λ-演算与类型论

Fulcrum4Math

目录

1 λ-演算

1.1 无类型 λ-演算

定义 1.1.1 λ-项 (λ-terms)

公理 1.1 应用规则

1.2 简单类型 λ-演算

2 类型论

2.1 类型系统

定义 2.1.1 类型判断
$a : A$ 是判断

定义 2.1.2 依定义相等判断
$a \equiv b : A$ 是判断

定义 2.1.3 良上下文判断 (Well-Formed Context)
$\Gamma(\mathsf{ctx})$ 是判断

公理 2.1 类型宇宙
设 $n : \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots$ 称为类型宇宙.
有: $\mathcal{U}_n : \mathcal{U}_{n+1}$
类型宇宙是累计的, 即若 $A : \mathcal{U}_n$, 则 $A : \mathcal{U}_{n+1}$.

性质 2.1.3.1 类型宇宙的元素是类型

注 2.1.3.1 规定类型宇宙 $\mathcal{U}_\infty : \mathcal{U}_\infty$ 将导致矛盾, 因此使用分层设计.

公理 2.2 归纳类型构造规则
类型构造规则
构造子 / 引入规则
消去子 / 消去规则
计算规则 (β-规约)
唯一性原理 (η-展开)

2.2 简单类型论

公理 2.3 函数类型构造规则
设 A, B 是类型, 则由 A 至 B 的函数类型是类型, 记作 $A \to B$.

注 2.2.0.1 规定函数类型算子是右结合的, 即将 $A \to B \to C$ 解释为 $A \to (B \to C)$.

注 2.2.0.2 将多元函数 $A \times B \to C$ 表示为一元函数的嵌套 $A \to (B \to C)$, 这种习惯称为**函数的 Curry 化表示**.

公理 2.4 函数构造规则

公理 2.5 函数应用规则

定义 2.2.1 依值类型 / 类型族 (Dependent Type / Type Family)

2.3 依值类型论

公理 2.6 依值函数类型构造规则
设 A 是类型, β 是 A 上的依值类型, 则由 A 至 β 的依值函数类型是类型, 记作 $\prod_{(x:A)} \beta(x)$.

性质 2.3.0.1 非依值的依值函数类型等价于函数类型

公理 2.7 依值函数构造规则

公理 2.8 依值函数应用规则