.'০৫, '০৯; সি.'১১]

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} \{(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi) - (0 + \frac{1}{2} \sin 0)\} = \frac{\pi}{4}$$

4 (b) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$ [সি.'০৬, '০৭; ষ. '০৭, '০৯,

'১৩; ব. '০৮; গা�.'০৬; পি.'১৩]

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} (3\cos x + \cos 3x) dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[3\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{1}{4} \left(3\sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} - 3\sin 0 - \frac{1}{3} \sin 0 \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(3 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot (-1) - 0 - 0 \right) = \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

4(c) $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx$ [ষ. '০৮]

$$\cos^4 x = \frac{1}{4} (2\cos^2 x)^2 = \frac{1}{4} (1 + \cos 2x)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ 1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) \right\}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right)$$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2}x + \frac{2}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\pi/2}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \sin \pi + \frac{1}{8} \sin 2\pi - 0 \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{3\pi}{4} + 0 \right) = \frac{3\pi}{16}$$

4(d) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1) dx$

$$= [\tan x - x]_0^{\pi/4} = \tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - (\tan 0 - 0)$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}$$

4(e) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta$ [মা.রো. '০৯]

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4} - (0 - \frac{\sin 0}{4}) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - 0 - (0 - 0) \right\} = \frac{\pi}{4}$$

5(a) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin x dx$ [জ. '০৩; পি. '১০; ষ. '১১]

$$\begin{aligned}
 &= - \int_0^{\pi/2} (\cos x)^5 (-\sin x) dx \\
 &= - \left[\frac{1}{6} (\cos x)^6 \right]_0^{\pi/2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \frac{1}{6} \left\{ (\cos \frac{\pi}{2})^6 - (\cos 0)^6 \right\} \\
 &= - \frac{1}{6} \{ 0 - 1 \} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

5(b) ধরি $I = \int_0^{\pi/4} \sin^4 x \cos^4 x dx$ [প.ভ.গ'৮১]

$$\sin^4 x \cos^4 x = \frac{1}{16} (2\sin x \cos x)^4 = \frac{1}{16} \sin^4 2x$$

$$= \frac{1}{16} \left\{ \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) \right\}^2$$

$$= \frac{1}{64} (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x)$$

$$= \frac{1}{64} \left\{ 1 - 2\cos 4x + \frac{1}{2} (1 + \cos 8x) \right\}$$

$$= \frac{1}{128} (3 - 4\cos 4x + \cos 8x)$$

$$\therefore I = \frac{1}{128} \left[3x - 4 \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{128} \left(\frac{3\pi}{4} - \sin \pi + \frac{1}{8} \sin 2\pi - 0 \right)$$

$$= \frac{1}{128} \times \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{512}$$

5(c) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \sin 3x dx$

[ষ. '০৫; মা. '০৮; ষ. '১৮]

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \sin 3x dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \cos 2x \sin 3x \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{4} (\sin 5x + \sin x) \right\} dx$$

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{5} \cos 5x - \cos x \right) \right]_0^{\pi/2} \\ &= -\frac{1}{6} (\cos \frac{3\pi}{2} - \cos 0) + \frac{1}{20} (\cos \frac{5\pi}{2} - \cos 0) \\ &+ \frac{1}{4} (\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0) \\ &- \frac{1}{6} (0-1) + \frac{1}{20} (0-1) + \frac{1}{4} (0-1) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{20} - \frac{1}{4} = \frac{10-3-15}{60} = \frac{-8}{60} = -\frac{2}{15}$$

$$6.(d) \int_0^{\pi} 3\sqrt{1-\cos x} \sin x dx \quad [বক্স, ৩৮]$$

$$\begin{aligned} z &= \cos x \quad dz = -\sin x dx \\ x &= 0 \Rightarrow z = 1 \quad x = \pi \Rightarrow z = -1 \\ -3 \int_1^{-1} \sqrt{1-z} dz &= -3 \left[-\frac{2}{3} (1-z)^{\frac{3}{2}} \right]_1^{-1} \\ 2\{(1+1)^{\frac{3}{2}} - (1-1)^{\frac{3}{2}}\} &= 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$6.(e) \int_0^{\pi/2} (1+\cos \theta)^2 \sin \theta d\theta \quad [বক্স, অন্তর্বক্স, ৩, ১৩]$$

$$\begin{aligned} z &= 1+\cos x \quad dz = -\sin x dx \\ x &= 0 \Rightarrow z = 2 \quad x = \frac{\pi}{2} \quad z = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (1+\cos \theta)^2 \sin \theta d\theta &= - \int_2^1 z^2 dz \\ \left[-\frac{z^3}{3} \right]_2^1 &= -\left(\frac{1^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3} - \frac{8}{3}\right) = \frac{7}{3} \\ \int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x dx & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\cos x - \cos 3x) dx & \\ \frac{1}{2} \left[\sin x - \frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\pi/2} & \\ \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} \right) &= \sin 0 + \frac{1}{3} \sin 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{3} (-1) - 0 + 0 \right\} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$6.(f) \int_0^{\pi/2} \cos 2x \cos 3x dx \quad [বক্স]$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\cos 5x + \cos x) dx$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} \sin 5x + \sin x \right]_0^{\pi/2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{5} \sin 0 - \sin 0 \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \cdot 1 + 1 \right) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{5} = \frac{3}{5}$$

$$6.(g) \int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos x dx \quad [বক্স, ৩৮, ৩]$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\sin 3x + \sin x) dx$$

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} \cos 3x - \cos x \right]_0^{\pi/2}$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \cos 0 + \cos 0 \right)$$

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} (\cos \frac{3\pi}{2} - \cos 0) - (\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0) \right]$$

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} (0-1) - (0-1) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3}$$

$$7.(a) \text{ এখন, } I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin^3 x dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin^2 x \sin x dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} (1 - \cos^2 x) \sin x dx$$

$$z = \cos x \quad dz = -\sin x dx$$

$$x = 0 \Rightarrow z = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = 0$$

$$= - \int_1^0 \sqrt{z} (1 - z^2) dz$$

$$- \int_1^0 (\sqrt{z} - z^{5/2}) dz = - \left[\frac{z^{3/2}}{3/2} - \frac{z^{7/2}}{7/2} \right]_1^0$$

$$- \left\{ \frac{2}{3} (0-1) - \frac{2}{7} (0-1) \right\} = - \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{7} \right)$$

$$-\frac{-14+6}{21} = \frac{8}{21}$$

7.(b) এবং $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt{\sin x}}$ [৩, ৫, ৩০]

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$$

$$z = \sin x \quad dz = \cos x dx$$

$$x = 0 \text{ এবং } z = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} \quad z = 1$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1-z^2}{\sqrt{z}} \right) dz = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{z}} - z^{3/2} \right) dz$$

$$= \left[2\sqrt{z} - \frac{z^{5/2}}{5/2} \right]_0^1 = 2(1-0) - \frac{2}{5}(1-0)$$

$$= 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

8.(a) এবং $\int_0^1 \frac{(\sin^{-1} x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ [৩, ৫১; ৩, ৫২]

$$z = \sin^{-1} x \quad dz = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$x = 0 \text{ এবং } z = 0 \quad x = 1 \quad z = \frac{\pi}{2}$$

$$= \int_0^{\pi/2} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 - 0 \right\}$$

$$= \frac{\pi^3}{24}$$

8.(b) $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ [৩, ৫৪; ৩, ৫৫; ৩, ৫৬]

$$\text{এবং, } z = \sin^{-1} x \quad dz = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$x = 0 \text{ এবং } z = 0 \quad x = 1 \quad z = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} z dz = \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - 0 \right\} = \frac{\pi^2}{8}$$

8.(c) এবং, $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx$ [৩, ৫৩; ৩, ৫৪]

$$z = \tan^{-1} x \quad dz = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\text{ধৰণ: } x = 0 \text{ এবং } z = 0 \quad x = 1 \text{ এবং } z = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi/4} z dz = \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{32}$$

9.(a) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ [৩, ৫১; ৩, ৫২]

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(-2x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \left[2\sqrt{1-x^2} \right]_0^1$$

$$- (\sqrt{1-1^2} - \sqrt{1-0^2}) = - (0-1)$$

9.(b) $\int_4^8 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 15}} = \frac{1}{2} \int_4^8 \frac{d(x^2 - 15)}{\sqrt{x^2 - 15}}$

$$= \frac{1}{2} \left[2\sqrt{x^2 - 15} \right]_4^8 = \frac{\sqrt{64-15} - \sqrt{16-15}}{\sqrt{64-15} + \sqrt{16-15}} = \frac{\sqrt{49} - \sqrt{1}}{\sqrt{49} + \sqrt{1}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

9.(c) $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{9-2x^2}}$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^2 \frac{d(9-2x^2)}{\sqrt{9-2x^2}} = -\frac{1}{4} \left[2\sqrt{9-2x^2} \right]_0^2$$

$$- \frac{1}{2} (\sqrt{9-8} - \sqrt{9-0}) = - \frac{1}{2} (1-3) = 1$$

9.(d) এবং, $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$

[৩, ৫১; ৩, ৫২]

$$\text{এবং, } z = 4 - x^2 \quad dz = -2x dx$$

$$x = 0 \text{ এবং } z = 4 \quad x = 1 \quad z = 3$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_4^3 \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2} [2\sqrt{z}]_4^3 \\ & -(\sqrt{3} - \sqrt{4}) = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

১৯. (e) $\int_{-2}^5 \frac{7x}{\sqrt{x^2 + 3}} dx$ [১৫, ৩৮, ০৮]

$$\begin{aligned} z &= x^2 + 3 & dz &= 2xdx \\ x &= -2 \text{ টু } z = 7 & x &= 5 & z &= 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{7}{2} \int_7^{28} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{7}{2} [2\sqrt{z}]_7^{28} \\ & 7(\sqrt{28} - \sqrt{7}) = 7(2\sqrt{7} - \sqrt{7}) = 7\sqrt{7} \end{aligned}$$

২০. (f) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1+3x^4} dx$ [১৫, ৩৮, ০৮]

$$\begin{aligned} z &= 1+3x^4 & dz &= 12x^3 dx \\ x &= 0 \text{ টু } z = 1 & x &= 1 & z &= 4 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{12} \int_1^4 \sqrt{z} dz = \frac{1}{12} \left[\frac{z^{3/2}}{3/2} \right]_1^4$$

$$\frac{1}{12} \times \frac{2}{3} (4^{3/2} - 1) = \frac{1}{18} (8 - 1) = \frac{7}{18}$$

২১. $\int_1^2 x^2 e^{x^3} dx$ [১৫, ৩৮, ০৮, ৩, ১০]

$$\begin{aligned} z &= x^3 & dz &= 3x^2 dx & x^2 dx &= \frac{1}{3} dz \\ x &= 1 \text{ টু } z = 1 & x &= 2 \text{ টু } z = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 e^{x^3} dx &= \frac{1}{3} \int_1^8 e^z dz = \frac{1}{3} [e^z]_1^8 \\ &= \frac{1}{3} (e^8 - e^1) = \frac{1}{3} (e^8 - e) \end{aligned}$$

২২. (b) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ [১৫, ৩৮]

$$\begin{aligned} z &= x^2 & dz &= 2xdx & xdx &= \frac{1}{2} dz \\ x &= 0 \text{ টু } z = 0 & x &= 1 & z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^z dz = \frac{1}{2} [e^z]_0^1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} (e^1 - e^0) = \frac{1}{2} (e - 1)$$

২৩. (c) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx$ [১৫, ৩৮]

$$\begin{aligned} z &= 1+e^x & dz &= e^x dx \\ x &= 0 & z &= 1+e^0 = 1+1=2 \\ x = \ln 2 & \text{ টু } z = 1+e^{\ln 2} = 1+2=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx &= \int_2^3 \frac{dz}{z} = [\ln z]_2^3 \\ \ln 3 - \ln 2 &= \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

২৪. (d) $\int_1^3 \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx$ [১৫, ৩৮, ০৮]

$$\begin{aligned} z &= \ln x & dz &= \frac{dx}{x} \\ x &= 1 \text{ টু } z = \ln 1 = 0 & x &= 3 & z &= \ln 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx &= \int_0^{\ln 3} \cos z dz \\ [\sin z]_0^{\ln 3} &= \sin(\ln 3) - \sin 0 = \sin(\ln 3) \end{aligned}$$

