课堂练习一、求非周期均匀 B 样条的节点及基函数。

对于非周期均匀 B 样条，若 n=6,k=2，

（1）写出其节点序列。

（2）写出所有的基函数 $N_{i,0}(u)$，$N_{i,1}(u)$，$N_{i,2}(u)$ 。

解：

(1) 节点序列为：

$$T=[t_0,t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8,t_9]=[0,0,0,1,2,3,4,5,5,5]$$

(2) 所有基函数

0 次基函数 $N_{i,0}(u)$（共 n+k+1=9 个）依次为：

$$N_{0,0}(u)=0$$

$$N_{1,0}(u)=0$$

$$N_{2,0}(u)=\begin{cases}1 & 0=t_2\le u<t_3=1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$N_{3,0}(u)=\begin{cases}1 & 1=t_3\le u<t_4=2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$N_{4,0}(u)=\begin{cases}1 & 2=t_4\le u<t_5=3\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$N_{5,0}(u)=\begin{cases}1 & 3=t_5\le u<t_6=4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$N_{6,0}(u)=\begin{cases}1 & 4=t_6\le u<t_7=5\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$N_{7,0}(u)=0$$

$$N_{8,0}(u)=0$$

1 次基函数 $N_{i,1}(u)$（共 n+k=8 个）依次为：

$$N_{0,1}(u)=\frac{u-t_0}{t_1-t_0}N_{0,0}(u)+\frac{t_2-u}{t_2-t_1}N_{1,0}(u)=0$$

$$N_{1,1}(u)=\frac{u-t_1}{t_2-t_1}N_{1,0}(u)+\frac{t_3-u}{t_3-t_2}N_{2,0}(u)=\begin{cases}\dfrac{t_3-u}{t_3-t_2}=1-u & 0=t_2\le u<t_3=1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$N_{2,1}(u)=\frac{u-t_2}{t_3-t_2}N_{2,0}(u)+\frac{t_4-u}{t_4-t_3}N_{3,0}(u)=\begin{cases}\frac{u-t_2}{t_3-t_2}=u & 0=t_2\le u<t_3=1\\ \frac{t_4-u}{t_4-t_3}=2-u & 1=t_3\le u<t_4=2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$N_{3,1}(u)=\frac{u-t_3}{t_4-t_3}N_{3,0}(u)+\frac{t_5-u}{t_5-t_4}N_{4,0}(u)=\begin{cases}\frac{u-t_3}{t_4-t_3}=u-1 & 1=t_3\le u<t_4=2\\ \frac{t_5-u}{t_5-t_4}=3-u & 2=t_4\le u<t_5=3\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$N_{4,1}(u)=\frac{u-t_4}{t_5-t_4}N_{4,0}(u)+\frac{t_6-u}{t_6-t_5}N_{5,0}(u)=\begin{cases}\frac{u-t_4}{t_5-t_4}=u-2 & 2=t_4\le u<t_5=3\\ \frac{t_6-u}{t_6-t_5}=4-u & 3=t_5\le u<t_6=4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$N_{5,1}(u)=\frac{u-t_5}{t_6-t_5}N_{5,0}(u)+\frac{t_7-u}{t_7-t_6}N_{6,0}(u)=\begin{cases}\frac{u-t_5}{t_6-t_5}=u-3 & 3=t_5\le u<t_6=4\\ \frac{t_7-u}{t_7-t_6}=5-u & 4=t_6\le u<t_7=5\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$N_{6,1}(u)=\frac{u-t_6}{t_7-t_6}N_{6,0}(u)+\frac{t_8-u}{t_8-t_7}N_{7,0}(u)=\begin{cases}\frac{u-t_6}{t_7-t_6} & 4=t_6\le u<t_7=5\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$N_{7,1}(u)=\frac{u-t_7}{t_8-t_7}N_{7,0}(u)+\frac{t_9-u}{t_9-t_8}N_{8,0}(u)=0$$

