Referencia - ICPC

Mathgic

Junio 2025

Github
ACTUALIZADO HASTA LA SECCIÓN 11. Falta 11.2.1, 11.2.2, 12, 13, etc.

Índice

0.1. OJO

1. Se usan macros (MAXN, LOGN, etc) con arreglos estáticos para más comodidad, pero puede causar RTE o MLE cuando los valores son grandes. Pensar en usar `vector<>` (STL) cuando sea conveniente.

---

1. Templates y Testing

1.1. Template y archivos

Crear una carpeta donde se estará usando la terminal y copiar lo siguiente en template.cpp

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
#include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
using namespace std;
using namespace __gnu_pbds;
typedef int64_t ll;
typedef pair<int, int> pii;
typedef pair<ll, ll> pll;
typedef vector<int> vi;
typedef vector<ll> vll;
typedef vector<pii> vpii;
typedef vector<pll> vpll;
typedef tree<int, null_type, less<int>, rb_tree_tag, tree_order_statistics_node_update> ordered_set;
#define fi first
#define se second
#define all(x) (x).begin(), (x).end()
#define pb push_back
mt19937_64 generator(chrono::steady_clock::now()
                    .time_since_epoch().count());
uniform_int_distribution<ll> distr(1, 1e18);
const int MOD = 1e9 + 7;
```

Despues de crear template.cpp, ejecutar en la terminal de carpeta

```bash
for f in {a..o}; do cp template.cpp $f.cpp;
```

1.2. Logger

Para debuggear, llamamos al metodo $deb(x, y, z, ...)$ con el numero de variables que ocupemos.

```cpp
template<typename A, typename B> ostream& operator<<(ostream &os, const pair<A, B> &p){return os << '(' << p.fi << ", " << p.se << ')';}
template<typename C, typename T = typename enable_if<!is_same<C, string>::value, typename C::value_type>::type>
ostream& operator<<(ostream &os, const C &v){string sep; for(const T &x : v) os << sep << x, sep = ", "; return os;}
#define deb(...) logger(#__VA_ARGS__, __VA_ARGS__)
template<typename ...Args>
void logger(string vars, Args&&... values){
    cout << "[Debug]\n\t" << vars << " = ";
    string d = "[";
    (..., (cout << d << values, d = "] ["));
    cout << "]\n";
}
```

1.3. Stress testing (diff)

Para stress testing en problemas donde existe solo una respuesta, usamos el siguiente script y lo guardamos en *stress.sh*. *code.cpp* será mi código a testear, *brute.cpp* el código bruto pero correcto y *gen.cpp* el generador de casos. Este ultimo recibirá como semilla el valor i.

```bash
set -e
g++ code.cpp -o code
g++ gen.cpp -o gen
g++ brute.cpp -o brute
for((i = 1; ; ++i)); do
    ./gen $i > input_file
    ./code < input_file > myAnswer
    ./brute < input_file > correctAnswer
    diff -Z myAnswer correctAnswer > /dev/null || break
    echo "Passed test: "  $i
done
echo "WA on the following test:"
cat input_file
echo "Your answer is:"
cat myAnswer
echo "Correct answer is:"
cat correctAnswer
```

Para extraer la semilla en gen.cpp leemos desde argv

```cpp
int rnd(int a, int b){
    return a + rand() % (b - a + 1);
}
int main(int argc, char* argv[]){
    int seed = atoi(argv[1]);
    srand(seed);
    int n = rnd(1, 5);
}
```

1.4. Stress testing (checker)

Usaremos el script similar al anterior *stress.sh*. Aquí el *brute.cpp* es opcional.

```bash
set -e
g++ code.cpp -o code
g++ gen.cpp -o gen
g++ brute.cpp -o brute
g++ checker.cpp -o checker
for((i = 1; ; ++i)); do
    ./gen $i > input_file
    ./code < input_file > myAnswer
    ./brute < input_file > correctAnswer
    ./checker > checker_log
    echo "Passed test: "  $i
done
```

Se ejecutara mientras el return value de checker sea 0. Ejemplo de la implementación de un checker

```cpp
bool validAns(ifstream &fin, int n, int* arr){
    fin>>n;
    //aquí validariamos nuestra respuesta, fin sera el input stream que le pase
    if(algunacosa) return true
    else return false

}
int main(int argc, char * argv[]){
    //input stream del caso
    ifstream fin("input_file", ifstream::in);
    //input stream de mi respuesta
    ifstream ans("myAnswer", ifstream::in);
    //input stream de respuesta bruta
    ifstream cor("correctAnswer", ifstream::in);
```

```
    //aqui fin puede procesar lo que me interese del
    ↪  input original
    fin>>n;
    int arr[n];
    for(int x = 0; x < n; x++) cin>>arr[x];
    if(!validAns(ans, n, arr)) {
        cout<<"WA x algun motivo, esto saldrá en
        ↪  cheker_log\n";
        return -1;
    }
    //si todo salio bien, retorno 0
    return 0;
}
```

2. Ideas

Ideas de Catalán. Ideas que se usan en las demostraciones de que algo se cuenta con Catalán y sirven para conteos similares:

1. *Partir en dos conjuntos y distribuir.* Usar la misma idea de la recurrencia de los números de Catalán: $(0, n-1), (1, n-2), \ldots, (k, n-1-k)$.

2. *Reflejar los caminos malos.* Si queremos contar caminos monótonos que $(0,0)$ y (n,m), por debajo de una diagonal paralela a la que une dichas esquinas, en una cuadrícula de $n \times m$, contemos todos los caminos $\binom{n+m}{n}$ y restemos los caminos que pasan sobre la diagonal. Digamos que la diagonal es $y = x+k$, entonces los caminos malos pasan al menos una vez por $y = x+k+1$: toma el primer punto $(x', x'+k+1)$ sobre el que un camino pasa por $y = x+k+1$ y refléjalo, nota que todos empiezan en $(x', x'+k+1)-(x'+k+1, x') = (-k-1, k+1)$. Entonces los caminos malos son biyectivos a los caminos que van de $(-k-1, k+1)$ a (n, m).

Optimización. Ideas para optimizar funciones.

1. *Fijar coordenadas secuencialmente.* Hay funciones en R^n que se pueden optimizar fijando la primera coordenada y resolviendo para R^{n-1} y así sucesivamente.

3. Estructuras básicas

3.1. Min stack

```
template<typename T> struct min_stack{
    stack<pair<T, T>> st;
    min_stack(){}
    min_stack(const T &MAXVAL){init(MAXVAL);}
    void init(const T &MAXVAL){
        st.push(make_pair(MAXVAL, MAXVAL));}
    void push(const T &v){st.push(make_pair(v, min(v,
    ↪  st.top().se)));}
    T top(){return st.top().fi;}
    void pop(){if(sz(st) > 1)st.pop();}
    T minV(){return st.top().se;}
    int size(){return sz(st) - 1;}
    bool empty(){return size() == 0;}
};
```

3.2. Min queue

```
template<typename T> struct min_queue{
    min_queue(const T &MAXVAL){
        p_in.init(MAXVAL); p_out.init(MAXVAL);}
    void push(const T &v){p_in.push(v);}
    T front(){transfer(); return p_out.top();}
    void pop(){transfer(); p_out.pop();}
    int size(){return sz(p_in)+sz(p_out);}
    T minV() {
        return min(p_in.minV(), p_out.minV());}
    bool empty(){ return size() == 0;}
    void transfer(){
        if(sz(p_out)) return;
        while(sz(p_in)){
            p_out.push(p_in.top());
            p_in.pop();
        }
    } min_stack<T> p_in, p_out;
};
```

3.3. Heap actualizable

```
template<class TPriority, class TKey> class
↪  UpdatableHeap{
public:
        UpdatableHeap(){
        TPriority a;
        TKey b;
        nodes.clear();
        nodes.pb( make_pair(a, b) );
    }
    pair<TPriority, TKey> top() {return nodes[1];}
    void pop(){
        if(sz(nodes) == 1) return;
        TKey k = nodes[1].se;
        swap_nodes(1, sz(nodes) - 1);
        nodes.pop_back();
        position.erase(k);
        heapify(1);
    }
    void insert_or_update(const TPriority &p, const
    ↪  TKey &k){
        int pos;
        if(is_inserted(k)){
            pos = position[k];
            nodes[pos].fi += p;
        } else {
            position[k] = pos = sz(nodes);
            nodes.pb( make_pair(p, k) );
        }
        heapify(pos);
    }
    bool is_inserted(const TKey &k) {
        return position.count(k);
    }
    int get_size() {
        return sz(nodes) - 1;
    }
    void erase(const TKey &k){
        if(!is_inserted(k)) return;
        int pos = position[k];
        swap_nodes(pos, sz(nodes) - 1);
        nodes.pop_back();
        position.erase(k);
        heapify(pos);
    }
private:
    vector<pair<TPriority, TKey>> nodes;
    map<TKey, int> position;
    void heapify(int pos){
        if(pos >= sz(nodes)) return;
```

```
        while(1 < pos && nodes[pos / 2] <=
        ↪  nodes[pos]){
            swap_nodes(pos / 2, pos);
            pos /= 2;
        }
        int l = pos * 2, r = pos * 2 + 1, maxi = pos;
        if(l < sz(nodes) && nodes[l] > nodes[maxi])
        ↪  maxi = l;
        if(r < sz(nodes) && nodes[r] > nodes[maxi])
        ↪  maxi = r;
        if(maxi != pos){
            swap_nodes(pos, maxi);
            heapify(maxi);
        }
    }
    void swap_nodes(int a, int b){
        position[ nodes[a].se ] = b;
        position[ nodes[b].se ] = a;
        swap(nodes[a], nodes[b]);
    }
};
```

4. Teoría de números

4.1. Criba de Eratóstenes

Criba Complejidad: Tiempo $O(n \log\log n)$ - Memoria extra $O(n)$. Calcula los primos menores o iguales a n.

```
void criba(int n, vi &primos){
    primos.clear();
    if(n < 2) return;
    vector<bool> no_primo(n + 1);
    no_primo[0] = no_primo[1] = true;
    for(ll i = 3; i * i <= n; i += 2){
        if(no_primo[i]) continue;
        for(ll j = i * i; j <= n; j += 2 * i)
            no_primo[j] = true;
    }
    primos.pb(2);
    for(int i = 3; i <= n; i += 2)
        if(!no_primo[i]) primos.pb(i);
}
```

Criba sobre un rango. Complejidad: Tiempo $O(\sqrt{b}\log\log\sqrt{b} + (b-a)\log\log(b-a))$ - Memoria extra $O(\sqrt{b}+b-a)$. Calcula los primos en el intervalo $[a, b]$.

```
void criba_rango(ll a, ll b, vector<ll> &primos){
    a = max(a, 0ll);
    b = max(b, 0ll);
    ll tam = b - a + 1;
    vi primos_raiz;
    criba(sqrt(b) + 1, primos_raiz);
    bool no_primo[tam] = {};
    primos.clear();
    for(ll p : primos_raiz){
        ll ini = p * max(p, (a + p - 1) / p);
        for(ll m = ini; m <= b; m += p)
            no_primo[m - a] = true;
    }
    for(ll i = 0; i < tam; ++i)
    if(!(no_primo[i] || i + a < 2))
        primos.pb(i + a);
}
```

Criba segmentada. Complejidad: Tiempo $O(\sqrt{n}\log\log\sqrt{n} + n\log\log n)$ - Memoria extra $O(\sqrt{n}+S)$. Cuenta la cantidad de primos menores o iguales a n.

```
int cuenta_primos(int n){
    if(n < 2) return 0;
    const int S = sqrt(n);
    vi primos_raiz;
    criba(sqrt(n) + 1, primos_raiz);
    int ans = 0;
    bool no_primo[S + 1] = {};
    for(int ini = 0; ini <= n; ini += S){
        memset(no_primo, 0, S + 1);
        for(int p : primos_raiz){
            int m = p*max(p, (ini+p-1)/p)-ini;
            for(; m <= S; m += p) no_primo[m]=1;
        }
        for(int i=0; i<S && i + ini <= n; ++i)
        if(!no_primo[i] && 1 < i + ini) ans++;
    } return ans;
}
```

Criba lineal. Complejidad: Tiempo $O(n)$ - Memoria extra $O(n)$. Calcula los primos menores o iguales a n y el menor primo que divide a cada entero en $[2, n]$. ADVERTENCIA: es $O(n)$ pero tiene una constante grande.

