第二讲

Z变换及离散时间系统分析

《数字信号处理》第一部分

提 纲

- z变换
  - 定义、收敛域、反变换、性质
- 离散时间系统分析
  - 基本概念
  - 线性时不变系统的输入、输出关系
  - 离散时间系统分析

z变换的定义

- **z变换的定义**
- z变换的收敛域
- z反变换
- z变换的性质

z变换的定义

- 引入z变换的目的
  - 利用差分方程可求离散时间系统的结构及瞬态解。为了分析系统的重要特性，如稳定性和频率响应等等，需要研究离散时间系统的z变换(类似于模拟系统的拉氏变换)，它是分析离散时间系统和信号的重要工具。

z变换的定义

- 一个离散序列 $x(n)$的z变换(双边)定义为

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

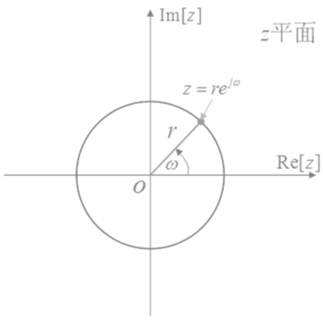
  - 其中z为复变量，以其实部为横坐标，虚部为纵坐标构成的平面为 z 平面。常用$ZT[x(n)]$表示对序列$x(n)$的z变换。

- 单边 z 变换：
  - 单边 z 变换只是对单边序列($n\geq 0$部分)进行变换的z变换，其定义为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

z变换的定义

- z平面



z变换的定义

- 典型序列的z变换 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

(1)单位脉冲序列 $\delta(n) \xrightarrow{z} 1$

(2)单位阶跃序列 $u(n) \xrightarrow{z} \frac{z}{z-1}, \quad |z|>1$

(3)实指数序列 $a^n u(n) \xrightarrow{z} \frac{z}{z-a}, \quad |z|>|a|$

z变换的定义

- 典型序列的z变换

(4)单边正弦序列 $\sin(n\omega_0)u(n)$

$$\xrightarrow{z} \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}-\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right)$$

$$=\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}, \quad |z|>1$$

(5)单边余弦序列 $\cos(n\omega_0)u(n)$

$$\xrightarrow{z} \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}+\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right)$$

$$=\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}, \quad |z|>1$$

z变换的收敛域

- z变换的定义
- $\boxed{\text{z变换的收敛域}}$
- z反变换
- z变换的性质

z变换的收敛域

- 收敛域(ROC：Region of Convergence)
- 对于任意给定序列$x(n)$，若存在一个集合∈，使$X(z)$收敛，则称∈ 为$X(z)$的收敛域
  - 若给定$X(z)$，必须同时给定收敛域才能唯一地确定$x(n)$
- $X(z)$收敛的充要条件是满足绝对可和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right| = M < \infty$$

z变换的收敛域

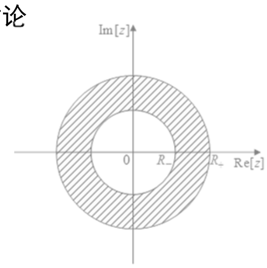
- 级数收敛的判定方法
  - 可使用比值法和根植法来判定级数是否收敛，对于

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|$$

  - 计算比值 $\longrightarrow \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$
  - 计算根值 $\longrightarrow \rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$
  - 判定条件
    - $\rho<1$ 级数收敛
    - $\rho>1$ 级数发散

