Notes for Complex Analysis

Dedicatia.

Jul. 16th, 2025

目录

1 复数的代数学

1.1 复数的基本运算

类比实数的运算，复数遵从和实数一样的运算基本规律。我们已经从初等代数中了解到了

定义 1.1.1 虚数单位 (Imaginary Unit)

规定 i 是虚数单位，满足 $\mathrm{i}^2 = -1$.

那么，可以定义一种新的数的表示方法：

定义 1.1.2 复数 (Complex Number)

称具有 $z = a + b\mathrm{i}(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$ 的形式的数为复数。记作 $z \in \mathbb{C}$.

定义 1.1.3 复数的实部与虚部 (Real Part & Imaginary Part)

对于复数 $z = a + b\mathrm{i}$, 称实数 a 为 z 的实部，记作 $\operatorname{Re} z$; 实数 b 为 z 的虚部，记作 $\operatorname{Im} z$.

定理 1.1.4 复数对加法和乘法具有封闭性 ()

定理 1.1.5 复数存在除法 ()

$z = a + b\mathrm{i} \neq 0$ 的乘法逆元为

$$z^{-1} = \frac{1}{a + b\mathrm{i}} = \frac{a - b\mathrm{i}}{a^2 + b^2}$$

定义 1.1.6 复数的方根 ()

性质 1.1.6.1 复数方根个数等于根指数 ()

定义 1.1.7 共轭复数 (Conjugate Complex Number)

称 $z = a + b\mathrm{i}$ 的共轭复数为 $a - b\mathrm{i}$, 用 $\bar{z}$ 来表示。

定义 1.1.8 （复）绝对值 ((Complex) Absolute Value)

对于复数 $z = a + bi$, 称它与它的共轭复数的乘积的算术平方根为它的（复）绝对值，记作 $|z|$. 即定义 $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

性质 1.1.8.1 复数的绝对值不等式 / 三角形不等式 ()

设 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, 那么

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

定义 1.1.9 复数域 (Complex Number Field)

复数域 $\mathbb{C}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 的最小代数扩张。这也就是说，我们将实数域内的不可约多项式 x^2+1 的根强行引入，构造得到的商环 $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ 是一个完备的域。具体来说：

1. 对加法：具有封闭性，满足结合律、交换律，存在零元，存在负元；即 $(\mathbb{C}, +)$ 是 Abel 群；
2. 对乘法：具有封闭性，满足结合律、交换律，存在单位元，存在负元；即 $(\mathbb{C}\backslash 0, \cdot)$ 是 Abel 群；
3. 加法与乘法的相容性：具有左右分配律；

这称为复数域。

1.2 复数的几何表示

复数 $z = a + bi$ 可以与复平面上的点一一对应，因此复数是具有几何意义的。

定义 1.2.1 极坐标系 (Polar Coordinate)
平面内的点 (a, b) 可以由到原点的距离和方向唯一确定。设该距离为 r, 该与原点连线与正半轴夹角是 $\theta \in [0, 2\pi)$, 那么直角坐标 (a, b) 可以用极坐标 (r, θ) 唯一表示。

性质 1.2.1.1 直角坐标与极坐标的互化公式 ()

$$\begin{cases} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \theta &= \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

定义 1.2.2 复数的三角表示 (Angular Form of Complex Number)
复数 $z = a + bi$ 具有极坐标形式 $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, 其中 $r > 0, \theta \in \mathbb{R}$, 这称之为该复数的三角表示式。其中的 r 称为复数的模长且等于绝对值，θ 为该复数的**辐角 (Argument)**，记作 $\operatorname{Arg} z$. 通常取 $\theta \in [0, 2\pi)$ 中的值为**辐角的主值 (Principal Argument)**，这时可以记作 $\arg z$.

定理 1.2.3 复数运算的 De Moivre 定理 (De Moivre's Theorem for Complex Numbers' Operation)
1. 复数相乘时，模长相乘，辐角相加；复数相除时，模长相除，辐角相减；
2. 复数乘方 n 次方时，模长变为 n 次方，辐角变为原先的 n 倍；复数开 n 次方根时，模长变为 n 次方根，辐角变为原先的 $\frac{1}{n}$.

定义 1.2.4 单位根 (Unit Root)

1.3 扩充复数系统与球面表示

正如实数可以引入正负无穷大来扩充一样，我们规定：

定义 1.3.1 无穷大 ()

用记号 ∞ 表示无穷大。它与有限数之间的关系为:

1. $a+\infty=\infty+a=\infty$;
2. $b\neq 0$, $b\cdot\infty=\infty\cdot b=\infty$.

但是在普通的欧氏几何的平面上，对应于 ∞ 的点是没有的。于是我们引入：

定义 1.3.2 无穷远点 ()

称 ∞ 在平面上对应的点为无穷远点。

为了便于理解，我们引入几何模型去描述：

定义 1.3.3 Riemann 球面 (Riemann Sphere)

称单位球面 $S:=\{(x_1,x_2,x_3):x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$ 为 Riemann 球面。

性质 1.3.3.1 球极投影 (stereographic projection)

将去掉北极点 $(0,0,1)$ 的 Riemann 球面上的点与复数建立对应关系：

$$z=\frac{x_1+\mathrm{i}x_2}{1-x_3}$$

事实上，这个对应关系是一一映射：

$$x_1=\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}$$

$$x_2 = \frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}$$

$$x_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$$

这样，北极点 $(0,0,1)$ 就对应于无穷远点。

性质 1.3.3.2 球面坐标下的直线与圆的方程 ()

球面表示中，对加法和对乘法没有什么简单的表示方法，但是可以将无穷大纳入研究范围中。称这个包含了无穷大的扩充复数系统为 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$.

2 复函数

类似于实函数，我们用记号 $w = f(z)$ 来表示复函数。其中 $w, z \in \mathbb{C}$. 一般还将 z 写作 $x + \mathrm{i}y$, 这里默认了 $x, y \in \mathbb{R}$.

2.1 复连续与复可导

可以仿照实函数，定义：

定义 2.1.1 复函数的参数表示 ()

设复数 $z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) = \boldsymbol{L}(t)$, 这里的 $\boldsymbol{L}(t)$ 是一个返回 2 个变量的向量值函数。

定义 2.1.2 函数极限 (Limit)

称函数 $f(z)$ 在 z 趋近于 a 时具有极限 A, 是指对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得 $|z-a| < \varepsilon$ 且 $z \neq a$ 时，$|f(z)-A| < \delta$. 记作 $\lim\limits_{z\to a} f(z) = A$.

性质 2.1.2.1 复函数极限的等价表示 ()

$\lim\limits_{z\to a} f(z) = A$ 等价于

$$\lim_{z\to a} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} A$$

$$\lim_{z\to a} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} A$$

定义 2.1.3 函数连续 ()

称函数 $f(z)$ 在 a 点连续，必需而且只需 $\lim\limits_{z\to a} f(z) = f(a)$. 称在一个集合 D 上所有点都连续的函数叫做 D 上的连续函数。

定义 2.1.4 导数（形式上的定义）(Derivative (Formational))

我们先给出适合于所有类型的复函数的导数定义：

$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

事实上，对导数的研究可以根据自变量是实数还是复数而分类。如:

推论 2.1.4.1 复变量的实值函数的导数 ()

复变量的实值函数的导数或者为 0，或者不存在。这是因为假如该函数 $f(z)$ 在 $z = a$ 处可导，那么当 h 以实数值趋近于 0 时，

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

是实数。另外一方面，该导数还等于

$$f'(a) = \frac{f(a+\mathrm{i}h) - f(a)}{\mathrm{i}h}$$

这是一个纯虚数。那么 $f'(a)$ 必然等于 0.

例 2.1.5 实变量的复值函数的导数 ()

将实变量的复值函数 $z(t)$ 按实部虚部分开写作 $x(t)+\mathrm{i}y(t)$, 那么 $z'(t)=x'(t)+\mathrm{i}y'(t)$. 即 $z'(t)$ 存在等价于 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 同时存在。

由上面的讨论我们可以发现，真正具有重大研究意义的应是**复变量的复值函数的导数**。

2.2 全纯函数

定义 2.2.1 解析函数 / 全纯函数 (Analytic Function / Holomorphic Function)

设函数 $f(z)$ 在区域 $D\in\mathbb{C}$ 上有定义，对每一点 $z_0\in D$, 导数

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

都存在且有限，那么就称 $f(z)$ 在 D 上是**解析函数 / 全纯函数**. 也可以记作 $f(z)\in\mathcal{H}(D)$.

性质 2.2.1.1 解析函数的实部和虚部是连续实函数 ()

设 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$, 那么 $u(z)$ 和 $v(z)$ 都是连续函数。证明只需令导数

$$f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

中的 h 从实数和纯虚数分别趋近于 0 即可。

性质 2.2.1.2 解析函数的和、积、商仍然是解析函数 ()

性质 2.2.1.3 解析函数的导函数也是解析函数 ()

定理 2.2.2 Cauchy-Riemann 方程 (Cauchy-Riemann's Equation)

解析函数适合于 Cauchy-Riemann 方程。设复变函数 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$, 那么它在某点 $z=x+\mathrm{i}y$ 的导数就可以写成

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

如果令 h 以实数的方式趋于 0, 那么上式变为对 x 的偏导数：

$$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

如果令 $h=\mathrm{i}k$ 是一纯虚数，那么上式变为对 y 的偏导数：

$$f'(z)=\lim_{k\to 0}\frac{f(z+\mathrm{i}k)-f(z)}{\mathrm{i}k}=-\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}=-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

这两个导数应该相等。所以得到两个实的偏微分方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

这叫做 **Cauchy-Riemann 方程**.

推论 2.2.2.1 实偏导数表示下的导函数 ()

选取 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ 中的两个实偏导数，可以表示导函数 $f'(z)$. 习惯上，我们使用

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

推论 2.2.2.2 导函数的绝对值的求法 ()

导函数的绝对值的平方等于四个实偏导数组成的 Jacobi 矩阵的行列式：

$$|f'(z)|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

定义 2.2.3　调和函数 (Harmonic Function)
$u(x, y)$ 是调和函数，当且仅当其满足方程 $\Delta u = 0$. 其中 Δ 是 Laplace 算子。

容易发现，解析函数的实部 $u(x, y)$ 和虚部 $v(x, y)$ **都是调和函数**。

定义 2.2.4　共轭调和函数 (Conjugate Harmonic Function)
如果两个函数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 适合 Cauchy-Riemann 方程，就称 v 是 u 的**共轭调和函数**。

定理 2.2.5　共轭调和函数所确定的复变函数是解析函数 ()
设 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 具有适合于 Cauchy-Riemann 方程的一阶连续偏导数，那么 $f(z) = u(x + \mathrm{i}y) + \mathrm{i}v(x + \mathrm{i}y)$ 是解析函数。

2.3　幂级数

复多项式在形式上与实多项式完全一致。具有与实多项式相似的性质。

定理 2.3.1　代数基本定理 ()

1. 复多项式在复数域内必有至少一个零点。
2. 考虑重数，n 次复多项式在复数域内有 n 个零点。

定理 2.3.2　多项式的 Lacus 定理 ()
如果多项式 $P(z)$ 的所有零点都在同一个半平面上，那么其导数 $P'(z)$ 的所有零点也在该半平面上。

复有理分式在形式上与实的有理分式完全一致。均可写成多项式之商的形式 $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. 其中 $P(x) = 0$ 的 x 称为 $R(x)$ 的零点，$Q(x) = 0$ 的点称为 $R(x)$ 的极点。

定义 2.3.3 部分分式 ()

定义 2.3.4 反演变换 ()

z 和 $\frac{1}{z}$ 互为反演变换。它将 0 和 ∞ 互换。

在复数域上，也可定义无穷序列收敛和发散的概念。其中的绝对值采用复绝对值。如：

定义 2.3.5 收敛 (Convergence)

复无穷序列 $\{a_n\}^\infty$ 收敛于 A, 也就是对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时，$|a_n - a_N| < \varepsilon$.

定理 2.3.6 Cauchy 收敛原理 (Cauchy's Convergence Theorem)

复无穷序列 $\{a_n\}^\infty$ 收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $m > N, n > N$, $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

也可以定义无穷级数的收敛和发散。

定理 2.3.7 Cauchy 收敛原理 (Cauchy's Convergence Theorem)

复无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$, 对任意 $p \in \mathbb{N}^*$, $|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$.

