

# 目录

<b>1</b>	<b>静电学</b>	<b>2</b>
1.1	静电场	2
1.2	静电系统	3
1.3	自由电荷激发电场	3
1.4	常见带电体模型	4
1.5	电场力做功	6
1.6	电偶极子	6
<b>2</b>	<b>静电感应</b>	<b>7</b>
2.1	导体的静电感应	7
2.2	电介质的极化	8
2.3	电容器	8
2.4	电势能	9
<b>3</b>	<b>电流</b>	<b>9</b>
3.1	电荷层面的电流模型	9
3.2	磁场	10
3.3	磁通量	11
3.4	常见电流模型	11

# 1 静电学

## 1.1 静电场

### 定义 1.1.1 电荷 (Electric Charge)

定义电荷为  $I \cdot T$ , 记作  $Q$ ; 单位 Coulomb 为  $A \cdot s$ , 记作  $C$ .

### 定义 1.1.2 电势 (Electric Potential)

定义电势为  $E \cdot Q^{-1}$ , 记作  $V$ ; 单位 Volt 为  $N \cdot m \cdot C^{-1}$ , 记作  $V$ .

### 结构 1.1.3 电场 (Electric Field)

定义电场类型派生自场, 包含以下信息:

1. 电势函数  $V_E : L_3 \rightarrow V$ :
2. 光滑性:  $V_E \in C^\infty(L_3)$ .

### 定义 1.1.4 等势线

### 定义 1.1.5 电场线

### 定义 1.1.6 电势差 / 电压 (Voltage)

设  $E$  是电场,  $a, b : L_3$ , 定义电势差为:  $V_E(a) - V_E(b)$ , 记作  $V_{ab}$ .

### 定义 1.1.7 电场强度 (Electric Field Intensity)

设  $E$  是电场,  $x : L_3$ , 定义  $E$  在  $x$  处的电场强度为:  $-\nabla V_E(x)$ , 记作  $E_E(x)$ .

定义  $E$  的电场强度函数为  $x \mapsto E_E(x)$ , 记作  $E_E$ .

### 性质 1.1.7.1 电场强度场是保守场

### 性质 1.1.7.2 电势差为电场强度的路径积分

设  $E$  是电场,  $a, b : L_3$ ,  $C$  是  $a$  到  $b$  的路径, 则:

$$V_{ab} = - \int_C E_E(r) \cdot dr$$

### 定义 1.1.8 电通量 (Electric Flux)

设  $E$  是电场,  $S$  是  $L_3$  上的 2 维流形, 定义  $E$  通过  $S$  的电通量为:

$$\int_S E_E(r) \cdot S(r) dr$$

记作  $\Phi_E(S)$ .

## 1.2 静电系统

### 结构 1.2.1 电场源 (Electric Field Source)

定义电场源类型是物体的派生类型.

### 定义 1.2.2 电场源激发电场

设  $\cdot$  是电场源, 定义  $\cdot$  的激发电场, 记作  $E_{\cdot}$ .

### 结构 1.2.3 静电系统 (Electrostatic System)

定义静电系统包含以下信息:

1. 电场源集;
2. 外电场集.

### 定义 1.2.4 合电场

## 1.3 自由电荷激发电场

### 定义 1.3.1 真空介电常数 (Vacuum Permittivity)

定义真空介电常数为  $8.8541 \times 10^{-12}(\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2})$ , 记作  $\epsilon_0$ .

### 定义 1.3.2 静电力常数 / Coulomb 常数 (Coulomb's Constant)

定义静电力常数为  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , 记作  $k_e$ .

#### 性质 1.3.2.1 静电力常数估值

$$k_e \approx 8.9875 \times 10^9(\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2})$$

### 结构 1.3.3 带电体 / 自由电荷 (Charged Object / Free Charge)

定义带电体类型派生自`物体`, 承载以下信息:

1. 维度  $n : [3]$ ;
2.  $n$  维光滑流形  $M_Q$ ;
3. 电荷分布  $\rho_Q : M_Q \rightarrow \mathbb{Q} \cdot \mathbb{L}_{-n}$ ;

### 定义 1.3.4 带电体的总电荷量

设  $Q$  是`带电体`, 定义  $Q$  的总电荷量为:

$$\int_M \rho_Q(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

**公理 1.1 带电体激发的电场**

设  $Q$  是带电体, 则由  $Q$  激发的电场为:

1. 电势函数:

$$V_Q = \mathbf{x} \mapsto k_e \int_{M_Q} \frac{\rho_Q(\mathbf{r})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}\|} d\mathbf{r}$$

**定理 1.3.5 带电体激发电场的电场强度分布**

设  $Q$  是带电体,  $\mathbf{x}$  则:

$$\mathbf{E}_Q(\mathbf{x}) = k_e \int_{M_Q} \frac{\rho_Q(\mathbf{r})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}\|^2} (\widehat{\mathbf{x} - \mathbf{r}}) d\mathbf{r}$$

**定理 1.3.6 Gauss 定理 (Gauss's Theorem)**

设  $Q$  是带电体,  $M$  是  $\mathbb{L}_3$  上的 3 维流形,  $\partial M$  是 Gauss 面, 则:

$$\Phi_E(\partial M) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_M \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

**证明:**

是 Stokes 定理的特例.

