

目录

1 静电学	2
1.1 静电场	2
1.2 静电系统	3
1.3 自由电荷激发电场	3
1.4 常见带电体模型	4
1.5 电场力做功	7
1.6 电偶极子	7
2 静电感应	7
2.1 导体的静电感应	7
2.2 电介质的极化	8
2.3 电容器	9
2.4 电势能	10
3 电流与磁场	10
3.1 电流模型	10
3.2 磁场	11
3.3 电流激发的磁场	11
3.4 磁通量	12
3.5 常见电流模型	12
3.6 平面载流线圈	12
4 电磁感应	13

1 静电学

1.1 静电场

定义 1.1.1 电荷 (Electric Charge)

定义电荷为 $I \cdot T$, 记作 Q ; 单位 Coulomb 为 $A \cdot s$, 记作 C .

定义 1.1.2 电势 (Electric Potential)

定义电势为 $E \cdot Q^{-1}$, 记作 V ; 单位 Volt 为 $N \cdot m \cdot C^{-1}$, 记作 V .

结构 1.1.3 电场 (Electric Field)

定义电场类型派生自 **场**, 包含以下信息:

1. 电势函数 $V_E : L_3 \rightarrow V$:

2. 光滑性: $V_E \in C^\infty(L_3)$.

定义 1.1.4 等势线

定义 1.1.5 电场线

定义 1.1.6 电势差 / 电压 (Voltage)

设 E 是 **电场**, $a, b : L_3$, 定义电势差为: $V_E(a) - V_E(b)$, 记作 V_{ab} .

定义 1.1.7 电场强度 (Electric Field Intensity)

设 E 是 **电场**, $x : L_3$, 定义 E 在 x 处的电场强度为: $-\nabla V_E(x)$, 记作 $E_E(x)$.

定义 E 的电场强度函数为 $x \mapsto E_E(x)$, 记作 E_E .

性质 1.1.7.1 电场强度场是保守场

性质 1.1.7.2 电势差为电场强度的路径积分

设 E 是 **电场**, $a, b : L_3$, C 是 a 到 b 的路径, 则:

$$V_{ab} = - \int_C E_E(r) \cdot dr$$

定义 1.1.8 电通量 (Electric Flux)

设 E 是 **电场**, S 是 L_3 上的 2 维流形, 定义 E 通过 S 的电通量为:

$$\int_S E_E(r) \cdot S(r) dr$$

记作 $\Phi_{eE}(S)$.

1.2 静电系统

结构 1.2.1 电场源 (Electric Field Source)

定义电场源类型是物体的派生类型.

定义 1.2.2 电场源激发电场

设 \cdot 是电场源, 定义 \cdot 的激发电场, 记作 $E\cdot$.

结构 1.2.3 静电系统 (Electrostatic System)

定义静电系统包含以下信息:

1. 电场源集;
2. 外电场集.

定义 1.2.4 合电场

1.3 自由电荷激发电场

定义 1.3.1 真空介电常数 (Vacuum Permittivity)

定义真空介电常数为 $8.8541 \times 10^{-12}(\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2})$, 记作 ϵ_0 .

定义 1.3.2 静电力常数 / Coulomb 常数 (Coulomb's Constant)

定义静电力常数为 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, 记作 k_e .

性质 1.3.2.1 静电力常数估值

$$k_e \approx 8.9875 \times 10^9 (\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2})$$

结构 1.3.3 带电体 / 自由电荷 (Charged Object / Free Charge)

定义带电体类型派生自**物体**, 承载以下信息:

1. 维度 $n : [3]$;
2. n 维光滑流形 M_Q ;
3. 电荷分布 $\rho_Q : M_Q \rightarrow \text{Q} \cdot \text{L}_{-n}$;

定义 1.3.4 带电体的总电荷量

设 Q 是**带电体**, 定义 Q 的总电荷量为:

$$\int_M \rho_Q(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

公理 1.1 带电体激发的电场

设 Q 是带电体, 则由 Q 激发的电场为:

1. 电势函数:

$$V_Q = \mathbf{x} \mapsto k_e \int_{M_Q} \frac{\rho_Q(\mathbf{r})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}\|} d\mathbf{r}$$

定理 1.3.5 带电体激发电场的电场强度分布

设 Q 是带电体, \mathbf{x} 则:

$$\mathbf{E}_Q(\mathbf{x}) = k_e \int_{M_Q} \frac{\rho_Q(\mathbf{r})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}\|^2} (\widehat{\mathbf{x} - \mathbf{r}}) d\mathbf{r}$$

定理 1.3.6 Gauss 定理 (Gauss's Theorem)

设 Q 是带电体, M 是 \mathbb{L}_3 上的 3 维流形, ∂M 是 Gauss 面, 则:

$$\Phi_{eE}(\partial M) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_M \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

证明:

是 Stokes 定理的特例.