২৫. (a) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x} dx$

[১৫, ৩৮, ০৮, ৩, ১০, ১১, ১২, ১৩, ১৪, ১৫, ১৬, ১৭, ১৮, ১৯, ২০]

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cot^5 x \cos ec^2 x dx$$

$$\begin{aligned} \cot x &= z & -\cos ec^2 x dx &= dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{3} \text{ টু } z = \cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x &= \frac{\pi}{2} \text{ টু } z = \cot \frac{\pi}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x} dx = \int_{1/\sqrt{3}}^0 z^5 (-dz)$$

$$-\left[\frac{1}{6} z^6 \right]_{1/\sqrt{3}}^0 = -\frac{1}{6} \{0 - (\frac{1}{\sqrt{3}})^6\} = \frac{1}{162}$$

11.(b) ধরি, $I = \int_0^{\pi/4} \tan^3 x \sec^2 x dx$ [ব.'০৬; মা.'০৬, '০৮; কু., সি., পি.'০৯; জি., র.'১১; সি.'১৩]

এবং $\tan x = z \therefore \sec^2 x dx = dz$

সীমা: $x=0$ হলে $z=\tan 0=0$ এবং

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ হলে } z = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\therefore I = \int_0^1 z^3 dz = \left[\frac{1}{4} z^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4} (1^4 - 0^4) = \frac{1}{4}$$

11(c) $\int_0^{\pi/4} (\tan^3 x + \tan x) dx$ [ক.'০৮]

$$= \int_0^{\pi/4} (\tan^2 x + 1) \tan x dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sec^2 x \tan x dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\tan x) d(\tan x) = \left[\frac{1}{2} (\tan x)^2 \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (\tan \frac{\pi}{4})^2 - (\tan 0)^2 \} = \frac{1}{2} \{ (1)^2 - 0 \} = \frac{1}{2}$$

11(d) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \sec^2 x dx$ [জি.'০৩, '১৩; ক.'০৮, '০৬; য.'০৮; জি.'০৫; মা.'০৫; চি.'১১]

ধরি, $\tan x = z \therefore \sec^2 x dx = dz$

সীমা: $x=0$ হলে $z=\tan 0=0$ এবং

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ হলে } z = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \sec^2 x dx = \int_0^1 z^2 dz$$

$$= \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} (1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}$$

12. (a) $\int xe^{-3x} dx$ [পি.'১০]

$$= x \int e^{-3x} dx - \int \left(\frac{d}{dx}(x) \int e^{-3x} dx \right) dx$$

$$= x \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) dx$$

$$= -x \frac{1}{3} e^{-3x} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right)$$

$$= -\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x} = -\frac{1}{9} (3x+1)e^{-3x}$$

$$\therefore \int_0^1 xe^{-3x} dx = \left[-\frac{1}{9} (3x+1)e^{-3x} \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{9} \{ (3+1)e^{-3} - (0+1)e^0 \}$$

$$= -\frac{1}{9} (4e^{-3} - 1) = \frac{1}{9} (1 - 4e^{-3})$$

12(b) $\int \ln(2x) dx$ [ব. '০১; র.'০৯]

$$= \ln(2x) \int dx - \int \left[\frac{d}{dx} \{ \ln(2x) \} \right] \int dx$$

$$= x \ln(2x) - \int \frac{2}{2x} \cdot x dx$$

$$= x \ln(2x) - \int dx = x \ln(2x) - x + c$$

$$\therefore \int_2^4 \ln(2x) dx = [x \ln(2x) - x]_2^4$$

$$= 4 \ln 8 - 4 - (2 \ln 4 - 2)$$

$$= 4 \ln 2^3 - 4 - 2 \ln 2^2 + 2$$

$$= 12 \ln 2 - 2 - 4 \ln 2 = 8 \ln 2 - 2$$

12(c) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ [খ.ত.গ.'১৬]

$$= \ln x \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \int \left[\frac{d}{dx} (\ln x) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right] dx$$

$$= 2\sqrt{x} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot 2\sqrt{x} dx$$

$$= 2\sqrt{x} \ln x - 2 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 2\sqrt{x} \ln x - 2 \cdot 2\sqrt{x} + c$$

$$= 2\sqrt{x} (\ln x - 2) + c$$

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x} (\ln x - 2)]_1^4$$

$$= 2\sqrt{4} (\ln 4 - 2) - 2\sqrt{1} (\ln 1 - 2)$$

$$= 4 \ln 2^2 - 8 - 2(0 - 2)$$

$$= 8 \ln 2 - 8 + 4 = 8 \ln 2 - 4$$

12(d) $\int x^2 \cos x dx$ [ক.'০৮]

$$\begin{aligned}
 &= x^2 \int \cos x \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (x^2) \int \cos x \, dx \right\} dx \\
 &= x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx \\
 &= x^2 \sin x - 2[x \int \sin x \, dx - \int (-\cos x) dx] \\
 &= x^2 \sin x - 2[x(-\cos x) + \sin x] + c \\
 &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c \\
 &\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx \\
 &= [x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x]_0^{\pi/2} \\
 &= \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \sin \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 2 \sin \frac{\pi}{2} - 0 \\
 &= \frac{\pi^2}{4} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0 - 2 \cdot 1 = \frac{\pi^2}{4} - 2
 \end{aligned}$$

12(e) $\int x \tan^{-1} x \, dx$

[জা. '০৮, '১২; চ. '০৮, '১২; ঘ. '১১; শি. '১২; কু. '১৮]

$$\begin{aligned}
 &= \tan^{-1} x \int x \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\tan^{-1} x) \int x \, dx \right\} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{2} \, dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \, dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} (x - \tan^{-1} x) + c \\
 &= \frac{1}{2} \{(x^2+1) \tan^{-1} x - x\} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\sqrt{3}} x \tan^{-1} x \, dx &= \left[\frac{(x^2+1) \tan^{-1} x - x}{2} \right]_1^{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{(3+1) \tan^{-1} \sqrt{3} - \sqrt{3} - (1+1) \tan^{-1} 1 + 1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(4 \cdot \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} + 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} + 1 \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{8\pi - 3\pi}{6} - \sqrt{3} + 1 \right) = \frac{1}{12} (5\pi - 6\sqrt{3} + 6)$$

12(f) ধরি, $I = \int_0^{\pi/2} e^x (\sin x + \cos x) \, dx$

[কু. '০৮, '১১; ঘ. '১০]

এবং $f(x) = \sin x \therefore f'(x) = \cos x$

$$\begin{aligned}
 \therefore I &= \int_0^{\pi/2} e^x \{f(x) + f'(x)\} dx \\
 &= [e^x f(x)]_0^{\pi/2} = [e^x \sin x]_0^{\pi/2} \\
 &= e^{\pi/2} \sin \frac{\pi}{2} - e^0 \sin 0 = e^{\pi/2} - 0 = e^{\pi/2}
 \end{aligned}$$

12(g) $\int \ln x \, dx$

[খ.ভ.প. '০৫]

$$\begin{aligned}
 &= \ln x \int dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\ln x) \int dx \right\} dx \\
 &= x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - \int dx \\
 &= x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c \\
 &\therefore \int_1^0 \ln x \, dx = [x(\ln x - 1)]_1^0 \\
 &= 0 - 1(\ln 1 - 1) = -1(0 - 1) = 1
 \end{aligned}$$

12(h) $\int x \sin^2 x \, dx$

[খ.ভ.প. '০৫]

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{x}{2} (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int (x - x \cos 2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \left[x \int \cos 2x \, dx - \int \left\{ 1 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \, dx \right\} \right] \\
 &= \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} \left[x \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx \right] \\
 &= \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} \left[x \sin 2x - \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \right] + c \\
 &= \frac{1}{4} (x^2 - x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x) + c \\
 &\therefore \int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{4} \left[x^2 - x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ (\pi^2 - \pi \sin 2\pi - \frac{1}{2} \cos 2\pi) + \frac{1}{2} \cos 0 \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ (\pi^2 - 0 - \frac{1}{2} \cdot 1) + \frac{1}{2} \cdot 1 \right\} = \frac{1}{4} \pi^2
 \end{aligned}$$

12(i) $\int x \cot^{-1} x dx$

$$\begin{aligned} &= \cot^{-1} x \int x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\cot^{-1} x) \int x dx \right\} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cot^{-1} x + \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cot^{-1} x + \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cot^{-1} x + \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cot^{-1} x + \frac{1}{2} (x + \cot^{-1} x) + c \\ &= \frac{1}{2} \{(x^2 + 1) \cot^{-1} x + x\} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} x \cot^{-1} x dx &= \left[\frac{(x^2 + 1) \cot^{-1} x + x}{2} \right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{(3+1) \cot^{-1} \sqrt{3} + \sqrt{3} - (1+1) \cot^{-1} 1 - 1}{2} \\ &= \frac{1}{2} (4 \cdot \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 1) \\ &= \frac{1}{2} (\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \sqrt{3} - 1) \\ &= \frac{1}{2} (\frac{4\pi - 3\pi}{6} + \sqrt{3} - 1) = \frac{1}{12} (\pi + 6\sqrt{3} - 6) \end{aligned}$$

(j) $\int x \ln x dx$

$$\begin{aligned} &= \ln x \int x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\ln x) \int x dx \right\} dx \\ &= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \left(\frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} \right) dx \\ &= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} + c \end{aligned}$$

$$\int_1^{\sqrt{e}} x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 \right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \frac{(\sqrt{e})^2}{2} \ln \sqrt{e} - \frac{1}{4} (\sqrt{e})^2 - \frac{1}{2} \ln 1 + \frac{1}{4}$$

[বুর্জেট'০৯]

$$\begin{aligned} &= \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln e - \frac{1}{4} e - \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{e}{4} \cdot \frac{1}{4} e - \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

13(a) $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4}$

[এ.ভ.গ.'০৬]

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x dx}{1+(x^2)^2} = \left[\frac{1}{2} \tan^{-1}(x^2) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0) = \frac{1}{2} (\frac{\pi}{4} - 0) = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

13(b) $\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx$

[ঝ. '০৬, '০৯; ব. '০৭; চ. '০৯; কু.সি.'১২, '১৮]

$$\begin{aligned} &\stackrel{u}{=} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} \right) dx \\ &= \left[\tan^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 \\ &= \tan^{-1} 1 + \frac{1}{2} \ln 2 - \tan^{-1} 0 - \frac{1}{2} \ln 1 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 - 0 + 0 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

13(c) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$

[ঝ. '০৯]

$$\begin{aligned} &= - \int_0^{\pi} \frac{(-\sin x)}{1^2 + \cos^2 x} dx = - \left[\tan^{-1}(\cos x) \right]_0^{\pi} \\ &= - \{ \tan^{-1}(\cos \pi) - \tan^{-1}(\cos 0) \} \\ &= - \{ \tan^{-1}(-1) - \tan^{-1}(1) \} \\ &= - \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

13(d) ধরি, $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$ [এ.ভ.গ.'০৭]

$$\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 + (\sin^2 x)^2$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(2 \sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 2x)$$

$$I = 2 \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x} dx$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^{\pi/4} \frac{(-2 \sin 2x)}{1^2 + (\cos 2x)^2} dx$$

$$= -[\tan^{-1}(\cos 2x)]_0^{\pi/4}$$

$$= -\{\tan^{-1}(\cos \frac{\pi}{2}) - \tan^{-1}(\cos 0)\}$$

$$= -\{\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} 1\} = -\{0 - \frac{\pi}{4}\} = \frac{\pi}{4}$$

$$13(e) \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

[জ. '১২; সি. '০৭; কৃ. '০৮; ব. '১৩; ঢ. '১৪]

$$= \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x(e^x + e^{-x})} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{(e^x)^2 + 1}$$

ধরি, $e^x = z \therefore e^x dx = dz$

সীমা : $x = 0$ হলে, $z = e^0 = 1$

$x = 1$ হলে, $z = e^1 = e$

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_1^e \frac{dz}{z^2 + 1} = [\tan^{-1} z]_1^e$$

$$= \tan^{-1} e - \tan^{-1}(1) = \tan^{-1} e - \frac{\pi}{4}$$

$$14(a) \int_3^4 \frac{dx}{25 - x^2}$$

[ব. '১৩]

$$= \int_3^4 \frac{dx}{5^2 - x^2} = \left[\frac{1}{2.5} \ln \left| \frac{5+x}{5-x} \right| \right]_3^4$$

$$= \frac{1}{10} (\ln \left| \frac{5+4}{5-4} \right| - \ln \left| \frac{5+3}{5-3} \right|)$$

$$= \frac{1}{10} (\ln 9 - \ln 4) = \frac{1}{10} \ln \frac{9}{4} = \frac{1}{10} \ln \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{10} \times 2 \ln \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{5} \ln \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$(b) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{9 - \sin^2 x} dx [জ. '০৫; মা. '০৮; ঢ., সি. '০৯]$$

