1 Лабораторная работа №1 по мат. анализу

1.1 Аналитический метод

Дана последовательность:

$$x_n = \frac{5n-7}{2n+5} \cdot \cos \frac{2+(-1)^n}{6}\pi$$

1. Вычислим первые 8 членов последовательности x_n :

$$\begin{array}{r|l} x_1 = \frac{-\sqrt{3}}{7} & x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{-4\sqrt{3}}{11} & x_4 = 0 \\ x_5 = \frac{-3\sqrt{3}}{5} & x_6 = 0 \\ x_7 = \frac{-\sqrt{14}}{19} & x_8 = 0 \end{array}$$

   Косинус обладает периодичностью, поэтому можно выделить подпоследовательности: $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ и $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$

$$x_{2n} = \frac{10n-7}{4n+5} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

$$x_{2n+1} = \frac{10n-12}{4n+3} \cdot \cos \frac{\pi}{6}.$$

   Вычислим частичные пределы данных подпоследовательностей:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{10n-12}{4n+3} \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{10n-12}{4n+3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{10}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{10n-7}{4n+5} \cdot \cos\frac{\pi}{2} = \lim_{x\to\infty} 0 = 0$$

   Тогда $x_{2k} \to 0$, а $x_{2k+1} \to \frac{5\sqrt{3}}{4}$ получим множество пределов $L = \{0, \frac{5\sqrt{3}}{4}\}$.

   Верхний предел - это наибольший возможный частичный предел последовательности.

   Нижний предел - это наименьший возможный частичный предел последовательности.

$$\overline{\lim} x_n = \frac{5\sqrt{3}}{4} \quad \underline{\lim} x_n = 0$$

   Если $\overline{\lim} x_n \neq \underline{\lim} x_n$, то x_n расходится.

2. **Вычислим:** $\sup x_n, \inf x_n, \overline{\lim} x_n, \underline{\lim} x_n$.

   Рассмотрим две подпоследовательности: $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ и $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$

$$x_{2k} = \frac{10n-7}{4n+5} \cdot \cos\frac{\pi}{2} \qquad x_{2k+1} = \frac{10n-12}{4n+3} \cdot \cos\frac{\pi}{6}$$

Справедливо следующее утверждение:

$$\forall n, n \in \mathbb{N} : \frac{10n-7}{4n+5} \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Тогда исследуем x_{2k+1} на предмет возрастания.

$$\forall k, k \in \mathbb{N} : x_{2k+1} < x_{2(k+1)+1}$$

$$\frac{10k-12}{4k+3} \cdot \cos\frac{\pi}{6} < \frac{10(k+3)-12}{4(k+3)+3} \cdot \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{10k-12}{4k+3} \cdot \cos\frac{\pi}{6} < \frac{10k-42}{4k+15} \cdot \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{10k-12}{4k+3} < \frac{10k+42}{4k+15}$$

$$\frac{5k-6}{4k+3} < \frac{5k+21}{4k+15}$$

$$(5k-6)(4k+15) < (5k+21)(4k+3)$$

$$20k^2 + 15 \cdot 5k - 4n \cdot 6 - 15 \cdot 6 < 20k^2 + 15k + 21 \cdot 4k + 21 \cdot 3$$

$$51k - 90 < 99k + 63; -153 < 48k, k > \frac{-51}{16} \Rightarrow \mathbb{N} \subset k.$$

$\inf x_n = \min x_n = \frac{-\sqrt{3}}{7}$, так как функция возрастает и $x_1 > x_{2k}, k\mathbb{N}$. В следствие возрастания x_{2k+1} $\sup x_n$ будет являться точная верхняя грань множества частичных ее пределов или $\overline{\lim} x_n$, который равен $\frac{5\sqrt{3}}{4}$. И тогда x_n не имеет максимума так как sup никогда не достигается

$$\sup x_n = \overline{\lim} x_n = \frac{5\sqrt{3}}{4}, \underline{\lim} x_n = \inf x_n = \frac{-\sqrt{3}}{7}, \min x_n = \frac{-\sqrt{3}}{7}, \max x_n - \nexists.$$

3. Выберем подпоследовательность x_{2k+1}, обозначим её как y_k

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 \Leftarrow \left| y_k - \frac{5\sqrt{3}}{4} \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{10k-12}{4k+3} \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \frac{5\sqrt{3}}{4} \right| < \epsilon$$

$$\frac{10k-12}{4k+3} \cdot \cos\frac{\pi}{6} < \epsilon + \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{10k-12}{4k+3} < \epsilon + \frac{5}{2}$$

$$20k - 24 < (2\epsilon + 5)(4k + 3)$$

$$20k - 24 < 8k\epsilon + 6\epsilon + 20k + 15$$

$$0 < 8k\epsilon + 6\epsilon + 39; -6\epsilon - 39 < 8k\epsilon$$

$$\frac{-6\epsilon - 39}{8\epsilon} < k; -3\frac{2\epsilon + 13}{8\epsilon} < k$$

