First Order Logic

Fulcrum4Math Team at SJTU

1 一阶形式逻辑

1.1 命题逻辑

定义 1.1.1 命题 (Proposition)
元对象, 称为**命题**.

定义 1.1.2 真值 (Truth Value)
定义命题 $\mathbf{T}$, $\mathbf{F}$, 称为**真值**.
其中 $\mathbf{T}$ 称为**恒真式 (Tautology)**, $\mathbf{F}$ 称为**矛盾 (Contradiction)**.
由真值组成的集合称为**真值集合**: $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$.

定义 1.1.3 真值指派 (Truth Assignment)
设 Σ 是简单命题的集合, 则映射 $\mathcal{J}: \Sigma \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ 称为是一个 Σ 上的**真值指派**.
设 x 是命题, 且只依赖于 Σ 中的元素, 记 x 在真值指派 $\mathcal{J}$ 下的真值为 $[\![x]\!]_{\mathcal{J}}$.
定义 Σ 中元素在真值指派 $\mathcal{J}$ 下的真值为其在映射 $\mathcal{J}$ 下的像:

$$x \in \Sigma \to [\![x]\!]_{\mathcal{J}} = \mathcal{J}(x)$$

若真值命题在真值指派的定义域中, 规定真值的真值指派总是其自身:

$$\mathcal{J}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}, \mathcal{J}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}$$

定义 1.1.4 逻辑等价 (Logically Equivalent)
设 p, q 是命题, 则称 p 和 q **逻辑等价**当且仅当对任意真值指派 $\mathcal{J}$, 有 $[\![p]\!]_{\mathcal{J}} = [\![q]\!]_{\mathcal{J}}$, 记作 $p \equiv q$.

性质 1.1.4.1 逻辑等价是等价关系

定义 1.1.5 语义后承 (Semantic Consequence)
设 Φ 是命题集合, φ 是命题, 称 φ 是 ϕ 的**语义后承**, 记作 $\Phi \models \varphi$, 当且仅当: 对任意真值指派 $\mathcal{J}$, 若 Φ 中的每个命题在 $\mathcal{J}$ 指派下均为真, 则 $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{J}} = \mathbf{T}$.

定义 1.1.6 合取 (Conjunction)
设 p, q 是命题, 则 $p \wedge q$ 是命题, 称为命题 p 与 q 的**合取**.
命题 $p \wedge q$ 在 $\{p, q\}$ 上的真值指派 $\mathcal{J}$ 由以下真值表定义:

$[\![p]\!]_{\mathcal{J}}$	$[\![q]\!]_{\mathcal{J}}$	$[\![p \land q]\!]_{\mathcal{J}}$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

定义 1.1.7　析取 (Disjunction)
设 p, q 是命题, 则 $p \lor q$ 是命题, 称为命题 p 与 q 的**析取**.
命题 $p \lor q$ 在 $\{p, q\}$ 上的真值指派 $\mathcal{J}$ 由以下真值表定义:

$[\![p]\!]_{\mathcal{J}}$	$[\![q]\!]_{\mathcal{J}}$	$[\![p \lor q]\!]_{\mathcal{J}}$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

定义 1.1.8　否定 (Negation)
设 p 是命题, 则 $\neg p$ 是命题, 称为命题 p 的**否定**.
命题 $\neg p$ 在 $\{p\}$ 上的真值指派 $\mathcal{J}$ 由以下真值表定义:

$[\![p]\!]_{\mathcal{J}}$	$[\![\neg p]\!]_{\mathcal{J}}$
T	**F**
F	**T**

定义 1.1.9　逻辑运算的真值映射
将逻辑运算 $*$ 在真值指派 $\mathcal{J}$ 下对各参数命题真值的映射定义为该运算的**真值映射**, 记作 $[\![*]\!]_{\mathcal{J}}$.

$$[\![\land]\!]_{\mathcal{J}} := ([\![p]\!]_{\mathcal{J}}, [\![q]\!]_{\mathcal{J}}) \mapsto [\![p \land q]\!]_{\mathcal{J}}$$

$$[\![\lor]\!]_{\mathcal{J}} := ([\![p]\!]_{\mathcal{J}}, [\![q]\!]_{\mathcal{J}}) \mapsto [\![p \lor q]\!]_{\mathcal{J}}$$

$$[\![\neg]\!]_{\mathcal{J}} := [\![p]\!]_{\mathcal{J}} \mapsto [\![\neg p]\!]_{\mathcal{J}}$$