```
void criba_lineal(int n, vi &primos){
    if(n < 2) return;
    vi lp(n + 1);
    for(ll i = 2; i <= n; ++i){
        if(!lp[i]) primos.pb(lp[i] = i);
        for(int j = 0; i * primos[j] <= n; ++j){
            lp[i * primos[j]] = primos[j];
            if(primos[j] == lp[i]) break;
        }
    }
}
```

4.2. Algoritmo extendido de Euclides

Complejidad: Tiempo $O(\log(\max(a, b)))$ - Memoria extra $O(1)$. Encuentra una solución a la ecuación $ax + by = \gcd(a, b)$.

```
int gcd_ext(int a, int b, int &x, int &y){
    if(!b){ x = 1; y = 0; return a; }
    int x1, y1, g = gcd_ext(b, a % b, x1, y1);
    x = y1;
    y = x1 - y1 * (a / b);
    return g;
}
```

4.3. Solución de ecuaciones diofánticas lineales

Complejidad: Tiempo $O(\log(\max(a, b)))$ - Memoria extra $O(1)$. Encuentra una solución a la ecuación $ax + by = c$ o determina si no existe solución.

```
bool encuentra_solucion(int a, int b, int c, int &x,
↪  int &y, int &g){
    g = gcd_ext(abs(a), abs(b), x, y);
    if(c % g) return false;
    x *= c / g;
    y *= c / g;
    if(a < 0) x = -x;
    if(b < 0) y = -y;
    return true;
}
```

Cambia a la siguiente (anterior) solución $|cnt|$ veces. $g := gcd(a, b)$.

```cpp
void cambia_solucion(int &x, int &y, int a, int b, int cnt, int g = 1) {
    x += cnt * b / g;
    y -= cnt * a / g;
}
```

Cuenta la cantidad de soluciones x, y con $x \in [minx, maxx]$ y $y \in [miny, maxy]$.

```cpp
int cuenta_soluciones(int a, int b, int c, int minx, int maxx, int miny, int maxy) {
    int x, y, g;
    if(!encuentra_solucion(a, b, c, x, y, g)) return 0;
    /// ax + by = c ssi (a/g)x + (b/g)y = c/g
    /// Dividimos entre g para simplificar y no dividir a cada rato
    a /= g;
    b /= g;
    /// Signos de a, b nos sirven para pasar a la
    /// siguiente (anterior) solucion
    int sign_a = a > 0 ? +1 : -1;
    int sign_b = b > 0 ? +1 : -1;
    /// pasa a la minima solucion tal que minx <= x
    cambia_solucion(x, y, a, b, (minx - x) / b);
    /// si x < minx, pasa a la siguiente para que minx <= x
    if(x < minx) cambia_solucion(x, y, a, b, sign_b);
    if(x > maxx) return 0; /// si x > maxx, entonces no hay x solucion tal que x in [minx, maxx]
    int lx1 = x;
    /// pasa a la maxima solucion tal que x <= maxx
    cambia_solucion(x, y, a, b, (maxx - x) / b);
    if(x > maxx) cambia_solucion(x, y, a, b, -sign_b); /// si x > maxx, pasa a la solucion anterior
    int rx1 = x;
    /// hace todo lo anterior pero con y
    cambia_solucion(x, y, a, b, -(miny - y) / a);
    if(y < miny) cambia_solucion(x, y, a, b, -sign_a);
    if(y > maxy) return 0;
    int lx2 = x;
    cambia_solucion(x, y, a, b, -(maxy - y) / a);
    if(y > maxy) cambia_solucion(x, y, a, b, sign_a);
    int rx2 = x;
    /// como al encontrar las x tomando y como criterio no nos asegura
    /// que esten ordenadas, entonces las ordenamos
    if(lx2 > rx2) swap(lx2, rx2);
    /// obtenemos la interseccion de los intervalos
    int lx = max(lx1, lx2);
    int rx = min(rx1, rx2);
    if(lx > rx) return 0; /// no existen soluciones, interseccion vacia
    /// las soluciones (por x) van de b en b (b/g en b/g pero dividimos al principio)
    return (rx - lx) / abs(b) + 1;
}
```

4.4. Funciones multiplicativas

Función Phi de Euler. Complejidad: Tiempo $O(d)$ - Memoria extra $O(n)$. d es la cantidad de factores primos de n. Cuenta la cantidad de coprimos con n menores a n.

```cpp
int phi(int n){
    if(n <= 1) return 1;
    if(!dp[n]){
        int pot = 1, p = lp[n], n0 = n;
        while(n0 % p == 0){ pot *= p; n0 /= p; }
        dp[n] = (pot / p) * (p - 1) * phi(n0);
    } return dp[n];
}
```

Función σ_0. Complejidad: Tiempo $O(d)$ - Memoria extra $O(n)$. d es la cantidad de factores primos de n. Cuenta la cantidad de divisores de n.

```cpp
ll sigma0(int n){
    if(n <= 1) return 1;
    if(!dp[n]){
        ll exp = 0, p = lp[n], n0 = n;
        while(n0 % p == 0){ exp++; n0 /= p; }
        dp[n] = (exp + 1) * sigma0(n0);
    } return dp[n];
}
```

Función σ_1. Complejidad: Tiempo $O(d)$ - Memoria extra $O(n)$. d es la cantidad de factores primos de n. Calcula la suma de los divisores de n.

```cpp
ll sigma1(int n){
    if(n <= 1) return 1;
    if(!dp[n]){
        ll pot = 1, p = lp[n], n0 = n;
        while(n0 % p == 0){ pot *= p; n0 /= p; }
        dp[n] = (pot*p - 1) / (p-1) * sigma1(n0);
    } return dp[n];
}
```

Función de Moebius. Complejidad: Tiempo $O(d)$ - Memoria extra $O(n)$. d es la cantidad de factores primos de n. Devuelve 0 si n no es divisible por algún cuadrado. Devuelve 1 o -1 si n es divisible por al menos un cuadrado. Devuelve 1 si n tiene una cantidad par de factores primos. Devuelve -1 si n tiene una cantidad impar de factores primos.

```cpp
int moebius(int n){
    if(n <= 1) return 1;
    if(dp[n] == -7){
        int exp = 0, p = lp[n], n0 = n;
        while(n0 % p == 0){ exp++; n0 /= p; }
        dp[n] = (exp > 1 ? 0 : -1 * moebius(n0));
    } return dp[n];
}
```

4.5. Factorización Pollard Rho

Complejidad: $O(\sqrt[4]{n})$. Inicializar con PollardRho::init() y para factorizar un número PollardRho::factorize(n).

```cpp
//COMPIADO Y PEGADOPORCUESTIONES DE TIEMPO
namespace PollardRho {
    mt19937 rnd(chrono::steady_clock::now()
    .time_since_epoch().count());
    const int P = 1e6 + 9;
    ll seq[P];
    int primes[P], spf[P];
    inline ll add_mod(ll x, ll y, ll m){
        return (x += y) < m ? x : x - m; }
    inline ll mul_mod(ll x, ll y, ll m) {
        ll res = __int128(x) * y % m;
        return res;
        // ll res = x * y - (ll)((long double)x * y / m + 0.5) * m;
```

```
    // return res < 0 ? res + m : res;
}
inline ll pow_mod(ll x, ll n, ll m) {
    ll res = 1 % m;
    for (; n; n >>= 1) {
        if (n & 1) res = mul_mod(res, x, m);
        x = mul_mod(x, x, m);
    }
    return res;
}
// O(it * (logn)^3), it = number of rounds performed
inline bool miller_rabin(ll n) {
    if (n<=2 || (n & 1 ^ 1)) return (n==2);
    if (n < P) return spf[n] == n;
    ll c, d, s = 0, r = n - 1;
    for (; !(r & 1); r >>= 1, s++) {}
    // each iteration is a round
    for(int i=0; primes[i]<n && primes[i]<32; i++){
        c = pow_mod(primes[i], r, n);
        for(int j = 0; j < s; j++){
            d = mul_mod(c, c, n);
            if(d==1&&c!=1&&c!=n-1) return 0;
            c = d;
        } if (c!=1) return 0;
    } return 1;
}
void init() {
    int cnt = 0;
    for(int i = 2; i < P; i++){
        if(!spf[i]) primes[cnt++] = spf[i]=i;
        for(int j=0,k;(k=i*primes[j])<P;j++){
            spf[k] = primes[j];
            if (spf[i] == spf[k]) break;
        }
    }
}
// returns O(n^(1/4))
ll pollard_rho(ll n) {
    while(1){
        ll x=rnd()%n,y=x,c=rnd()%n,u=1,v,t=0;
        ll *px = seq, *py = seq;
        while(1){
            *py++ = y = add_mod(mul_mod(y, y, n), c, n);
            *py++ = y = add_mod(mul_mod(y, y, n), c, n);
            if((x = *px++) == y) break;
            v = u;
            u = mul_mod(u, abs(y - x), n);
            if(!u) return __gcd(v, n);
            if(++t == 32){
                t = 0;
                if((u = __gcd(u,n))>1 && u<n)
                    return u;
            }
        }
        if(t && (u = __gcd(u, n)) > 1 && u<n)
            return u;
    }
}
vector<ll> factorize(ll n) {
    if(n == 1) return vector <ll>();
    if(miller_rabin(n)) return vector<ll>{n};
    vector<ll> v, w;
    while(n > 1 && n < P){
        v.pb(spf[n]); n /= spf[n];
    }
    if(n >= P){
        ll x = pollard_rho(n);
        v = factorize(x);
        w = factorize(n / x);
        v.insert(v.end(), all(w));
    } return v;
  }
}
```

5. Combinatoria

5.1. Números de Catalán

Se puede calcular con $C_0 = C_1 = 1$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{4n+2}{n+2} C_{n-1},\ n \geq 2.$$

El n-ésimo número de Catalán C_n cuenta

- La cantidad de secuencias de paréntesis balanceadas de longitud $2n$.
- La cantidad de maneras distintas de agrupar $n+1$ factores con paréntesis.
- La cantidad de triangulaciones de un polígono convexo de $n+2$ lados.
- La cantidad de maneras de unir $2n$ puntos en una circunferencia con cuerdas sin que ningún par se corte.
- La cantidad de árboles binarios completos con n nodos *internos* no isomorfos. Los nodos *internos* son aquellos con dos hijos.
- La cantidad de árboles binarios enraizados completos no isomorfos con $n+1$ hojas.
- La cantidad de árboles enraizados planos no isomorfos con $n+1$ nodos.
- La cantidad de árboles binarios no isomorfos con exactamente n nodos.
- La cantidad de caminos monótonos en un tablero de $n \times n$ que van de $(0,0)$ a (n,n) sin que cruce la diagonal que une $(0,0)$ con (n,n).
- La cantidad de permutaciones de tamaño n que son ordenables con una pila (mientras top() $\leq x$, pop(). Luego push(x). Al final haz pop() de los elementos restantes de la pila). Equivalentemente la cantidad de permutaciones que no contienen el patrón 231: no existen índices $i < j < k$ tales que $a_k < a_i < a_j$.
- La cantidad de permutaciones de tamaño n que no contienen el patrón 123: no existen índices $i < j < k$ tales que $a_i < a_j < a_k$.
- La cantidad de particiones no cruzadas de un conjunto de tamaño n.

- La cantidad de maneras de cubrir una escalera con n escalones, con la altura del i-ésimo escalón siendo i, mediante n rectángulos.

- La cantidad de maneras de unir n cuadros de 1×1 tales que cada cuadro tenga a otro cuadro adyacente a sus lados y, cada columna de cuadros tenga una altura absoluta mayor o igual a la altura absoluta a la columna previa. Cada uno de estos polígonos tiene un perímetro de $2n + 2$.

Triángulo de Catalán. Sean $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, definamos

$$C_{n,k} = \begin{cases} 0, & n < k \text{ o } n, k < 0, \\ 1, & n = k = 0, \\ C_{n,k-1} + C_{n-1,k}, & k \leq n. \end{cases}$$

Entonces $C_{n,n} = C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1,k}$. El número $C_{n,k}$ se puede interpretar como la cantidad de caminos desde (n,k) del Triángulo de Catalán hasta $(0,0)$. Por lo que tiene sentido que $C_{n,n} = C_n$, dado que $C_{n,n}$ es la cantidad de caminos monótonos desde (n,n) a $(0,0)$ en un tablero de $n \times n$ que no cruzan la diagonal que une $(0,0)$ y (n,n).

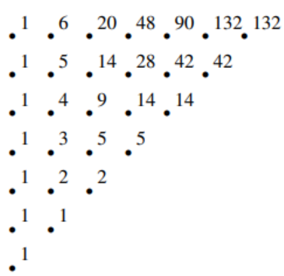


Figura 5.1: Triángulo de Catalán hasta $n = 6$.

5.2. Números de Narayana

Sean $n, k \in \mathbb{Z}^+$ con $k \leq n$, los números de Narayana se definen como

$$N(n,k) = \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}.$$

Se cumple que

$$N(n,k) = N(n, n-k+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} N(n,k) = C_n,$$

donde C_n es el n-ésimo número de Catalán. El número $N(n,k)$ cuenta

- La cantidad de secuencias de paréntesis balanceadas con $2n$ paréntesis y k distintos anidamientos, es decir, k ocurrencias de la subcadena ().

- La cantidad de caminos distintos desde $(0,0)$ a $(2n,0)$ dando pasos hacia arriba o abajo y siempre avanzando una unidad en cada paso (diagonales), de manera que haya exactamente k picos. Equivalentemente a la cantidad de maneras de ordenar n 1's y n (-1)'s en una secuencia a_i tales que si S_i es la suma parcial de a_i, entonces $\{S_i\}$ tiene exactamente k máximos locales.

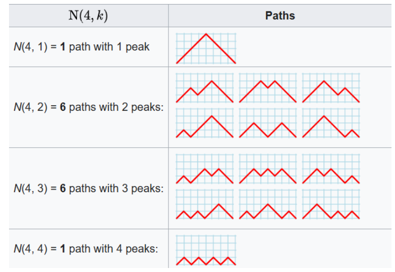


Figura 5.2: Caminos de $(0,0)$ a $(8,0)$ que cuenta $N(4,k)$.

- La cantidad de árboles enraizados con $n+1$ nodos y k hojas.

- La cantidad de particiones no cruzadas de un conjunto de tamaño n en exactamente k subconjuntos.

5.3. Particiones Enteras

Genera todas las particiones de un número n como suma de enteros positivos en orden no creciente. Complejidad: Tiempo $O\left(\frac{13^{\sqrt{n}}}{n}\right)$ - Memoria extra $O(n)$.

