

# 图论笔记

Fulcrum4Math

## 目录

<b>1</b>	<b>基本概念</b>	<b>2</b>
1.1	图	2
1.2	简单无向图	2
1.3	简单有向图	3
1.4	Hamilton 路径与圈	3
1.5	$n$ -部图与完全图	3
1.6	Ramsey 问题	4
<b>2</b>	<b>树</b>	<b>4</b>
2.1	基本概念	4
2.2	有根树	4
2.3	最小生成树	4
2.4	树的遍历	5
2.5	Huffman 编码	5

# 1 基本概念

## 1.1 图

### 定义 1.1.1 图 (Graph)

集合对  $G := (V, E)$  称为是一个图, 若  $\text{card}(V) \in \mathbb{N}$ ,  $E \subseteq \mathbb{N} \times V^2$ . 其中  $V$  中元素称为顶点 (Vertices),  $E$  中元素称为边 (Edges).

称边  $e \in E$  连接 (Connect) 顶点  $a, b \in V$ , 若  $\exists i \in \mathbb{N}, (i, a, b) \in E$ , 此时称顶点  $a, b$  相邻 (Adjacent).

连接顶点与自身的边称为一个自环 (Loop).

### 定义 1.1.2 子图 (Subgraph)

### 定义 1.1.3 诱导子图 (Induced Subgraph)

## 1.2 简单无向图

### 定义 1.2.1 简单图 (Simple Graph)

图  $G := (V, E)$  称为是一个简单图, 若  $G$  中不存在自环, 且任意两顶点之间至多有一条边.

### 定义 1.2.2 无向图 (Undirected Graph)

图  $G := (V, E)$  称为是一个无向图, 若  $E$  对称.

此时可将  $E$  视为其关于对称关系的商集.

### 定义 1.2.3 邻域 (Neighbourhood)

设  $G := (V, E)$  是简单无向图, 顶点  $v \in V$ , 全体与  $v$  相邻的点称为  $v$  的邻域, 记作  $\mathcal{N}(v)$ .

### 定义 1.2.4 度 (Degree)

### 性质 1.2.4.1 握手定理 (The Handshaking Theorem)

### 定义 1.2.5 路径 (Path)

### 定义 1.2.6 圈 (Circuit)

图  $G := (V, E)$  中的圈, 是指一个路径, 其首尾相连, 且不包含重复顶点.

定义 1.2.7 连通图 (Connected Graph)

定义 1.2.8 连通分支 (Connected Component)

### 1.3 简单有向图

定义 1.3.1 有向图 (Directed Graph)

图  $G := (V, E)$  称为是一个有向图, 若它不是无向图.

定义 1.3.2 出 / 入邻域 (In / Out-Neighbourhood)

设  $G := (V, E)$  是简单无向图, 顶点  $v \in V$ , 全体与  $v$  相邻的点称为  $v$  的邻域, 记作  $\mathcal{N}(v)$ .

定义 1.3.3 出 / 入度 (In / Out-Degree)

性质 1.3.3.1 握手定理 (The Handshaking Theorem)

定义 1.3.4 有向路径 ()

定义 1.3.5 有向圈 (Directed Circuit)

定义 1.3.6 强连通图 (Strongly Connected Graph)

定义 1.3.7 强连通分支 (Strongly Connected Component)

### 1.4 Hamilton 路径与圈

### 1.5 $n$ -部图与完全图

定理 1.5.1 Turan 定理 (Turan's Theorem)

## 1.6 Ramsey 问题

# 2 树

## 2.1 基本概念

定义 2.1.1 树 (Tree)

性质 2.1.1.1 树是最大无圈图 ()  
对树添加边将产生圈.

性质 2.1.1.2 树是最小连通图 ()  
对树删除边将破坏连通性.

性质 2.1.1.3 树的边数固定 ()  
设  $T$  是一个树, 则  $\text{card}(E) = \text{card}(V) - 1$ .

定义 2.1.2 子树 (Subtree)

定义 2.1.3  $m$ -叉树 ( $m$ -ary Tree)

性质 2.1.3.1  $m$ -叉树的节点数可控 ()

## 2.2 有根树

定义 2.2.1 有根树 (Rooted Tree)

定义 2.2.2 高度 (Height)

## 2.3 最小生成树

定义 2.3.1 生成树 (Spanning Tree)

性质 2.3.1.1 无向图连通性的生成树判定 ()

定义 2.3.2 最小生成树 (Minimal Spanning Tree)

定义 2.3.3 Prim 算法 (Prim's Algorithm)

性质 2.3.3.1 Prim 算法正确性 ()

性质 2.3.3.2 Prim 算法完备性 ()

性质 2.3.3.3 Prim 算法复杂度 ()

定义 2.3.4 Kruskal 算法 (Kruskal's Algorithm)

性质 2.3.4.1 Kruskal 算法正确性 ()

性质 2.3.4.2 Kruskal 算法完备性 ()

性质 2.3.4.3 Kruskal 算法复杂度 ()

## 2.4 树的遍历

定义 2.4.1 深度优先搜索 (Depth First Search (DFS))

性质 2.4.1.1 回边总是连接祖孙节点 ()

## 2.5 Huffman 编码