性质 1.1.9.1　双重否定率 (Double Negation Law)
任何命题否定的否定逻辑等价于其自身:

$$\neg(\neg x) \equiv x$$

性质 1.1.9.2　幂等律 (Idempotent Laws)
任何命题与其自身的合取及析取是其自身:

$$x \land x \equiv x$$

$$x \lor x \equiv x$$

性质 1.1.9.3 交换律 (Commutative Laws)
合取及析取运算满足交换律:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

性质 1.1.9.4 结合律 (Associative Laws)
合取及析取运算满足结合律:

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

性质 1.1.9.5 分配律 (Distributive Laws)
合取及析取运算满足分配律:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

性质 1.1.9.6 De Morgan 律 (De Morgan's Laws)
设 p, q 是命题, 则有:

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$$

性质 1.1.9.7 否定律 (Negation Laws)
设 x 是命题, 则有:

$$x \vee (\neg x) \equiv \mathbf{T}$$

$$x \wedge (\neg x) \equiv \mathbf{F}$$

性质 1.1.9.8 真值律 (Laws of Logical Constants)
设 x 是命题, 则有:

$$x \wedge \mathbf{T} \equiv x$$

$$x \vee \mathbf{F} \equiv x$$

$$x \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$$

$$x \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$$

性质 1.1.9.9 吸收率 (Absorption Laws)
设 p, q 是命题, 则有:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

定义 1.1.10 蕴含 (Implication)
设 p, q 是命题, 则称命题 p 蕴含命题 q 为**蕴含**, 记作 $p \to q$.
命题 $p \to q$ 在 $\{p, q\}$ 上的真值指派 $\mathcal{J}$ 由以下真值表定义:

$[\![p]\!]_{\mathcal{J}}$	$[\![q]\!]_{\mathcal{J}}$	$[\![p \to q]\!]_{\mathcal{J}}$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

规定 $\to$ 算子是右结合的:

$$p \to q \to r := p \to (q \to r)$$

性质 1.1.10.1 蕴含的等价表述
设 p, q 是命题, 则有:

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

性质 1.1.10.2 条件恒真
设 p, q 是命题, 则有:

$$p \to q \to p \equiv \mathbf{T}$$

性质 1.1.10.3 析取条件的分离
设 p, q, r 是命题, 则有:

$$p \vee q \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$$

性质 1.1.10.4 合取条件的 Curry 化 (Currying)
设 p, q, r 是命题, 则有:

$$p \wedge q \to r \equiv p \to q \to r$$

性质 1.1.10.5 反证法 (Proof by Contradiction)
设 p 是命题, 则有:

$$\neg p \equiv p \to \mathbf{F}$$

性质 1.1.10.6 语义后承的推导
设 Φ 是命题集合, φ, ψ 是命题, 则 $\Phi, \varphi \models \psi$ 当且仅当 $\Phi \models \varphi \to \psi$.

性质 1.1.10.7 蕴含的应用

$$p \to q, p \models q$$

定义 1.1.11 等价命题 (Equivalent Proposition)
设 p, q 是命题, 则 $p \leftrightarrow q$ 是命题, 称为 p 和 q 的**等价**.
命题 $p \leftrightarrow q$ 在 $\{p, q\}$ 上的真值指派 $\mathcal{J}$ 由以下真值表定义:

$[\![p]\!]_{\mathcal{J}}$	$[\![q]\!]_{\mathcal{J}}$	$[\![p \leftrightarrow q]\!]_{\mathcal{J}}$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**T**

性质 1.1.11.1 等价命题的析取表述
设 p, q 是命题, 则:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

1.2 逻辑推理

定义 1.2.1 重言式 / 永真式 (Tautology)

定义 1.2.2 矛盾式 (Contradiction)

性质 1.2.2.1 否定运算将永真式变为矛盾式, 将矛盾式变为永真式

定义 1.2.3 可满足性 (Satisfiability)

