Юстина Иванова
Программист, data scientist

Центральная предельная теорема и статистический анализ данных в python. Виды распределений. Собственные вектора.

Спикер

Юстина Иванова,
Data scientist по
Компьютерному зрению
в компании ОЦРВ,
Выпускница МГТУ им. Баумана,
Выпускница магистратуры
University of Southampton

Нахождение зависимости случайных величин

Дисперсия — квадрат среднеквадратичного отклонения от среднего значения (насколько данные разбросаны)

$$\sigma^2(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Ковариация — наличие зависимости между величинами

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x - \mu_x)(y - \mu_y)$$

Ковариация — это дисперсия, если две переменных — одна и та же *x*.
Ковариация не равна нулю — можно предположить зависимость.
Нормирование величин

Корелляция — нормированная ковариация

Корелляция — нормированная ковариация, определяет силу зависимости

$$\sigma(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)}\sqrt{Var(y)}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}}$$

Нормирование данных

Как нормировать:

1) центрирование данных;

3) масштабирование данных, чтобы они находились в промежутке [-1;1] или [0,1]

Матрица корелляций

Матрица корелляций подсчитывается с помощью формул, которые показывают как данные зависят друг от друга в пространстве n значений (каждый элемент матрицы равен коэффициенту Пирсона).

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma(X_1, X_1) & \sigma(X_1, X_2) & \dots & \sigma(X_1, X_n) \\ \sigma(X_2, X_1) & \sigma(X_2, X_2) & \dots & \sigma(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(X_n, X_1) & \sigma(X_n, X_2) & \dots & \sigma(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

Свойства матрицы корелляций

Матрица корелляций симметрична.

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma(X_1, X_1) & \sigma(X_1, X_2) & \dots & \sigma(X_1, X_n) \\ \sigma(X_2, X_1) & \sigma(X_2, X_2) & \dots & \sigma(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(X_n, X_1) & \sigma(X_n, X_2) & \dots & \sigma(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

Транспонирование матрицы

Первая строка стала первым столбцом

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 & 7 \\ 3 & -5 & 24 & 9 & -3 \\ -10 & -8 & -2 & -4 & 11 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -10 \\ 2 & -5 & -8 \\ 4 & 24 & -2 \\ 0 & 9 & -4 \\ 7 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

Вторая строка стала вторым столбцом

Третья строка стала третьим столбцом

```
numpy.transpose()
numpy.ndarray.T()
numpy.matrix.transpose()
```

https://math1.ru/education/matrix/matrixop.html

Геометрический смысл ковариационной матрицы.

$\vec{v}$ собств. вектор

D данные

$\vec{v}D$ проекция данных на собств. вектор

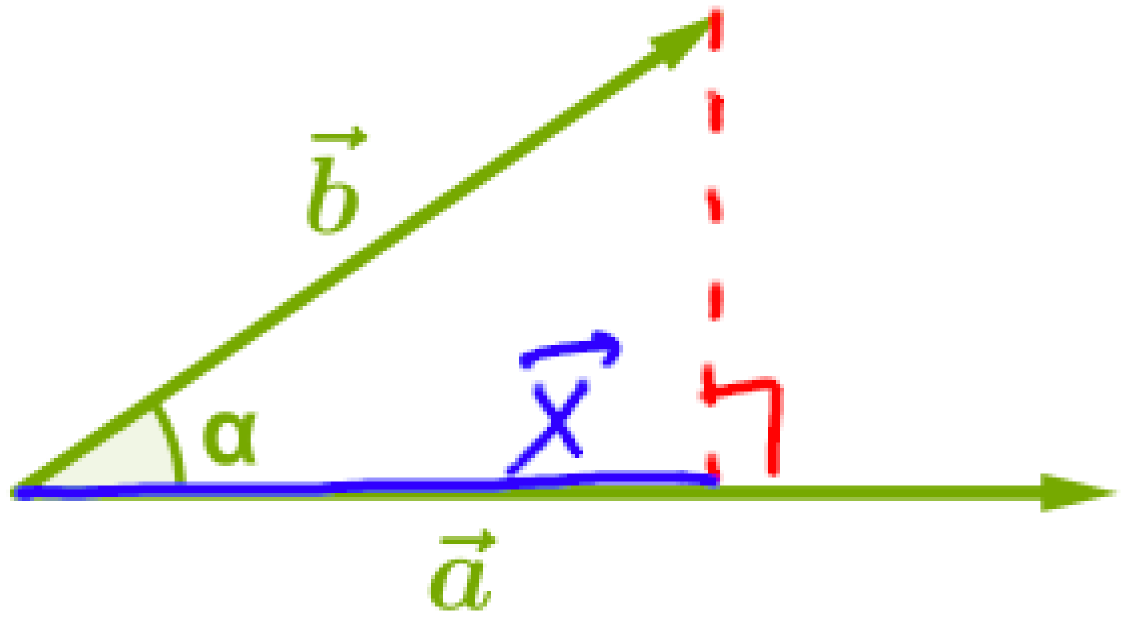
$\vec{v}^T\Sigma\vec{v}$ дисперсия спроецированных данных

