

1 Zermelo-Fraekel 公理集合论 (承认选择公理, 即 ZFC 公理体系)

公理 1.1 外延公理

若两集合拥有相同元素, 则两集合相等.

$$X = Y \iff \forall x \in X, x \in Y; \forall y \in Y, y \in X$$

定义 1.0.1 空集 (Empty Set)

假设 X 是任意集合,

$$\emptyset := \{x \in X | x \neq x\}$$

公理 1.2 配对公理 (Axiom of Pairing)

可以将两个集合配对组成一个新集合.

$$\forall x, y, \exists \{x, y\}$$

定义 1.0.2 有序对 (Ordered Pair)

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

定义 1.0.3 Descartes 积 (Cartesian Product)

$$X \times Y := \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$$

公理 1.3 分离公理模式

可以从一个集合中筛选出满足某个条件的元素组成一个新集合.

$$\forall X, \exists Y = \{x \in X | P(x)\}$$

公理 1.4 并集公理

可以将一个集族中全体集合的元素合并为一个新集合.

$$\forall X, \exists \bigcup X := \{x | \exists y \in X : x \in y\}$$

公理 1.5 幂集公理

可以将集合的全体子集取出组成一个新的集合.

$$\forall X, \exists \mathcal{P}(X) := \{x | x \subseteq X\}$$

定义 1.0.4 归纳集 (Inductive Set)

集合 X 称为是一个归纳集, 若 $\forall x \in X, x' \in X$, 其中 x' 称为 x 的后继.

公理 1.6 无穷公理 (Axiom of Infinity)

存在无穷集. (通过定义 x 的后继 $x' = x \cup \{x\}$ 实现)

$$\exists X : \emptyset \in X \wedge \forall x \in X, x \cup \{x\} \in X$$

公理 1.7 替换公理模式 (Axiom of Replacement)**公理 1.8 正则公理 (Axiom of Regularity)**

任何非空集都含有一个对从属关系 \in 极小的元素.

定理 1.0.5

不存在无穷的从属链:

$$\nexists \{x, x_1, x_2, \dots\} : x \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$$

公理 1.9 选择公理 (Axiom of Choice)

对由非空集合组成集族, 可构造选择函数, 从每个集合中选择一个元素组成一个新集合.

$$X : \forall x \in X, x \neq \emptyset \implies \exists g : X \rightarrow \bigcup X : \forall x \in X, g(x) \in x$$

2 序结构与序数

定义 2.0.1 偏序关系 (Partial Order)

定义在集合 S 上的二元关系 “ \leq ” 称为是一个偏序关系, 若它具有:

(1) 自反性:

$$\forall x \in S, x \leq x$$

(2) 传递性:

$$x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$$

(3) 反对称性:

$$x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$$

此时称结构 (P, \leq) 为偏序集.

若二元关系 “ \leq ” 满足 (1), (2), 称为预序关系, 相应的结构 (S, \leq) 称为预序集.

定义 2.0.2 保序映射

设结构 $(S, \leq_S), (T, \leq_T)$ 是预序集, 映射 $f : S \rightarrow T$ 称为是保序映射, 若:

$$\forall x, y \in S : x \leq_S y \implies f(x) \leq_T f(y)$$

方便起见, 记 $x \leq y \wedge x \neq y$ 为 $x < y$, 及引入 $\geq, >$ 符号.

定义 2.0.3 全序集 / 线序集 / 链 (Linearly Ordered Set)

偏序集 S 称为是一个全序集, 若:

$$\forall x, y \in S, x \leq y \vee y \leq x$$

3 无穷递归原理

4 基数

4.1 基数

定义 4.1.1 等势

集合 X, Y 称为是等势 (have the same Cardinality) 的, 若 \exists 双射 $\phi: X \rightarrow Y$.

