$$(\varphi_1,\varphi_1) = \sum_{i=0}^{4} x_i^2 = 11.875,$$

$$(\varphi_0,\bar{y}) = \sum_{i=0}^{4} \bar{y}_i = 9.404,\ (\varphi_1,\bar{y}) = \sum_{i=0}^{4} x_i\bar{y}_i = 14.422$$

故有

$$\begin{cases} 5A + 7.50b = 9.404 \\ 7.50A + 11.875b = 14.422 \end{cases}$$

解得 $A = 1.122,\ b = 0.5056,\ a = e^A = 3.071$，于是得最小二乘拟合曲线

$$y = 3.071e^{0.5056x} = \varphi^*(x)$$

例 2-12 求函数 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ 在$[0,1]$上的一次最佳一致逼近多项式，并求其偏差.

分析 这是一个常规题．按求一次最佳一致逼近多项式的固定办法可求得形如 $P_1^*(x) = a_0^* + a_1^* x$ 的最佳一致逼近多项式.

解答 因 $f'(x) = x/\sqrt{1+x^2},\ f''(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$，所以在$[0,1]$上 $f''(x)$ 恒为正，故

$$a_1 = [f(1) - f(0)]/(1-0) = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$$

由 $$f'(x_2) = x_2/\sqrt{1+x_2^2} = \sqrt{2} - 1$$

得 $$x_2 = [(\sqrt{2}-1)/2]^{1/2} \approx 0.4551$$

且 $$f(x_2) = \sqrt{1+x_2^2} \approx 1.0986$$

所以 $$a_0 = \frac{1}{2}[f(0) + f(x_2)] - a_1\frac{0+x_2}{2} \approx 0.955$$

于是得到 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ 在$[0,1]$上一次最佳一致逼近多项式为

$$P_1^*(x) = 0.955 + 0.4142x$$

又因区间端点必属于切比雪夫交错点组，故

$$\Delta(f,P_1^*) = \max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x) - P_1^*| = |f(0) - P_1^*(0)| = 0.045$$

例 2-13 选取常数 a，使 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|x^3 - ax|$ 达到极小．又问这个解是否惟一？

分析 本题可这样理解，即把常数 0 看作是函数 $x^3 - ax$ 的最佳一致逼近多项式，然后按照零为 $x^3 - ax$ 的最佳一致逼近多项式的充要条件去确定 a.

解一 要使 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|x^3 - ax|$ 达到极小，只要使 0 为 $x^3 - ax$ 的最佳一致逼近多项式．由于 0 为 $x^3 - ax$ 的最佳一致逼近多项式的充要条件是 0 在$[0,1]$上有两个轮流为正、负的偏差点，若设

$$\varphi(x) = x^3 - ax$$

则 $\varphi(x)$ 与 0 的偏差点使 $|\varphi(x)|$ 达到最大，且这些偏差点一定是使 $\varphi(x)$ 取最大或最小或取极值的值，因此，需考察这些点．

由 $\varphi(x) = x^3 - ax,\ \varphi'(x) = 3x^2 - a,\ \varphi''(x) = 6x$ 得，当 $x\in(0,1), a > 0$ 时，$\varphi(x)$ 在 $\bar{x} = \sqrt{a/3}$ 取极小值，且极小值为

$$\varphi(\bar{x}) = (\frac{a}{3})^{3/2} - a(\frac{a}{3})^{1/2} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}a^{3/2}$$

在区间端点，$\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1 - a$.

显然，$\varphi(0)$ 不能使 $|\varphi(x)|$ 达到最大，故令

$$\varphi(1) = -\varphi(\bar{x})$$

即 $$\frac{2}{3\sqrt{3}}a^{3/2} = 1 - a$$

整理得 $$4a^3 - 27a^2 + 54a - 27 = 0$$

分解得 $$(4a-3)(a-3)^2 = 0$$

所以 $$a = \frac{3}{4} \quad 或 \quad a = 3$$

当 $a = 3/4$ 时，$\bar{x} = \sqrt{a/3} = \dfrac{1}{2} \in (0,1)$；当 $a = 3$ 时，$\bar{x} = \sqrt{a/3} = 1$，由 $\varphi(1) = -\varphi(1)$，解得 $\varphi(1) = 0$. 另一方面又有 $\varphi(1)$

$=1-a=1-3=-2$，从而产生矛盾．所以，使 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|x^3-ax|$ 达到极小时，a 有惟一解 3/4.