还可以定义函数列与函数项级数的收敛与发散：

定义 2.3.8 函数项级数 (Series of Functions)

定义在区间 D 上的一系列函数 $u_n(x)$ 组成以下形式：

$$f_n(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

称 f_n 为一个**函数列**，或者叫**函数项级数**。

习惯上一般记一个函数列为 f_n，记一个函数项级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. 但二者实际上是同一个事物。

当取定一个 x 的值后，其变为一个数项级数。我们考虑这个数项级数的敛散性。

定义 2.3.9 逐点收敛 (Pointwise Convergence)

设 $\sum u_n$ 是 D 上的一个函数项级数, 对 $x_0 \in D$, 若数列 $S_n(x_0)$ 是收敛的数项级数, 则称函数列 f_n 在点 x_0 处**收敛**；如果 $S_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的任意一点 x_0 都收敛，则称 $f_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上逐点收敛。

定义 2.3.10 一致收敛 (Uniform Convergence)

称定义在 D 上的函数项级数 f_n 在 D 上**一致收敛**于函数 f, 若:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall x \in D, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

记作 $f_n \rightrightarrows f$.

值得注意的是，这里的 N 要求与 x 无关，这便是一致收敛与普通的逐点收敛的根本区别。

推论 2.3.10.1 对函数列的 Cauchy 收敛原理 (Cauchy's Convergence Theorem for Sequences of Functions)

设 D 上的函数项级数 f_n, 则 f_n 在 D 上一致收敛当且仅当:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n_1, n_2 > N, |f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \varepsilon$$

推论 2.3.10.2 对函数项级数的 Cauchy 收敛原理 (Cauchy's Convergence Theorem for Series of Functions)

设 D 上的函数列 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 其在 D 上一致收敛当且仅当:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

在实数序列使用的各判别法在复数序列中也可以使用。例如：

定理 2.3.11 Weierstrass 判别法 (Weierstrass's Test)

若存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 使得

$$|u_n(x)| \leqslant a_n$$

在那区间 D 上恒成立，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在该区间上一致收敛。

现在我们来研究最简单的级数形式：幂级数：

定义 2.3.12 幂级数 (Power Series)

对于某个函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$，当其中的每一项 $u_n(z)$ 为 $a_n(z-z_0)^n$ 的形式时，称这种函数项级数为（一般的）**幂函数项级数**, 简称**幂级数**. 当 $z_0 = 0$ 时，即为

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{$\star$}$$

即通常而言的幂级数。

定理 2.3.13 Hadamard 定理 (Hadamard's Theorem)

对于每个幂级数($\star$), 其存在一个非负值 R, 称为它的收敛半径，满足：

1. 每一个复数 $|z| < R$ 都可以使幂级数绝对收敛。设 $0 \leqslant \rho < R$, 当 $|z| \in [0, \rho]$ 时，级数一致收敛；
2. 当 $|z| > R$ 时幂级数发散；

3. 当 $|z| < R$ 时的和是解析函数，根据一致收敛性，其导数可以逐项微分求得。

这个 R 由公式
$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$$
确定。

但是，在 $|z| = R$ 时，级数的敛散性是不明的，需要额外判断。

定理 2.3.14　Abel 第二定理 (Abel's Second Law of Power Series)

设幂级数($\star$) 的收敛半径为 R, 如果这个级数在 $z = R$ 处收敛，即
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$
收敛，那么函数
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
在 z 从复平面上的圆盘 $|z| < R$ 内趋近于 $z = R$ 时的极限等于级数在 $z = R$ 处的和，即
$$\lim_{\substack{z\to R\\ |z|<R}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

例　2.3.15　收敛半径为 1 时的 Abel 第二定理 ()

当数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛时，如果 z 趋近于 1 时保持 $\frac{|1-z|}{1-|z|}$ 有界，那么 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 也就趋近于 $f(1)$.

由于幂级数可以无限次求导，所以我们有解析函数的形式的幂级数定义：

定义 2.3.16 解析函数 (Analytical Function)
若函数在一点 z_0 的某邻域内可表示为收敛的幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

则称它在 z_0 处是解析函数。

在复数域上，解析函数与全纯函数完全等价。

3 作为映照的解析函数

3.1 度量空间与拓扑空间

为了研究清楚复函数的连续性问题，我们有必要引入拓扑学。在考察“任意近”这个定义时，对“近”这个概念如何给出依赖拓扑学。

定义 3.1.1 度量空间 (Metric Space)
集合 S 称为度量空间，对于每一个 $x\in S, y\in S$，定义了二元函数 $d(x,y)$ 满足：

1. 非负性：$d(x,y)\geqslant 0$;
2. 正定性：$d(x,y)=0\iff x=y$;
3. 对称性：$d(x,y)=d(y,x)$;
4. 三角形不等式：对于任意 $z\in S$, $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$.

这时就称 $d:S\times S\to\mathbb{R}$ 是**度量函数或距离**。

例 3.1.2 复数域上的度量空间 ()
复数域和定义在其上的复绝对值构成度量空间。

例 3.1.3 扩充复平面上的度量空间 ()

定义
$$d(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$$
为扩充复平面上的距离。

定义 3.1.4 范数 (Norm)

设一个定义在某数域 $\mathbb{F}$ 的线性空间 X 上的运算关系：$x \mapsto \|x\|$ 满足：

1. $\|x\| \geq 0$;
2. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
3. $\|kx\| = |k| \cdot \|x\|$, $k \in \mathbb{F}$;
4. $\forall y \in X$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

则称 $\|x\|$ 是 X 上的**范数**.

定义 3.1.5 赋范空间

称 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个**赋范空间**，若 $\|\cdot\|$ 是一种范数。

在复分析中，我们的所用的拓扑学概念都是由度量空间诱导产生。所以它具有很好的性质。

定义 3.1.6 开球 (Open Ball)

对于 $y \in S$, $\delta > 0$ 和 $x \in S$ 组成的集合 $\{x : d(x, y) < \delta\}$, 称为中心在 y, 半径为 δ 的开球。记作 $B(y, \delta)$.

定义 3.1.7 邻域 (Neighborhood)

称 $U \subseteq S$ 是 $x \in S$ 的邻域，当其包含开球 $B(x, \delta)$. 当将点 x 排除在外时，称为去心邻域。

定义 3.1.8 开集 (Open Set)

一个集合称为开集，如果它是它中所有元素的邻域。

定义 3.1.9 闭集 (Closed Set)

闭集是开集相对于全空间的补集。

定义 3.1.10 内部 (Interior)

集合 X 的内部是指包含 X 的最大开集。记作 $\operatorname{Int} X$.

定义 3.1.11 闭包 (Closure)

称集合 X 的闭包为包含 X 的最小闭集。一个点属于 X 的闭包，当且仅当它的所有邻域都与 X 有交集。闭包常记作 $\operatorname{Cl} X$.

定义 3.1.12 边界 (Bound)

称集合 X 的边界是其闭包减去其内部。一点属于边界，当且仅当它的邻域同时与 X 和 $\neg X$。记作 ∂X. $\partial X = \operatorname{Cl} X \setminus \operatorname{Int} X$.

性质 3.1.12.1 全集、空集的开闭 ()

全集和空集既是开集又是闭集。

定理 3.1.13 Jordan 曲线定理 (Jordan's Curve Theorem)

任何一条简单闭曲线都会将二维平面（如复平面 $\mathbb{C}$）恰好分成两个不相交的区域：一个有界的内部和一个无界的外部，并且这条曲线本身就是这两个区域的共同边界。

定义 3.1.14 拓扑空间 (Topological Space)

设非空集合 S 具有一个子集族 τ, 即 $\tau \subseteq \mathcal{P}(S)$, 若满足：

1. 包含空集和全集：$\varnothing \in \tau$, $X \in \tau$;

2. 对有限交运算封闭：$U_1, U_2, \cdots, U_k \in \tau \Longrightarrow U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k \in \tau$;
3. 对任意并运算封闭：对任意集合族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$，$A$ 是任意的指标集，都有 $\bigcup_{\alpha \in A}^n U_\alpha \in \tau$.

就称 (S, τ) 是一个**拓扑空间**。

性质 3.1.14.1　开集 (Open Set)

拓扑 τ 中的元素称为**开集**。在度量空间中也称为**区域**。

例　3.1.15　概念的实例

我们以 $\mathbb{R}$ 上的集合 $(0,1]$ 为例，那么：

- 其内部指的是 $(0,1)$;
- 其闭包指的是 $[0,1]$;
- 其边界指的是 $\{0,1\}$.

定义 3.1.16　子空间拓扑 (Topology Subspace)

设 (X, τ) 是拓扑空间，$Y \subseteq X$ 是一个子集，那么可以定义

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in X\}$$

这时 (Y, τ_Y) 构成一个拓扑空间，称为子拓扑空间，有时也叫相对的拓扑空间。

规定子空间拓扑是因为，子空间上的拓扑性质与原空间上可能存在不同：

例　3.1.17　相对开集 ()

如果将区间 $S = [0,1]$ 看作是 $\mathbb{R}$ 的子集，那么 $[0,1)$ 就是一个 S 上的开集，但不是 $\mathbb{R}$ 上的开集。

3.2　区域的连通性

首先我们可以想象，一个区间是连通的，当且仅当它由单一的片组成。为了更规范地表述，我们借用点集拓扑的概念:

定义 3.2.1　连通性 (Connectedness)
称一个集合 X 是连通的，如果它不能表示成两个不相交的非空开集的并。也就是说，对于子拓扑空间 (X,τ), X 是连通的，如果 $\nexists U,V\in\tau$ 使得 $U\cap V=\varnothing\wedge U\cup V=X$.

定义 3.2.2　几何意义下的道路连通性 (Path-Connectedness)
称全空间上的集合 X 是道路连通的，如果对该集合内的任意两点都有一条折线将其连通。

这只是直观上的定义。实际上道路连通的概念可以适用于任意集合：

定义 3.2.3　道路连通性 (Path-connectedness)
称平面上的集合 X 是道路连通的，如果对任意 $u,v\in X$, 都存在一个连续映射 $\varphi:[0,1]\to X$ 使得 $\varphi(0)=u,\varphi(1)=v$.

定理 3.2.4　道路连通蕴含连通 ()
如果一个拓扑空间是道路连通的，那么它一定是连通的。但反之不然。

然而，在某些良好性质的拓扑空间中，道路连通与连通是等价的。如实数线 $\mathbb{R}$, 复平面 $\mathbb{C}$, Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 等。

定义 3.2.5　最大连通分集 (Greatest Connected Component)

to be continued...

3.3 区域的紧致性

定义 3.3.1 完备度量空间 (Complete Metric Space)

称一个度量空间是完备的，当且仅当它的所有 Cauchy 序列是收敛的（即 Cauchy 收敛原理恒成立）。

定义 3.3.2 开覆盖 (Open Covering)

一个**开覆盖**是指一个开集族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}\subseteq\tau$，其中 A 是指标集，使得

$$X\subseteq\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha.$$

定义 3.3.3 有限子覆盖 (Finite Sub-covering)

如果存在一个有限的子集 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}\subseteq A$，其中 A 是指标集，使得

$$X\subseteq U_{\alpha_1}\cup U_{\alpha_2}\cup\cdots\cup U_{\alpha_n},$$

则称这个有限子集为一个**有限子覆盖**。

定义 3.3.4 紧致性 (Compactness)

称一个集合 X 是**紧致的**，如果 X 的每一个开覆盖都有一个有限子覆盖.