性质 1.2.3.1 可满足意味着非矛盾式, 恒真式意味着否定不可满足

定义 1.2.4 合取范式 (Conjunctive Normal Form)

性质 1.2.4.1 任何复合命题总能表示为合取范式

定义 1.2.5 析取范式 (Disjunctive Normal Form)

性质 1.2.5.1　任何复合命题总能表示为析取范式

1.3　一阶形式逻辑

定义 1.3.1　一阶形式语句 (First Order Language)
一个**一阶形式语句**是由以下代符和算子组成的对象:

1. **变量代符 (Variable Symbols)**;
2. **常量代符 (Constant Symbols)**;
3. **函数代符 (Function Symbols)**;
4. **谓词代符 (Predicate Symbols)**;
5. **命题 (Proposition)**.

不含命题的一阶形式语句称为**项 (Term)**.

定义 1.3.2　S-结构 (S-Structure)
设代符集 S, 一个 S-结构 $\mathcal{A} = (A, \alpha)$ 是由以下信息组成的对象:

1. **论域 (Domain)** A;
2. **谓词解释 (Predicate Interpretation)** $\alpha|_{\mathrm{P}} : S|_{\mathrm{P}} \to (A \times A \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\})$;
3. **函数解释 (Function Interpretation)** $\alpha|_{\mathrm{F}} : S|_{\mathrm{F}} \to (A^n \to A)$;
4. **常量解释 (Constant Interpretation)** $\alpha|_{\mathrm{C}} : S|_{\mathrm{C}} \to A$.

若一个命题中由代符集 S 生成, 则称此命题是一个 **S-命题 (S-Proposition)**.

定义 1.3.3　量词 (Quantifier)
若命题中的变量代符被量词约束, 称此变量代符**被约束 (Binded)**, 否则称之 **自由 (Free)**.
设 x 是变量代符, ϕ 是命题, 则:
1. $\forall x, \phi$ 是命题, 称 x 被**全称量词 (Universal Quantifier)** 约束. 一个 S-解释指派 $\forall x, \phi$ 为真, 当且仅当在 S 中的任意 t, 在将 ϕ 中所有自由变量 x 替换为 t 后, ϕ 在 S-解释下为真.
2. $\exists x, \phi$ 是命题, 称 x 被**存在量词 (Existential Quantifier)** 约束. 一个 S-解释指派 $\exists x, \phi$ 为真, 当且仅当在 S 中存在 t, 在将 ϕ 中所有自由变量 x 替换为 t 后, ϕ 在 S-解释下为真.

性质 1.3.3.1　量词否定律
设 x 是变量代符, ϕ 是命题, 则有:

$$\neg(\forall x, \phi) \equiv \exists x, \neg\phi$$

$$\neg(\exists x, \phi) \equiv \forall x, \neg\phi$$

性质 1.3.3.2 量词分配律
设 x 是变量代符, ϕ, ψ 是命题, 则有:

$$\forall x, (\phi \wedge \psi) \equiv (\forall x, \phi) \wedge (\forall x, \psi)$$

$$\exists x, (\phi \vee \psi) \equiv (\exists x, \phi) \vee (\exists x, \psi)$$

性质 1.3.3.3 量词弱分配律
设 x 是变量代符, ϕ, ψ 是命题, 则有:

$$\forall x, \phi \vee \forall x, \psi \models \forall x, (\phi \vee \psi)$$

$$\exists x, (\phi \wedge \psi) \models \exists x, \phi \wedge \exists x, \psi$$

性质 1.3.3.4 量词交换律
设 x, y 是变量代符, ϕ 是命题, 则有:

$$\forall x, \forall y, \phi \equiv \forall y, \forall x, \phi$$

$$\exists x, \exists y, \phi \equiv \exists y, \exists x, \phi$$

性质 1.3.3.5 量词弱交换律
设 x, y 是变量代符, ϕ 是命题, 则有:

$$\exists x, \forall y, \phi \models \forall y, \exists x, \phi$$

反例 1.3.4 量词约束的变量未必要在后续命题中出现

反例 1.3.5 同一记号未必被视为同一变量代符
以下命题中, 变量代符 x 在不同量词下被视为不同的变量代符:

$$\exists x, \forall x, P(x)$$

定义 1.3.6 开 / 闭命题 (Open / Closed Proposition)
命题称为是**闭命题**, 若其中全体变量代符均被量词约束, 否则称为**开命题**.

