



第三讲

傅立叶变换

《数字信号处理》第一部分

第三讲

提纲

- 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)
- 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)
- 连续时间信号的采样及采样定理
- 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)



上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室

2016年9月20日星期二

2



连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

- 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)
- 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)
- 连续时间信号的采样及采样定理
- 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

第三讲

连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

■ 连续周期信号的傅立叶级数

■ 周期信号 $x(t)$, 周期为 T , 基波角频率为 $\omega_0 = 2\pi/T$ 。在满足狄氏条件时, 可展成

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

称为三角形式的傅里叶级数, 其系数

■ 直流分量 $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$

■ 余弦分量的幅度 $a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$

■ 正弦分量的幅度 $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$



上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室

2016年9月20日星期二

4

第三讲

连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

■ 连续周期信号的傅立叶级数的狄义赫利(Dirichlet)条件

- 根据高等数学的知识, 我们知道, 满足“狄义赫利(Dirichlet)条件”的任何周期函数可以展成“正交函数线性组合”的无穷级数--傅立叶级数
- (1) 同一个周期内 间断点的个数有限;
- (2) 同一个周期内 极大值和极小值的数目有限;
- (3) 同一个周期内 信号“绝对可积”

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt < \infty$$



上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室

2016年9月20日星期二

5

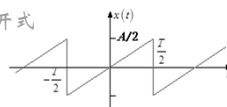
第三讲

连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

■ 连续周期信号的傅立叶级数(例)

■ 求周期锯齿波的傅里叶级数展开式

$$x(t) = \frac{A}{T} t \quad \left(-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}\right)$$



$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A}{T} t dt = 0 \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A}{T} t \cos(n\omega_0 t) dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A}{T} t \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{A}{n\pi} (-1)^{n-1} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(t) = 0 + \frac{A}{\pi} \sin \omega_0 t - \frac{A}{2\pi} \sin 2\omega_0 t - \dots$$

直流

基波

谐波



上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室

2016年9月20日星期二

6

连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

■ 用三角函数表示周期锯齿波

■ Matlab程序演示

$$x(t) = 0 + \frac{A}{\pi} \sin \omega_0 t - \frac{A}{2\pi} \sin 2\omega_0 t - \dots$$

■ 吉布斯现象 Gibbs phenomenon

- 吉布斯现象Gibbs phenomenon(又叫吉布斯效应): 将具有不连续点的周期函数(如矩形脉冲)进行傅立叶级数展开后, 选取有限项进行合成。当选取的项数越多, 在所合成的波形中出现的峰起越靠近原信号的不连续点。当选取的项数很大时, 该峰起值趋于一个常数, 大约等于总跳变值的9%。这种现象称为吉布斯现象。



连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

■ 连续周期信号的傅立叶级数—复指数形式

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta \longrightarrow \begin{aligned} a_n \cos(n\omega_0 t) &= \frac{a_n}{2} (e^{-in\omega_0 t} + e^{in\omega_0 t}) \\ b_n \sin(n\omega_0 t) &= \frac{ib_n}{2} (e^{-in\omega_0 t} - e^{in\omega_0 t}) \end{aligned}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

$$\begin{aligned} x(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

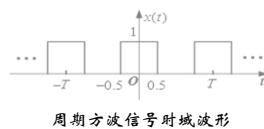
$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \\ c_n &= c_{-n}^* = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt \end{aligned}$$



连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

■ (例) 周期方波信号 $x(t)$ ■ 一个周期内 $x(t)$ 表达式

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 < t < -0.5 \\ 1 & -0.5 < t < 0.5 \\ 0 & 0.5 < t < T/2 \end{cases}$$

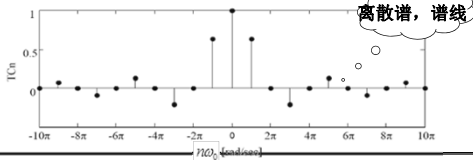


周期方波信号时域波形

$$c_{n_square} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{2}{n\omega_0 T} \sin \frac{n\omega_0}{2} \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

$$Tc_n = \frac{2}{n\omega_0} \sin \frac{n\omega_0}{2}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



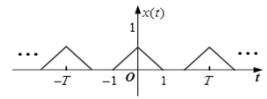
离散谱, 谱线



连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

■ (例) 周期三角波信号 $x(t)$ ■ 一个周期内 $x(t)$ 表达式

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 < t < -1 \\ 1-|t| & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < T/2 \end{cases}$$



