目录

1 静电学 **2**

1.1 静电场 2

1.2 静电系统 3

1.3 自由电荷激发电场 3

1.4 常见带电体模型 4

1.5 电场力做功 7

1.6 电偶极子 7

2 静电感应 **7**

2.1 导体的静电感应 7

2.2 电介质的极化 8

2.3 电容器 9

2.4 电势能 10

3 电流 **10**

3.1 电荷层面的电流模型 10

3.2 磁场 11

3.3 磁通量 12

3.4 常见电流模型 12

1 静电学

1.1 静电场

定义 1.1.1 电荷 (Electric Charge)
定义**电荷**为 $\mathsf{I} \cdot \mathsf{T}$, 记作 Q; 单位 **Coulomb** 为 $\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$, 记作 C.

定义 1.1.2 电势 (Electric Potential)
定义**电势**为 $\mathsf{E} \cdot \mathsf{Q}^{-1}$, 记作 V; 单位 **Volt** 为 $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{C}^{-1}$, 记作 V.

结构 1.1.3 电场 (Electric Field)
定义**电场**类型派生自场, 包含以下信息:

1. **电势函数** $V_E : \mathsf{L}_3 \to \mathsf{V}$;
2. **光滑性**: $V_E \in C^\infty(\mathsf{L}_3)$.

定义 1.1.4 等势线

定义 1.1.5 电场线

定义 1.1.6 电势差 / 电压 (Voltage)
设 E 是电场, $a, b : \mathsf{L}_3$, 定义**电势差**为: $V_E(a) - V_E(b)$, 记作 V_{ab}.

定义 1.1.7 电场强度 (Electric Field Intensity)
设 E 是电场, $\boldsymbol{x} : \mathsf{L}_3$, 定义 E 在 $\boldsymbol{x}$ 处的**电场强度**为: $-\nabla V_E(\boldsymbol{x})$, 记作 $\boldsymbol{E}_E(\boldsymbol{x})$.
定义 E 的**电场强度函数**为 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{E}_E(\boldsymbol{x})$, 记作 $\boldsymbol{E}_E$.

性质 1.1.7.1 电场强度场是保守场

性质 1.1.7.2 电势差为电场强度的路径积分
设 E 是电场, $a, b : \mathsf{L}_3$, C 是 a 到 b 的路径, 则:

$$V_{ab} = -\int_C \boldsymbol{E}_E(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

定义 1.1.8 电通量 (Electric Flux)
设 E 是电场, S 是 L_3 上的 2 维流形, 定义 E 通过 S 的**电通量**为:

$$\int_S \boldsymbol{E}_E(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

记作 $\Phi_E(S)$.

1.2 静电系统

结构 1.2.1 电场源 (Electric Field Source)
定义**电场源**类型是物体的派生类型.

定义 1.2.2 电场源激发电场
设 $\cdot$ 是电场源, 定义 $\cdot$ 的**激发电场**, 记作 $E.$.

结构 1.2.3 静电系统 (Electrostatic System)
定义**静电系统**包含以下信息:

1. **电场源集**;
2. **外电场集**.

定义 1.2.4 合电场

1.3 自由电荷激发电场

定义 1.3.1 真空介电常数 (Vacuum Permittivity)
定义**真空介电常数**为 $8.8541 \times 10^{-12}(\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{C}^{-2})$, 记作 ε_0.

定义 1.3.2 静电力常数 / Coulomb 常数 (Coulomb's Constant)
定义**静电力常数**为 $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, 记作 k_e.

性质 1.3.2.1 静电力常数估值

$$k_e \approx 8.9875 \times 10^9(\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{C}^{-2})$$

结构 1.3.3 带电体 / 自由电荷 (Charged Object / Free Charge)
定义**带电体**类型派生自物体, 承载以下信息:

1. 维度 $n : [3]$;
2. n 维光滑流形 M_Q;
3. **电荷分布** $\rho_Q : M_Q \to \mathsf{Q} \cdot \mathsf{L}_{-n}$;

定义 1.3.4 带电体的总电荷量
设 Q 是带电体, 定义 Q 的**总电荷量**为:

$$\int_M \rho_Q(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

公理 1.1 带电体激发的电场

设 Q 是带电体, 则由 Q **激发的电场**为:

1. 电势函数:

$$V_Q = \boldsymbol{x} \mapsto k_e \int_{M_Q} \frac{\rho_Q(\boldsymbol{r})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}\|} \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

定理 1.3.5 带电体激发电场的电场强度分布

设 Q 是带电体, $\boldsymbol{x}$ 则:

$$\boldsymbol{E}_Q(\boldsymbol{x}) = k_e \int_{M_Q} \frac{\rho_Q(\boldsymbol{r})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}\|^2} (\widehat{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}}) \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

定理 1.3.6 Gauss 定理 (Gauss's Theorem)

设 Q 是带电体, M 是 L_3 上的 3 维流形, ∂M 是 Gauss 面, 则:

$$\varPhi_E(\partial M) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_M \rho(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

证明:

是 Stokes 定理的特例.