有：$\sum_{i=j}^{j+1}N_{i,1}(u)=1$

2 次基函数 $N_{i,2}(u)$（共 n+k−1=7 个）依次为：

$$N_{0,2}(u)=\frac{u-t_0}{t_2-t_0}N_{0,1}(u)+\frac{t_3-u}{t_3-t_1}N_{1,1}(u)=\begin{cases}\frac{t_3-u}{t_3-t_1}\cdot\frac{t_3-u}{t_3-t_2} & 0=t_2\le u<t_3=1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$N_{1,2}(u)=\frac{u-t_1}{t_3-t_1}N_{1,1}(u)+\frac{t_4-u}{t_4-t_2}N_{2,1}(u)=\begin{cases}\frac{u-t_1}{t_3-t_1}\cdot\frac{t_3-u}{t_3-t_2}+\frac{t_4-u}{t_4-t_2}\cdot\frac{u-t_2}{t_3-t_2} & 0=t_2\le u<t_3=1\\ \frac{t_4-u}{t_4-t_2}\cdot\frac{t_4-u}{t_4-t_3} & 1=t_3\le u<t_4=2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$N_{2,2}(u)=\frac{u-t_2}{t_4-t_2}N_{2,1}(u)+\frac{t_5-u}{t_5-t_3}N_{3,1}(u)=\begin{cases}\frac{u-t_2}{t_4-t_2}\cdot\frac{u-t_2}{t_3-t_2} & 0=t_2\le u<t_3=1\\ \frac{u-t_2}{t_4-t_2}\cdot\frac{t_4-u}{t_4-t_3}+\frac{t_5-u}{t_5-t_3}\cdot\frac{u-t_3}{t_4-t_3} & 1=t_3\le u<t_4=2\\ \frac{t_5-u}{t_5-t_3}\cdot\frac{t_5-u}{t_5-t_4} & 2=t_4\le u<t_5=3\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$N_{3,2}(u)=\frac{u-t_3}{t_5-t_3}N_{3,1}(u)+\frac{t_6-u}{t_6-t_4}N_{4,1}(u)=\begin{cases}\frac{u-t_3}{t_5-t_3}\cdot\frac{u-t_3}{t_4-t_3} & 1=t_3\le u<t_4=2\\ \frac{u-t_3}{t_5-t_3}\cdot\frac{t_5-u}{t_5-t_4}+\frac{t_6-u}{t_6-t_4}\cdot\frac{u-t_4}{t_5-t_4} & 2=t_4\le u<t_5=3\\ \frac{t_6-u}{t_6-t_4}\cdot\frac{t_6-u}{t_6-t_5} & 3=t_5\le u<t_6=4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$N_{4,2}(u)=\frac{u-t_4}{t_6-t_4}N_{4,1}(u)+\frac{t_7-u}{t_7-t_5}N_{5,1}(u)=\begin{cases}\frac{u-t_4}{t_6-t_4}\cdot\frac{u-t_4}{t_5-t_4} & 2=t_4\le u<t_5=3\\ \frac{u-t_4}{t_6-t_4}\cdot\frac{t_6-u}{t_6-t_5}+\frac{t_7-u}{t_7-t_5}\cdot\frac{u-t_5}{t_6-t_5} & 3=t_5\le u<t_6=4\\ \frac{t_7-u}{t_7-t_5}\cdot\frac{t_7-u}{t_7-t_6} & 4=t_6\le u<t_7=5\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$N_{5,2}(u)=\frac{u-t_5}{t_7-t_5}N_{5,1}(u)+\frac{t_8-u}{t_8-t_6}N_{6,1}(u)=\begin{cases}\frac{u-t_5}{t_7-t_5}\cdot\frac{u-t_5}{t_6-t_5} & 3=t_5\le u<t_6=4\\ \frac{u-t_5}{t_7-t_5}\cdot\frac{t_7-u}{t_7-t_6}+\frac{t_8-u}{t_8-t_6}\cdot\frac{u-t_6}{t_7-t_6} & 4=t_6\le u<t_7=5\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$N_{6,2}(u)=\frac{u-t_6}{t_8-t_6}N_{6,1}(u)+\frac{t_9-u}{t_9-t_7}N_{7,1}(u)=\begin{cases}\frac{u-t_6}{t_8-t_6}\cdot\frac{u-t_6}{t_7-t_6} & 4=t_6\le u<t_7=5\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

有： $\sum_{i=j}^{j+2}N_{i,2}(u)=1$