周期三角波信号时域波形

$$c_{n_tri} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \left(\frac{2}{n\omega_0} \sin \frac{n\omega_0}{2} \right)^2 \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

$$Tc_{n_tri} = (Tc_{n_square})^2$$

■ Matlab 程序演示对比



连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

■ 频谱的概念

- 通过傅立叶级数的分解, 一个周期信号可以看作由不同频率的简谐波函数叠加而成

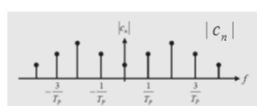
- c_n 表示信号的各个频率分量, 其一般为复数, 通常用幅值谱和相位谱表示

■ 周期信号频谱的特点

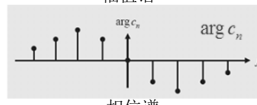
- 离散性, 即谱线是离散的;
- 谐波性, 即谱线只出现在基波频率的整数倍上;
- 收敛性, 即谐波的幅度随着谐波次数的增高而减小

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$



幅值谱



相位谱



连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

■ 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

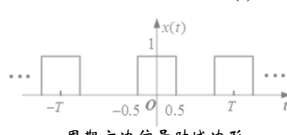
■ 连续时间信号的采样及采样定理

■ 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

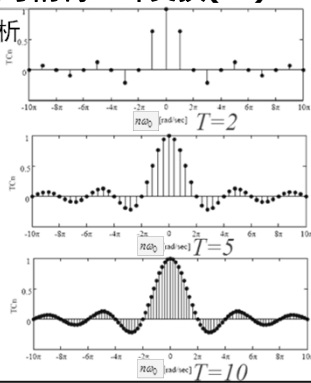
周期方波信号 $x(t)$ 的分析



周期方波信号时域波形

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$c_n = \frac{2}{Tn\omega_0} \sin \frac{n\omega_0}{2} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$


上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 13

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

从傅立叶级数到连续时间信号的傅立叶变换(FT)

- 对于非周期信号，可以把它当作周期为无限长的信号来处理，此时有： $T \rightarrow \infty, \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \Delta\omega \rightarrow 0$
- $n\omega_0 = n\Delta\omega = \omega$ ，所以离散频谱($n\omega_0$ 的函数)会演变成连续频谱(ω 的函数)
- 同时频谱系数 $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \rightarrow 0$
- 引入频谱密度概念： $Tc_n = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{c_n}{f_0} = \frac{c_n}{\omega_0} 2\pi$

$$X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} Tc_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 14

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

从傅立叶级数到连续时间信号的傅立叶变换(FT)

傅立叶反变换(IFT)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tc_n \frac{1}{T} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tc_n \frac{\omega_0}{2\pi} e^{jn\omega_0 t}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tc_n \frac{\omega_0}{2\pi} e^{jn\omega_0 t} \xrightarrow[\omega_0 \rightarrow d\omega]{\omega_0 \rightarrow d\omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} Tc_n$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 15

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

连续非周期信号 $x(t)$ 的傅立叶变换对

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \Leftrightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega q} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(p) e^{-j(p-q)\omega} dp d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(p) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(p-q)\omega} d\omega dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(p) \delta(p-q) dp = x(q)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi \delta(\omega)$$

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 16

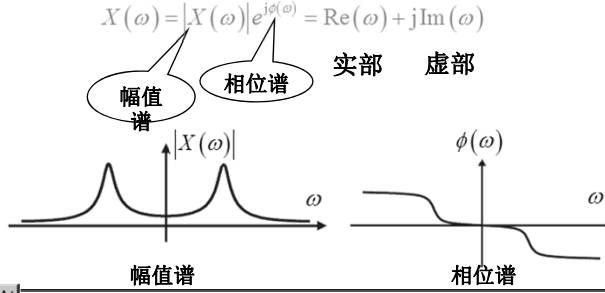
第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

幅值谱与相位谱

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\phi(\omega)} = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega)$$

幅值谱 相位谱 实部 虚部

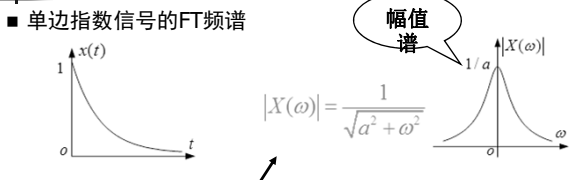


上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 17

第三讲

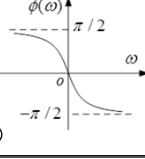
连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

单边指数信号的FT频谱



$$x(t) = e^{-at}u(t), (a > 0)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega}$$

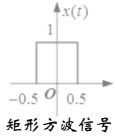
$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$