```
void generar(int n, int maximo, vi &actual){
    if(n == 0){// Aqui trabajar con actual
        return; }
    for(int i = min(n, maximo); i >= 1; --i){
        actual.pb(i);
        generar(n - i, i, actual);
        actual.pop_back();
    }
}
```

La función de partición $p(n)$, que cuenta el número de formas distintas de escribir n como suma de enteros positivos sin importar el orden,

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22
n	9	10	11	12	13	14	15	16
$p(n)$	30	42	56	77	101	135	176	231

Tabla 1: Particiones enteras

Tiene la siguiente aproximación asintótica para valores grandes de n, conocida como la fórmula de Hardy-Ramanujan:

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$$

6. Cálculo

6.1. Transformada de Fourier

FFT. Complejidad: Tiempo $O(n \log n)$ - Memoria extra $O(n \log n)$, donde n es el grado del polinomio P.

```
using comp = complex<double>;
const double PI = acos(-1);
vector<comp> FFT(vector<comp> &P, bool inversa){
    int n = sz(P);
    if(n == 1) return P;
    vector<comp> Pe, Po;
    for(int i = 0; i < n; ++i)
        if(i % 2) Po.pb(P[i]);
        else Pe.pb(P[i]);
```

```
    vector<comp> eval_Pe = FFT(Pe, inversa);
    vector<comp> eval_Po = FFT(Po, inversa);
    vector<comp> eval(n);
    double angulo = 2*PI / n * (inversa? -1 : 1);
    comp w(1), w_n(cos(angulo), sin(angulo));
    for(int i = 0; i < n / 2; ++i){
        eval[i] = eval_Pe[i] + w * eval_Po[i];
        eval[i+n/2] = eval_Pe[i] - w*eval_Po[i];
        if(inversa){eval[i]/=2; eval[i+n/2]/=2;}
        w *= w_n;
    } return eval;
}
```

Multiplicar polinomios. Complejidad: Tiempo $O(n \log n)$ - Memoria extra $O(n \log n)$, donde n es el grado máximo del polinomio A o B.

```
vi multiplicar(vi A, vi B){
    vector<comp> cA(all(A)), cB(all(B));
    int n = 1;
    while(n < sz(A) + sz(B)) n *= 2;
    cA.resize(n);
    cB.resize(n);
    vector<comp> val_A = FFT(cA, false);
    vector<comp> val_B = FFT(cB, false);
    for(int i=0; i<n; ++i) val_A[i] *= val_B[i];
    val_A = FFT(val_A, true);
    vi res(n);
    for(int i = 0; i < n; ++i)
        res[i] = round(val_A[i].real());
    int carry = 0;
    for(int i = 0; i < n; i++){ res[i] += carry;
        carry = res[i] / 10; res[i] %= 10;
    } return res;
}
```

7. Formulazas

7.1. Lógica - Conjuntos - Bitwise

$\oplus$ es el xor (o diferencia simétrica de conjuntos).

1. $a|b = a \oplus b + a\&b$
2. $a \oplus (a\&b) = (a|b) \oplus b$
3. $b \oplus (a\&b) = (a|b) \oplus a$
4. $(a\&b) \oplus (a|b) = a \oplus b$
5. $a + b = a|b + a\&b = a \oplus b + 2(a\&b)$
6. $a - b = (a \oplus (a\&b)) - ((a|b) \oplus a) = ((a|b) \oplus b) - ((a|b) \oplus a)$
7. $a - b = (a \oplus (a\&b)) - (b \oplus (a\&b)) = ((a|b) \oplus b) - (b \oplus (a\&b))$

Si p, q son predicados, entonces:

1. $(p \vee q) \iff -(-p \wedge -q)$.
2. $(p \implies q) \iff (-p \vee q)$.
3. $(p \oplus q) \iff -(p \iff q)$.

7.2. Combinatoria

Inclusión-Exclusión. Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos, entonces

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\varnothing \neq J \subseteq [n]} (-1)^{|J|-1} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|$$

Cantidad de elementos en exactamente r conjuntos. Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos y $0 \leq r \leq n$, la cantidad de elementos en exactamente r conjuntos A_i es

$$\sum_{m=r}^{n} (-1)^{m-r} \binom{m}{r} \sum_{\substack{J \subseteq [n] \\ |J|=m}} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|$$

Teorema del binomio generalizado. Para $x \in \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{C}$ se cumple

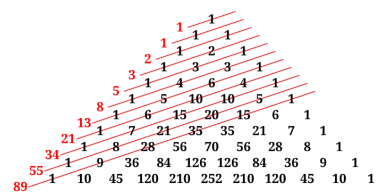
$$(a+b)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} a^x b^{x-k},$$

$$\binom{x}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (x-j) = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$

ES FIBONACCI *(En un icpc, el de la Cangurera lo usó)*. En el *Triángulo de Pascal*, los elementos en una "diagonal" satisfacen

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k},$$

donde F_{n+1} es el $(n+1)$-ésimo número de Fibonacci.



Palo de Hockey. Para n y r ($n \geq r$), se cumple

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Derangements. ¿Cuántos trastornos mentales distintos de tamaño n hay? (Según Google Translator). Considera los conjuntos $\{A_k\}_{k=1}^{k=n}$ donde A_k es la cantidad de permutaciones con el punto fijo $p_k = k$. La cantidad de permutaciones con al menos un punto fijo es

$$P := \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\varnothing \neq J \subseteq [n]} (-1)^{|J|-1} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|$$

$$= \sum_{\varnothing \neq J \subseteq [n]} (-1)^{|J|-1} (n-|J|)! = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} (n-i)!,$$

entonces la cantidad de desarreglos es $n! - P$. Si d_n es la cantidad de desarreglos de tamaño n se cumple $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$ con $d_1 = 0$ y $d_0 = d_2 = 1$. También se cumple $d_n = n! d_{n-1} + (-1)^n$. Sea $0 \leq k \leq n$ y $d_{n,k}$ la cantidad de desarreglos de tamaño n con exactamente k puntos fijos, entonces $d_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k}$.

7.3. Geometría

Teorema de los círculos de Descartes. Si cuatro círculos son mutuamente tangentes de curvatura $k_i = 1/r_i$ el teorema dice:

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2\left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2\right)$$

$$k_4 = k_1 + k_2 + k_3 \pm 2\sqrt{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1}$$

Formula de Heron. Dado un trinangulo de lados a, b, c, escribimos su semiperimetro $s = \frac{a+b+c}{2}$, inradio r, y cuirunradio R.

$$Area = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$2R = \frac{abc}{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Fórmula de Brahmagupta. Para el Area se vale algo similar en cuadrilateros ciclicos

$$Area = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Para no cíclicos, θ = promedio de dos ángulos opuestos, p y q diagonales

$$\begin{aligned} Area &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\theta} \\ &= \sqrt{K}, \end{aligned}$$

donde $K = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{4}(ac+bd+pq)(ac+bd-pq)$.
Multidimensional *(Como Chang)*. Para más dimensiones, si A es la matriz con filas estos vectores

$$Volumen_n = \frac{1}{n!}\sqrt{det\left(AA^T\right)}$$

8. Métodos numéricos

8.1. Inversa de Matriz con Gauus-Jordan

Complejidad: Tiempo $O\left(n^3\right)$ - Memoria $O\left(n^2\right)$

```
#define eps 0.0001
vector<vector<double>> gauss(vector<vector<double>>
↪  m){
    int tam = sz(m);
    vector<vector<double>> id(tam,
     ↪  vector<double>(tam));
    for(int i=0; i<tam; i++) id[i][i] = 1;
    for(int i=0; i<tam; i++){
        // buscar un no 0 para poner en (i,i)
        if(abs(m[i][i]) < eps){
            int j=i+1
            while(abs(m[j][i]) > eps && j<tam){
                swap(m[j], m[i]);
                swap(id[j], id[i]); j++;
            }
            if(j == tam){/*...*/}//no invertible
        }
        /// ponner un uno en (i,i) /// modificar la
         ↪  fila i
        double tmp = m[i][i];
        for(int k=0; k<tam; k++)
            id[i][k] /= tmp, m[i][k] /= tmp;
        /// poner columna i en todo 0, excepto casilla
         ↪  (i,i)
        for(int j=0; j<tam; j++){
            if(j==i) continue;
            //a la fila j le restamos la fila i
            tmp = m[j][i];
            for(int k=0; k<tam; k++){
                m[j][k] = m[j][k]-tmp*m[i][k];
                id[j][k] = id[j][k]-tmp*id[i][k];
            }
        }
    } return id;
}
vector<double> matporvec(vector<vector<double>> &m,
↪  vector<double> &b){
    vector<double> ans(sz(b));
    for(int i=0; i<sz(b); i++)
    for(int k=0; k<sz(b); k++)
        ans[i] += m[i][k]*b[k];
    return ans;
}
```

8.2. Sistemas de ecuaciones lineales

Dado un sistema de n ecuaciones con m incógnitas. Devuelve el numero de soluciones del sistema 0, 1 o ∞ y si existe al menos una solución la guarda en el vector `ans`. Complejidad: Tiempo $O((n+m)nm)$ - Memoria $O(nm)$.

```
const double EPS = 1e-9;
const int INF = 2; // it doesn't actually have to be
↪  infinity or a big number
int gauss(vector<vector<double>> a, vector<double>
↪  &ans){
    int n = (int) sz(a);
    int m = (int) sz(a[0]) - 1;
    vi where (m, -1);
    for(int col=0,row=0; col<m && row<n; ++col){
        int sel = row;
        for (int i=row; i<n; ++i)
        if(abs(a[i][col])>abs(a[sel][col]))sel=i;
        if(abs(a[sel][col]) < EPS) continue;
        for(int i=col; i<=m; ++i)
            swap(a[sel][i], a[row][i]);
        where[col] = row;
        for(int i=0; i<n; ++i)
        if(i != row){
            double c = a[i][col] / a[row][col];
            for(int j=col; j<=m; ++j)
                a[i][j] -= a[row][j] * c;
        } ++row;
    } ans.assign (m, 0);
    for(int i=0; i<m; ++i) if(where[i] != -1)
        ans[i] = a[where[i]][m] / a[where[i]][i];
    for(int i=0; i<n; ++i){
        double sum = 0;
        for(int j=0; j<m; ++j)
            sum += ans[j] * a[i][j];
        if(abs(sum - a[i][m]) > EPS) return 0;
    }
    for(int i=0; i<m; ++i) if(where[i] == -1)
        return INF;
    return 1;
}
```

8.3. Sistemas de ecuaciones modulo 2

Dado un sistema de n ecuaciones con m incógnitas modulo 2. Devuelve el numero de soluciones del sistema 0, 1 o ∞ y si existe al menos una solución la guarda en el vector `ans`. Complejidad: Tiempo $O((n+m)nm)$ Memoria $O(nm)$.

