

فاز اول پروژه‌ی درس تحقیق در عملیات ۲

گروه ۵

اعضای گروه:

۹۷۱۰۴۵۱۵

سجاد عابد

آبان ماه ۱۴۰۰



فهرست

۳	مدلسازی مسئله.....
۳	متغیرها و پارامترها).....
۳	تابع هدف).....
۳	محدودیت‌ها).....
۴	توضیحات مدلسازی.....
۴	تابع هدف).....
۴	محدودیت‌ها).....
۶	کد سیپلکس.....
۹	خروجی سیپلکس.....
۱۰	پاسخ به سوالات بخش اول.....
۱۰	مدلسازی و حل در سیپلکس).....
۱۰	ب).....
۱۱	خروجی SOLVER اکسل و سوالات بخش دوم.....
۱۱	الف).....
۱۲	ب).....



مدلسازی مسئله

متغیرها و پارامترها

$S_{i,j,k}$:	تعداد دانش آموزان منطقه‌ی i و پایه‌ی j که به مدرسه‌ی k تخصیص می‌یابند (متغیر)
$C_{i,k}$:	هزینه تخصیص دانش آموز منطقه‌ی i به مدرسه‌ی k (پارامتر)
$P_{i,j}$:	درصد دانش آموزان منطقه‌ی i که در پایه‌ی j تحصیل می‌کنند (پارامتر)
N_i :	تعداد دانش آموزان منطقه‌ی i (پارامتر)
Cap_k :	ظرفیت مدرسه‌ی k (پارامتر)

همچنین اندیس i ، j و k به ترتیب ناحیه، پایه و مدرسه را نشان می‌دهند.

تابع هدف

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^3 \left(C_{i,k} * \sum_{j=7}^9 S_{i,j,k} \right)$$

محدودیت‌ها

$$\sum_{k=1}^3 S_{i,j,k} = P_{i,j} * N_i \quad \text{for } i \text{ in } (1 - 6), j \text{ in } (7 - 9)$$

$$\sum_{i=1}^6 \sum_{j=7}^9 S_{i,j,k} \leq Cap_k \quad \text{for } k \text{ in } (1 - 3)$$

$$0.3 * \sum_{i=1}^6 \sum_{jj=7}^9 S_{i,jj,k} \leq \sum_{i=1}^6 S_{i,j,k} \quad \text{for } k \text{ in } (1 - 3), j \text{ in } (7 - 9)$$

$$\sum_{i=1}^6 S_{i,j,k} \leq 0.36 * \sum_{i=1}^6 \sum_{jj=7}^9 S_{i,jj,k} \quad \text{for } i \text{ in } (1 - 6), j \text{ in } (7 - 9)$$

$$S_{2,j,1} = S_{4,j,3} = S_{5,j,2} = 0 \quad \text{for } j \text{ in } (7 - 9)$$

$$0 \leq S_{i,j,k}$$

$$S_{i,j,k} \text{ (int)}$$



توضیحات مدل سازی

تابع هدف

هدف ما از این مدل سازی کمینه کردن هزینه ی سرویسی است که آموزش و پرورش برای دانش آموزان پرداخت می کند. بنابراین اگر تابع هدف مجموع هزینه ی سرویس را نشان دهد و به شکل مینیموم سازی باشد، نیاز ما را برآورده می کند. بنابراین داریم (مجموع دانش آموزان هر سه پایه که از ناحیه ی i به مدرسه ی j می روند در هزینه ی سرویس ناحیه ی i به مدرسه ی k ضرب می شوند):

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^3 \left(C_{i,k} * \sum_{j=7}^9 S_{i,j,k} \right)$$

که در آن $(C_{i,k} * \sum_{j=7}^9 S_{i,j,k})$ هزینه ی سرویسی است که برای تمام دانش آموزان ناحیه ی i که به مدرسه ی k فرستاده می شوند. که با محاسبه ی مجموع این اعداد به ازای تمام i و k ها تمام هزینه ای که آموزش و پرورش برای سرویس دانش آموزان پرداخت می کند را بدست آورد و آن را کمینه کرد.

