目录

1 经典电磁学

1.1 带电体

定义 1.1.1 电荷 (Electric Charge)
定义**电荷**为 $\mathsf{I} \cdot \mathsf{T}$, 记作 Q.
定义电荷的单位 **Column** 为 $\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$, 记作 C.

结构 1.1.2 单带电体 (Single Charged Object)
定义**单带电体**类型派生自物体, 承载以下信息:

1. 维度 $n : [3]$
2. n 维光滑流形 M_Q;
3. **电荷分布** $\rho_Q : M_Q \to \mathsf{Q} \cdot \mathsf{L}_{-n}$;

定义 1.1.3 带电体 (Charged Object)
定义**带电体**类型是单带电体集合类型.

定义 1.1.4 带电体的总电荷量
设 Q 是带电体, 定义 Q 的**总电荷量**为:

$$\int_M \rho_Q(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

1.2 静电场

定义 1.2.1 电势 (Electric Potential)
定义**电势**为 $\mathsf{E} \cdot \mathsf{Q}^{-1}$, 记作 V.
定义电势的单位 **Volt** 为 $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{C}^{-1}$, 记作 V.

结构 1.2.2 电场 (Electric Field)
定义**电场**类型派生自场, 包含以下信息:

1. **电势函数** $V_E : \mathsf{L}_3 \to \mathsf{V}$:

定义 1.2.3 等势线

定义 1.2.4 电场线

定义 1.2.5 电势差 / 电压 (Voltage)
设 E 是电场, $a, b : \mathsf{L}_3$, 定义**电势差**为: $V_E(a) - V_E(b)$, 记作 V_{ab}.

定义 1.2.6 电场强度 (Electric Field Intensity)
设 E 是电场, $\boldsymbol{x} : \mathsf{L}_3$, 定义 E 在 $\boldsymbol{x}$ 处的**电场强度**为: $-\nabla V_E(\boldsymbol{x})$, 记作 $\boldsymbol{E}_E(\boldsymbol{x})$.
定义 E 的**电场强度函数**为 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{E}_E(\boldsymbol{x})$, 记作 $\boldsymbol{E}_E$.

性质 1.2.6.1 电场强度场是保守场

性质 1.2.6.2 电势差为电场强度的路径积分
设 E 是电场, $a, b : \mathsf{L}_3$, C 是 a 到 b 的路径, 则:

$$V_{ab} = -\int_C \boldsymbol{E}_E(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

定义 1.2.7 电场力 / Coulomb 力 / 静电力 (Coulomb Force)
设 E 是电场, Q 是带电体, 定义 E 作用在 Q 上的**电场力**.

定义 1.2.8 电通量 (Electric Flux)
设 E 是电场, S 是 L_3 上的 2 维流形, 定义 E 通过 S 的**电通量**为:

$$\int_S \boldsymbol{E}_E(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

记作 $\Phi_E(S)$.

定理 1.2.9 Gauss 定理 (Gauss's Theorem)
设 E 是电场, M 是 L_3 上的 3 维流形, 则:

$$\Phi_E(\partial M) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_M \rho(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

证明:
是 Stokes 定理的特例.

定义 1.2.10 电势能 (Electric Potential Energy)
设 E 是电场, Q 是带电体, 定义 Q 在 E 中的**电势能**为:

1.3 带电体激发的电场

定义 1.3.1 真空介电常数 (Vacuum Permittivity)
定义**真空介电常数**为 $8.8541 \times 10^{-12}(\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{C}^{-2})$, 记作 ε_0.

定义 1.3.2 静电力常数 / Coulomb 常数 (Coulomb's Constant)
定义**静电力常数**为 $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, 记作 k_e.

性质 1.3.2.1 静电力常数估值

$$k_e \approx 8.9875 \times 10^9 (\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{C}^{-2})$$

定义 1.3.3 带电体激发的电场
设 Q 是带电体, 定义由 Q **激发的电场**为:

1. 电势函数:

$$V_Q = \boldsymbol{x} \mapsto k_e \int_{M_Q} \frac{\rho_Q(\boldsymbol{r})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}\|} \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

记作 E_Q.

定理 1.3.4 带电体激发电场的电场强度分布
设 Q 是带电体, $\boldsymbol{x}$ 则:

$$\boldsymbol{E}_Q(\boldsymbol{x}) = k_e \int_{M_Q} \frac{\rho_Q(\boldsymbol{r})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}\|^2} (\widehat{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}}) \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

定理 1.3.5 电力叠加原理 (Principle of Superposition)
设 $\{Q_n\} : \mathbb{N} \to$ 带电体, 则:

$$\Phi_{\mathrm{Im}\{Q_n\}} = \sum_{n:\mathbb{N}} \Phi_{Q_n}$$

1.4 常见带电体模型

结构 1.4.1 点电荷 (Electric Point Charge)
定义**点电荷**类型是单带电体的子类型, 维数为 0. 包含以下信息:

1. 带电量 $q : \mathsf{Q}$
2. 位置 $\boldsymbol{r} : \mathsf{L}_3$

性质 1.4.1.1 点电荷的电势分布
设 $(q, \boldsymbol{r})$ 是点电荷, $\boldsymbol{x} : \mathsf{L}_3$, 则 $(q, \boldsymbol{r})$ 激发电场在 $\boldsymbol{x}$ 处的电势为:

$$\frac{k_e q}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}\|} (\widehat{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}})$$

例 1.4.2 电子的点电荷模型
定义**电子**为点电荷类型的子类型.

$$q_e \approx -1.602 \times 10^{-19} \mathrm{C}$$

电子电荷量记作 e.

