Ch6 特殊矩阵

§1. Schur 定理, Schur 不等式

Th (Schur 定理). 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则 ∃ 酉阵 U, ∋ $U^*AU = B$ 为上三角阵.

Th (Schur 不等式).

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 之特征值.

则 $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$.

证: $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \le \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$ $tr(A^*A)$

由 Schur 定理, $\exists$ 酉阵 U, $\ni$ $U^*AU = B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & \lambda_2 & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$B^*B = U^*A^*UU^*AU = U^*A^*AU$

$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|^2 = tr(B^*B) = tr(A^*A) = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$

等号当且仅当 B 为对角阵时成立.

$\Longleftrightarrow$ $A \overset{酉}{\sim}$ 对角阵

§2. 正规阵

Def. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若 $A^*A=AA^*$，称 A 为正规阵.

性质. 1°. 实对称阵 $(A^T=A)$. Hermite阵 $(A^*=A)$

正交阵 $(A^TA=E_n)$，酉阵 $(A^*A=E_n)$ 为正规阵

2°. 若 A 为正规阵，B 酉~ A $(B=U^*AU)$

则 B 为正规阵.

i.e., 与正规阵酉相似之矩阵仍为正规阵.

$$B^*B=U^*A^*UU^*AU=U^*A^*AU$$

$$BB^*=U^*AUU^*A^*U=U^*AA^*U$$

引理. 设 A 为正规矩阵，若 A 又为三角阵，则 A 为对角阵.

证. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$, $A^*=\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & & & \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$

比较 $AA^*=A^*A$ 的 (i,i) 位置上之数值

$i=1$ 时，$a_{11}\bar{a}_{11}+\cdots+a_{1n}\bar{a}_{1n}=a_{11}\bar{a}_{11} \Rightarrow a_{1j}=0$, $j=2,\cdots,n$

$i=2$ 时，$a_{22}\bar{a}_{22}+\cdots+a_{2n}\bar{a}_{2n}=a_{22}\bar{a}_{22} \Rightarrow a_{2j}=0$, $j=3,\cdots,n$

$\cdots$, $a_{ij}=0$, $i\neq j$.

即 A 为对角阵.

Th. A为正规阵 ① $\Longleftrightarrow$ ② A酉对角阵

$\Longleftrightarrow$ ③ A有n个两两正交的单位特征向量

$\Longleftrightarrow$ ④ $\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2=\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2$

证. ① $\Longrightarrow$ ② 由Schur定理,

$\exists$ 酉阵 U, $\ni$ $U^*AU=B\longrightarrow$ 上三角阵.

A正规阵, 则 B也为正规阵

从而 B为对角阵

② $\Longrightarrow$ ③

$$U^*AU=B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

故 $AU_i=\lambda_i U_i,\quad i=1\sim n$

即 $U_1,\cdots,U_n$ 为A之两两正交之单位特征向量

③ $\Rightarrow$ ④ 设 $Au_i = \lambda_i u_i$, $i = 1 \sim n$,

$u_1, \cdots, u_n$ 两两正交.

令 $U = (u_1, \cdots, u_n)$ 正阵

则 $AU = U\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 即, $U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

从而 $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = tr(U^*AUU^*A^*U) = tr(U^*AA^*U) = tr(AA^*)$

$= \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$

④ $\Rightarrow$ ① 由 Schur 不等式, 等号成立 $\Leftrightarrow$ A 正对角阵,

即, $\exists U$, $\ni$ $U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $A = U\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}U^*$

从而 $AA^* = A^*A$

例1. 设A为正规阵且幂零，则 $A=0$

证：∃酉阵U，∋ $U^*AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

故 $A=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}U^*$.

又幂零 ∃k，∋ $A^k=0$，从而 $A^k=U\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{pmatrix}U^*=0$

故 $\lambda_i=0$，$i=1\sim n$. $\Longrightarrow A=0$

例2. 设A为正规阵，若A幂等，则A为Hermite阵.

证：$A=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}U^*$，$A^2=U\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2\end{pmatrix}U^*$

从而 $\lambda_i^2=\lambda_i$，$\Rightarrow \lambda_i=1$ or 0. $i=1\sim n$.

故 $A=A^*$

§3. 实对称阵与 Hermite 阵

实对称阵：$A^T=A$.

Hermite 阵：$A^*=A$.