محدودیت ها

در جدول اطلاعات سوال درصدی از دانش آموزان هر ناحیه که در پایه ی j تحصیل می کنند داده شده است که ما آن را با $P_{i,j}$ مشخص کرده ایم. همچنین تمام دانش آموزان ناحیه ی i را با N_i نشان می دهیم. بنابراین باید مجموع دانش آموزان پایه ی j در ناحیه ی i (که در هر مدرسه ای درس می خوانند) با حاصل ضرب $P_{i,j}$ و N_i برابر باشد. یا عبارت دیگر برای هر i و j باید داشته باشیم:

$$\sum_{k=1}^3 S_{i,j,k} = P_{i,j} * N_i$$



با توجه به جدول اطلاعات مسئله مجموع ظرفیت دانش آموزان از مجموع ظرفیت مدارس کمتر است پس لزوما نمی توان گفت که مجموع دانش آموزانی که از نواحی و پایه های مختلف در مدرسه ی k درس می خوانند، برابر با ظرفیت مدرسه خواهد بود. بنابراین محدودیت زیر را به شکل کوچکتر مساوی به ازای تمام k ها می نویسیم.

$$\sum_{i=1}^6 \sum_{j=7}^9 S_{i,j,k} \leq Cap_k$$

همچنین گفته شده است در بین دانش آموزان هر مدرسه، مقدار دانش آموزان پایه ی j باید بین 30 تا 36 درصد کل جمعیت مدرسه باشند. پس برای هر i و j داریم (حد بالا و پایین پایین برای آهای یکسان و زهای متفاوت، یکسان خواهد بود):

$$0.3 * \sum_{i=1}^6 \sum_{j=7}^9 S_{i,j,k} \leq \sum_{i=1}^6 S_{i,j,k} \leq 0.36 * \sum_{i=1}^6 \sum_{j=7}^9 S_{i,j,k}$$

(البته در مدلسازی بالا این دسته محدودیت ها به صورت جداگانه آمده است)

در جدول نوشته شده است که تخصیص از ناحیه ی ۲ به مدرسه ی ۱ از ناحیه ی ۴ به مدرسه ی ۳ و از ناحیه ی ۵ به مدرسه ی ۲ ممکن نیست. پس باید متغیرهای مربوطه برابر با صفر باشند و به ازای هر j (پایه) داریم:

$$S_{2,j,1} = S_{4,j,3} = S_{5,j,2} = 0$$

همچنین می دانیم که $S_{i,j,k}$ تعداد دانش آموزان را نشان می دهد. پس باید مثبت و به صورت عدد صحیح باشد. پس به ازای هر i, j و k داریم.

$$0 \leq S_{i,j,k}$$

$$S_{i,j,k} \text{ (int)}$$



کد سیپلکس

کد فایل data و شیت data فایل اکسل data که در آن اطلاعات اولیه مساله داده شده است به شکل زیر است

```

OR2_Project.mod  OR2_Project.dat  OR2_Project.ops
1 /*****
2 * OPL 12.9.0.0 Data
3 * Author: sabed
4 * Creation Date: Nov 19, 2021 at 4:31:53 PM
5 *****/
6
7 SheetConnection connex ("data.xlsx");
8
9 Cap from SheetRead (connex,"data!B3:B5");
10 P from SheetRead (connex,"data!E3:G8");
11 C from SheetRead (connex,"data!E11:G16");
12 N from SheetRead (connex,"data!B10:B15");
13
14 someSet to SheetWrite (connex, "Result!B2:E55");

```

		درصد دانش آموزان (P)			
مدرسه	ظرفیت (Cap)	ناحیه	مدرسه 1	مدرسه 2	مدرسه 3
1	900	1	0.32	0.38	0.3
2	1100	2	0.37	0.28	0.35
3	1000	3	0.3	0.32	0.38
		4	0.28	0.4	0.32
		5	0.39	0.34	0.27
		6	0.34	0.28	0.38
		هزینه سرویس (C)			
ناحیه	تعداد (N)	ناحیه	مدرسه 1	مدرسه 2	مدرسه 3
1	450	1	300	0	700
2	600	2	99	400	500
3	550	3	600	300	200
4	350	4	200	500	99
5	500	5	0	99	400
6	450	6	500	300	0