z变换的收敛域

- 4种典型序列的收敛域讨论
  - 有限长序列
  - 右边序列
  - 左边序列
  - 双边序列



收敛域分别是以R_-,R_+为半径的两个圆组成的环状域，R_-,R_+称收敛半径，R_+可以大到无穷大，R_- 小到0

z变换的收敛域

■有限长序列

- 此序列只在有限的区间($n_1 \le n \le n_2$)具有非零的有限值，此时，Z变换为：

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

- 分3种情况讨论

1) $n_1<0, n_2>0$时，除$z=\infty$及$z=0$外，$X(z)$在z平面上处处收敛。即收敛域为：

$$0<|z|<\infty$$

z变换的收敛域

■有限长序列 $X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$

2) $n_1<0, n_2\le 0$时，除$z=\infty$外，$X(z)$在z平面上处处收敛。即收敛域为：

$$|z|<\infty$$

3) $n_1\ge 0, n_2>0$时，除$z=0$外，$X(z)$在z平面上处处收敛。即收敛域为：

$$|z|>0$$

- 所以，有限长序列的Z变换收敛域至少为：

$0<|z|<\infty$ 且有可能包括$z=\infty$或$z=0$点

z变换的收敛域

■ 右边序列

- 此序列是有始无终的序列，即当($n<n_1$时$x(n)=0$),此序列的Z变换为：

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

根据根值判别法：

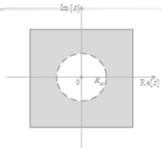
$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(n)z^{-n}|}<1$ → 当$|z|>R_{x1}$，则该级数收敛.

即：$|z|>\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(n)|}=R_{x1}$ 其中R_{x1}是级数的收敛半径.

z变换的收敛域

■ 右边序列

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}$$



- 右边序列的收敛域是半径为R_{x1}的圆外部分

1) 如果$n_1\ge 0$，则收敛域包括$z=\infty$。即收敛域为

$$|z|>R_{x1}$$

2) 如果$n_1<0$，则收敛域不包括$z=\infty$。即收敛域为

$$R_{x1}<|z|<\infty$$

z变换的收敛域

■ 左边序列

- 此序列是无始有终的序列，即当($n>n_2$时,$x(n)=0$),此序列的z变换为：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

令$m=-n$,上式变为: $X(z)=\sum_{m=-n_2}^{\infty} x(-m)z^{m}$

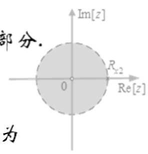
根据根值判别法:

$\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|x(-m)z^{m}|}<1$ → 其收敛域为: $|z|<R_{x2}$

即: $|z|<\dfrac{1}{\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|x(-m)|}}=R_{x2}$ 其中R_{x2}是级数的收敛半径.

z变换的收敛域

■ 左边序列 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}$



■可见,左边序列的收敛域是半径为R_{x2}的圆内部分.

$$|z|<R_{x2}$$

1) 如果$n_2\ge 0$，则收敛域不包括$z=0$。即收敛域为

$$0<|z|<R_{x2}$$

2) 如果$n_2\le 0$，则收敛域包括$z=0$。即收敛域为

$$|z|<R_{x2}$$

z变换的收敛域

■ 双边序列

■ 双边序列是从 $n=-\infty$延伸到 $n=+\infty$的序列，此序列的z变换为：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

■ 双边序列看成左边序列和右边序列的z变换叠加。

其收敛域为：两级数收敛域的重叠部分.

$R_{x1}<|z|<R_{x2}$ $R_{x2}>R_{x1}$ 则该级数收敛.其中$R_{x1}>0, R_{x2}<\infty$.

可见，

双边序列的收敛域是以半径为R_{x1}和R_{x2}之间的圆环部分.

z反变换

■z变换的定义

■z变换的收敛域

■z反变换

■z变换的性质

z反变换

■ z反变换定义

■ 从$X(z)$中还原出原序列$x(n)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \longrightarrow x(n)=IZT[X(z)]$$

■ 实质：求$X(z)$幂级数展开式

■ z反变换的求解方法：

■ 围线积分法（留数法）

■ 部分分式法

■ 长除法

z反变换—部分分式展开法(1)

■ $X(z)$表示成z的有理分式形式：$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N}a_i z^{-i}}$

展开成部分分式形式

$$X(z)=\sum_{n=0}^{M-N}A_n z^{-n}+\sum_{k=1}^{N-r}\frac{B_k}{1-z_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{r}\frac{C_k}{(1-z_i z^{-1})^k}$$

■ 其中，$M\geq N$时，才存在A_n；z_k为$X(z)$的各单极点，z_i为$X(z)$的一个r阶极点。

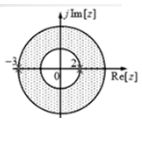
z反变换—部分分式展开法(2)

