

# 目录

<b>1</b>	<b>静电学</b>	<b>2</b>
1.1	静电场	2
1.2	静电系统	3
1.3	自由电荷激发电场	3
1.4	常见带电体模型	4
1.5	电场力做功	7
1.6	电偶极子	7
<b>2</b>	<b>静电感应</b>	<b>7</b>
2.1	导体的静电感应	7
2.2	电介质的极化	8
2.3	电容器	9
2.4	电势能	10
<b>3</b>	<b>电流与磁场</b>	<b>10</b>
3.1	电流模型	10
3.2	磁场	11
3.3	电流激发的磁场	11
3.4	磁通量	12
3.5	常见电流模型	12
3.6	平面载流线圈	12
<b>4</b>	<b>磁介质</b>	<b>13</b>
4.1	磁介质	13
<b>5</b>	<b>电磁感应</b>	<b>14</b>

# 1 静电学

## 1.1 静电场

### 定义 1.1.1 电荷 (Electric Charge)

定义电荷为  $I \cdot T$ , 记作  $Q$ ; 单位 **Coulomb** 为  $A \cdot s$ , 记作  $C$ .

注 1.1.1.1 这里定义的电荷是量纲.

### 定义 1.1.2 电势 (Electric Potential)

定义电势为  $E \cdot Q^{-1}$ , 记作  $V$ ; 单位 **Volt** 为  $N \cdot m \cdot C^{-1}$ , 记作  $V$ .

注 1.1.2.1 这里定义的电势是量纲.

### 结构 1.1.3 电场 (Electric Field)

定义电场包含以下信息:

1. 电场强度  $E_E : L_3 \rightarrow V$ :
2. 光滑性:  $E_E \in C^\infty(L_3)$ .

### 定义 1.1.4 电势差 / 电压 (Voltage)

设  $E$  是电场,  $a, b : L_3$ , 定义电势差为:  $V_E(a) - V_E(b)$ , 记作  $V_{ab}$ .

### 定义 1.1.5 电场强度 (Electric Field Intensity)

设  $E$  是电场,  $x : L_3$ , 定义  $E$  在  $x$  处的电场强度为:  $-\nabla V_E(x)$ , 记作  $E_E(x)$ .

定义  $E$  的电场强度函数为  $x \mapsto E_E(x)$ , 记作  $E_E$ .

### 性质 1.1.5.1 电场强度场是保守场

### 性质 1.1.5.2 电势差为电场强度的路径积分

设  $E$  是电场,  $a, b : L_3$ ,  $C$  是  $a$  到  $b$  的路径, 则:

$$V_{ab} = - \int_C E_E(r) \cdot dr$$

### 定义 1.1.6 电通量 (Electric Flux)

设  $E$  是电场,  $S$  是  $L_3$  上的 2 维流形, 定义  $E$  通过  $S$  的电通量为:

$$\int_S E_E(r) \cdot S(r) dr$$

记作  $\Phi_{eE}(S)$ .

## 1.2 静电系统

### 结构 1.2.1 电场源 (Electric Field Source)

定义电场源类型是物体的派生类型.

### 定义 1.2.2 电场源激发电场

设  $\cdot$  是电场源, 定义  $\cdot$  的激发电场, 记作  $E_{\cdot}$ .

### 结构 1.2.3 静电系统 (Electrostatic System)

定义静电系统包含以下信息:

1. 电场源集;
2. 外电场集.

### 定义 1.2.4 合电场

## 1.3 自由电荷激发电场

### 定义 1.3.1 真空介电常数 (Vacuum Permittivity)

定义真空介电常数为  $8.8541 \times 10^{-12}(\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2})$ , 记作  $\epsilon_0$ .

### 定义 1.3.2 静电力常数 / Coulomb 常数 (Coulomb's Constant)

定义静电力常数为  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , 记作  $k_e$ .

#### 性质 1.3.2.1 静电力常数估值

$$k_e \approx 8.9875 \times 10^9(\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2})$$

### 结构 1.3.3 带电体 / 自由电荷 (Charged Object / Free Charge)

定义带电体类型派生自`物体`, 承载以下信息:

1. 维度  $n : [3]$ ;
2.  $n$  维光滑流形  $M_Q$ ;
3. 电荷分布  $\rho_Q : M_Q \rightarrow \mathbb{Q} \cdot \mathbb{L}_{-n}$ ;

### 定义 1.3.4 带电体的总电荷量

设  $Q$  是`带电体`, 定义  $Q$  的总电荷量为:

$$\int_M \rho_Q(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

**公理 1.1 带电体激发的电场**

设  $Q$  是带电体, 则由  $Q$  激发的电场为:

1. 电势函数:

$$V_Q = \mathbf{x} \mapsto k_e \int_{M_Q} \frac{\rho_Q(\mathbf{r})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}\|} d\mathbf{r}$$

**定理 1.3.5 带电体激发电场的电场强度分布**

设  $Q$  是带电体,  $\mathbf{x}$  则:

$$\mathbf{E}_Q(\mathbf{x}) = k_e \int_{M_Q} \frac{\rho_Q(\mathbf{r})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}\|^2} (\widehat{\mathbf{x} - \mathbf{r}}) d\mathbf{r}$$

**定理 1.3.6 Gauss 定理 (Gauss's Theorem)**

设  $Q$  是带电体,  $M$  是  $\mathbb{L}_3$  上的 3 维流形,  $\partial M$  是 Gauss 面, 则:

$$\Phi_{eE}(\partial M) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_M \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

**证明:**

是 Stokes 定理的特例.

**定义 1.3.7 电势能 (Electric Potential Energy)**

设  $E$  是电场,  $Q$  是带电体, 定义  $Q$  在  $E$  中的电势能为:

$$\int_{M_Q} V_Q(\mathbf{V}) \cdot \rho(\mathbf{V}) d\mathbf{V}$$

**定义 1.3.8 电场力 / Coulomb 力 / 静电力 (Coulomb Force)**

设  $E$  是电场,  $Q$  是带电体, 定义  $E$  作用在  $Q$  上的电场力.

**1.4 常见带电体模型****结构 1.4.1 点电荷 (Electric Point Charge)**

定义点电荷类型是带电体的子类型, 维数为 0. 包含以下信息:

1. 带电量  $q : \mathbb{Q}$
2. 位置  $\mathbf{r} : \mathbb{L}_3$

**性质 1.4.1.1 点电荷的电势分布**

设  $(q, \mathbf{r})$  是点电荷,  $\mathbf{x} : \mathbb{L}_3$ , 则  $(q, \mathbf{r})$  激发电场在  $\mathbf{x}$  处的电势为:

$$\frac{k_e q}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}\|} (\widehat{\mathbf{x} - \mathbf{r}})$$

**例 1.4.2 电子的点电荷模型**

定义电子为点电荷类型的子类型.

$$q_e \approx -1.602 \times 10^{-19} \text{C}$$

电子电荷量记作  $e$ .

**定理 1.4.3 Coulomb 定律 (Coulomb's Law)**

设  $(q_1, \mathbf{r}_1), (q_2, \mathbf{r}_2)$  是点电荷,  $r := \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$ ,  $\mathbf{e}_r := \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}$ , 则:

$$\mathbf{f} = k_e \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

**结构 1.4.4 线带电体**

定义线带电体为带电体类型的子类型, 维数为 1.

包含以下信息:

1. 1 维光滑流形  $M$ ;
2. 线密度函数  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{Q} \cdot \mathbb{L}^{-1}$ .

**例 1.4.5 无限长均匀带电直线的电场**

设  $\mathbf{x}_0, \mathbf{v} : \mathbb{L}_3$ ,  $L := (\{\mathbf{x}_0 + k\mathbf{v} | k : \mathbb{R}\}, \cdot \mapsto \lambda)$  是线带电体,  $\mathbf{x} : \mathbb{L}_3$ ,  $d : \mathbb{L} := \mathbf{x}$  到  $L$  距离,  $\hat{\mathbf{e}}$  为  $L$  到  $\mathbf{x}$  的单位法向量, 则:

1. 电势:

$$V_L(\mathbf{x}) = 2k_e \lambda \ln d$$

2. 场强:

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{x}) = \frac{2k_e \lambda}{d} \hat{\mathbf{e}}$$

**证明:**

根据柱对称性, 场强方向总沿径向.

运用 Gauss 定理, 取半径为  $d$  的圆柱体, 高为  $h$ , 记作  $C$ , 则:

$$\Phi_{eL}(\partial C) = \oint_{\partial C} \mathbf{E}_L \cdot d\mathbf{S} = 2\pi \|\mathbf{E}_L\| dh$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_C \lambda dl = \frac{d\lambda}{\varepsilon_0}$$

$$\implies 2\pi \|\mathbf{E}_L\| dh = \frac{h\lambda}{\varepsilon_0}$$

$$\implies \|\mathbf{E}_L\| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d} = \frac{2k_e \lambda}{d}$$

当  $\lambda$  取值为正时, 场强方向沿径向向外.

