

目录

1	拓扑空间与连续函数	2
1.1	基本概念	2
1.2	Hausdorff 空间	5
1.3	拓扑空间的构造	5
1.4	连续函数	7
2	连通性与紧致性	8
2.1	连通性	8
2.2	紧性	9
2.3	实直线上的紧致空间	10
3	度量空间	10
3.1	基本概念	10
3.2	分离定理	10

1 拓扑空间与连续函数

1.1 基本概念

定义 1.1.1 拓扑与拓扑空间 (Topology and Topological Space)

设 S 是类型, \mathcal{T} 是集合, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(S)$, 定义 \mathcal{T} 是 S 上的拓扑, 当且仅当:

1. \mathcal{T} 包含空集, 全集:

$$\emptyset, S \in \mathcal{T}$$

2. 对任意并运算封闭:

$$\forall \mathcal{X}, (\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup \mathcal{X} \in \mathcal{T})$$

3. 对交运算封闭:

$$\forall X, Y, (X, Y \in \mathcal{T} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{T})$$

定义 (S, \mathcal{T}) 为拓扑空间, 当且仅当 \mathcal{T} 是 S 上的拓扑.

定义 1.1.2 开集与闭集 (Open and Closed Sets)

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, X 是集合, $X \subseteq S$,

定义 X 是 (S, \mathcal{T}) 上的开集当且仅当: $X \in \mathcal{T}$.

定义 X 是 (S, \mathcal{T}) 上的闭集当且仅当: $S \setminus X \in \mathcal{T}$.

注 1.1.2.1 定义集合上的拓扑空间, 只需指定一个幂集上的一元谓词来定义什么是“开集”.

注 1.1.2.2 在语境中能够自然推断所讨论的拓扑空间时, 我们直接说某集合是开集或闭集.

性质 1.1.2.1 开集与闭集的运算对称性

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, X, Y 是闭集, 则 $X \cup Y$ 是闭集.

设 \mathcal{Z} 是集合族, $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{T}$, $\forall Z, (Z \in \mathcal{Z} \Rightarrow Z \text{ 是闭集})$, 则:

$$\bigcap \mathcal{Z} \text{ 是闭集}$$

证明:

证明: 运用 DeMorgan 公式即证. \square

注 1.1.2.3 开集和闭集的概念实际上是对称的, 可以通过指定闭集来同理定义拓扑空间.

定义 1.1.3 邻域 (Neighbourhood)

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, $x: S$, N 是集合, $N \subseteq S$, 定义 N 是 x 的邻域, 当且仅当:

$$\exists O, O \text{ 是 } (S, \mathcal{T}) \text{ 中的开集} \wedge x \in O \wedge O \subseteq N$$

定义 x 在 (S, \mathcal{T}) 上的邻域族为 $\{N | N \text{ 是 } x \text{ 的邻域}\}$, 记作 $\mathcal{V}(x)$.

定义 1.1.4 内部 (Interior)

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, E 是集合, $E \subseteq S$, 定义 E 的内部为:

$$\bigcup \{X \mid X \text{ 是开集} \wedge X \subseteq E\}$$

记作 $\overset{\circ}{E}$ 或 $\text{int } E$.

设 $x \in S$, 定义 x 是 E 的内点当且仅当: $x \in \text{int } E$.

注 1.1.4.1 集合的内部是集合的“最大”开子集, 即包含于该集合的所有开集的并.

性质 1.1.4.1 集合的内部是开集

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, E 是集合, $E \subseteq S$, 则: $\text{int } E$ 是开集.

性质 1.1.4.2 内点的等价定义

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, E 是集合, $E \subseteq S$, $x \in E$, 则:

$$x \in \text{int } E \iff E \in \mathcal{V}(x)$$

性质 1.1.4.3 集合是开集当且仅当其内部为自身

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, E 是集合, $E \subseteq S$, 则:

$$E \text{ 是开集} \iff E = \text{int } E$$

定义 1.1.5 闭包 (Closure)

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, E 是集合, $E \subseteq S$, 定义 E 的闭包为:

$$\bigcap \{X \mid X \text{ 是闭集} \wedge E \subseteq X\}$$

记作 \bar{E} 或 $\text{cl } E$.

设 $x \in S$, 定义 x 是 E 的闭包点当且仅当: $x \in \text{cl } E$.