部分z变换因式对应的时间序列

$X(z)$	Corresponding Time Series $x(n)$	
	$\mathrm{ROC}:\lvert z\rvert>R$	$\mathrm{ROC}:\lvert z\rvert<R$
$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$a^n u(n)$	$-a^n u(-n-1)$
$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$(n+1)a^n u(n)$	$-(n+1)a^n u(-n-1)$
$\frac{1}{(1-az^{-1})^m}$	$\frac{1}{(m-1)!}(n+1)\cdots(n+m-1)a^n u(n)$	$\frac{-1}{(m-1)!}(n+1)\cdots(n+m-1)a^n u(-n-1)$

z反变换—部分分式展开法(3)

例：$X(z)=\frac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}$，$2<|z|<3$，求z反变换



解：$X(z)=\frac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}=\frac{1}{1-2z^{-1}}+\frac{-1}{1+3z^{-1}}$

$$\frac{1}{1-2z^{-1}} \xrightarrow{|z|>2} 2^n u(n)$$

$ZT[a^n u(n)]=\frac{1}{1-az^{-1}}$ $|z|>|a|$

$ZT[a^n u(-n-1)]=\frac{-1}{1-az^{-1}}$ $|z|<|a$

$$\frac{-1}{1+3z^{-1}} \xrightarrow{|z|<3} (-3)^n u(-n-1)$$

$$\therefore x(n)=2^n u(n)+(-3)^n u(-n-1)$$

z变换的性质

- z变换的定义
- z变换的收敛域
- z反变换
- z变换的性质

z变换的性质

■序列的时移 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

- 双边z变换

$x(n)\xrightarrow{Z} X(z);\quad x(n\pm m)\xrightarrow{Z} z^{\pm m}X(z)$ ROC不变

- 单边z变换

若$x(n)u(n)\to X(z)$, $x(n)$为双边序列

则$x(n+m)u(n)\to z^{m}\left[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$

$x(n-m)u(n)\to z^{-m}\left[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$

如 $x(n-2)u(n)\to z^{-2}X(z)+z^{-1}x(-1)+x(-2)$

z变换的性质

■线性性质

若$x(n)\xrightarrow{z} X(z)\quad (R_{x1}<|z|<R_{x2})$

$y(n)\xrightarrow{z} Y(z)\quad (R_{y1}<|z|<R_{y2})$

则$ax(n)+by(n)\xrightarrow{z} aX(z)+bY(z)$

$(R_1<|z|<R_2)$

其中: $R_1=\max(R_{x1},R_{y1}),\ R_2=\min(R_{x2},R_{y2})$

z变换的性质—序列的时移(例)

已知差分方程表示式

$y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n)$

边界条件$y(-1)$=0,用z变换方法求系统响应$y(n)$.

解:对方程式两端分别取z变换,

$Y(z)-0.9z^{-1}Y(z)=\frac{0.05z}{z-1}\qquad |z|>1$

$Y(z)=\frac{0.05z}{(z-1)(z-0.9)}$

$Y(z)=\frac{0.05z^2}{(z-1)(z-0.9)}$

部分分式展开:

$Y(z)=\frac{0.5z}{z-1}-\frac{0.45z}{z-0.9}$

$y(n)=[-0.45(0.9)^n+0.5]u(n)$

z变换的性质—线性(例)

已知双曲余弦序列$x(n)=\cosh(n\omega_0)u(n)$,求其z变换

解: $\because \cosh(n\omega_0)u(n)=\frac{1}{2}e^{n\omega_0}u(n)+\frac{1}{2}e^{-n\omega_0}u(n)$

$e^{n\omega_0}u(n)\to\frac{z}{z-e^{\omega_0}},\quad |z|>|e^{\omega_0}|;\qquad e^{-n\omega_0}u(n)\to\frac{z}{z-e^{-\omega_0}},\quad |z|>|e^{-\omega_0}|$

$\to X(z)=\frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{\omega_0}}+\frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{-\omega_0}}$

$=\frac{z\sinh\omega_0}{z^2-2z\cosh\omega_0+1};\quad |z|>\max(|e^{\omega_0}|,|e^{-\omega_0}|)$

z变换的性质

■序列的线性加权(z域微分)

若 $x(n)\to X(z)\ \Rightarrow\ nx(n)\xrightarrow{Z} -z\frac{d}{dz}X(z);\quad n^m x(n)\xrightarrow{Z}\left[-z\frac{d}{dz}\right]^m X(z)$

ROC不变

证明: $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$

$\frac{dX(z)}{dz}=\frac{d}{dz}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\frac{d}{dz}(z^{-n})$

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(-n)z^{-n-1}=-z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx(n)z^{-n}=-z^{-1}ZT[nx(n)]$

$\therefore\ ZT[nx(n)]=-z\frac{dX(z)}{dz}$

时域序列乘n等效于z域中求导且乘以(-z).

z变换的性质—序列的线性加权(z域微分)(例)

例　已知: $u(n)\to\dfrac{z}{z-1}$；求斜变序列 $nu(n)$ 的z变换.