上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 18

第三讲

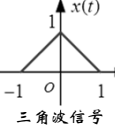
连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ (例) 矩形方波信号 $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t < -0.5 \\ 1 & -0.5 < t < 0.5 \\ 0 & 0.5 < t < \infty \end{cases} \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)}$$


矩形方波信号

■ (例) 三角波信号 $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 < t < -1 \\ 1-|t| & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < T/2 \end{cases} \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)} \right]^2$$


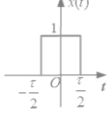
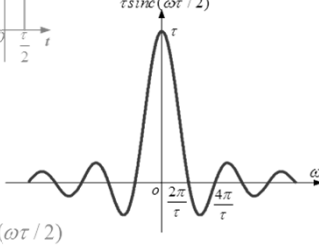
三角波信号

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 19

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ 矩形方波(方波脉冲)信号的分析

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases} \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega/2} = \tau \text{sinc}(\omega\tau/2)$$



上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 20

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ FT的基本性质 $FT[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = X(\omega)$

- 线性性质 $FT[ax_1(t) + bx_2(t)] = aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$
- 时移性质 $FT[x(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
- 共轭对称性 $X(-\omega) = X^*(\omega)$
- 尺度变换性质
- 时域卷积性质
- 时域积分性质
- 时域微分性质

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 21

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ FT的尺度变换性质 $FT[x(t)] = X(\omega) \rightarrow FT[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

■ 证明

$$FT[x(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} d\tau = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

■ 意义

- (1) $0 < a < 1$ 时域扩展, 频域压缩
- (2) $a > 1$ 时域压缩, 频域扩展
- (3) $a = -1$ $x(t) \rightarrow x(-t)$, $X(\omega) \rightarrow X(-\omega)$

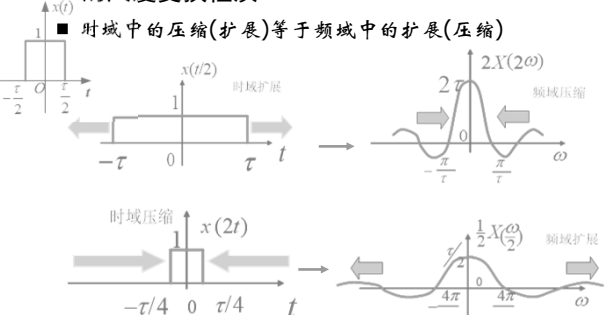
上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 22

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ FT的尺度变换性质

■ 时域中的压缩(扩展)等于频域中的扩展(压缩)



上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 23

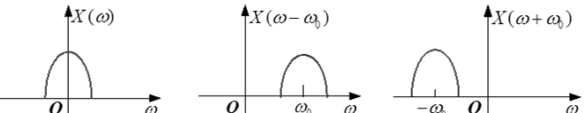
第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ FT的基本性质

■ 带有尺度变换的时移特性 $FT[x(at-b)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)e^{-j\frac{b\omega}{a}}$

■ 频移特性 $FT[x(t)e^{j\omega_0 t}] = X(\omega - \omega_0)$



上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 24

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ FT的基本性质

■ 对偶性

$$FT[x(t)] = X(\omega) \longrightarrow FT[X(t)] = 2\pi x(-\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

↓ 变量替换

$$2\pi x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{j\omega t} dt$$

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt$$

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 25

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ 冲激函数和直流信号的FT

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi \delta(\omega)$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega)$$

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 26

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ 若 $x(t)$ 为偶函数, 则时域和频域完全对称

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 27

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ FT的基本性质

■ 时域微分性质

$$FT\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = j\omega X(\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow \frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [j\omega X(\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

■ 时域卷积性质

$$FT[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(\omega) X_2(\omega)$$

卷积定义

$$FT[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

交换积分次序

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

时移性质

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) X_2(\omega) e^{-j\omega \tau} d\tau = X_1(\omega) X_2(\omega)$$

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 28

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ FT的基本性质

■ 频域卷积性质

$$FT[x_1(t) \cdot x_2(t)] = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

$$FT[x_1(t) \cdot x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(u) e^{ju t} du \right] x_2(t) e^{-j\omega t} dt$$

傅里叶逆变换

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j(\omega-u)t} dt \right] du$$

交换积分次序

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(u) X_2(\omega-u) du$$

傅里叶变换 卷积定义

$$= \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 29

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ 符号函数的FT

$$f(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} +1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

