实分析笔记

Fulcrum4Math

目录

1 Lebesgue 测度

1.1 σ-代数与测度空间

定义 1.1.1 σ-代数 (σ-Algebra)
$\Sigma_S \subseteq \mathcal{P}(S)$, 定义在集合 S 上的结构 (S, Σ_S) 称为是 S 上的一个 **σ-代数**当且仅当:
(1) S 在 Σ_S 内;

$$S \in \Sigma_S$$

(2) Σ_S 对可数并封闭:

$$\forall \{X_i | i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma_S, \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i \in \Sigma_S$$

(3) Σ_S 对补集封闭:

$$\forall X \in \Sigma_S, S - X \in \Sigma_S$$

性质 1.1.1.1 σ-代数的等价定义 ()
(1) 可替换为 $\varnothing$ 在 Σ_S 内;

$$\varnothing \in \Sigma_S$$

(2) 可替换为 Σ_S 对可数交封闭:

$$\forall \{X_i | i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma_S, \bigcap_{i\in\mathbb{N}} X_i \in \Sigma_S$$

证明:
(1) 由 σ-代数对取补运算封闭性即证.
(2) 由 De Morgan 公式即证.

定义 1.1.2 测度与测度空间 (Measure and Measure Space)
设 (S, Σ_S) 是 σ-代数, 集函数 $\mu : \Sigma_S \to \bar{\mathbb{R}}$ 称为是定义在 Σ_S 上的**测度**, 若:
(1) 测度非负:

$$\forall X \in \Sigma_S, \mu(X) \geq 0$$

(2) 可数可加性:

$$\forall \{X_i | i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma_S (i \neq j \implies X_i \cap X_j = \varnothing),$$
$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(X_i)$$

此时结构 (S, Σ_S, μ) 称为**测度空间**.

性质 1.1.2.1 空集零测 ()

$$\mu(\varnothing) = 0$$

证明:

$$\mu(\varnothing)+\mu(\varnothing)=\mu(\varnothing\cup\varnothing)=\mu(\varnothing)\Longrightarrow\mu(\varnothing)=0$$

性质 1.1.2.2 子集测度小于等于全集测度 ()

$$A\subseteq B\Longrightarrow\mu(A)\leq\mu(B)$$

证明:
用子集及其补表示全集即证:

$$B=A\cup(B-A)\Longrightarrow\mu(B)=\mu(A)+\mu(B-A)\geq\mu(A)+0=\mu(A)\square$$

定义 1.1.3 Borel 集族 (Borel Sets)
Borel 集族 (Borel Sets)
设拓扑空间 $(S,\mathcal{T}_S)$, S 上的 **Borel 集族** $\mathcal{B}(S)$是由拓扑 $\mathcal{T}_S$ 生成的最小 σ-代数:

$$\mathcal{B}(S)=\bigcap_{\mathcal{T}_S\subseteq\Sigma_S}\Sigma_S$$

定义 1.1.4 $\mathbb{R}$ 上在通常拓扑意义下的 Borel 测度 ()
在对 $\mathbb{R}$ 赋予通常拓扑得到的拓扑空间 $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ 上, 定义在 Borel 集上的满足区间的长度为端点之差得到的测度称为 **Borel 测度**:

$$\forall a,b(a<b)\in\bar{\mathbb{R}},\mu\,(a,b)=b-a$$

性质 1.1.4.1 单点集零测 ()

$$\forall x\in\mathbb{R},\mu\{x\}=0$$

证明:
考虑以点为中心的开球，并令半径任意小即可:

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+,\{x\}\subseteq\left(x-\frac{\varepsilon}{2},x+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+,\mu\{x\}\leq\varepsilon\Longrightarrow\mu\{x\}=0\square$$

性质 1.1.4.2 区间上的 Borel 测度等于区间长度 ()

$$\forall a,b\in\bar{\mathbb{R}},\mu\,(a,b)=\mu\,(a,b]=\mu\,[a,b)=\mu\,[a,b]=b-a$$

性质 1.1.4.3 可数集零测 ()

$$\forall S \subseteq \mathbb{R}(\operatorname{card} S = \aleph_0), \mu(S) = 0$$

证明:
由单点集零测性质, 用单点集的可数并表示可数集即证. □

反例 1.1.5 Cantor 集 (Cantor Set)
Cantor 集是零测的, 但不可数.