解: $nu(n)\to -z\dfrac{d}{dz}(\dfrac{z}{z-1})=\dfrac{z}{(z-1)^2}$

例　求序列 $n^2u(n)$ 的z变换

解: $\because u(n)\to\dfrac{z}{z-1}$

$$\therefore n^2u(n)\to\left[-z\frac{d}{dz}\right]^2\left(\frac{z}{z-1}\right)=-z\frac{d}{dz}\left[-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)\right]$$

$$=\frac{z^2+z}{(z-1)^3}$$

z变换的性质

■乘以指数序列(z域尺度变换)

若 $x(n)\xrightarrow{z}X(z),\quad R_{x_1}<|z|<R_{x_2}$

则 $a^n x(n)\xrightarrow{z}X\left(\dfrac{z}{a}\right),\quad R_{x_1}<\left|\dfrac{z}{a}\right|<R_{x_2}$

■可见 $x(n)$ 乘以指数序列等效于 z 平面尺度展缩。

例: $a^{-n}x(n)\xrightarrow{z}X(az),\quad R_{x_1}<|az|<R_{x_2}$

$(-1)^n x(n)\xrightarrow{z}X(-z),\quad R_{x_1}<|z|<R_{x_2}$

z变换的性质

■序列的时域卷积

■ 设 $y(n)$ 为 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的卷积：

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

且　$X(z)=ZT[x(n)]\quad R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$

$H(z)=ZT[h(n)]\quad R_{h^-}<|z|<R_{h^+}$

则　$Y(z)=ZT[y(n)]=X(z)\cdot H(z)$

$\max(R_{x^-},R_{h^-})<|z|<\min(R_{x^+},R_{h^+})$

当零点与极点相抵消时，收敛域扩大

z变换的性质—序列的时域卷积(证明)

证：$ZT[x(n)*h(n)]=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)*h(n)]z^{-n}$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)z^{-n}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)[\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n-m)z^{-n}]$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)z^{-m}H(z)$$

$$=H(z)X(z)$$

$\max\left(R_{x^-},R_{h^-}\right)<|z|<\min\left(R_{x^+},R_{h^+}\right)$

当零点与极点相抵消时，收敛域扩大

z变换的性质

■共轭序列

若　$ZT[x(n)]=X(z)\quad R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$

则　$ZT[x^*(n)]=X^*(z^*)\quad R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$

证：$ZT[x^*(n)]=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)(z^*)^{-n}]^*$

$=X^*(z^*)\qquad R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$

z变换的性质

■序列翻转

若　$ZT[x(n)]=X(z)\qquad R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$

则　$ZT[x(-n)]=X\left(\dfrac{1}{z}\right)\qquad \dfrac{1}{R_{x^+}}<|z|<\dfrac{1}{R_{x^-}}$

证：$ZT[x(-n)]=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(-n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{n}$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(z^{-1})^{-n}=X\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$R_{x^-}<\left|\frac{1}{z}\right|<R_{x^+}\Rightarrow\frac{1}{R_{x^+}}<|z|<\frac{1}{R_{x^-}}$$

离散时间系统的基本概念

- 离散时间系统的基本概念
- 线性时不变系统的输入、输出关系
- 离散时间系统分析

离散时间系统的基本概念

- 离散时间系统的定义
  - 将输入序列x(n)映射成输出序列y(n)的变换或映射

$$y(n) = T[x(n)]$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow y(n)$$

  - 离散时间系统中最重要、最常用的是线性、时不变系统
- 系统的单位脉冲响应
  - 输入为单位冲激序列$\delta(n)$时系统的输出称为单位脉冲响应，记为 $h(n)$

$$h(n) = T[\delta(n)] \qquad \delta(n) \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow h(n)$$