کد قایل mod. نیز به شکل زیر است

```
OR2_Project.mod  OR2_Project.dat  OR2_Project.ops
2  * OPL 12.9.0.0 Model
3  * Author: sabed
4  * Creation Date: Nov 19, 2021 at 4:31:53 PM
5  *****/
6  range I=1..6;
7  range J=7..9;
8  range K=1..3;
9  int Cap[K]=...;
10 float P[I][J]=...;
11 int N[I]=...;
12 int C[I][K]=...;
13 dvar int+ S[I][J][K];
14
15 minimize sum(i in I,k in K) (C[i][k]*sum(j in J)S[i][j][k]);
16 subject to{
17   forall(i in I,j in J)
18     sum(k in K) (S[i][j][k])=P[i][j]*N[i];
19   forall(k in K)
20     sum(i in I,j in J) (S[i][j][k]) <= Cap[k];
21   forall(j in J,k in K)
22     0.3*(sum(i in I,jj in J) (S[i][jj][k])) <= sum(i in I)(S[i][j][k]);
23   forall(j in J,k in K)
24     sum(i in I)(S[i][j][k]) <= 0.36*(sum(i in I,jj in J) (S[i][jj][k]));
25   forall(j in J)
26     S[2][j][1]=0;
27   forall(j in J)
28     S[4][j][3]=0;
29   forall(j in J)
30     S[5][j][2]=0;
31   };
32
33 tuple someTuple{
34   int a;
35   int b;
36   int c;
37   int value;
38 };
39 {someTuple} someSet = {<i,j,k,S[i][j][k]> | i in I, j in J, k in K};
```

که همانطور که مشخص است پارامترها از فایل اکسل خوانده می شود و با همان نامی که در مدلسازی اشاره شد در فایل dat. تعریف شده اند و سپس در فایل mod. رنج i، j و k مشخص شده اند و سپس متغیر تصمیم S مشخص شده است که همانطور که در مدلسازی اشاره شد یک آرایه ی سه بعدی است.

پس از آن در خط 15 تابع هدف سوال نوشته شده است و از خط 16 تا 30 تمام محدودیت ها به ترتیبی که در مدل اشاره شد آورده شده اند. همچنین در خط 13 متغیر S به شکل int+ تعریف شده است که محدودیت عدد صحیح و مثبت بودن آن در این قسمت لحاظ شده است.

خط 33 تا 39 فایل mod. متغیر someTuple تعریف شده است که لیستی از تاپل های 4 عضوی است. تعریف این متغیر برای دو بعدی کردن متغیر تصمیم S است. با این کار می توان این متغیر را در فایل اکسل نوشت که در خط 14 فایل dat. این کار انجام شده است. همچنین مقادیر خروجی در شیت Result فایل data.xlsx آورده شده است. که



ستون اول ناحیه، ستون دوم پایه و ستون سوم مدرسه را نشان می‌دهد و در ستون چهارم تعداد دانش‌آموزی که از آن ناحیه و پایه به آن مدرسه اختصاص داده شده است آورده شده است.

1	7	1	0
1	7	2	144
1	7	3	0
1	8	1	0
1	8	2	171
1	8	3	0
1	9	1	0
1	9	2	135
1	9	3	0
2	7	1	0
2	7	2	222
2	7	3	0
2	8	1	0
2	8	2	168
2	8	3	0
2	9	1	0
2	9	2	210
2	9	3	0
3	7	1	0
3	7	2	0
3	7	3	165
3	8	1	0
3	8	2	0
3	8	3	176
3	9	1	12
3	9	2	20
3	9	3	177
4	7	1	98
4	7	2	0
4	7	3	0
4	8	1	140
4	8	2	0
4	8	3	0
4	9	1	112
4	9	2	0
4	9	3	0
5	7	1	195
5	7	2	0
5	7	3	0
5	8	1	170
5	8	2	0
5	8	3	0
5	9	1	135
5	9	2	0
5	9	3	0
6	7	1	0
6	7	2	0
6	7	3	153
6	8	1	0
6	8	2	0
6	8	3	126
6	9	1	0
6	9	2	0
6	9	3	171



خروجی سیپلکس

جواب کد سیپلکس در تصویر بالا قابل مشاهده است. متغیر تصمیم در کادر زر رنگ پایین صفحه پاسخ مسئله را نشان می‌دهد. همچنین در سمت چپ تصویر (Solution with objective) مقدار تابع هدف بهینه که برابر با 426,800 است قابل مشاهده است. به طول خلاصه پاسخی که توسط سیپلکس داده شده است در جدول زیر قابل مشاهده است. هر سلول دارای سه آرایه است که به ترتیب از سمت چپ به راست نشان می‌دهد که میزان از دانش آموزان این ناحیه و پایه به مدارس 1، 2 و 3 تخصیص داده شده اند.