解二 设 $\varphi(x)=x^3-ax$，由于 $\varphi(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为奇函数，故 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|x^3-ax| = \max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|x^3-ax|$，根据最小零偏差多项式定理，有

$$x^3-ax=\frac{1}{2^2}T_3(x)=x^3-\frac{3}{4}x$$

故得

$$a=\frac{3}{4}.$$

从而，使 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|x^3-ax|$ 达到极小的 a 取惟一值 $\frac{3}{4}$.

例 2-14 设 $f(x)=4x^3+2x^2+x+1$，试在 $[-1,1]$ 上寻找一个次数不超过 2 的多项式 $P_2^*(x)$，使它为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最佳一致逼近多项式．

分析 这是一个常规题，实际上是求满足 $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-P_2^*(x)|=\min$ 的 $P_2^*(x)$．根据最小零偏差定理知，$f(x)-P_2^*(x)$ 应该是首项系数为 1 的切比雪夫三次多项式 $\frac{1}{2^2}T_3(x)$，从而可得 $P_2^*(x)$.

$\frac{1}{4}[f(x)-P_2^*(x)]=\frac{1}{2^2}T_3(x)$

解答 由题意，所求 $P_2^*(x)$ 应该满足

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-P_2^*(x)|=\min$$

由最小零偏差定理，并注意到 $f(x)$ 的首项系数为 4，有

$$\frac{1}{4}[f(x)-P_2^*(x)]=\frac{1}{2^2}T_3(x)=\frac{1}{4}(4x^3-3x)$$

从而 $P_2^*(x)=f(x)-(4x^3-3x)=2x^2+4x+1$

例 2-15 设 $f(x)=x^4+3x^3-1$，在 $[0,1]$ 上求 $f(x)$ 的三次最佳一致逼近多项式．

分析 这题不是在 $[-1,1]$ 上，因此可将 $[0,1]$ 变换到 $[-1,1]$ 上，然后利用最小零偏差定理求解．

解答 令 $t=2x-1$，则当 x 在 $[0,1]$ 变化时，$t\in[-1,1]$．此时

$$f(x)=f\left(\frac{t+1}{2}\right)=\left(\frac{t+1}{2}\right)^4+3\left(\frac{t+1}{2}\right)^3-1$$

设 $P_3^*(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的三次最佳一致逼近多项式，由于 $f\left(\frac{t+1}{2}\right)$ 的首项系数为 $\frac{1}{2^4}$，故有

$2^4[f(x)-P_3^*$

$$16\left[f\left(\frac{t+1}{2}\right)-P_3^*\left(\frac{t+1}{2}\right)\right]=\frac{1}{2^{4-1}}T_4(t)$$

即 $$P_3^*\left(\frac{t+1}{2}\right)=f\left(\frac{t+1}{2}\right)-\frac{1}{16\times 8}T_4(t)=$$
$$\left(\frac{t+1}{2}\right)^4+3\left(\frac{t+1}{2}\right)^3-1-$$
$$\frac{1}{16\times 8}(8t^4-8t^2+1)$$

从而 $$P_3^*(x)=(x^4+3x^3-1)-$$
$$\frac{1}{16\times 8}[8(2x-1)^4-8(2x-1)^2+1]=$$
$$5x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{129}{128},\ x\in[0,1]$$

例 2-16 设 $f(x)=\arctan x$，在 $[-1,1]$ 上利用插值极小化求三次近似最佳一致逼近多项式．

分析 利用插值极小化求近似最佳一致逼近多项式的方法就是要求插值节点为切比雪夫多项式的零点的那个插值多项式，而这样的插值多项式的插值余项就能达到近似最小．本题中要求三次多项式，插值节点应是 $T_4(x)$ 的零点．