**定义 1.3.7 电势能 (Electric Potential Energy)**

设  $E$  是电场,  $Q$  是带电体, 定义  $Q$  在  $E$  中的电势能为:

**定义 1.3.8 电场力 / Coulomb 力 / 静电力 (Coulomb Force)**

设  $E$  是电场,  $Q$  是带电体, 定义  $E$  作用在  $Q$  上的电场力.

**1.4 常见带电体模型****结构 1.4.1 点电荷 (Electric Point Charge)**

定义点电荷类型是带电体的子类型, 维数为 0. 包含以下信息:

1. 带电量  $q: \mathbb{Q}$
2. 位置  $\mathbf{r}: \mathbb{L}_3$

**性质 1.4.1.1 点电荷的电势分布**

设  $(q, \mathbf{r})$  是点电荷,  $\mathbf{x}: \mathbb{L}_3$ , 则  $(q, \mathbf{r})$  激发电场在  $\mathbf{x}$  处的电势为:

$$\frac{k_e q}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}\|} (\widehat{\mathbf{x} - \mathbf{r}})$$

**例 1.4.2 电子的点电荷模型**

定义电子为点电荷类型的子类型.

$$q_e \approx -1.602 \times 10^{-19} \text{C}$$

电子电荷量记作  $e$ .

**定理 1.4.3 Coulomb 定律 (Coulomb's Law)**

设  $(q_1, \mathbf{r}_1), (q_2, \mathbf{r}_2)$  是点电荷,  $r := \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$ ,  $\mathbf{e}_r := \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}$ , 则:

$$\mathbf{f} = k_e \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

**结构 1.4.4 离散带电体****性质 1.4.4.1****结构 1.4.5 线带电体**

定义线带电体为带电荷类型的子类型, 维数为 1.

包含以下信息:

1. 1 维光滑流形  $M$ ;
2. 线密度函数  $\lambda: M \rightarrow \mathbb{Q} \cdot \mathbb{L}^{-1}$ .

**例 1.4.6 无限长带电直线的电场**

设  $L := (\{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{L}\}, \cdot \mapsto \lambda)$  是线带电体, 则:

1.

$$\mathbf{E}_L(d \cos \theta, d \sin \theta, \cdot) = \frac{2k_e \lambda}{d} (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

2.

$$\Phi_L(d \cos \theta, d \sin \theta, \cdot) = 2k_e \lambda \ln d + C$$

证明:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}_L(d \cos \theta, d \sin \theta, z)\| &= \|\mathbf{E}_L(d, 0, 0)\| \\ &= k_e \lambda \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(d, 0, -z)}{(\sqrt{d^2 + z^2})^3} dz \right\| \\ &= k_e \lambda d \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{d^2 + z^2})^3} dz \\ &= \frac{2k_e \lambda}{d} \end{aligned}$$

### 例 1.4.7 圆环带电体的电场

#### 结构 1.4.8 面带电体

定义面带电体为带电体类型的子类型, 维数为 2.

包含以下信息:

1. 2 维光滑流形  $M$ ;
2. 面密度函数  $\sigma : M \rightarrow \mathbb{Q} \cdot \mathbb{L}^{-2}$ .

### 例 1.4.9 无限大均匀带电平面

设  $P := (\{(x, y, 0) | x, y : \mathbb{L}\}, \cdot \mapsto \sigma)$  是面带电体, 则  $P$  激发的电场在  $\mathbf{r} : \mathbb{L}^3$  处的电场强度为:

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

### 例 1.4.10 均匀带电球壳的电场

设  $R : \mathbb{L}$ ,  $B := (\{\mathbf{r} : \mathbb{L}^3 | \|\mathbf{r}\| = R\}, \cdot \mapsto \sigma)$  是连续带电体, 则:

### 例 1.4.11 无限长均匀带电柱壳的电场

设  $R : \mathbb{L}$ ,  $C := (\{(R \cos \theta, R \sin \theta, z) | z : \mathbb{L}\}, \cdot \mapsto \sigma)$  是面带电体, 则:

$$\mathbf{E}_C(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \|\mathbf{r}\| < R \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0 \|\mathbf{r}\|} \hat{\mathbf{r}}, & \|\mathbf{r}\| \geq R \end{cases}$$

#### 结构 1.4.12 体带电体

定义体带电体为带电体类型的子类型, 维数为 3.