■ 处理方法: 做一个双边函数

$$f_1(t) = \text{sgn}(t) e^{-\alpha|t|}, \text{ 求 } F_1(\omega),$$

求极限得到 $F(\omega)$ 。

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^0 -e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{-1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$F(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_1(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega}$$

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 30

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ 单位阶跃函数的FT $\rightarrow u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$

$\frac{1}{2} \leftrightarrow \pi\delta(\omega) \quad + \quad \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \quad = \quad u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

$|F(\omega)|$

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 31

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ FT的基本性质

■ 时域积分性质 $FT\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$

$FT\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$

利用单位阶跃函数的FT及FT的时域卷积性质 $= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$

$= FT[x(t) * u(t)] = X(\omega) \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right)$

当 $X(0)=0$ $FT\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{j\omega} X(\omega)$

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 32

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ FT的基本性质

■ 时域相关性定理 $FT(r_{xy}(\tau)) = FT(x(t)) FT^*(y(t))$

$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt$

$FT(r_{xy}(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y^*(t-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] dt$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) FT^*(y(t)) e^{-j\omega t} dt$

$= FT(x(t)) FT^*(y(t))$

■ 函数自相关的FT是其幅度谱的平方

$FT(r_x(\tau)) = FT(x(t)) FT^*(x(t)) = \|FT(x(t))\|^2$

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 33

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ FT的基本性质

■ 帕斯瓦尔定理 $\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|X(\omega)\|^2 d\omega$

$\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]^* dt$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right) d\omega$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|X(\omega)\|^2 d\omega$

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 34

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ 解析信号的定义

■ 已知信号 $x(t)$ 希望通过对 $x(t)$ 进行某种变换 $\hat{x}(t) = x(t) * h(t)$ 来构造所谓“解析信号(analytic signal)”:

$a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad A_x(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$

■ 构造解析信号的好处

■ 由于不含有负频率, 可以使采样频率降低一半而不违反采样定理

■ 在研究信号的时频分析时, 使用解析信号可以减轻正负频率在零频附近的交叉干扰

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 35

第三讲

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ 如何构造解析信号 $a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$

$A_x(\omega) = X(\omega) + j\hat{X}(\omega) = X(\omega) + jH(\omega)X(\omega)$

$A_x(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$

$H(\omega) = \begin{cases} -j & \omega > 0 \\ j & \omega < 0 \end{cases}$

$H_1(\omega) = e^{j\beta|\omega|} \cdot H(\omega)$

$h(t) = IFT[H(\omega)] = \lim_{\beta \rightarrow 0} \{ IFT[H_1(\omega)] \} = \frac{1}{\pi t}$

$\hat{x}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$ Hilbert变换

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 36

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ 解析信号瞬时幅值、瞬时相位、瞬时频率

$$a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = A_x(t)e^{j\phi_x(t)}$$

■ 瞬时幅值

$$A_x(t) = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$$

■ 瞬时相位

$$\phi_x(t) = \tan^{-1}(\hat{x}(t) / x(t))$$

■ 瞬时频率

$$\omega_x(t) = \dot{\phi}_x(t) = d\phi_x(t) / dt$$



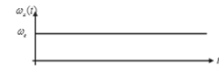
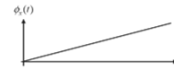
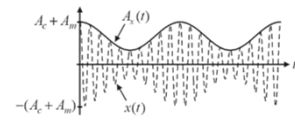
连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ 例：幅值调制信号

$$\omega_m < \omega_c$$

$$x(t) = m(t) \cos(\omega_c t) = (A_c + A_m \sin(\omega_m t)) \cos(\omega_c t)$$

$$a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = A_x(t)e^{j\phi_x(t)} = (A_c + A_m \sin(\omega_m t))e^{j\omega_c t}$$

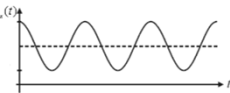
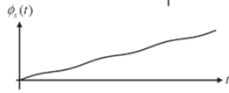
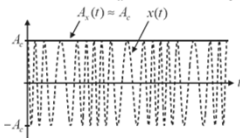


连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ 例：频率调制信号

$$x(t) = A_c \cos(\omega_c t + A_m \sin(\omega_m t)) \quad A_m \omega_m \ll \omega_c$$

$$a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = A_x(t)e^{j\phi_x(t)} \approx A_c e^{j(\omega_c t + A_m \sin(\omega_m t))}$$



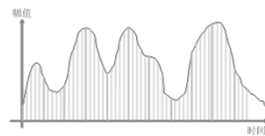
连续时间信号的采样及采样定理

- 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)
- 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)
- 连续时间信号的采样及采样定理
- 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

连续时间信号的采样及采样定理

■ 采样周期、频率

- 通常采用等时间采样来得到离散时间信号。设采样周期为 T_s , T_s 的倒数称为采样频率 f_s , 对应的角频率 $\omega_s = 2\pi f_s$



- 直观地看, 采样周期 T_s 较大时, 则易丢失信息, 使一些细节内容无法反映出来; 而如果 T_s 太小, 信息虽不易丢失, 但却使数据量明显增大, 处理费时

■ 信号采样研究内容

- 以一定的采样周期采样后, 研究: (1) 采样前后信号的信息是否有丢失; (2) 采样前后信号的频谱有何变化; (3) 采样信号能否恢复为原信号?