Ковариационная матрица позволяет подсчитать собственные вектора и собственные значения.

Нам необходимо найти такой вектор, при проецировании данных на который вариация максимальна. Этот вектор называется собственный вектор.

Проецирование данных на вектор. Скалярное произведение.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$



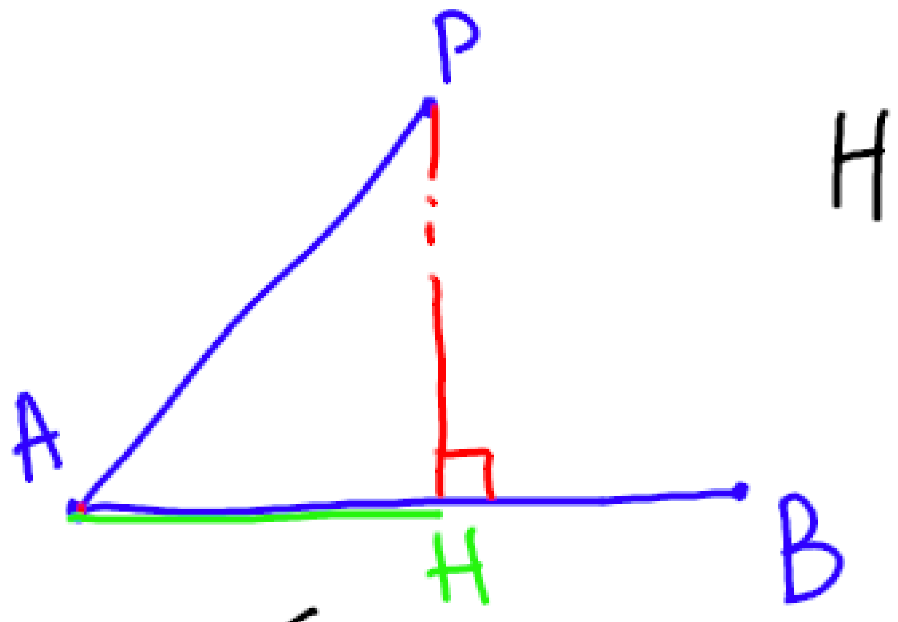
$$\frac{|\vec{x}|}{|\vec{b}|} = \cos\alpha$$

$$|\vec{x}| = |\vec{b}|\cos\alpha = |\vec{b}| \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Формула скалярного произведения:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots$$

Проецирование данных на вектор. Скалярное произведение.



H - проекция P на AB

$H = A + \vec{AH}$

чтобы найти проекцию P на прямую AB:

1) проецируем $\vec{AP}$ на $\vec{AB}$
2) добавляем к A полученный вектор $\vec{AH}$

Формула проекции точки P на прямую:

A + dot(AP,AB)/ dot(AB,AB) * AB

Скалярное произведение.

Скалярное произведение двух векторов можно посчитать через перемножение матриц.

