上海交通大学2010-2011学年第一学期《矩阵理论》试卷A卷
共八道大题目，八页试卷

姓名________ 学号_____________ 矩阵理论分班号_____ 成绩______

本试卷共四道大题, 总分100分. 其中 A^* 表示矩阵 A 的共轭转置.

一. **单项选择题**(每题3分, 共15分)

1. 设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则$A^{200}-A^{199}=$(　　)

$(A)\,E$;　　$(B)\,0$;　　$(C)\,A$;　　$(D)\,A^2$.

2.下列集合对所给运算构成实数域上线性空间的是(　　)

(A) 次数等于$m(m\geqslant 1)$的实系数多项式的集合，对于多项式的通常加法和数与多项式的通常乘法.

(B) Hermite 矩阵的集合，对于矩阵的通常加法和实数与矩阵的通常乘法；

(C) 平面上全体向量的集合，对于通常的加法和如下定义的数乘运算$k\cdot x=x_0$，k是实数, x_0 是某一取定向量.

(D) 投影矩阵的集合，对于矩阵的通常加法和实数与矩阵的通常乘法；

3.线性变换为正交变换的必要而非充分条件的是(　　)

(A) 保持向量的长度不变;　　(B) 将标准正交基变为标准正交基；

(C) 保持任意两个向量的夹角不变；　　(D) 在任意标准正交基下的矩阵为正交矩阵.

4.设A是幂等矩阵，则下列命题中不正确的是(　　)

(A) A与对角矩阵相似；　　(B) A的特征值只可能是1或者0；

(C) $\sin(A)=\sin(1)\;A$;　　(D) 幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k=(E-A)^{-1}$.

5.设V_1,V_2是V的两个线性子空间，则与命题“V_1+V_2的任意元素的分解式唯一”不等价的命题是(　　)

(A) $V_1\cap V_2=\{0\}$;

(B) $dim\ (V_1+V_2)=dimV_1+dim\ V_2$;

(C) V_1+V_2的零元素的分解式唯一.

(D) $[V_1\cup V_2]=V$；

二. **填空题**(每空 3 分, 共 15 分)

设二维线性空间V的线性变换$T_1 : V \mapsto V$与$T_2 : V \mapsto V$在基α_1, α_2下的矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1、T_1, T_2的乘积$T_1T_2 : V \mapsto V$在基α_1, α_2下的矩阵为__________.

2、$\dim\ R(T_1)$=__________.

3、$R(T_1) \cap N(T_2)$的一个基为__________.

4、若常数k使得$k(A + B)$为幂收敛矩阵，则k应该满足的条件是__________.

5、$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & B \end{pmatrix}$的Jordan标准型为__________.

三.**计算题**(12 分)

向量空间$R^{2\times 2}$中的内积通常定义为

$$(A,B)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}b_{ij},\quad (A=(a_{ij})_{2\times 2},\ B=(b_{ij})_{2\times 2}.)$$

选取$A_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$，构造子空间$W=[A_1,A_2]$。

1、求$W^{\perp}$的一组基；

2、利用已知的W和$W^{\perp}$求$R^{2\times 2}$的一个标准正交基。

四.**计算题**(18 分)

已知

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

1、求矩阵A的Jordan标准型J和可逆矩阵P使得A相似于J；

2、计算矩阵e^A；

3、求下列微分方程组的解

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

五.**计算题**(10 分)

设$A \in C^{m\times n}$的秩为r，A的奇异值分解为$A=UDV^*$，$D=\begin{pmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$，$\Lambda = diag(s_1, \cdots, s_r)$ 求矩阵$B=(A\ A)$的奇异值分解和它的Moore-Penrose广义逆B^+.

六**计算题**(18 分)

设多项式空间$P_4[t]=\{f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3|a_i\in R\}$中的线性变换为

$$Tf(t)=(a_0-a_1)+(a_1-a_2)t+(a_2-a_3)t^2+(a_3-a_0)t^3.$$

1、取定一组基，求该线性变换在该基下的矩阵A；

2、求与A相关的四个子空间$N(A)$, $R(A)$, $R(A^T)$和$N(A^T)$；

3、求线性变换T的值域的基与维数；

4、求线性变换T的核的基与维数。

七.**证明题**(6 分)

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 证明A 是正定矩阵当且仅当存在一个正定矩阵B,使得$A=B^2$.

八、**证明题**(6 分)

设A为n阶矩阵，证明：A非奇异的充分必要条件是存在常数项不等于0的多项式$g(\lambda)$使得$g(A) = 0$。