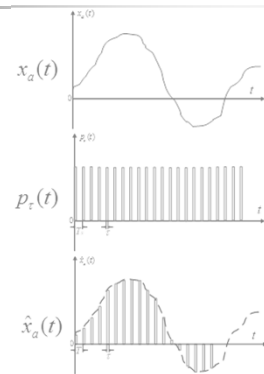


连续时间信号的采样及采样定理

■ 采样的精确数学描述

- 对连续时间信号 $x_a(t)$ 的采样过程可看作对采样脉冲串调幅的过程: 脉冲载波是一串周期为 T_s 、宽度为 τ 的采样矩形脉冲, 以 $p_T(t)$ 表示, 调制信号是输入的连续时间信号 $x_a(t)$, 采样输出为:

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)p_T(t)$$

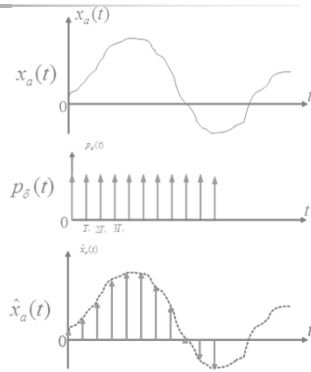


连续时间信号的采样及采样定理

■ 采样的工程描述

- 工程上，一般采样周期 $T_s \gg \tau$ ，可将采样矩形脉冲串 $p_\delta(t)$ 近似为冲激函数串 $p_\delta(t)$ ，采样输出信号则近似为输入的连续时间信号 $x_a(t)$ 与冲激函数串 $p_\delta(t)$ 的乘积：

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) p_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - nT_s)$$



连续时间信号的采样及采样定理

■ 采样信号的频谱

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) p_\delta(t)$$

- 冲激函数串 $p_\delta(t)$ 是一个周期函数(周期 T_s)，可用付氏级数

展开：

$$p_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_s t}$$

基频是采样频率 $\omega_s = 2\pi/T_s$

$$c_m = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} p_\delta(t) e^{-jm\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-jm\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s}$$

$$p_\delta(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\omega_s t}$$



连续时间信号的采样及采样定理

■ 采样信号的频谱

- 将冲激函数串 $p_\delta(t)$ 级数表达式代入 $\hat{x}_a(t)$ 傅立叶变换公式：

$$\hat{X}_a(\omega) = FT[\hat{x}_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) p_\delta(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\omega_s t} \right) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j(\omega - m\omega_s) t} dt$$

- 采样信号的频谱是连续信号频谱的周期延拓，重复周期为 ω_s (采样频率)

$$\hat{X}_a(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - m\omega_s)$$

$$X_a(\omega) = FT[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\omega t} dt$$

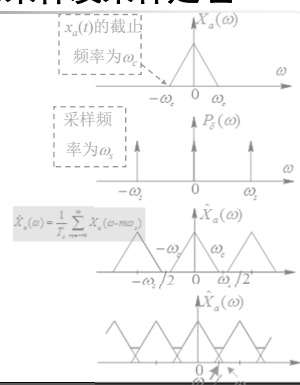


连续时间信号的采样及采样定理

■ 采样信号的频谱

- 采样信号的频谱是原连续信号的频谱以 ω_s 为周期，进行周期性延拓而成

- 如右图例，设连续信号 $x_a(t)$ 是带限信号，最高截止频率为 ω_c ，采样频率为 ω_s 。当 $\omega_c > \omega_s/2$ 时，作周期延拓时会发生频域的“混叠”现象，导致 $\hat{X}_a(\omega)$ 与 $X_a(\omega)$ 在一个周期内不相等