该性质也被称为 **Heine-Borel 性质**。

定理 3.3.5 紧致性蕴含完备性 ()

定理 3.3.6 紧致性蕴含有界性 ()

但是这还尚未达到我们要证的全部内容。规定一条更强的性质：

定义 3.3.7 全有界性 (Total-bounded)
集合 X 称为全有界的，如果对任意 $\varepsilon > 0$, X 都可以由有限个半径为 ε 的球覆盖住。

定理 3.3.8 紧致性的充要条件 ()
一个集合是紧致的，当且仅当它是完备的且全有界的。

应用于实数或复数上，就是:

例 3.3.9 Heine-Borel 定理 (Heine-Borel's Theorem)
$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 的一个子集是紧致的，当且仅当它是闭集且有界的。

与之相较，有另外的概念：

定义 3.3.10 聚点 (Accumulation Point)
聚点 x 是这样的点，其任意去心邻域内都包含一个集合 A 中的点。

定义 3.3.11 可数紧性 (Countable Compactness)
称一个集合 X 是可数紧的，当其中的任意序列都存在聚点（但不要求收敛）。这个性质也被称为 **Bolzano-Weierstrass 性质**. 在有些教材中，它也被简称为**列紧性**。

事实上，将上面定义中的序列改为无限子集也是一样的道理。唯一的区别在于，集合不能要求有重复元素。

定义 3.3.12 序列紧性 (Sequential Compactness)
称一个集合 X 是序列紧的，当其中的任意序列都存在收敛的子列。

这三个概念互相有差异，但是这是针对一般拓扑空间而言的。特别地，我们有：

定理 3.3.13 度量空间上的紧性 (Compactness over Metric Space)

在度量空间中，紧致性、可数紧性、序列紧性三者完全等价。

例 3.3.14 拓扑学视角下的实数系完备性公理 (Completeness of Real Numbers under Topology)

我们曾学过六条实数系统完备性公理：

- **确界原理 (Least Upper Bound Property)**：实数集的任何有上界的非空子集必有上确界（最小上界）。该公理体现实数的完备性与连通性。
- **闭区间套定理 (Nested Interval Theorem)**：如果有一系列闭区间套 $[a_n, b_n]$，满足 $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ 且 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，则存在唯一的实数属于所有闭区间。该公理也体现完备性，说明实数具有局部紧致性。
- **有限覆盖定理 (Heine-Borel Theorem)**：实数集的子集是紧致的当且仅当它是有界闭集。该公理直接反映了实数系统的紧致性。
- **聚点定理 (Bolzano-Weierstrass Theorem)**：实数集中的有界无限子集至少有一个聚点（极限点）。该公理反映实数系统的可数紧性。
- **Cauchy 收敛准则 (Cauchy's Convergence Criterion)**：一个实数序列收敛当且仅当它是 Cauchy 序列（即对于任意 $\epsilon > 0$，存在 N 使得对于所有 $m, n > N$，有 $|a_m - a_n| < \epsilon$。这条公理反映了实数集是一个完备的度量空间。
- **单调收敛定理 (Monotone Convergence Theorem)**：单调有界数列必定收敛。这条公理同样反映了实数的完备性，但更侧重

于序拓扑的性质。

3.4 函数的连续性

现在我们讨论的连续性，不再是在某一点处的连续，而是在某个定义域上的连续。

定理 3.4.1 函数连续性的充要条件 ()

一个函数是连续的，当且仅当它的值域中所有的开集的原像在定义域中都是开的。

一个函数是连续的，当且仅当它的值域中所有的闭集的原像在定义域中都是闭的。

定理 3.4.2 连续函数保持紧致性 ()

在连续函数作用下的，紧致集的像是紧致集。

推论 3.4.2.1 连续函数在紧致集上有最值 ()

连续函数在紧致集上一定具有一个最大值和一个最小值。

定理 3.4.3 连续函数保持连通性和道路连通性 ()

在连续函数作用下的，连通集的像是连通集，道路连通集的像是道路连通集.

定义 3.4.4 一致连续 (Uniformally Continuous)

设函数 f 定义在 X 上，X 上具有度量函数 $d(x, y)$. 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $x_1, x_2 \in X$, $d(x_1, x_2) < \delta$, $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ 都成立，就称 f 在 X 上一致连续。

今后我们称一种性质是**一致的**，指的是该性质可以用不含参数的等式或不等式表示。

定理 3.4.5 连续函数在紧致集上一致连续 ()

定义 3.4.6 拓扑映照 / 同胚映照 (Topological Mapping / homeomorphism)

称拓扑空间上的具有连续逆映射的连续双射为一个**拓扑映照/同胚映照**, 它保持原拓扑空间的性质，称为**拓扑性质**. 同胚的拓扑空间在拓扑性质上是不可区分的。

推论 3.4.6.1 拓扑等价的等价条件 ()

映射是同胚映射，当且仅当其保持开集的结构：其将任意的原像拓扑空间中的开集映射到像拓扑空间中的开集，其逆映射亦然。

3.5 共形映照

定义 3.5.1 解析函数 (Analytical Function)

设 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 是定义在复平面上的开集 Ω 上的复函数。如果 f 在 $\forall z_0 \in \Omega$ 都可导，就称 f 是解析函数。

定义 3.5.2 共形映照 (Conformal Mapping)

设 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 是定义在复平面上的开集 Ω 上的复函数。如果 f 在某点 $z_0 \in \Omega$ 处可导且 $f'(z_0) \neq 0$，则称 f 在 z_0 处是**共形的**。共形性保证了其具有局部的单调性和逆映射。

如果 f 在 Ω 的每一个点上都是共形的，则称 f 是 Ω 上的**共形映照**。

性质 3.5.2.1 常解析函数 ()

如果一个解析函数在某定义域 Ω 上导数恒为 0，那么它必定是常函数。

接下来我们把解析函数$f(z)$ 看作映照（也就是映射）：它将按某种规律将曲

线 γ 映射到曲线 γ'.

定义 3.5.3 弧微分 (Differential Arc)

设复平面内有曲线 γ 可以用参数方程 $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t), t\in[\alpha,\beta]$ 表示，如果导数 $z'(t)=x'(t)+\mathrm{i}y'(t)$ 存在且不为 0，那么弧 γ 在 $(x(t),y(t))$ 处具有切线，其方向由 $\arg z'(t)$ 确定。

定理 3.5.4 复合求导 ()

设包含在 Ω 内的曲线 $\gamma: z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t), t\in[\alpha,\beta]$, 并设 $f(z)$ 在 Ω 上有定义且连续。那么曲线 $w=w(t)=f(z(t))$ 将 γ 映照到 γ', 如果 $z'(t)$ 存在，那么 $w'(t)$ 存在，由下式确定：

$$w'(t)=f'(z)\cdot z'(t)$$

定理 3.5.5 保角性 ()

在上式中如果 $z_0=z'(t_0)\neq 0$, $f'(z_0)\neq 0$, 那么 $w'(t_0)\neq 0$, 即曲线 γ 在 $t=t_0$ 处有切线，其方向为：

$$\arg w'(t_0)=\arg f'(z_0)+\arg z'(t_0).$$

也就是说，只要满足导数不为 0，这个映照就保持在 z_0 处的所有直线的相对交角不变。这条性质称为保角性。

推论 3.5.5.1 解析函数的导数的几何意义 ()

在共形映照$f(z)$: $f'(z)\neq 0$ 下，无穷小线段 $\mathrm{d}z$ 旋转了 $\arg f'(z)$ 角度，并拉伸为原来的 $|f'(z)|$ 倍。这一点起源于复数的三角表示，这也是共形性的名称由来。

我们看到，在共形映照下，区域的长度和面积都会发生变化。现在将这置于严格的微积分基础上：首先，具有方程曲线 $\gamma: z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t), t\in[\alpha,\beta]$

的可微曲线的长度求法为

$$s(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} |\,\mathrm{d}z\,|.$$

像曲线的长度求法为：

$$s(\gamma') = \int_{\alpha}^{\beta} |f'(z(t))||z'(t)|\,\mathrm{d}t$$

平面区域的面积可以表示成 Riemann 二重积分：

$$S(D) = \iint\limits_{D} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

若 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 是可微的，那么根据二重积分的换元法，可得到在 $f(z)$ 的映照下，像的面积

$$S(D') = \iint\limits_{D} J_{f(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} |u_x v_y - v_x u_y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

根据 Cauchy-Riemann 方程，上式可写作

$$S(D') = \iint\limits_{D} |f'(z)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

3.6 线性分式变换

我们现在主要研究线性分式作为映照：

定义 3.6.1 线性分式 / 有理分式 ()

线性分式/有理分式指的是

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0) \tag{$\star$}$$

并根据极限的定义，约定

$$f(\infty) = \lim_{z \to \infty} f(z) = \frac{a}{c}; \qquad f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

其逆变换为

$$z = f^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

如果满足 $|ad-bc|=1$, 那么称这个分式是规范的。

性质 3.6.1.1　线性分式的矩阵表示 ()

如果采用一组齐次坐标来表示分式，即将 $(\star)$ 写作

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{az_1+bz_2}{cz_1+dz_2}$$

那么可以用矩阵表示线性变换

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

使用矩阵表示的好处在于将线性变换复合。

性质 3.6.1.2　线性分式的矩阵分解 ()

性质 3.6.1.3　线性分式变换是共形映照 ()

接下来我们用线性分式变换来研究射影几何：

定义 3.6.2　交比 (Cross Ratio)

在扩充平面上，任取不相等的 z_2,z_3,z_4 三点，存在唯一的线性分式变换可以将这三点映射到 $1,0,\infty$ 上。

如果 $z_2,z_3,z_4<\infty$, 那么该分式为

$$f(z)=\frac{\frac{z-z_3}{z-z_4}}{\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}}$$

如果 $z_2=\infty$, 那么

$$f(z)=\frac{z-z_3}{z-z_4}$$

如果 $z_3=\infty$, 那么

$$f(z)=\frac{z_2-z_4}{z-z_4}$$

如果 $z_4=\infty$, 那么

$$f(z)=\frac{z-z_3}{z_2-z_3}$$

在该线性分式映照下，点 z_1 的像称为 z_1,z_2,z_3,z_4 的交比，记作 (z_1,z_2,z_3,z_4).

性质 3.6.2.1 交比的线性不变性 (Linear Transformation Preserves Cross Ratio)

交比在线性分式变换下保持不变。也就是说，对任意线性分式变换 f 都有

$$(f(z_1),f(z_2),f(z_3),f(z_4))=(z_1,z_2,z_3,z_4).$$

性质 3.6.2.2 实交比 (Real Cross Ratio)

四点的交比为实数的充要条件是四点共圆或共线。

这表明在研究线性分式变换的时候我们无需区分圆与直线。事实上，二者在 Riemann 球面上都对应一个圆。

性质 3.6.2.3 直接推论：线性分式变换保持圆形 ()

线性分式变换将圆变为圆。

接下来我们研究广义对称性：

性质 3.6.2.4 关于三点的对称 ()

点 z 和 z^* 关于过三点 z_2,z_3,z_4 的圆 C 对称的充要条件是 $(z^*,z_2,z_3,z_4)=\overline{(z,z_2,z_3,z_4)}$.

性质 3.6.2.5 线性分式变换保持对称性 ()

定义 3.6.3 Apollonius 圆 (Apollonius Circle)
考虑如下形式的线性分式变换：

$$w = k\frac{z-a}{z-b}$$

此处 $z=a$ 对应于 $w=0$, $z=b$ 对应于 $w=\infty$. 所以 w 平面内所有过原点的直线

to be continued...

3.7 初等解析函数

接下来要将我们熟悉的实数函数（如指数、对数、三角函数）的定义域扩展到复数，同时尽可能保持其重要的代数性质和解析性。

定理 3.7.1 Euler 公式 (Euler's Formula)
复指数可以与三角函数建立关系：

$$\exp \mathrm{i}x = \cos x + \mathrm{i}\sin x$$

这个关系可以用复函数的幂级数展开来证明。

有了这个关系，我们就可以定义：

定义 3.7.2 指数函数 (Exponential Function)
定义函数 $f(z) = \exp z (z \in \mathbb{C})$ 为指数函数。即 $f(x+\mathrm{i}y) = \exp x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$. 即该函数满足

$$f : \begin{pmatrix} x & \overset{u}{\mapsto} & \exp x \cos y \\ y & \overset{v}{\mapsto} & \exp x \sin y \end{pmatrix}$$

通过计算

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \exp x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \exp x \sin y = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

可知该函数是解析函数。

计算其导数

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \exp x \cos y + \mathrm{i} \exp x \sin y = \exp z.$$

定义 3.7.3 正弦函数 (Sine)

根据 Euler 公式

$$\exp \mathrm{i}x = \cos x + \mathrm{i} \sin x$$

$$\exp -\mathrm{i}x = \cos -x + \mathrm{i} \sin -x = \cos x - \mathrm{i} \sin x$$

可得正弦函数的定义

$$\sin z = \frac{\exp \mathrm{i}z - \exp -\mathrm{i}z}{2\mathrm{i}}$$

可见，正弦函数是指数函数的有理分式。

定义 3.7.4 余弦函数 (Cosine)

根据 Euler 公式可得正弦函数的定义

$$\cos z = \frac{\exp \mathrm{i}z + \exp -\mathrm{i}z}{2}$$

可见，余弦函数也是指数函数的有理分式。

定义 3.7.5 正切函数 (Tangent)

根据

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

得到正切函数的定义

$$\tan z = -\mathrm{i}\frac{\exp \mathrm{i}z - \exp -\mathrm{i}z}{\exp \mathrm{i}z + \exp -\mathrm{i}z}$$

可见，正切函数也是指数函数的有理分式。

其余的几个三角函数 $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ 等都是次要的。都可以通过指数函数来表示。

定义 3.7.6　对数函数 (Logarithmic Function)
若 $w = x + \mathrm{i}y$, 那么总可以将其写成三角形式，根据 Euler 公式可以将其写成 $\exp z$ 的形式。这时就可以用 $\ln w$ 来表示 z. 也就是

$$\ln w = \ln |w| + \mathrm{i} \arg w (w \neq 0)$$

值得注意的是，**这是一个多值函数！**为了和一般的实对数区别，我们记作 $\mathrm{Log}\, z$. 这时的每一组值称为一个**解析分支**。如果我们取其中的一个分支，规定 $\arg w \in [0, 2\pi)$, 就可以保证其是单值的，这时可以使用 $\ln z$.