解答 取 $T_4(x)$ 的零点

$$x_k^*=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},\ n=4,\ k=1,2,3,4$$

作为插值节点，具体计算得

$$x_1^*=\cos\frac{\pi}{8}\approx 0.923\ 879\ 5,\quad x_2^*=\cos\frac{3\pi}{8}\approx 0.382\ 683\ 4$$

$$x_3^* = \cos\frac{5\pi}{8} \approx -0.382\ 683\ 4,\ x_4^* = \cos\frac{7\pi}{8} \approx -0.923\ 879\ 5$$

重新排序进行插值，列表如下：

i	0	1	2	3
x_i	$-0.923\ 879\ 5$	$-0.382\ 683\ 4$	$0.382\ 683\ 4$	$0.923\ 879\ 5$
y_i	$-0.745\ 852\ 643$	$-0.365\ 489\ 756$	$0.365\ 489\ 756$	$0.745\ 852\ 643$

造差商表后，可得牛顿型插值多项式

$$\begin{aligned}P_3(x) = &-0.745\ 852\ 643 + 0.702\ 818\ 972 \times \\ &(x + 0.923\ 879\ 5) + 0.193\ 065\ 229 \times \\ &(x + 0.923\ 879\ 5)(x + 0.382\ 683\ 4) - \\ &0.208\ 972\ 306(x + 0.923\ 879\ 5) \times \\ &(x + 0.382\ 683\ 4)(x - 0.382\ 683\ 4) = \\ &-0.208\ 972\ 306x^3 + 0.985\ 674\ 118x\end{aligned}$$

例 2-17 用拉格朗日插值余项极小化的方法，求 $f(x) = e^{-x}$ 在 $[0,1]$ 上的三次近似最佳一致逼近多项式，使其误差不超过 0.5×10^{-3}.

分析 拉格朗日插值余项为

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\omega_{n+1}(x)$$

因此 $|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f^{(n+1)}(x)| \cdot |\omega_{n+1}(x)|$.

设 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M_{n+1}$，则

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$$

要让 $|\omega_{n+1}(x)|$ 最小，只须将 $[0,1]$ 变到 $[-1,1]$，取切比雪夫多项式 $T_{n+1}(x)$ 的零点作为 x_i 即可.

解答 令 $M_{n+1} = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f^{(n+1)}(x)|$，则

$$M_{n+1} = \max_{0\leqslant x\leqslant 1}|(-1)^{n+1}e^{-x}| = 1$$

故有 $$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$$

令 $x = \frac{1}{2}(t+1)$，则当 $x \in [0,1]$ 时，$t \in [-1,1]$. 取插值节点 $x_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, k = 0,1,2,\cdots,n$，则 $\omega_{n+1}(x)$ 就是切比雪夫多项式 $\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)$，它对零的偏差最小. 此时有截断误差估计

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{2^{2n+1}}$$

（请读者详细推导上述估计式）.

取 $n = 3$，就有

$$|R_3(x)| \leqslant \frac{1}{2^7} \cdot \frac{1}{4!} = 0.000\ 325\ 5 < 0.5 \times 10^{-3}$$

因此取插值节点为

$$x_0^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{8} \approx 0.961\ 93$$

$$x_1^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{8} \approx 0.691\ 34$$

$$x_2^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{8} \approx 0.308\ 65$$

$$x_3^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{7\pi}{8} \approx 0.038\ 06$$

用这些点所作的插值多项式为

$$\begin{aligned}P_3(x) = &\ 0.999\ 77 - 0.992\ 90x + 0.463\ 23x^2 - \\ &0.102\ 40x^3\end{aligned}$$

注记 关于插值节点的最佳选择，根据最小零偏差多项式定理，在 $[-1,1]$ 上，$\omega_{n+1}(x) = \prod\limits_{k=0}^{n}(x - x_k) = \frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)$ 与零的偏差最小，即 $\omega_{n+1}(x)$ 应取成 $\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)$，x_k 应取成 $T_{n+1}(x)$ 的零点：$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, k$