ধরি, $\sin x = z \therefore \cos x dx = dz$

সীমা : $x = 0$ হলে $z = 0$ এবং $x = \frac{\pi}{2}$ হলে $z = 1$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{9 - \sin^2 x} dx = \int_0^1 \frac{dz}{9 - z^2}$$

$$= \left[\frac{1}{2.3} \ln \left| \frac{3+z}{3-z} \right| \right]_0^1 = \frac{1}{6} (\ln \left| \frac{3+1}{3-1} \right| - \ln \left| \frac{3+0}{3-0} \right|)$$

$$= \frac{1}{6} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{6} \ln 2$$

$$15(a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - (x^2 - 2x + 1)}}$$

$$= \int_0^1 \frac{d(x-1)}{\sqrt{1 - (x-1)^2}} = [\sin^{-1}(x-1)]_0^1$$

$$= \sin^{-1}(1-1) - \sin^{-1}(0-1) = \sin^{-1} 0 + \sin^{-1} 1$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$15(b) \int_{1/2}^1 \frac{dx}{x \sqrt{4x^2 - 1}} [প.ভ.প. '০৮]$$

$$= \int_{1/2}^1 \frac{2dx}{2x \sqrt{(2x)^2 - 1}} = [\sec^{-1}(2x)]_{1/2}^1$$

$$= \sec^{-1} 2 - \sec^{-1} 1 = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

$$15(c) \text{ ধরি } I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} [প.ভ.প. '০৮]$$

এবং $x = 2 \cos \theta$. তাহলে $dx = -2 \sin \theta d\theta$

সীমা : $x = 1$ হলে $\theta = \cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ এবং

$x = 2$ হলে $\theta = \cos^{-1} 1 = 0$

$$\therefore I = \int_{\pi/3}^0 \frac{-2 \sin \theta d\theta}{4 \cos^2 \theta \sqrt{4(1 - \cos^2 \theta)}}$$

$$= \int_{\pi/3}^0 \frac{-2 \sin \theta d\theta}{4 \cos^2 \theta \cdot 2 \sin \theta} = -\frac{1}{4} \int_{\pi/3}^0 \sec^2 \theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{4} [\tan \theta]_{\pi/3}^0 = -\frac{1}{4} (\tan 0 - \tan \frac{\pi}{3})$$

$$= -\frac{1}{4} (0 - \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\begin{aligned}
 15(d) \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{1 - \tan^2 x} &= \int_0^{\pi/6} \frac{-\cos^2 x dx}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\
 &= \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2} \frac{(1 + \cos 2x) dx}{\cos 2x} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (\sec 2x + 1) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \ln |\tan 2x + \sec 2x| + x \right]_0^{\pi/6} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{\pi}{3} + \sec \frac{\pi}{3} \right| + \frac{\pi}{6} - 0 \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \ln |\sqrt{3} + 2| + \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4} \ln(\sqrt{3} + 2) + \frac{\pi}{12}
 \end{aligned}$$

$$16.(a) ধরি I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad [\text{সি. } '09; \text{ রা. } '05, '09, '13; \text{ চ. } '09; \text{ য., ব. } '12, \text{ পি. } '12, '18]$$

এবং $x = a \sin \theta$. তাহলে $dx = a \cos \theta d\theta$

সীমা : $x = 0$ হলে $\theta = \sin^{-1} 0 = 0$ এবং

$$x = a \text{ হলে } \theta = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore I &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)} a \cos \theta d\theta \\
 &= a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\
 &= \frac{a^2}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{a^2}{2} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) - \left(0 + \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right\} \\
 &= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} \pi a^2
 \end{aligned}$$

$$16(b) ধরি I = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{(4 - x^2)^{3/2}} dx \quad [\text{প.ভ.প. } '85]$$

এবং $x = 2 \sin \theta$. তাহলে $dx = 2 \cos \theta d\theta$

সীমা : $x = 0$ হলে $\theta = \sin^{-1} 0 = 0$ এবং

$$x = \sqrt{2} \text{ হলে } \theta = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

[বুয়েট-০৭-০৮]

$$\begin{aligned}
 \therefore I &= \int_0^{\pi/4} \frac{4 \sin^2 \theta \cdot 2 \cos \theta d\theta}{\{4(1 - \sin^2 \theta)\}^{3/2}} \\
 &= \int_0^{\pi/4} \frac{8 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta}{8 \cos^3 \theta} = \int_0^{\pi/4} \tan^2 \theta d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/4} (\sec^2 \theta - 1) d\theta = [\tan \theta - \theta]_0^{\pi/4} \\
 &= \tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - (\tan 0 - 0) = 1 - \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

$$17. \text{ ধরি, } I = \int_0^4 y \sqrt{4-y} dy$$

[ব. '05; রা. '07; চ. '09, '12; রা. '13; চ. '10, '18]

এবং $4 - y = z^2 \therefore -dy = 2z dz$

সীমা : $y = 0$ হলে $z = 2$ এবং $y = 4$ হলে $z = 0$

$$\therefore I = \int_2^0 (4 - z^2) \sqrt{z^2} \cdot (-2z dz)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_2^0 (z^4 - 4z^2) dz = 2 \left[\frac{1}{5} z^5 - \frac{4}{3} z^3 \right]_2^0 \\
 &= 2 \left(-\frac{1}{5} \times 2^5 + \frac{4}{3} \times 2^3 \right) = 2^6 \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{128}{15}
 \end{aligned}$$

$$18. \int_1^{15} \frac{x+2}{(x+1)(x+3)} dx \quad [\text{প.ভ.প. } '95]$$

$$= \int_1^{15} \left\{ \frac{-1+2}{(x+1)(-1+3)} + \frac{-3+2}{(-3+1)(x+3)} \right\} dx$$

$$= \int_1^{15} \left\{ \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+3)} \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2} [\ln|x+1| + \ln|x+3|]_1^{15}$$

$$= \frac{1}{2} [\ln|(x+1)(x+3)|]_1^{15}$$

$$= \frac{1}{2} \{ \ln |(15+1)(15+3)| - \ln |(1+1)(1+3)| \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ \ln(16 \times 18) - \ln(2 \times 4) \}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{16 \times 18}{2 \times 4} = \frac{1}{2} \ln 6^2 = \frac{2}{2} \ln 6 = \ln 6$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

$$\begin{aligned}
 1. & \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin \theta} d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2})^2} d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} (\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}) d\theta \\
 &= \left[-2 \cos \frac{\theta}{2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= 2\{-\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} - (-\cos 0 + \sin 0)\} \\
 &= 2\{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - (-1+0)\} = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. & \int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \csc x dx \\
 &= \left[\ln |\tan \frac{x}{2}| \right]_{\pi/2}^{\pi/4} \\
 &= \ln |\tan \frac{\pi}{8}| - \ln |\tan \frac{\pi}{4}| = \ln(\tan \frac{\pi}{8}) - \ln 1 \\
 &= \ln(\tan \frac{\pi}{8}) - 0 = \ln(\tan \frac{\pi}{8})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. & \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x) dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[-3 \cos x + \frac{1}{3} \cos 3x \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ -3 \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} - (-3 \cos 0 + \frac{1}{3} \cos 0) \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ (-0+0) - (-3, 1 + \frac{1}{3}) \right\} = \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4(a) & \int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos x dx \\
 &= \int_0^{\pi/2} (\sin x)^5 d(\sin x) \\
 &= \left[\frac{1}{6} (\sin x)^6 \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{6} \left\{ (\sin \frac{\pi}{2})^6 - (\sin 0)^6 \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{6} \{1-0\} = \frac{1}{6} \\
 4(b) & \int_0^{\pi/4} \cos x \sin^3 x dx \\
 &= \int_0^{\pi/4} (\sin x)^3 d(\sin x) \\
 &= \left[\frac{1}{4} (\sin x)^4 \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4} \left\{ (\sin \frac{\pi}{4})^4 - (\sin 0)^4 \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}})^4 - 0 \right\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \\
 5. & \int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos 3x dx \\
 &= \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2} \sin 6x dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 6x}{6} \right]_0^{\pi/6} \\
 &= -\frac{1}{12} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{1}{12} (-1-1) = \frac{1}{6} \\
 6(a) & \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{\sqrt{x}} d(\sqrt{x}) \\
 &= 2 \left[e^{\sqrt{x}} \right]_0^1 = 2(e^{\sqrt{1}} - e^{\sqrt{0}}) = 2(e-1) \\
 6(b) & \int_0^2 2x \cos(1+x^2) dx \\
 &= \int_0^2 \cos(1+x^2) d(1+x^2) \\
 &= [\sin(1+x^2)]_0^2 = \sin(1+2^2) - \sin(1+0^2) \\
 &= \sin(5) - \sin(1) \\
 7(a) & \text{ধরি, } I = \int 2x^3 e^{-x^2} dx \text{ এবং } x^2 = z. \\
 & \text{তাহলে } 2x dx = dz \text{ এবং} \\
 & I = \int x^2 e^{-x^2} (2x dx) = \int z e^{-z} dz \\
 &= z \int e^{-z} dz - \int \left\{ \frac{d}{dz}(z) \int e^{-z} dz \right\} dz \\
 &= z(-e^{-z}) - \int 1 \cdot (-e^{-z}) dz \\
 &= -ze^{-z} + (-e^{-z}) = -(x^2 + 1)e^{-x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 2x^3 e^{-x^2} dx &= \left[-(x^2 + 1)e^{-x^2} \right]_0^1 \\ &= -(1+1)e^{-1} + (0+1)e^0 = 1 - 2e^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7(\mathbf{b}) \int \ln(1+x) dx &= \ln(1+x) \int dx - \int \left[\frac{d}{dx} \{\ln(1+x)\} \int dx \right] dx \\ &= x \ln(1+x) - \int \frac{1}{1+x} \cdot x dx \\ &= x \ln(1+x) - \int \frac{1+x-1}{1+x} dx \\ &= x \ln(1+x) - \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= x \ln(1+x) - \{x - \ln(1+x)\} + c \\ &= (x+1) \ln(1+x) - x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x) dx &= [(x+1) \ln(1+x) - x]_0^1 \\ &= 2\ln 2 - 1 - \ln 1 = 2\ln 2 - 1 - 0 = 2\ln 2 - 1 \\ 8(\mathbf{a}) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{3 dx}{1+x^2} &= 3 \left[\tan^{-1} x \right]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}} \\ &= 3(\tan^{-1} \sqrt{3} - \tan^{-1} 1) = 3\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 3 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8(\mathbf{b}) \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4} &= \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 2^2} = \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{1}{2} \{ \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} (-1) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right\} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8(\mathbf{c}) \int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \left[\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \right]_0^a \\ &= \frac{1}{a} (\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0) = \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{4a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= [\sin^{-1} x]_0^1 \\ &= \sin^{-1} 1 - \sin^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10(\mathbf{a}) \int_0^1 x(1-\sqrt{x})^2 dx &= \int_0^1 x(1-2\sqrt{x}+x) dx \\ &= \int_0^1 (x - 2x^{\frac{3}{2}} + x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2 \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2} - 2 \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{15 - 24 + 10}{30} = \frac{1}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{b}) \int_1^2 \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2} dx &= \int_1^2 \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2} dx \\ &\stackrel{u=x^2}{=} \int_1^2 (x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - 2 - 1 \right) \\ &= \frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{16 - 6 - 3 - 2}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}) \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \sin 2\theta) d\theta &= \left[\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \left(\pi - \frac{1}{2} \cos 2\pi \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \pi - \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(-1) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \int_{-\pi/4}^0 \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx &= \left[-\ln |\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)| \right]_{-\pi/4}^0 \\ &= -\ln |\cos \frac{\pi}{4}| + \ln |\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4})| \\ &= -\ln |\frac{1}{\sqrt{2}}| + \ln |\cos 0| = -\ln 2^{\frac{1}{2}} + \ln 1 \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 + 0 = \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12(\mathbf{a}) \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx &= \left[\frac{1}{2} (x - \frac{1}{2} \sin 2x) \right]_0^{\pi/2} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi/2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right\} = \frac{\pi}{4}$$

12(b) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^4 x dx$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^4 x \sin x dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x)^2 \cos^4 x \sin x dx$$

মনে করি, $\cos x = z \Rightarrow -\sin x dx = dz$.