Если **A** — это матрица размера $n_1 \times k_1$, а **B** — матрица размера $n_2 \times k_2$ и, если $k_1 = n_2$, тогда их произведение **AB** есть матрица размера $n_1 \times k_2$, чья (i, j)-я запись имеет вид:

$$a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + \ldots + a_{ik}b_{ki},$$

что в точности соответствует скалярному произведению `dot` i-й строки матрицы **A** (представленной как вектор) на j-й столбец матрицы **B** (тоже представленной как вектор):

Скалярное произведение в python:

Numpy.dot()

Некоторые ловушки корреляции

Корреляция, равная нулю, означает отсутствие линейной связи между двумя переменными. Однако могут быть совсем другие виды зависимостей. Например, если:

```
x = [-2, -1, 0, 1, 2]
y = [ 2,  1, 0, 1, 2]
```

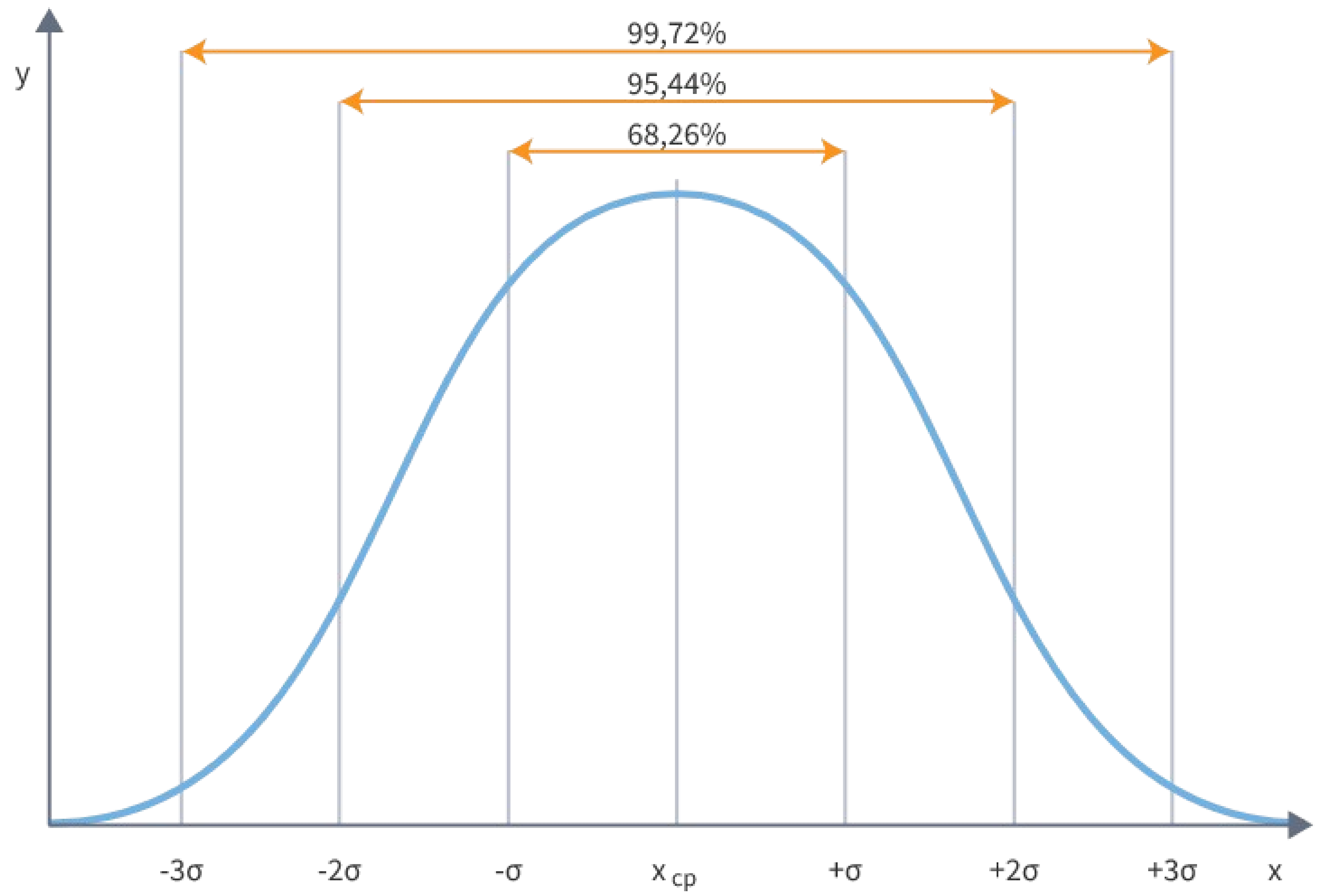
то переменные x и y имеют нулевую корреляцию, но связь между ними определенно существует — каждый элемент y равен абсолютному значению соответствующего элемента x. Но в них отсутствует связь, при которой, зная о соотношении переменной x_i со средним mean(x), можно получить информацию о соотношении переменной y_i со средним mean(y). Это как раз тот тип связи, который корреляция пытается установить.