一. Hermite 阵之性质. $A^*=A$

① A 之特征值均为实数

② 若 $A^T=A$, 则 A 正交对角阵

证. ① $A^*=A \Rightarrow AA^*=A^*A \Rightarrow \exists$ 酉阵 U, $\ni$ $U^*AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow U^*A^*U=\begin{pmatrix}\bar\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar\lambda_n\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_i=\bar\lambda_i$, $i=1\sim n$, 即 $\lambda_i\in R$

② $A\in R^{n\times n}$, $\lambda\in R$, $(\lambda E-A)x=0 \Rightarrow x\in R^n$

二. Hermite型或复二次型

$A^*=A$, $x\in\mathbb{C}^n$, 称 x^*Ax 为 A 之 $\boxed{\text{Hermite二次型或复二次型}}$

$A^T=A$, $x\in\mathbb{R}^n$, 称 x^TAx 为 A 之 $\boxed{\text{实二次型}}$

性质. Hermite型之值总为实数. $x^*A^*x\in\mathbb{R}$

$(x^*Ax)^*=x^*A^*x=x^*Ax$. $\Rightarrow$

Th. ① 任何一个Hermite型 x^*Ax 可通过酉变换变成标准形

$\lambda_1y_1\bar{y}_1+\lambda_2y_2\bar{y}_2+\cdots+\lambda_ny_n\bar{y}_n$. 其中 λ_i 为 A 之特征值

② 任何一个实二次型 x^TAx 可通过正交变换变成标准形

$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$, 其中 λ_i 为 A 之特征值.

证. ① ∃ 酉阵 U, 使 $U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = B$

则 $x^*Ax = x^*U^*BUx = y^*By = (\bar{y}_1, \cdots \bar{y}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\underbrace{Ux}_{y}$

$= \lambda_1 y_1 \bar{y}_1 + \cdots + \lambda_n y_n \bar{y}_n$

② 类似可证.

三、正定二次型

Def. x^*Ax (x^TAx) 为正定二次，如果 $x^*Ax>0$, $\forall\, 0\neq x\in\mathbb{C}^n$

相应的称 A 为正定阵.

性质. A 正定，P 可逆，则 P^*AP 正定.

Def. $A^*=A$, V_k 为 $\mathbb{C}^n$ 的 k 维子空间,

若对 $\forall\, 0\neq x\in V_k$, $x^*Ax>0$,

称 A 在 k 维子空间 V_k 上正定.

Th. Hermite阵 $A^*=A$ 在某个 k 维子空间上正定

$\Longleftrightarrow$ A 至少有 k 个特征值 >0.（包括重数）

证明. $\Longleftarrow$ 取 A 的 k 个正特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$.

其对应的 k 个两两正交的单位特征向量是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$

令 $V_k=[\alpha_1, \cdots, \alpha_k]$. 则 $\dim V_k = k$.

对 $\forall\, 0 \neq x = x_1\alpha_1 + \cdots + x_k\alpha_k$,

$$
\begin{aligned}
x^*Ax &= (\bar{x}_1\alpha_1^* + \cdots + \bar{x}_k\alpha_k^*)(x_1 A\alpha_1 + \cdots + x_k A\alpha_k) \\
&= (\bar{x}_1\alpha_1^* + \cdots + \bar{x}_k\alpha_k^*)(\lambda_1 x_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_k x_k\alpha_k) \\
&= \lambda_1 x_1\bar{x}_1 + \cdots + \lambda_k x_k\bar{x}_k > 0
\end{aligned}
$$

"$\Rightarrow$" 设 A 在 k 维子空间 V_k 上正定.

$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 为 A 之所有正特征值.

$\lambda_{m+1}, \cdots, \lambda_n$ 为所有非正特征值.

$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为两两正交之单位特征向量.

记 $W = [\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n]$. 则由定义性. $x^* A x \le 0$. $\forall x \in W$

反设 $m < k$. 则 $\dim(V_k + W) \le \dim \mathbb{C}^n = n$.

又 $\dim(V_k \cap W) = \dim V_k + \dim W - \dim(V_k + W)$

$\geq k + n - m - n = k - m > 0$.

即 $V_k \cap W \neq \phi$. 任取 $0 \neq x \in V_k \cap W$,

则 $x^* A x > 0$ 与 $x^* A x \le 0$ 矛盾.