$x = 0$ হলে, $z = \cos 0 = 1$;

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ হলে, } z = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^4 x dx = - \int_1^0 (1 - z^2)^2 z^4 dz$$

$$= - \int_1^0 (1 - 2z^2 + z^4) z^4 dz$$

$$= - \int_1^0 (z^4 - 2z^6 + z^8) dz$$

$$= - \left[\frac{1}{5} z^5 - 2 \cdot \frac{1}{7} z^7 + \frac{1}{9} z^9 \right]_1^0$$

$$= - \left\{ 0 - \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9} \right) \right\} = \frac{63 - 90 + 35}{315}$$

$$= \frac{98 - 90}{315} = \frac{8}{315}$$

12(c) ধরি, $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^3} dx$

$$\text{এবং } z = 1 + \sin x \quad dz = \cos x dx$$

সীমা: $x = 0$ হলে $z = 1$ এবং $x = \frac{\pi}{2}$ হলে $z = 2$

$$\therefore I = \int_1^2 \frac{dz}{z^3} = \int_1^2 z^{-3} dz = \left[\frac{z^{-2}}{-2} \right]_1^2 = \left[-\frac{1}{2z^2} \right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{3}{8}$$

13. ধরি, $I = \int_0^1 \frac{\cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ [প.ভ.প. '০৮]

$$\text{এবং } z = \cos^{-1} x \quad dz = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

সীমা: $x = 0$ হলে $z = \frac{\pi}{2}$ এবং $x = 1$ হলে $z = 0$

$$\therefore I = - \int_{\pi/2}^0 z dz = - \left[\frac{z^2}{2} \right]_{\pi/2}^0$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ 0 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right\} = \frac{\pi^2}{8}$$

14(a) $\int_1^3 \frac{2x dx}{1+x^2} = \int_1^3 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$

$$= \left[\ln(1+x^2) \right]_1^3 = \ln(1+9) - \ln(1+1)$$

$$= \ln \frac{10}{2} = \ln 5$$

14(b) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{d(2x+1)}{\sqrt{2x+1}}$

$$= \frac{1}{2} \left[2\sqrt{2x+1} \right]_0^4 = \sqrt{8+1} - \sqrt{0+1} = 3 - 1 = 2$$

15(a) $\int \ln(x^2 + 1) dx$

$$= \ln(x^2 + 1) \int dx - \int \left[\frac{d}{dx} \{ \ln(x^2 + 1) \} \right] dx$$

$$= \ln(x^2 + 1) - \int \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot x dx$$

$$= x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx$$

$$= x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$= x \ln(x^2 + 1) - 2(x - \tan^{-1} x) + c$$

$$= x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \tan^{-1} x + c$$

$$\int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx = \left[x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \tan^{-1} x \right]_0^1$$

$$= \ln 2 - 2 + 2 \tan^{-1} 1 - 0$$

$$= \ln 2 - 2 + 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

15(b) ধরি, $I = \int_2^e \left\{ \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2} \right\} dx$ [প.ভ.প.'৯৮, '৯৯]

$$\text{এবং } \ln x = y \Rightarrow x = e^y \quad dx = e^y dy$$

$$\therefore \int \left\{ \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2} \right\} dx = \int \left\{ \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \right\} e^y dy$$

$$= \int e^y \left\{ \frac{1}{y} + D\left(\frac{1}{y}\right) \right\} dy = \frac{e^y}{y} + c = \frac{x}{\ln x}$$

$$\therefore I = \left[\frac{x}{\ln x} \right]_2^e = \frac{e}{\ln e} - \frac{2}{\ln 2} = e - \frac{2}{\ln 2}$$

$$16(a) \int_0^1 \frac{3 dx}{1+x^2} = 3 \left[\tan^{-1} x \right]_0^1$$

$$= 3(\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0) = \frac{3\pi}{4}$$

$$16(b) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{d(\sin x)}{1^2 + (\sin x)^2}$$

$$= \left[\tan^{-1}(\sin x) \right]_0^{\pi/2} = \tan^{-1}(\sin \frac{\pi}{2}) - \tan^{-1}(\sin 0)$$

$$= \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$17(a) \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2 - 9} = \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2 - 3^2}$$

$$= \left[\frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{1}{6} \{ \ln \left| \frac{2-3}{2+3} \right| - \ln \left| \frac{-1-3}{-1+3} \right| \}$$

$$= \frac{1}{6} (\ln \frac{1}{5} - \ln 2) = \frac{1}{6} \ln \frac{1}{5 \times 2} = \frac{1}{6} \ln(0.1)$$

$$17(b) \int_0^{a/2} \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \left[\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \right]_0^{a/2}$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+\frac{a}{2}}{a-\frac{a}{2}} \right| = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{3a}{a} \right| = \frac{1}{2a} \ln 3.$$

$$18(a) \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[\sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_0^a$$

$$= \sin^{-1} \frac{a}{a} - \sin^{-1} \frac{0}{a} = \sin^{-1} 1 - \sin^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$18(b) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} \quad [\text{ক.বো. } '01; \text{ প্র.গ.প. } '83]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{\sqrt{3} dx}{\sqrt{2^2 - (\sqrt{3}x)^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}x}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^{-1} 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - 0 \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$18(c) \text{ ধরি, } I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} \text{ এবং}$$

$$\sin x = z. \text{ তাহলে } \cos x dx = dz$$

$$\text{সীমা : } x = 0 \text{ হলে } z = 0 \text{ এবং } x = \frac{\pi}{2} \text{ হলে } z = 1$$

$$\therefore I = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{2^2 - z^2}} = \left[\sin^{-1} \frac{z}{2} \right]_0^1$$

$$= \sin^{-1} \frac{1}{2} - \sin^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$18(d) \int_2^3 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 2x}} \quad [\text{প্র.গ.প. } '01, '03]$$

$$= \int_2^3 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{(x^2 - 2x + 1) - 1}}$$

$$= \int_2^3 \frac{d(x-1)}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2 - 1}}$$

$$= \left[\sec^{-1}(x-1) \right]_2^3 = \sec^{-1}(3-1) - \sec^{-1}(2-1)$$

$$= \sec^{-1} 2 - \sec^{-1} 1 = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

$$19. \int_0^a \frac{a^2 - x^2}{(a^2 + x^2)^2} dx \quad [\text{প্র.গ.প. } '00]$$

$$= \int_0^a \frac{x^2 (\frac{a^2}{x^2} - 1)}{\{x(\frac{a^2}{x} + x)\}^2} dx = \int_0^a \frac{(\frac{a^2}{x^2} - 1)}{(\frac{a^2}{x} + x)^2} dx$$

$$= \int_0^a \frac{-(-\frac{a^2}{x^2} + 1)}{(\frac{a^2}{x} + x)^2} dx = - \left[-\frac{1}{\frac{a^2}{x} + x} \right]_0^a$$

$$= \left[\frac{x}{a^2 + x^2} \right]_0^a = \frac{a}{a^2 + a^2} - 0 = \frac{1}{2a}$$

20. $\int_8^{27} \frac{dx}{x - x^{1/3}} = \int_8^{27} \frac{dx}{x(1 - x^{-2/3})}$

ধরি $x^{2/3} = z$. তাহলে $-\frac{2}{3}x^{-1/3}dx = dz$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^{-1/3}\frac{dx}{x} = dz \Rightarrow -\frac{2}{3}z\frac{dx}{x} = dz$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{3}{2}\frac{dz}{z}$$

সীমা : $x=8$ হলে $z=2^{-2}=\frac{1}{4}$ এবং

$$x=27 \text{ হলে } z=3^{-2}=\frac{1}{9}$$

$$\therefore \int_8^{27} \frac{dx}{x - x^{1/3}} = -\frac{3}{2} \int_{1/4}^{1/9} \frac{dz}{z(1-z)}$$

$$= \frac{3}{2} \int_{1/4}^{1/9} \left\{ \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \right\} dz$$

$$= \frac{3}{2} [\ln|z-1| - \ln|z|]_{1/4}^{1/9} = \frac{3}{2} \left[\ln \left| \frac{z-1}{z} \right| \right]_{1/4}^{1/9}$$

$$= \frac{3}{2} \left\{ \ln \left| \frac{\frac{1}{9}-1}{\frac{1}{4}-1} \right| - \ln \left| \frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{9}-1} \right| \right\}$$

$$= \frac{3}{2} \{ \ln|-8| - \ln|-3| \} = \frac{3}{2} (\ln 8 - \ln 3)$$

$$= \frac{3}{2} \ln \frac{8}{3}$$

21. $\int_{-1}^1 \frac{1-x}{1+x} dx$ [প.গ.৪৮]

$$= \int_{-1}^1 \frac{-(1+x) + 2}{1+x} dx = \int_{-1}^1 \left(-1 + \frac{2}{1+x}\right) dx$$

$$= [-x + 2 \ln|1+x|]_{-1}^1$$

$$= -1 + 2 \ln|1+1| - (1 + 2 \ln|1-1|)$$

$$= -1 + 2 \ln 2 - 1 - 2 \ln 0$$

$$= 2(\ln 2 - 1)$$

প্রশ্নমালা X E

1(a) Solⁿ : $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$

Ans. A

(b) Solⁿ : $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$

∴ Ans. B

(c) Solⁿ :: ক্যালকুলেটরের সাহায্যে

$$\int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx = 0.533, \text{ যা } 8/15 \text{ এর সমান :}$$

Ans. D.

(d) Solⁿ : ন্যূনতম হতে হলে, $\frac{d}{dx} \{F(x)\} = 0$ হতে হবে।

$$\text{এখানে, } \frac{d}{dx} \{F(x)\} = \frac{t-3}{t^2+7} = 0 \Rightarrow t = 3$$

∴ Ans. D.

(e) $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ পরাবৃত্ত ও তার উপকেন্দ্রিক লম্ব ঘারা বেঞ্চিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

$$Sol^n : x^2 = 2y - 2 = 2(y - 1) = 4 \times \frac{1}{2}(y - 1)$$

$$\text{পরাবৃত্তের শীর্ষ } (0,1), \text{ উপকেন্দ্রিক লম্ব, } y - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2} \quad \text{নির্দেশ ক্ষেত্রফল} = \int_1^{3/2} x dy$$

$$= \int_1^{3/2} \sqrt{2(y-1)} dy = 0.666 = \frac{2}{3} \quad \text{Ans. C}$$

(f) Solⁿ : সবঙ্গি তথ্য সত্য। ∴ Ans. D

(g) Solⁿ : $\int \frac{dx}{ay - bx} = -\frac{1}{b} \int \frac{d(ay - bx)}{ay - bx}$

$$= -\frac{1}{b} \ln(ay - bx) + c \therefore \text{Ans. A}$$

(h) Solⁿ : $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} = \frac{1}{4} \int \frac{d(4x)}{\sqrt{3^2 - (4x)^2}}$

$$= \frac{1}{4} \sin^{-1} \frac{4x}{3} + c \therefore \text{Ans. B}$$

(i) Solⁿ : $\int_0^{1/a} d(\tan^{-1} ax) = [\tan^{-1} ax]_0^{1/a}$

(j) Solⁿ : কৌশল : $\int_a^b f(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx$

$$\text{এখানে, } \int_0^4 f(x)dx = \int_{-1}^{4-1} f(x+1)dx \\ = \int_{-1}^3 f(x+1)dx = 6$$

$$(k) \text{ Soln : } pV = 5 \Rightarrow P = \frac{5}{V}$$

$$\int_1^2 PdV = \int_1^2 \frac{5}{V} dV = 5 \int_1^2 \frac{1}{V} dV \\ = 5(\ln 2 - \ln 1) = 5 \ln 2$$

$$(l) \text{ Soln : } \text{ধনাত্ত্বক } x \text{ এর জন্য } F(x) = \int_1^x \ln t dt \text{ হলে}$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_1^x \ln t dt \right) = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

$$(m) \text{ Soln : } x^2 + y^2 = a^2 \text{ বৃত্তের বেত্তফল} = \pi a^2$$

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2} \text{ ও } y = 0 \text{ দ্বারা আবদ্ধ বেত্তের বেত্তফল} = \text{অর্ধবৃত্তের বেত্তফল} = \frac{1}{2} \pi a^2$$

$$(n) \text{ Soln : } \text{রেখাক্ষিত জায়গার বেত্তফল} = \int_2^5 y dx$$

$$= \int_2^5 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^5 = \frac{1}{3} (125 - 8) = 39$$