定理 1.4.3 Coulomb 定律 (Coulomb's Law)
设 $(q_1, \boldsymbol{r}_1), (q_2, \boldsymbol{r}_2)$ 是点电荷, $r := \|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\|$, $\boldsymbol{e}_r := \dfrac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{\|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\|}$, 则:

$$\boldsymbol{f} = k_e \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \boldsymbol{e}_r$$

结构 1.4.4 离散带电体

性质 1.4.4.1

结构 1.4.5 线带电体
定义**线带电体**为单带电体类型的子类型, 维数为 1.
包含以下信息:

1. 1 维光滑流形 M;
2. 线密度函数 $\lambda : M \to \mathsf{Q} \cdot \mathsf{L}^{-1}$.

例 1.4.6 无限长带电直线的电场
设 $L := (\{(x, 0, 0) | x : \mathsf{L}\}, \cdot \mapsto \lambda)$ 是线带电体, 则:

1. $$\boldsymbol{E}_L(d\cos\theta, d\sin\theta, \cdot) = \frac{2k_e\lambda}{d}(\cos\theta, \sin\theta, 0)$$
2. $$\Phi_L(d\cos\theta, d\sin\theta, \cdot) = 2k_e\lambda \ln d + C$$

证明:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{E}_L(d\cos\theta, d\sin\theta, z)\| &= \|\boldsymbol{E}_L(d, 0, 0)\| \\
&= k_e\lambda \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(d, 0, -z)}{(\sqrt{d^2 + z^2})^3} \mathrm{d}z \right\| \\
&= k_e\lambda d \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{d^2 + z^2})^3} \mathrm{d}z \\
&= \frac{2k_e\lambda}{d}
\end{aligned}$$

例 1.4.7 圆环带电体的电场

结构 1.4.8 面带电体
定义**面带电体**为带电体类型的子类型, 维数为 2.
包含以下信息:

1. 2 维光滑流形 M;
2. 面密度函数 $\sigma : M \to \mathsf{Q} \cdot \mathsf{L}^{-2}$.

例 1.4.9 无限大均匀带电平面
设 $P := (\{(x, y, 0) | x, y : \mathsf{L}\}, \cdot \mapsto \sigma)$ 是面带电体, 则 P 激发的电场在 $\boldsymbol{r} : \mathsf{L}^3$ 处的电场强度为:

$$\boldsymbol{E}_P(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

例 1.4.10 均匀带电球壳的电场
设 $R : \mathsf{L}$, $B := (\{\boldsymbol{r} : \mathsf{L}^3 | \|\boldsymbol{r}\| = R\}, \cdot \mapsto \sigma)$ 是连续带电体, 则:

例 1.4.11 无限长均匀带电柱壳的电场
设 $R : \mathsf{L}$, $C := (\{(R\cos\theta, R\sin\theta, z) | z : \mathsf{L}\}, \cdot \mapsto \sigma)$ 是面带电体, 则:

$$\boldsymbol{E}_C(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0, & \|\boldsymbol{r}\| < R \\ \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 \|\boldsymbol{r}\|}\hat{\boldsymbol{r}}, & \|\boldsymbol{r}\| \geq R \end{cases}$$

结构 1.4.12 体带电体
定义**体带电体**为带电体类型的子类型, 维数为 3.
包含以下信息:

1. 3 维光滑流形 M;
2. 体密度函数 $\rho : M \to \mathsf{Q} \cdot \mathsf{L}^{-3}$.

例 1.4.13 均匀带电球体的电场

1.5 电场力做功

1.6 电偶极子

结构 1.6.1 电偶极子 (Electric Dipole)
定义**电偶极子**类型承载以下信息:

1. **电偶极矩** $\boldsymbol{p} : \mathsf{L}^3 \cdot \mathsf{I} \cdot \mathsf{T}$, 简称**电矩**:
2. **位置** $\boldsymbol{r} : \mathsf{L}^3$

性质 1.6.1.1 电偶极子受合电场力为零

性质 1.6.1.2 电偶极子受电场力力矩
设 $D = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$ 是电偶极子, E 是电场, $\boldsymbol{E}$ 是 E 的电场强度函数, 则 D 在电场 E 受力矩为:

$$\boldsymbol{M}_D = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

性质 1.6.1.3 电偶极子在电场中的电势能
设 $D = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$ 是电偶极子, E 是电场, $\boldsymbol{E}$ 是 E 的电场强度函数, 则 D 在电场 E 中的电势能为:

$$E = \nabla(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E})$$

设 E 是匀强电场, 则 D 在电场 E 中的电势能为:

$$E = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}$$

2 静电感应

2.1 导体的静电感应

定义 2.1.1 导体 (Conductor)
定义**导体**是带电体类型的子类型, 包含以下信息:

1. 内部带电体 ρ_C
2. 边界带电体 σ_C

定义 2.1.2 静电平衡 (Static Electric Equilibrium)
设 E 是电场, C 是导体, 定义 C 在 E 中达到**静电平衡**当且仅当:

1. 导体内部总场强为零:
$$\forall \boldsymbol{r} \in \operatorname{int} C, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_C(\boldsymbol{r}) = 0$$
2. 导体边界总场强与边界流形正交:
$$\forall \boldsymbol{r} \in \partial C, (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_C(\boldsymbol{r})) \perp T_{\boldsymbol{r}}\partial C$$

性质 2.1.2.1 导体静电平衡时内部无电荷
设 E 是电场, C 是连续带电导体, C 在 E 中达到静电平衡, 则:

$$\forall \boldsymbol{r} \in \operatorname{int} C, \rho_C(\boldsymbol{r}) = 0$$

性质 2.1.2.2 导体表面电场强度

设 E 是电场, C 是连续带电导体, C 在 E 中达到静电平衡, 则:

$$\forall \boldsymbol{r} \in \partial C, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}$$

2.2 电介质的极化

结构 2.2.1 电介质 (Dielectric)
定义**电介质**类型包含以下信息:

1. **极化率** χ_e;

定义 2.2.2 相对介电常数 (Relative Permittivity)
设 X 是电介质, 定义 X 的**相对介电常数**为: $1+\chi_e$, 记作 ε_r.

定义 2.2.3 介电常数 (Permittivity)
设 X 是电介质, 定义 X 的**介电常数**为: $\varepsilon_0\varepsilon_r$, 记作 ε.

定义 2.2.4 极化强度 (Polarize)
设 X 是电介质, X 的极化率为 χ_e, E 是电场, 定义 X 在 E 下的**极化强度**为: $\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}$, 记作 $\boldsymbol{P}$.

定义 2.2.5 极化电荷密度 (Polarization Intensity)
设 X 是电介质, E 是电场, 定义 X 在 E 下的**极化电荷密度**为:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$$

性质 2.2.5.1 电位移矢量 (Electric Displacement)

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}$$

2.3 电容器

结构 2.3.1 电容器 (Capacitor)
定义**电容器**类型包含以下信息:

1. **极板**: A, B;
2. 电介质 D;

例 2.3.2 平行板电容器
设 A, B 是带电平面, A, B 面积为 S, A, B 距离为 d, D 是电介质, D 的介电常数为 ε, D 充满 A, B 之间, 则定义 (A, B, D) 为**平行板电容器**.

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

例 2.3.3 柱形电容器

例 2.3.4 球形电容器

定义 2.3.5 电容器的串联与并联
设 C_1, C_2 是电容器, 则:

性质 2.3.5.1 串联电容器的等效电容
设 C_1, C_2 是电容器,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

性质 2.3.5.2 并联电容器的等效电容

$$C = C_1 + C_2$$

2.4 电势能

3 电流

3.1 电流的描述

定义 3.1.1 电源 (Power Supply)

1. 非静电力场强

定义 3.1.2 电动势
设 X 是电源, 定义 X 的**电动势**为

$$\int_{-}^{+} \boldsymbol{E}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

记作 $\mathscr{E}$.

定义 3.1.3 电流强度
设 C 是导体, S 是 C 上的截面, 定义通过截面 S 的**电流强度**为:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

定义 3.1.4 电流密度

设 C 是导体, S 是 C 上的截面, 定义通过截面 S 的**电流密度**为:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}$$

3.2 磁场

定义 3.2.1 磁感应强度 (Magnetic-Induction-Intensity)
定义**磁感应强度**为 $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{A}^{-1}$, 记作 B.
定义磁感应强度的单位 **Tesla** 为 $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{A}^{-1}$, 记作 T.

结构 3.2.2 磁场 (Magnetic Field)
定义**磁场**是场, 包含以下信息:

1. 磁感应强度函数 $\boldsymbol{B}:\mathsf{L}_3\to$;

定义 3.2.3 Lorentz 力 / 磁场力
设 B 是磁场, Q 是带电体, Q 的带电量为 q, $\boldsymbol{v}$ 是 Q 的速度, 定义 B 作用在 Q 上的 **Lorentz 力 / 磁场力**为:

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

性质 3.2.3.1 带电质点

定义 3.2.4 运动电荷激发磁场

公理 3.1 Biot-Savart 定律 (Biot-Savart Law)

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_M\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

3.3

定义 3.3.1

定义 3.3.2 电导率
设 C 是导体, n 是载流子数密度, τ 是平均自由时间, 定义 C 的**电导率**为:

$$\frac{ne^2\tau}{2m}$$

记作 γ.

定理 3.3.3 Ohm 定律 (Ohm's Law)
设 I 是电流, U 是电压, R 是电阻, 则有:

$$U = IR$$