定理 4.1.2 基数算数

定义 4.1.3 可数集 (Countable Set)

集合 S 称为是一个可数集, 若 $\text{card}(S) = \aleph_0$

性质 4.1.3.1 可数集的子集是可数集

证明:

设任意可数集 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$

$$\forall S' = \{a_i | a_i \in S\} \subseteq S : |S'| = +\infty,$$

$$f(a_i) := |S' \cap \{a_1, a_2, \dots, a_i\}|$$

有 $f: S' \rightarrow \mathbb{Z}^+$ 是双射, 即 S' 是可数集. \square

定理 4.1.4

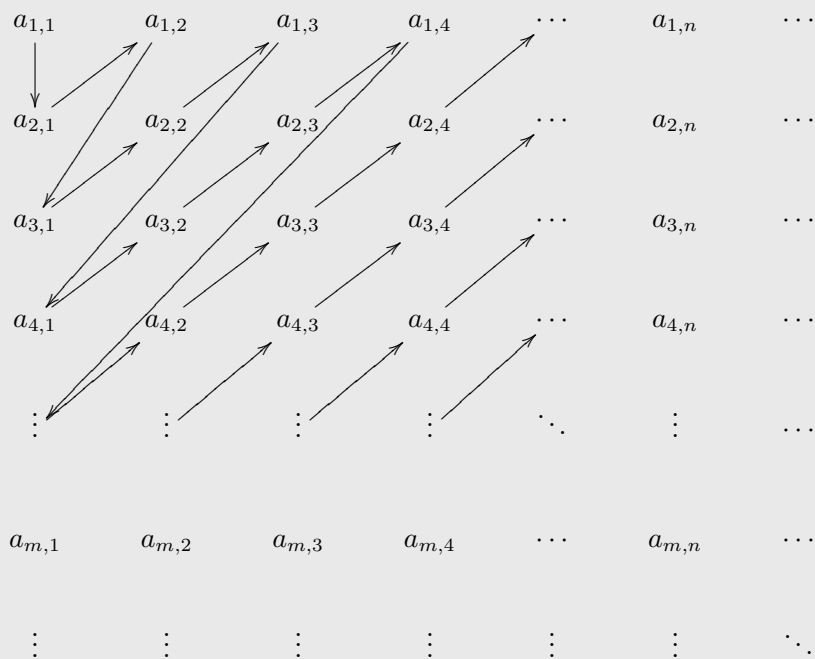
设集族 $\bar{S} = \{S_i | S_i \text{ 是可数集}\}$ 是可数集, 则:

$$S = \bigcup_{S_i \in \bar{S}} S_i \text{ 是可数集.}$$

证明:

$\because S_i \in \bar{S}$ 是可数集, \implies 可设 $S_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}, \dots\}$

将 $a_{i,j}$ 写成矩形数阵形式:



按照折线方向构造一个元素序列 $\{a'_n\}$, 其中:

$$a_{m,n} \text{ 的序数为 } \frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} + n$$

$$f(a_{m,n}) = |\{a'_1, a'_2, \dots, a'_{\frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} + n}\}|$$

有 f 为双射, $\implies S$ 是可数集. \square

定理 4.1.5

有理数集 \mathbb{Q} 是可数集.

证明:

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{p}{q} \mid q \in (\mathbb{Z} - \{0\}) \right\}$$

其中 $\mathbb{Z}, (\mathbb{Z} - \{0\})$ 都是可数集, $\implies \mathbb{Q}$ 是可数集. \square

5 二元关系

5.1 二元关系

定义 5.1.1 二元关系 (Binary Relations)

如果 $R \subseteq A \times B$, 则 R 是从 A 到 B 的二元关系.

如果 $R \subseteq A \times A$, 则 R 是 A 上的二元关系.

$aRb \iff (a, b) \in R$, 其中 $a \in A \wedge b \in B$.

定义 5.1.2 二元关系的性质 (Properties of Binary Relations on A)

令 $R \subseteq A \times A$, 则 R 可能拥有的性质如下:

1. 自反性: $\forall a \in A, aRa$.
2. 对称性: $\forall a, b \in A, aRb \implies bRa$.
3. 反对称性: $\forall a, b \in A, aRb \wedge bRa \implies a = b$.
4. 传递性: $\forall a, b, c \in A, aRb \wedge bRc \implies aRc$.