2.(a) $y = 3x$ সরলরেখা, x -অক্ষ এবং কোটি

$x = 2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান নির্ণয় ক্ষেত্রফল =

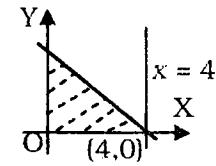
$$y = 3x \text{ সরলরেখা, } x\text{-অক্ষ এবং } Y \\ x = 0 \text{ ও } x = 2 \text{ রেখাদ্বয় দ্বারা } \\ \text{সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} \\ = \int_0^2 y dx = \int_0^2 3x dx \\ = 3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{3}{2} (2^2 - 0) = 6 \text{ বর্গ একক।}$$

2(b) $3x + 4y = 12$ সরলরেখা এবং স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [মা.বো.'০৩]

সমাধান: $3x + 4y = 12$ অর্থাৎ $y = 3 - \frac{3}{4}x$ সরলরেখা x

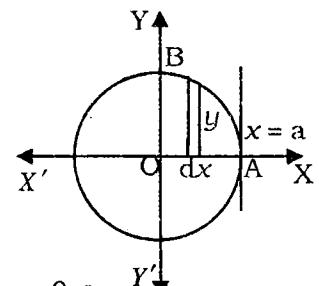
অক্ষকে $(4, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$$\therefore \text{নির্ণেয় ক্ষেত্রফল} = \text{প্রদত্ত রেখা, } x\text{-অক্ষ এবং } x = 0 \text{ ও } \\ x = 4 \text{ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} \\ = \int_0^4 y dx \\ = \int_0^4 \left(3 - \frac{3}{4}x \right) dx \\ = \left[3x - \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 12 - \frac{3}{8} \cdot 16 = 6 \text{ বর্গ একক।}$$



3.(a) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য.'০৬, '০৯; ব.'১৩; প.ত.প.'০৮]
সমাধান: $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ a ।

$$x^2 + y^2 = a^2 \\ \Rightarrow y^2 = a^2 - x^2 \\ \Rightarrow y = \pm \sqrt{a^2 - x^2} \\ \text{ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল} = \\ y = \sqrt{a^2 - x^2}$$



বক্ররেখা, x -অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = a$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

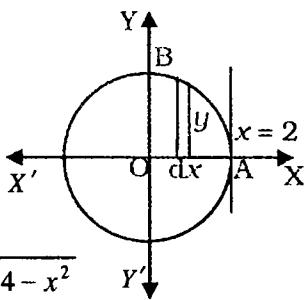
$$= \int_0^a y dx \\ = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_0^a \\ = \frac{a^2}{2} \sin^{-1} 1 = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{a^2 \pi}{4} \\ \therefore \text{বৃত্তের ক্ষেত্রফল} = 4 \times \text{ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল} \\ = 4 \times \frac{a^2 \pi}{4} \text{ বর্গ একক} = a^2 \pi \text{ বর্গ একক।}$$

3(b) $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [চা.'০৭]

সমাধান: $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 2

$$x^2 + y^2 = 4 \\ \Rightarrow y^2 = 4 - x^2$$



$$\Rightarrow y = \pm \sqrt{4 - x^2}$$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল = $y = \sqrt{4 - x^2}$

বক্ররেখা, x -অক্ষ এবং $x = 0$ ও

$x = 2$ রেখাদৰ্শ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^2 y \, dx = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx = \int_0^2 \sqrt{2^2 - x^2} \, dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{2^2 - x^2}}{2} + \frac{2^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{2} \right]_0^2$$

$$= \frac{4}{2} \sin^{-1} 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

বৃত্তের ক্ষেত্রফল = $4 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল = 4π বর্গ একক

3(c) $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্ত এবং $x = 3$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[ঢ. '০৫, '০৯, '১৮; রা. '০৯, '১৮; ঘ. '১৩; কু. চ. '১৮]

সমাধান : $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ

5।

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$\Rightarrow y^2 = 25 - x^2$$

$$\Rightarrow y = \pm \sqrt{25 - x^2}$$

ক্ষেত্র OAB এর

$$\text{ক্ষেত্রফল} = y = \sqrt{25 - x^2}$$

বক্ররেখা, x -অক্ষ এবং $x = 3$ ও $x = 5$ রেখাদৰ্শ দ্বারা

সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\int_3^5 y \, dx$

$$= \int_3^5 \sqrt{25 - x^2} \, dx = \int_3^5 \sqrt{5^2 - x^2} \, dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{5^2 - x^2}}{2} + \frac{5^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{5} \right]_3^5$$

$$= \left(0 + \frac{25}{2} \sin^{-1} 1 \right) - \left(\frac{3\sqrt{25-9}}{2} + \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{3}{5} \right)$$

$$= \frac{25}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{3}{5}$$

$$= \frac{25\pi}{4} - 6 - \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{3}{5}$$

$$\therefore \text{নির্ণয় ক্ষেত্রফল} = 2 \times \left(\frac{25\pi}{4} - 6 - \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{3}{5} \right)$$

$$= \left(\frac{25\pi}{2} - 12 - 25 \sin^{-1} \frac{3}{5} \right) \text{ বর্গ একক।}$$

3(d) $x^2 + y^2 = 36$ বৃত্ত এবং $x = 5$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [প.ত.প. '০৮]

সমাধান : $x^2 + y^2 = 36$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ

6।

$$x^2 + y^2 = 36$$

$$\Rightarrow y^2 = 36 - x^2$$

$$\Rightarrow y = \pm \sqrt{36 - x^2}$$

ক্ষেত্র OAB এর

$$\text{ক্ষেত্রফল} = y = \sqrt{36 - x^2}$$

বক্ররেখা, x -অক্ষ এবং $x = 5$ ও $x = 6$ রেখাদৰ্শ দ্বারা

সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\int_5^6 y \, dx$

$$= \int_5^6 \sqrt{36 - x^2} \, dx = \int_5^6 \sqrt{6^2 - x^2} \, dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{6^2 - x^2}}{2} + \frac{6^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{6} \right]_5^6$$

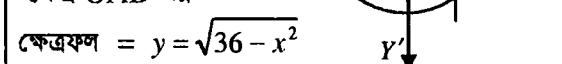
$$= \left(0 + \frac{36}{2} \sin^{-1} 1 \right) - \left(\frac{5\sqrt{36-25}}{2} + \frac{36}{2} \sin^{-1} \frac{5}{6} \right)$$

$$= 18 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5\sqrt{11}}{2} - 18 \sin^{-1} \frac{5}{6}$$

$$= 9\pi - \frac{5\sqrt{11}}{2} - 18 \sin^{-1} \frac{5}{6}$$

$$\therefore \text{নির্ণয় ক্ষেত্রফল} = 2 \left[9\pi - \frac{5\sqrt{11}}{2} - 18 \sin^{-1} \frac{5}{6} \right]$$

$$= (18\pi - 5\sqrt{11} - 36 \sin^{-1} \frac{5}{6}) \text{ বর্গ একক।}$$



4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [জ. '০২; রা. '০৮; সি. '০৮; দি. '১৪]

সমাধান ৪ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু।

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{x^2}{a^2} \\ \Rightarrow y^2 &= \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল =

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \text{ বর্তরেখা, } x\text{-অক্ষ এবং } x = 0 \text{ ও}$$

$x = a$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$\begin{aligned} &= \int_0^a y dx = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{b}{a} \left[\frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_0^a \\ &= \frac{b}{a} \left(\frac{a^2}{2} \sin^{-1} 1 \right) = \frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{ab\pi}{4} \text{ বর্গ একক।} \end{aligned}$$

প্রদত্ত উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল = $4 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল = $4 \times \frac{ab\pi}{4} = ab\pi$ বর্গ একক।

5. (a) $y = 4x^2$ পরাবৃত্ত এবং $y = 4$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ক্ষ. '০১]

সমাধান ৫ $y = 4x^2$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু $O(0,0)$.

$$y = 4x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}y$$

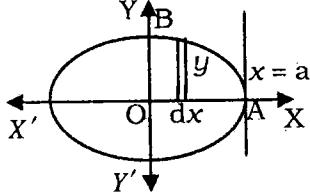
$$\Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{y}$$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল =

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{y} \text{ বর্তরেখা, } y\text{-অক্ষ এবং}$$

$y = 0$ ও $y = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের

$$\text{ক্ষেত্রফল} = \int_0^4 x dy = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{y} dy$$



$$= \frac{1}{2} \left[\frac{y^{3/2}}{3/2} \right]_0^4 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} (4)^2 = \frac{1}{3} \times 8 = \frac{8}{3} \text{ বর্গএকক}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় ক্ষেত্রফল} = 2 \times \text{ক্ষেত্র OAB} \text{ এর ক্ষেত্রফল} \\ = \frac{16}{3} \text{ বর্গএকক।}$$

5(b) $y^2 = 4x$ পরাবৃত্ত এবং $y = x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [জ. '০৩; '১৩; সি. '০৯; '১১; ব. '১০; চ.কু. '১৩]

সমাধান ৫ $y = x$ হতে y এর মান

$$y^2 = 4x \text{ সমীকরণে বসিয়ে পাই,}$$

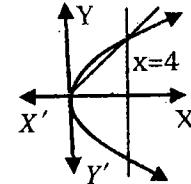
$$x^2 = 4x \Rightarrow x = 0, 4$$

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল =

$$y_1 = 2\sqrt{x} \text{ বর্তরেখা ও } y_2 = x$$

সরলরেখা এবং $x = 0$ ও $x = 4$

রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



$$= \int_0^4 (y_1 - y_2) dx = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x) dx$$

$$= \left[2 \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 2 \times \frac{2}{3} (4)^{3/2} - \frac{4^2}{2}$$

$$= \frac{32}{3} - 8 = \frac{32 - 24}{3} = \frac{8}{3} \text{ বর্গ একক।}$$

5(c) $y^2 = 4x$ পরাবৃত্ত এবং $y = 2x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ব. '০২; চ. '১০]

সমাধান ৫ $y = 2x$ হতে y এর মান

$$y^2 = 4x \text{ সমীকরণে বসিয়ে পাই,}$$

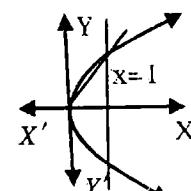
$$4x^2 = 4x \Rightarrow x = 0, 1$$

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল =

$$y_1 = 2\sqrt{x} \text{ বর্তরেখা ও } y_2 = 2x$$

সরলরেখা এবং $x = 0$ ও $x = 1$

রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



$$= \int_0^1 (y_1 - y_2) dx = \int_0^1 (2\sqrt{x} - 2x) dx$$

$$= \left[2 \times \frac{x^{3/2}}{3/2} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 2 \times \frac{2}{3} - 1$$

$$= \frac{4}{3} - 1 = \frac{4 - 3}{3} = \frac{1}{3} \text{ বর্গ একক।}$$

৫(d) $y^2 = 16x$ পরাবৃত্ত এবং $y = x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি.'০২]

সমাধান ৪ $y = x$ হতে y এর মান

$y^2 = 16x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

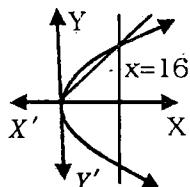
$$x^2 = 16x \Rightarrow x = 0, 16$$

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল =

$$y_1 = 4\sqrt{x} \text{ বক্ররেখা ও } y_2 = x$$

সরলরেখা এবং $x = 0$ ও $x = 16$

রেখাবন্দ দ্বারা আববদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



$$= \int_0^{16} (y_1 - y_2) dx = \int_0^{16} (4\sqrt{x} - x) dx$$

$$= \left[4 \times \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{16} = 4 \times \frac{2}{3} (16)^{\frac{3}{2}} - \frac{16^2}{2}$$

$$= \frac{512}{3} - 128 = \frac{512 - 384}{3} = \frac{128}{3} \text{ বর্গ একক।}$$