定理 1.1.6 Borel 测度唯一 ()

$$\forall X \in \Sigma_S, \mu_1(X) = \mu_2(X)$$

1.2 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度

定义 1.2.1 完备测度空间 (Complete Measure Space)
测度空间 (S, Σ_S, μ) 称为是一个**完备测度空间**, 若每个零测集的全体子集都可测:

$$\forall N(\mu(N) = 0) \in \Sigma_S, \mathcal{P}(N) \subseteq \Sigma_S$$

定义 1.2.2 Lebesgue 内/外测度 (Lebesgue Inner/Outer Measure)
首先定义开集与紧集上的 Lebesgue 测度值:
???
对于拓扑空间 $(S, \mathcal{T})$, 用开集外逼近得到的集函数 $\mu^* : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ 称为是 $\mathcal{P}(S)$ 上的外测度:

$$\mu^*(X) = \inf_{O \in \mathcal{T}} \sum_{X \subseteq O} \mu(O)$$

用紧集内逼近得到的集函数 $\mu_* : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ 称为是 $\mathcal{P}(S)$ 上的内测度:

$$\mu_*(X) = \sup_{C\text{是紧集}} \sum_{C \subseteq X} \mu(C)$$

定义 1.2.3 Lebesgue 可测集 (Lebesgue Measurable Set)
集合 X 被称为是 **Lebesgue 可测**的, 若其内测度与外测度相等:

$$\mu^*(X) = \mu_*(X)$$

性质 1.2.3.1 Constantin-Caratheodory 条件 ()
X 是 Lebesgue 可测的当且仅当 X 满足:

$$\forall A \subseteq S, \mu^*(A) = \mu^*((S - X) \cap A) + \mu^*(X \cap A)$$

反例 1.2.4 Vitali 集 (Vitali Set)
构造:

性质 1.2.4.1 外测度为零的集合 Lebesgue 可测 ()

$$\mu^*(S) = 0 \Longrightarrow S \text{ 是 Lebesgue 可测的}$$

定义 1.2.5 可测包/核 (Measurable Hull/Kernel)
对集合 $S \subseteq \mathbb{R}$, 定义其**可测包**集族为包含 S 的最小可测集族, 其**可测核**

定理 1.2.6 Lebesgue 可测集族构成 σ-代数 ()
Lebesgue 可测集族构成 $\mathbb{R}$ 上的一个 σ-代数.

推论 1.2.6.1 Lebesgue 可测集族由 Borel 集与零测集生成 ()
Lebesgue 可测集族是由 $\mathcal{B}(S)$ 与全体零测集生成的 σ-代数.

定义 1.2.7 Lebesgue 测度 (Lebesgue Measure)
将 Lebesgue 内/外测度限制在 Lebesgue 可测集上得到的集函数称为 **Lebesgue 测度**.

$$\mu := \mu^*|_{\mathcal{L}} = \mu_*|_{\mathcal{L}}$$

性质 1.2.7.1 Borel 测度是 Lebesgue 测度在 Borel 集上的限制 ()

$$\mu_{\mathcal{B}} = \mu_{\mathcal{L}}|_{\mathcal{B}(S)}$$

性质 1.2.7.2 Lebesgue 测度完备 ()

性质 1.2.7.3 Lebesgue 测度平移不变 ()

定理 1.2.8 Littlewood 第一原理 ()
有限测度的可测集接近于区间的有限并:
设 E 为有限测度的可测集, 则 $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists$ 有限空交的开区间族 $\{I_i\}_{i=1}^n$, 记其并为 T, 满足:

$$\mu^*(E - F) + \mu^*(F - E) < \varepsilon$$

2 Lebesgue 可测函数

*本章的“可测”均指 Lebesgue 可测.
*本章默认实值函数的值域是扩充实数集 $\bar{\mathbb{R}}$.

*称一个性质“几乎处处”成立指该性质在除了某零测集外处处成立.

2.1 Lebesgue 可测函数

定义 2.1.1 Lebesgue 可测函数 (Lebesgue Measurable Functions)
设 (S, Σ_S, μ) 是测度空间, 函数 $f: S \to \bar{\mathbb{R}}$ 称为是 **Lebesgue 可测函数**, 若 $\forall \alpha \in \bar{\mathbb{R}}$, 集合 $\{x \in S | f(x) > \alpha\}$ 是可测的.

性质 2.1.1.1 Lebesgue 可测函数的等价定义 ()
设 S 是可测集, 则下列叙述互相等价:
(1) $\forall \alpha \in \bar{\mathbb{R}}, \{x \in S | f(x) > \alpha\}$ 是可测集.
(2) $\forall \alpha \in \bar{\mathbb{R}}, \{x \in S | f(x) \geq \alpha\}$ 是可测集.
(3) $\forall \alpha \in \bar{\mathbb{R}}, \{x \in S | f(x) < \alpha\}$ 是可测集.
(4) $\forall \alpha \in \bar{\mathbb{R}}, \{x \in S | f(x) \leq \alpha\}$ 是可测集.

例 2.1.2 可测集定义域上的连续实值函数可测 ()

例 2.1.3 定义在区间上的单调函数可测 ()

反例 2.1.4 不可测函数 ()
构造

性质 2.1.4.1 可测函数单点值的原像可测 ()
设 $f: S \to \bar{\mathbb{R}}$ 是可测函数, 则 $\forall \alpha \in \bar{\mathbb{R}}, \{x \in S | f(x) = \alpha\}$ 是可测集.