定义 1.3.7 电势能 (Electric Potential Energy)

设 E 是电场, Q 是带电体, 定义 Q 在 E 中的电势能为:

$$\int_{M_Q} \mathbf{V}_Q(\mathbf{V}) \cdot \rho(\mathbf{V}) d\mathbf{V}$$

定义 1.3.8 电场力 / Coulomb 力 / 静电力 (Coulomb Force)

设 E 是电场, Q 是带电体, 定义 E 作用在 Q 上的电场力.

1.4 常见带电体模型

结构 1.4.1 点电荷 (Electric Point Charge)

定义点电荷类型是带电体的子类型, 维数为 0. 包含以下信息:

1. 带电量 $q : \mathbb{Q}$
2. 位置 $\mathbf{r} : \mathbb{L}_3$

性质 1.4.1.1 点电荷的电势分布

设 (q, \mathbf{r}) 是点电荷, $\mathbf{x} : \mathbb{L}_3$, 则 (q, \mathbf{r}) 激发电场在 \mathbf{x} 处的电势为:

$$\frac{k_e q}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}\|} (\widehat{\mathbf{x} - \mathbf{r}})$$

例 1.4.2 电子的点电荷模型

定义电子为点电荷类型的子类型.

$$q_e \approx -1.602 \times 10^{-19} \text{C}$$

电子电荷量记作 e .

定理 1.4.3 Coulomb 定律 (Coulomb's Law)

设 $(q_1, \mathbf{r}_1), (q_2, \mathbf{r}_2)$ 是点电荷, $r := \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$, $\mathbf{e}_r := \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}$, 则:

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}_e \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

结构 1.4.4 线带电体

定义线带电体为带电体类型的子类型, 维数为 1.

包含以下信息:

1. 1 维光滑流形 M ;
2. 线密度函数 $\lambda : M \rightarrow \mathbb{Q} \cdot \mathbb{L}^{-1}$.

例 1.4.5 无限长均匀带电直线的电场

设 $x_0, v : \mathbb{L}_3, L := (\{x_0 + kv | k : \mathbb{R}\}, \cdot \mapsto \lambda)$ 是线带电体, $\mathbf{x} : \mathbb{L}_3, d : \mathbb{L} := \mathbf{x}$ 到 L 距离, $\hat{\mathbf{e}}$ 为 L 到 \mathbf{x} 的单位法向量, 则:

1. 电势:

$$V_L(\mathbf{x}) = 2\mathbf{k}_e \lambda \ln d$$

2. 场强:

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{x}) = \frac{2\mathbf{k}_e \lambda}{d} \hat{\mathbf{e}}$$

证明:

根据柱对称性, 场强方向总沿径向.

运用 Gauss 定理, 取半径为 d 的圆柱体, 高为 h , 记作 C , 则:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{E}}(L)(\partial C) &= \oint_{\partial C} \mathbf{E}_L \cdot d\mathbf{S} = 2\pi \|\mathbf{E}_L\| dh \\ \frac{1}{\varepsilon_0} \int_C \lambda dl &= \frac{d\lambda}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow 2\pi \|\mathbf{E}_L\| dh &= \frac{h\lambda}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow \|\mathbf{E}_L\| &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d} = \frac{2\mathbf{k}_e \lambda}{d} \end{aligned}$$

当 λ 取值为正时, 场强方向沿径向向外.

电势分布求导即证

□

例 1.4.6 圆环带电体的电场

设 $R : \mathbb{L}, C := (\{(R \cos \theta, R \sin \theta, 0) | \theta \in [0, 2\pi)\}, \cdot \mapsto \lambda)$ 是线带电体, 则:

结构 1.4.7 面带电体

定义面带电体为**带电体**类型的子类型, 维数为 2.

包含以下信息:

1. 2 维光滑流形 M ;
2. 面密度函数 $\sigma : M \rightarrow \mathbb{Q} \cdot \mathbb{L}^{-2}$.

例 1.4.8 无限大均匀带电平面

设 $P := (\{(x, y, 0) | x, y : \mathbb{L}\}, \cdot \mapsto \sigma)$ 是**面带电体**, 则:

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

证明:

根据柱对称性, 场强方向总沿平面法向.