例 5.1.3 二元关系举例及其性质 (Examples of Binary Relations and Their Properties)

1. 小于等于关系 设 $A = \mathbb{R}$ (实数集), 定义关系 R 为:

$$R = \{(a, b) \mid a \leq b\}$$

- 自反性: 是. 因为 $\forall a \in \mathbb{R}, a \leq a$.
- 对称性: 否. 例如, $1 \leq 2$ 但 $2 \not\leq 1$.
- 反对称性: 是. 如果 $a \leq b \wedge b \leq a$, 则 $a = b$.
- 传递性: 是. 如果 $a \leq b \wedge b \leq c$, 则 $a \leq c$.

2. 整除关系 设 $A = \mathbb{Z}^+$, 定义关系 R 为:

$$R = \{(a, b) \mid a \mid b\}$$

- 自反性: 是. 因为 $\forall a \in \mathbb{Z}^+, a$ 整除 a .
- 对称性: 否. 例如, 2 整除 4 , 但 4 不整除 2 .
- 反对称性: 是. 如果 a 整除 $b \wedge b$ 整除 a , 则 $a = b$.
- 传递性: 是. 如果 a 整除 $b \wedge b$ 整除 c , 则 a 整除 c .

3. 空关系 (Empty Relation) 设 A 是一个集合, 定义关系 R 为:

$$R = \emptyset$$

即 R 不包含任何元素.

- 自反性: 否. 除非 $A = \emptyset$, 否则 R 不满足自反性.

- 对称性: 是. 因为 R 中没有元素, 对称性条件自动满足.
- 反对称性: 是. 因为 R 中没有元素, 反对称性条件自动满足.
- 传递性: 是. 因为 R 中没有元素, 传递性条件自动满足.

4. 全关系 (Universal Relation) 设 A 是一个集合, 定义关系 R 为:

$$R = A \times A$$

即 R 包含所有 A 中的元素对.

- 自反性: 是. 因为 $\forall a \in A, (a, a) \in R$.
- 对称性: 是. 如果 $(a, b) \in R$, 则 $(b, a) \in R$.
- 反对称性: 否. 除非 A 只有一个元素, 否则存在 $a \neq b, (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$.
- 传递性: 是. 如果 $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$, 则 $(a, c) \in R$.

定义 5.1.4 逆关系 (Inverse Relation)

如果 $R \subseteq A \times B$, 则 R 的逆关系 $R^{-1} \subseteq B \times A$ 定义为:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

性质 5.1.4.1

$$(R^{-1})^{-1} = R$$

定义 5.1.5 关系的复合 (Composition of Relations)

$R \subseteq B \times C, S \subseteq A \times B$, 则 R 和 S 的复合 $R \circ S \subseteq A \times C$ 定义为:

$$R \circ S = \{(a, c) \mid \exists b \in B, (a, b) \in S \wedge (b, c) \in R\}$$

性质 5.1.5.1

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$$

性质 5.1.5.2

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$

性质 5.1.5.3 性质的等价表示 (Properties in Terms of Relations)

- R 是自反的 $\iff I_A \subseteq R$, 其中 $I_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$.
- R 是对称的 $\iff R = R^{-1}$.
- R 是传递的 $\iff R \circ R \subseteq R$.
- R 是反对称的 $\iff R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

定义 5.1.6 等价关系 (Equivalence Relation)

如果关系 $R \subseteq A \times A$ 满足自反性、对称性和传递性, 则 R 是 A 上的等价关系.

定义 5.1.7 等价类 (Equivalence Class)

如果 R 是 A 上的等价关系且 $a \in A$, 则 a 的等价类定义为:

$$[a]_R = \{b \in A \mid aRb\}$$

定理 5.1.8

设 R 是集合 A 上的等价关系, $a, b \in A$, 则:

$$aRb \iff [a]_R = [b]_R$$

证明:

“ \Rightarrow ” : $aRb \implies bRa \forall c \in A$,
 $c \in [a]_R \iff cRa \iff cRb \iff c \in [b]_R \therefore [a]_R = [b]_R$.
 “ \Leftarrow ” : $bRb \implies b \in [b]_R = [a]_R \therefore aRb$. □

