1 范畴论

定义 1.0.1 范畴(Category) ()

一个对象集合$\mathrm{Ob}(\mathbb{C})$(元素称为**对象(Object)**)和一个态射集合$\mathrm{Mor}(\mathbb{C})$(元素称为**态射(Morphism)**)组成一个**范畴(Category)**:

$$\mathbb{C} = (\mathrm{Ob}(\mathbb{C}), \mathrm{Mor}(\mathbb{C}))$$

其中有映射$s, t : \mathrm{Mor}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$:对于$\mathrm{Mor}(\mathbb{C})$中的态射, s给出**来源**, t给出**目标**, 即:

$$\mathrm{Ob}(\mathbb{C}) := \{X, Y\}, \mathrm{Mor}(\mathbb{C}) := \{f\}, \mathbb{C} := (\mathrm{Ob}(\mathbb{C}), \mathrm{Mor}(\mathbb{C}))$$

$$\mathbb{C}: \ X \xrightarrow{f} Y$$

$$\mathrm{Mor}(\mathbb{C}) \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$$

$$s(f) = X, t(f) = Y$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y) := s^{-1}(X) \cap t^{-1}(Y)$$

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y)$称为Hom-集, 其元素称为从$X$到$Y$的态射.

$$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C}) \Longrightarrow \mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, X)$$

Id_X称为X到自身的**恒等态射**. $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$, 定义态射间的**合成运算**("$\circ$"):

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Z)$$

$$(f, g) \mapsto f \circ g$$

其中态射在合成运算下须满足类似幺半群的结构:
(1)满足结合律:

$$\forall f, g, h \in \mathrm{Mor}(\mathbb{C}), \exists f \circ (g \circ h), (f \circ g) \circ h \Longrightarrow f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

故上述等式可写作$f \circ g \circ h$
(2)来源与目标各自的恒等映射的合成分别具有左, 右恒等元的性质:

$$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y), f \circ \mathrm{Id}_X = f = \mathrm{Id}_Y \circ f$$

运算$\circ$在不致混淆时可省略书写.

定义 1.0.2 空范畴 ()

范畴$\mathbb{C}$称为**空范畴**, 记作$\mathbf{0}$, 若$\mathrm{Ob}(\mathbb{C}) = \mathrm{Mor}(\mathbb{C}) = \varnothing$.

定义 1.0.3 同构 ()

态射$X \xrightarrow{f} Y$称为是一个**同构**, 若:

$$\exists Y \xrightarrow{g} X : fg = \mathrm{Id}_Y, gf = \mathrm{Id}_X$$

从X到Y的全体同构组成从X到Y的**同构集**, 记作$\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(X, Y)$.

定义 1.0.4 自同态与自同构 ()

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, X)$$

称作X的自**同态集**, 其中的元素称为X的**自同态(Endomorphism)**, $(\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X), \circ)$是幺半群;

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(X) := \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(X, X)$$

称作X的**自同构集**, 其中的元素称为X的**自同构(Automorphism)**, $(\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(X), \circ)$是群.