离散时间系统的基本概念

- 线性系统
  - 满足叠加原理的系统称为线性系统

设$x_1(n)$和$x_2(n)$分别作为系统的输入序列，其输出分别用$y_1(n)$和$y_2(n)$表示，即

$$y_1(n) = T[x_1(n)], \quad y_2(n) = T[x_2(n)]$$

那么线性系统一定满足下面公式：

$$T[x_1(n)+x_2(n)] = y_1(n)+y_2(n)$$

$$T[ax_1(n)] = ay_1(n)$$

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)] = ay_1(n)+by_2(n)$$

上式中，a和b均是常数

离散时间系统的基本概念

- 线性系统
  - 线性系统具有叠加性和齐次性，因此分析计算很方便。非线性系统不满足叠加性和齐次性。
  - 例：判断是否为线性系统

$$(a) \quad y(n) = \log(x(n))$$

$$(b) \quad y(n) = 6x(n+2)+4x(n+1)+2x(n)+1$$

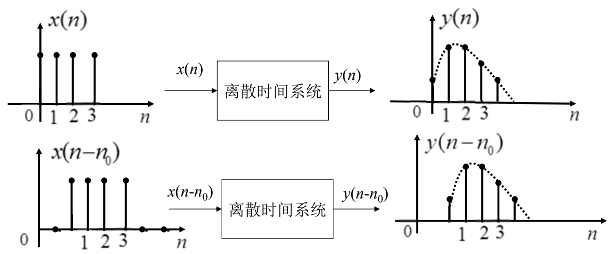
$$(c) \quad y(n) = x(n)\sin(n\pi/2)$$

$$(d) \quad y(n) = \mathrm{Re}\{x(n)\}$$

离散时间系统的基本概念

- 时不变系统
  - 系统对于输入信号的响应与信号加于系统的时间无关

$y(n) = T[x(n)] \longrightarrow y(n\text{-}n_0) = T[x(n\text{-}n_0)]$ (n_0为任意整数)



离散时间系统的基本概念

- 时不变系统
  - 例1：检查$y(n) = ax(n) + b$代表的系统是否是时不变系统，式中a和b是常数

$$y(n) = ax(n) + b$$

$$y(n\text{-}n_0) = ax(n\text{-}n_0) + b$$

$$y(n\text{-}n_0) = T[x(n\text{-}n_0)]$$

  - 因此该系统是时不变系统

离散时间系统的基本概念

- 时不变系统
  - 例2：映射$y(n)=nx(n)$所代表的系统是否具有时不变性

$$y(n)=nx(n)$$

$$y(n-n_0)=(n-n_0)x(n-n_0)$$

$$T[x(n-n_0)]=nx(n-n_0)$$

$$y(n-n_0)\neq T[x(n-n_0)]$$

  - 因此，该系统属于时变系统

线性时不变系统的输入、输出关系

- 离散时间系统的基本概念
- 线性时不变系统的输入、输出关系
- 离散时间系统分析

离散时间系统的基本概念

- 线性时不变系统
  - 具有时不变特性的线性系统
- 系统的稳定性
  - 稳定系统：对于每一个有界输入产生一个有界输出的系统
  - 充要条件：其单位脉冲响应绝对可求和 $\sum_{m=-\infty}^{\infty}|h(m)|<\infty$
- 系统的因果性
  - 因果系统：系统的输出$y(n)$只取决于当前以及过去的输入，即$x(n)$，$x(n-1)$，$x(n-2)$…
  - 非因果系统：如果系统的输出$y(n)$取决于$x(n+1), x(n+2), \ldots$等未来的输入（不现实的系统）
  - 充要条件：当$n<0$时，$h(n)\equiv 0$

线性时不变系统的输入输出关系

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

输入信号$x(n)$可表示为$\delta(n)$及其移位的线性组合

系统输出

$$y(n)=T[x(n)]=T[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)]$$

线性性(叠加性)

