1 Zermelo-Fraekel 公理集合论 (承认选择公理, 即 ZFC 公理体系)

公理 1.1 外延公理

若两集合拥有相同元素, 则两集合相等.

$$X = Y \iff \forall x \in X, x \in Y; \forall y \in Y, y \in X$$

定义 1.0.1 空集 (Empty Set)

假设 X 是任意集合,

$$\varnothing := \{x \in X | x \neq x\}$$

公理 1.2 配对公理

可以将两个集合配对组成一个新集合.

$$\forall x, y, \exists \{x, y\}$$

定义 1.0.2 有序对 (Ordered Pair)

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

定义 1.0.3 Catesian 乘积

$$X \times Y := \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$$

由以上两条可归纳定义有限多元素组及 Catesian 乘积.

定义 1.0.4
设 P 为关于集合的一个性质, 以 $P(x)$ 表示集合 x 满足性质 P.

公理 1.3 分离公理模式

可以从一个集合中筛选出满足某个条件的元素组成一个新集合.

$$\forall X, \exists Y = \{x \in X | P(x)\}$$

公理 1.4 并集公理

可以将一个集族中全体集合的元素合并为一个新集合.

$$\forall X, \exists \bigcup X := \{x | \exists y \in X : x \in y\}$$

公理 1.5 幂集公理

可以将集合的全体子集取出组成一个新的集合.

$$\forall X, \exists \mathcal{P}(X) := \{x | x \subseteq X\}$$

定义 1.0.5 归纳集

集合 X 称为是一个**归纳集**, 若 $\forall x \in X, x' \in X$, 其中 x' 称为 x 的后继.

公理 1.6 无穷公理

存在无穷集. (通过定义 x 的后继 $x' = x \cup \{x\}$ 实现.)

$$\exists X : \varnothing \in X \land \forall x \in X, x \cup \{x\} \in X$$

公理 1.7 替换公理模式

公理 1.8 正则公理

任何非空集都含有一个对从属关系 $\in$ 极小的元素.

定理 1.0.6
不存在无穷的从属链:

$$\nexists \{x, x_1, x_2, \cdots\} : x \ni x_1 \ni x_2 \ni \cdots$$

公理 1.9 选择公理

对由非空集合组成集族, 可构造选择函数, 从每个集合中选择一个元素组成一个新集合.

$$X : \forall x \in X, x \neq \varnothing \implies \exists g : X \to \bigcup X : \forall x \in X, g(x) \in x$$

2 序结构与序数

定义 2.0.1 偏序关系

定义在集合 S 上的二元关系 "$\leq$" 称为是一个**偏序关系**, 若它具有:
(1) 自反性:

$$\forall x \in S, x \leq x$$

(2) 传递性:

$$x \leq y \wedge y \leq z \Longrightarrow x \leq z$$

(3) 反对称性:

$$x \leq y \wedge y \leq x \Longrightarrow x = y$$

此时称结构 $(P, \leq)$ 为**偏序集**.
若二元关系 "$\leq$" 满足 (1), (2), 称为**预序关系**, 相应的结构 $(S, \leq)$ 称为**预序集**.

定义 2.0.2 保序映射

设结构 $(S, \leq_S), (T, \leq_T)$ 是预序集, 映射 $f : S \to T$ 称为是**保序映射**, 若:

$$\forall x, y \in S : x \leq_S y \Longrightarrow f(x) \leq_T f(y)$$

方便起见, 记 $x \leq y \wedge x \neq y$ 为 $x < y$, 及引入 $\geq, >$ 符号.

定义 2.0.3 全序集/线序集 (Linearly Ordered Set)/链

偏序集 S 称为是一个全序集, 若:

$$\forall x, y \in S, x \leq y \vee y \leq x$$

3 无穷递归原理

4 基数

定义 4.0.1 等势

集合 X, Y 称为是**等势 (have the same Cardinality)** 的, 若 $\exists$ 双射 $\phi : X \to Y$.