电势分布求导即证

□

**例 1.4.6 圆环带电体的电场**

设  $R : \mathbb{L}, C := (\{(R \cos \theta, R \sin \theta, 0) | \theta \in [0, 2\pi)\}, \cdot \mapsto \lambda)$  是线带电体, 则:

**结构 1.4.7 面带电体**

定义面带电体为带电体类型的子类型, 维数为 2.

包含以下信息:

1. 2 维光滑流形  $M$ ;
2. 面密度函数  $\sigma : M \rightarrow \mathbb{Q} \cdot \mathbb{L}^{-2}$ .

**例 1.4.8 无限大均匀带电平面**

设  $P := (\{(x, y, 0) | x, y : \mathbb{L}\}, \cdot \mapsto \sigma)$  是面带电体, 则:

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

**证明:**

根据柱对称性, 场强方向总沿平面法向.

取底面积为  $S$  的柱体, 记作  $C$ , 则:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial C} \mathbf{E}_P \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_C \sigma dS \\ \Rightarrow \mathbf{E}_P \cdot 2S &= \frac{1}{\varepsilon_0} S \sigma \\ \Rightarrow \mathbf{E}_P &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \end{aligned}$$

□

**例 1.4.9 均匀带电球壳的电场**

设  $R : \mathbb{L}, B := (\{\mathbf{r} : \mathbb{L}^3 | \|\mathbf{r}\| = R\}, \cdot \mapsto \sigma)$  是连续带电体, 则:

**例 1.4.10 无限长均匀带电柱壳的电场**

设  $R : \mathbb{L}, C := (\{(R \cos \theta, R \sin \theta, z) | z : \mathbb{L}\}, \cdot \mapsto \sigma)$  是面带电体, 则:

$$\mathbf{E}_C(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \|\mathbf{r}\| < R \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 \|\mathbf{r}\|} \hat{\mathbf{r}}, & \|\mathbf{r}\| \geq R \end{cases}$$

**结构 1.4.11 体带电体**

定义体带电体为带电体类型的子类型, 维数为 3.

包含以下信息:

1. 3 维光滑流形  $M$ ;

2. 体密度函数  $\rho : M \rightarrow \mathbb{Q} \cdot \mathbb{L}^{-3}$ .

例 1.4.12 均匀带电球体的电场

## 1.5 电场力做功

## 1.6 电偶极子

### 结构 1.6.1 电偶极子 (Electric Dipole)

定义电偶极子类型承载以下信息:

1. 电偶极矩  $\mathbf{p} : \mathbb{L}^3 \cdot \mathbb{I} \cdot \mathbb{T}$ , 简称电矩:
2. 位置  $\mathbf{r} : \mathbb{L}^3$

#### 性质 1.6.1.1 电偶极子受合电场力为零

#### 性质 1.6.1.2 电偶极子受电场力矩

设  $D = (\mathbf{p}, \mathbf{r})$  是电偶极子,  $E$  是电场,  $\mathbf{E}$  是  $E$  的电场强度函数, 则  $D$  在电场  $E$  受力矩为:

$$\mathbf{M}_D = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

#### 性质 1.6.1.3 电偶极子在电场中的电势能

设  $D = (\mathbf{p}, \mathbf{r})$  是电偶极子,  $E$  是电场,  $\mathbf{E}$  是  $E$  的电场强度函数, 则  $D$  在电场  $E$  中的电势能为:

$$E = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$$

设  $E$  是匀强电场, 则  $D$  在电场  $E$  中的电势能为:

$$E = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

## 2 静电感应

### 2.1 导体的静电感应

#### 定义 2.1.1 带电体 (Charged Object)

定义带电体类型是带电体集合类型.

#### 定义 2.1.2 导体 (Conductor)

定义导体是带电体类型的子类型, 包含以下信息:

1. 内部带电体  $\rho_C$
2. 边界带电体  $\sigma_C$

**定义 2.1.3 静电平衡 (Static Electric Equilibrium)**

设  $E$  是电场,  $C$  是导体, 定义  $C$  在  $E$  中达到静电平衡当且仅当:

1. 导体内部总场强为零:

$$\forall \mathbf{r} \in \text{int } C, \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_C(\mathbf{r}) = 0$$

2. 导体边界总场强与边界流形正交:

$$\forall \mathbf{r} \in \partial C, (\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_C(\mathbf{r})) \perp T_{\mathbf{r}}\partial C$$

**性质 2.1.3.1 导体静电平衡时内部无电荷**

设  $E$  是电场,  $C$  是连续带电导体,  $C$  在  $E$  中达到静电平衡, 则:

$$\forall \mathbf{r} \in \text{int } C, \rho_C(\mathbf{r}) = 0$$

**性质 2.1.3.2 导体表面电场强度**

设  $E$  是电场,  $C$  是连续带电导体,  $C$  在  $E$  中达到静电平衡, 则:

$$\forall \mathbf{r} \in \partial C, \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{e}_r$$

**2.2 电介质的极化****结构 2.2.1 电介质 (Dielectric)**

定义电介质类型包含以下信息:

1. 极化率  $\chi_e$ ;

**定义 2.2.2 相对介电常数 (Relative Permittivity)**

设  $X$  是电介质, 定义  $X$  的相对介电常数为:  $1 + \chi_e$ , 记作  $\epsilon_r$ .