$= 0,1,2,\cdots,n$. 这时有估计式

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-P_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\omega_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

若插值区间为$[a,b]$,作变换

$$x = \frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b-a)t$$

当 x 在$[a,b]$上变化时,t 在$[-1,1]$变化,插值节点应取

$$x_k = \frac{1}{2}(a+b)+\frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)},\ k=0,1,2,\cdots,n$$

这时,有截断误差估计

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

其中 $M_{n+1}=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(n+1)}(x)|$.

例 2-18 设在$[-1,1]$,$\varphi(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{24}x^3-\frac{15}{384}x^4-\frac{105}{3\ 840}x^5$,试将 $\varphi(x)$ 按切比雪夫多项式降为三次多项式,并估计误差.

分析 用切比雪夫多项式降低已知多项式的次数,就是用 $T_k(x)$ 来表示 x^k,然后舍去高次切比雪夫多项式所在的项,即可降低多项式的次数.

解答

$$\varphi(x) = 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{24}x^3-\frac{15}{384}x^4-\frac{105}{3\ 840}x^5 =$$

$$1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{24}x^3-\frac{15}{384}\times\frac{1}{8}(3T_0+4T_2+T_4)-\frac{105}{3\ 840}\times\frac{1}{16}(10T_1+5T_3+T_5)=$$

$$1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{24}x^3-\frac{15}{384\times 8}(3+8x^2-4+T_4)-\frac{105}{3\ 840\times 16}(10x+20x^3-15x+T_5)$$

舍去含有 $T_4(x)$、$T_5(x)$ 的项,得三次多项式

$$P_3(x) = \left(1+\frac{15}{384\times 8}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{105\times 5}{3\ 840\times 16}\right)x+\left(-\frac{1}{8}-\frac{15}{384}\right)x^2+\left(-\frac{1}{8}-\frac{105\times 20}{3\ 840\times 16}\right)x^3 \approx$$

$$1.004\ 882\ 8-0.491\ 455\ 1x-0.164\ 062\ 5x^2-0.159\ 179\ 7x^3$$

误差之绝对值为

$$|R(x)| = |\varphi(x)-P_3(x)| = \left|-\frac{15}{384\times 8}T_4-\frac{105}{3\ 840\times 16}T_5\right| \leqslant \frac{15}{384\times 8}+\frac{105}{3\ 840\times 16}\approx 0.006\ 6$$

例 2-19 设在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上给定 $P(x)=1-x+x^2-x^3+x^4$,试在允许误差为 0.008 的要求下降低 $P(x)$ 的次数.

分析 本题是在$[0,1]$上考虑问题的.要降低多项式的次数,一般用切比雪夫多项式来做,因此必须将$[0,1]$变换到$[-1,1]$.

解答 令 $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t$,则当 $x\in[0,1]$时,$t\in[-1,1]$.由

$$1=T_0,\quad t=T_1$$

$$t^2=(T_0+T_2)/2,\quad t^3=\frac{1}{4}(3T_1+T_3)$$

$$t^4=\frac{1}{8}(3T_0+4T_2+T_4)$$

得 $P(x)=f(t)=1-\frac{1}{2}(t+1)+[\frac{1}{2}(t+1)]^2-$

$$(\frac{t+1}{2})^3+(\frac{t+1}{2})^4=(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4})+$$

$$(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2^3}+\frac{1}{2^2})t+(\frac{1}{2^2}-\frac{3}{2^3}+\frac{3}{2^3})t^2+$$

$$(-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2})t^3+\frac{1}{2^4}t^4=$$

$$\frac{11}{16}T_0+(-\frac{1}{8})T_1+\frac{1}{8}(T_0+T_2)+$$

$$\frac{1}{32}(3T_1+T_3)+\frac{1}{27}(3T_0+4T_2+T_4)=$$

$$\frac{107}{128}T_0-\frac{1}{32}T_1+\frac{5}{32}T_2+\frac{1}{32}T_3+\frac{1}{128}T_4$$