定义 1.3.7 电势能 (Electric Potential Energy)

设 E 是电场, Q 是带电体, 定义 Q 在 E 中的**电势能**为:

$$\int_{M_Q} V_Q(\boldsymbol{V}) \cdot \rho(\boldsymbol{V}) \mathrm{d}\boldsymbol{V}$$

定义 1.3.8 电场力 / Coulomb 力 / 静电力 (Coulomb Force)

设 E 是电场, Q 是带电体, 定义 E 作用在 Q 上的**电场力**.

1.4 常见带电体模型

结构 1.4.1 点电荷 (Electric Point Charge)

定义**点电荷**类型是带电体的子类型, 维数为 0. 包含以下信息:

1. **带电量** $q : \mathsf{Q}$
2. **位置** $\boldsymbol{r} : \mathsf{L}_3$

性质 1.4.1.1 点电荷的电势分布

设 $(q, \boldsymbol{r})$ 是点电荷, $\boldsymbol{x} : \mathsf{L}_3$, 则 $(q, \boldsymbol{r})$ 激发电场在 $\boldsymbol{x}$ 处的电势为:

$$\frac{k_e q}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}\|} (\widehat{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}})$$

例 1.4.2 电子的点电荷模型
定义**电子**为点电荷类型的子类型.

$$q_e \approx -1.602 \times 10^{-19}\mathrm{C}$$

电子电荷量记作 e.

定理 1.4.3 Coulomb 定律 (Coulomb's Law)
设 $(q_1, \boldsymbol{r}_1), (q_2, \boldsymbol{r}_2)$ 是点电荷, $r := \|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\|$, $\boldsymbol{e}_r := \dfrac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{\|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\|}$, 则:

$$\boldsymbol{f} = k_e \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \boldsymbol{e}_r$$

结构 1.4.4 线带电体
定义**线带电体**为带电体类型的子类型, 维数为 1.
包含以下信息:

1. 1 维光滑流形 M;
2. 线密度函数 $\lambda : M \to \mathsf{Q} \cdot \mathsf{L}^{-1}$.

例 1.4.5 无限长均匀带电直线的电场
设 $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{v} : \mathsf{L}_3$, $L := (\{\boldsymbol{x}_0 + k\boldsymbol{v} | k : \mathbb{R}\}, \cdot \mapsto \lambda)$ 是线带电体, $\boldsymbol{x} : \mathsf{L}_3$, $d : \mathsf{L} :=$ $\boldsymbol{x}$ 到 L 距离, $\hat{\boldsymbol{e}}$ 为 L 到 $\boldsymbol{x}$ 的单位法向量, 则:

1. 电势:

$$V_L(\boldsymbol{x}) = 2k_e \lambda \ln d$$

2. 场强:

$$\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x}) = \frac{2k_e\lambda}{d}\hat{\boldsymbol{e}}$$

证明:
根据柱对称性, 场强方向总沿径向.
运用 Gauss 定理, 取半径为 d 的圆柱体, 高为 h, 记作 C, 则:

$$\Phi_L(\partial C) = \oint_{\partial C} \boldsymbol{E}_L \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 2\pi \|\boldsymbol{E}_L\| dh$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_C \lambda \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{d\lambda}{\varepsilon_0}$$

$$\implies 2\pi \|\boldsymbol{E}_L\| dh = \frac{h\lambda}{\varepsilon_0}$$

$$\implies \|\boldsymbol{E}_L\| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d} = \frac{2k_e\lambda}{d}$$

当 λ 取值为正时, 场强方向沿径向向外.
电势分布求导即证 $\square$

例 1.4.6 圆环带电体的电场

设 $R:\mathsf{L}$, $C := (\{(R\cos\theta, R\sin\theta, 0) | \theta \in [0, 2\pi)\}, \cdot \mapsto \lambda)$ 是线带电体, 则:

结构 1.4.7 面带电体

定义**面带电体**为带电体类型的子类型, 维数为 2.

包含以下信息:

1. 2 维光滑流形 M;
2. 面密度函数 $\sigma : M \to \mathsf{Q} \cdot \mathsf{L}^{-2}$.

例 1.4.8 无限大均匀带电平面

设 $P := (\{(x, y, 0) | x, y : \mathsf{L}\}, \cdot \mapsto \sigma)$ 是面带电体, 则:

$$\boldsymbol{E}_P(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

证明:

根据柱对称性, 场强方向总沿平面法向.

