## 上海交通大学 2015-2016 学年第一学期《矩阵理论》试卷(A)

姓名__________　　学号____________　　教师姓名__________　　成绩______

**一. 单项选择题(每题 3 分, 共 15 分)**

**1.** 设$V = \mathbb{R}[x]_{2016}$ 是次数小于 **2016** 的实多项式构成的实线性空间. 设$n \geq 0, f^{(n)}(x)$ 表示$f(x) \in V$ 的 $n$ 阶导数, $f^{(0)}(x) = f(x)$. 给定 $V$ 的两个子空间 $U, W$ 如下:
$U = \{f(x) \in V \mid f^{(n)}(0) = 0, n \leq 1949\}$, $W = \{g(x) \in V \mid g(x) = x^{1896}(x-1)^{60}h(x), \forall h(x) \in V\}$.
则 $V$ 的子空间 $U + W$ 的维数 $\dim(U + W) =$(　　).

**(A)** 118　　**(B)** 119　　**(C)** 120　　**(D)** 121

**2.** 设 $A$ 是 $m \times n$ 阶复矩阵, $R(A), N(A)$ 分别表示 $A$ 的列空间与零空间. 设 $A = LR$ 是 $A$ 的一个满秩分解. $A^*$ 表示 $A$ 的共轭转置. 考虑下述 **8** 个等式:

$R(A) = R(L)$,　$R(A^*) = R(L^*)$,　$R(A) = R(R)$,　$R(A^*) = R(R^*)$,

$N(A) = N(L)$,　$N(A^*) = N(L^*)$,　$N(A) = N(R)$,　$N(A^*) = N(R^*)$.

则上述等式恒成立的个数为(　　).

**(A)** 2　　**(B)** 4　　**(C)** 6　　**(D)** 8

**3.** 设 $n \geq 3, \alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$ 是线性无关的向量. 则矩阵 $\begin{pmatrix} \alpha^*\alpha & \alpha^*\beta \\ \beta^*\alpha & \beta^*\beta \end{pmatrix}$ (　　).

**(A)** 未必可逆　　**(B)** 可逆但未必正定　　**(C)** 半正定但未必正定　　**(D)** 正定

**4.** 设 $A$ 为 $n$ 阶正规矩阵, $\| \bullet \|_F$ 是矩阵的 **F**-范数, 则(　　).

**(A)** $\|A^2\|_F = \|A^*A\|_F$　　**(B)** $\| A^2\|_F = \|A\|_F^2$

**(C)** $\| A\|_F = \sup_{x\neq 0} \dfrac{x^*Ax}{x^*x}$　　**(D)** $\| A\|_F^2 = \sup_{x\neq 0} \dfrac{x^*A^*Ax}{x^*x}$

**5.** 设 $A$ 是 $m \times n$ 阶复矩阵, $A^\dagger$ 是 $A$ 的 **Moore-Penrose** 广义逆. 考虑下述 **4** 个等式:

$A^*AA^\dagger = A^*$,　$A^\dagger AA^* = A^*$,　$(A^*A)^\dagger A^* = A^\dagger$,　$(A^*A)^\dagger A^* = A^*$.

则上述等式恒成立的个数为(　　).

**(A)** 4　　**(B)** 3　　**(C)** 2　　**(D)** 1

**二. 填空题(每题 3 分, 共 15 分)**

**6.** 设 $\sigma$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换, $e_1 = (1, 0, )^T, e_2 = (0, 1)^T, \sigma(e_1) = e_1, \sigma(e_1 + e_2) = 2e_1$, 则 $\sigma$ 关于基$e_1 + e_2, e_1 - e_2$的矩阵为(　　　　　　).

**7.** 设 $e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0)^T, A = (e_1, e_1)$. 则 $Ax = e_2$ 的最优解为(　　　　　　　　).

**8.** 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\cos^2(At) - \sin^2(At) =$(　　　　　　　　　　).

**9.** 设 $A$ 是秩为 2 的 3 阶投影矩阵, $B = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(I-A)^n}{3^n}$, 则 $e^{2B}$ 的**Jordan**标准型为(　　　　　　　　).

**10.** 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n\ (n \geq 2), \|\bullet\|_2$ 是向量的 **2**-范数(即欧几里德范数), $\|\alpha\|_2 = 2, \|\beta\|_2 = 1, \alpha^*\beta = 1$. 则矩阵 $\alpha\beta^* + \beta\alpha^*$ 的 **Moore-Penrose** 广义逆为(　　　　　　　　).

三. 计算题与证明题 (11-14 题每题 15 分, 15题 10 分, 共 70 分)

**11．设**

$$U=\{(x,y,z,w)^T\in\mathbb{R}^4\,|\,x+y+z+w=0\},\ W=\{(x,y,z,w)^T\in\mathbb{R}^4\,|\,x-y+z-w=0\}$$

是通常欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 的两个子空间. 设 $I$ 是 $\mathbb{R}^4$ 上的恒等变换.

(1) 求 $U$ 与 $U\bigcap W$ 的正交补 $(U\bigcap W)^\perp$ 的各一组标准正交基;

(2) 试求出 $\mathbb{R}^4$ 上的所有正交变换 $\sigma$ 使得线性变换 $I-\sigma$ 的核 $Ker(I-\sigma)=U$.

**12.** 设 $n \geq 2$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$. 定义线性变换 $\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 如下:

$$\sigma(x) = (x_2, x_3, ..., x_n, x_1)^T.$$

设 $\sigma$ 在标准基 $e_1, e_2, ..., e_n$ 下的矩阵为 $A$, 其中 $e_i\,(1 \leq i \leq n)$ 为 $n$ 阶单位矩阵的第 $i$ 列.

**(1)** 求 $A$;

**(2)** 求 $\sigma$ 的特征值与特征向量;

**(3)** 求 $A$ 的谱分解, 请写出乘法形式与加法形式.

**13.** 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

**(1)** 求 $A$ 的 **Jordan** 标准形 $J$;

**(2)** 计算 $e^{At}$;

**(3)** 设 $x(0) = (1, 0, 0)^T$. 求定解问题 $x'(t) = Ax(t)$ 的解.

**14.** 已知 $n$ 阶**Hermite**矩阵 $A$ 的秩为 $r$, 其谱分解为 $A = UDU^*$, 其中 $U$ 为酉矩阵, $D = \mathrm{diag}\,(a_1, \cdots, a_r, 0, \cdots, 0)$ 是对角矩阵.

**(1)** 求 $A$ 的一个满秩分解;

**(2)** 判断矩阵 $e^A$ 是否存在三角分解(即 $LU$ 分解)? 请说明理由;

**(3)** 求分块矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ 的奇异值分解.

**15.** 设 $A$ 为 $n$ 阶复矩阵.

**(1)** 证明: 存在酉矩阵 $U$ 和半正定矩阵 $P$, 使得$A = UP$. (此分解称为 $A$ 的极分解.)

**(2)** 给出 $U$ 与 $P$ 唯一的充分必要条件.