第 4 章作业参考答案

P162/1(1)：

原问题：$\begin{cases} \max 4x_1-3x_2+5x_3 \\ s.t.\quad 3x_1+\ \ x_2+2x_3\le 5 \\ \qquad x_1-2x_2+7x_3\le -3 \\ \qquad x_1 \qquad\ \ +\ \ x_3=1 \\ \qquad x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases}$，对偶问题：$\begin{cases} \min 5w_1-3w_2+w_3 \\ s.t.\quad 3w_1+\ w_2+w_3\ge 4 \\ \qquad w_1-2w_2 \qquad \ge -3 \\ \qquad 2w_1+7w_2+w_3\ge 5 \\ \qquad w_1,w_2\ge 0 \end{cases}$

P162/1(2)：

原问题：$\begin{cases} \min -4x_1-5x_2-7x_3+\ \ x_4 \\ s.t.\qquad x_1+\ \ x_2+2x_3-\ \ x_4\ge 1 \\ \qquad -2x_1+6x_2-3x_3-\ \ x_4\ge 3 \\ \qquad x_1+4x_2+3x_3+2x_4=-5 \\ \qquad x_1,x_2,x_4\ge 0 \end{cases}$，对偶问题：$\begin{cases} \max w_1+3w_2-5w_3 \\ s.t.\quad w_1-2w_2+\ \ w_3\le -4 \\ \qquad w_1+6w_2+4w_3\le -5 \\ \qquad 2w_1-3w_2+3w_3=-7 \\ \qquad -w_1-\ \ w_2+2w_3\le 1 \\ \qquad w_1,w_2\ge 0 \end{cases}$

P162/2：

对偶问题：$\begin{cases} \max w_1+2w_2 \\ s.t.\quad w_1+\ \ w_2\le 4 \\ \qquad -w_1+2w_2\le 3 \\ \qquad w_1-3w_2\le 1 \\ \qquad w_1,w_2\ge 0 \end{cases}$

最优解 $\boldsymbol{w}^*=(5/3,7/3)^T$，第 3 约束松，并且 $\boldsymbol{w}^*$>0，因此

$\begin{cases} x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2-3x_3=2 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x}^*=(4/3,1/3,0)^T$ 可行，因此 $\boldsymbol{x}^*=(4/3,1/3,0)^T$ 是原问题最优解，最优值 $z^*=19/3$。

P162/3：

(1)对偶问题：$\begin{cases} \min -2w_1-7w_2 \\ s.t.\qquad w_1+\ \ w_2=10 \\ \qquad\qquad w_2\le 7 \\ \qquad -6w_1+5w_2\le 30 \\ \qquad w_1-\ \ w_2\le 2 \\ \qquad w_1,w_2\ge 0 \end{cases}$

(2)最优解 $\boldsymbol{w}^*=(3,7)^T$，最优值 $z^*=-55$。在 $\boldsymbol{w}^*=(3,7)^T$，第 3、4 约束松，并且 $\boldsymbol{w}^*=(3,7)^T$>0，

因此$\begin{cases} x_3 = 0, x_4 = 0 \\ x_1 \qquad - 6x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = -7 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x}^* = (-2,-5,0,0)^T$可行，因此$\boldsymbol{x}^* = (-2,-5,0,0)^T$是原问题最优解，最优值$z^* = -55$。

P164/4：

对偶问题：$\begin{cases} \max b_1 w_1 + \ \ w_2 \\ s.t. \quad w_1 + \ \ w_2 \le 5 \\ \quad -w_1 + \ \ w_2 \le 0 \\ \quad 6w_1 + 2w_2 \le 21 \\ \quad w_1, w_2 \ge 0 \end{cases}$

因为$x_1^*, x_3^* > 0$，因此$\begin{cases} w_1 + \ \ w_2 = 5 \\ 6w_1 + 2w_2 = 21 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{w}^* = (1\,1/4, 9/4)^T$是可行解，因此$\boldsymbol{w}^* = (1\,1/4, 9/4)^T$是对偶问题最优解。