连续时间信号的采样及采样定理

■ 采样定理

- 要使实信号采样后能够不失真还原，采样频率必须大于信号最高频率的两倍 $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$
- 实际工作中，考虑到有噪声，为避免频谱混淆，采样频率总是选得比两倍信号最高频率 ω_{\max} 更大些，如 $\omega_s > (3 \sim 5) \omega_{\max}$
- 同时，为避免高于 $\omega_s/2$ (折叠频率) 的噪声信号进入采样器造成频谱混淆，采样器前常常加一个保护性的前置低通滤波器(抗混叠滤波)，阻止高于 $\omega_s/2$ 频率分量进入



连续时间信号的采样及采样定理

■ 一些典型的数字信号处理系统的上限频率

应用系统	上限频率 f_{\max}	采样频率 f_s
地质勘探	500Hz	1-2 kHz
生物医学	1kHz	2-4 kHz
机械振动	2kHz	4-10 kHz
语音	4kHz	8-16 kHz
音乐	20kHz	40-96 kHz
视频	4MHz	8-10 MHz

$$\omega = 2\pi f$$





离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

- 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)
- 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)
- 连续时间信号的采样及采样定理
- 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

第三讲

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

■ 采样信号的频谱

■ 表达形式1

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)p_\delta(t)$$

$$\hat{X}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t)p_\delta(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \right) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-j(\omega - n\omega_s)t} dt = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - n\omega_s)$$

■ 表达形式2

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

$$\hat{X}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) \delta(t - nT_s) \right) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) x_a(t) e^{-j\omega t} dt \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) e^{-j\omega nT_s}$$



上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室

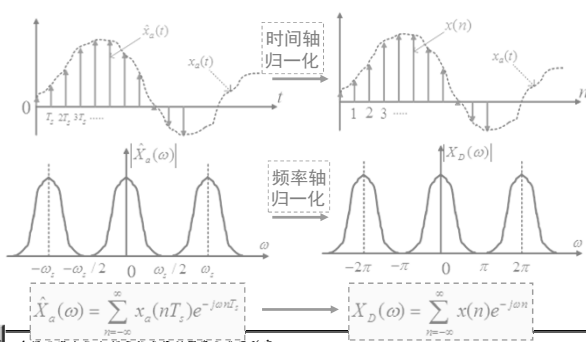
2016年9月20日星期二

50

第三讲

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

■ 采样频率归一化 $f_s = T_s = 1$



上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室

2016年9月20日星期二

51

第三讲

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

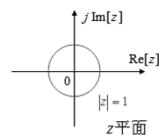
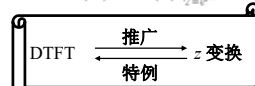
■ 离散时间信号傅立叶变换(DTFT)的定义

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

■ DTFT的特点

- $X(\omega)$ 是 ω 的连续函数
- $X(\omega)$ 是 ω 的周期函数，周期为 2π $X(\omega) = X(\omega + 2\pi)$
- $X(\omega)$ 是 ω 的复函数 $X(\omega) = \text{Re}[X(\omega)] + j \text{Im}[X(\omega)]$
- DTFT 是 z 仅在单位圆取值的 z 变换

$$X(\omega) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$



上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室

2016年9月20日星期二

52

第三讲

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

■ DTFT反变换

- $X_D(\omega)$ 是 ω 的连续，周期函数，可利用连续周期函数的傅立叶级数求DTFT反变换：

连续周期函数的傅立叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t} \quad X_D(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad \text{[DTFT]}$$

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt \longrightarrow x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_D(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

[DTFT反变换]



上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室

2016年9月20日星期二

53

第三讲

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

■ DTFT的性质表

性质	时域	频域
线性	$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$	$X_D(\omega) = aX_{D1}(\omega) + bX_{D2}(\omega)$
时移	$y(n) = x(n - n_0)$	$Y_D(\omega) = e^{-j\omega n_0} X_D(\omega)$
频移	$y(n) = e^{j\omega_0 n} x(n)$	$Y_D(\omega) = X_D(\omega - \omega_0)$
时域卷积	$y(n) = x(n) * h(n)$	$Y_D(\omega) = X_D(\omega) H_D(\omega)$
频域卷积	$y(n) = x(n)h(n)$	$Y_D(\omega) = X_D(\omega) * H_D(\omega)$ $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_D(\theta) H_D(\omega - \theta) d\theta$
Parseval 定理	$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_D(\omega) ^2 d\omega$	



上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室

2016年9月20日星期二

54

第三讲

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

■ 线性时不变离散时间系统的频率响应

$$x(n) \xrightarrow{h(n)} y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \text{Re}[H(\omega)] + j\text{Im}[H(\omega)] = |H(\omega)|e^{j\angle H(\omega)}$$