注 1.1.5.1 集合的闭包是包含该集合的“最小”闭集, 即包含集合的所有闭集的交.

性质 1.1.5.1 集合的闭包是闭集

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, E 是集合, $E \subseteq S$, 则: $\text{cl } E$ 是闭集.

性质 1.1.5.2 闭包点的等价定义

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, E 是集合, $E \subseteq S$, $x \in S$, 则:

$$x \in \text{cl } E \iff \forall U \in \mathcal{V}(x), U \cap E \neq \emptyset$$

性质 1.1.5.3 集合是闭集当且仅当其闭包为自身

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, E 是集合, $E \subseteq S$, 则:

$$E \text{ 是闭集} \iff E = \text{cl } E$$

定义 1.1.6 去心邻域 (Deleted Neighbourhood)

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, $x \in S$, U 是集合, $U \subseteq S$, 定义 U 是 x 的去心邻域, 当且仅当:

$$U \cup \{x\} \in \mathcal{V}(x) \wedge x \notin U$$

定义 x 在 (S, \mathcal{T}) 上的去心邻域族为 $\{U | U \text{ 是 } x \text{ 的去心邻域}\}$, 记作 $\mathring{\mathcal{V}}(x)$.

定义 1.1.7 极限点 / 聚点 (Limit Point / Accumulation Point)

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, E 是集合, $E \subseteq S$, $x \in S$, 定义 x 是 E 的极限点, 当且仅当:

$$\forall U, U \in \mathring{\mathcal{V}}(x) \implies U \cap E \neq \emptyset$$

定义 1.1.8 导集 (Derived Set)

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, E 是集合, $E \subseteq S$, 定义 E 的导集为: $\{x | x \text{ 是 } E \text{ 的极限点}\}$, 记作 E' .

定义 1.1.9 孤立点 (Isolated Point)

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, E 是集合, $E \subseteq S$, $x \in E$, 定义 x 是 E 的孤立点, 当且仅当: $x \in \text{cl } E \setminus E'$.

性质 1.1.9.1 孤立点的等价定义

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, E 是集合, $E \subseteq S$, $x \in E$, 则:

$$x \in \text{cl } E \setminus E' \iff \exists U \in \mathcal{V}(x), U \cap E = \emptyset$$

定义 1.1.10 边界 (Boundary)

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, E 是集合, $E \subseteq S$, 定义 E 的边界为: $\text{cl } E \cap \text{cl}(S - E)$, 记作 ∂A .

定义 1.1.11 稠密集 (Dense Set)

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, E 是集合, $E \subseteq S$, 定义 E 是稠密集, 当且仅当: $\text{cl } E = S$.

定义 1.1.12 极限 (Limit)

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, $x \in S$, $\{x_n\} : \mathbb{N} \rightarrow S$, 定义 $\{x_n\}$ 以 x 为极限, 若:

$$\exists x \in S, \forall U(x), \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, x_n \in U(x)$$

记作 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

1.2 Hausdorff 空间

定义 1.2.1 Hausdorff 空间 (Hausdorff Space)

设 (S, \mathcal{T}) 是拓扑空间, 定义 (S, \mathcal{T}) 是 Hausdorff 空间, 当且仅当:

$$\forall x, y : S, x \neq y \implies \exists U(x), U(y), U(x) \cap U(y) = \emptyset$$

可以见得, Hausdorff 空间存在最细基, 这表明改空间的元素间存在一定独立性

注 1.2.1.1 Hausdorff 空间是强调任意两点间可用邻域区分的拓扑空间.

性质 1.2.1.1 Hausdorff 空间中点列极限唯一

在 Hausdorff 空间 (S, \mathcal{T}) 中, $\forall (S, \mathcal{T})$ 中的收敛序列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$, 满足上述条件的 x 是唯一的.

证明:

运用反证法.

若 (S, \mathcal{T}) 是 Hausdorff 的, 且假设 $\exists \{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$, 对于该序列有:

$$\exists x, y \in S : x \neq y, \forall U(x), U(y), \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N (N \in \mathbb{N}), x_n \in U(x) \cap U(y)$$

由 (S, \mathcal{T}) 的 Hausdorff 性质可知 $\exists U(x), U(y) : U(x) \cap U(y) = \emptyset$.

取满足上述条件的 $U(x), U(y)$, 则当 $n > N$ 时, 有 $x_n \in U(x) \cap U(y) = \emptyset$, 矛盾.