```
int gauss (vector<bitset<MAXN>> A, int n, int m, bitset<MAXN> &ans){
    // where[i] guarda el indice de la ecaucion donde se puede despejar variable i, -1 si es independiente
    vi where(m, -1);
    //  Matriz "diagonal"
    for(int col=0,row=0; col<m && row<n; ++col){
        // busca pivote
        for(int i = row; i<n; ++i) if(A[i][col]){
            swap (A[i], A[row]);
            break;
        } if(!A[row][col]) continue;
        where[col] = row;
        // poner 0 todos lados
        for(int i=0; i<n; ++i)
        if(i != row && A[i][col]) A[i] ^= A[row];
        ++row;
    }
    // sacar respuesta // variables independientes = 1, t
    for(int i = 0; i < m; ++i)
        ans[i] = where[i] == -1 ? 1 : ((A[where[i]].count() ^ 1) & 1);
    // si hay alguna variable libre
    for(int i = 0; i < m; ++i) if(where[i] == -1)
        return INF;
    return 1;
}
```

9. Sparse table

Complejidad: Tiempo de precalculo $O(n \log n)$ - Tiempo en responder $O(\log(r-l+1))$ - Tiempo en responder para operaciones idempotentes $O(1)$ - Memoria extra $O(n \log n)$. `LOGN` es $\lceil \log_2(MAXN) \rceil$. Indexado en 0.

```
struct sparse_table{
    int n, NEUTRO;
    vvi ST;
    vi lg2;
    int f(int a, int b){return a + b;}
    sparse_table(int _n, int data[]){
        n = _n;
        NEUTRO = 0;
        lg2.resize(n + 1);
        lg2[1] = 0;
        for(int i=2; i<=n; ++i)lg2[i]=lg2[i/2]+1;
        ST.resize(lg2[n] + 1, vi(n + 1, NEUTRO));
        for(int i=0; i<n; ++i)ST[0][i] = data[i];
        for(int k = 1; k <= lg2[n]; ++k){
            int fin = (1 << k) - 1;
            for(int i = 0; i + fin < n; ++i)
            ST[k][i]=f(ST[k-1][i],
                       ST[k-1][i+(1<<(k-1))]);
        }
    }
    int query(int l, int r){
        if(l > r) return NEUTRO;
        int ans = NEUTRO;
        for(int k = lg2[n]; 0 <= k; --k){
            if( r - l + 1 < (1 << k) ) continue;
            ans = f(ans, ST[k][l]);
            l += 1 << k;
        }
        return ans;
    }
    int queryIdem(int l, int r){
        if(l > r) return NEUTRO;
        int lg = lg2[r - l + 1];
        return f(ST[lg][l], ST[lg][r-(1<<lg)+1]);
    }
};
```

10. Fenwick Tree

Complejidad: Tiempo en responder $O(\log n)$ - Tiempo de actualización $O(\log n)$ - Memoria extra $O(n)$. Indexado en 1.

```
struct fenwick_tree{
    int n;
    vi BIT;
    fenwick_tree(int _n){
        n = _n;
        BIT.resize(n + 1);
    }
    void add(int pos, int x){
        while(pos <= n){
            BIT[pos] += x;
            pos += lsb(pos);
        }
    }
    int sum(int pos){
        int res = 0;
        while(pos){
            res += BIT[pos];
            pos -= lsb(pos);
        } return res;
    }
};
```

11. Segment Tree

```
struct node{
    int val, lazy;
    node():val(0), lazy(0){}
    node(int x, int lz = 0):val(x), lazy(lz){}
    const node operator+(const node &b)const{
        return node(val + b.val);
    }
}
```

11.1. Actualizaciones puntuales

Complejidad: Tiempo de precalculo $O(n)$ - Tiempo en responder $O(\log n)$ - Tiempo de actualización $O(\log n)$ - Memoria extra $O(n)$. Indexado en 1.

```
struct segment_tree{
    struct node{...};
    vector<node> nodes;
    segment_tree(int n, int data[]){
        nodes.resize(4 * n + 1);
        build(1, n, data);
    }
    void build(int left, int right, int data[], int pos = 1){
        if(left == right){
            nodes[pos] = node(data[left]);
```

```
            return;
        }
        int mid = (left + right) / 2;
        build(left, mid, data, pos * 2);
        build(mid + 1, right, data, pos * 2 + 1);
        nodes[pos] = nodes[pos*2]+nodes[pos*2+1];
    }
    void update(int x, int idx, int left, int right, int pos = 1){
        if(idx < left || right < idx) return;
        if(left == right){
            nodes[pos].val += x;
            return;
        }
        int mid = (left + right) / 2;
        update(x, idx, left, mid, pos * 2);
        update(x, idx, mid+1, right, pos*2+1);
        nodes[pos] = nodes[pos*2]+nodes[pos*2+1];
    }
    node query(int l, int r, int left, int right, int pos = 1){
        if(r < left || right < l) return node();
        if(l <= left && right <= r)
            return nodes[pos];
        int mid = (left + right) / 2;
        return query(l, r, left, mid, pos*2) + query(l, r, mid+1, right, pos*2+1);
    }
};
```

11.2. Actualizaciones sobre rangos

Complejidad: Tiempo de precalculo $O(n)$ - Tiempo en responder $O(\log n)$ - Tiempo de actualización $O(\log n)$ - Memoria extra $O(n)$.

```
struct segment_tree{
    struct node{...};
    vector<node> nodes;
    segment_tree(int n, int data[]){...}
    void build(...){...}
    void combine_lz(int lz, int pos){nodes[pos].lazy += lz;}
    void apply_lz(int pos, int tam){
        nodes[pos].val += nodes[pos].lazy * tam;
        nodes[pos].lazy = 0;
    }
    void push_lz(int pos, int left, int right){
        int len = abs(right - left + 1);
        if(1 < len){
            combine_lz(nodes[pos].lazy, pos*2);
            combine_lz(nodes[pos].lazy, pos*2+1);
        } apply_lz(pos, len);
    }
    void update(int x, int l, int r, int left, int right, int pos = 1){
        push_lz(pos, left, right);
        if(r < left || right < l) return;
        if(l <= left && right <= r){
            combine_lazy(x, pos);
            push_lazy(pos, left, right);
            return;
        }
        int mid = (left + right) / 2;
        update(x, l, r, left, mid, pos * 2);
        update(x, l, r, mid+1, right, pos*2+1);
        nodes[pos] = nodes[pos*2]+nodes[pos*2+1];
    }
    node query(int l, int r, int left, int right, int pos = 1){
        push_lz(pos, left, right);
        ...
    }
};
```

11.3. Sparse segment tree

```
struct node{
    ll lazy, maxi, sum;
    node *left = nullptr, *right = nullptr;
    node(): lazy(0), maxi(0), sum(0){}
    void extend(){
        if(left) return;
        left = new node;
        right = new node;
    }
    void combine_lz(ll lz){
        lazy += lz;
    }
    void apply_lz(ll len){
        sum += len * lazy; lazy = 0;}
    void push_lz(ll L, ll R){
        int len = R - L + 1;
        ll mid = L + (R - L) / 2;
        if(len){
            extend();
            left->combine_lz(lazy);
            right->combine_lz(lazy);
        }
        apply_lz(len);
    }
    void update(ll x, ll l, ll r, ll L, ll R){
        push_lz(L, R);
        if(r < L || R < l) return;
        if(l <= L && R <= r){
            combine_lz(x);
            push_lz(L, R);
            return;
        }
        ll mid = L + (R - L) / 2;
        extend();
        left->update(x, l, r, L, mid);
        right->update(x, l, r, mid + 1, R);
        sum = left->sum + right->sum;
    }
    ll query(ll l, ll r, ll L, ll R){
        push_lz(L, R);
        if(r < L || R < l) return 0;
        if(l <= L && R <= r) return sum;
        extend();
        ll mid = L + (R - L) / 2;
        return left->query(l, r, L, mid) + right->query(l, r, mid + 1, R);
    }
};
```

12. Sqrt decomposition

12.1. Algoritmo de MO

Complejidad: Tiempo en responder $O((n+q)\sqrt{n}F+q\log q)$, donde $O(F)$ es la complejidad de `add()` y `remove()`.

```
const int block_size = 300;
```

```cpp
struct query {
    int l, r;
    int block, i;
    bool operator<(const query &b) const {
        if(block == b.block) return r < b.r;
        return block < b.block;
    }
};
void add(int idx){/// TO-DO}
void remove(int idx){/// TO-DO}
int get_answer(){return 0; /// TO-DO}
vi solve(vector<query> &queries) {
    vi answers(sz(queries));
    sort(queries.begin(), queries.end());
    int cur_l = 0, cur_r = -1;
    for(query q : queries){
        while(cur_l > q.l) add(--cur_l);
        while(cur_r < q.r) add(++cur_r);
        while(cur_l < q.l) remove(cur_l++);
        while(cur_r > q.r) remove(cur_r--);
        answers[q.i] = get_answer();
    } return answers;
}
```

13. Grafos

```cpp
struct edge{
    int from, to;
    ll w;
    const bool operator<(const edge &b)const{
        return w > b.w;
    }
};
struct pos{
    int from;
    ll c;
    const bool operator<(const pos &b)const{
        return c > b.c;
    }
};
```

13.1. Caminos mínimos

Dijkstra. Complejidad: Tiempo $O(|E|\log|V|)$ - Memoria extra $O(|E|)$.

```cpp
ll dijkstra(int a, int b, vector<edge> graph[]){
    ll dist[MAXN];
    bool vis[MAXN] = {};
    fill(dist, dist + MAXN, LLONG_MAX);
    priority_queue<pos> q;
    q.push(pos{a, 0});
    dist[a] = 0;
    while(!q.empty()){
        pos act = q.top();
        q.pop();
        if(vis[act.from]) continue;
        vis[act.from] = true;
        for(edge &e : graph[act.from]){
            if(dist[e.to] <= dist[e.from] + e.w)
            ↪ continue;
            dist[e.to] = dist[e.from] + e.w;
            q.push(pos{e.to, dist[e.to]});
        }
    } return dist[b];
}
```

Bellman-Ford. Complejidad: $O(|V||E|)$.

```cpp
vi bellman_ford(int s, int n, vector<edge> &edges,
↪ bool cycles = false){
    vi d(n, (cycles ? 0 : INT_MAX));
    d[s] = 0;
    vi P(n, -1); /// Predecesor
    for(int i = 0; i < n - 1; ++i)
    for(edge &e : edges){
        if(d[e.from] == INT_MAX) continue;
        if(d[e.to] > d[e.from] + e.w){
            d[e.to] = d[e.from] + e.w;
            P[e.to] = e.from;
        }
    }
    int last_relax = -1;
    for(edge &e : edges){
        if(d[e.from] == INT_MAX) continue;
        if(d[e.to] > d[e.from] + e.w){
            d[e.to] = d[e.from] + e.w;
            P[e.to] = e.from;
            last_relax = e.to;
        }
    }
    if(last_relax == -1) return d;
    return {}; /// VACIO
}
```

Floyd-Warshall. Complejidad: $O\left(|V|^3\right)$.

```cpp
vvi floyd_warshall(int n){
    const int INF = INT_MAX; // para evitar overflow
    ↪ después
    vvi d(n, vi(n, INF));
    /// aqui inicializa con la lista/matriz de
    ↪ adyacencia
    /// luego calcula la dp
    for(int k = 0; k < n; ++k){
        for(int i = 0; i < n; ++i){
            for(int j = 0; j < n; ++j){
                if(d[i][k]==INF || d[k][j]==INF)
                    continue;
                if(d[i][j] > d[i][k] + d[k][j])
                ↪ d[i][j] = d[i][k] + d[k][j];
            }
        }
    } return d;
}
```

Johnson's algorithm. Complejidad: $O(|V||E|\log|V|)$. Sea $p : V \to \mathbb{R}$ una función potencial del grafo. El algoritmo es como sigue:

1. Hacemos una transformación en el grafo cambiando los pesos w a $w'(u,v) = w(u,v) + p(u) - p(v)$.
2. Calculamos la distancia mínima $d' : V \times V \to \mathbb{R}$ desde cada nodo a todos los demás con Dijkstra.
3. Finalmente, la distancia mínima de u a v en el grafo original es $d(u,v) = d'(u,v) - p(u) + p(v)$.

La función potencial p puede ser cualquiera. Usando Bellman-Ford se puede calcular el potencial $p(u)$ como el camino más corto que termina (o empieza) en u.

13.2. Árboles

Prim. Complejidad: Tiempo $O(|E|\log|V|)$. `eCost[MAXN]` es el arreglo de costos mínimos de cada nodo para incluirlo en el MST.