Кроме того, корреляция ничего не говорит о величине связи. Переменные:

```
x = [-2, 1, 0, 1, 2]
y = [99.98, 99.99, 100, 100.01, 100.02]
```

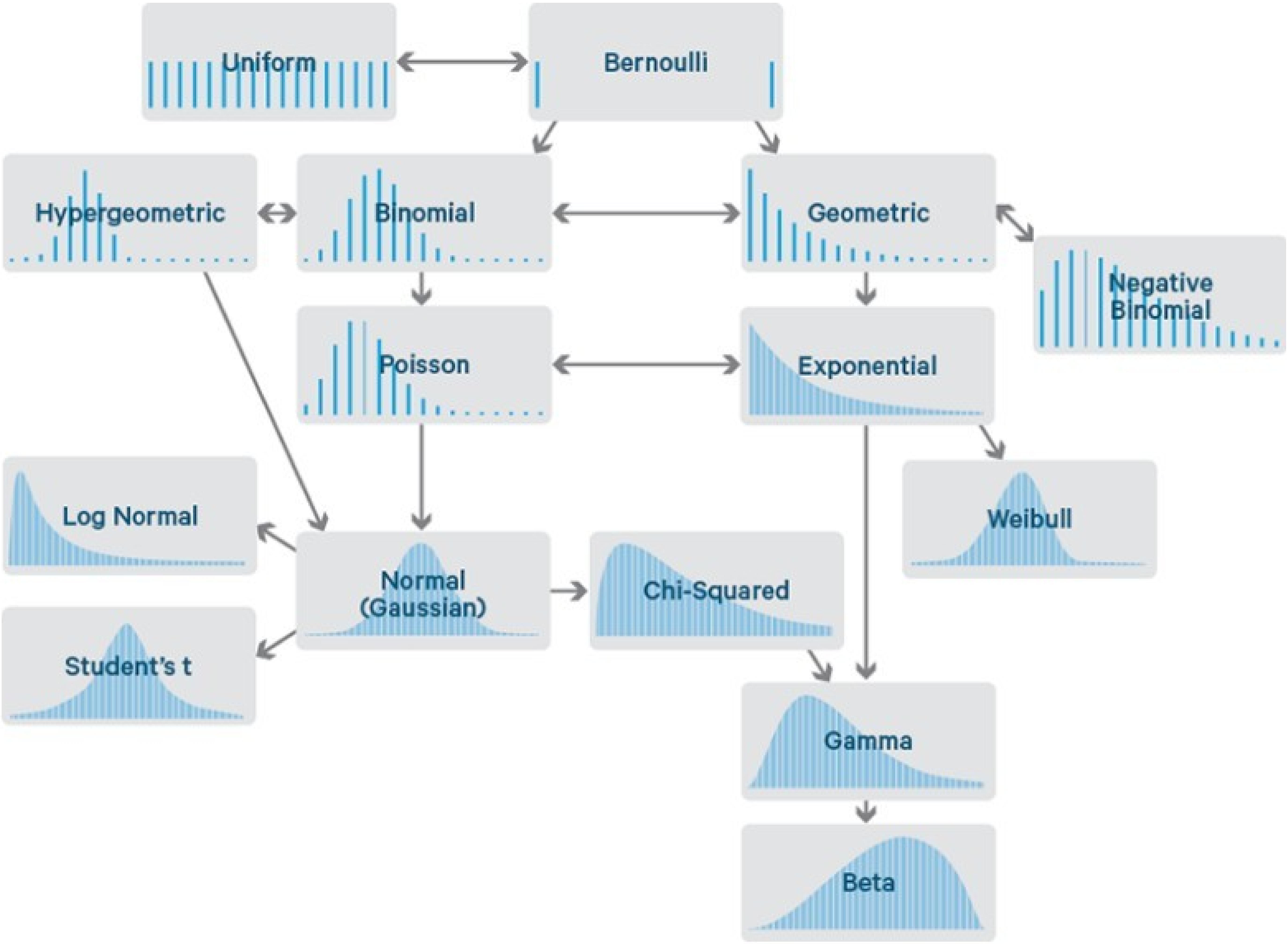
имеют очень хорошую корреляцию, но в зависимости от того, что вы измеряете, вполне возможно, что эта связь не представляет особого интереса.