取底面积为 S 的柱体, 记作 C , 则:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial C} \mathbf{E}_P \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_C \sigma d\mathbf{S} \\ \implies \mathbf{E}_P \cdot 2S &= \frac{1}{\varepsilon_0} S\sigma \\ \implies \mathbf{E}_P &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \end{aligned}$$

□

例 1.4.9 均匀带电球壳的电场

设 $R : \mathbb{L}, B := (\{\mathbf{r} : \mathbb{L}^3 | \|\mathbf{r}\| = R\}, \cdot \mapsto \sigma)$ 是连续带电体, 则:

例 1.4.10 无限长均匀带电柱壳的电场

设 $R : \mathbb{L}, C := (\{(R \cos \theta, R \sin \theta, z) | z : \mathbb{L}\}, \cdot \mapsto \sigma)$ 是**面带电体**, 则:

$$\mathbf{E}_C(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \|\mathbf{r}\| < R \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 \|\mathbf{r}\|} \hat{\mathbf{r}}, & \|\mathbf{r}\| \geq R \end{cases}$$

结构 1.4.11 体带电体

定义体带电体为**带电体**类型的子类型, 维数为 3.

包含以下信息:

1. 3 维光滑流形 M ;

2. 体密度函数 $\rho : M \rightarrow \mathbb{Q} \cdot \mathbb{L}^{-3}$.

例 1.4.12 均匀带电球体的电场

1.5 电场力做功

1.6 电偶极子

结构 1.6.1 电偶极子 (Electric Dipole)

定义电偶极子类型承载以下信息:

1. 电偶极矩 $p : \mathbb{L}^3 \cdot \mathbb{I} \cdot \mathbb{T}$, 简称电矩:
2. 位置 $r : \mathbb{L}^3$

性质 1.6.1.1 电偶极子受合电场力为零

性质 1.6.1.2 电偶极子受电场力力矩

设 $D = (p, r)$ 是电偶极子, E 是电场, E 是 E 的电场强度函数, 则 D 在电场 E 受力矩为:

$$M_D = p \times E(r)$$

性质 1.6.1.3 电偶极子在电场中的电势能

设 $D = (p, r)$ 是电偶极子, E 是电场, E 是 E 的电场强度函数, 则 D 在电场 E 中的电势能为:

$$E = \nabla(p \cdot E)$$

设 E 是匀强电场, 则 D 在电场 E 中的电势能为:

$$E = -p \cdot E$$

2 静电感应

2.1 导体的静电感应

定义 2.1.1 带电体 (Charged Object)

定义带电体类型是带电体集合类型.

定义 2.1.2 导体 (Conductor)

定义导体是带电体类型的子类型, 包含以下信息:

1. 内部带电体 ρ_C
2. 边界带电体 σ_C

定义 2.1.3 静电平衡 (Static Electric Equilibrium)

设 E 是电场, C 是导体, 定义 C 在 E 中达到静电平衡当且仅当:

1. 导体内部总场强为零:

$$\forall \mathbf{r} \in \text{int } C, \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_C(\mathbf{r}) = 0$$

2. 导体边界总场强与边界流形正交:

$$\forall \mathbf{r} \in \partial C, (\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_C(\mathbf{r})) \perp T_{\mathbf{r}} \partial C$$

性质 2.1.3.1 导体静电平衡时内部无电荷

设 E 是电场, C 是连续带电导体, C 在 E 中达到静电平衡, 则:

$$\forall \mathbf{r} \in \text{int } C, \rho_C(\mathbf{r}) = 0$$

性质 2.1.3.2 导体表面电场强度

设 E 是电场, C 是连续带电导体, C 在 E 中达到静电平衡, 则:

$$\forall \mathbf{r} \in \partial C, \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{e}_r$$

2.2 电介质的极化

结构 2.2.1 电介质 (Dielectric)

定义电介质类型包含以下信息:

1. 极化率 χ_e ;

定义 2.2.2 相对介电常数 (Relative Permittivity)

设 X 是电介质, 定义 X 的相对介电常数为: $1 + \chi_e$, 记作 ε_r .

定义 2.2.3 介电常数 (Permittivity)

设 X 是电介质, 定义 X 的介电常数为: $\varepsilon_0 \varepsilon_r$, 记作 ε .

定义 2.2.4 极化强度 (Polarize)

设 X 是电介质, X 的极化率为 χ_e , E 是电场, 定义 X 在 E 下的极化强度为: $\chi_e \varepsilon_0 E$, 记作 \mathbf{P} .

定义 2.2.5 极化电荷密度 (Polarization Intensity)

设 X 是电介质, E 是电场, 定义 X 在 E 下的极化电荷密度为:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$$

定义 2.2.6 电位移矢量 (Electric Displacement)

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

定理 2.2.7 电介质中的 Gauss 定理 (Gauss's Theorem in Dielectric)

设 X 是电介质, E 是电场, M 是 \mathbb{L}_3 上的 3 维流形, ∂M 是 Gauss 面, 则:

$$\int_{\partial M} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_M \rho_{free}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

2.3 电容器

结构 2.3.1 电容器 (Capacitor)

定义电容器类型包含以下信息:

1. 极板: A, B ;
2. 电介质 D ;

例 2.3.2 平行板电容器

设 A, B 是带电平面, A, B 面积为 S , A, B 距离为 d , D 是电介质, D 的介电常数为 ϵ , D 充满 A, B 之间, 则定义 (A, B, D) 为平行板电容器.