因为$\frac{1}{128}<0.008$，$\frac{1}{32}+\frac{1}{128}>0.008$，故去掉含 T_4 的末项，不影响允许误差，所以

$$\tilde{f}(t)=\frac{107}{128}-\frac{1}{32}t+\frac{5}{32}(2t^2-1)+\frac{1}{32}(4t^3-3t)=$$

$$\frac{87}{128}-\frac{1}{8}t+\frac{5}{16}t^2+\frac{1}{8}t^3,\ t\in[-1,1]$$

将 $t=2x-1$ 代入上式，得$[0,1]$上的允许误差为 0.008 的近似多项式：

$$\tilde{P}(x)=\frac{87}{128}-\frac{1}{8}(2x-1)+\frac{5}{16}(2x-1)^2+$$

$$\frac{1}{8}(2x-1)^3=\frac{127}{128}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}x^2+x^3$$

$$x\in[0,1]$$

例 2-20 定义伯恩斯坦(Bernstein)多项式

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\ x\in[0,1]$$

试求 $f(x)=1,x,x^2$ 时 $B_n(f,x)$ 的值．

分析 本题中 $B_n(f,x)$ 是非常著名的多项式，在函数逼近论中起过非常重要的作用．本题要求 $f(x)$ 分别等于 1、x、x^2 时的 $B_n(f,x)$，实际上根据求得之结果可以和其它类型的多项式进行比较，得出一些有意义的结论．

解答 (1) $f(x)=1$ 时，将 $f(x)=1$ 代入 $B_n(f,x)$，得

$$B_n(1,x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

该式恰好是二项式$[x+(1-x)]^n$ 的展开式，即

$$B_n(1,x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=[x+(1-x)]^n=1$$

(2) $f(x)=x$ 时，

$$B_n(x,x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

利用已知的组合关系式$\frac{k}{n}\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}$，得

$$B_n(x,x)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}=$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}=$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{(n-1)-k}\cdot x=$$

$$B_{n-1}(1,x)\cdot x=x$$

(3) 当 $f(x)=x^2$ 时，

$$B_n(x^2,x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

利用$\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}$，得

$$B_n(x^2,x)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}=$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n}\right)\binom{n-1}{k}x^{k+1}(1-x)^{(n-1)-k}=$$

$$\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{(n-1)-k}+$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n-1}{k}x^{k+1}(1-x)^{(n-1)-k}=$$

(利用(1)) $$\frac{x}{n}+\frac{n-1}{n}x\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n-1}\right)\binom{n-1}{k}\times x^k(1-x)^{(n-1)-k}=$$

(利用(2)) $$\frac{x}{n}+(1-\frac{1}{n})x^2=x^2+\frac{1}{n}x(1-x)$$

注记 这题告诉我们，当 $f(x)=x^2$ 时，它的伯恩斯坦多项式就不再等于 $f(x)$. 这点与拉格朗日插值多项式不同. 另外，从 x^2 的伯恩斯坦多项式可以看出，当 $n\to\infty$ 时，$B_n(x^2,x)\to x^2$.

例 2-21 设 $B_n(f,x)$ 为 $f(x)$ 的伯恩斯坦多项式，试证：当 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 时，$m\leqslant B_n(f,x)\leqslant M$.

分析 本题结论实际上说，$f(x)$ 的伯恩斯坦多项式不会产生新的最大值与最小值. 利用 $f(x)$ 的伯恩斯坦多项式及常数函数的伯恩斯坦多项式可以证明题中结论.

证明 因为 $$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\quad x\in[0,1]$$

$$m\leqslant f(x)\leqslant M$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n}m\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant$$

$$\sum_{k=0}^{n}M\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

即

$$m\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant B_n(f;x)\leqslant M\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

由例 2-20(1) 的结论知，$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$，故有

$$m\leqslant B_n(f,x)\leqslant M$$

例 2-22 设 $f(x)\in C[a,b]$，m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值，则 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式为 $P_0^*(x)=\frac{1}{2}(m+M)$.