Правило трех сигм



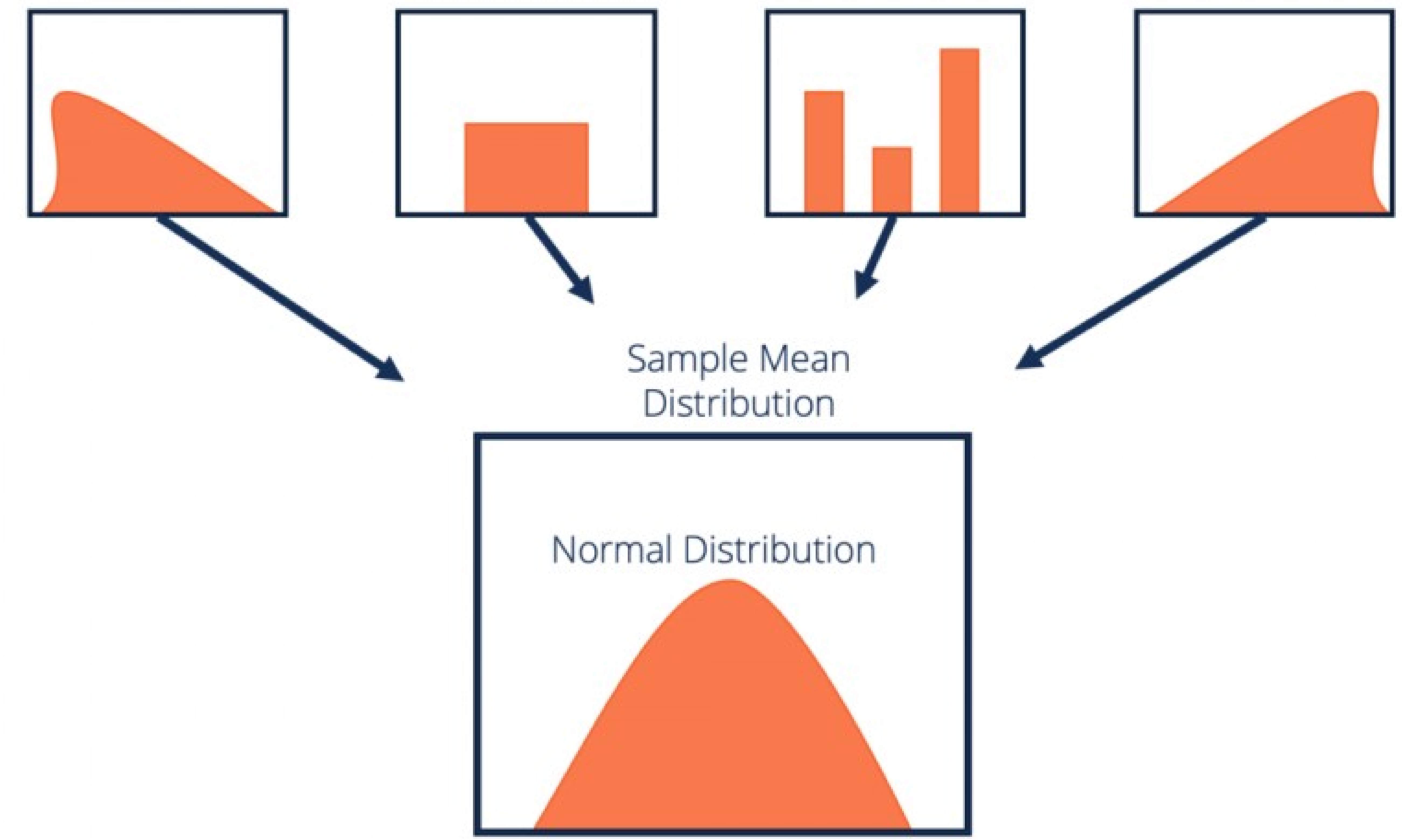
https://wiki.loginom.ru/articles/3-sigma-rule.html

Виды распределений



https://habr.com/ru/post/331060/

Центральная предельная теорема



https://www.analyticsvidhya.com/blog/2019/05/statistics-101-introduction-central-limit-theorem/

Доверительные интервалы

Доверительным называют интервал, который покрывает неизвестный параметр с заданной надёжностью.