定义 3.7.7　反三角函数 (Inverse Trigonometric Function)
我们通过余弦函数的定义

$$\cos z = \frac{\exp \mathrm{i}z + \exp -\mathrm{i}z}{2} = w$$

反解 z, 可得它有根

$$\exp \mathrm{i}z = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$$

因此得到反余弦函数

$$z = \arccos w = -\mathrm{i} \ln \left(w \pm \sqrt{w^2 - 1} \right)$$

它同样也是多值函数。

同样可得反正弦函数

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2} - \arccos z.$$

定义 3.7.8 双曲函数 (Hyperbolic Function)

双曲函数的定义与实数时的情况一致：

$$\sinh z = \frac{\exp z - \exp -z}{2}$$
$$\cosh z = \frac{\exp z + \exp -z}{2}$$
$$\tanh z = \frac{\exp z - \exp -z}{\exp z + \exp -z}$$

性质 3.7.8.1 双曲函数与三角函数的关系 ()

当变量是纯虚数时，有：

$$\begin{aligned} \sinh \mathrm{i}y &= \mathrm{i}\sin y & \sin \mathrm{i}y &= \mathrm{i}\sinh y \\ \cosh \mathrm{i}y &= \cos y & \cos \mathrm{i}y &= \cosh y \\ \tanh \mathrm{i}y &= \mathrm{i}\tan y & \tan \mathrm{i}y &= \mathrm{i}\tan y \end{aligned}$$

定义 3.7.9 幂函数 (Power Function)

幂函数指所有形如 $w = z^\alpha(\alpha \in \mathbb{C})$ 的函数。定义为：

$$z^\alpha = \exp(\alpha \ln z)$$

这时，除非 α 是 $+$ 实数整数，否则幂函数都是多值函数。

定义 3.7.10 初等函数 (Primary Function)

称指数函数 $\exp z$ 和 $\ln z$ 通过有限次四则运算和有限次复合运算后得到的函数全体为**初等函数**. 由于这两个函数本身都是解析的，所以所有的初等函数都是解析函数。

由此便可以发现复函数的性质：与实数情况不同，所有的初等函数都可以用 $\exp z$ 和 $\ln z$ 表示而无需独立定义。

3.8 复函数视角下的场论

对于一般的实函数，我们可以研究其图像。但是对于复函数，该怎么画它的图像呢？我们先从解析函数说起。
例如，对于函数

$$w = f(z) = z^2$$

我们根据实部与虚部拆开，得到

$$w = f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) = (x + \mathrm{i}y)^2 = (x^2 - y^2) + \mathrm{i}(2xy)$$

这时自然就会想到，函数 $f(z)$ 将 z 平面的直线 $x = x_0$ 映射到 w 平面的曲线 $u_0(y) = u(x_0, y) = x_0^2 - y^2$, 将 z 平面的直线 $y = y_0$ 映射到 w 平面的曲线 $v_0(x) = v(x, y_0) = 2xy_0$. 根据解析函数的共形性，这两条曲线在 $f'(z) \neq 0$ 的地方是正交的。

定义 3.8.1 势函数与流函数 (Equipotential Function and Stream Function)
称解析函数$w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 对应于一个**复位势**，实部 $u(x, y)$ 称为势函数，虚部 $v(x, y)$ 称为流函数。这个命名来源于场论。

性质 3.8.1.1 势函数与流函数的正交性 ()
势函数与流函数在共形映照下的点是正交的。这一点可以通过 Cauchy-Riemann 方程证得。

由此，我们可以将原坐标系的网格映照到新坐标系下的一簇正交曲线网。这也为我们提供了一种表示作为映照的复变函数的方法（画网格）。
设不可压缩流体在平面上具有速度场 $\vec{v} = v_x + \mathrm{i}v_y$. 那么取路径微元 $\mathrm{d}s$, 其

在该处的径向和法向分别是

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \qquad \vec{n} = -\mathrm{i}\tau = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

$$v_\tau = \vec{v} \cdot \vec{\tau} = v_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + v_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

4 复积分理论

4.1 复函数的线积分

我们尽可能希望复积分能参照已有的实积分体系。因为实积分是我们较为熟悉的，其存在性已经证明完成。

定义 4.1.1 复函数在实区间上的线积分 ()

设 $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$, $t \in [a, b]$, 那么

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$$

这种积分具有实积分的所有性质，包括线性性与换元法。

性质 4.1.1.1 线积分的线性性 ()

性质 4.1.1.2 线积分的绝对值不等式 ()

推论 4.1.1.1 复函数在分段可微弧上的积分 ()

设分段可微的弧段 γ 具有参数方程 $z = z(t)$, $t \in [a, b]$. 如果 $f(z)$ 定义在 γ 上，且在 γ 上连续，那么可以得到积分

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

性质 4.1.1.3 积分的换元不变性 ()

实分析中的换元法仍然成立：

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(z(t(\tau)))z'(t(\tau))t'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

如果 $[a,b]$ 是一个复区间，总可以通过共形映照$t(\tau)$ 使得其映射到实区间 $[\alpha,\beta]$ 上。

性质 4.1.1.4 积分弧段的方向性 ()

如果 γ 反向，那么积分变为原来的负值：

$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

性质 4.1.1.5 积分弧段的可加性 ()

性质 4.1.1.6 共轭线积分 ()

还可以考虑关于 $\bar{z}$ 的线积分：

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\bar{z} = \overline{\int_\gamma \bar{f}(z)\,\mathrm{d}z}$$

我们可以得到复函数的线积分的计算法：

性质 4.1.1.7 对坐标的线积分（第二类曲线积分）()

由上面的记法可以发现：

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\bar{z}\right)$$

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\bar{z}\right)$$

所以便得到：设 $f = u + \mathrm{i}v$, 有

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_\gamma (u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x)$$

这样就将复函数的线积分写成了对坐标的积分的形式。

那么同样有第一类曲线积分：

性质 4.1.1.8 对弧长的线积分（第一类曲线积分）()

与上面的条件一致，有：

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s = \int_\gamma f(z)|\,\mathrm{d}z\,| = \int_a^b f(z(t))|z'(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

4.2 Cauchy-Goursat 定理

定理 4.2.1 线积分与路径无关的条件 ()

定义在区域 D 上的二元线积分 $\int_\gamma p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y$ 的值只依赖于 γ 两端点（即积分结果与路径无关）的充要条件是在 D 上存在一个函数 $F(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial F}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = q.$$

定义 4.2.2 全微分 / 正合微分 / 恰当微分 (Total Differential / Exact Differential)

我们称与路径无关的线积分中的积分表达式 $p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y$ 为一个**全微分 / 正合微分**. 可以写作

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,.$$

在什么条件下，$f(z)\,\mathrm{d}z = f(z)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}f(z)\,\mathrm{d}y$ 是全微分呢？

推论 4.2.2.1　复变函数作为全微分的条件 ()
连续函数 f 的积分 $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ 结果不依赖路径的充要条件是：f 是定义域 D 上的解析函数的导数。

例　4.2.3　正整数幂函数的闭曲线积分为 0 ()
对于所有的整数 $n \geqslant 0$, 只要 γ 是闭曲线，都有

$$\oint_\gamma (z-a)^n\,\mathrm{d}z = 0.$$

因为 $(z-a)^n$ 是 $\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ 的导数（是解析函数的导数），所以积分结果为 0.

既然要研究线积分，就不能避免定义积分的“方向”。如果是在一个闭曲线上积分，这就显得尤为重要。

定义 4.2.4　有向边界 (Directed Bound)
闭曲线的**正向**是这样选定的：设闭曲线围成的区域为 D, 那么沿着正向，D 总位于曲线的左侧。这称为 D 的有向边界。

定理 4.2.5　矩形区域上的 Cauchy 积分定理 ()
设函数 f 在矩形区域 R 上解析。那么

$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

证明:
引入记号

$$\eta(R) = \int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z$$

我们来考虑矩形 R, 将其分为四个全等的矩形 $R_{(1)}, R_{(2)}, R_{(3)}, R_{(4)}$, 那

么根据积分弧段的方向性，必然存在

$$\eta(R) = \eta(R_{(1)}) + \eta(R_{(2)}) + \eta(R_{(3)}) + \eta(R_{(4)})$$

那么就至少存在一个小矩形（假设是 $R_{(1)}$）满足

$$|\eta(R)| \leqslant 4|\eta(R_{(1)})|$$

记这个矩形是 R_1. 再重复分割操作，必然可以得到一系列 R_2, R_3, 并且

$$R \supset R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_n \supset \cdots$$

其具有：

$$|\eta(R_n)| \geqslant \frac{1}{4}|\eta(R_{n-1})|$$

因此

$$|\eta(R_n)| \geqslant 4^{-n}|\eta(R_n)| \tag{$*$}$$

当 n 充分大，R_n 将收敛于一点 z^*. 这时将 $f(z)$ 限制在 $|z - z^*| < \delta$ 上考虑，必然：对任意小的 ε, 存在 δ 满足

$$\left|\frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*)\right| < \varepsilon \tag{$\star$}$$

现在，假设 R_n 包含在了 $|z - z^*| < \delta$ 中，那么必然有

$$\int_{\partial R_n} \mathrm{d}z = 0, \qquad \int_{\partial R_n} z\,\mathrm{d}z = 0$$

根据这两个方程，我们就有

$$\eta(R_n) = \int_{\partial R_n} (f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*))\,\mathrm{d}z$$

再根据 $(\star)$ 可得到

$$\eta(R_n) \leqslant \varepsilon \int_{\partial R_n} |z - z^*| \cdot |\mathrm{d}z|.$$

这时右边的积分最多只能为矩形 R_n 的对角线长度 d_n 乘周长 C_n. 所以得到

$$\eta(R_n) \leqslant \varepsilon d_n C_n = 4^{-n}\varepsilon dC.$$

再和 $(*)$ 式比较，得到

$$\eta(R) \leqslant \varepsilon dC.$$

所以只能

$$\eta(R) = 0.$$

与之相比，更强的定理是：

定理 4.2.6 考虑间断点的矩形区域上的 Cauchy 积分定理 ()

设从矩形区域 R 上去掉有限个内点 ζ_i 得到区域 R'. f 在 R' 上是解析函数，如果对于所有 i 都满足

$$\lim_{z \to \zeta_i} (z - \zeta_i) f(z) = 0$$

那么就有

$$\int_{\partial R} f(z) \, \mathrm{d}z = 0.$$

解析函数在一条闭曲线上的积分并不总是为 0 的。为了讨论这些情形，我们先将目光放于一个开圆盘 $D : |z - z_0| < \delta$ 上:

定理 4.2.7 Cauchy-Goursat 定理 ()

设 f 在开圆盘 D 上解析。那么对于 D 上的任一条闭曲线 γ，都有

$$\oint_{\gamma} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$$

同样我们还可以得到更强的定理：

定理 4.2.8 考虑间断点的 Cauchy-Goursat 定理 ()

设 f 在一个区域 D' 上解析，这里的 D' 是上面所述的开圆盘 D 去掉

有限个点 ζ_i 得到的。并且这些点 ζ_i 满足

$$\lim_{z\to\zeta_i}(z-\zeta_i)f(z)=0$$

那么对于 D 上的任一条闭曲线 γ，都有

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0$$

将上面的定理汇总到一起，就有：

定理 4.2.9 Cauchy 积分定理 (Cauchy's Intergral Theorem)

设 f 在某种区域 D 上解析，那么对于 D 上的任一条闭曲线 γ，都有

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0$$

这里的区域 D 满足某种条件，这些条件我们将在之后一一看到。

4.3 环绕数与 Cauchy 积分公式

在正式开始环绕数之前，我们先介绍一个引理:

引理 4.3.1 线性分式在闭曲线上的积分 ()

如果一条分段可微的闭曲线 γ 不通过点 a, 那么积分

$$\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}$$

的值是 $2\pi\mathrm{i}$ 的整数倍数。

证明:

我们不妨设 γ 具有参数方程 $z=z(t)$, 其中 $t\in[\alpha,\beta]$. 定义函数

$$h(t)=\int_\alpha^t \frac{z'(t)}{z(t)-a}\,\mathrm{d}t$$

那么积分可以写成

$$\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \int_\alpha^\beta \frac{z'(t)}{z(t)-a}\,\mathrm{d}t = h(\beta)$$

$$h'(t) = \frac{z'(t)}{z(t)-a}$$

得到一个等式

$$z'(t) - h'(t)(z(t)-a) = 0$$

这时注意到

$$\left(\frac{z(t)-a}{\exp h(t)}\right)' = \frac{z'(t)-h'(t)(z(t)-a)}{\exp h(t)}$$

所以该导数等于 0，并且只在有限个点中没有定义，即 $\exp h(t) = 0$ 时。显然该函数是连续的，所以这是一个常解析函数。对其应用初值，即代入 $t = \alpha$, 可得

$$\exp h(t) = \frac{z(t)-a}{z(\alpha)-a}$$

又因为原先 γ 是闭曲线，满足 $z(\alpha) = z(\beta)$, 所以 $\exp h(\beta) = 1$. 这就说明了 $h(\beta)$ 是 $2\pi\mathrm{i}$ 的整数倍数。

现在我们可以定义：

定义 4.3.2 环绕数 / 指示数 (Winding Number / Indicating Number)

设复平面内一点 a 和一条曲线 γ, 定义

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}$$

的值为该点关于该曲线的**环绕数 / 指示数**.