\therefore 此时只能存在一个满足条件的 x .

1.3 拓扑空间的构造

定义 1.3.1 生成拓扑 (Generated Topology)

设 S 是集合, \mathfrak{B} 是集合族, $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(S)$,

1. 覆盖性:

$$\bigcup \mathfrak{B} = S$$

2. 生成性: 设 B_1, B_2 是集合, $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$, $x \in B_1 \cap B_2$, 则:

$$\exists B_3, (B_3 \in \mathfrak{B} \wedge x \in B_3 \wedge B_3 \subseteq B_1 \cap B_2)$$

定义由 \mathfrak{B} 生成的拓扑为:

$$\left\{ X \mid \exists B \subseteq \mathfrak{B}, X = \bigcup B \right\}$$

定义由 \mathfrak{B} 生成的拓扑空间为:

$$(S, \text{由 } \mathfrak{B} \text{ 生成的拓扑})$$

例 1.3.2 通常拓扑

在扩充实数集 \mathbb{R} 上依据偏序关系 “<” 定义开区间:

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} (a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\})$$

并如下定义拓扑 \mathcal{T} , 称为 \mathbb{R} 上的**通常拓扑**:

$$O \in \mathcal{T} \iff \forall x \in O, \exists (a, b) : x \in (a, b) \subseteq O$$

\mathcal{T} 中的非空元素必可表示为有限个或可数无限个互不相交的开区间之并:

$$\forall O \in \mathcal{T} (O \neq \emptyset), \exists \bigcup \{(a_i, b_i) | i \in I, \text{card}(I) \in \mathbb{N}^+ \cup \{\aleph_0\} \wedge \forall i, j, (a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset\} = O$$

例 1.3.3 序拓扑 (Order Topology)

若 S 是一个全序集, 设 \mathcal{B} 为由下述所有集合构成的族:

- (1) S 的所有开区间 (a, b)
 - (2) 所有形如 $[a_0, b)$ 的区间, 其中 a_0 为 S 的最小元 (存在的话)
 - (3) 所有形如 $(a, b_0]$ 的区间, 其中 b_0 为 S 的最大元 (存在的话)
- 则 \mathcal{B} 是 S 的某拓扑的一个基, 此拓扑称**序拓扑 (Order Topology)**

定义 1.3.4 拓扑基 (Topological Basis)

设 (S, \mathcal{T}) 是**拓扑空间**, \mathfrak{B} 是集合族, $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}$, 定义 \mathfrak{B} 是 (S, \mathcal{T}) 的**拓扑基**, 当且仅当:

$$\mathcal{T} = \text{由 } \mathfrak{B} \text{ 生成的拓扑}$$

反例 1.3.5 拓扑空间的基不唯一

定义 1.3.6 诱导拓扑 / 子空间拓扑 (Induced Topology / Subspace Topology)

设 (S, \mathcal{T}) 为拓扑空间, S' 是集合, $S' \subseteq S$, 定义由 S' 诱导的子空间拓扑为:

$$\{O' | \exists O \in \mathcal{T}, O' = O \cap S'\}$$

注 1.3.6.1 由子集诱导的子空间拓扑是从原拓扑中以该子集为边界“截取”出来的.

性质 1.3.6.1 子空间拓扑是合法拓扑

定义 1.3.7 积拓扑 (Product Topology)

设 $\{(S_i, \mathcal{T}_i) | i \in I\}$ 是一族拓扑空间, 如下构造 S, \mathcal{T} :

$$S := \prod_{i \in I} S_i$$

$$\mathcal{T} := \{X | X \in \mathcal{P}(S); \forall x \in X, \exists \text{ ???}\}$$

* 本章之后, 在不混淆拓扑空间与其对应集合的情况下将拓扑空间 (S, \mathcal{T}) 简记为 S .

1.4 连续函数

定义 1.4.1 连续 (Continuous)

设有拓扑空间 X, Y , 映射 $f: X \rightarrow Y$; 设 $x \in X, f(x) := y \in Y$. f 称为是在 x 处连续的, 若:

$$\forall U(y) \in \mathcal{V}(y), \exists U(x) \in \mathcal{V}(x) (f(U(x)) \subseteq U(y))$$

f 称为是 X 的连续映射, 若 f 在 X 中的每一点连续.