Выборочное среднее имеет нормальное распределение, если объем выборки большой,
поэтому можно применить знания о нормальном распределении при рассмотрении выборочного среднего.

В частности, **95% распределения выборочных средних находится в пределах**
1,96 стандартных отклонений (SD) среднего популяции.

Когда у нас есть только одна выборка, мы называем это стандартной ошибкой
среднеквадратичного отклонения (SEM) и вычисляем 95% доверительного интервала
для среднего следующим образом:

$$\bar{x}-(1{,}96\times SEM);\quad \bar{x}+(1{,}96\times SEM).$$

http://statistica.ru/theory/doveritelnye-intervaly/

Дискретные и непрерывные распределения

Различают дискретные и непрерывные вероятностные распределения. Дискретное распределение характеризуется тем, что оно сосредоточено в конечном или счетном числе точек. Непрерывное распределение "размазано" по некоторому вещественному интервалу.

Дискретное распределение:

- При подбрасывании монеты случайная величина принимает значение 1, если выпал «орёл», или 0, если выпала «решка». Вероятность выпадения одного из двух значений равна 1/2, одинакова для обоих значений, поэтому случайная величина имеет дискретное равномерное распределение.
- При бросании игральной кости случайная величина — число точек на грани принимает одно из 6-и возможных значений: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Вероятность выпадения одной точки из шести равна 1/6, одинакова для каждой точки, поэтому случайная величина имеет дискретное равномерное распределение.

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%81%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D1%81%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5