系统频率响应函数
 幅频响应
 相频响应

■ 线性时不变离散时间系统的描述形式

时域

- 差分方程 $\sum_{i=0}^N b_i y(n-i) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i)$
- 单位脉冲响应 $h(n) = T[\delta(n)]$ $y(n) = x(n) * h(n)$

频域

- 频率响应函数 $H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$ $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$

z域

- 系统函数 $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$ $Y(z) = X(z)H(z)$

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 55

第三讲

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

■ 例：单自由度振动系统分析

■ 运动方程

$$m \frac{d^2 y_a}{dt^2} + c \frac{dy_a}{dt} + ky_a = f_a(t)$$

$$\frac{d^2 y_a}{dt^2} + 2\zeta\Omega_n \frac{dy_a}{dt} + \Omega_n^2 y_a = x_a(t)$$

$\zeta = \frac{c}{2m\Omega_n}$ $\Omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $x_a(t) = \frac{f_a(t)}{m}$

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 56

第三讲

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

■ 例：单自由度振动系统分析(2)

■ 输入-输出差分方程的建立

$$\frac{d^2 y_a}{dt^2} + 2\zeta\Omega_n \frac{dy_a}{dt} + \Omega_n^2 y_a = x_a(t)$$

$$\frac{dy_a}{dt} \Big|_{t=nT_s} = \frac{y_a(nT_s + T_s) - y_a(nT_s)}{T_s}$$

$$\frac{d^2 y_a}{dt^2} \Big|_{t=nT_s} = \frac{y_a(nT_s + 2T_s) - 2y_a(nT_s + T_s) + y_a(nT_s)}{T_s^2}$$

$$\sum_{i=0}^N b_i y(n-i) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i)$$

$$y(n) + (2\zeta\Omega_n T_s - 2)y(n-1) + (1 - 2\zeta\Omega_n T_s + \Omega_n^2 T_s^2)y(n-2) = T_s^2 x(n-2)$$

$b_0 = 1$ $b_1 = 2\zeta\Omega_n T_s - 2$ $b_2 = 1 - 2\zeta\Omega_n T_s + \Omega_n^2 T_s^2$ $a_0 = 0$ $a_1 = 0$ $a_2 = T_s^2$

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 57

第三讲

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

■ 例：单自由度振动系统分析(3)

■ 系统函数 $H(z)$

$$y(n) + (2\zeta\Omega_n T_s - 2)y(n-1) + (1 - 2\zeta\Omega_n T_s + \Omega_n^2 T_s^2)y(n-2) = T_s^2 x(n-2)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T_s^2 z^{-2}}{1 + (2\zeta\Omega_n T_s - 2)z^{-1} + (1 - 2\zeta\Omega_n T_s + \Omega_n^2 T_s^2)z^{-2}}$$

■ 极点

$$z_{1,2} = 1 - \zeta\Omega_n T_s \pm j\Omega_n T_s \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$|z_{1,2}| < 1 \Rightarrow T_s < \frac{2\zeta}{\Omega_n}$

■ 频响函数 $H(\omega)$

$$H(\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{T_s^2 e^{-j2\omega}}{1 + (2\zeta\Omega_n T_s - 2)e^{-j\omega} + (1 - 2\zeta\Omega_n T_s + \Omega_n^2 T_s^2)e^{-j2\omega}}$$

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 58

第三讲

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

■ 几个有用的MATLAB命令

■ 系统的零极点图 `zplane(a,b)`

- 在z平面上画出用分子a和分母b表示的系统的零点(用‘o’表示)和极点(用‘x’表示),并画出单位圆

■ 系统的脉冲响应函数 `impz`

- `[h,t]=impz(a,b,N)`----得到系统的脉冲响应h, 取样点数N由impz函数自动选取并记录在t中(t=[0:N-1])
- `[h,t]=impz(a,b,N)`----得到系统在指定点的脉冲响应h。当N为标量时, t=[0:N-1]; 当N为矢量时(其值应为整数), 则t=N, 即在这些指定的点计算脉冲响应h
- `[h,t]=impz(b,a,N,Fs)`----得到系统在指定点的脉冲响应h。取样间隔为1/Fs
- `h=impz(a,b)`等效于`h=filter(a,b,delta)`