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)T[\delta(n-m)]$$

式中$x(m)$与$h(n-m)$的位置可以对调，$h(n)*x(n)$

时不变特性

$$h(n-m)=T[\delta(n-m)]$$

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

线性卷积
或
直接卷积

离散时间系统的基本概念

- 系统的因果性
  - 因果系统例子

$$y(n)=ay(n-1)+x(n),\quad a\text{为常数}$$

$$y(n)=\sum_{k=0}^{2}b(k)x(n-k),\quad b(0), b(1), b(2)\text{为常数}$$

$$y(n)=nx(n)$$

  - 非因果系统例子

$$y(n)=x(n+1)$$

$$y(n)=x(n^2)$$

线性时不变系统的输入输出关系

- 线性卷积
  - 计算公式

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

  - 计算步骤

①将$x(n)$和$h(n)$用$x(m)$和$h(m)$表示，并将$h(m)$进行翻转，形成$h(-m)$

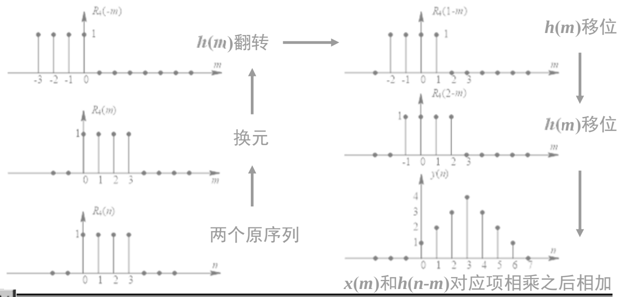
②将$h(-m)$移位n，得到$h(n-m)$。当$n>0$时，序列右移；$n<0$时，序列左移

③将$x(m)$和$h(n-m)$所有对应项相乘之后相加

按照以上三个步骤可得到卷积结果$y(n)$。

线性时不变系统的输入输出关系

- 例：设$x(n)=R_4(n)$，$h(n)=R_4(n)$，求$y(n)=x(n)*h(n)$。



线性时不变系统的输入输出关系

- 线性卷积讨论
  - 卷积中主要运算是翻转、移位、相乘和相加
  - 设线性卷积前两序列分别的长度是N和M，卷积后的新序列长度为 $N+M-1$
- 线性卷积服从交换律、结合律和分配律
  - $x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$

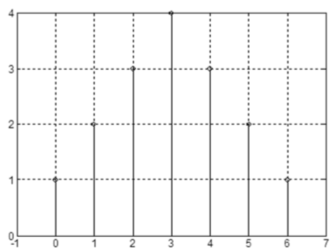
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

  - $x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = (x(n) * h_1(n)) * h_2(n)$
  - $x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$

线性时不变系统的输入输出关系

- 线性卷积的Matlab示例

```
x=ones(4,1);
h=ones(4,1);
y=conv(x,h);
stem([0:6],y)
```



线性时不变系统的输入输出关系

- 线性卷积的矩阵计算 $y(n)=x(n)*h(n)$

$x(n)$: N点序列，n=0,1,2,…N-1;
$h(n)$: M点序列，n=0,1,2,…M-1;

⇨

$y(n)$: L点序列，$L=N+M-1$
n=0,1,2,…L-1

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(M-1) \\ y(N-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ y(L-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) & & & \\ x(1) & x(0) & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \\ x(M-1) & \cdots & \cdots & x(0) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ x(N-1) & \cdots & \cdots & x(N-M) \\ & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & \ddots & \vdots \\ & & & x(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(M-1) \end{bmatrix}$$

线性时不变系统的输入输出关系

- 输入输出关系的差分方程描述
  - 连续时间系统(模拟系统)通常用微分方程来描述
  - 离散时间系统则是用差分方程来表达输入输出之间的关系
  - 线性时不变系统可以用线性常系数差分方程来表示
  - N阶线性常系数差分方程的一般形式

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M} a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} b_i y(n-i)$$

其中：a_i、b_i均为常数

线性时不变系统的输入输出关系

- 输入输出关系的差分方程描述
  - 例：给定一阶差分方程及其输入

$$y(n) = 1.5x(n) + \frac{1}{2}y(n-1) \qquad x(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

  - 求给定初始条件下系统的瞬态解(用递推法)