将 $X \rightarrow Y$ 全体连续映射的集合记为 $\mathcal{C}(X, Y)$

定理 1.4.2

Hausdorff 空间之间的连续映射将收敛数列映射为收敛数列.

设拓扑空间 X, Y 是 Hausdorff 的, 映射 $f: X \rightarrow Y$ 在 $x \in X$ 处连续, 则:

$$\forall \{x_n\}_{n=0}^{+\infty} (x_n \in X (\forall n \in \mathbb{N}) \wedge \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x) \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)$$

此定理的另一种表述方式是: $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ 与 f 可交换, 若 f 连续且 X 与 Y 都是 Hausdorff 的.

证明:

$$y := f(x); f \text{ 在 } x \text{ 处连续} \implies \forall U(y) \in \mathcal{V}(y), \exists U(x) \in \mathcal{V}(x) : f(U(x)) \subseteq U(y)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \implies \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, x_n \in U(x) \Rightarrow f(x_n) \in f(U(x)) \subseteq U(y)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x) \square$$

定理 1.4.3

设拓扑空间 X, Y, Z , 映射 $f: X \rightarrow Y$ 在 $x \in X$ 处连续, 映射 $g: Y \rightarrow Z$ 在 $f(x) \in Y$ 处连续, 则 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 在 x 处连续.

证明:

$$y := f(x), z := g(y)$$

$$\forall U(z) \in \mathcal{V}_Z(z), g \text{ 在 } y \text{ 处连续} \implies \exists U(y) \in \mathcal{V}_Y(y) : g(U(y)) \subseteq U(z)$$

$$f \text{ 在 } x \text{ 处连续} \implies \exists U(x) \in \mathcal{V}_X(x) \subseteq X : f(U(x)) \subseteq U(y)$$

$$\therefore g \circ f(U(x)) \subseteq g(U(y)) \subseteq U(z) \implies g \circ f \text{ 在 } x \text{ 处连续} \square$$

定理 1.4.4

设拓扑空间 $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y), (f: X \rightarrow Y) \in \text{Con}(X, Y)$ 有两种等价描述:

(1) 开集的原像是开集:

$$\forall S (f(S) \in \mathcal{T}_Y) \implies S \in \mathcal{T}_X$$

(2) 闭集的原像是闭集:

$$\forall S((Y - f(S)) \in \mathcal{T}_Y) \implies (X - S) \in \mathcal{T}_X$$

证明:

证明: 先证明开集情况.

(1) \implies :

$$f(S) \in \mathcal{T}_Y \implies (\forall y \in f(S) \implies f(S) \in \mathcal{V}(y))$$

$$\forall x_0 \in S, y_0 := f(x_0)$$

$$(f : X \rightarrow Y) \in \text{Con}(X, Y) \implies \exists U(x) \in \mathcal{V}(x) (\forall x \in U(x) \implies f(x) \in Y)$$

定义 1.4.5 同胚 (Homeomorphism)

设拓扑空间 $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$, 称映射 $f : X \rightarrow Y$ 是 X 到 Y 上的**同胚**, 若 f 是双射, 且 $f \in \text{Con}(X, Y), f^{-1} \in \text{Con}(Y, X)$.

若 $\exists X$ 到 Y 的同胚, 则称 X 与 Y 是同胚的.

定理 1.4.6

设拓扑空间 $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$, $f \in \text{Con}(X, Y)$ 是双射, 则 f 是 X 到 Y 的同胚当且仅当:

$$\forall S \in \mathcal{T}_X \implies f(S) \in \mathcal{T}_Y$$

$$\forall S((X - S) \in \mathcal{T}_X) \implies (Y - f(S)) \in \mathcal{T}_Y$$

2 连通性与紧致性

2.1 连通性

定义 2.1.1 连通性 (Connectedness)

拓扑空间 (S, \mathcal{T}) 称为是连通的, 若 S 即开又闭的子集只有 S 和 \emptyset , 即:

$$\mathcal{P}(S) \cap \{X | X \in \mathcal{T}, (S - X) \in \mathcal{T}\} = \{\emptyset, S\}$$

这意味着 S 无法写成两个不相交的非空开集之并, 即 S 的**分割**不存在.

于此同时, S 的子集 S' 是**连通的**

性质 2.1.1.1

设拓扑空间 S 的子集 X 是连通的, 则 $Y(X \subseteq Y \subseteq \text{cl } X)$ 是连通的.