定理 4.0.2
$\forall$ 不可数集 X,

$$\operatorname{card} X^2 = \operatorname{card} X$$

证明:

定义 4.0.3 可数集 (Countable Set)
集合 S 称为是一个可数集, 若 $\mathrm{card}(S) = \aleph_0$

性质 4.0.3.1
可数集的子集是可数集.

证明:
设任意可数集 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$

$$\forall S' = \{a_i | a_i \in S\} \subseteq S : |S'| = +\infty,$$

$$f(a_i) := |S' \cap \{a_1, a_2, \cdots, a_i\}|$$

有 $f : S' \to \mathbb{Z}^+$ 是双射, 即 S' 是可数集. $\square$

定理 4.0.4
设集族 $\bar{S} = \{S_i | S_i\text{是可数集}\}$ 是可数集, 则:

$$S = \bigcup_{S_i \in \bar{S}} S_i\text{是可数集.}$$

证明:
$\because S_i \in \bar{S}$ 是可数集, $\implies$ 可设 $S_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \cdots, a_{i,n}, \cdots\}$
将 $a_{i,j}$ 写成矩形数阵形式:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,n} & \cdots \\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} & \cdots \\
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \cdots & a_{3,n} & \cdots \\
a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & \cdots & a_{4,n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\
a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & a_{m,4} & \cdots & a_{m,n} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

按照折线方向构造一个元素序列 $\{a'_n\}$, 其中:

$$a_{m,n}\text{的序数为}\frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} + n$$

$$f(a_{m,n}) = |\{a'_1, a'_2, \cdots, a'_{\frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2}+n}\}|$$

有 f 为双射, $\Longrightarrow S$ 是可数集. □

定理 4.0.5
有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数集.

证明:

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \{\frac{p}{q} | q \in (\mathbb{Z} - \{0\})\}$$

其中 $\mathbb{Z}, (\mathbb{Z} - \{0\})$ 都是可数集, $\Longrightarrow \mathbb{Q}$ 是可数集. □

5 二元关系

5.1 二元关系

定义 5.1.1 二元关系 (Binary Relations)
如果 $R \subseteq A \times B$，则 R 是从 A 到 B 的**二元关系**。
如果 $R \subseteq A \times A$，则 R 是 A 上的**二元关系**。
$aRb \iff (a, b) \in R$，其中 $a \in A \wedge b \in B$。

定义 5.1.2 二元关系的性质 (Properties of Binary Relations on A)
令 $R \subseteq A \times A$，则 R 可能拥有的性质如下：

1. **自反性 (Reflexive)**：$\forall a \in A,\ aRa$。
2. **对称性 (Symmetric)**：$\forall a, b \in A,\ aRb \implies bRa$。
3. **反对称性 (Antisymmetric)**：$\forall a, b \in A,\ aRb \wedge bRa \implies a = b$。
4. **传递性 (Transitive)**：$\forall a, b, c \in A,\ aRb \wedge bRc, \implies aRc$。

例 5.1.3 二元关系举例及其性质 (Examples of Binary Relations and Their Properties)

1. **小于等于关系**设 $A = \mathbb{R}$（实数集），定义关系 R 为:

$$R = \{(a, b) \mid a \leq b\}$$

   - **自反性**：是。因为 $\forall a \in \mathbb{R},\ a \leq a$。
   - **对称性**：否。例如，$1 \leq 2$ 但 $2 \not\leq 1$。
   - **反对称性**：是。如果 $a \leq b \wedge b \leq a$，则 $a = b$。
   - **传递性**：是。如果 $a \leq b \wedge b \leq c$，则 $a \leq c$。