分析 连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一定可达 m、M，故存在 $x_1,x_2\in[a,b]$，使 $f(x_1)=m$，$f(x_2)=M$. 只要能够证明 x_1、x_2 是 $P_0^*(x)$ 与 $f(x)$ 的一对偏差点，即可按切比雪夫定理 2.3 得出题中结论.

证明 由闭区间上连续函数的性质知，$\exists\ x_1,x_2\in[a,b]$，使得 $f(x_1)=m$，$f(x_2)=M$.

令

$$P_0(x)=\frac{1}{2}(m+M)，则$$

$$f(x_1)-P_0(x_1)=m-\frac{1}{2}(m+M)=-\frac{1}{2}(M-m)$$

$$f(x_2)-P_0(x_2)=M-\frac{1}{2}(m+M)=\frac{1}{2}(M-m)$$

即

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_0(x)|=\frac{1}{2}(M-m)$$

故 x_1,x_2 是 $P_0(x)$ 与 $f(x)$ 的偏差点，从而由切比雪夫定理知

$$P_0^*(x)=\frac{1}{2}(m+M)=P_0(x)$$

即当 $f(x) \in C[a,b]$ 时，$f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式为 $P_0^*(x) = \frac{1}{2}(m+M)$.

例 2-23 设 $f(x) = e^x$ 在 $[-1,1]$ 上的插值极小化近似最佳一致逼近多项式为 $L_n(x)$；若 $\|f - L_n\|_\infty$ 有界，证明对任何 $n \geqslant 1$，存在常数 α_n、β_n，使

$$\alpha_n |T_{n+1}(x)| \leqslant |f(x) - L_n(x)| \leqslant \beta_n |T_{n+1}(x)|, \; x \in [-1,1]$$

分析 $f(x)$ 的插值极小化近似最佳一致逼近多项式为 $L_n(x)$，因此自然会想到 $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\omega_{n+1}(x)$. 对 $R_n(x)$ 进行估计即可得出题断.

证明 因为 $L_n(x)$ 是 $f(x) = e^x$ 在 $[-1,1]$ 上的插值极小化近似最佳一致逼近多项式，故

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\omega_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x), \; \xi \in (-1,1)$$

从而有

$$|f(x) - L_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{2^n (n+1)!} \cdot |T_{n+1}(x)|, \; \xi \in (-1,1)$$

又由于 $e^{-1} < f^{(n+1)}(\xi) < e$，故有

$$\frac{e^{-1}}{2^n (n+1)!} |T_{n+1}(x)| \leqslant |f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{e}{2^n (n+1)!} |T_{n+1}(x)|$$

令 $\alpha_n = e^{-1}/[2^n (n+1)!]$，$\beta_n = e/[2^n (n+1)!]$，则对任何 $n \geqslant 1$，$x \in [-1,1]$，都有

$$\alpha_n |T_{n+1}(x)| \leqslant |f(x) - L_n(x)| \leqslant \beta_n |T_{n+1}(x)|$$

例 2-24 将 $f(x) = \arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上展开为切比雪夫级数，并判断切比雪夫级数和泰勒级数哪一个收敛快？

分析 这是一个常规题. 先进行切比雪夫级数展开，然后与泰勒级数比较收敛速度.