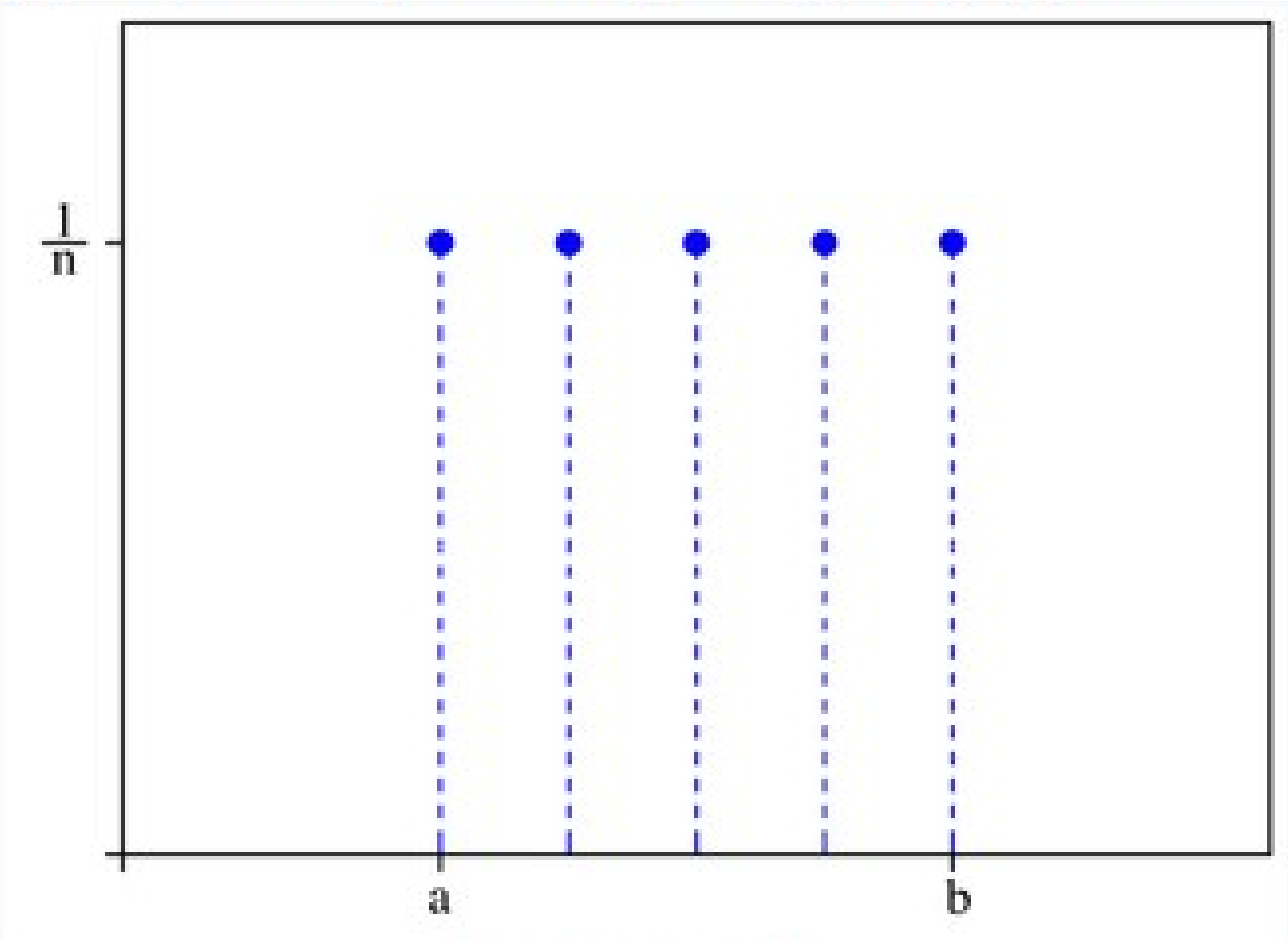
Дискретные и непрерывные распределения

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, которая в результате испытания принимает отдельные значения с определёнными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным и бесконечным. Примеры дискретной случайной величины: запись показаний спидометра или измеренной температуры в конкретные моменты времени.

Непрерывной случайной величиной называют случайную величину, которая в результате испытания принимает все значения из некоторого числового промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Пример непрерывной случайной величины: измерение скорости перемещения любого вида транспорта или температуры в течение конкретного интервала времени.

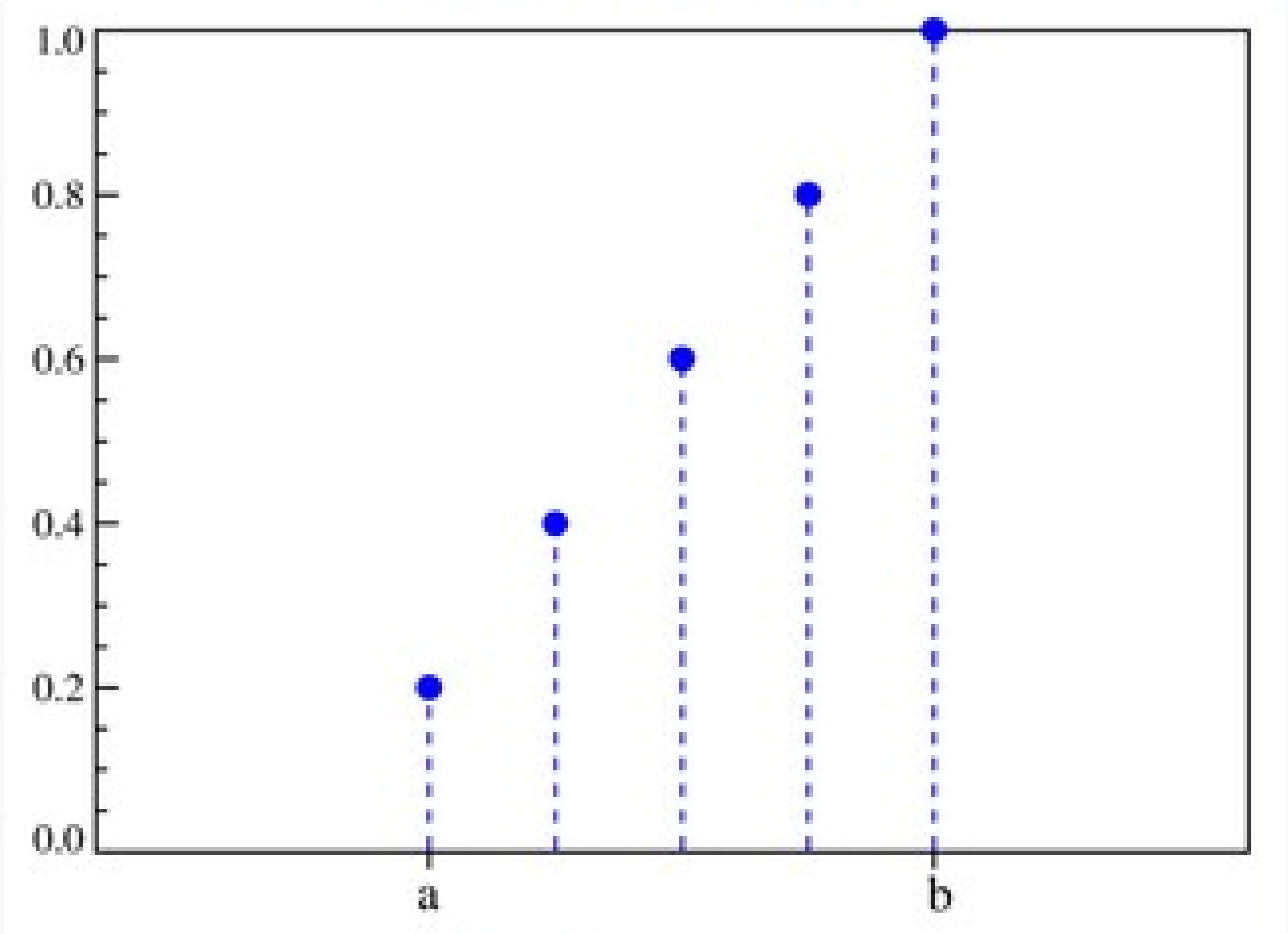
http://edu.tltsu.ru/er/book_view.php?book_id=1cec&page_id=19444