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

例 2.3.3 柱形电容器

例 2.3.4 球形电容器

定义 2.3.5 电容器的串联与并联

设 C_1, C_2 是电容器, 则:

性质 2.3.5.1 串联电容器的等效电容

设 C_1, C_2 是电容器,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

性质 2.3.5.2 并联电容器的等效电容

$$C = C_1 + C_2$$

2.4 电势能

3 电流与磁场

3.1 电流模型

定义 3.1.1 电源 (Power Supply)

1. 非静电力场强函数 $E_k : \mathbb{L}_3 \rightarrow;$

定义 3.1.2 电动势

设 X 是电源, 定义 X 的电动势为

$$\int_{-}^{+} E_k \cdot dl$$

记作 \mathcal{E} .

定义 3.1.3 电导率

设 C 是导体, n 是载流子数密度, τ 是平均自由时间, 定义 C 的电导率为:

$$\frac{ne^2\tau}{2m}$$

记作 σ .

定理 3.1.4 Ohm 定律 (Ohm's Law)

设 I 是电流, U 是电压, R 是电阻, 则有:

$$U = IR$$

定义 3.1.5 电流强度 (Electric-Current-Intensity)

设 C 是导体, S 是 C 上的截面, 定义通过截面 S 的电流强度为:

$$\frac{dq}{dt}$$

定义 3.1.6 电流密度 (Electric Current Density)

设 C 是导体, \mathcal{I} 是 C 上的电流, 定义 \mathcal{I} 的电流密度函数为:

$$\mathbf{x} : C \mapsto$$

记作 $\mathbf{J}_{\mathcal{I}}$.

定义 3.1.7 稳恒电流 (Steady Electric Current)

设 C 是导体, \mathcal{I} 是 C 上的电流, 定义 \mathcal{I} 稳恒, 当且仅当:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{\mathcal{I}}(\mathbf{x}) = \cdot \mapsto \mathbf{0}$$

例 3.1.8 导线

3.2 磁场

定义 3.2.1 磁感应强度 (Magnetic-Induction-Intensity)

定义磁感应强度为 $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{A}^{-1}$, 记作 \mathbf{B} .

定义磁感应强度的单位 Tesla 为 $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{A}^{-1}$, 记作 \mathbf{T} .

结构 3.2.2 磁场 (Magnetic Field)

定义磁场是场, 包含以下信息:

1. 磁感应强度函数 $\mathbf{B} : \mathbb{L}_3 \rightarrow \mathbf{B}$;

定义 3.2.3 磁通量 (Magnetic Flux)

设 B 是磁场, S 是 \mathbb{L}_3 上的 2 维光滑流形, 定义 B 通过 S 的磁通量为:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

记作 $\Phi_{\mathbf{m}} B$.

3.3 电流激发的磁场

定义 3.3.1 电流激发磁场

定义 3.3.2 磁力常数 (Magnetic Constant)

定义磁力常数为:

$$1 \times 10^{-7} (\text{N}^{-1} \cdot \text{A}^2)$$

记作 k_m .

定义 3.3.3 真空磁导率 (Vacuum Magnetic Permeability)

定义真空磁导率为:

$$4\pi k_m$$

记作 μ_0 .

性质 3.3.3.1 Biot-Savart 定律 (Biot-Savart Law)

设 C 是导线, \mathcal{I} 是 C 上的电流, 则:

$$\mathbf{B} = \mathbf{r} : \mathbb{L}_3 \mapsto k_m \int_C \frac{\mathcal{I}(l) dl \times \mathbf{r}}{\|l - \mathbf{r}\|^3}$$

定义 3.3.4 Lorentz 力 / 磁场力

设 B 是**磁场**, Q 是**带电体**, Q 的带电量为 q , v 是 Q 的速度, 定义 B 作用在 Q 上的**Lorentz 力 / 磁场力**为:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

结构 3.3.5 带电质点**3.4 磁通量****3.5 常见电流模型****例 3.5.1 匀速旋转均匀带电圆盘****例 3.5.2 无限长直导线**

设 $L = (\{(0, 0, z) | z : \text{L}\}, I)$ 是导线, 则 I 在距 L 为 d 处激发的磁场为:

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

例 3.5.3 通电柱体**例 3.5.4 通电圆环****例 3.5.5 无限长通电螺线管****3.6 平面载流线圈****例 3.6.1 平面载流线圈****性质 3.6.1.1 平面载流线圈的磁矩**

$$\mathbf{m} = I S \hat{\mathbf{S}}_{\perp}$$

性质 3.6.1.2 磁场对载流线圈的磁力矩

设 B 是**磁场**,

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_B$$

4 电磁感应