取底面积为 S 的柱体, 记作 C, 则:

$$\oint_{\partial C} \boldsymbol{E}_P \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_C \sigma \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$\implies \boldsymbol{E}_P \cdot 2S = \frac{1}{\varepsilon_0} S\sigma$$
$$\implies \boldsymbol{E}_P = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

□

例 1.4.9 均匀带电球壳的电场

设 $R:\mathsf{L}$, $B := (\{\boldsymbol{r} : \mathsf{L}^3 | \|\boldsymbol{r}\| = R\}, \cdot \mapsto \sigma)$ 是连续带电体, 则:

例 1.4.10 无限长均匀带电柱壳的电场

设 $R:\mathsf{L}$, $C := (\{(R\cos\theta, R\sin\theta, z) | z : \mathsf{L}\}, \cdot \mapsto \sigma)$ 是面带电体, 则:

$$\boldsymbol{E}_C(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0, & \|\boldsymbol{r}\| < R \\ \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 \|\boldsymbol{r}\|}\hat{\boldsymbol{r}}, & \|\boldsymbol{r}\| \geq R \end{cases}$$

结构 1.4.11 体带电体

定义**体带电体**为带电体类型的子类型, 维数为 3.

包含以下信息:

1. 3 维光滑流形 M;

2. 体密度函数 $\rho : M \to \mathsf{Q} \cdot \mathsf{L}^{-3}$.

例 1.4.12 均匀带电球体的电场

1.5 电场力做功

1.6 电偶极子

结构 1.6.1 电偶极子 (Electric Dipole)
定义**电偶极子**类型承载以下信息:

1. **电偶极矩** $\boldsymbol{p} : \mathsf{L}^3 \cdot \mathsf{I} \cdot \mathsf{T}$, 简称**电矩**:
2. **位置** $\boldsymbol{r} : \mathsf{L}^3$

性质 1.6.1.1 电偶极子受合电场力为零

性质 1.6.1.2 电偶极子受电场力力矩
设 $D = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$ 是电偶极子, E 是电场, $\boldsymbol{E}$ 是 E 的电场强度函数, 则 D 在电场 E 受力矩为:

$$\boldsymbol{M}_D = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

性质 1.6.1.3 电偶极子在电场中的电势能
设 $D = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$ 是电偶极子, E 是电场, $\boldsymbol{E}$ 是 E 的电场强度函数, 则 D 在电场 E 中的电势能为:

$$\mathcal{E} = \nabla(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E})$$

设 E 是匀强电场, 则 D 在电场 E 中的电势能为:

$$\mathcal{E} = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}$$

2 静电感应

2.1 导体的静电感应

定义 2.1.1 带电体 (Charged Object)
定义**带电体**类型是带电体集合类型.

定义 2.1.2 导体 (Conductor)
定义**导体**是带电体类型的子类型, 包含以下信息:

1. 内部带电体 ρ_C
2. 边界带电体 σ_C

定义 2.1.3 静电平衡 (Static Electric Equilibrium)
设 E 是电场, C 是导体, 定义 C 在 E 中达到**静电平衡**当且仅当:

1. 导体内部总场强为零:
$$\forall \boldsymbol{r} \in \operatorname{int} C, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_C(\boldsymbol{r}) = 0$$
2. 导体边界总场强与边界流形正交:
$$\forall \boldsymbol{r} \in \partial C, (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_C(\boldsymbol{r})) \perp T_{\boldsymbol{r}}\partial C$$

性质 2.1.3.1 导体静电平衡时内部无电荷
设 E 是电场, C 是连续带电导体, C 在 E 中达到静电平衡, 则:
$$\forall \boldsymbol{r} \in \operatorname{int} C, \rho_C(\boldsymbol{r}) = 0$$

性质 2.1.3.2 导体表面电场强度
设 E 是电场, C 是连续带电导体, C 在 E 中达到静电平衡, 则:
$$\forall \boldsymbol{r} \in \partial C, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}$$

2.2 电介质的极化

结构 2.2.1 电介质 (Dielectric)
定义**电介质**类型包含以下信息:

1. 极化率 χ_e;

定义 2.2.2 相对介电常数 (Relative Permittivity)
设 X 是电介质, 定义 X 的**相对介电常数**为: $1 + \chi_e$, 记作 ε_r.

定义 2.2.3 介电常数 (Permittivity)
设 X 是电介质, 定义 X 的**介电常数**为: $\varepsilon_0\varepsilon_r$, 记作 ε.

定义 2.2.4 极化强度 (Polarize)
设 X 是电介质, X 的极化率为 χ_e, E 是电场, 定义 X 在 E 下的**极化强度**为: $\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}$, 记作 $\boldsymbol{P}$.