性质 5.1.8.1

设 R 是集合 A 上的等价关系, $a, b \in A$, 则:

$$aRb \iff [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset.$$

证明:

“ \Rightarrow ” : 显然.
 “ \Leftarrow ” : $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset \implies c \in A, c \in [a]_R \wedge c \in [b]_R$,
 $\therefore cRa, cRb \implies aRc, cRb \implies aRb$. □

定义 5.1.9 划分 (Partition)

集合 $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ 称为 A 的划分, 如果满足:

1. $\forall B \in P, B \neq \emptyset$.
2. $\forall B_1, B_2 \in P$, 如果 $B_1 \neq B_2$, 则 $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.
3. $\bigcup P = A$.

引理 5.1.10

P 是 A 的划分, $a \in A \implies \exists! B \in P \text{ s.t. } a \in B$.

定理 5.1.11

如果 R 是 A 上的等价关系, 则等价类的集合 $\{[a]_R \mid a \in A\}$ 构成 A 的一个划分.

定理 5.1.12

设 P 是集合 A 的一个划分, 定义关系 R 为:

$$R = \{(a, b) \in A \times A \mid \exists B \in P, a \in B \text{ 且 } b \in B\}$$

则 R 是 A 上的等价关系, 且 $P = \{[a]_R \mid a \in A\}$.

证明: • 自反性: $\forall a \in A, \exists B \in P, a \in B, \therefore aRa$.

• 对称性: $\forall a, b \in A$, 如果 aRb , 则 $\exists B \in P, a \in B \wedge b \in B, \therefore bRa$.

• 传递性: $\forall a, b, c \in A$, 如果 $aRb \wedge bRc$, 则 $\exists B, B' \in P, a, b \in B \wedge b, c \in B'$. 由于 $b \in B \cap B'$, 且 P 是划分, 故 $B = B'$, $\therefore aRc$.

$\therefore R$ 是 A 上的等价关系.

下证 $P = \{[a]_R \mid a \in A\}$.

• “ \subseteq ” : $\forall B \in P, \exists a \in B$, 只需证明 $[a]_R = B$.

– (i) $\forall b \in [a]_R$, 有 $aRb, \therefore \exists B' \in P, a, b \in B'$, 故 $B = B', \therefore b \in B$.

– (ii) $\forall b \in B$, 有 $aRb, \therefore b \in [a]_R$. 综上, $[a]_R = B$.

• “ \supseteq ” : $\forall a \in A, \exists B \in P, a \in B$, 只需证明 $[a]_R = B$.

□

5.2 闭包**定义 5.2.1 闭包 (Closure)**

设 $R \subseteq A \times A$, 对于性质 P , R' 是 R 的闭包, 当且仅当:

1. $R \subseteq R'$;
2. R' 具有性质 P ;
3. $\forall T \subseteq A \times A$, 如果 $R \subseteq T$ 且 T 具有性质 P , 则 $R' \subseteq T$.

定义 5.2.2

设 $R \subseteq A \times A$, 定义:

$$R^1 = R, \quad R^{n+1} = R^n \circ R, \quad R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n, \quad R^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$$

引理 5.2.3

如果 $R \subseteq R' \wedge T \subseteq T'$, 则 $R \circ T \subseteq R' \circ T'$.

引理 5.2.4

如果 $R_1, R_2, \dots, T \subseteq A \times B$, 且 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 有 $R_n \subseteq T$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \subseteq T$.

引理 5.2.5

$R^n \circ R^m = R^{n+m}$ ($n, m \in \mathbb{Z}^+$).

引理 5.2.6

R^+ 是传递的.

证明:

假设 $aR^+b \wedge bR^+c$, 则 $\exists n, m \in \mathbb{Z}^+$, $aR^n b \wedge bR^m c$.

$$\therefore a(R^n \circ R^m)c \quad \text{即} \quad aR^{n+m}c$$

由于 $R^{n+m} \subseteq R^+$, 故 aR^+c . $\therefore R^+$ 是传递的. □

引理 5.2.7

如果 $R \subseteq T \subseteq A \times A$, 且 T 是传递的, 则 $R^+ \subseteq T$.