```
ll prim(vector<edge> graph[]){
    ll e_cost[MAXN], ans = 0;
    bool vis[MAXN] = {};
    fill(e_cost, e_cost + MAXN, LLONG_MAX);
    priority_queue<edge> q;
    q.push(edge{1, 1, 0});
    while(sz(q)){
        int node = q.top().to;
        ll w = q.top().w; q.pop();
        if(vis[node]) continue; vis[node] = true;
        for(edge &e : graph[node]){
            if(vis[e.to] || e_cost[e.to] <= e.w)
            ↪  continue;
            e_cost[e.to] = e.w;
            q.push(e);
        } ans += w;
    } return ans;
}
```

Kruskal. Complejidad: Tiempo $O(|E|\log|E|)$.

```
ll kruskal(vector<edge> &edges, int n){
    sort(all(edges));
    dsu mset(n);
    ll res = 0;
    for(edge &e : edges){
        if(mset.root(e.from) == mset.root(e.to))
        ↪  continue;
        mset.join(e.from, e.to);
        res += e.w;
    }
    return res;
}
```

Boruvka. Complejidad: Tiempo $O(|E|\log|V|)$. $|V| = n$. `dsu.join()` devuelve `true` si la unión se llevó a cabo o `false` en otro caso.

```
ll boruvka(vector<edge> &edges, int n){
    dsu mset(n);
    int min_edge[n];
    ll res = 0;
    while(mset.cnt_comp > 1){
        fill(min_edge, min_edge + n, -1);
        for(int i = 0; i < sz(edges); ++i){
            int u = mset.root(edges[i].from);
            int v = mset.root(edges[i].to);
            if(u == v) continue;
            if(min_edge[u] == -1 || edges[i].w <
            ↪  edges[min_edge[u]].w) min_edge[u] = i;
            if(min_edge[v] == -1 || edges[i].w <
            ↪  edges[min_edge[v]].w) min_edge[v] = i;
        }
        for(int i = 0; i < n; ++i){
            int idx_e = min_edge[i];
            if(idx_e == -1) continue;
            res += mset.join(edges[idx_e].from,
            ↪  edges[idx_e].to) * edges[idx_e].w;
        }
    } return res;
}
```

MST dirigido. Complejidad: $O(|E|\log|V|)$. AGREGAR PEQUEÑA DESCRIPCIÓN.

```
/// MEJORAR ESTA COSA, SOLO LO COPIE Y
↪  PEGUÉ porcuestionesdetiempo
const int N = 3e5 + 9;
const ll inf = 1e18;
template<typename T> struct PQ {
    ll sum = 0;
    priority_queue<T, vector<T>, greater<T>> Q;
    void push(T x) { x.w -= sum; Q.push(x); }
    T pop() { auto ans = Q.top(); Q.pop(); ans.w +=
    ↪  sum; return ans; }
    int size() { return sz(Q); }
    void add(ll x) { sum += x; }
    void merge(PQ &x){
        if (size() < sz(x)){
            swap(sum, x.sum);
            Q.swap(x.Q);
        }
        while(sz(x)){
            auto tmp = x.pop();
            tmp.w -= sum;
            Q.push(tmp);
        }
    }
};
struct edge {
    int u, v; ll w;
    bool operator > (const edge &rhs) const { return w
    ↪  > rhs.w; }
};
struct DSU {
    vi par;
    DSU (int n) : par(n, -1) {}
    int root(int i) { return par[i] < 0 ? i : par[i] =
    ↪  root(par[i]); }
    void set_par(int c, int p) { par[c] = p; }
};
// returns parents of each vertex
// each edge should be distinct
// it assumes that a solution exists (all vertices are
↪  reachable from root)
// 0 indexed
// Takes ~300ms for n = 2e5
vi DMST(int n, int root, const vector<edge> &edges) {
    vi u(2 * n - 1, -1), par(2 * n - 1, -1);
    edge par_edge[2 * n - 1];
    vi child[2 * n - 1];
    PQ<edge> Q[2 * n - 1];
    for(auto e : edges) Q[e.v].push(e);
    for(int i = 0; i < n; i++)
        Q[(i+1) % n].push({i, (i+1) % n, inf});
    int super = n;
    DSU dsu(2 * n - 1);
    int head = 0;
    while(sz(Q[head])) {
        auto x = Q[head].pop();
        int nxt_root = dsu.root(x.u);
        if (nxt_root == head) continue;
        u[head] = nxt_root;
        par_edge[head] = x;
        if (u[nxt_root] == -1) head = nxt_root;
        else {
            int j = nxt_root;
            do {
                Q[j].add(-par_edge[j].w);
```

```
                //Q[super].merge(move(Q[j]));
                Q[super].merge(Q[j]);
                assert(u[j] != -1);
                child[super].pb(j);
                j = dsu.root(u[j]);
            } while (j != nxt_root);
            for(auto u : child[super]) par[u] = super,
             ↪  dsu.set_par(u, super);
            head = super++;
        }
    }
    vi res(2 * n - 1, -1);
    queue<int> q; q.push(root);
    while (sz(q)) {
        int u = q.front();
        q.pop();
        while (par[u] != -1) {
            for (auto v : child[par[u]]) {
                if (v != u) {
                    res[par_edge[v].v] =
                     ↪  par_edge[v].u;
                    q.push(par_edge[v].v);
                    par[v] = -1;
                }
            }
            u = par[u];
        }
    }
    res[root] = root; res.resize(n);
    return res;
}
int main() {
    ios_base::sync_with_stdio(0); cin.tie(0);
    int n, m, root; cin >> n >> m >> root;
    vector<edge> edges(m);
    for(auto &e : edges) cin >> e.u >> e.v >> e.w;
    auto res = DMST(n, root, edges);
    unordered_map<int, int> W[n];
    for (auto u : edges) W[u.v][u.u] = u.w;
    ll ans = 0;
    for(int i = 0; i < n; i++) if(i != root)
        ans += W[i][res[i]];
    cout << ans << '\n';
    for(auto x : res) cout << x << ' ';
    cout << '\n';
}
```

Block-Cut Tree Complejidad: $O(n)$?

```
/// MEJORAR ESTA COSA, SOLO LO COPIE Y
 ↪  PEGUÉ porcuestionesdetiempo
vvi comps;//nodes in each component
vvi bcc;//nodes to components that it belong
vi st;//internal stack
vi low, num;
int id;
int sz;
void dfs_biconnected(vvi &g, int u, int pre){
  low[u] = num[u] = ++id;
  st.pb(u);
  for(auto v: g[u]) {
    if(!num[v]) {
      dfs_biconnected(g, v, u);
      low[u] = min(low[u], low[v]);
      if(low[v] >= num[u]) {
        int x;
        comps.pb(vi());
        do {
          x = st.back();
          st.pop_back();
          bcc[x].pb(sz);
          comps.back().pb(x);
        } while(x ^ v);
        bcc[u].pb(sz);
        comps.back().pb(u);
        sz++;
      }
    } else if(v != pre) low[u] = min(low[u], num[v]);
  }
}
vi utoubt;//its component or its AP index
vb uisart;//u is AP?
vvi bt;//block cut tree
void generateBlockCutTree(vvi &g){
    int n = sz(g);
    sz = id = 0;
    bcc.resize(0); low.resize(0); num.resize(0);
    bcc.resize(n); low.resize(n); num.resize(n);
    dfs_biconnected(g, 0, 0);
    bt.resize(sz);
    utoubt.resize(0); utoubt.resize(n);
    uisart.resize(0); uisart.resize(n);
    for(int u = 0; u < n; u++){
        if(sz(bcc[u]) > 1) { //Articulation
            utoubt[u] = sz++;
            uisart[u] = true;
            bt.pb(vi());
            for(auto v: bcc[u]){
                bt[utoubt[u]].pb(v);
                bt[v].pb(utoubt[u]);
            }
        } else //Not articulation point
            utoubt[u] = bcc[u][0];
    }
}
```

LCA. Complejidad: Tiempo de preproceso $O(|V|\log|V|)$. Tiempo de LCA y n-ésimo ancestro $O(\log|V|)$. 1-index.

```
void precalc(int node, int p = 0, int d = 1){
    depth[node] = d;
    P[0][node] = p;
    for(int k = 1; k <= LOGN; ++k)
        P[k][node] = P[k - 1][P[k - 1][node]];
    for(int child : tree[node]) if(p != child)
        precalc(child, node, d + 1);
}
int LCA(int a, int b){
    if(depth[b] < depth[a]) swap(a, b);
    int dif = depth[b] - depth[a];
    for(int k = LOGN; 0 <= k; --k)
        if(is_on(dif, k)) b = P[k][b];
    if(a == b) return a;
    for(int k = LOGN; 0 <= k; --k){
        if(P[k][a] != P[k][b]){
            a = P[k][a];
            b = P[k][b];
        }
    }
```

```
    return P[0][a];
}
int nth_ancestor(int u, int n){
    for(int k = LOGN; 0 <= k; --k)
        if(is_on(n, k)) u = P[k][u];
    return u;
}
```

Sack. Complejidad: Tiempo $O(|V|\log|V|)$. 1-index.

```
void precalc(int node, int p = 0){
    subtree_size[node] = 1;
    depth[node] = depth[p] + 1;
    for(int v : tree[node]){
        if(v == p) continue;
        precalc(v, node);
        subtree_size[node] += subtree_size[v];
    }
}
void add(int node, int x, int p = 0){
    /// add node here
    /// add subtree
    for(int v: tree[node])
        if(v != p && !big[v])
            add(v, x, node);
}
void dfs(int node, bool keep, int p = 0){
    int maxi = -1, big_child = -1;
    for(int v : tree[node])///Searchfor big_child
       if(v != p && subtree_size[v] > maxi)
          maxi = subtree_size[v], big_child = v;
    for(int v : tree[node])
        if(v != p && v != big_child)
            dfs(v, false, node);  /// run a dfs on
            ↪  small childs and clear them
    if(big_child != -1)
        dfs(big_child, true, node), big[big_child] =
        ↪  1;  /// big_child marked as big and not
        ↪  cleared
    add(node, 1, p);
    /// answer queries here
    if(big_child != -1) big[big_child] = 0;
    if(!keep) add(node, -1, p);
}
```

13.3. Máximo flujo

Algunos problemas de flujos

- *Maximum Weight Closure.* Sea N_1 una clausura de G y $N_2 = V \setminus N_1$, tenemos que $w(N_1) = \sum_{i\in N_1^+} w_i - \sum_{i\in N_1^-} |w_i|$ y $Cap.Corte = \sum_{i\in N_2^+} w_i + \sum_{i\in N_1^-} |w_i|$. Entonces

$$Cap.Corte + w(N_1) = \sum_{i\in N_1^+} w_i + \sum_{i\in N_2^+} w_i.$$

- *Mínima cobertura de vértices.* En grafos generales es NP-Completo. En grafos bipartitos el máximo emparejamiento es igual al numero de vertices en la mínima cobertura. Para el problema con pesos en los nodos, unimos s a todos los nodos en L con capacidad igual al peso de cada nodo, unimos los nodos de R a t de la misma manera y unimos los nodos de L a R con capacidad infinita. El máximo flujo es el peso mínimo de la mínima cobertura.

- *Máximo conjunto independiente.* Cualquier conjunto independiente es el complemento de alguna cobertura de vértices.

- *Mínimo cubrimiento de caminos independientes.* En grafos generales es NP-hard. En DAG's duplicamos los nodos en un lado IN y un lado OUT. Conectamos s al lado OUT y el lado IN a t. Las aristas del DAG las agregamos del lado OUT al lado IN. Sea M el máximo emparejamiento de la red anterior, entonces el mínimo cubrimiento es $|V| - M$.

- *Mínimo cubrimiento de caminos NO necesariamente independientes.* En grafos generales es NP-hard. En DAG's transformamos el DAG a su clausura transitiva y aplicamos el problema anterior.

- *Teorema de Mirsky.* En todo POSET, el tamaño de la cadena de mayor tamaño es igual al número de anticadenas necesarias para cubrir todos los elementos del conjunto.

- *Teorema de Dilworth.* En todo POSET, el tamaño de la anticadena de mayor tamaño es igual al número de cadenas necesarias para cubrir todos los elementos del conjunto.

- *Teorema de Hall.* Un grafo bipartito con subconjuntos L y R tiene un emparejamiento de tamaño $|L|$ si y sólo si para todo subconjunto W de L, se cumple que $|W| \le |N_G(W)|$, donde $N_G(W)$ es el conjunto de vértices vecinos de alguno de los vértices en W.

Edmonds-Karp Complejidad: Ford-Fulkerson $O(|E| \cdot F)$, Edmonds-Karp $O(|V||E|^2)$.