Дискретное равномерное распределение



n=5, где n=b-a+1

Функция вероятности



n=5, где n=b-a+1.

Функция распределения

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%81%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D1%81%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5

Математическое ожидание случайной величины

Математическим ожиданием (средним значением) случайной величины X, заданной на дискретном вероятностном пространстве, называется число $m=M[X]=\sum x_i p_i$, если ряд сходится абсолютно.

ПРИМЕР №1.

x_i	1	3	4	7	9
p_i	0.1	0.2	0.1	0.3	0.3

Математическое ожидание находим по формуле $m = \sum x_i p_i$.

Математическое ожидание M[X].

M[x] = 1*0.1 + 3*0.2 + 4*0.1 + 7*0.3 + 9*0.3 = 5.9

Дисперсию находим по формуле $d = \sum x^2_i p_i - M[x]^2$.

Дисперсия D[X].

$D[X] = 1^2*0.1 + 3^2*0.2 + 4^2*0.1 + 7^2*0.3 + 9^2*0.3 - 5.9^2 = 7.69$

Среднее квадратическое отклонение σ(x).

σ = sqrt(D[X]) = sqrt(7.69) = 2.78

https://math.semestr.ru/math/expectation-discrete.php

Найти мат ожидание случайной величины

x_i	-1	2	5	10	20
p_i	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

Мат ожидание

Дисперсия

Среднее квадратичное отклонение

https://www.matburo.ru/tvart_sub.php?p=art_mo

Найти мат ожидание случайной величины

x_i	-1	2	5	10	20
p_i	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = -1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.3 + 10 \cdot 0.3 + 20 \cdot 0.1 = 6.8.$$

Дисперсию находим по формуле $d = \sum x^2_i p_i - M[x]^2$.

D[X] = (-1)^2*0.1 + 2^2*0.2 + 5^2*0.3 + 10^2*0.3 + 20^2*0.1 — 6.8^2=

Среднее квадратическое отклонение σ(x).

σ = sqrt(D[X]) =

https://www.matburo.ru/tvart_sub.php?p=art_mo

Распределение Стьюдента

Мы хотим сгенерировать нормальное распределение, но по некоторым причинам не можем вычислить среднеквадратичное отклонение (например, выборка маленькая). Мы можем найти выборочное среднее и выборочную дисперсию по выборке.

Пусть $x_1, \ldots x_n$ — выборка размером n

Выборочное среднее $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Выборочная дисперсия $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

Распределение Стьюдента

Случайная величина t имеет распределение Стьюдента с n^{-1} степенями свободы, где n — размер выборки.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Данный критерий был разработан Уильямом Госсетом для оценки качества пива в компании Гиннесс. В связи с обязательствами перед компанией по неразглашению коммерческой тайны (руководство Гиннесса считало таковой использование статистического аппарата в своей работе), статья Госсета вышла в 1908 году в журнале «Биометрика» под псевдонимом «Student» (Студент).

Контакты спикера

E-mail: yustiks@gmail.com.