2. **整除关系**设 $A = \mathbb{Z}^+$，定义关系 R 为:

$$R = \{(a, b) \mid a \mid b\}$$

- **自反性**：是。因为 $\forall a \in \mathbb{Z}^+$, a 整除 a。
- **对称性**：否。例如，2 整除 4，但 4 不整除 2。
- **反对称性**：是。如果 a 整除 $b \wedge b$ 整除 a，则 $a = b$。
- **传递性**：是。如果 a 整除 $b \wedge b$ 整除 c，则 a 整除 c。

3. **空关系 (Empty Relation)** 设 A 是一个集合，定义关系 R 为：

$$R = \emptyset$$

即 R 不包含任何元素。

- **自反性**：否。除非 $A = \emptyset$，否则 R 不满足自反性。
- **对称性**：是。因为 R 中没有元素，对称性条件自动满足。
- **反对称性**：是。因为 R 中没有元素，反对称性条件自动满足。
- **传递性**：是。因为 R 中没有元素，传递性条件自动满足。

4. **全关系 (Universal Relation)** 设 A 是一个集合，定义关系 R 为：

$$R = A \times A$$

即 R 包含所有 A 中的元素对。

- **自反性**：是。因为 $\forall a \in A$, $(a, a) \in R$。
- **对称性**：是。如果 $(a, b) \in R$，则 $(b, a) \in R$。
- **反对称性**：否。除非 A 只有一个元素，否则存在 $a \neq b$ s.t. $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$。
- **传递性**：是。如果 $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$，则 $(a, c) \in R$。

定义 5.1.4　逆关系 (Inverse Relation)
如果 $R \subseteq A \times B$，则 R 的**逆关系** $R^{-1} \subseteq B \times A$ 定义为：

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

性质 5.1.4.1
$(R^{-1})^{-1} = R$

定义 5.1.5　关系的复合 (Composition of Relations)
$R \subseteq B \times C$, $S \subseteq A \times B$，则 R 和 S 的**复合** $R \circ S \subseteq A \times C$ 定义为：

$$R \circ S = \{(a, c) \mid \exists b \in B,\ (a, b) \in S \wedge (b, c) \in R\}$$

性质 5.1.5.1
$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

性质 5.1.5.2
$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$

性质 5.1.5.3 性质的等价表示 (Properties in Terms of Relations)

- R 是**自反的** $\iff I_A \subseteq R$，其中 $I_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$。
- R 是**对称的** $\iff R = R^{-1}$。
- R 是**传递的** $\iff R \circ R \subseteq R$。
- R 是**反对称的** $\iff R \cap R^{-1} \subseteq I_A$。

定义 5.1.6 等价关系 (Equivalence Relation)
如果关系 $R \subseteq A \times A$ 满足自反性、对称性和传递性，则 R 是 A 上的**等价关系**。

定义 5.1.7 等价类 (Equivalence Class)
如果 R 是 A 上的等价关系且 $a \in A$，则 a 的**等价类**定义为：

$$[a]_R = \{b \in A \mid aRb\}$$

定理 5.1.8
设 R 是集合 A 上的等价关系，$a, b \in A$，则：

$$aRb \iff [a]_R = [b]_R$$

证明：
"$\Rightarrow$"：$aRb \implies bRa\ \forall c \in A$,
$c \in [a]_R \iff cRa \iff cRb \iff c \in [b]_R\ \therefore [a]_R = [b]_R$.
"$\Leftarrow$"：$bRb \implies b \in [b]_R = [a]_R\ \therefore aRb$. □

性质 5.1.8.1
设 R 是集合 A 上的等价关系，$a, b \in A$，则：

$$aRb \iff [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset.$$

证明：
"$\Rightarrow$"：显然。
"$\Leftarrow$"：$[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset \implies c \in A, c \in [a]_R \wedge c \in [b]_R$,
$\therefore cRa, cRb \implies aRc, cRb \implies aRb$. □

定义 5.1.9 划分 (Partition)
集合 $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ 称为 A 的**划分**，如果满足：