```
struct edge {
    int from, to;
    ll w, c, f;
    // weight, capacity, flow
};
class ford_fulkerson {
public:
    ford_fulkerson (vector<vector<edge>> &graph) :
    ↪  graph(graph){}
    ll get_max_flow(int s, int t){
        init();
        ll f = 0;
        while(find_and_update(s, t, f)){}
        return f;
    }
    vi get_st_cut(const int &s){
        bool vis[sz(graph)] = {};
        vi S;
        queue<int> q;
        q.push(s);
        S.pb(s);
        vis[s] = true;
        while(sz(q)){
            int u = q.front(); q.pop();
            for(int eI : edge_indexes[u]){
                if(edges[eI].c > edges[eI].f &&
                ↪  !vis[edges[eI].to]){
                    q.push(edges[eI].to);
                    vis[edges[eI].to] = true;
                    S.pb(edges[eI].to);
                }
            }
        }
```

```cpp
        return S;
    }
    vector<vector<edge>> get_residual_graph(){
        vector<vector<edge>> residual(sz(graph));
        for(int i=0; i<sz(edges); i+=2){
            const edge& e = edges[i];
            if(e.c > 0){
                residual[e.from].pb({e.from, e.to, e.w, e.c - e.f, e.f});
                residual[e.to].pb({e.to, e.from, -e.w, e.f, -e.f});
            }
        } return residual;
    }
private:
    vector<vector<edge>> graph;
    vector<edge> edges;
    vvi edge_indexes;
    void init(){
      edges.clear();
      edge_indexes.clear();
      edge_indexes.resize(sz(graph));
      for(int u = 0; u < sz(graph); u++){
         for(edge &e : graph[u]){
           edges.pb({u, e.to, e.w, e.c, 0});
           edges.pb({e.to, u, -e.w, 0, 0});
           edge_indexes[u].pb(sz(edges)-2);
           edge_indexes[e.to].pb(sz(edges)-1);
         }
      }
    }
    bool find_and_update(int s, int t, ll &flow){
        queue<int> q;
        // Desde donde llego y con que arista
        vpii from(sz(graph), {-1, -1});
        q.push(s);
        from[s] = {s, -1};
        bool found = 0;
        while(sz(q) && !found){
            int u = q.front(); q.pop();
            for(int eI : edge_indexes[u]){
                if(edges[eI].c > edges[eI].f &&
                  from[edges[eI].to].fi== -1){
                    from[edges[eI].to] = {u, eI};
                    q.push(edges[eI].to);
                    if(edges[eI].to == t)found=1;
                }
            }
        }
        if(!found) return false;
        ll u_flow = LLONG_MAX;
        int cur = t;
        while(cur != s) {
            u_flow = min(u_flow, edges[from[cur].se].c - edges[from[cur].se].f);
            cur = from[cur].fi;
        }
        cur = t;
        while(cur != s){
            edges[from[cur].se].f += u_flow;
            edges[from[cur].se^1].f -= u_flow;
            cur = from[cur].fi;
        }
        flow += u_flow;
```

```cpp
        return 1;
    }
};
```

Dinic. Complejidad: $O(|V|^2|E|)$.

```cpp
const int MAXV = 32767; /// 2^15 - 1
template<class T = ll> struct dinic{
    dinic(short V){this->V = V;}
    const static bool SCALING = 1;
    bool sorted = 0;
    short s, t, V;
    int lim = 1; /// Para escalado
    const T INF = numeric_limits<T>::max();
    short level[MAXV]; /// distancia desde s
    short ptr[MAXV]; /// arista que va explorando
    struct edge{
        short to, rev;
        T cap, flow, mcap;
        bool operator<(const edge &b)const{return mcap > b.mcap;}
    };
    vector<edge> adj[MAXV];
    vi adj_cur[MAXV]; /// aristas del grafo de nivel
    void add_edge(short u, short v, T cap, bool is_directed = 1){
        if(u == v) return;
        T add = (is_directed ? 0 : cap);
        adj[u].pb({v, sz(adj[v]), cap, 0 ,cap+add});
        adj[v].pb({u, sz(adj[u])-1, add, 0, cap+add});
    }
    void mysort(){
        if(sorted) return;
        sorted = 1;
        for(int i = 0; i < V; ++i){
            sort(all(adj[i]));
            for(int j=0; j<sz(adj[i]); ++j)
            adj[adj[i][j].to][adj[i][j].rev].rev = j;
        }
    }
    bool bfs(){
        for(int i = 0; i < V; ++i){
            adj_cur[i].clear();
            adj_cur[i].reserve(sz(adj[i]));
        }
        queue<short> q;
        q.push(s);
        fill(level, level + V, -1);
        level[s] = 0;
        while(sz(q)){
            short u = q.front(); q.pop();
            if(u == t) return 1;
            for(int i=0; i < sz(adj[u]); ++i){
                edge &e = adj[u][i];
                if(e.mcap < lim) break;
                if(level[e.to] == -1 && e.cap - e.flow >= lim){
                    level[e.to] = level[u] + 1;
                    adj_cur[u].pb(i);
                    q.push(e.to);
                } else if(level[e.to]==level[u]+1 && e.cap - e.flow >= lim){
                    adj_cur[u].pb(i);
                }
```

```cpp
        }
    } return 0;
}
T dfs(short u, T flow, vector<short> &S, bool save = 0){
    if(save) S.pb(u);
    if(u == t) return flow;
    for(; ptr[u] < sz(adj_cur[u]); ++ptr[u]){
        edge &e = adj[u][adj_cur[u][ptr[u]]];
        if(T pushed = dfs(e.to, min(flow, e.cap - e.flow), S, save)){
            e.flow += pushed;
            adj[e.to][e.rev].flow -= pushed;
            if(e.cap-e.flow < lim) ptr[u]++;
            return pushed;
        }
    } return 0;
}
ll get_max_flow(short source, short sink){
    s = source; t = sink;
    mysort();
    vector<short> S;
    ll flow = 0;
    lim = SCALING ? (1<<30) : 1;
    for(; 0 < lim; lim >>= 1){
        while(bfs()){
            memset(ptr, 0, sizeof(ptr));
            while(T pushed = dfs(s, INF, S))
                flow += pushed;
        }
    } return flow;
}
vector<short> get_st_cut(){
    vector<short> S;
    memset(ptr, 0, sizeof(ptr));
    dfs(s, INF, S, true);
    return S;
}
};
```

MCMF. Complejidad: $O(\min\{|E|^2|V|\log|V|,\ F|E|\log|V|\})$.

```cpp
const int MAXV = (1 << 15) - 1;
template<class T = ll> struct mcmf{
    mcmf(short V){this->V = V;}
    short s, t, V;
    const T INF = numeric_limits<T>::max();
    vector<T> p;
    struct edge{
        short to, rev;
        T cap, flow, mcap, w;
        bool operator<(const edge &b)const{return mcap > b.mcap;}
    };
    vector<edge> adj[MAXV];
    void add_edge(short u, short v, T cap, T w, bool is_directed = 1){
        if(u == v) return;
        T add = (is_directed ? 0 : cap);
        adj[u].pb({v, sz(adj[v]), cap, 0, cap + add, w});
        adj[v].pb({u, sz(adj[u]) - 1, add, 0, cap + add, -w});
    }
    struct pos{
        short from;
        T c;
        const bool operator<(const pos &b)const{return c > b.c;}
    };
    vector<T> bellman_ford(){
        vector<T> d(V);
        for(int i = 0; i < V - 1; ++i){
            for(int u = 0; u < V; ++u){
                for(edge &e : adj[u]){
                    if(d[e.to] > d[u] + e.w && e.cap > 0){
                        d[e.to] = d[u] + e.w;
                    }
                }
            }
        } return d;
    }
    pair<T, T> dijkstra(const T MAX_FLOW){
        vector<T> d(V, INF);
        vi P(V, -1), P_e(V, -1);
        priority_queue<pos> q;
        q.push({s, 0});
        d[s] = 0;
        while(sz(q)){
            pos act = q.top(); q.pop();
            if(act.c != d[act.from]) continue;
            for(int j=0; j<sz(adj[act.from]); ++j){
                edge &e = adj[act.from][j];
                if(e.cap - e.flow <= 0) continue;
                T _w = e.w+p[act.from] - p[e.to];
                if(d[e.to] <= d[act.from] + _w)
                    continue;
                d[e.to] = d[act.from] + _w;
                q.push(pos{e.to, d[e.to]});
                P[e.to] = act.from;
                P_e[e.to] = j;
            }
        }
        for(int i = 0; i < V; ++i) if(d[i] < INF)
            d[i] += -p[s] + p[i];
        for(int i = 0; i < V; ++i) if(d[i] < INF)
            p[i] = d[i];
        if(P[t] == -1) return {0, 0};
        T flow = MAX_FLOW;
        int cur_node = t;
        while(cur_node != s){
            flow = min(flow, adj[ P[cur_node] ][ P_e[cur_node] ].cap - adj[ P[cur_node] ][ P_e[cur_node] ].flow);
            cur_node = P[cur_node];
        }
        T new_cost = 0;
        cur_node = t;
        while(cur_node != s){
            adj[ P[cur_node] ][ P_e[cur_node] ].flow += flow;
            new_cost += adj[ P[cur_node] ][ P_e[cur_node] ].w * flow;
            adj[cur_node][adj[ P[cur_node] ][ P_e[cur_node] ].rev ].flow -= flow;
            cur_node = P[cur_node];
        }
```

```
        return {flow, new_cost};
    }
    pair<T, T> get_max_flow(short source, short sink, const T MAX_FLOW = 1e8){
        s = source;
        t = sink;
        p = bellman_ford();
        T flow = 0, cost = 0;
        while(flow < MAX_FLOW){
            pair<T, T> pushed = dijkstra(MAX_FLOW - flow);
            if(!pushed.fi) break;
            flow += pushed.fi;
            cost += pushed.se;
        }
        return {flow, cost};
    }
};
```

13.4. SCC

Kosajaru Complejidad: Tiempo $O(n)$.

```
void dfs(int node, vi graph[], bool vis[], vi &topo_ord){
    if(vis[node]) return;
    vis[node] = true;
    for(int v : graph[node])
        dfs(v, graph, vis, topo_ord);
    topo_ord.pb(node);
}
void assign_scc(int node, vi inv_graph[], bool vis[], vi &scc, const int id){
    if(vis[node]) return;
    vis[node] = true;
    scc[node] = id;
    for(int v : inv_graph[node])
        assign_scc(v, inv_graph, vis, scc, id);
}
pair<int, vi> kosajaru(int n, vi graph[], vi inv_graph[]){
    bool vis[n] = {};
    vi topo_ord;
    for(int i = 0; i < n; ++i)
        dfs(i, graph, vis, topo_ord);
    reverse(all(topo_ord));
    memset(vis, 0, sizeof(vis));
    vi scc(n);
    int id = 0;
    for(int u : topo_ord) if(!vis[u])
        assign_scc(u, inv_graph, vis, scc, id++);
    return {id, scc};
}
pair<vvi, vvi> build_scc_graph(int n, vi graph[], int n_scc, const vi &scc){
    vvi scc_graph, inv_scc_graph;
    for(int u = 0; u < n; ++u)
    for(int v : graph[u])
    if(scc[u] != scc[v])
        scc_graph[scc[u]].pb(scc[v]);
    for(int u = 0; u < n_scc; ++u){
        sort(all(scc_graph[u]));
        auto it = unique(all(scc_graph[u]));
        scc_graph[u].resize(it - scc_graph[u].begin());
        for(int v : scc_graph[u])
            inv_scc_graph[v].pb(u);
    } return {scc_graph, inv_scc_graph};
}
```

13.5. 2-Sat

Complejidad: Tiempo en responder $O(n)$.