定义 2.2.5 极化电荷密度 (Polarization Intensity)
设 X 是电介质, E 是电场, 定义 X 在 E 下的**极化电荷密度**为:
$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$$

定义 2.2.6 电位移矢量 (Electric Displacement)

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}$$

定理 2.2.7 电介质中的 Gauss 定理 (Gauss's Theorem in Dielectric)
设 X 是电介质, E 是电场, M 是 L_3 上的 3 维流形, ∂M 是 Gauss 面, 则:

$$\int_{\partial M} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_M \rho_{free}(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

2.3 电容器

结构 2.3.1 电容器 (Capacitor)
定义**电容器**类型包含以下信息:

1. **极板**: A, B;
2. 电介质 D;

例 2.3.2 平行板电容器
设 A, B 是带电平面, A, B 面积为 S, A, B 距离为 d, D 是电介质, D 的介电常数为 ε, D 充满 A, B 之间, 则定义 (A, B, D) 为**平行板电容器**.

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

例 2.3.3 柱形电容器

例 2.3.4 球形电容器

定义 2.3.5 电容器的串联与并联
设 C_1, C_2 是电容器, 则:

性质 2.3.5.1 串联电容器的等效电容
设 C_1, C_2 是电容器,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

性质 2.3.5.2 并联电容器的等效电容

$$C = C_1 + C_2$$

2.4 电势能

3 电流

3.1 电荷层面的电流模型

定义 3.1.1 电源 (Power Supply)

1. **非静电力场强**函数 $\boldsymbol{E}_k : \mathsf{L}_3 \to$;

定义 3.1.2 电动势
设 X 是电源, 定义 X 的**电动势**为

$$\int_{-}^{+} \boldsymbol{E}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

记作 $\mathscr{E}$.

定义 3.1.3 电导率
设 C 是导体, n 是载流子数密度, τ 是平均自由时间, 定义 C 的**电导率**为:

$$\frac{ne^2\tau}{2m}$$

记作 σ.

定理 3.1.4 Ohm 定律 (Ohm's Law)
设 I 是电流, U 是电压, R 是电阻, 则有:

$$U = IR$$

定义 3.1.5 电流强度 (Electric-Current-Intensity)
设 C 是导体, S 是 C 上的截面, 定义通过截面 S 的**电流强度**为:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

定义 3.1.6 电流密度 (Electric Current Density)
设 C 是导体, $\mathcal{I}$ 是 C 上的电流, 定义 $\mathcal{I}$ 的**电流密度**函数为:

$$\boldsymbol{x} : C \mapsto$$

记作 $\boldsymbol{J}_{\mathcal{I}}$.

定义 3.1.7 稳恒电流 (Steady Electric Current)
设 C 是导体, $\mathcal{I}$ 是 C 上的电流, 定义 $\mathcal{I}$ **稳恒**, 当且仅当:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J}_{\mathcal{I}}(\boldsymbol{x}) = \cdot \mapsto \boldsymbol{0}$$

例 3.1.8 导线

3.2 磁场

定义 3.2.1 磁力常数 (Magnetic Constant)
定义**磁力常数**为:

$$1 \times 10^{-7}(\mathrm{N}^{-1} \cdot \mathrm{A}^2)$$

记作 k_m.

定义 3.2.2 真空磁导率 (Vacuum Magnetic Permeability)
定义**真空磁导率**为:

$$4\pi k_m$$

记作 μ_0.

定义 3.2.3 磁感应强度 (Magnetic-Induction-Intensity)
定义**磁感应强度**为 $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{A}^{-1}$, 记作 B.
定义磁感应强度的单位 **Tesla** 为 $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{A}^{-1}$, 记作 T.

结构 3.2.4 磁场 (Magnetic Field)
定义**磁场**是场, 包含以下信息:

1. **磁感应强度**函数 $\boldsymbol{B} : \mathsf{L}_3 \to \mathsf{B}$;

定义 3.2.5 电流激发磁场

性质 3.2.5.1 Biot-Savart 定律 (Biot-Savart Law)
设 C 是导线, $\mathcal{I}$ 是 C 上的电流, 则:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{r} : \mathsf{L}_3 \mapsto k_m \int_C \frac{I_{\mathcal{I}}(\boldsymbol{l})\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{l} - \boldsymbol{r}\|^3}$$

定义 3.2.6 Lorentz 力 / 磁场力
设 B 是磁场, Q 是带电体, Q 的带电量为 q, $\boldsymbol{v}$ 是 Q 的速度, 定义 B 作用在 Q 上的 **Lorentz 力 / 磁场力**为:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

结构 3.2.7 带电质点

3.3 磁通量

定义 3.3.1 磁通量 (Magnetic Flux)

3.4 常见电流模型

例 3.4.1 匀速旋转均匀带电圆盘

例 3.4.2 无限长直导线

设 $L = (\{(0,0,z)|z : \mathsf{L}\}, I)$ 是导线, 则 I 在距 L 为 d 处激发的磁场为:

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

例 3.4.3 通电柱体

例 3.4.4 通电圆环

例 3.4.5 无限长通电螺线管