环绕数就是该曲线在该点“绕了几圈”。如果为正，代表逆时针绕；如果为负，代表顺时针绕。

性质 4.3.2.1 环绕数的方向性 ()

显然有：

$$n(\gamma, a) = -n(\gamma, a).$$

性质 4.3.2.2 无界域环绕数等于 0 ()

如果把 $n(\gamma, a)$ 看作关于 a 的函数，那么当 a 位于 γ 组成的有界区域之外时，环绕数为 0.

定理 4.3.3 Cauchy 积分公式 (Cauchy's Intergal Formula)

设 $f(z)$ 在开圆盘 D 上解析，γ 是 D 中一条闭曲线，那么对于不在 γ 上的点 a, 必然有

$$n(\gamma, a)f(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, \mathrm{d}z$$

推论 4.3.3.1 表示公式 ()

Cauchy 积分公式在 $n(\gamma, a) = 1$ 时的情形叫做**表示公式**:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, \mathrm{d}z$$

推论 4.3.3.2 Cauchy 积分公式的参数化 (Cauchy's Intergal Formula)

如果把上面的 a 当作变量，那么得到公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta$$

4.4 高阶导数

我们来考察区域 D 上的解析函数 $f(z)$. 对其在某点 a 的邻域（开圆盘 $|z-a| < \delta$ 上）内确定一个圆 γ, 使用 Cauchy 积分公式，由于 $n(\gamma, a) = 1$,

可得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$$

只要这一积分可以在积分号下对 z 微分，那么就可以得到高阶导数。

定义 4.4.1 高阶导数 (High-ordered Derivatives)

限制在圆 γ 内时，在形式上，函数 $f(z)$ 的高阶导数为

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}$$

我们只要证明一下一个引理：

引理 4.4.2 递归导函数的解析性引理 ()

设 $\phi(\zeta)$ 是 γ 弧上的连续函数。那么函数

$$F_n(z)\int_\gamma\frac{\phi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^n}$$

在 γ 所确定的任意区域上都解析，且其导数为

$$F_n'(z)=nF_{n+1}(z)$$

证明:

先证明 $F_1(z)$ 是连续的。那么考虑不在 γ 上的一点 z_0, 并限制 δ 所确定的邻域 $|z-z_0|<\delta$ 不与 γ 相交。那么我们可以将其限制在 $|z-Z_0|<\frac{\delta}{2}$ 上，此时有

$$F_1(z)-F_1(z_0)=(z-z_0)\int_\gamma\frac{\phi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}$$

得到

$$|F_1(z)-F_1(z_0)=(z-z_0)|<|z-z_0|\frac{2}{\delta^2}\int_\gamma|\phi(\zeta)||\,\mathrm{d}\zeta\,|<\varepsilon$$

当 $z \to z_0$ 时，

$$\frac{F_1(z) - F_1(z_0)}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}$$

将趋近于 $F_2(z_0)$. 这就证明了 $F_1'(z) = F_2(z)$.

接下来使用归纳法证明：假设已有

$$F_{n-1}'(z) = (n-1)F_n(z)$$

我们计算

$$F_n(z) - F_n(z_0) = \left[\int_\gamma \frac{\phi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)(\zeta - z)^{n-1}} - \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^n}\right] + (z - z_0)\int_\gamma \frac{\phi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)(\zeta - z)^n}$$

可知该函数是连续的:令 $z \to z_0$, 那么该式应该等于 $n(z - z_0)F_{n+1}(z_0)$.

这就证明了上面所说的高阶导数的存在性。

定理 4.4.3 Morera 定理 (Morera's Theorem)

设 $f(z)$ 在区域 D 中有定义且连续，如果对任意 D 中的闭曲线 γ 都有 $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, 那么就可以判定 $f(z)$ 在 D 上是解析函数.

定义 4.4.4 Cauchy 估值 (Cauchy's Approximate)

在高阶导数的定义中，设圆 γ 的半径是 r, 并且在 C 上，$|f(\zeta)| \leqslant M$. 那么令 $z = a$ 可以得到一个估值

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant Mn!r^{-n}.$$

称为 **Cauchy 估值**.

定理 4.4.5 Liouville 定理 (Liouville's Theorem)

在整个平面内都有界的解析函数必定是常解析函数。

证明:

定理的假设是对所有的圆上都有 $|f(\zeta)| \leqslant M$. 那么自然可以取圆的半径 $r \to +\infty$, 在 Cauchy 估值中令 $n=1$, 这时便得到 $|f'(a)| \to 0$. 这表明 $f'(a)=0$ 恒成立。所以就是一个常解析函数。

可以用该定理证明复数域内的代数基本定理：

定理 4.4.6　代数基本定理 ()

复多项式在复数域内必有至少一个零点。

证明:

使用反证：设 $P(z)$ 是任一次数大于 0 的多项式，并假设其恒不等于 0. 则 $\dfrac{1}{P(z)}$ 就是全平面的解析函数。又因为 $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1}{P(z)} = 0$, 所以 $\dfrac{1}{P(z)}$ 也是一个有界函数。那么根据 Liouville 定理，它就是常解析函数。但常函数的次数是 0，矛盾。

4.5　Taylor 定理与解析函数的奇点

定义 4.5.1　可去奇点 (Removable Singularity)

如果函数 $f(z)$ 在点 z_0 的一个去心邻域 $0<|z-z_0|<R$ 内解析，且极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在且有限，则称 z_0 为 $f(z)$ 的**可去奇点**。

定理 4.5.2　解析函数的延拓定理 ()

设 D' 是区域 D 中弃去一点得到的，有一个解析函数$f(z)$ 定义在 D' 上，那么存在唯一的定义在 D 上的解析函数 $g(z)$, 称为**延拓函数**, 使之与 $f(z)$ 在 D' 上完全重合的充要条件是 $\lim\limits_{z} \to a(z-a)f(z)=0$.

推论 4.5.2.1　解析函数的延拓定理的推论 ()

解析函数的可去奇点可以通过延拓函数补全。

证明:

这一定理的必要性与唯一性都是很显然的。对于充分性，只需要在 a 周围作圆 C 使得 C 完全包含在 D 区域中。这时对 C 内部的点除去 $z=a$ 之外都满足

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)}$$

当 $z\neq a$ 时该函数等于 $f(z)$, 当 $z=a$ 时它等于一个确定的值 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-a)}$. 这就找到了延拓函数 $g(z)$.

例 4.5.3 函数 $\frac{\sin z}{z}$ 可去奇点的补全 ()

函数 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 在 $z=0$ 处未定义。但我们知道 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$，因此 $z=0$ 是一个可去奇点。如果我们定义一个新函数：

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z}, & z\neq 0\\ 1, & z=0\end{cases}$$

那么 $g(z)$ 在整个复平面上都是解析的。

定理 4.5.4 Taylor 定理 (Taylor's Theorem)

设解函数 $f(z)$ 在包含 a 点的区域 D 是解析函数, 那么

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}+f_n(a)(z-a)^n.$$

其中的 $f_n(z)$ 在 D 上也解析。

证明:

我们只要将上面的延拓定理应用到函数

$$F(z)=\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

上，该函数在 $z=a$ 上没有定义，但是这却是一个可去奇点。它满足 $\lim\limits_{z}\to a(z-a)f(z)=0$. 当 $z\to a$ 时 $F(z)$ 的极限就是 $f'(a)$. 因此，

我们找到了一个延拓函数

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, & z \neq a; \\ f'(a), & z = a. \end{cases}$$

使得

$$f(z) = f(a) + (z-a)f_1(a).$$

重复上述过程，可以找到一系列

$$f_1(z) = f_1(a) + (z-a)f_2(a)$$

$$\cdots$$

$$f_{n-1}(z) = f_{n-1}(a) + (z-a)f_n(a)$$

$z = a$ 时，各延拓函数都等于原函数的导数。那么得到对任意 $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

这就确定了所有的系数，将所有式子写在一起就得到

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + f_n(a)(z-a)^n.$$

我们已经讨论过一类奇点。自然可以发现另一类：

定义 4.5.5　极点 (Polar Singularity)

如果函数 $f(z)$ 在点 z_0 的一个去心邻域内解析，且极限 $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$，则称 z_0 为 $f(z)$ 的**极点**。

通过取倒数可以发现，这里的极点与有理分式的极点并无区别。为此我们新定义：

定义 4.5.6 亚纯函数 / 半纯函数 (Meromorphic Function)
在区域 D 上，一个除了极点之外处处解析的函数称为**亚纯函数/半纯函数**.
对任意 $a \in D$, 都存在一个 δ, 使得 $f(z)$ 在 $|z-a|<\delta$ 中解析，或者在 $0<|z-a|<\delta$ 中解析。

也就是说，亚纯函数允许其定义域内包含孤立的极点。可去奇点这时不看作真正的奇点，直接使用延拓函数补全即可。

推论 4.5.6.1 有理函数的亚纯性 ()
有理分式 $\frac{f(z)}{g(z)}$, 其中 $g(z)$ 不恒为 0, 那么它都是亚纯函数.

性质 4.5.6.1 亚纯函数对四则运算封闭 ()
亚纯函数的和、积、商仍然是亚纯的。

还有没有其他可能的奇点呢？我们来讨论函数在奇点处的行为

$$\lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha}|f(z)|, (\alpha \in \mathbb{R}) \tag{$\star$}$$

这时我们考虑，假如对某一 α 上式结果为 0, 那么上式对更大的 α 结果也为 0. 这时就会有：(i) 对任意 α, $(\star)$ 都为 0. 这就表明了 $f(z)$ 必须恒等于 0; (ii) 存在 $h \in \mathbb{Z}$, 对于 $\alpha > h$ 时 $(\star)$ 为 0, $\alpha < h$ 时 $(\star)$ 为 ∞; (iii) 对任意 α, $(\star)$ 都没有确定的值。
满足第 (ii) 条件的函数就是亚纯函数. 所以我们可以为极点定义

定义 4.5.7 阶数 ()
对于极点 a 考察极限

$$\lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha}|f(z)|, (\alpha \in \mathbb{R})$$

如果存在 $h \in \mathbb{Z}$, $\alpha > h$ 时该极限为 0, $\alpha \le h$ 时该极限为 ∞, 就称 h 为该极点的阶数。

定义 4.5.8 单极点 (Simple Singularity)
对于阶数为 1 的极点我们称之为**单极点**。

而对于 (iii) 条件，函数在该奇点处的行为是混乱的。我们就定义：

定义 4.5.9 本性奇点 (Essential Singularity)
如果函数 $f(z)$ 在点 z_0 的一个去心邻域内解析，且极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在也非无穷，则称 z_0 为 $f(z)$ 的**本性奇点**。

定理 4.5.10 本性奇点的 Weierstass 条件
z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点的充要条件是: $\forall A \in \hat{\mathbb{C}}$, 都能在 z_0 的邻域内找到一列收敛到 z_0 的序列 $\{z_n\}$, 使得 $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

定理 4.5.11 Picard 定理 (Picard's Theorem)
在任何一个本性奇点的任意小邻域内，函数几乎可以取到所有可能的复数值（最多排除一个例外值）无限多次。

例 4.5.12 函数 $\exp\frac{1}{z}$ 的本性奇点 ()
函数 $f(z) = e^{1/z}$ 在 $z = 0$ 处有一个本性奇点:
当 z 沿正实轴趋近于 0 时：$z \to 0^+$, $e^{1/z} \to +\infty$;
当 z 沿负实轴趋近于 0 时：$z \to 0^-$, $e^{1/z} \to 0$;
如果令 $z = \mathrm{i}t$, 沿虚轴趋近于 0，$e^{1/z} = e^{-\mathrm{i}/t}$ 是一个模为 1 的振荡函数.