৫(e) $y^2 = 16x$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [সি.'০৫]

সমাধান ৪ $y^2 = 16x \Rightarrow y^2 = 4.4.x$

পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের

সীমাকরণ $x = 4$.

$$y^2 = 16x \Rightarrow y = \pm 4\sqrt{x}$$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল =

$y = 4\sqrt{x}$ বক্ররেখা, x -অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 4$ রেখাবন্দ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^4 y dx = \int_0^4 4\sqrt{x} dx$$

$$= 4 \left[\frac{y^{3/2}}{3/2} \right]_0^4 = 4 \times \frac{2}{3} (4)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} \times 8 = \frac{64}{3} \text{ বর্গএকক}$$

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $2 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{128}{3} \text{ বর্গএকক।}$$

৬.(a) $y = 2x - x^2$ বক্ররেখা এবং x -অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [রা.'০১]

সমাধান ৪ $y = 2x - x^2 \dots(1)$

x -অক্ষের সীমাকরণ $y = 0 \dots(2)$

(1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই,

$$0 = 2x - x^2 \Rightarrow x = 0, 2$$

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = প্রদত্ত

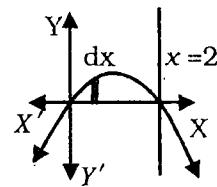
বক্ররেখা, x -অক্ষ এবং $x = 0$

ও $x = 2$ রেখাবন্দ দ্বারা

সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^2 y dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx$$

$$= \left[2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \text{ বর্গ একক।}$$



৫(b) $y = x^2$ বক্ররেখা, x -অক্ষ এবং $x = 1$ ও $x = 7$ রেখাবন্দ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু.'০২]

সমাধান ৪ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল =

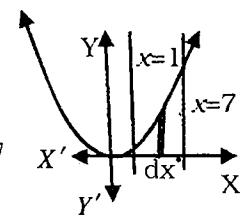
$$x = \sqrt{y} \text{ বক্ররেখা, } x\text{-অক্ষ এবং }$$

$x = 1$ ও $x = 7$ রেখাবন্দ দ্বারা

সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_1^7 y dx = \int_1^7 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^7$$

$$= \frac{1}{3} (343 - 1) = 144 \text{ বর্গ একক।}$$



৬(c) $y = x^2$ বক্ররেখা এবং $x - y + 2 = 0$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[সি.'০৩]

সমাধান ৪ $y = x^2 \dots(1)$ হতে y এর মান $x - y + 2 = 0$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$x - x^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1, 2$$

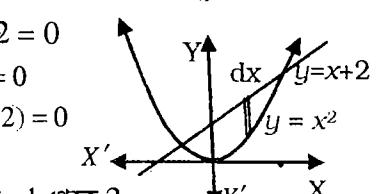
এখানে x এর সীমা -1 থেকে 2

এবং $y_1 = x + 2$, $y_2 = x^2$

$$\therefore \text{নির্ণেয় ক্ষেত্রফল} = \int_{-1}^2 (y_1 - y_2) dx$$

$$= \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = 8 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$



প্রশ্নমৌলিক X E

$$= \frac{48 - 16 - 3 - 2}{6} = \frac{48 - 21}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \text{ বর্গএকক}$$

7.(a) $x^2 + y^2 = 1$ ও $y^2 = 1 - x$ বক্ররেখা দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ট. '০১]

সমাধান : $y^2 = 1 - x = -(x - 1)$ হতে y^2 এর মান $x^2 + y^2 = 1$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$x^2 + 1 - x = 1$$

$$\Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$$

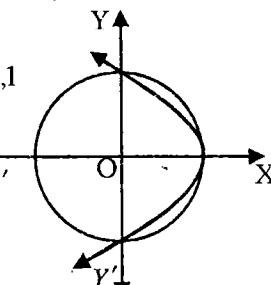
$x = 1$ হলে $y = 0$ এবং

$x = 0$ হলে $y = \pm 1$

বক্ররেখা দুইটির ছেদবিন্দু
(1, 0), (0, 1), (0, -1)

এখানে x এর সীমা 0 থেকে 1

$$\text{এবং } y_1 = \sqrt{1-x^2} \quad y_2 = \sqrt{1-x}.$$



$$\therefore \text{নির্ণেয় ক্ষেত্রফল} = 2 \int_0^1 (y_1 - y_2) dx$$

$$= 2 \int_0^1 (\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x}) dx$$

$$= 2 \left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2} \sin^{-1} x + \frac{2}{3} (1-x)^{3/2} \right]_0^1$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} 1 - \frac{2}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \right) \text{ বর্গ একক} \quad \text{www.boighar.com}$$

7(b) দেখাও যে, $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{16}{3}a^2$

[সি. '০৮; ট. '০৮; কু. '০৮; দি. '০৯; প্র.ভ.প. '০৫]

$$\text{প্রমাণ : } x^2 = 4ay \Rightarrow y = \frac{x^2}{4a} \text{ হতে } y \text{ এর মান}$$

$$y^2 = 4ax \text{ সমীকরণে বসিয়ে পাই, } \left(\frac{x^2}{4a}\right)^2 = 4ax \Rightarrow x^4 = 64a^3x \\ \Rightarrow x(x^3 - 64a^3) = 0 \\ \Rightarrow x = 0, 4a$$

এখানে x এর সীমা 0 থেকে $4a$ এবং

$$y_1 = 2\sqrt{a}\sqrt{x}, \quad y_2 = \frac{1}{4a}x^2.$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় ক্ষেত্রফল} = \int_0^1 (y_1 - y_2) dx$$

$$= \int_0^{4a} \left(2\sqrt{a}\sqrt{x} - \frac{1}{4a}x^2 \right) dx$$

$$= \left[2\sqrt{a} \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4a} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^{4a}$$

$$= \frac{4\sqrt{a}}{3} (4a)^{3/2} - \frac{1}{12a} \cdot 64a^3$$

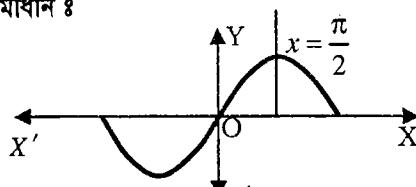
$$= \frac{4\sqrt{a}}{3} \times 8a\sqrt{a} - \frac{16}{3}a^2$$

$$= \frac{32}{3}a^2 - \frac{16}{3}a^2 = \frac{16}{3}a^2 \text{ বর্গ একক।}$$

8.(a) $y = \sin x$ বক্ররেখা, x -অক্ষ এবং $x = \frac{\pi}{2}$ রেখা

দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ট. '০৫]

সমাধান :



নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $y = \sin x$ বক্ররেখা, x -অক্ষ এবং x

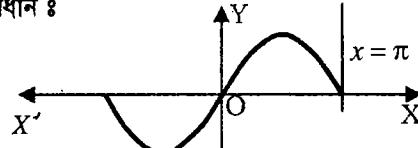
= 0 ও $x = \frac{\pi}{2}$ রেখায় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^{\pi/2} y dx = \int_0^{\pi/2} \sin x dx$$

$$= [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1 \text{ বর্গ একক।}$$

8(b) x - অক্ষ এবং $y = \sin x$ বক্ররেখার একটি চাপ দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান :



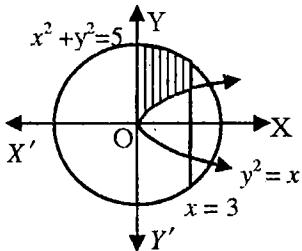
নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $y = \sin x$ বক্ররেখা, x -অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = \pi$ রেখায় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের

$$\text{ক্ষেত্রফল} = \int_0^{\pi} y \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

$$= [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0$$

= 1 + 1 = 2 বর্গ একক।

9.



চিত্রে, $x = 3$ সরলরেখা $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তকে এবং $y^2 = x$ পরাবৃত্তকে ছেদ করেছে।

$$(a) \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \, dx \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

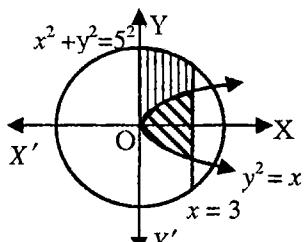
[সি.'০৯; কু.'১১; রা.'১১, '১৪; ঢা.'১১; য.'১০]

(b) অদ্য বৃত্ত ও সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ জুন্ডুতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য.'১৩; ঢা.'১৪; কু., রা., ঢা., চ.'১৪]

(c) অদ্য পরাবৃত্ত ও সরলরেখার সাথে $y = 0$ সরলরেখা যে বেত্র তৈরি করে তার এবং রেখাক্ষিত এলাকার বেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: (a) অশ্বমালা XD এর উদাহরণ 5 দ্রষ্টব্য।

(b) অশ্বমালা XE এর 3(c) দ্রষ্টব্য।



$$(c) \text{নির্ণয় ক্ষেত্রফল} = 2 \int_0^3 \sqrt{x} \, dx = 2 \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^3$$

$$= 2 \times \frac{2}{3} (3)^{3/2} = \frac{4}{3} \times 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ বর্গ একক।}$$

রেখাক্ষিত এলাকার ক্ষেত্রফল = $\int_0^3 (y_1 - y_2) \, dx$, যেখানে

$$y_1 = \sqrt{5^2 - x^2}, y_2 = \sqrt{x}$$

$$\text{নির্ণয় বেত্রফল} = \int_0^3 (\sqrt{5^2 - x^2} - \sqrt{x}) \, dx$$

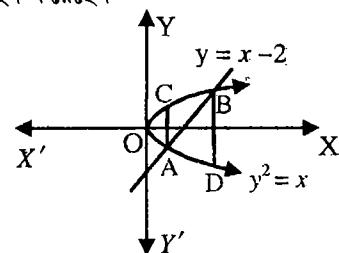
$$= \left[\frac{x\sqrt{25 - x^2}}{2} + \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{x}{5} - \frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^3$$

$$= \frac{3\sqrt{25 - 3^2}}{2} + \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{3}{5} - 2\sqrt{3}$$

$$= \frac{3 \times 4}{2} + \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{3}{5} - 2\sqrt{3}$$

$$= 6 - 2\sqrt{3} + \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{3}{5}$$

10. চিত্রে $y = x - 2$ সরলরেখা $y^2 = x$ পরাবৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে।



$$(a) \int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{4 - x^2}} \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

[সি.'০৯; ঢা., রা., কু.'১০; দি.'১৩]

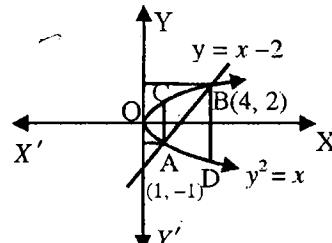
(b) $y = x - 2$ সরলরেখা ও $y^2 = x$ পরাবৃত্ত দ্বারা অবক্ষেত্রের বেত্রফল নির্ণয় কর।

[DU 12-13, BUET 13-14]

(c) A ও B - বিন্দুগামী y-অক্ষের সমান্তরাল রেখা পরাবৃত্তটিকে যথাক্রমে D ও C বিন্দুতে ছেদ করে। ABC ও ADBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: (a) অশ্বমালা XD এর 9(d) দ্রষ্টব্য।

(b)



$$y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2 \text{ হতে } x \text{ এর মান } y^2 = x \\ \text{সমীকরণে বসিয়ে পাই, } y^2 = y + 2 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \\ \Rightarrow (y - 2)(y + 1) = 0 \\ y = -1, 2 \text{ এবং } x = 1, 4$$

এখানে y এর সীমা -1 থেকে 2 এবং $x_1 = y + 2$, $x_2 = y^2$.

$$\begin{aligned} \text{নির্ণেয় ক্ষেত্রফল} &= \int_{-1}^2 (x_1 - x_2) dy \\ &= \int_{-1}^2 (y + 2 - y^2) dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{12 + 24 - 16 - 3 + 12 - 2}{6} \\ &= \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \text{ বর্গ একক।} \end{aligned}$$

(c) এখানে, A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, -1)$ ও $(2, 4)$.