```
struct two_sat{
    int n;
    vvi graph, inv_graph;
    vi scc, ans;
    vector<bool> vis;
    two_sat(){}
    two_sat(int _n){
        n = _n;
        graph.resize(2 * n);
        inv_graph.resize(2 * n);
        scc.resize(2 * n);
        vis.resize(2 * n);
        ans.resize(n);
    }
    void add_edge(int u, int v){
        graph[u].pb(v);
        inv_graph[v].pb(u);
    }
    /// al menos una es verdadera
    void add_or(int p, bool val_p, int q, bool val_q){
        add_edge(p+(val_p? n:0), q+(val_q? 0:n));
        add_edge(q+(val_q? n:0), p+(val_p? 0:n));
    }
    /// exactamente una es verdadera
    void add_xor(int p, bool val_p, int q, bool val_q){
        add_or(p, val_p, q, val_q);
        add_or(p, !val_p, q, !val_q);
    }
    /// p y q tienen el mismo valor
    void add_and(int p, bool val_p, int q, bool val_q){
        add_xor(p, !val_p, q, val_q);
    }
    /// Kosajaru
    void dfs(int node, vi &topo_ord){...}
    void assign_scc(int node, const int id){...}
    /// construye respuesta
    bool build_ans(){
        fill(all(vis), false);
        vi topo_ord;
        for(int i=0; i<2*n; ++i)dfs(i, topo_ord);
        fill(all(vis), false);
        reverse(all(topo_ord));
        int id = 0;
        for(int u : topo_ord) if(!vis[u])
            assign_scc(u, id++);
        for(int i = 0; i < n; ++i){
            if(scc[i] == scc[i + n]) return 0;
            ans[i] = (scc[i]<scc[i + n] ? 0:1);
        } return 1;
    }
};
```

14. Treap

Complejidad: Tiempo $O(log(n))$ - Memoria $O(n)$. Para treap implicito (arreglo dinamico) cambiar en insert/erase a `split_by_pos()`.

```
struct treap{
    typedef struct _node{
        ll x;
        int freq, cnt;
        ll p;
        _node *l, *r;
        _node(ll _x): x(_x), p(((ll)(rand()) << 32
        ↪  )^rand()),
        cnt(1), freq(1), l(nullptr), r(nullptr){}
        ~_node(){delete l; delete r;}
        void recalc(){
            cnt = freq;
            cnt += ((l) ? (l->cnt) : 0);
            cnt += ((r) ? (r->cnt) : 0);
        }
    }* node;
    node root;
    node merge(node l, node r){
        if(!l || !r) return l ? l : r;
        if(l->p < r->p){
            r->l = merge(l, r->l);
            r->recalc();
            return r;
        } else {
            l->r = merge(l->r, r);
            l->recalc();
            return l;
        }
    }
    void split_by_value(node n, ll d, node &l, node
    ↪  &r){
        l = r = nullptr;
        if(!n) return;
        if(n->x < d){
            split_by_value(n->r, d, n->r, r);
            l = n;
        } else {
            split_by_value(n->l, d, l, n->l);
            r = n;
        }
        n->recalc();
    }
    void split_by_pos(node n, int pos, node &l, Node
    ↪  &r, int l_nodes = 0){
        l = r = NULL;
        if(!n) return;
        int cur_pos = (n->l) ? (l_nodes + n->l->cnt) :
        ↪  l_nodes;
        if(cur_pos < pos){
            splitfiNodes(n->r, pos, n->r, r, cur_pos +
            ↪  1);
            l = n;
        } else {
            splitfiNodes(n->l, pos, l, n->l, l_nodes);
            r = n;
        }
        n->recalc();
    }
    treap(): root(NULL){}
    void insert_value(ll x){
        node l, m, r;
        split_by_value(root, x, l, m);
        split_by_value(m, x + 1, m, r);
        if(m){
            m->freq++;
            m->cnt++;
        } else m = new _node(x);
        root = merge(merge(l, m), r);
    }
    void erase_value(ll x){
        node l, m, r;
        split_by_value(root, x, l, m);
        split_by_value(m, x + 1, m, r);
        if(!m || m->freq == 1){
            delete m;
            m = nullptr;
        } else {
            m->freq--;
            m->cnt--;
        }
        root = merge(merge(l, m), r);
    }
};
```

15. Strings

15.1. KMP

Complejidad: Tiempo $O(|s|)$ - Memoria extra $O(|s|)$.

```
vi prefix_function(const string &s){
    int n = sz(s);
    vi pi(n);
    for(int i = 1; i < n; ++i){
        int j = pi[i - 1];
        while(j && s[i] != s[j]) j = pi[j - 1];
        pi[i] = j + (s[i] == s[j]);
    } return pi;
}
```

Autómata de KMP. Complejidad: Tiempo $O(|s|k)$ - Memoria extra $O(|s|k)$, donde k es el tamaño del alfabeto.

```
void compute_automaton(const string &s, vvi& aut){
    s += '#';
    int n = sz(s);
    vi pi = prefix_function(s);
    aut.assign(n, vi(26));
    for(int i = 0; i < n; ++i){
        for(int c = 0; c < 26; ++c){
            if(i && 'a' + c != s[i])
                aut[i][c] = aut[pi[i - 1]][c];
            else aut[i][c] = i + ('a'+c == s[i]);
        }
    }
}
```

15.2. Suffix Automata

Complejidad: Tiempo $O(|s|)$, memoria $O(|S|)$. Construye un autómata sobre los sufijos de s, donde cada nodo terminal es un sufijo de s. Esta construcción se hace online. Donde $alpha$ es el tamaño del alfabeto y $offset$ el primer caracter. Si se hace uso de los nodos terminales llamar a markTerminalNodes() primero (este método no es online).

```
constexpr short alpha = 26;
constexpr char offset = 'a';
struct state{
    //max(state) = len, min(state) = sa[link].len
    int len, link;
    bool is_terminal;
```

```
    array<int,alpha> next;
    state(){
        len = 0; link = -1; is_terminal = false;
        next.fill(0);
    }
};
struct SuffixAutomaton{
    int n;
    vector<state> sa;
    int sz = 1, last = 0;
    SuffixAutomaton(int n) : n(n), sa(2*n + 1){}
    void add(char ch_){
        short ch = ch_-offset;
        int curr = sz++;
        sa[curr].len = sa[last].len + 1;
        int p = last;
        while(p!=-1 && !sa[p].next[ch]){
            sa[p].next[ch] = curr;
            p = sa[p].link;
        }
        if(p == -1){
            sa[curr].link = 0;
        }else{
            int q = sa[p].next[ch];
            if(sa[p].len+1 == sa[q].len){
                sa[curr].link = q;
            }else{
                int clone = sz++;
                sa[clone].len = sa[p].len + 1;
                sa[clone].next = sa[q].next;
                sa[clone].link = sa[q].link;
                while(p!=-1 && sa[p].next[ch] == q){
                    sa[p].next[ch] = clone;
                    p = sa[p].link;
                }
                sa[q].link = sa[curr].link = clone;
            }
        }
        last = curr;
        return;
    }
    void markTerminalNodes(){
        int curr = last;
        while(curr){
            sa[curr].is_terminal = true;
            curr = sa[curr].link;
        }
        return;
    }
};
```

15.3. Suffix array

Construcción. Complejidad: Tiempo $O(|s|\log(|s|))$ - Memoria $O(|s|)$. Calcula la permutación que corresponde a los sufijos ordenados lexicográficamente. `SA[i]` es el índice en el cual empieza el i-ésimo sufijo ordenado.

```
int SA[MAXN], mrank[MAXN];
int tmpSA[MAXN], tmp_mrank[MAXN];
void counting_sort(int k, int n){
    int freqs[MAXN] = {};
    for(int i = 0; i < n; ++i){
        if(i + k < n) freqs[ mrank[i + k] ]++;
        else freqs[0]++;
    }
    int m = max(100, n);
    for(int i = 0, sfs = 0; i < m; ++i){
        int f = freqs[i];
        freqs[i] = sfs;
        sfs += f;
    }
    for(int i = 0; i < n; ++i){
        if(SA[i] + k < n) tmpSA[ freqs[mrank[ SA[i] +
        ↪ k ]]++ ] = SA[i];
        else tmpSA[ freqs[0]++ ] = SA[i];
    }
    for(int i = 0; i < n; ++i) SA[i] = tmpSA[i];
}
void buildSA(string &str){
    int n = sz(str);
    for(int i = 0; i < n; ++i){
        mrank[i] = str[i] - '#';
        SA[i] = i;
    }
    for(int k = 1; k < n; k <<= 1){
        counting_sort(k, n);
        counting_sort(0, n);
        int r = 0;
        tmp_mrank[ SA[0] ] = 0;
        for(int i = 1; i < n; ++i){
            if(mrank[ SA[i] ] != mrank[ SA[i - 1] ] ||
            ↪ mrank[ SA[i] + k ] != mrank[ SA[i - 1]
            ↪ + k ])
                tmp_mrank[ SA[i] ] = ++r;
            else tmp_mrank[ SA[i] ] = r;
        }
        for(int i = 0; i < n; ++i) mrank[i] =
        ↪ tmp_mrank[i];
    }
}
inline bool suff_compare1(int idx,const string
↪ &pattern) {
    return (s.substr(idx).compare(0, sz(pattern),
    ↪ pattern) < 0);
}
inline bool suff_compare2(const string &pattern,int
↪ idx) {
    return (s.substr(idx).compare(0, sz(pattern),
    ↪ pattern) > 0);
}
pair<int,int> match(const string &pattern) {
    int *low = lower_bound (SA, SA + sz(s), pattern,
    ↪ suff_compare1);
    int *up = upper_bound (SA, SA + sz(s), pattern,
    ↪ suff_compare2);
    return make_pair((int)(low - SA),(int)(up - SA));
}
```

Prefijo común más largo. Complejidad: Tiempo $O(|s|)$ - Memoria $O(|s|)$. Calcula la longitud del prefijo común más largo entre dos sufijos consecutivos (lexicográficamente) de `s`. $lcp[i]$ guarda la respuesta para el i-ésimo sufijo y el $(i-1)$-ésimo sufijo.

```
int lcp[MAXN];
void build_lcp(string &str){
    int n = sz(str);
    int phi[n];
    phi[SA[0]] = -1;
    for(int i = 1; i < n; ++i) phi[ SA[i] ] = SA[i -
    ↪ 1];
```

```
    int plcp[n];
    int k = 0;
    for(int i = 0; i < n; ++i){
        if(phi[i] == -1){
            plcp[i] = 0;
            continue;
        }
        while(i + k < n && phi[i] + k < n && str[i +
        ↪  k] == str[phi[i] + k]) k++;
        plcp[i] = k;
        k = max(k - 1, 0);
    }
    for(int i = 0; i < n; ++i) lcp[i] = plcp[SA[i]];
}
```

15.4. Aho-Corasick

Construción en $O(mk)$, donde m es el tamaño total de los strings y k el tamaño del alfabeto.