解答 (1) 先求 $f(x) = \arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上的切比雪夫级数，由切比雪夫级数的系数公式

$$a_0^* = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \; a_k^* = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad k = 1,2,\cdots$$

并注意到 $f(x)$ 是奇函数，有

$$a_0^* = 0, \; a_{2l}^* = 0, \; l = 1,2,\cdots$$

$$a_{2l+1}^* = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\arcsin x \cos[(2l+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos(2l+1)\theta d\theta = (\text{作变换 } x = \cos\theta)$$

$$\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(2l+1)^2}, \; l = 0,1,2,\cdots$$

故 $\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上的切比雪夫级数为

$$\arcsin x = \frac{4}{\pi}\left[T_1(x) + \frac{1}{9}T_3(x) + \frac{1}{25}T_5(x) + \cdots + \frac{1}{(2l+1)^2}T_{2l+1}(x) + \cdots\right]$$

(2) 比较收敛速度. $f(x)$ 的泰勒级数为

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} x^{2k+1}, \; x \in [-1,1]$$

其中

$$b_{2k+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2k)} \cdot \frac{1}{2k+1}$$

比较 a_{2k+1}^* 与 b_{2k+1}，我们有

$$\frac{a_{2k+1}^*}{b_{2k+1}} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots (2k)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)} \cdot \frac{1}{2k+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2k+1} d\theta$$

上式当 k 增大时，很快趋于零，说明 a_{2k+1}^* 比 b_{2k+1} 更快地趋于零，故切比雪夫级数收敛快.

例 2-25 (1) 求 $y=\arctan x$ 在$[0,1]$上的一次最佳一致逼近多项式；

(2) 利用切比雪夫级数的截断在$[0,1]$上求 $y=\arctan x$ 的一次近似最佳一致逼近多项式；

(3) 比较二者的偏差.

解答 (1) 在$[0,1]$上 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}>0$，$f''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}<0$，故

$$a_1=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\arctan 1-\arctan 0}{1-0}=\frac{\pi}{4}\approx 0.785\,4$$

由 $f'(x_2)=\dfrac{1}{1+x_2^2}=\dfrac{\pi}{4}$，得

$$x_2=\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}\approx 0.522\,7$$

且 $f(x_2)=\arctan(0.522\,7)\approx 0.481\,66$

故
$$a_0=\frac{1}{2}[f(0)+f(x_2)]-a_1\frac{0+x_2}{2}=\frac{1}{2}[0.481\,66-0.785\,4\times 0.522\,7]\approx 0.035\,6$$

故 $y=\arctan x$ 在$[0,1]$上的一次最佳一致逼近多项式为

$$P_1^*(x)=0.035\,6+0.785\,4x$$

(2) 设 $x=\dfrac{1}{2}(t+1)$，则

$$\tilde{f}(t)=f(x)=\arctan\left(\frac{t+1}{2}\right),\ -1\leqslant t\leqslant 1$$

按切比雪夫级数的系数计算公式，并求数值积分，得

$$a_0^*=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(\cos\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\arctan\left(\frac{\cos\theta+1}{2}\right)\mathrm{d}\theta\approx 0.427\,1$$

$$a_1^*=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\arctan\left(\frac{\cos\theta+1}{2}\right)\cos\theta\mathrm{d}\theta\approx 0.394\,7$$

故
$$\arctan x\approx a_0^*T_0(t)+a_1^*T_1(t)=a_0^*+a_1^*t=a_0^*+a_1^*(2x-1)=0.032\,4+0.789\,4x$$

即 $\tilde{P}_1^*(x)=0.032\,4+0.789\,4x$ 就是 $\arctan x$ 在$[0,1]$上一次近似最佳一致逼近多项式.

(3) 由 $P_1^*(x)$ 的性质知

$$\Delta(f,P_1^*)=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|\arctan x-P_1^*(x)|=|f(0)-P_1^*(0)|=0.035\,6$$

对于 $\tilde{P}_1^*(x)$，可令 $\tilde{R}(x)=\arctan x-\tilde{P}_1^*(x)$，则

$$\tilde{R}'(x)=\frac{1}{1+x^2}-0.789\,4$$

解得 $\tilde{R}(x)$ 的极值点为 $\tilde{x}=\left(\dfrac{1}{0.789\,4}-1\right)^{1/2}\approx 0.516$，$\tilde{R}(\tilde{x})\approx 0.036\,6$，所以

$$\Delta(f,\tilde{P}_1^*)=\max\{|\tilde{R}(0)|,|\tilde{R}(\tilde{x})|,|\tilde{R}(1)|\}=0.036\,6$$

由此可见，二者相差不大.