AOC বেত্তের বেত্রফল $= y = \sqrt{x}$ বক্ররেখা, x -অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 1$ রেখাদ্য দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের

$$\text{ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ} = 2 \int_0^1 y dx = 2 \int_0^1 \sqrt{x} dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \text{ বর্গ একক}$$

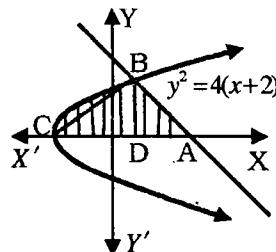
এখন, ABC বেত্তের বেত্রফল $= AOB$ বেত্তের বেত্রফল
- AOC বেত্তের বেত্রফল

$$= \frac{9}{2} - \frac{4}{3} = \frac{27 - 8}{6} = \frac{19}{6} \text{ বর্গ একক।}$$

এবং $ADBC$ বেত্তের বেত্রফল $= y = \sqrt{x}$ বক্ররেখা,
 x -অক্ষ এবং $x = 1$ ও $x = 4$ রেখাদ্য দ্বারা সীমাবদ্ধ
ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ

$$\begin{aligned} &= 2 \int_1^4 y dx = 2 \int_1^4 \sqrt{x} dx = 2 \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_1^4 \\ &= 2 \times \frac{2}{3} (4^{3/2} - 1) = \frac{4}{3} \times (8 - 1) \\ &= \frac{28}{3} \text{ বর্গ একক} \end{aligned}$$

11. পাশের চিত্রে, $y^2 = 4(x+2)$ বক্ররেখাটি x অক্ষকে C বিন্দুতে ও AB রেখাকে B বিন্দুতে ছেদ করে। AB রেখার ঢাল -1 ও B বিন্দুর y স্থানাঙ্ক 6 ।
সমাধান :



(a) ধরি, AB রেখার সমীকরণ $y = -x + c$ (i)
এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 6)$ যা (i) রেখা ও $y^2 = 4(x+2)$ বক্ররেখার ছেদবিন্দু।

$$\therefore 6 = -\alpha + c \Rightarrow c = \alpha + 6 \text{ এবং}$$

$$6^2 = 4(\alpha + 2) \Rightarrow \alpha + 2 = 9 \Rightarrow \alpha = 7$$

$$\therefore c = 7 + 6 = 13$$

$\therefore B$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(7, 6)$ এবং AB রেখার সমীকরণ

$$y = -x + 13 \Rightarrow x + y = 13 \Rightarrow \frac{x}{13} + \frac{y}{13} = 1$$

$$\therefore A$$
 বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(13, 0)$

(b) প্রদত্ত বক্ররেখা x অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

$$\therefore C$$
 বিন্দুর y স্থানাঙ্ক 0

$$y^2 = 4(x+2) \text{ এ } y = 0 \text{ বসিয়ে পাই, } x = -2$$

$$\therefore C$$
 বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2, 0)$

এখন, ΔABC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 13 & 7 & -2 & 13 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} |78+12| = \frac{90}{2} = 45 \text{ বর্গ একক।}$$

(c) B হতে AC এর উপর BD লম্ব টানি।

$$\Delta BCD \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}(CA \times BD)$$

$$= \frac{1}{2} \times |-2 - 7| \times 6 = 27 \text{ বর্গ একক।}$$

$$y = 2\sqrt{x+2} \text{ বক্ররেখা, } x = 7 \text{ সরলরেখা ও } x \text{ অক্ষ}$$

$$\text{ঠারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} = \int_{-2}^7 2\sqrt{x+2} dx$$

$$= 2 \left[\frac{(x+2)^{3/2}}{3/2} \right]_{-2}^7$$

$$= \frac{4}{3} \{ (7+2)^{3/2} - (-2+2)^{3/2} \}$$

$$= \frac{4}{3} \times 27 = 36 \text{ বর্গ একক।}$$

দাগাঙ্কিত ABC সম্পূর্ণ এলাকার ক্ষেত্রফল

$$= 45 + (36 - 27) = 54 \text{ বর্গ একক।}$$

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. $y = x^3$ বক্ররেখা, x -অক্ষ এবং $y = 0, x = 1$ ও $x = 3$ সরলরেখা তিনটি ঠারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান : } \text{নির্ণেয় ক্ষেত্রফল} = \int_1^3 y dx = \int_1^3 x^3 dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^3 = \frac{1}{4} (81 - 1) = \frac{80}{4} = 20 \text{ বর্গ একক।}$$

2. $xy = c^2$ অধিবৃত্ত, x -অক্ষ এবং $x=a$ ও $x=b$ রেখা দুইটি ঠারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান : } \text{নির্ণেয় ক্ষেত্রফল} = \int_a^b y dx = \int_a^b \frac{c^2}{x} dx$$

$$= c^2 [\ln x]_a^b = c^2 (\ln b - \ln a) = c^2 \ln \frac{b}{a}$$

3. দেখাও যে, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ অধিবৃত্ত এবং স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটি ঠারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $a^2/6$.

$$\text{প্রমাণ : } \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x$$

এখানে x এর সীমা 0 হতে a

$$\therefore \text{নির্ণেয় ক্ষেত্রফল} = \int_0^a y dx$$

$$= \int_0^a (a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x) dx$$

$$= \left[ax - 2\sqrt{a} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{x^2}{2} \right]_0^a$$

$$= a^2 - 2\sqrt{a} \cdot \frac{2}{3} a^{3/2} + \frac{a^2}{2}$$

$$= a^2 - \frac{4}{3} a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{6a^2 - 8a^2 + 3a^2}{6} = \frac{a^2}{6}$$

ব্যবহারিক অনুশীলনী

1. পাঁচটি কোটি ব্যবহার করে মান নির্ণয় কর

$$\int_{1.5}^{3.5} \ln x dx, \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

পরীক্ষণের নাম : ছয়টি কোটি ব্যবহার করে

$$\int_{1.5}^{3.5} \ln x dx \text{ এর মান নির্ণয়।}$$

$$\text{মূলতন্ত্র : } \text{মনে করি, ক্ষেত্রফল } A = \int_{1.5}^{3.5} \ln x dx$$

পাঁচটি কোটির জন্য A =

$$h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2} \right) \text{ ব্যবহার করে}$$

$$\int_{1.5}^{3.5} \ln x dx \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেসিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইয়েজার (v) শার্পনাই (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি :

1. $1.5 \leq x \leq 3.5$ ব্যবধিতে সমদ্রবণী 5টি কোটি y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 এর জন্য এই জন্য ব্যবধির নিম্নপ্রাপ্ত ও উর্ধ্বপ্রাপ্তের বিয়োগফলকে $(5 - 1) = 4$ ঠারা ভাগ করে প্রত্যেক স্কুল অংশের দৈর্ঘ্য h এর মান নির্ণয় করি।

$$\therefore h = \frac{3.5 - 1.5}{4} = 0.5$$

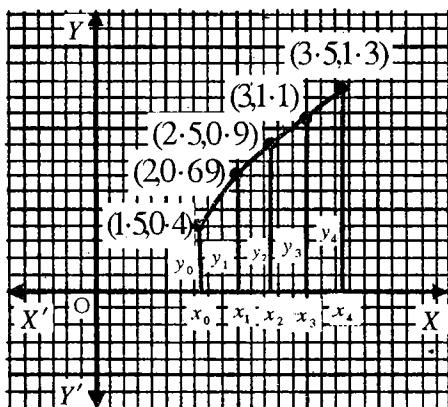
২. h এর মান হতে $x_n = x_{n-1} + h$ সূত্র ব্যবহার করে x_1, x_2, x_3, x_4 নির্ণয় করি যেখানে $x_0 = 1 \cdot 5$.

৩. $y = f(x) = \ln x$ থেকে y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 এর মান নির্ণয় করি:

$x_0 = 1 \cdot 5$	$y_0 = \ln 1 \cdot 5 = 0 \cdot 405$
$x_1 = x_0 + h = 2$	$y_1 = \ln 2 = 0 \cdot 693$
$x_2 = x_1 + h = 2 \cdot 5$	$y_2 = \ln 2 \cdot 5 = 0 \cdot 916$
$x_3 = x_2 + h = 3$	$y_3 = \ln 3 = 1 \cdot 09$
$x_4 = x_3 + h = 3 \cdot 5$	$y_4 = \ln 3 \cdot 5 = 1 \cdot 25$

৪. x - অক্ষ বরাবর শূন্ততম বর্গের ৫ বাহু = 1 একক ও y - অক্ষ বরাবর শূন্ততম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে গেখচিত্রটি অঙ্কন করি।

৫. প্রাপ্ত পাঁচটি কোটিকে x অক্ষের সহিত স্কেলের সাহায্যে সংযুক্ত করে ৫টি ট্রাপিজিয়াম আকারে প্রকাশ করি।



হিসাব : $A = h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2} \right)$

$$= 0.5 \left(\frac{0.405}{2} + 0.693 + 0.916 + 1.09 \right)$$

$$+ \frac{1.25}{2} = 1.76325 \text{ বর্গ একক (প্রায়)}.$$

ফলাফল : নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$$A = \int_{1.5}^{3.5} \ln x \, dx = 1.76325 \text{ বর্গ একক (প্রায়)}.$$

মন্তব্য : n এর মান যত বেশি হবে h এর মান তত ক্ষত্র হবে এবং A এর মান অধিকতর শুরু হবে।

পরীক্ষণের নাম পাঁচটি কোটি ব্যবহার করে $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ এর মান নির্ণয়।

মূলত্ব : মনে করি, ক্ষেত্রফল $A = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

পাঁচটি কোটির জন্য $A =$
 $= h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2} \right)$ ব্যবহার করে

$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ এর মান নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেসিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনাই (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি :

১. $0 \leq x \leq 1$ ব্যবধিতে সমদ্বৰ্তী 5টি কোটি y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 এর জন্য এই জন্য ব্যবধির নিম্নপ্রাপ্তি ও উর্ধপ্রাপ্তির বিয়োগফলকে $(5 - 1) = 4$ দ্বারা ভাগ করে প্রত্যেক ক্ষত্র অংশের দৈর্ঘ্য h এর মান নির্ণয় করি।

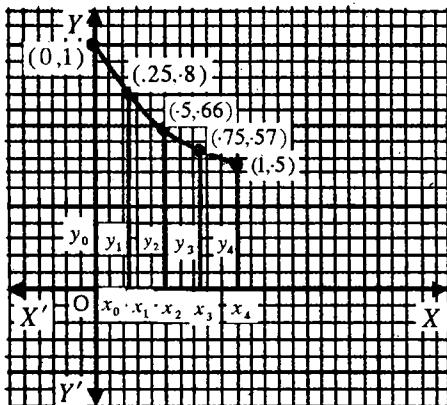
$$h = \frac{1-0}{4} = 0 \cdot 25$$

২. h এর মান হতে $x_n = x_{n-1} + h$ সূত্র ব্যবহার করে x_1, x_2, x_3, x_4 নির্ণয় করি যেখানে $x_0 = 0$.

৩. $y = f(x) = \frac{1}{1+x}$ থেকে y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 এর মান নির্ণয় করি:

$x_0 = 0$	$y_0 = \frac{1}{1+0} = 1$
$x_1 = x_0 + h = 0 \cdot 25$	$y_1 = \frac{1}{1+0 \cdot 25} = 0 \cdot 8$
$x_2 = x_1 + h = 0 \cdot 5$	$y_2 = \frac{1}{1+0 \cdot 5} = 0 \cdot 66$
$x_3 = x_2 + h = 0 \cdot 75$	$y_3 = \frac{1}{1+0 \cdot 75} = 0 \cdot 57$
$x_4 = x_3 + h = 1$	$y_4 = \frac{1}{1+1} = 0 \cdot 5$

x - অক্ষ বরাবর শূন্যতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ও y - অক্ষ বরাবর শূন্যতম বর্গের 15 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে স্থিতিটি অঙ্কন করি।



5. প্রাপ্ত শাটি কোটিকে x অক্ষের সহিত স্কেলের সাহায্যে সংযুক্ত করে 4টি ট্রাপিজিয়াম আকারে প্রকাশ করি।

$$\text{হিসাব } 8: A = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2}\right)$$

$$= 0.25\left(\frac{1}{2} + 0.8 + 0.66 + 0.57 + \frac{0.5}{2}\right) = 0.695 \text{ বর্গ একক (প্রায়)}।$$

ফলাফল : নির্ণেয় ফেত্রফল

$$A = \int_{1.5}^{3.5} \ln x \, dx = 0.695 \text{ বর্গ একক (প্রায়)}।$$

মন্তব্য : n এর মান যত বেশি হবে h এর মান তত শূন্য হবে এবং A এর মান অধিকতর শূন্য হবে।

2. ছয়টি কোটি ব্যবহার করে মান নির্ণয় কর

$$\int_1^2 x^2 \, dx$$

পরীক্ষণের নাম : ছয়টি কোটি ব্যবহার করে $\int_1^2 x^2 \, dx$ এর মান নির্ণয়।

$$\text{মূলত্ব : } \text{মনে করি, ফেত্রফল } A = \int_1^2 x^2 \, dx$$

শাটি	কোটির	জন্য	A	=
$h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2}\right)$			ব্যবহার করে	
$\int_1^2 x^2 \, dx$	এর মান নির্ণয় করি।			

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেসিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনাই (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি :

1. $1 \leq x \leq 2$ ব্যবধিতে সমদ্রব্যৌ 5টি কোটি $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ এর জন্য এই জন্য ব্যবহির নিম্নপ্রান্ত ও উর্ধ্বপ্রাম্ভের বিয়োগফলকে $(6 - 1) = 5$ দ্বারা ভাগ করে প্রত্যেক শূন্য অংশের দৈর্ঘ্য h এর মান নির্ণয় করি।

$$\therefore h = \frac{2 - 1}{5} = 0.2$$

2. h এর মান হতে $x_n = x_{n-1} + h$ সূত্র ব্যবহার করে x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 নির্ণয় করি যেখানে $x_0 = 1$.

