目录

1 经典电磁学

1.1 静电场

定义 1.1.1 电荷 (Electric Charge)
定义**电荷**为 $\mathsf{I} \cdot \mathsf{T}$, 记作 Q.
定义电荷的单位 **Column** 为 $\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$, 记作 C.

结构 1.1.2 带电体 (Charged Object)
定义**带电体**类型承载以下信息:

1. 物体 O;
2. 维度 $n \in \{0, 1, 2, 3\}$
3. n 维光滑流形 M;
4. 电荷分布 $\rho : M \to \mathsf{Q} \cdot \mathsf{L}_{-n}$;

例 1.1.3 电子电量
电子电量约为 $-1.602 \times 10^{-19}\mathrm{C}$, 记作 e.

公理 1.1 静电力 / Coulomb 力 (Coulomb Force)
设 Q 是带电体, 则:

定义 1.1.4 电势 (Electric Potential)
定义**电势**为 $\mathsf{E} \cdot \mathsf{Q}^{-1}$, 记作 V.
定义**电势**的单位 **Volt** 为 $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{C}^{-1}$, 记作 V.

结构 1.1.5 电场 (Electric Field)
定义**电场**类型承载以下信息:

1. 场 E;
2. **电势函数** $\Phi_E : \mathsf{L}_3 \to \mathsf{V}$:

定义 1.1.6 等势线

定义 1.1.7 电场强度 (Electric Field Intensity)
设 E 是电场, $\boldsymbol{x} : \mathsf{L}_3$, 定义 E 在 $\boldsymbol{x}$ 处的**电场强度**为: $-\nabla\Phi_E(\boldsymbol{x})$, 记作 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$.
定义 E 的**电场强度函数**为 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$, 记作 $\boldsymbol{E}$.

定义 1.1.8 电场线

定义 1.1.9 电通量 (Electric Flux)
设 E 是电场, S 是 L_3 上的 2 维流形, 定义 E 通过 S 的**电通量**为:

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

记作 $\mathit{\Phi}_E(S)$.

定理 1.1.10 Gauss 定理 (Gauss's Theorem)
设 E 是电场, V 是 L_3 上的 3 维流形, 则:

$$\mathit{\Phi}_E(\partial V) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

证明:
是 Stokes 定理的特例.

1.2 点电荷

定义 1.2.1 真空介电常数 (Vacuum Permittivity)
定义**真空介电常数**为 $8.8541 \times 10^{-12}(\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{C}^{-2})$, 记作 ε_0.

定义 1.2.2 静电力常数 / Coulomb 常数 (Coulomb's Constant)
定义**静电力常数**为 $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, 记作 k_e.

性质 1.2.2.1 静电力常数估值
定义 $k_e : \mathsf{F} \cdot \mathsf{L}^2 \cdot \mathsf{Q}^{-2}$.

$$k_e \approx 8.9875 \times 10^9(\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{C}^{-2})$$

结构 1.2.3 点电荷 (Electric Point Charge)
定义**点电荷**类型承载以下信息:

1. 带电量 $q : \mathsf{Q}$
2. 位置 $\boldsymbol{r} : \mathsf{L}_3$

性质 1.2.3.1 点电荷的电势分布
设 $(q, \boldsymbol{r})$ 是点电荷, $\boldsymbol{x} : \mathsf{L}_3$, 则 $(q, \boldsymbol{r})$ 激发电场在 $\boldsymbol{x}$ 处的电势为:

$$\frac{k_e q}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}\|} \widehat{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r})}$$

公理 1.2 Coulomb 定律 (Coulomb's Law)
设 $(q_1, \boldsymbol{r}_1), (q_2, \boldsymbol{r}_2)$ 是点电荷, $r := \|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\|$, $\boldsymbol{e}_r := \dfrac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{\|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\|}$, 则:

$$\boldsymbol{f} = k_e \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \boldsymbol{e}_r$$

1.3 电荷集

定理 1.3.1 离散点电荷集的电力叠加原理 (Principle of Superposition)
设 Q 是点电荷集, $\operatorname{card} Q \in \mathbb{N}$, 则 Q 激发的电场为:

$$\sum_{q \in Q} E_q$$

1.4 电偶极子

结构 1.4.1 电偶极子 (Electric Dipole)
定义**电偶极子**类型承载以下信息:

1. **电偶极矩** $\boldsymbol{p} : \mathsf{L}^3 \cdot \mathsf{I} \cdot \mathsf{T}$, 简称**电矩**:
2. **位置** $\boldsymbol{r} : \mathsf{L}^3$

性质 1.4.1.1 电偶极子受合电场力为零

性质 1.4.1.2 电偶极子受电场力力矩
设 $D = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$ 是电偶极子, E 是电场, $\boldsymbol{E}$ 是 E 的电场强度函数, 则 D 在电场 E 受力矩为:

$$\boldsymbol{M}_D = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

性质 1.4.1.3 电偶极子在电场中的电势能
设 $D = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$ 是电偶极子, E 是电场, $\boldsymbol{E}$ 是 E 的电场强度函数, 则 D 在电场 E 中的电势能为:

$$E = \nabla(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E})$$

设 E 是匀强电场, 则 D 在电场 E 中的电势能为:

$$E = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}$$

1.5 连续带电体

定义 1.5.1 连续带电体
定义**连续带电体**包含以下信息:

1. 维数 $n \in \{1,2,3\}$;
2. n 维光滑流形 M;
3. 电荷密度函数 $\rho : M \to \mathsf{L}^{-n} \cdot \mathsf{I} \cdot \mathsf{T}$.