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}$$

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 59

第三讲

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

■ 几个有用的MATLAB命令

■ 系统的频率响应函数 `freqz`

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^N b_k e^{-j\omega k}}$$

- `[h,w]=freqz(a,b,n)`----得到系统n点的频率响应, 这n点均匀分布在单位圆的上半圆(0- π)。h中为频率响应H(w), w为这n点的频率。(缺省n=512)
- `[h,f]=freqz(a,b,n,Fs)`----得到系统n点的频率响应, 这n点均匀分布在单位圆的(0-Fs/2)范围内。h中为频率响应H(f), f为这n点的频率(Fs和f以Hz为单位)
- 不带输出变量的freqz函数则画出幅频和相频特性曲线

上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室 2016年9月20日星期二 60

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

■ 例：单自由度振动系统分析(4)

■ MATLAB代码

```
wn = 2*pi*10; % undamped natural frequency
Kesi = 0.1; % damping ratio
Ts = 1/1000; % sampling period
```

```
N=round(1/Ts);
a=[0, 0, Ts*Ts];
b=[1, (2*Kesi*wn*Ts-2), (1-2*Kesi*wn*Ts+wn*wn*Ts*Ts)];
```

```
figure
zplane(a,b) % 绘制系统的零极点图
```

```
figure
[h,t]=impz(a,b,N,1/Ts);
```

```
plot(t,h) % 绘制系统的脉冲响应
```

```
figure
freqz(a,b,N,1/Ts); % 绘制系统的幅频和相频响应
```

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}$$



离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

■ 分析结果(1)

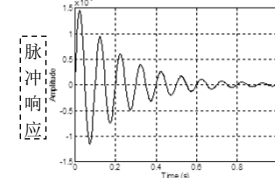
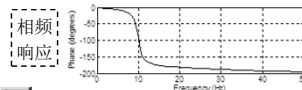
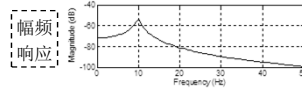
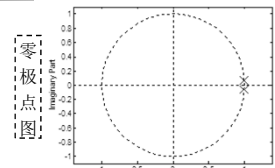
$$\Omega_c = 20\pi$$

$$\zeta = 0.1$$

$$T_s = 0.001s$$

极点单位圆内

零极点图



离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

■ 分析结果(2)

$$\Omega_c = 20\pi$$

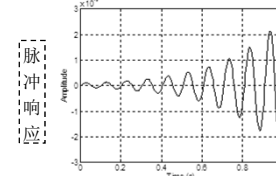
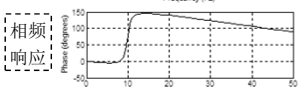
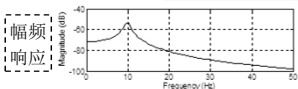
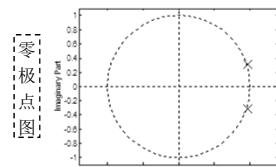
$$\zeta = 0.1$$

$$T_s = 0.005s$$

极点单位圆外

 $T_s > \frac{2\zeta}{\Omega_c} \Rightarrow |z_{1,2}| > 1$

零极点图



离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

■ 分析结果(3)

$$\Omega_c = 20\pi$$

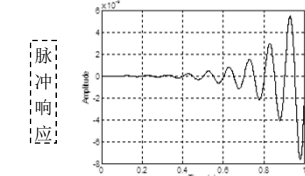
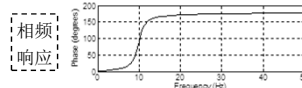
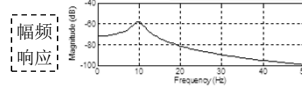
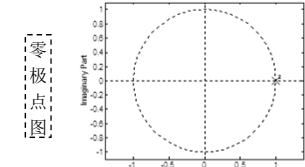
$$T_s = 0.001ms$$

$$\zeta = -0.1$$

极点单位圆外

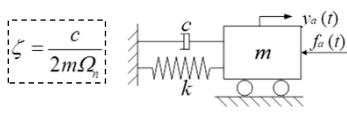
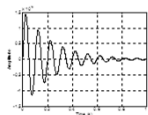
 $T_s > \frac{2\zeta}{\Omega_c} \Rightarrow |z_{1,2}| > 1$

零极点图



离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

■ 利用Hilbert变换辨识阻尼系数



$$x(t) = Ae^{-\zeta\Omega_d t} \sin(\Omega_d t + \phi) \quad t \geq 0 \quad \Omega_d = \Omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$a_x(t) = x(t) + j\dot{x}(t)$$

$$= A_x(t)e^{j\phi_x(t)} \approx (Ae^{-\zeta\Omega_d t})e^{j(\Omega_d t - \phi - \pi/2)} \quad t \geq 0$$

$$\ln A_x(t) \approx \ln A - \zeta\Omega_d t$$



The End

谢谢！

请批评指正