1. $\forall B \in P,\ B \neq \emptyset$。
2. $\forall B_1, B_2 \in P$, 如果$B_1 \neq B_2$，则$B_1 \cap B_2 = \emptyset$。
3. $\bigcup P = A$。

引理 5.1.10
P 是 A 的划分, $a \in A \implies \exists! B \in P s.t. a \in B$。

定理 5.1.11
如果 R 是 A 上的等价关系，则等价类的集合 $\{[a]_R \mid a \in A\}$ 构成 A 的一个划分。

定理 5.1.12
设 P 是集合 A 的一个划分，定义关系 R 为：

$$R = \{(a,b) \in A \times A \mid \exists B \in P,\ a \in B \text{ 且} b \in B\}$$

则 R 是 A 上的等价关系，且 $P = \{[a]_R \mid a \in A\}$。

证明:

- **自反性**：$\forall a \in A$，$\exists B \in P$ s.t. $a \in B$，$\therefore aRa$。
- **对称性**：$\forall a, b \in A$，如果 aRb，则 $\exists B \in P$ s.t. $a \in B \wedge b \in B$，$\therefore bRa$。
- **传递性**：$\forall a, b, c \in A$，如果 $aRb \wedge bRc$，则 $\exists B, B' \in P$ s.t. $a, b \in B \wedge b, c \in B'$。由于 $b \in B \cap B'$，且 P 是划分，故 $B = B'$，$\therefore aRc$。

$\therefore R$ 是 A 上的等价关系.
下证 $P = \{[a]_R \mid a \in A\}$.

- "$\subseteq$"：$\forall B \in P$，$\exists a \in B$，只需证明 $[a]_R = B$。
  - (i) $\forall b \in [a]_R$，有 aRb，$\therefore \exists B' \in P$ s.t. $a, b \in B'$，故 $B = B'$，$\therefore b \in B$。
  - (ii) $\forall b \in B$，有 aRb，$\therefore b \in [a]_R$。综上，$[a]_R = B$。
- "$\supseteq$"：$\forall a \in A$，$\exists B \in P$ s.t. $a \in B$，只需证明 $[a]_R = B$。

□

5.2 闭包

定义 5.2.1 闭包 (Closure)
设 $R \subseteq A \times A$，对于性质 P，R' 是 R 的**闭包**，当且仅当：

1. $R \subseteq R'$;

2. R' 具有性质 P;

3. $\forall T \subseteq A\times A$，如果 $R\subseteq T$ 且 T 具有性质 P，则 $R'\subseteq T$。

定义 5.2.2
设 $R\subseteq A\times A$，定义：

$$R^1 = R,\quad R^{n+1} = R^n\circ R,\quad R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n,\quad R^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$$

引理 5.2.3
如果 $R\subseteq R' \wedge T\subseteq T'$，则 $R\circ T\subseteq R'\circ T'$。

引理 5.2.4
如果 $R_1, R_2, \ldots, T\subseteq A\times B$，且 $\forall n\in\mathbb{Z}^+$，有 $R_n\subseteq T$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\subseteq T$。

引理 5.2.5
$R^n\circ R^m = R^{n+m}$（$n,m\in\mathbb{Z}^+$）。

引理 5.2.6
R^+ 是传递的。

证明:
假设 $aR^+b\wedge bR^+c$，则 $\exists n,m\in\mathbb{Z}^+$ s.t. $aR^nb\wedge bR^mc$。

$$\therefore a(R^n\circ R^m)c \quad \text{即} \quad aR^{n+m}c$$

由于 $R^{n+m}\subseteq R^+$，故 aR^+c。$\therefore R^+$ 是传递的。 □

引理 5.2.7
如果 $R\subseteq T\subseteq A\times A$，且 T 是传递的，则 $R^+\subseteq T$。

证明:
$\forall n\in\mathbb{Z}^+$，证明 $R^n\subseteq T$：

- (1) 当 $n=1$ 时，$R^1 = R\subseteq T$。
- (2) 假设 $n=k$ 时 $R^k\subseteq T$，则 $R^{k+1} = R^k\circ R\subseteq T\circ T\subseteq T$（因为 T 是传递的）。