注 1.5.1.1 习惯上, 记线密度函数为 λ, 面密度函数为 σ, 体密度函数为 ρ.

性质 1.5.1.1 连续带电体的总电荷量
设 $Q := (M, \rho)$ 是连续带电体, 则 Q 的总电荷量为:

$$\int_M \rho(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

性质 1.5.1.2 连续线带电体激发电场的电场强度分布
设 $Q := (M, \rho)$ 是连续线带电体, 则 Q 激发电场在 $\boldsymbol{x}$ 处的电场强度为:

$$\boldsymbol{E}_Q(\boldsymbol{x}) = k_e \int_M \frac{\rho(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}\|^3} \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

性质 1.5.1.3 连续带电体的电势分布
设 $Q := (M, \rho)$ 是连续带电体, 则 Q 激发电场在 $\boldsymbol{x}$ 处的电势为:

$$\Phi_Q(\boldsymbol{x}) = k_e \int_M \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}\|} \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

例 1.5.2 无限长带电直线的电场
设 $L := (\{(x,0,0) | x : \mathsf{L}\}, \cdot \mapsto \lambda)$ 是连续带电体, 则:

$$\boldsymbol{E}_L(d\cos\theta, d\sin\theta, \cdot) = \frac{2k_e\lambda}{d}(\cos\theta, \sin\theta, 0)$$
$$\Phi_L(d\cos\theta, d\sin\theta, \cdot) = 2k_e\lambda \ln d + C$$

证明:

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{E}_L(d\cos\theta, d\sin\theta, z)\| &= \|\boldsymbol{E}_L(d,0,0)\| \\
&= k_e\lambda\left\|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(d,0,-z)}{(\sqrt{d^2+z^2})^3}\mathrm{d}z\right\| \\
&= k_e\lambda d\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{d^2+z^2})^3}\mathrm{d}z \\
&= \frac{2k_e\lambda}{d}
\end{aligned}
$$

例 1.5.3 圆环带电体的电场

例 1.5.4 无限大均匀带电平面的电场是匀强电场

设 $P := (\{(x,y,0)|x,y:\mathsf{L}\}, \cdot\mapsto\sigma)$ 是连续带电体, 则 P 激发的电场在 $\boldsymbol{r}:\mathsf{L}^3$ 处的电场强度为:

$$\boldsymbol{E}_P(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

例 1.5.5 均匀带电球壳的电场

设 $R:\mathsf{L}$, $B := (\{\boldsymbol{r}:\mathsf{L}^3 | \|\boldsymbol{r}\| = R\}, \cdot\mapsto\sigma)$ 是连续带电体,

例 1.5.6 无限长均匀带电柱壳的电场

设 $R:\mathsf{L}$, $C := (\{(R\cos\theta, R\sin\theta, z)|z:\mathsf{L}\}, \cdot\mapsto\sigma)$ 是连续带电体, 则:

$$\boldsymbol{E}_C(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0, & \|\boldsymbol{r}\| < R \\ \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0\|\boldsymbol{r}\|}\hat{\boldsymbol{r}}, & \|\boldsymbol{r}\| \geq R \end{cases}$$

例 1.5.7 均匀带电球体的电场

1.6 电场力做功

2 静电感应

2.1 导体的静电感应

定义 2.1.1 导体 (Conductor)

定义**导体**是带电体类型的子类型.

定义 2.1.2 静电平衡 (Static Electric Equilibrium)

设 E 是电场, C 是连续带电导体, 定义 C 在 E 中达到**静电平衡**当且仅当:

1. 导体内部总场强为零:
$$\forall \boldsymbol{r} \in \mathrm{int} C, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_C(\boldsymbol{r}) = 0$$
2. 导体边界总场强与边界流形正交:
$$\forall \boldsymbol{r} \in \partial C, (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_C(\boldsymbol{r})) \perp T_{\boldsymbol{r}} \partial C$$

性质 2.1.2.1 导体静电平衡时内部无电荷
设 E 是电场, C 是连续带电导体, C 在 E 中达到静电平衡, 则:
$$\forall \boldsymbol{r} \in \mathrm{int} C, \rho_C(\boldsymbol{r}) = 0$$

性质 2.1.2.2 导体表面电场强度
设 E 是电场, C 是连续带电导体, C 在 E 中达到静电平衡, 则:
$$\forall \boldsymbol{r} \in \partial C, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}$$

2.2 电介质

定义 2.2.1 电介质模型 (Dielectric)
定义**电介质**是带电体类型的子类型, 包含以下信息:
1. 流形 M;
2. 极化强度函数 $\boldsymbol{P} : M \to \mathsf{L}^3 \cdot \mathsf{I} \cdot \mathsf{T}$;

定义 2.2.2 极化强度 (Polarization Intensity)