**定义 2.2.3 介电常数 (Permittivity)**

设  $X$  是电介质, 定义  $X$  的介电常数为:  $\epsilon_0 \epsilon_r$ , 记作  $\epsilon$ .

**定义 2.2.4 极化强度 (Polarize)**

设  $X$  是电介质,  $X$  的极化率为  $\chi_e$ ,  $E$  是电场, 定义  $X$  在  $E$  下的极化强度为:  $\chi_e \epsilon_0 E$ , 记作  $P$ .

**定义 2.2.5 极化电荷密度 (Polarization Intensity)**

设  $X$  是电介质,  $E$  是电场, 定义  $X$  在  $E$  下的极化电荷密度为:

$$P(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$$



定义 2.2.6 电位移矢量 (Electric Displacement)

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

定理 2.2.7 电介质中的 Gauss 定理 (Gauss's Theorem in Dielectric)

设  $X$  是电介质,  $E$  是电场,  $M$  是  $\mathbb{L}_3$  上的 3 维流形,  $\partial M$  是 Gauss 面, 则:

$$\int_{\partial M} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_M \rho_{free}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

## 2.3 电容器

结构 2.3.1 电容器 (Capacitor)

定义电容器类型包含以下信息:

1. 极板:  $A, B$ ;
2. 电介质  $D$ ;

例 2.3.2 平行板电容器

设  $A, B$  是带电平面,  $A, B$  面积为  $S$ ,  $A, B$  距离为  $d$ ,  $D$  是电介质,  $D$  的介电常数为  $\epsilon$ ,  $D$  充满  $A, B$  之间, 则定义  $(A, B, D)$  为平行板电容器.

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

例 2.3.3 柱形电容器

例 2.3.4 球形电容器

定义 2.3.5 电容器的串联与并联

设  $C_1, C_2$  是电容器, 则:

性质 2.3.5.1 串联电容器的等效电容

设  $C_1, C_2$  是电容器,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

性质 2.3.5.2 并联电容器的等效电容

$$C = C_1 + C_2$$

## 2.4 电势能

## 3 电流与磁场

## 3.1 电流模型

## 定义 3.1.1 电源 (Power Supply)

1. 非静电力场强函数  $E_k : \mathbb{L}_3 \rightarrow$ ;

## 定义 3.1.2 电动势

设  $X$  是电源, 定义  $X$  的电动势为

$$\int_{-}^{+} E_k \cdot dl$$

记作  $\mathcal{E}$ .

## 定义 3.1.3 电导率

设  $C$  是导体,  $n$  是载流子数密度,  $\tau$  是平均自由时间, 定义  $C$  的电导率为:

$$\frac{ne^2\tau}{2m}$$

记作  $\sigma$ .

## 定理 3.1.4 Ohm 定律 (Ohm's Law)

设  $I$  是电流,  $U$  是电压,  $R$  是电阻, 则有:

$$U = IR$$

## 定义 3.1.5 电流强度 (Electric-Current-Intensity)

设  $C$  是导体,  $S$  是  $C$  上的截面, 定义通过截面  $S$  的电流强度为:

$$\frac{dq}{dt}$$

## 定义 3.1.6 电流密度 (Electric Current Density)

设  $C$  是导体,  $\mathcal{I}$  是  $C$  上的电流, 定义  $\mathcal{I}$  的电流密度函数为:

$$x : C \mapsto$$

记作  $\mathbf{J}_{\mathcal{I}}$ .

## 定义 3.1.7 稳恒电流 (Steady Electric Current)

设  $C$  是导体,  $\mathcal{I}$  是  $C$  上的电流, 定义  $\mathcal{I}$  稳恒, 当且仅当:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathcal{I}}(x) = \cdot \mapsto \mathbf{0}$$

### 例 3.1.8 导线

## 3.2 磁场

### 定义 3.2.1 磁感应强度 (Magnetic-Induction-Intensity)

定义磁感应强度为  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{A}^{-1}$ , 记作  $B$ .