P164/5：（c改为c^T）

变化后原问题为$\begin{cases} \min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ s.t.\ \bar{A}\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{b}} \\ \quad \boldsymbol{x} \ge 0 \end{cases}$，变化后对偶问题为$\begin{cases} \max \bar{\boldsymbol{b}}^T \boldsymbol{w} \\ s.t.\ \bar{A}^T \boldsymbol{w} \le \boldsymbol{c} \end{cases}$，即$\begin{cases} \max \boldsymbol{b}^T (E^T \boldsymbol{w}) \\ s.t\ A^T (E^T \boldsymbol{w}) \le \boldsymbol{c} \end{cases}$

其中$\bar{A} = EA, \bar{\boldsymbol{b}} = E\boldsymbol{b}$，变化后对偶问题最优解$\boldsymbol{w}^*$满足：$E^T \boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{w}^0$，即$\boldsymbol{w}^* = E^{-T} \boldsymbol{w}^0$。

(1) $E = \left(\begin{array}{ccccc} 1 &&&& \\ & \ddots &&& \\ && \mu && \\ &&& \ddots & \\ &&&& 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array}$，$E^{-1} = \left(\begin{array}{ccccc} 1 &&&& \\ & \ddots &&& \\ && 1/\mu && \\ &&& \ddots & \\ &&&& 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array}$，则

$$\boldsymbol{w}^* = E^{-T} \boldsymbol{w}^0 = (\underset{1}{w_1^0}, \cdots, \underset{k}{w_k^0 / \mu}, \cdots, \underset{m}{w_m^0})^T$$

(2) $E = \left(\begin{array}{ccccc} 1 &&&& \\ & \ddots &&& \\ && 1 & \mu & \\ &&& 1 & \\ &&&& 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ r \\ k \\ \\ \end{array}$，$E^{-1} = \left(\begin{array}{ccccc} 1 &&&& \\ & \ddots &&& \\ && 1 && \\ && -\mu & 1 & \\ &&&& 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ r \\ k \\ \\ \end{array}$，则

$$\boldsymbol{w}^* = E^{-T} \boldsymbol{w}^0 = (\underset{1}{w_1^0}, \cdots, \underset{k}{w_k^0 - \mu w_r^0}, \cdots, \underset{m}{w_m^0})^T$$

P164/6：(c改为c^T，c^T改为c)

原问题$\begin{cases}\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\\ s.t.\ A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ \quad \boldsymbol{x}\ge 0\end{cases}$，即$\begin{cases}\max \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}\\ s.t.\ A^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ \quad \boldsymbol{x}\ge 0\end{cases}$，对偶问题$\begin{cases}\max \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{w}\\ s.t.\ A^T\boldsymbol{w}\le \boldsymbol{b}\end{cases}$。

$\boldsymbol{x}^0$是原问题的可行解，则$\boldsymbol{x}^0$是对偶问题的可行解，并且原问题和对偶问题在$\boldsymbol{x}^0$的目标值均为$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}^0$。由对偶理论，$\boldsymbol{x}^0$是原问题的最优解。

7/(1)

$$\begin{cases}\min 4x_1+6x_2+18x_3\\ s.t.\quad x_1 \quad +3x_3\ge 3\\ \quad\quad 6x_2+2x_3\ge 5\\ \quad x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\min 4x_1+6x_2+18x_3\\ s.t.\ -x_1 \quad -3x_3+x_4 \quad =-3\\ \quad\quad -6x_2-2x_3 \quad -x_5=-5\\ \quad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0\end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	-1	0	-3	1	0	-3
x_5	0	-1	-2	0	1	-5
	-4	-6	-18	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	-1	0	-3	1	0	-3
x_2	0	1	2	0	-1	5
	-4	0	-6	0	-6	30

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	1/3	0	1	-1/3	0	1
x_2	-2/3	1	0	2/3	-1	3
	-2	0	0	-2	-6	36

原问题$\boldsymbol{x}^*=(0,3,1)^T$，$z^*=36$。