例 2-26 证明勒让德多项式 $P_0(x)=1$，$P_n(x)=\dfrac{1}{2^n\cdot n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]$是$[-1,1]$上带权 $\rho(x)\equiv 1$ 的 n 次正交多项式，且

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n\end{cases}$$

分析 $P_n(x)$ 是 n 次多项式，显然要证正交关系式，自然会

到应使用分部积分法．

证明 由于$(x^2-1)^n$是一个$2n$次多项式，求n阶导数并整理得

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}(2n)(2n-1)\cdots(n+1)x^n+$$

$$a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

于是得$P_n(x)$的首项系数$a_n=\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

令$\varphi(x)=(x^2-1)^n$，则$\varphi^{(k)}(\pm 1)=0$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$.

再设$Q(x)$是$[-1,1]$上具有n阶连续导数的函数，由分部积分知

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)Q(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}Q(x)\varphi^{(n)}(x)\mathrm{d}x=$$

$$\frac{-1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}Q'(x)\varphi^{(n-1)}(x)\mathrm{d}x=\cdots=$$

$$\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}Q^{(n)}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

下面分两种情况讨论．

(1) 若$Q(x)$是次数小于n的多项式，则$Q^{(n)}(x)\equiv 0$，故得

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x=0,\text{ 当 } n\neq m \text{ 且 } m<n$$

(2) 若 $$Q(x)=P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\varphi^{(n)}(x)=$$

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n+\cdots$$

$$Q^{(n)}(x)=P_n^{(n)}(x)=\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

于是

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x=$$

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x$$

由于 $$\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}t\mathrm{d}t=$$

$$\frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}$$

故 $$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1}$$

于是结论得证．

注记 关于拉盖尔多项式的正交性、埃尔米特多项式的正交性可仿本题方法证明．见参考文献 2,3.

三、习题二

1. 选取常数a,b，使$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|\mathrm{e}^x-ax-b|$达到极小．

2. 设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$，求$f(x)$在$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式．

3. 已知$n+1$个函数值$y_i=f(x_i)$，$i=0,1,2,\cdots,n$. 求$f($的零次最佳平方逼近函数(即用常函数拟合上述数据).

4. 已知勒让德多项式$P_0=1$，$P_1=x$，$P_2=\dfrac{1}{2}(3x^2-1)$在二次多项式类$\varphi=\mathrm{span}\{1,x^2\}$中求一多项式$\overline{P}_2(x)$，使其成$f(x)=\mathrm{e}^x$在$[-1,1]$上的最佳平方逼近函数．

5. 用最小二乘原理确定经验公式$y=a\mathrm{e}^{bx}$中的参数a和b该函数曲线与下列数据相拟合

x_i	1	2	3	4
y_i	60	30	20	15

6. 试求多项式 ax^2+bx+1 (a,b 是任意常数)，使它在 $[-1,1]$ 上与零有最小偏差.

第三章　数值积分与数值微分

一、内容提要

数值积分是求定积分 $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的一种近似算法.

1. 牛顿—柯特斯(Cotes)求积分式

牛顿-柯特斯求积公式是节点等距的插值型求积公式. 将 $[a,b]$ n 等分，其节点为 $x_k=a+kh, k=0,1,2,\cdots,n, h=(b-a)/n$，节点 x_k 处的函数值为 $f(x_k)$，则牛顿—柯特斯求积公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)=(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}f(x_k)$$

其中 A_k 称为求积系数，$C_k^{(n)}$ 为柯特斯系数.

$n=1$ 时，求积公式为梯形公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\eta), a\leqslant\eta\leqslant b$$

$n=2$ 时，求积公式为辛普森(Simpson)公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]-\frac{(b-a)^5}{2\,880}f^{(4)}(\eta),\ a\leqslant\eta\leqslant b$$

$n=4$ 时的求积公式称为柯特斯求积公式，详细表达式见参考文献 1,2.

2. 复化求积公式