定义 1.3.7 S-解释 (S-Interpretation)
设 S 是一个代符集, 一个 S-解释 $\mathcal{J} = (\mathcal{A}, \beta)$ 是由以下信息组成的对象:

1. S-结构 $\mathcal{A} = (A, \alpha)$;
2. S-指派 $\beta : S \to A$

方便起见, 约定以下简记:

1. 对于谓词代符 P, 简记 $\mathcal{J}(P) := \mathcal{A}(P) := \alpha(P)$;
2. 对于函数代符 f, 简记 $\mathcal{J}(f) := \mathcal{A}(f) := \alpha(f)$;
3. 对于常量代符 c, 简记 $\mathcal{J}(c) := \mathcal{A}(c) := \alpha(c)$;
4. 对于自由变量代符 x, 简记 $\mathcal{J}(x) := \mathcal{A}(x) := \beta(x)$.
5. 对于项 t, 简记 $[\![t]\!]_{\mathcal{J}} := \mathcal{J}(t)$.
6. 对于命题 ϕ, 简记 $[\![\phi]\!]_{\mathcal{J}} := \mathcal{J}(\phi)$.

约定函数 $\mathcal{J}$ 与任何算子皆是交换的.

2 证明论

2.1 推理规则

定义 2.1.1 自然推理系统 (Natural Deduction System)
一个**自然推理系统**中, 递归地认为 $\Phi \vdash \psi$ 当且仅当它能够通过有限次以下步骤推理得到:

1. **全称命题应用**:
$$\frac{\Phi \vdash \forall x, \phi}{\Phi \vdash \phi[x \mapsto t]}$$
2. **存在命题构造 (use)**:
$$\frac{\Phi \vdash \phi[x \mapsto t]}{\Phi \vdash \exists x, \phi}$$
3. **全称命题构造 (intro)**:
$$\frac{\Phi \vdash \psi, x \text{ 不在 } \Phi \text{ 中自由出现}}{\Phi \vdash \forall x}$$
4. **存在命题实例化 (rcases)**:
$$\frac{\Phi, \phi \vdash \psi, x \text{ 不在 } \Phi, \psi \text{ 中自由出现}}{\Phi, \exists x, \phi \vdash \psi}$$
5. **合取构造 (constructor)**:
$$\frac{\Phi \vdash \phi, \psi}{\Phi \vdash \phi \wedge \psi}$$
6. **合取提取 (rcases)**:
$$\frac{\Phi \vdash \phi \wedge \psi}{\Phi \vdash \phi}$$
$$\frac{\Phi \vdash \phi \wedge \psi}{\Phi \vdash \psi}$$
7. **析取构造 (left / right)**:
$$\frac{\Phi \vdash \phi}{\Phi \vdash \phi \vee \psi}$$
$$\frac{\Phi \vdash \psi}{\Phi \vdash \phi \vee \psi}$$

8. **分类讨论 (cases)**:
$$\frac{(\Phi, \phi_1 \vdash \psi), (\Phi, \phi_2 \vdash \psi)}{\Phi, \phi_1 \vee \phi_2 \vdash \psi}$$

9. **排中律**:
$$\frac{\Phi \vdash \mathbf{T}}{\Phi \vdash \psi \vee \neg\psi}$$

10. **矛盾律**:
$$\frac{\Phi \vdash \mathbf{T}}{\Phi, \mathbf{F} \vdash \psi}$$

11. **条件恒真 (exact)**:
$$\frac{\psi \in \Phi}{\Phi \vdash \psi}$$

12. **推理传递**:
$$\frac{\Psi \subseteq \Phi, \Psi \vdash \psi}{\Phi \vdash \psi}$$

13. **蕴含运用 (apply)**:
$$\frac{\Phi \vdash \phi, \Phi \vdash \phi \to \psi}{\Phi \vdash \psi}$$

14. **蕴含构造**:
$$\frac{\Phi, \phi \vdash \psi}{\Phi \vdash \phi \to \psi}$$