3. $y = f(x) = x^2$ থেকে $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ এর মান নির্ণয় করি:

$x_0 = 1$	$y_0 = 1^2 = 1$
$x_1 = x_0 + h = 1 \cdot 2$	$y_1 = (1 \cdot 2)^2 = 1 \cdot 44$
$x_2 = x_1 + h = 1 \cdot 4$	$y_2 = (1 \cdot 4)^2 = 1 \cdot 96$
$x_3 = x_2 + h = 1 \cdot 6$	$y_3 = (1 \cdot 6)^2 = 2 \cdot 56$
$x_4 = x_3 + h = 1 \cdot 8$	$y_4 = (1 \cdot 8)^2 = 3 \cdot 24$
$x_5 = x_4 + h = 2$	$y_5 = (2)^2 = 4$

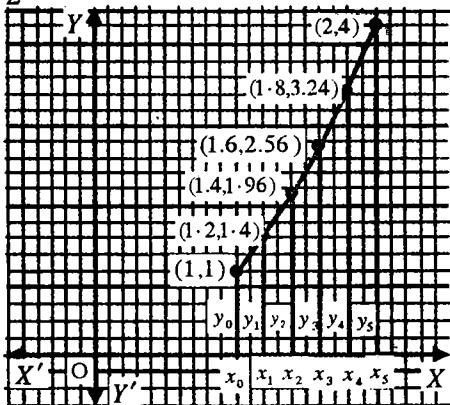
x - অক্ষ বরাবর শূন্যতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ও y - অক্ষ বরাবর শূন্যতম বর্গের 5 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে স্থিতিটি অঙ্কন করি।

5. প্রাপ্ত ছয়টি কোটিকে x অক্ষের সহিত স্কেলের সাহায্যে সংযুক্ত করে 5টি ট্রাপিজিয়াম আকারে প্রকাশ করি।

$$\text{হিসাব } 8: A = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2}\right)$$

$$= 0.2\left(\frac{1}{2} + 1.44 + 1.96 + 2.56 + 3.24\right)$$

$$+\frac{4}{2}) = 2 \cdot 34 \text{ বর্গ একক (প্রায়)}।$$



ফলাফল ৪ নির্ণয় ক্ষেত্রফল

$$A = \int_1^2 x^2 dx = 2 \cdot 34 \text{ বর্গ একক (প্রায়)}।$$

মূলত্ব : n এর মান যত বেশি হবে h এর মান তত ক্ষুদ্র হবে এবং A এর মান অধিকতর শুধু হবে।

ছয়টি কোটি ব্যবহার করে মান নির্ণয় কর : $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

পরীক্ষণের নাম ছয়টি কোটি ব্যবহার করে $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ এর মান নির্ণয়।

মূলত্ব ৪ মনে করি, ক্ষেত্রফল $A = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

পাঁচটি, কোটির জন্য $A = h\left(\frac{y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{2}\right)$ ব্যবহার করে

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ এর মান নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ৪ (i) পেসিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ৪

1. $0 \leq x \leq 1$ ব্যবধিতে সমদ্বুক্তী 5টি কোটি $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ এর জন্য এই জন্য ব্যবধির নিম্নপার্শ্বত ও উর্ধপার্শ্বতর বিয়োগফলকে $(6 - 1) = 5$ দ্বারা ভাগ করে প্রত্যেক ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য h এর মান নির্ণয় করি।

$$\therefore h = \frac{1-0}{5} = 0 \cdot 2$$

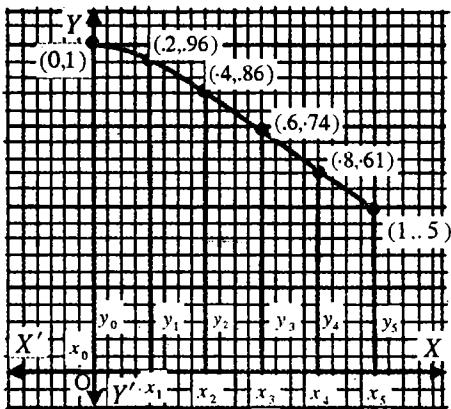
2. h এর মান হতে $x_n = x_{n-1} + h$ সূত্র ব্যবহার করে x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 নির্ণয় করি যেখানে $x_0 = 0$ ।

3. $y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ থেকে $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ এর মান নির্ণয় করি:

$x_0 = 0$	$y_0 = \frac{1}{1+0^2} = 1$
$x_1 = x_0 + h = 0 \cdot 2$	$y_1 = \frac{1}{1+(0.2)^2} = 0.96$
$x_2 = x_1 + h = 0 \cdot 4$	$y_2 = \frac{1}{1+(0.4)^2} = 0.86$
$x_3 = x_2 + h = 0 \cdot 6$	$y_3 = \frac{1}{1+(0.6)^2} = 0.74$
$x_4 = x_3 + h = 0 \cdot 8$	$y_4 = \frac{1}{1+(0.8)^2} = 0.61$
$x_5 = x_4 + h = 1$	$y_5 = \frac{1}{1+(1)^2} = 0.5$

x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 20 বাহু = 1 একক ও y

- অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 20 বাহু = 1 একক ধরে তাঁকিকান্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে স্থিতিজ্ঞতি অঙ্কন করি।



5. প্রাপ্ত ছয়টি কোটিকে x অক্ষের সহিত স্কেলের সাহায্যে সংযুক্ত করে 5টি ট্রাপিজিয়াম আকারে প্রকাশ করি।

হিসাব : $A = h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2} \right)$
 $= 0.2 \left(\frac{1}{2} + 0.96 + 0.86 + 0.74 + 0.61 + \frac{0.5}{2} \right) = 0.784$ বর্গ একক (প্রায়)।

ফলাফল : নির্ণয় ক্ষেত্রফল

$$A = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 0.784$$
 বর্গ একক (প্রায়)।

মন্তব্য : n এর মান বত বেশি হবে h এর মান তত কম্বু হবে এবং A এর মান অধিকতর শুধু হবে।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ এর মান কত হবে? [DU 06-07,08-09; NU 06-07; KU 03-04]

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. 1 C. 0 D. $\frac{\pi}{4}$

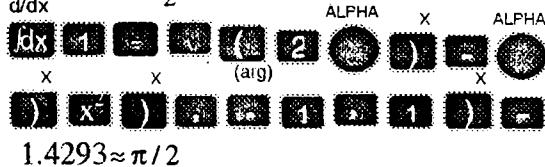
$$Sol^n. I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = [\sin^{-1}(x-1)]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে Mode radian- এ নিতে হবে। অতঃপর ধারাবাহিকভাবে নিম্নোক্ত Button গুলো Press করতে হবে।

[$\int dx$] [$($] [Integrand] [$)$] [,] [UpperLt] [,]
 [Lower Lt] [,] [$)$] [=]

Lower Limit বা Upper Limit এর জন্য Integrand সরাসরি অসংজয়িত হলে Lower Limit বা Upper Limit এর নিকটবর্তী মান নিতে হয়। যেমন - 0 এর পরিবর্তে 0.01 এবং 1 এর পরিবর্তে 0.99 বসানো যেতে পারে। Calculator অনেক problem calculation করতে বেশ সহজ নেয়।

$$I = 1.198 \approx \frac{\pi}{2}$$



$$1.4293 \approx \pi/2$$

2. $\int_0^1 \frac{\cos^{-1} x dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$ [DU,NU 05-06]

$$Sol^n. I = - \left[\frac{1}{2} (\cos^{-1} x)^2 \right]_0^1 = - \frac{1}{2} \left\{ 0 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right\}$$

$$= \frac{\pi^2}{8}. \quad I = 1.2237 \approx \frac{\pi^2}{8}$$
 (By Calculator)

[এখানে Upper Limit 0.99 ধরা হয়েছে।]

3. $\int_0^{\pi/2} (1+\cos x)^2 \sin x dx = ?$ [DU 03-04; RU 06-07, 07-08; BUET 08-09]

$$Sol^n. I = - \left[\frac{1}{3} (1+\cos x)^3 \right]_0^{\pi/2} = - \frac{1}{3} (1-8)$$

$$= \frac{7}{3} \quad I = 2.333 \approx \frac{7}{3}$$
 (By Calculator)

4. $\int_1^e \log_e x dx = ?$ [DU 02-03; NU 04-05; 02-03; JU 05-06; BUET 05-06]

$$Sol^n. I = [(\log_e x - 1)x]_1^e = [(\log_e x - 1)x]_1^e = 1$$

5. $\int_0^1 \frac{\cos^{-1} x dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$ [CDU 06-07,02-03; RU 02-03; 06-07; IU 04-05]

$$Sol^n. I = \left[\frac{1}{2} (\sin^{-1} x)^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - 0 \right\}$$

$$= \frac{\pi^2}{8}. \quad I = 1.02 \approx \frac{\pi^2}{8}$$
 (By Calculator)

[এখানে Upper Limit 0.99 ধরা হয়েছে।]

6. $\int_1^2 \frac{(x^2-1)^2 dx}{x^2} = ?$ [JU 06-07; SU 04-05; CU 05-06]

$$Sol^n. I = 0.833 \approx \frac{5}{6}$$
 (By Calculator)

7. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sqrt{\sin x} dx = ?$ [CU 05-06]

$$Sol^n. I = 0.3809 \approx \frac{8}{21}$$
 (By Calculator)

8. $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4} = ?$ [BUET 06-07]

যোগজীকরণ

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{8}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

Sol". I = .392699 = $\frac{\pi}{8}$ (By Calculator)

9. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = ?$ [JU 07-08; RU 06-07; KU 06-07]

$$\begin{aligned} \text{Sol}'' \quad I &= \left[\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_0^a \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} a^2 \quad a = 2 \text{ ধরে, } I = 3.1416 \end{aligned}$$

(By Calculator) এবং $\frac{\pi}{4} a^2 = 3.1416$



10. $y^2 = 4x$ এবং $y = x$ দ্বারা আবশ্য কেন্দ্রের ক্ষেত্রফল
কত? [DU 05-06, 08-09]

$$\text{Sol}'' \quad x^2 = 4x \Rightarrow x = 0, 4$$

$$\therefore \text{ক্ষেত্রফল} = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x) dx = \frac{8}{3} \text{ (By Calculator)}$$

11. $y = 3x$ সরলরেখা, x অক্ষ এবং $x = 2$ রেখা দ্বারা
আবশ্য কেন্দ্রের ক্ষেত্রফল কত? [IU 07-08; SU 06-07]

$$\text{Sol}'' \quad \text{ক্ষেত্রফল} = \int_0^2 3x dx = \left[3 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 6$$

12. $x^2 + y^2 = a$ এর ক্ষেত্রফল কত? [SU 04-05; CU 02-03]

$$\text{Sol}'' \quad x^2 + y^2 = (\sqrt{a})^2$$

$$\therefore \text{ক্ষেত্রফল} = \pi(\sqrt{a})^2 = \pi a$$