包含以下信息:

1. 3 维光滑流形  $M$ ;
2. 体密度函数  $\rho : M \rightarrow \mathbb{Q} \cdot \mathbb{L}^{-3}$ .

### 例 1.4.13 均匀带电球体的电场

## 1.5 电场力做功

## 1.6 电偶极子

### 结构 1.6.1 电偶极子 (Electric Dipole)

定义电偶极子类型承载以下信息:

1. 电偶极矩  $\mathbf{p} : \mathbb{L}^3 \cdot \mathbb{I} \cdot \mathbb{T}$ , 简称电矩;
2. 位置  $\mathbf{r} : \mathbb{L}^3$

性质 1.6.1.1 电偶极子受合电场力为零

性质 1.6.1.2 电偶极子受电场力力矩

设  $D = (\mathbf{p}, \mathbf{r})$  是电偶极子,  $E$  是电场,  $\mathbf{E}$  是  $E$  的电场强度函数, 则  $D$  在电场  $E$  受力矩为:

$$\mathbf{M}_D = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

性质 1.6.1.3 电偶极子在电场中的电势能

设  $D = (\mathbf{p}, \mathbf{r})$  是电偶极子,  $E$  是电场,  $\mathbf{E}$  是  $E$  的电场强度函数, 则  $D$  在电场  $E$  中的电势能为:

$$E = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$$

设  $E$  是匀强电场, 则  $D$  在电场  $E$  中的电势能为:

$$E = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

## 2 静电感应

### 2.1 导体的静电感应

定义 2.1.1 带电体 (Charged Object)

定义带电体类型是带电体集合类型.

定义 2.1.2 导体 (Conductor)

定义导体是带电体类型的子类型, 包含以下信息:

1. 内部带电体  $\rho_C$
2. 边界带电体  $\sigma_C$

定义 2.1.3 静电平衡 (Static Electric Equilibrium)

设  $E$  是电场,  $C$  是导体, 定义  $C$  在  $E$  中达到静电平衡当且仅当:

1. 导体内部总场强为零:

$$\forall \mathbf{r} \in \text{int } C, \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_C(\mathbf{r}) = 0$$

2. 导体边界总场强与边界流形正交:

$$\forall \mathbf{r} \in \partial C, (\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_C(\mathbf{r})) \perp T_{\mathbf{r}} \partial C$$

性质 2.1.3.1 导体静电平衡时内部无电荷

设  $E$  是电场,  $C$  是连续带电导体,  $C$  在  $E$  中达到静电平衡, 则:

$$\forall \mathbf{r} \in \text{int } C, \rho_C(\mathbf{r}) = 0$$

**性质 2.1.3.2 导体表面电场强度**

设  $E$  是电场,  $C$  是连续带电导体,  $C$  在  $E$  中达到静电平衡, 则:

$$\forall \mathbf{r} \in \partial C, \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{e}_r$$

**2.2 电介质的极化****结构 2.2.1 电介质 (Dielectric)**

定义电介质类型包含以下信息:

1. 极化率  $\chi_e$ ;

**定义 2.2.2 相对介电常数 (Relative Permittivity)**

设  $X$  是电介质, 定义  $X$  的相对介电常数为:  $1 + \chi_e$ , 记作  $\epsilon_r$ .

**定义 2.2.3 介电常数 (Permittivity)**

设  $X$  是电介质, 定义  $X$  的介电常数为:  $\epsilon_0 \epsilon_r$ , 记作  $\epsilon$ .

**定义 2.2.4 极化强度 (Polarize)**

设  $X$  是电介质,  $X$  的极化率为  $\chi_e$ ,  $E$  是电场, 定义  $X$  在  $E$  下的极化强度为:  $\chi_e \epsilon_0 E$ , 记作  $P$ .

**定义 2.2.5 极化电荷密度 (Polarization Intensity)**

设  $X$  是电介质,  $E$  是电场, 定义  $X$  在  $E$  下的极化电荷密度为:

$$P(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$$

**性质 2.2.5.1 电位移矢量 (Electric Displacement)**

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

**2.3 电容器****结构 2.3.1 电容器 (Capacitor)**

定义电容器类型包含以下信息:

1. 极板:  $A, B$ ;
2. 电介质  $D$ ;

**例 2.3.2 平行板电容器**

设  $A, B$  是带电平面,  $A, B$  面积为  $S$ ,  $A, B$  距离为  $d$ ,  $D$  是电介质,  $D$  的介电常数为  $\epsilon$ ,  $D$  充满  $A, B$



之间, 则定义  $(A, B, D)$  为平行板电容器.