پایه ی نهم	پایه ی هشتم	پایه ی هفتم	ناحیه
[0 135 0]	[0 171 0]	[0 144 0]	۱
[0 210 0]	[0 168 0]	[0 222 0]	۲
[12 20 177]	[0 0 176]	[0 0 165]	۳
[112 0 0]	[140 0 0]	[98 0 0]	۴
[135 0 0]	[170 0 0]	[195 0 0]	۵
[0 0 171]	[0 0 126]	[0 0 153]	۶



پاسخ به سوالات بخش اول

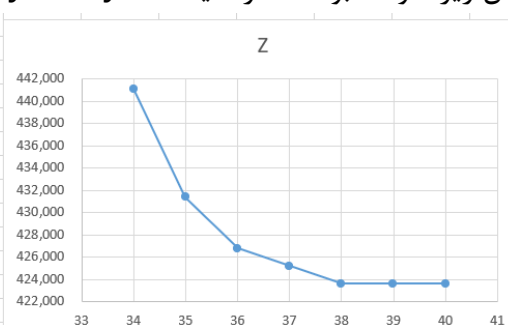
مدلسازی و حل در سیپلکس

این قسمت در بخش قبلی انجام شده و جواب‌های مربوطه آورده شده است.

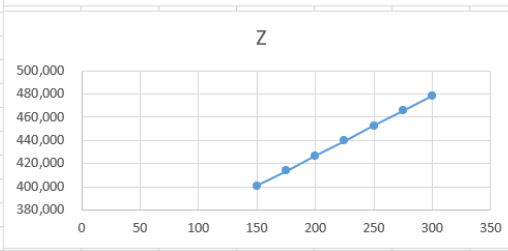
تحلیل حساسیت

برای تحلیل حساسیت در قسمت اول حد بالای محدودیت اعضای هر پایه نسبت که کل جمعیت مدرسه را از ۳۴ تا ۴۰ تغییر می‌دهیم و پاسخ تابع هدف را می‌نویسیم. همچنین هزینه‌ی تخصیص از ناحیه‌ی ۳ به مدرسه‌ی ۳ را از ۱۵۰ تا ۳۵۰ (با گام‌های ۲۵ تایی) افزایش می‌دهیم. همچنین این کار را با گام ۱ نیز انجام می‌دهیم. اعداد و نمودارها به شکل زیر خواهد بود که در شیت Sensitivity analysis فایل اکسل data آورده شده است.

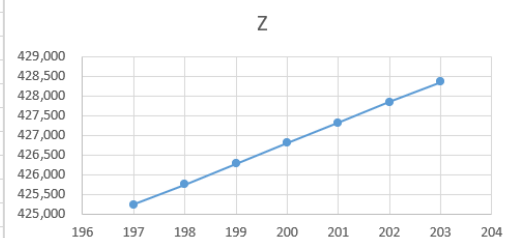
Upper Bound	Z
34	441,100
35	431,400
36	426,800
37	425,200
38	423,600
39	423,600
40	423,600



زینه ناحیه 3 به مدرسه 3	Z
150	400,850
175	413,825
200	426,800
225	439,750
250	452,700
275	465,650
300	478,600



زینه ناحیه 3 به مدرسه 3	Z
197	425,243
198	425,762
199	426,281
200	426,800
201	427,318
202	427,836
203	428,354



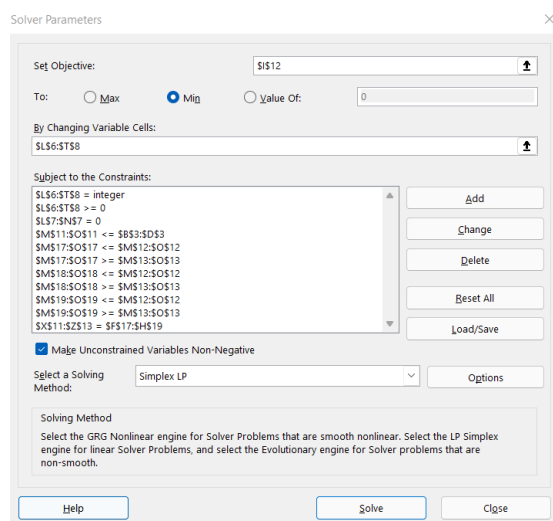


خروجی SOLVER اکسل و سوالات بخش دوم

الف)

تصویر محدودیت‌ها و تابع هدف به شکل زیر است که با توجه به تصویر اول که قسمت solver parameters را نشان می‌دهد، توضیح محدودیت‌ها به ترتیب عبارت است از:

- عدد صحیح بودن تعداد دانش آموزان تخصیص یافته
- مثبت بودن تعداد دانش آموزان تخصیص یافته (S) (البته با توجه به تیک پایین نیازی به این محدودیت نیست)
- صفر بودن دانش آموزان تخصیص یافته از ناحیه 2 به مدرسه 1
- محدودیت ظرفیت مدارس
- کمتر بودن دانش آموزان پایه هفتم از 36 درصد جمعیت مدرسه
- بیشتر بودن دانش آموزان پایه هفتم از 30 درصد جمعیت مدرسه
- کمتر بودن دانش آموزان پایه هشتم از 36 درصد جمعیت مدرسه
- بیشتر بودن دانش آموزان پایه هشتم از 30 درصد جمعیت مدرسه
- کمتر بودن دانش آموزان پایه نهم از 36 درصد جمعیت مدرسه
- بیشتر بودن دانش آموزان پایه نهم از 30 درصد جمعیت مدرسه
- تخصیص دادم تمام دانش آموزان





	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1					درصد دانش آموزان (P)																					
2	مدرسه	1	2	3	ناحیه	پایه 7	پایه 8	پایه 9																		
3	ظرفیت (Cap)	900	1100	1000	1	0.32	0.38	0.3																		
4					2	0.37	0.28	0.35																		
5					3	0.3	0.32	0.38																		
6									S																	
7																										
8																										
9	ناحیه																									
10	1		(N)	450																						
11	2			600																						
12	3			550																						
13																										
14																										
15																										
16																										
17																										
18																										
19																										

در جدول اکسل جدول زرد رنگ متغیرها (S) ها را نشان می‌دهند و Objective Func. مقدار تابع هدف است که برابر با 351,800 است. همچنین باقی جداول مطابق با نامگذاری مدل سازی، نامگذاری شده اند. جدول هایی که به شکل $\sum_{i=1}^3 S_{i,j,k}$ نوشته شده اند به معنی $\sum_{i=1}^3 S_{i,j,k}$ است. همچنین جدول $\text{Sum}(S,ij)$ در ردیف اول جمعیت هر مدرسه را نشان می‌دهد. و در ردیف دوم و سوم به ترتیب 0.36 و 0.30 برابر جمعیت هر مدرسه است.

(ب)

Reduced Cost

ابتدایی ترین اطلاعات در تحلیل حساسیت است. و فقط در حالت هایی مقدار غیر صفر دارد که ضریب متغیر از پایین دارای حد نباشد.

می‌توان گفت اگر ضریب متغیر حد پایین نداشته باشد و حد بالا داشته باشد مقدار آن برابر است با منفی Allowable Increase.

ولی خود این متغیر به ما می‌گوید که تابع هدف با کاهش یک واحد در متغیر تصمیم گیری تا چه حد تغییر پیدا می‌کند.

Objective Coefficient

ضریب پشت هر متغیر در تابع هدف است. یعنی به ازای افزایش یک واحدی یک متغیر، چه اندازه به تابع هدف افزوده می‌شود.



Allowable Increase

اگر در قسمت **variable** ها بررسی شود به معنی این است که ضریب متغیر را تا چه اندازه می توانیم زیاد کنیم به صورتی که مقدار متغیرهای تصمیم گیری تغییر نکنند. تابع هدف ثابت بماند. و اگر در قسمت **constraints** ها بررسی شود به معنی این است که تا چه اندازه می توانیم سمت راست محدودیت را اضافه کنیم به صورتی که **shadow price** همچنان همان مقدار قبلی را داشته باشد (مقدار قبلی **valid** باشد).

Allowable Decrease

دقیقا مثل بخش **allowable increase** است فقط به جای افزایش میزان کاهش را نشان می دهد.

Shadow Price

این متغیر میزان تغییرات تابع هدف را به ازای افزایش یک واحد به حد محدودیت نشان می دهد. همچنین مقدار این متغیر فقط زمانی غیر صفر است که محدودیت ما به حد خود رسیده باشد و با حد خود مساوی شود.

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$I\$4	XA	0	-11.25	20	11.25	1.00E+30
\$J\$4	XB	10	0	50	1.00E+30	3.333333333
\$K\$4	XC	0	-2.5	35	2.5	1E+30

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$O\$5	Milling	50	0	60	1E+30	10
\$P\$5	Rounding	65	0	100	1E+30	35
\$Q\$5	Drilling	40	12.5	40	8	40