根据定义，$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n\subseteq T$。 □

定理 5.2.8
R^+ 是 R 的传递闭包。

证明:
由引理已证。 □

5.3 函数

定义 5.3.1 函数 (Functions)
$F \subseteq A \times B$ 是一个**函数**，当且仅当满足以下条件：

1. $\forall x \in A$，$\exists y \in B$ s.t. xFy。
2. $\forall x \in A$，如果 $xFy_1 \wedge xFy_2$，则 $y_1 = y_2$。

记法：$F : A \to B$ 表示 F 是从 A 到 B 的函数。
$\forall x \in A$，$F(x)$ 表示唯一的 $y \in B$ s.t. xFy。

性质 5.3.1.1
设 $F, G : A \to B$ 是两个函数，则 $F = G \iff \forall x \in A, F(x) = G(x)$.

定理 5.3.2
设 $F : B \to C$ 和 $G : A \to B$ 是两个函数，则：

1. $F \circ G : A \to C$ 是一个函数。
2. $\forall x \in A$，$(F \circ G)(x) = F(G(x))$。

6 序理论

6.1 完备偏序结构

广义的序结构包含了更加普适的抽象的理论框架, 在数学分析中我们仅使用最为基本, 直观的部分:

定义 6.1.1 偏序关系 (Partial Order)
设 S 是一个集合, $\leq$ 是 S 上的一个二元关系, 则称 $\leq$ 为 S 上的一个**偏序关系 (Partial Order)**, 若它满足:
(1) 反身性:

$$\forall a \in S, a \leq a$$

(2) 反对称性:

$$\forall a, b \in S, a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$$

(3) 传递性:

$$\forall a, b, c \in S, a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$$

定义 6.1.2 有界集 (Bounded Set)
设偏序结构 $(S, \leq)$, 子集 $X \subseteq S$, 则:

(1) 称元素 $a \in S$ 为 X 的一个**上界 (Upper Bound)**, 若:

$$\forall x \in S, x \leq a$$

(2) 称元素 $b \in S$ 为 X 的一个**下界 (Lower Bound)**, 若

$$\forall x \in S, b \leq x$$

子集 $X \subseteq S$ 称为是**有界 (Bounded)** 的, 若其同时拥有上, 下界.
注意: 上/下界不唯一, 且上/下界不一定在该子集内.

定义 6.1.3　全序集/线序集 (Linearly Ordered Set)
设偏序结构 $(S, \leq)$, 则若任意两个元素 $a, b \in S$ 都满足 $a \leq b$ 或 $b \leq a$, 则称 $(S, \leq)$ 为**全序集 (Total Order Set)** 或**线序集 (Linearly Ordered Set)**.

定义 6.1.4　上/下确界 (Supremum/Infimum)
设全序结构 $(S, \leq)$, 子集 $X \subseteq S$, 则:
(1) 集合 X 最小的上界 a 称为是 X 的一个**上确界 (Supremum)**, 记为 $a = \sup(X)$:

$$a = \sup(X) \iff \forall a' (a' \text{是} S \text{ 的上界}), a \leq a'$$

(2) 集合 X 最大的下界 b 称为是 X 的一个**下确界 (Infimum)**, 记为 $a = \inf(X)$:

$$b = \inf(X) \iff \forall b' (b' \text{是} S \text{ 的下界}), b \geq b'$$

定义 6.1.5　完备偏序 (Complete Partial Order)
序结构 $(S, \leq)$ 被称为是**完备 (Complete)** 的, 若 S 的任何有上/下界的子集有上/下确界:

$$\forall X \subseteq S (X \text{ 有上界}), \exists a = \sup(X) \in S$$

$$\forall X \subseteq S (X \text{ 有下界}), \exists b = \inf(X) \in S$$