特别地, $\text{cl } X$ 是连通的.

性质 2.1.1.2

设 X 是连通的拓扑空间, Y 是拓扑空间, 则局部常值函数 $f : X \rightarrow Y$ 是常值函数:

$$f : X \rightarrow Y (\forall x_0 \in X, \exists U(x_0)(\forall x \in U(x_0), f(x) = C)) \implies \forall x \in X, f(x) = C$$

即, 若定义域连通, 则所有点分别保持常值的函数, 整体保持常值.

定义 2.1.2 线性连续统 (Linear Continuum)

定义 2.1.3 道路连通 (Path Connected)

设拓扑空间 (S, \mathcal{T}) , $x, y \in S$, 称映射 $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$ 是 S 上的道路, 使得 $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ 且 γ 连续. 拓扑空间 (S, \mathcal{T}) 称为是道路连通的, 若 S 的任意两点间存在道路, 即:

$$\forall x, y \in S, \exists \gamma: [0, 1] \rightarrow S, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y, \gamma \in \text{Con}([0, 1], S)$$

证明:

不妨设 $f: [0, 1] \rightarrow \text{cl } S$ 是连接 $(0, 0)$ 点到 $\text{cl } S$ 中一点的道路.

显然, 存在 $\{x_n\}, x_n \downarrow 0$, 使 $f(x_n) = (-1)^n \neq 0$

$$\because f(0) = 0$$

$$\therefore f \notin \text{Con}([0, 1], \text{cl } S)$$

Absurd!

故 $\text{cl } S$ 不是道路连通的.

2.2 紧性

定义 2.2.1 紧集 (Compact Set)

设拓扑空间 (S, \mathcal{T}) , $S' \subset S$, 若 S' 的任何开覆盖均为有限子覆盖, 则 S' 为紧集.

定理 2.2.2

设 T 是 S 的一个子空间. 那么, T 是紧的当且仅当对于 T 中的每一个开覆盖, 存在一个有限子集是 T 的开覆盖.

证明:

若 T 是紧致的, 设 $\mathcal{A}' = \{A_\alpha\}'$ 是 T 由 T 中开集构成的一个开覆盖. 选取合适的 $\{A_\alpha\}$, 有 $A'_\alpha = A_\alpha \cap T$

性质 2.2.2.1

Hausdorff 空间的紧子集是闭的.

紧空间的闭子集是紧的.

实直线上闭区间是紧致的.

性质 2.2.2.2

连续映射将紧集映射为紧集.

注：以下内容我本来想放到第五章，不过为了 Urysohn 引理的完整性，还是放在前面来了。

定理 2.2.3 管状引理 (Tube Lemma)

考虑积空间 $X \times Y$ ，其中 Y 是紧的。对于每一个包含 $x_0 \times Y$ 的开集 N ，存在 x_0 的邻域 U ，使得 $U \times Y$ 被 N 包含。

注意 Y 是紧的，若否，则管状引理不一定正确。如：取 $X = Y = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$, $N = \{x \times y \mid |x| < \frac{1}{y^2+1}\}$

2.3 实直线上的紧致空间

3 度量空间

3.1 基本概念

定义 3.1.1 度量空间 / 距离空间 (Metric Space)

设 S 是类型, $d: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, 定义 d 是 S 上的度量, 当且仅当:

1. 正定性:

$$\forall x, y : S, d(x, y) \geq 0$$

2. 同一性:

$$\forall x, y : S, d(x, y) = 0 \iff x = y$$

3. 对称性:

$$\forall x, y : S, d(x, y) = d(y, x)$$

4. 三角不等式:

$$\forall x, y, z : S, d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$$

定义 (S, d) 为度量空间当且仅当 d 是 S 上的度量。

定义 3.1.2 开球 (Open Ball)

设 (S, d) 为度量空间, $x : S$, $r : \mathbb{R}$,

在度量空间中, 包含一点 x 的开集, 由与 x 的距离小于某个固定的正数 r 的一切点组成, 这个开集称为以 x 为中心, r 为半径的 **开球**, 记作 $U(x, r)$ 或 $B_r(x)$

特别的, 在数轴上, 我们称关于 x 对称的开区间 $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ 为 x 的 ε -邻域, 记作 $B_\varepsilon(x)$ 或 $U(x, \varepsilon)$
去心邻域记作 $U(\dot{x}, \varepsilon)$

3.2 分离定理