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

例 2.3.3 柱形电容器

例 2.3.4 球形电容器

定义 2.3.5 电容器的串联与并联

设  $C_1, C_2$  是电容器, 则:

性质 2.3.5.1 串联电容器的等效电容

设  $C_1, C_2$  是电容器,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

性质 2.3.5.2 并联电容器的等效电容

$$C = C_1 + C_2$$

## 2.4 电势能

# 3 电流

## 3.1 电荷层面的电流模型

定义 3.1.1 电源 (Power Supply)

1. 非静电力场强函数  $E_k : \mathbb{L}_3 \rightarrow$ ;

定义 3.1.2 电动势

设  $X$  是电源, 定义  $X$  的电动势为

$$\int_{-}^{+} E_k \cdot dl$$

记作  $\mathcal{E}$ .

定义 3.1.3 电导率

设  $C$  是导体,  $n$  是载流子数密度,  $\tau$  是平均自由时间, 定义  $C$  的电导率为:

$$\frac{ne^2\tau}{2m}$$

记作  $\sigma$ .

#### 定理 3.1.4 Ohm 定律 (Ohm's Law)

设  $I$  是电流,  $U$  是电压,  $R$  是电阻, 则有:

$$U = IR$$

#### 定义 3.1.5 电流强度 (Electric-Current-Intensity)

设  $C$  是导体,  $S$  是  $C$  上的截面, 定义通过截面  $S$  的电流强度为:

$$\frac{dq}{dt}$$

#### 定义 3.1.6 电流密度 (Electric Current Density)

设  $C$  是导体,  $\mathcal{I}$  是  $C$  上的电流, 定义  $\mathcal{I}$  的电流密度函数为:

$$x : C \mapsto$$

记作  $\mathbf{J}_{\mathcal{I}}$ .

#### 定义 3.1.7 稳恒电流 (Steady Electric Current)

设  $C$  是导体,  $\mathcal{I}$  是  $C$  上的电流, 定义  $\mathcal{I}$  稳恒, 当且仅当:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathcal{I}}(x) = \cdot \mapsto 0$$

#### 例 3.1.8 导线

### 3.2 磁场

#### 定义 3.2.1 磁力常数 (Magnetic Constant)

定义磁力常数为:

$$1 \times 10^{-7} (\text{N}^{-1} \cdot \text{A}^2)$$

记作  $k_m$ .

#### 定义 3.2.2 真空磁导率 (Vacuum Magnetic Permeability)

定义真空磁导率为:

$$4\pi k_m$$

记作  $\mu_0$ .

#### 定义 3.2.3 磁感应强度 (Magnetic-Induction-Intensity)

定义磁感应强度为  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{A}^{-1}$ , 记作  $\mathbf{B}$ .

定义磁感应强度的单位 Tesla 为  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{A}^{-1}$ , 记作  $\mathbf{T}$ .

### 结构 3.2.4 磁场 (Magnetic Field)

定义磁场是场, 包含以下信息:

1. 磁感应强度函数  $B : \mathbb{L}_3 \rightarrow \mathbb{B}$ ;

### 定义 3.2.5 电流激发磁场

#### 性质 3.2.5.1 Biot-Savart 定律 (Biot-Savart Law)

设  $C$  是导线,  $\mathcal{I}$  是  $C$  上的电流, 则:

$$B = \mathbf{r} : \mathbb{L}_3 \mapsto k_m \int_C \frac{\mathcal{I}_{\mathcal{I}}(l) dl \times \mathbf{r}}{\|\mathbf{l} - \mathbf{r}\|^3}$$

### 定义 3.2.6 Lorentz 力 / 磁场力

设  $B$  是磁场,  $Q$  是带电体,  $Q$  的电量为  $q$ ,  $\mathbf{v}$  是  $Q$  的速度, 定义  $B$  作用在  $Q$  上的 Lorentz 力 / 磁场力为:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

### 结构 3.2.7 带电质点

## 3.3 磁通量

### 定义 3.3.1 磁通量 (Magnetic Flux)

## 3.4 常见电流模型

### 例 3.4.1 匀速旋转均匀带电圆盘

### 例 3.4.2 无限长直导线

设  $L = (\{(0, 0, z) | z \in \mathbb{L}\}, \mathcal{I})$  是导线, 则  $\mathcal{I}$  在距  $L$  为  $d$  处激发的磁场为:

$$\frac{\mu_0 \mathcal{I}}{2\pi d}$$

### 例 3.4.3 通电圆环

### 例 3.4.4 无限长通电螺线管