4.6 同伦意义下的 Cauchy 定理

定义 4.6.1 光滑曲线 ()
设一条曲线 γ 由 $z = z(t) = \boldsymbol{L}(t)$ 确定, 其中 $\boldsymbol{L}(t)$ 是 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 的映射，如果其对 t 的全导数 $\boldsymbol{L}'(t) = x'(t) + \mathrm{i}y'(t)$ 存在且连续，就称其确定

的曲线 γ 为**光滑曲线**。

如果曲线由有限条光滑曲线拼接而成，就称其为**分段光滑曲线**。

定义 4.6.2 同伦 (Homotopic)

设定义在 D 上的复函数的参数表示式 $\boldsymbol{L}_0$ 和 $\boldsymbol{L}_1$ 都是 $[0,1] \to \mathbb{R}^2$ 的连续映射的曲线，并且其具有相同起点和终点。若存在一个二元连续映射 $\varphi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$:

1. $\varphi(t,0) = \boldsymbol{L}_0(t)$, $\varphi(t,1) = \boldsymbol{L}_1(t)$, $(0 \leq t \leq 1)$;

2. $\varphi(0,s) = \boldsymbol{L}_0(0) = \boldsymbol{L}_1(0)$, $\varphi(1,s) = \boldsymbol{L}_0(1) = \boldsymbol{L}_1(1)$;

那么就称曲线 $\boldsymbol{L}_0, \boldsymbol{L}_1$ 在 D 上**同伦**。称 φ 是 $\boldsymbol{L}_0$ 到 $\boldsymbol{L}_1$ 的**伦移**。

定义 4.6.3 同伦于零 / 零伦 (Homotopic to Zero)

如果上面定义的 $\boldsymbol{L}_1(t)$ 恒等于常数，那么就称 $\boldsymbol{L}_1$ 是零曲线。如果 $\boldsymbol{L}_0$ 同伦于 $\boldsymbol{L}_1$, 这时就称 $\boldsymbol{L}_0$ 同伦于零 / 零伦的。

性质 4.6.3.1 同伦是等价关系 ()

定义 4.6.4 单连通域 ()

如果一个区域 D 中只包含同伦于零的曲线，就称该区域是单连通域。

在同伦意义下，Cauchy 积分定理可以写成：

定理 4.6.5 同伦意义下的 Cauchy 积分定理 ()

如果两条曲线是同伦的，并且函数在它们之间包围的区域上是解析的，那么函数沿这两条曲线的积分是相等的。

设 $\gamma_0 : \boldsymbol{L}_0$ 和 $\gamma_1 : \boldsymbol{L}_1$ 是区域 D 内两条具有相同起点和终点的曲线，并且它们之间存在一个伦移 φ. 如果函数 f 在包含 $\boldsymbol{L}_0$ 和 $\boldsymbol{L}_1$ 之间的

区域上都是解析的，那么：

$$\int_{\gamma_0} f\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f\,\mathrm{d}z$$

上述定理在**同伦于零**的条件下的特例就是 Cauchy 积分定理.

如果将其扩展到多连通域，那么表示公式仍然成立：

推论 4.6.5.1 多连通域下的表示公式 ()

设 D 是复合闭路 Γ 围城的区域，是有界多连通域，若 f 在 $\operatorname{cl} D$ 上连续且在 D 上解析，那么

$$\forall\, z \in D, f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

由该定理可以看出：解析性对 f 的限制实际上十分严格，$f(\partial D)$ 的值已经直接决定了 $f(D)$ 的值。

推论 4.6.5.2 线积分的路径无关性 ()

若 f 在区域 D 上解析，那么对任意分段光滑曲线 γ, 积分

$$\int_{\gamma} f\,\mathrm{d}z$$

的值不依赖于 γ 的形状而只关心其路径的起止点。

定理 4.6.6 Cauchy-Pompeiu 定理 (Cauchy-Pompeiu's Theorem)

若 f 在单连通的区域 D 上解析，那么它在 D 内有一个**原函数** F, 即 $F' = f$. 该函数可以用 Cauchy 积分定理写成：

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

这里不必加任意常数 C, 因为它已经包含在积分号中。

定理 4.6.7 Newton-Leibniz 公式 (Newton-Leibniz's Formula)

如果在区域 D 上函数 F 是 f 的原函数，那么

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = F(z) - F(z_0)$$

那么，实积分的换元法和分部积分法就都可以使用。

例 4.6.8 利用表示公式求积分的实例 ()

计算：

$$I = \int_{|z|=1} \frac{z\,\mathrm{d}z}{(2z+1)(z-2)}$$

我们按照多连通域下的表示公式凑出形式：

$$I = \int_{|z|=1} \frac{\frac{z}{2z-4}}{z+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot \left.\frac{z}{2z-4}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\pi\mathrm{i}}{5}.$$

4.7 同调意义下的 Cauchy 定理

定义 4.7.1 单连通域（扩充复平面上的定义）(Simple Connected Field)

如果一个区域关于整个扩充平面的补集是连通的，就称该区域是单连通域。

例 4.7.2 几种单连通域 ()

单位圆盘、半平面、平行的带域都是单连通域。

如果取一般复平面，平行的带域关于复平面的补集是不连通的。这也就看出取扩充平面这一定义的重要性。

性质 4.7.2.1 线积分的分段可加性 ()

设 γ_i 是一系列弧 γ 的分段，$\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n=\gamma$, 那么以下等式成立：

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n} f\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma_1} f\,\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2} f\,\mathrm{d}z+\cdots+\int_{\gamma_n} f\,\mathrm{d}z$$

由于右边的积分无论如何组合都有意义，所以我们定义左边：

定义 4.7.3 链 (Chain)

称表示方式 $\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n$ 为**链**。链可以表示若干曲线。如果链可以表示若干条闭曲线，就称该链为**闭链**。

性质 4.7.3.1 闭链上的正合微分结果为 0 ()

定理 4.7.4 单连通的充要条件 ()

区域 D 单连通当且仅当对 D 内的所有的闭链 γ 和所有的 $a\notin D$ 都有环绕数$n(\gamma,a)=0$.

在这些定义下，我们曾经熟悉的复函数可以写为：

定理 4.7.5 单连通域的 Cauchy 积分定理 (Cauchy's Intergal Theorem)

如果函数 f 是一个单连通区域 D 上的解析函数，那么对于 D 内任意一条闭合可求长曲线 γ，都有：

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0$$

这就给出了原先定理中对区域 D 的要求：D **必须是单连通的**。

这表明 Cauchy 积分严重依赖 U 的拓扑性质。例如，我们可以说明对于不

是单连通区域的 D, Cauchy 积分定理一定不生效：

反例 4.7.6 利用非单连通的 Cauchy 积分定理的一个反例 ()

假如 D 不是单连通域，那么存在闭链 $\gamma \subset D$, $a \notin D$, 使得 $n(\gamma, a) \neq 0$. 令 $\frac{1}{z-a}$ 在 D 上解析，考虑积分

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2\pi \mathrm{i} n(\gamma, a) \neq 0.$$

能否得到更为一般的积分定理呢？考虑 Cauchy 积分定理与环绕数脱不开干系，环绕数又可以帮我们确定单连通性，所以在环绕数上做文章：

定义 4.7.7 同调于零 / 零调 (Homologous to Zero / Null Homology)

区域 D 中的 γ 称为关于 D **同调于零/零调**，如果对于 D 的补集中的任意点 a 都有 $n(\gamma, a) = 0$.

现在可以给出：

定理 4.7.8 同调意义下的 Cauchy 积分定理 (Cauchy's Intergral Theorem Under Homology)

设 D 是复平面 $\mathbb{C}$ 中的一个开集，函数 f 在 D 上是解析函数。那么，对于 D 中任何一个闭链 γ, 如果 γ 在 D 中是同调于零的，则有：

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

同时，正合微分的性质可以写为：

性质 4.7.8.1 局部正合微分的性质 ()

如果一个微分 $p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y$ 在 D 上的每个点的邻域都是正合微分, 那

么对于 D 中任意的同调于零的闭链 γ, 都有

$$\oint_\gamma p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y = 0.$$

如果想从更高级别的视角理解，我们曾经学过

定理 4.7.9 Stokes 定理 (Stokes' Theorem)

对于微分形式 ω 和一个带边界的微分流形 M, 有

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$$

闭链 γ 是一维的闭合流形，那么就存在 M 使得 $\partial M = \gamma$. 而 ω 是正合微分，那么设 $\omega = \mathrm{d}\eta$, 将 Stokes 定理应用在其上：

$$\oint_\gamma \omega = \oint_{\partial M} \mathrm{d}\eta = \int_M \mathrm{d}(\mathrm{d}\eta) = \int_M 0 = 0$$

由此可以得到：

性质 4.7.9.1 正合微分的积分路径无关性 ()

如果从有两条路径 γ_1 和 γ_2 有相同的起止点，那么闭合路径 $\gamma_1 - \gamma_2$ 的积分为零，即 $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$。

这就是 Cauchy 积分定理在复分析中成立的根本原因: 全纯函数的微分在该条件下是正合的。

定义 4.7.10 多连通域 ()

将 Cauchy 积分定理用于多连通域，就得到：

定理 4.7.11 复合闭路定理 (Combined Closed-Circuit Theorem)

设 C 是一条简单闭曲线，$C_1, C_2, \ldots, C_n$ 是包含在 C 内部的 n 条互不包含也互不相交的简单闭曲线。如果函数 $f(z)$ 在以 $C, C_1, \ldots, C_n$ 为边界的多连通区域 D 上解析，且在闭区域 $\overline{D}$ 上连续，则有：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z$$

其中要求所有曲线都取正方向积分。

与同伦相比，同调关注的是**边界**。它不关注具体曲线是怎么回事，不关注其中的连续变形，只关心这个区域的整体性质。如果满足这条性质就必然导致环路积分结果为 0.

Ai 有一个生动的比喻:

想象区域 D 是一个湖泊，湖中有岛屿（也就是洞）。闭曲线 C 是湖面上的一条闭合的绳索:

同伦问的是：我能否在不离开水面、不越过岛屿的前提下，慢慢地拉动绳索，把它收拢成一个点？

- 如果能，积分就是零。
- 如果不能（比如绳索套住了一个岛），积分就可能不是零。

同调问的是：这条绳索是否是某个完全在水面上的薄膜的边界？

- 如果是（比如绳索围成一个水泡），积分就是零。
- 如果不是（比如绳索套住了一个岛，任何以它为边的薄膜都必然要覆盖岛或离开水面），积分就可能不是零。

在 Cauchy 积分定理的框架下，同伦和同调从两个不同的角度——连续变形和边界关系出发，得出了相同的强大结论：解析函数在“没有包围奇点”的闭曲线上的积分为零。它们共同构成了我们理解复分析乃至整个现代数学

中“全局”与“局部”关系的基石。同伦更几何直观，而同调更代数强大，两者相辅相成。

4.8 留数定理

我们先来以一个积分为例：

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^2}$$

这里规定 C 是一个位于上半个复平面的半圆弧和其直径组成的闭链，要使用 Cauchy 积分定理计算该积分，就需要使得积分区域内不含奇点。但是我们发现这个函数有 $z=\pm\mathrm{i}$ 两个 2 阶的极点。那么将上半平面中的极点 $z=\mathrm{i}$ 使用一个半径为 ρ 的小圆挖去，积分就可以写成：

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^2} = \int_{\Gamma_\rho} \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^2} + \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$$

如果令 C 的半径趋于 $+\infty$, 就会发现上式左边趋于 0; 再令 ρ 趋于 0, 即可发现函数在极点处的积分是一个确定的数，为 $\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$. 这反映了函数的奇点处的积分性质的不同之处，且这个数对于计算积分至关重要。为此我们发明了“留数”这个名词：

定义 4.8.1　留数 (Residue)
设 $f(z)$ 在 $z=a$ 处有孤立奇点，一个复数 R 使得函数 $f(z)$ 在去心邻域 $0<|z-a|<\delta$ 上是某一单值解析函数的导数，这样确定的复数 R 就称为 $f(z)$ 在 $z=a$ 的留数。记作 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$. 这种记法就默认了 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点。

性质 4.8.1.1　留数与积分的关系 ()
函数

$$f(z) - \frac{\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)}{z-a}$$

的周期为 0.