性质 2.1.4.2 函数可测当且仅当开集的原像可测 ()
设 $f: S \to \bar{\mathbb{R}}$ 是实值函数, 则 f 是可测函数当且仅当开集的原像是可测集.

性质 2.1.4.3 可测函数的拼合 ()
设可测集 S 有可测子集 T, 则实值函数 f 在 S 上可测当且仅当 $f|_T$ 和 f_{S-T} 均可测.

性质 2.1.4.4 可测函数的传递性 ()
设 f 在 S 上可测, $f = g$ 在 S 上几乎处处成立, 则 g 在 S 上可测.

性质 2.1.4.5 可测函数代数 ()
设 $f, g: S \to \bar{\mathbb{R}}$ 是可测函数, 则:
(1) $\forall k, l \in \bar{\mathbb{R}}$, 函数 $kf + lg$ 是可测函数.
(2) 函数 fg 是可测函数.

性质 2.1.4.6 可测函数的复合稳定性 ()

性质 2.1.4.7 可测函数的逐点收敛稳定性 ()
若定义在 D 上的可测函数序列 f_n 几乎处处逐点收敛于 f, 则 f 可测.

2.2 简单逼近定理

定义 2.2.1 指示/示性/特征函数 (Indicator/Characteristic Function)
集合 $A \subseteq S$ 的指示函数 $\chi_A : S \to \{0,1\}$ 定义为:

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

性质 2.2.1.1 集合可测当且仅当其指示函数可测 ()

定义 2.2.2 简单函数/单纯函数 (Simple Function)
定义在可测集上的实值函数 $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ 称为是**简单函数**, 若其值域是有限集.

性质 2.2.2.1 简单函数代数 (Simple Function Algebra)

性质 2.2.2.2 简单函数的典范表示 ()
简单函数能表示为有限个集合的指示函数的线性组合:

$$f = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \chi_{A_i} (A_i = \{x \in A_i | f(x) = C_i\})$$

引理 2.2.3 简单逼近引理 (Simple Function Approximation Lemma)
可测函数可以被简单函数良好控制:
设 $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ 是可测函数, f 在 E 上有界, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists E$ 上的简单函数 $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ 满足:

$$\forall x \in E, \varphi_\varepsilon \le f \le \psi_\varepsilon \wedge 0 \le \psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon < \varepsilon$$

定理 2.2.4 简单逼近定理 (Simple Function Approximation Theorem)
可测函数可以被简单函数逼近:
定义在可测集 E 上的扩充实值函数 E 是可测的 $\iff \exists E$ 上的简单函数序列 $\{\varphi_n\}$ 满足:
(1) $\{\varphi_n\}$ 逐点收敛到 f;
(2)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, |\varphi_n| \le |f|$$

其中若 f 非负, 则可选取满足上述条件且递增的 $\{\varphi_n\}$.

2.3 Littlewood 原理

引理 2.3.1 ()
设 E 是有限测度可测集, $\{f_n\}$ 是 E 上逐点收敛于 f 的可测函数序列, 则:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists E_\varepsilon \subseteq E(\mu(E - E_\varepsilon) < \delta), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in E_\varepsilon, |f_n - f| < \varepsilon$$

定理 2.3.2 Egoroff 定理 (Littlewood 第三原理) (Egoroff's Theorem)
逐点收敛于某一的可测函数序列近似是一致收敛的:
设 E 是有限测度可测集, $\{f_n\}$ 是 E 上逐点收敛于 f 的可测函数序列, 则:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists E_\varepsilon \subseteq E(\mu(E - E_\varepsilon) = 0), \{f_n\} \text{ 在 } E_\varepsilon \text{ 上一致收敛于} f$$

引理 2.3.3 Littlewood 第二原理 (Littlewood's Second Principle)
简单函数接近于连续函数:
设 f 为可测集 E 上的简单函数, 则:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \exists E_\varepsilon \subseteq E(\mu(E - E_\varepsilon) < \varepsilon), \forall x \in E_\varepsilon, f = g$$

定理 2.3.4 Lusin 定理 (Lusin's Theorem)
可测函数接近于连续函数:
设 f 为可测集 E 上的可测函数, 则:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \exists E_\varepsilon \subseteq E(\mu(E - E_\varepsilon) < \varepsilon), \forall x \in E_\varepsilon, f = g$$

3 Lebesgue 积分

3.1 有限测度集上有界可测函数的 Lebesgue 积分

定义 3.1.1 简单函数的 Lebesgue 积分 (Lebesgue Integral of Simple Functions)
设 f 是有限测度可测集 E 上的简单函数, 其典范表示为 $f = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \cdot \chi_{E_i}(E_i = \{x \in E_i | f(x) = C_i\})$, 则可如下定义 f 在 E 上的 Lebesgue 积分:

$$\int_E f := \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \mu(E_i)$$