证明:

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 证明 $R^n \subseteq T$:

- (1) 当 $n = 1$ 时, $R^1 = R \subseteq T$.
- (2) 假设 $n = k$ 时 $R^k \subseteq T$, 则 $R^{k+1} = R^k \circ R \subseteq T \circ T \subseteq T$ (因为 T 是传递的).

根据定义, $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq T$. □

定理 5.2.8

R^+ 是 R 的传递闭包.

证明:

由引理已证. □

5.3 函数

定义 5.3.1 函数 (Functions)

$F \subseteq A \times B$ 是一个函数, 当且仅当满足以下条件:

1. $\forall x \in A, \exists y \in B, xFy$.
2. $\forall x \in A$, 如果 $xFy_1 \wedge xFy_2$, 则 $y_1 = y_2$.

记法: $F: A \rightarrow B$ 表示 F 是从 A 到 B 的函数.

$\forall x \in A, F(x)$ 表示唯一的 $y \in B, xFy$.

性质 5.3.1.1

设 $F, G: A \rightarrow B$ 是两个函数, 则 $F = G \iff \forall x \in A, F(x) = G(x)$.

定理 5.3.2

设 $F: B \rightarrow C$ 和 $G: A \rightarrow B$ 是两个函数, 则:

1. $F \circ G: A \rightarrow C$ 是一个函数.
2. $\forall x \in A, (F \circ G)(x) = F(G(x))$.

6 序理论

6.1 完备偏序结构

广义的序结构包含了更加普适的抽象的理论框架, 在数学分析中我们仅使用最为基本, 直观的部分:

定义 6.1.1 偏序关系 (Partial Order)

设 S 是一个集合, \leq 是 S 上的一个二元关系, 则称 \leq 为 S 上的一个偏序关系 (Partial Order), 若它满足:

(1) 反身性:

$$\forall a \in S, a \leq a$$

(2) 反对称性:

$$\forall a, b \in S, a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$$

(3) 传递性:

$$\forall a, b, c \in S, a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$$

定义 6.1.2 有界集 (Bounded Set)

设偏序结构 (S, \leq) , 子集 $X \subseteq S$, 则:

(1) 称元素 $a \in S$ 为 X 的一个上界 (Upper Bound), 若:

$$\forall x \in X, x \leq a$$

(2) 称元素 $b \in S$ 为 X 的一个下界 (Lower Bound), 若

$$\forall x \in X, b \leq x$$

子集 $X \subseteq S$ 称为是**有界 (Bounded)** 的, 若其同时拥有上, 下界.
注意: 上/下界不唯一, 且上/下界不一定在该子集内.

定义 6.1.3 全序集/线序集 (Linearly Ordered Set)

设偏序结构 (S, \leq) , 则若任意两个元素 $a, b \in S$ 都满足 $a \leq b$ 或 $b \leq a$, 则称 (S, \leq) 为**全序集 (Total Order Set)** 或**线序集 (Linearly Ordered Set)**.

定义 6.1.4 上 / 下确界 (Supremum / Infimum)

设全序结构 (S, \leq) , 子集 $X \subseteq S$, 则:

(1) 集合 X 最小的上界 a 称为是 X 的一个**上确界 (Supremum)**, 记为 $a = \sup(X)$:

$$a = \sup(X) \iff \forall a' (a' \text{ 是 } S \text{ 的上界}), a \leq a'$$

(2) 集合 X 最大的下界 b 称为是 X 的一个**下确界 (Infimum)**, 记为 $a = \inf(X)$:

$$b = \inf(X) \iff \forall b' (b' \text{ 是 } S \text{ 的下界}), b \geq b'$$

定义 6.1.5 完备偏序 (Complete Partial Order)

序结构 (S, \leq) 被称为是**完备 (Complete)** 的, 若 S 的任何有上/下界的子集有上/下确界:

$$\forall X \subseteq S (X \text{ 有上界}), \exists a = \sup(X) \in S$$

$$\forall X \subseteq S (X \text{ 有下界}), \exists b = \inf(X) \in S$$