定理 4.8.2 留数定理 ()

设 $f(z)$ 在区域 D 上除去 n 个孤立奇点 a_j 之外处处解析。那么对于 D 中的任意的不通过 a_j 的同调于零的闭链 γ, 以下式子成立：

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{j=1}^{n}n(\gamma,a_j)\operatorname*{Res}_{z=a_j}f(z)$$

证明:

我们回忆曾经的 Cauchy 积分公式：

$$n(\gamma,a)f(a)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$$

要求 γ 在 D 上同调于零且 $f(z)$ 是解析函数. 设 a_j 的去心邻域 $0<|z-a_j|<\delta_j$ 上的闭圆环 C_j 半径小于 δ_j, 记

$$P_j=\int_{C_j}f(z)\,\mathrm{d}z$$

则留数的定义为：

$$\operatorname*{Res}_{z=a_j}f(z)=\frac{P_j}{2\pi \mathrm{i}}$$

由于 γ 关于 D 同调于零，那么就有同调关系

$$\gamma\sim\sum_{j}^{n}n(\gamma,a_j)C_j\sim 0$$

根据同调意义下的 Cauchy 积分定理，可得

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{j}^{n}n(\gamma,a_j)\int_{C_j}f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{j}^{n}n(\gamma,a_j)P_j=2\pi \mathrm{i}\sum_{j}^{n}n(\gamma,a_j)\operatorname*{Res}_{z=a_j}f(z).$$

留数定理的好处在于，它将复函数的线积分变为了只对奇点的留数有关的计算：对于本性奇点, 留数通常难以直接计算。但是对于极点来说就十分简单：

推论 4.8.2.1　极点的留数的求法 ()

设 $f(z)$ 在区域 D 上除去 h 阶极点 a 之外解析，这时在 $0 < |z-a| < \delta$ 的邻域内 $f(z)$ 可以展开成

$$f(z) = B_h(z-a)^{-h} + \cdots + B_1(z-a)^{-1} + \varphi(z)$$

那么 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = B_1$.

特别地，如果是单极点，那么 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = (z-a)f(z)\Big|_{z=a}$.

反例 4.8.3　极点是 ∞ 时的特殊情形

公式 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = (z-a)f(z)\Big|_{z=a}$ 常不适用于极点 ∞.

即使 ∞ 是可去奇点，$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$ 也可能不为 0.

推论 4.8.3.1　极点留数的 L'Hospital 法则

设 $f = \frac{\varphi}{\psi}$ 在 a 处有极点，那么

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

如果还是极点，即 a 是 φ, ψ 的 n, $n+1$ 阶零点，那么

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \to a} \frac{(z-a)\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{(n+1)\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n+1)}(a)}$$

定义 4.8.4　围线 ()

一个闭链 γ 称为区域 D 的围线，如果对任意 $a \in D$, $n(\gamma, a) = 1$, 对任意 $a \notin D$, $n(\gamma, a) = 0$ 或者 $n(\gamma, a)$ 没有定义。

在这个定义下的留数定理可以写成：

推论 4.8.4.1 已确定围线的留数定理 ()

设 $f(z)$ 在区域 D 上除去 n 个孤立奇点 a_j 之外处处解析。那么对于 D 的不通过 a_j 的围线 γ, 以下式子成立：

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z)$$

Cauchy 积分公式可以看作留数定理的特例：

推论 4.8.4.2 留数意义下的 Cauchy 积分公式 ()

设 $f(z)$ 在开集 D 上解析，γ 是 D 中一条闭曲线，那么对于不在 γ 上的点 a, 必然有

$$n(\gamma, a) f(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$$

这是因为函数 $\frac{f(z)}{z-a}$ 在 $z=a$ 处有一个单极点，那么在该处的留数就是 $f(a)$, 环绕数是 1, 得到这个公式。

如果奇点出现在了积分区域的边界，那么留数定理就要也随之推广：

定理 4.8.5 推广的留数定理 ()

设 D 是一个区域，由光滑曲线 γ 围成，$t_0 \in \partial D$, 函数 $f(z)$ 在 $D \backslash \{t_0\}$ 上都是连续的，但 t_0 是一个奇点，这时留数定理写成：

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \theta \mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=t_0} f(z).$$

θ 是 γ 在 t_0 处的张角大小，在此情形下，我们可以定义广义的环绕数:

$$n(\gamma, t_0) = \frac{\theta}{2\pi}$$

例 4.8.6 使用留数定理计算复积分的例子 ()

计算：

$$I=\int_{|z|=1}\frac{4z\,\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(z^4+6z^2+1)}$$

先作代换 $w=z^2$: 这时积分区域 $\gamma:|z|=1$ 要变成两圈的 $|w|=1$;

$$I=\frac{2}{\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{\mathrm{d}w}{w^2+6w+1}=\frac{2}{\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{\mathrm{d}w}{(w-(-3-\sqrt{8}))(w-(-3+\sqrt{8}))}$$

在 $\gamma:|w|=1$ 内显然只有一个一阶极点 $w=-3+\sqrt{8}$: 计算留数：

$$\operatorname*{Res}_{w=-3+\sqrt{8}}f(w)=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

而 $n(\gamma,-3+\sqrt{8})=2$. 从而

$$I=\frac{2}{\mathrm{i}}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot 2\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pi.$$

利用留数定理可以计算某些实积分：例如对于三角函数的有理积分

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

其中 $R(x,y)$ 是有理函数。那么只需要作代换

$$z=\exp\mathrm{i}t$$

即可。

例 4.8.7 计算有理实三角积分的例子 ()

计算：

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta},\quad a>1;$$

作代换：

$$z=\exp\mathrm{i}t$$

那么上式变为对 z 的函数：

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

所以

$$I = -\mathrm{i}\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z\left(a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)} = -2\mathrm{i}\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + 2az + 1} = -2\mathrm{i}\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

其中

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2 + 1}, \qquad z_2 = -a - \sqrt{a^2 + 1}$$

这里的 $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ 都是单极点。并且 $|z_1| < 1$, $z_2 > 1$, 只有 z_1 在该闭链 $C : |z| = 1$ 中。根据留数定理：

$$I = (2\pi\mathrm{i})(-2\mathrm{i}) \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{4\pi}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

我们在学习反常实积分时有一个概念：

定义 4.8.8 Cauchy 主值 (Cauchy’s Principal Value)

若极限

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在，则称之为反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的 **Cauchy 主值**. 记作

$$\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

现在我们来计算反常积分及其 Cauchy 主值。主要有以下几类：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos(ax)\mathrm{d}x, \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin(ax)\mathrm{d}x$$

其中 $R(x)$ 是有理函数，通常是分式，为了保证积分收敛。这时候采用的方法是化为复指数函数：

$$\int_{\gamma} R(z)\exp\mathrm{i}z\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos x\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin x\,\mathrm{d}x$$

为了使用留数意义下的 Cauchy 积分公式，关键的一步在于将实变量三角积分转化为复变量在闭合路径上的积分：
选择 $C = C_1 + C_2$: C_1：实轴上 $[-r, r]$ 的线段和 C_2：上半个复平面上以 r 为半径的半圆弧组成的闭链。这时令 $r \to +\infty$, 即可得到 Cauchy 主值：

$$\int_{C_1} R(z) \exp \mathrm{i} z \, \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos(ax) \mathrm{d}x + \mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin(ax) \mathrm{d}x$$

并且由于最终 C_2 会重合为无穷远点 ∞, 所以显然有

$$\int_{C_2} R(z) \exp \mathrm{i} z \, \mathrm{d}z \to 0$$

这就表明了

推论 4.8.8.1 利用留数计算反常积分的方法 ()

基于上述讨论我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos(ax) \mathrm{d}x + \mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin(ax) \mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{i} \sum_{y>0} \operatorname*{Res}_{y>0} (R(z) \exp \mathrm{i} z).$$

例 4.8.9 计算实三角函数的反常积分的例子 ()

计算：

$$I = \mathrm{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} \, \mathrm{d}x$$

只需令

$$g(z) = \frac{\exp 2\mathrm{i}z}{z^2 + 1}$$

仍然选择上面所说的积分闭链 C, 那么

$$\mathrm{Re} \left(\lim_{r \to +\infty} \oint_C g(z) \, \mathrm{d}z \right) = I.$$

求取 $g(z)$ 的极点与留数：

$$g(z) = \frac{\exp 2\mathrm{i}z}{(z + \mathrm{i})(z - \mathrm{i})}$$

极点位于 $z = \pm i$, 但我们只取在上半平面的极点 $z = i$ 即可：

$$\underset{z=i}{g(z)} = \left. \frac{\exp 2\mathrm{i}z}{z + i} \right|_{z=i} = \frac{\exp(-2)}{2\mathrm{i}}$$

使用留数意义下的 Cauchy 积分公式：

$$I=\oint_C g(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{y>0}\operatorname*{Res}_{y>0}g(z)=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\exp(-2)}{2\mathrm{i}}=\frac{\pi}{\mathrm{e}^2}.$$

如果积分路径 C 包含了实的极点，便不再符合 Cauchy 积分公式发适用条件，这时需要用小圆弧绕过极点：

引理 4.8.10　绕行引理 ()

如果 $z=a$ 是 $f(z)$ 的一个单极点，那么当以小半圆弧 C_δ 绕过它时（逆时针方向），有：

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}f(z)\mathrm{d}z=\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)$$

与上面的计算方法合在一起就是：

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos(ax)\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin(ax)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{y=0}\operatorname*{Res}_{z=a}\left(R(z)\exp\mathrm{i}z\right)+\pi\mathrm{i}\sum_{y>0}\operatorname*{Res}_{z=a}\left(R(z)\exp\mathrm{i}z\right).$$

例　4.8.11　计算含有实极点的实三角函数的反常积分的例子 ()

计算 Dirichlet 积分：

$$I=\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

仍然采用上面的方法：令

$$g(z)=\frac{\exp\mathrm{i}z}{z}$$

注意到极点位于 $z=0$ 处，选取闭链 C 时在 $z=0$ 使用一极小的半径 δ 的半圆弧绕行。如果从复平面实轴上方绕行，这时闭链当中没有奇点，所以

$$\oint_C\frac{\exp\mathrm{i}z}{z}\mathrm{d}z=\left(\int_{C_1\setminus C_\delta}+\int_{C_\delta}+\int_{C_2}\right)\frac{\exp\mathrm{i}z}{z}\mathrm{d}z=0$$

这里，C_2 上的积分是 0 不变，$C_1\backslash C_\delta$ 就是我们要求的积分 I, 在 C_δ 上的积分是 $-\pi\mathrm{i}$, 由于我们顺时针绕行所以多了负号；

那么原积分

$$I = \operatorname{Im}\int_{C_1\backslash C_\delta}\frac{\exp\mathrm{i}z}{z} = \pi.$$

例 4.8.12 计算特殊积分的例子 ()

计算：

$$I = \int_0^\pi \ln\sin x\,\mathrm{d}x$$

根据复三角函数的定义：

$$\sin z - \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\exp\mathrm{i}z - \frac{1}{\exp\mathrm{i}z}\right)$$

变形，得到：

$$1-\exp(2\mathrm{i}z) = -2\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}z)\sin z$$

根据

$$1-\exp(2\mathrm{i}z) = 1-\exp(-2y)(\cos 2x+\mathrm{i}\sin 2x)$$

可知，只有当 $y\le 0$, $x = n\pi$ 时是实数，这时对顶点 $0, \pi, \pi+\mathrm{i}Y, \mathrm{i}Y$ 的矩形使用 Cauchy 积分定理，使用小圆弧绕行避开 $0, \pi$ 两点。

to be continued...

4.9 局部映射与幅角原理

我们从证明解析函数的零点个数公式开始：

定理 4.9.1 零点的环绕数定理 ()

设函数 $f(z)$ 是开圆盘 D 上的解析函数且不恒等于 0, z_i 是 $f(z)$ 的零点，各个零点按照阶数重复计算，那么对于 D 上每一条不通过零点

的闭曲线 γ, 都有

$$\sum_{i=1}^{n} n(\gamma, z_i)\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$$

这里的求和只有有限项不为 0.