Следовательно существует $k_0 > [-3\frac{2+13}{8}] + 1$

Часть 2. Численный метод

```
Дана последовательность:
```

$$x_n = \frac{5n-7}{2n+5} \cdot \cos \frac{2+(-1)^n}{6} \pi$$

1. Постороим график первых 100 точек последовательности x_n
2. Отметим на графике найденные аналитически $¿\, x_n, inf\ x_n, \limsup x_n \liminf x_n$

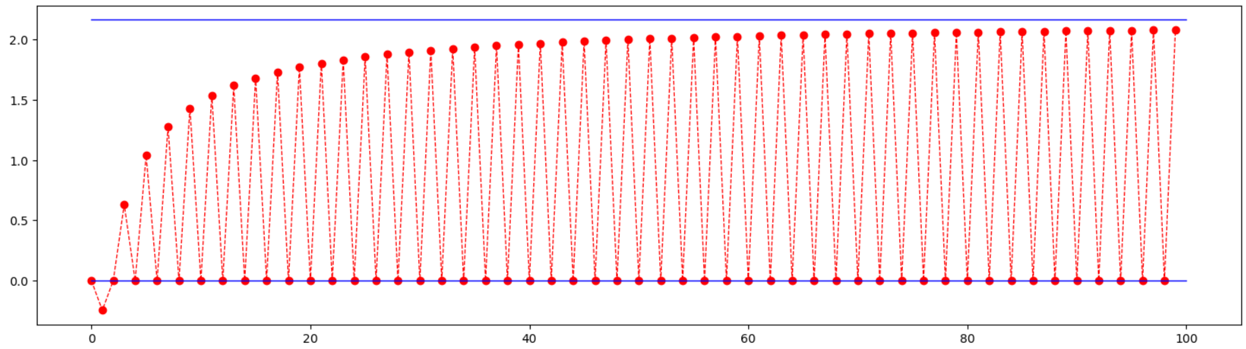
```
%matplotlib inline

import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt

def x(n): #функция вычисления n члена последовательности
    return (5*n - 7)/(2*n + 5) * math.cos((2+pow(-1,n))/6*math.pi)

x = np.vectorize(x)
n = np.arange(0,100)
plt.figure().set_figwidth(18)
plt.plot(n, x(n), 'or--', linewidth=0.9)
inf = 0
sup = 5*math.sqrt(3)/4
a = [0,100]
b = [inf,inf]
c = [sup,sup]
plt.plot(a,b,'b', linewidth=1)
plt.plot(a,c,'b', linewidth=1)

[<matplotlib.lines.Line2D at 0x74f7e3f05e80>]
```



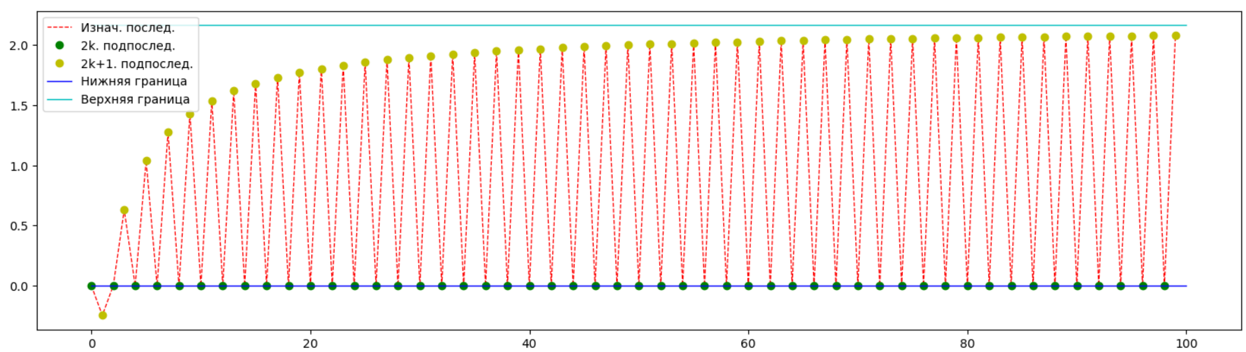
1. Из графика наглядно видно две подпоследовательности $2k$ и $2k+1$, где $k \in N$
2. Выделим сходящиеся последовательности и отметим ее точки на графике другим цветом.
3. Последовательность x_{2n} сходится к $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, а x_{2n+1} сходится к 0.

```
plt.figure().set_figwidth(18)
a = np.arange(0,100)
plt.plot(a,x(a), 'r--', linewidth=0.9, label = "Изнач. послед.")
#красный цветом обозначена оригинальная последовательность x_n

n = np.arange(0,100,2)
plt.plot(n, x(n), 'og', linewidth=0.9, label = "2k. подпослед.")
#зеленым цветом обозначена подпоследовательность четных элементов

m = np.arange(1,100,2)
plt.plot(m,x(m), 'oy', linewidth=0.9, label = "2k+1. подпослед.")
#желтым цветом обозначена подпоследовательность нечетных элементов
a = [0,100]
b = [0,0]
c = [sup,sup]
plt.plot(a,b,'b', linewidth=1,label = "Нижняя граница")
plt.plot(a,c,'c', linewidth=1,label = "Верхняя граница")
plt.legend(loc="upper left")
plt.show
```

```
<function matplotlib.pyplot.show(close=None, block=None)>
```