```
struct aho_corasick{
    const static int K = 26;
    const char index = 'a';
    struct vertex{
        int next[K];
        bool terminal = false;
        int p = -1;
        char p_edge;
        int link = -1;
        int terminal_link = -1;
        int go[K];
        vertex(int p = -1, char c = '$') : p(p),
        ↪  p_edge(c){
            memset(next, -1, K*sizeof(int));
            memset(go, -1, K*sizeof(int));
        }
    };
    vector<vertex> aho;
    aho_corasick(){ aho.resize(1); }
    void add_string(const string &s){
        int u = 0;
        for(char c : s){
            int e = c - index;
            if(aho[u].next[e] == -1){
                aho[u].next[e] = sz(aho);
                aho.emplace_back(u, c);
            }
            u = aho[u].next[e];
        } aho[u].terminal = 1;
    }
    int get_link(int u){
        if(aho[u].link == -1){
            if(!u || !aho[u].p) aho[u].link = 0;
            else aho[u].link = go(get_link(aho[u].p),
            ↪  aho[u].p_edge);
        } return aho[u].link;
    }
    int go(int u, char c){
        int e = c - index;
        if(aho[u].go[e] == -1){
            if(aho[u].next[e] != -1)
                aho[u].go[e] = aho[u].next[e];
            else aho[u].go[e] = !u ? 0 :
            ↪  go(get_link(u), c);
        } return aho[u].go[e];
    }
    int get_terminal_link(int u){
        if(aho[u].terminal_link == -1){
            if(!u || !aho[u].p)
                aho[u].terminal_link = 0;
            else aho[u].terminal_link =
            ↪  get_terminal_link(get_link(u));
        } return aho[u].terminal_link;
    }
};
```

15.5. Suffix tree

```
/// MEJORAR ESTA COSA, SOLO LO COPIE Y
↪  PEGUÉ porcuestionesdetiempo
const int inf = 1e9;
const int maxn = 1e6;
int s[maxn];
map<int, int> to[maxn];
//Root is the vertex 0
//f_pos[i] is the initial index with the letter of the
↪  edge that goes from the parent of i to i
//len[i] is the number of letters in the edge that
↪  enters in i
//slink[i] is the suffix link
int len[maxn], f_pos[maxn], slink[maxn];
int node, pos;
int sz = 1, n = 0;
int make_node(int _pos, int _len){
    f_pos[sz] = _pos;
    len [sz] = _len;
    return sz++;
}
void go_edge(){
    while(pos > len[to[node][s[n - pos]]]){
        node = to[node][s[n - pos]];
        pos -= len[node];
    }
}
void add_letter(int c){
    s[n++] = c;
    pos++;
    int last = 0;
    while(pos > 0){
        go_edge();
        int edge = s[n - pos];
        int &v = to[node][edge];
        int t = s[f_pos[v] + pos - 1];
        if(v == 0){
            v = make_node(n - pos, inf);
            //v = make_node(n - pos, 1);
            slink[last] = node;
            last = 0;
        } else if(t == c) {
            slink[last] = node;
            return;
        } else {
            int u = make_node(f_pos[v], pos - 1);
            to[u][c] = make_node(n - 1, inf);
            to[u][t] = v;
            f_pos[v] += pos - 1;
            len [v] -= pos - 1;
            v = u;
            slink[last] = u;
            last = u;
```

```
        }
        if(node == 0) pos--;
        else node = slink[node];
    }
}
void correct(int s_size){
    len[0] = 0;
    for (int i = 1; i < sz; i++){
        if (f_pos[i] + len[i] - 1 >= s_size){
            len[i] = (s_size - f_pos[i]);
        }
    }
}
void print_suffix_tree(int from){
    cout << "Edge entering in " << from << " has size
    ↪  " << len[from];
    cout << " and starts in " << f_pos[from] << endl;
    cout << "Node " << from << " goes to: ";
    for (auto u : to[from]){
        cout << u.se << " with " << (char)u.fi << " ";
    }
    cout << endl;
    for (auto u : to[from]){
        print_suffix_tree(u.se);
    }
}
void build(string &s){
    for (int i = 0; i < sz; i++){
        to[i].clear();
    }
    sz = 1;
    node = pos = n = 0;
    len[0] = inf;
    for(int i = 0; i < sz(s); i++)
        add_letter(s[i]);
    correct(sz(s));
}
void cutGeneralized(vi &finishPoints){
    for (int i = 0; i < sz; i++){
        int init = f_pos[i];
        int end = f_pos[i] + len[i] - 1;
        int idx = lower_bound(all(finishPoints), init)
        ↪  - finishPoints.begin();
        if ((idx != sz(finishPoints)) &&
        ↪  (finishPoints[idx] <= end)){//Must be cut
            len[i] = (finishPoints[idx] - f_pos[i] +
            ↪  1);
            to[i].clear();
        }
    }
}
void build_generalized(vector<string> &ss){
    for (int i = 0; i < sz; i++){
        to[i].clear();
    }
    sz = 1;
    node = pos = n = 0;
    len[0] = inf;
    int sep = 256;
    vi finishPoints;
    int next = 0;
    for (int i = 0; i < sz(ss); i++){
        for (int j = 0; j < sz(ss[i]); j++){
            add_letter(ss[i][j]);
        }
        next += sz(ss[i]);
        finishPoints.pb(next);
        add_letter(sep++);
        next++;
    }
    correct(next);
    cutGeneralized(finishPoints);
}
```

16. Geometría

16.1. Convex hull

Complejidad: $O(n \log n)$.

```
/// MEJORAR ESTA COSA, SOLO LO COPIE Y
↪  PEGUÉ porcuestionesdetiempo
struct pt {
    double x, y;
};
int orientation(pt a, pt b, pt c) {
    double v = a.x*(b.y-c.y)+b.x*(c.y-a.y) +
    ↪  c.x*(a.y-b.y);
    if(v < 0) return -1; // clockwise
    if(v > 0) return +1; // counter-clockwise
    return 0;
}
bool cw(pt a, pt b, pt c, bool include_collinear){
    int o = orientation(a, b, c);
    return o < 0 || (include_collinear && !o);
}
bool collinear(pt a, pt b, pt c){
    return orientation(a, b, c) == 0; }
void convex_hull(vector<pt>& a, bool include_collinear
↪  = 0){
    pt p0 = *min_element(all(a), [](pt a, pt b){
        return make_pair(a.y, a.x) < make_pair(b.y,
        ↪  b.x);
    });
    sort(all(a), [&p0](const pt& a, const pt& b){
        int o = orientation(p0, a, b);
        if(o == 0)
        return (p0.x-a.x)*(p0.x-a.x) +
        ↪  (p0.y-a.y)*(p0.y-a.y)
                < (p0.x-b.x)*(p0.x-b.x) +
                ↪  (p0.y-b.y)*(p0.y-b.y);
        return o < 0;
    });
    if(include_collinear){
        int i = sz(a)-1;
        while(i >= 0 && collinear(p0, a[i], a.back()))
        ↪  i--;
        reverse(a.begin()+i+1, a.end());
    }
    vector<pt> st;
    for(int i = 0; i < sz(a); i++){
        while(sz(st)>1 && !cw(st[sz(st)-2], st.back(),
        ↪  a[i], include_collinear))
            st.pop_back();
        st.pb(a[i]);
    }
    a = st;
}
```

17. Utilidades

17.1. Subset sum optimization.

Complejidad: $O(N\sqrt{N})$. Si queremos obtener calcular el conjunto de sumas posibles en subconjuntos de un arreglo A, en el cual se cumple que $\sum a_i = N$ y todo $a_i \geq 0$, podemos obtener exactamente el mismo conjunto con un arreglo comprimido de tamaño $\sqrt{N}$. El $3k-trick$ explota que las sumas generadas por el arreglo $[a, a, a]$ son exactamente las mismas que en $[2a, a]$. Podemos juntar elementos y repetirlo hasta que a solo haya dos copias de cada elemento distinto en el nuevo arreglo, acotando el numero de elementos a $O(\sqrt{N})$. El proceso de compresión toma $O(N \log_2(N))$.

```
vi compress(vector<ll>& a){
    sort(a.rbegin(), a.rend());
    int n = sz(a);
    a.pb(0);
    vi weights;
    int pi = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
      if(a[i] != a[i - 1]){
        ll cnt = i - pi;
        ll x = a[i - 1];
        ll j = 1;
        while(j < cnt){
          weights.pb(x * j);
          cnt -= j;
          j *= 2;
        }
        weights.pb(x * cnt);
        pi = i;
      }
    } return weights;
}
```

17.2. Bitsets de tamaño (casi) dinámico

El código ejecutado dentro de func(sz) usará un bitset con tamaño de la potencia de 2 más cercano a sz.

```
template<int len = 1> void func(int sz){
    if(sz > len){
      func<std::min(len * 2, MAXLEN)>(sz);
      return;
    }
    bitset<len> bs;
    //usa aquí tu bitset dinámico
}
```

17.3. Bitwise ops

```
#define clear_bit(S, j) (S &= ~(1ll << (j)))
#define toggle_bit(S, j) (S ^= (1ll << (j)))
#define lsb(S) ((S) & -(S))
#define clear_lsb(S) (S &= (S - 1))
#define set_all(S, n) (S = (1ll << (n)) - 1ll)
#define clear_trailing_ones(S) (S &= (S + 1))
#define set_last_bit_off(S) (S |= (S + 1))
#define is_power_of_two(S) (!((S) & ((S) - 1)))
#define nearest_power_of_two(S) ((int)pow(2,
↪ (int)((log((double)(S)) / log(2)) + 0.5)) )
#define is_divisible_by_power_of_two(n, k) !((n) &
↪ ((1ll << (k)) - 1))
#define modulo(S, N) ((S) & ((N) - 1)) // S % N, N
↪ potencia de 2
```

17.4. Bitwise - builtin

```
// one plus the index of the least significant 1-bit
↪ of x, or if x is zero, returns zero.
int __builtin_ffs(int x)
// number of leading 0-bits in x, starting at the most
↪ significant bit position. If x is 0 is undefined
int __builtin_clz(unsigned int x)
// number of trailing 0-bits in x, starting at the
↪ least significant bit position. If x is 0
↪ undefined.
int __builtin_ctz(unsigned int x)
// he parity of x, i.e. the number of 1-bits in x
↪ modulo 2.
int __builtin_parity(unsigned int x)
```

17.5. Iterar

Dada una máscara m, iterar sobre todos sus subconjuntos desde el más grande hasta el más pequeño (ojo el código no itera sobre $x = m$). La complejidad de iterar sobre todas las submáscaras de todos los números de 1 a 2^nes $O(3^n)$.

```
for(int x=m; x;){
    --x &= m;
    //...
}
```

17.6. Gospers' Hack

Sirve para generar todos las máscaras de n bits, que tengan exactamente k bits a 1 (y que sean menores o iguales que 2^n).
Complejidad $O\left(\binom{n}{k}\right)$?

```
void GospersHack(int k, int n) {
    int set = (1 << k) - 1;
    int limit = (1 << n);
    while (set < limit){
        DoStuff(set);
        // Gosper's hack:
        int c = set & - set;
        int r = set + c;
        set = (((r ^ set) >> 2) / c) | r;
    }
}
```

17.7. Subset Sum con bitset

Dado una una arreglo de tamaño n ver si es psoible encontrar es la suma objetivo S. Nota: w es el tamaño del bloque de bits procesados en paralelo (normalmente 32 o 64). Complejidad: Temporal $O\left(n \times \frac{S}{w}\right)$ - Memoria $O(S)$

```
bool subsetSumBitset( vi& arr, int S) {
    bitset<10001> dp; // tam >= S+1
    dp[0] = 1;
    for(int x : arr) dp |= (dp << x);
    return dp[S];
}
```

18. Máximo de funciones

18.1. Li-Chao Tree

Dado un conjunto A con M valores a evaluar, y N funciones (tales que cada una de ellas se intersecta con el resto a lo más una vez), te devuelve $\max_{i \in [N]} \left(f_i(a)\right)$ para cualquier $a \in A$. Complejidad: Responder y agregar $O(logM)$.

```
struct Function {
    ll m;
    ll b;
    ll eval(ll x){
        if (m == LLONG_MIN) return LLONG_MIN;
        return m*x+b;
```

```
    }
    Function(){ m = LLONG_MIN;}
    Function(ll m_, ll b_): m(m_), b(b_){ }
};
struct LiChaoTree {
    vector<ll> values;
    ll maxV;
    Function *functions;
    LiChaoTree(vector<ll> &values_){
        values = values_;
        sort(all(values));
        functions =new Function[sz(values)*4];
        maxV = sz(values);
    }
    //Range from l to r - 1
    ll get(ll x){
        return get(x, 1, 0, maxV);
    }
    ll get(ll x, int v, int l, int r){
        int m = (l + r) / 2;
        ll mv = values[m];
        if(r - l == 1){
            return functions[v].eval(x);
        } else if(x < mv){
            return max(functions[v].eval(x), get(x, 2
            ↪  * v, l, m));
        } else {
            return max(functions[v].eval(x), get(x, 2
            ↪  * v + 1, m, r));
        }
    }
    void addFunction(Function f){
        addFunction(f, 1, 0, maxV);
    }
    void addFunction(Function f, int v, int l, int r){
        int m = (l + r) / 2;
        ll mv = values[m];
        ll lv = values[l];
        bool lef = f.eval(lv) > functions[v].eval(lv);
        bool mid = f.eval(mv) > functions[v].eval(mv);
        if(mid)//Si el actual pierde en el medio
            swap(functions[v], f);
        if(r - l == 1) return;
        else if(lef != mid)//El cruce esta en izq
            addFunction(f, 2 * v, l, m);
        else addFunction(f, 2 * v + 1, m, r);
    }
    ~LiChaoTree(){ delete[] functions; }
};
```