证明:

对函数 $f(z)$ 反复使用 Taylor 定理, 得到

$$f(z) = (z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)g(z)$$

这里的 $g(z)$ 是 D 上的解析函数且不恒为零。计算 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的导数：使用对数求导法可得

$$\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \cdots + \frac{1}{z-z_n} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

由 Cauchy 积分定理可得

$$\oint_{\gamma}\frac{g'(z)}{g(z)} = 0$$

再根据环绕数的定义

$$n(\gamma, z_1) + n(\gamma, z_2) + \cdots + n(\gamma, z_n) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$$

即得到证明。

推论 4.9.1.1　零点的环绕数定理的解释 ()

如果我们设 $w = f(z)$, 它将 γ 映照为 w 平面的 Γ, 那么就有

$$\int_{\Gamma}\frac{\mathrm{d}w}{w} = \int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z\,.$$

所以在该平面中，环绕数可以表示为

$$n(\Gamma, 0) = \sum_{i=1}^{n} n(\gamma, z_i)$$

推论 4.9.1.2 参数化的零点的环绕数定理 ()

设 a 是任意一复数，设 $f(z)-a$ 的根是 z_j, 记作 $z_j(a)$, 那么就有

$$\sum_{j=1}^{k} n(\gamma, z_j(a)) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,\mathrm{d}z$$

同时也有

$$n(\Gamma, a) = \sum_{j=1}^{k} n(\gamma, z_j(a))$$

定理 4.9.2 开圆盘中的零点个数定理 ()

设 $f(z)$ 在 z_0 的领域上解析，$f(z_0)=w_0$, 函数 $f(z)-w_0$ 在 $z=z_0$ 处有一 n 阶零点，那么对任意小的 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta>0$, 使得 $|a-w_0|<\delta$ 时，方程 $f(z)-a$ 在开圆盘 $|z-z_0|<\varepsilon$ 上恰好有 n 个根。

立刻得到两个我们之前尚未一般证明的性质：

推论 4.9.2.1 解析函数的拓扑保持性 ()

非常数的解析函数将开集映照到开集。

推论 4.9.2.2 解析函数的共形性 ()

如果解析函数在 z_0 有 $f'(z_0)\neq 0$, 那么它是共形映照，也是同胚映照。

定理 4.9.3 极值定理 ()

1. 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 上解析且不为常数，那么 $|f(z)|$ 在 D 中没有极大值。
2. 如果函数 $f(z)$ 在有界闭集 E 上解析且不为常数，那么 $|f(z)|$ 的极大值出现在 E 的边界上。

推论 4.9.3.1 辐角原理 (Argument Principle)
设 $f(z)$ 是 D 上的亚纯函数, 具有 m 个零点 a_j 和 n 个极点 b_k, γ 是 D 上的同调于零的不过 a_j 与 b_k 的闭链，有

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, a_j) - \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, b_k)$$

其中，重零点与重极点要按阶数计算。

如果将上式的零点与极点参数化，得到：

推论 4.9.3.2 参数化的辐角原理 ()
设 $f(z)$ 是 D 上的亚纯函数, 具有 m 个零点 a_j 和 n 个极点 b_k, γ 是 D 上的同调于零的不过 a_j 与 b_k 的闭链，$g(z)$ 是定义在 D 上的解析函数, 有

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, a_j)g(a_j) - \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, b_k)g(b_k).$$

其中，重零点与重极点要按阶数计算。

4.10 调和函数与 Poisson 积分

从某种意义上讲，复分析实际上就是一对共轭调和函数上的实分析。to be continued...

5 函数的级数展开与因子分解

5.1 Weierstrass 定理

在之前的章节中我们研究幂级数，主要是为了定义复数域上的初等解析函数。其上的定理成立：

定理 5.1.1 Hadamard 定理 (Hadamard's Theorem)

对于每个幂级数, 其存在一个非负值 R, 称为它的**收敛半径**，满足：

1. 每一个复数 $|z| < R$ 都可以使幂级数绝对收敛。设 $0 \leqslant \rho < R$, 当 $|z| \in [0, \rho]$ 时，级数一致收敛；
2. 当 $|z| > R$ 时幂级数发散；
3. **当** $|z| < R$ **时的和是解析函数**，根据一致收敛性，其导数可以逐项微分求得。

这个 R 由公式

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$$

确定。

但是，在 $|z| = R$ 时，级数的敛散性是不明的，需要额外判断。

反例 5.1.2 收敛半径处的不确定性

幂级数在收敛半径的某处发散，其和函数在此处未必不解析：

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \cdots + z^n + \cdots \quad (|z| < 1)$$

在 $z = -1$ 的情形；

幂级数在收敛半径的某处收敛，其和函数在此处不一定解析：

$$(1-z)\ln(1-z) + z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n(n+1)}$$

在 $z = 1$ 的情形。

定理 5.1.3 Abel 第二定理 (Abel's Second Law of Power Series)

设幂级数(⋆) 的收敛半径为 R, 如果这个级数在 $z=R$ 处收敛，即

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

收敛，那么函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

在 z 从复平面上的圆盘 $|z|<R$ 内趋近于 $z=R$ 时的极限等于级数在 $z=R$ 处的和，即

$$\lim_{\substack{z\to R\\ |z|<R}} f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

定理 5.1.4 一致收敛保持解析性 (Uniform Convergence Preserves Analyticality)

设 f_n 是定义在一簇开集 D_n 上的解析函数，函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上收敛于函数 $f(z)$, 且在 D 的任意紧致子集上一致收敛于函数 $f(z)$, 那么 $f(z)$ 是解析函数，并且 $f_n'(z)$ 在 D 的任一紧致子集上都一致收敛于 $f'(z)$.

例 5.1.5 一致收敛的解析性实例 ()

我们取 $f_n(z)=\frac{z}{2z^n+1}$, 取圆盘 $|z|<1$ 作为开集 D, 那么在这个圆盘中显然有 $\lim\limits_{z\to\infty} f_n(z)=z$.

定理 5.1.6 Weierstrass 定理 (Weierstrass' Theorem)

将上述的定理写成函数项级数的形式，即得到 Weierstrass 定理：

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 的每一项都是解析函数, 且在 D 的任意紧致子集上一致收敛, 那么级数的和函数 $f(z)$ 在 D 上是解析函数，且可以逐项微分。

定理 5.1.7 Hurwitz 定理 (Hurwitz's Theorem)

设函数 $f_n(z)$ 在 D 上解析且不是常数，并设 $f_n(x)$ 在 D 的任意紧致子集上一致收敛于 $f(x)$, 那么 $f(z)$ 在 D 上或者恒等于 0，或者恒不等于 0.

5.2 Taylor 级数与 Laurent 级数

我们之前讲过的有限项的 Taylor 定理, 现在要将它改为幂级数的形式。

定理 5.2.1 附有积分型余项的 Taylor 定理 ()

如果 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 周围的一个邻域 D 上解析，那么

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}}{n!}(z-z_0)^n+f_{n+1}(z)(z-z_0)^{n+1}$$

其中

$$f_{n+1}(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}(\zeta-z)}$$

其中 C 是包含于 D 中的曲线 $|z-z_0|=\rho$.

定理 5.2.2 Taylor 级数 (Taylor's Series)

设 $f(z)$ 在开集 D 上解析，z_0 是 D 中的一个点，那么在 D 中以 z_0 为圆心的最大开圆盘内，下式成立：

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}}{n!}(z-z_0)^n+\cdots$$

由于是无穷的级数，所以这里不再需要余项。这时，我们可以证明以下的经典幂级数展开式：

例 5.2.3 初等解析函数的幂级数展开式实例

与实分析一样，有：

$$\exp z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

to be continued...

但是复分析中的 Taylor 级数无法规避奇点问题。所以现在我们考虑新的级数：

定理 5.2.4 Laurent 级数 (Laurent's Series)

设在圆环 $R_1 < |z-z_0| < R_2 (R_1 \geqslant 0, R_2 \leqslant +\infty)$ 内的解析函数$f(z)$ 必定可以写成同时包含正幂和负幂的级数：

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \tag{$\bullet$}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

γ 是 $|\zeta - z_0| = \rho (R_1 < \rho < R_2)$ 的圆周。

这时称得到的级数 ($\bullet$) 为 **Laurent 级数**，也叫 Laurent 展式；称其负数次幂为**主要部分**。

证明:

已知 $f(z)$ 在圆环 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 上解析。选择两个同心圆 C_1 和 C_2 使得 C_2 的半径为 r_2 $(R_1 < r_2 < R_2)$, C_1 的半径为 r_1 $(R_1 < r_1 < r_2)$, 使得点 z 位于两个圆之间 $(r_1 < |z-z_0| < r_2)$:

对于圆环内的一点 z, 由复合闭路定理可得：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

对于积分路径 C_2，有 $|\zeta - z_0| = r_2 > |z - z_0|$。将核函数 $\frac{1}{\zeta - z}$ 展开为

关于 $\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}$ 的几何级数：

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

这个级数在 C_2 上一致收敛。将其代入第一个积分：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_2}f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right]}_{a_n}(z-z_0)^n$$

对于积分路径 C_1，情况相反：有 $|\zeta-z_0|=r_1<|z-z_0|$。为了能使用几何级数，我们需要对核函数进行另一种形式的改写

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{-1}{z-\zeta}=\frac{-1}{(z-z_0)-(\zeta-z_0)}=\frac{-1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}$$

因为 $\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|<1$，所以可以展开几何级数：

$$\frac{1}{\zeta-z}=-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^m}{(z-z_0)^{m+1}}$$

令 $n=-(m+1)$，即 $m=-n-1$。当 m 从 0 到 ∞ 时，n 从 -1 到 $-\infty$。重写上式：

$$\frac{1}{\zeta-z}=-\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{-n-1}}{(z-z_0)^{-n}}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

现在将这个展开式代入第二个积分：

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}f(\zeta)\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right)d\zeta=\sum_{n=-\infty}^{-1}\underbrace{\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right]}_{a_n}(z-z_0)^n$$

合并，得到

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

其中，系数 a_n 由统一的公式给出：

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$$

这里的积分路径 C 是圆环内任意一条绕 z_0 的正向简单闭曲线。

这时，Taylor 级数是 Laurent 级数在: $f(z)$ 在 z_0 处解析的条件下的特例：这时就将 Laurent 级数中的圆环就是一个圆盘. 作出 Laurent 级数，根据系数 a_n 的计算公式和 Cauchy 积分定理, 所有的负数幂系数都等于 0. 这时的 Laurent 级数就变成了 Taylor 级数。只要在非奇点处附近展开就会得到 Taylor 级数。因此我们一般在奇点处求取 Laurent 级数。

例 5.2.5 求解 Laurent 级数的实例

计算：

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

在圆环 $|z| > 1$ 时的 Laurent 级数.

先进行部分分式分解：

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$$

$\frac{1}{z}$ 已经是 Laurent 级数的一部分，所以我们考虑 $\frac{1}{1+z}$.

根据 Taylor 展开式

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n, \quad 对于 |w| < 1 \qquad (*)$$

但 $|z| > 1$ 不满足上面的使用条件，所以我们采取这种策略：

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{1}{z}}$$

这时可以保证 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$. 这时再使用 $(*)$, 得到

$$f(z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}.$$

定理 5.2.6 解析函数的孤立奇点与 Laurent 级数的关系

设 z_0 是在其邻域内解析的函数 f 的一个奇点。那么

- 如果 z_0 是可去奇点, 那么在 z_0 处的 f 的 Laurent 级数中不含

负数次幂；

- 如果 z_0 是极点, 那么在 z_0 处的 f 的 Laurent 级数中只含有有限多项负数次幂；
- 如果 z_0 是本性奇点, 那么在 z_0 处的 f 的 Laurent 级数中有无限多项负数次幂。

推论 5.2.6.1 留数与 Laurent 级数的关系

奇点的留数等于在奇点处的 Laurent 级数的负一次幂系数 a_{-1}.

这使得我们有方法计算任意奇点的留数。

推论 5.2.6.2 高阶极点的留数的求法

对于 m 阶极点，则 f 在 z_0 附近有

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z)$$

$\varphi(z)$ 在 z_0 处解析且不为 0. 这时根据 Laurent 级数的负一次幂项系数等于 $\varphi(z)$ 的 Taylor 级数的 $m-1$ 次幂项系数，可得

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{\varphi^{(m-1)}}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}((z-z_0)^m f(z))$$

5.3 亚纯函数的部分分式展开

5.4 无穷乘积与典范乘积

5.5 Weierstrass 因子分解定理

5.6 整函数的阶

5.7 Γ 函数

5.8 Stirling 公式

5.9 Riemann ζ 函数

5.10 正规族

6 Riemann 映照定理

6.1 Riemann 映照定理与边界表现

6.2 多边形的共性映射

6.3 反射原理

6.4 均值原理下的调和函数

6.5 Dirichlet 问题

7 椭圆函数

8 Riemann 曲面

9 全局解析函数