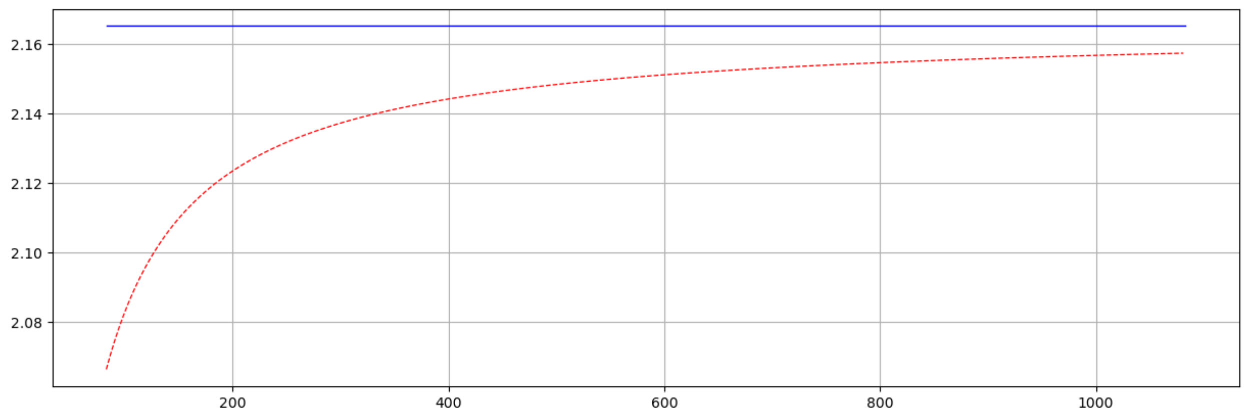
1. Выберем подпоследовательность x_{2k+1}, которая сходится.
2. По данному ϵ>0 найдем n_0, начиная с которого все члены подпоследовательности x_{2n+1} попадают в ϵ-окресность предела.
3. Построем график x_{2n+1} начиная с найденного n_0 (1000 точек), отметим горизантальной линией значение предела

```
def x(n): #функция вычисления n члена последовательности
    return (5*n - 7)/(2*n + 5) * math.cos((2+pow(-1,n))/6*math.pi)
n0 = -1
eps = 0.1#эпсилон возьмем небольшое для большей наглядности
for i in range(1,10000,2):
    if sup - x(i) < eps:
        n0 = i
        break
print(n0,sup,x(n0))#найденные значение n0, супремума и x(n_0)
```

```
83 2.1650635094610964 2.0663062265733974
```

```
x = np.vectorize(x)
n = np.arange(n0,n0+1000,2)
plt.figure().set_figwidth(15)
plt.grid()
plt.plot(n, x(n), 'r--', linewidth=0.9)
a = [n0,n0+1000]
b = [sup,sup]
plt.plot(a,b,'b', linewidth=1)
```

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x74f7e391b0b0>]
```



1. Для исходной последовательности x_n, найдем n_0 для нижнего и верхнего предела.
2. Проверим выполнения критерия точной грани.

```
def x(n): #функция вычисления n члена последовательности
    return (5*n - 7)/(2*n + 5) * math.cos((2+pow(-1,n))/6*math.pi)
n0 = -1
uo = -1
eps = 0.1 #эпсилон возьмем небольшое для большей наглядности
for i in range(0,1000):# Находим N_0 для sup(x_n)
    y = x(i)
    if sup - y < eps:
        u0 = i
        break
    if inf - y < eps:
        n0 = i
for i in range(2,1000):# Находим Находим N_0 для inf(x_n)
    if inf - y < eps:
        n0 = i
        break
x = np.vectorize(x)
n = np.arange(0,100)
plt.figure().set_figwidth(15)
plt.grid()
plt.plot(u0, x(u0), 'oy', linewidth=0.9)
```

```python
plt.plot(n0, x(n0), 'om', linewidth=0.9)
plt.plot(n, x(n), 'r--', linewidth=0.9)
a = [0,100]
b = [sup,sup]
c = [inf,inf]
plt.plot(a,b,'b', linewidth=1)
plt.plot(a,c,'c', linewidth=1)
print("N_0 для sup(x_n):",u0)
print("N_0 для inf(x_n):",n0)
```

```
N_0 для sup(x_n): 83
N_0 для inf(x_n): 2
```