定义磁感应强度的单位 Tesla 为  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{A}^{-1}$ , 记作 T.

### 结构 3.2.2 磁场 (Magnetic Field)

定义磁场是场, 包含以下信息:

1. 磁感应强度函数  $B : \mathbb{L}_3 \rightarrow B$ ;

### 定义 3.2.3 磁通量 (Magnetic Flux)

设  $B$  是磁场,  $S$  是  $\mathbb{L}_3$  上的 2 维光滑流形, 定义  $B$  通过  $S$  的磁通量为:

$$\int_S B \cdot dS$$

记作  $\Phi_{mB}$ .

## 3.3 电流激发的磁场

### 定义 3.3.1 电流激发磁场

### 定义 3.3.2 磁力常数 (Magnetic Constant)

定义磁力常数为:

$$1 \times 10^{-7} (\text{N}^{-1} \cdot \text{A}^2)$$

记作  $k_m$ .

### 定义 3.3.3 真空磁导率 (Vacuum Magnetic Permeability)

定义真空磁导率为:

$$4\pi k_m$$

记作  $\mu_0$ .

### 性质 3.3.3.1 Biot-Savart 定律 (Biot-Savart Law)

设  $C$  是导线,  $\mathcal{I}$  是  $C$  上的电流, 则:

$$B = r : \mathbb{L}_3 \mapsto k_m \int_C \frac{I_{\mathcal{I}}(l) dl \times r}{\|l - r\|^3}$$

**定义 3.3.4 Lorentz 力 / 磁场力**

设  $B$  是**磁场**,  $Q$  是**带电体**,  $Q$  的带电量为  $q$ ,  $v$  是  $Q$  的速度, 定义  $B$  作用在  $Q$  上的 **Lorentz 力 / 磁场力**为:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

**结构 3.3.5 带电质点****3.4 磁通量****3.5 常见电流模型****例 3.5.1 匀速旋转均匀带电圆盘****例 3.5.2 无限长直导线**

设  $L = (\{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}, I)$  是导线, 则  $I$  在距  $L$  为  $d$  处激发的磁场为:

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

**例 3.5.3 通电柱体****例 3.5.4 通电圆环****例 3.5.5 无限长通电螺线管****3.6 平面载流线圈****例 3.6.1 平面载流线圈****性质 3.6.1.1 平面载流线圈的磁矩**

$$\boldsymbol{m} = IS\hat{\boldsymbol{S}}_{\perp}$$

**性质 3.6.1.2 磁场对载流线圈的磁力矩**

设  $B$  是**磁场**,

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}_B$$

## 4 磁介质

### 4.1 磁介质

#### 结构 4.1.1 磁介质 (Magnetic Dielectric)

定义磁介质类型包含以下信息:

1. 磁化率  $\chi_m$ ;

注 4.1.1.1 这里讨论的磁介质是各向同性磁介质.

顺磁质, 抗磁质, 铁磁质, 超导体.

#### 定义 4.1.2 磁导率 (Magnetic-Permeability)

设  $X$  是磁介质, 定义  $X$  的相对磁导率为:  $1 + \chi_m$ , 记作  $\mu_r$ .

定义  $X$  的绝对磁导率为:  $\mu_0 \mu_r$ , 记作  $\mu$ .

注 4.1.2.1 绝对磁导率简称磁导率.

#### 结构 4.1.3 磁化 (Magnetization)

设  $X$  是磁介质,  $B$  是磁场, 定义  $X$  在  $B$  中磁化包含以下信息:

1. 磁化强度  $M : L_3 \rightarrow I \cdot L^{-1}$

#### 定义 4.1.4 磁化电流

磁化面电流

#### 定义 4.1.5 磁场强度矢量

设  $B$  是磁场,  $X$  是磁介质,  $X$  在  $B$  中磁化, 定义  $B$  在  $X$  中的磁场强度矢量为:

$$\frac{B_B}{\mu_0} - M$$

记作  $H$ .

#### 性质 4.1.5.1 磁感应强度与磁场强度矢量的关系

设  $B$  是磁场,  $X$  是磁介质,  $X$  在  $B$  中磁化, 则:

$$B_B = \mu H$$

#### 定理 4.1.6 安培环路定理

设  $B$  是磁场,  $S$  是  $L_3$  上的 2 维光滑流形, 则:

$$\oint_{\partial S} H \cdot dl = \int_S dI$$

## 5 电磁感应

定理 5.0.1

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi_m}{dt}$$

定理 5.0.2

$$\mathcal{E} = \int_M (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{x}$$