初始条件为 $y(n)=0$，$n<0$

解：$n=0$以前的输出已由初始条件给定，瞬态解从n=0求起，由差分方程、初始条件和输入，得：

$$y(0) = 1.5x(0) + \frac{1}{2}y(-1) = 1.5$$

$$y(1) = 1.5x(1) + \frac{1}{2}y(0) = 0.75$$

依次递推，得

$$\boxed{y(n) = h(n) = 1.5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)}$$

稳定、因果系统

线性时不变系统的输入输出关系

- 利用MatLab来求解差分方程
  - MatLab是一种面向科学和工程计算的工具软件
  - 特点：计算功能强大，数十个工具箱，结果可视化
  - 例：试用MatLab计算下列差分方程的输出$y(n)$，假设输入序列 $x(n)=\delta(n)$，$0 \le n \le 40$

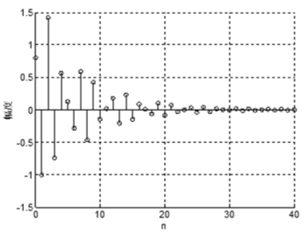
$$
\begin{aligned}
y(n)+0.7y(n-1)-0.45y(n-2)-0.6y(n-3) \\
=0.8x(n)-0.44x(n-1)+0.36x(n-2)+0.02x(n-3)
\end{aligned}
$$

线性时不变系统的输入输出关系

- 利用MatLab来求解差分方程
  - 解：MatLab程序如下

```
N=41;
b=[0.8 -0.44 0.36 0.22];
a=[1 0.7 -0.45 -0.6];
x=[1 zeros(1,N-1)];
k=0:1:N-1;
y=filter(b,a,x);
stem(k,y);
xlabel('n');
ylabel('幅度')
```

  - 结果绘图



离散时间系统分析

- 离散时间系统的基本概念
- 线性时不变系统的输入、输出关系
- 离散时间系统分析

离散时间系统分析

- 系统函数$H(z)$的定义
  - 前面曾讨论过用单位脉冲响应$h(n)$来表示一个线性时不变离散系统的输入输出关系：

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

两边取z变换：

$$Y(z)=X(z)H(z)$$

则：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$ 定义为系统函数

  - $H(z)$是单位脉冲响应$h(n)$的z变换

离散时间系统分析

- 差分方程与系统函数(1)
  - 线性时不变离散系统也可用差分方程表示，考虑N阶差分方程：

$$\sum_{i=0}^{N} b_i y(n-i)=\sum_{i=0}^{M} a_i x(n-i)$$

  - 两边取z变换：

$$\sum_{i=0}^{N} b_i z^{-i} Y(z)=\sum_{i=0}^{M} a_i z^{-i} X(z)$$

离散时间系统分析

- 差分方程与系统函数(2)

于是

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M} a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N} b_i z^{-i}}$$

上式也可用因子的形式来表示：

$$H(z)=A\frac{\prod_{i=1}^{M}(1-c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N}(1-d_i z^{-1})}$$

式中$\{c_i\}$、$\{d_i\}$是$H(z)$在z平面上的零点和极点，A为比例常数。

整个系统函数可以由它的全部零、极点来唯一确定。

离散时间系统分析 $H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$

■利用系统函数的极点分布分析因果性和稳定性

■因果系统 其单位脉冲响应一定满足：$n<0, h(n)=0$

则其系统函数$H(z)$的收敛域一定包含 ∞，即 ∞不是极点

■稳定系统 要求$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$，要求其收敛域包含单位圆，即$H(z)$的极点应该集中在单位圆内 $\boxed{h(n)=\sum_{k=1}^{N} C_k p_k^n}$

■因果稳定系统 收敛域包含 ∞ 和单位圆，收敛域可表示为：$r<|z|\le\infty, 0<r<1$，极点应该集中在单位圆内

离散时间系统分析--(例1)(1)

例：已知离散LSI系统的差分方程：

(设系统初始状态为零)

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$$

其中：$x(n)$为输入，$y(n)$为输出。

1）求系统函数，指出系统的零极点；

2）若该系统是因果稳定的，指出系统的收敛域；

3）求该因果稳定系统的单位抽样响应。

离散时间系统分析--(例1)(2)

解：1）对差分方程两边取Z变换：

$$\boxed{y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)} \quad Y(z)-\frac{3}{4}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)=X(z)+\frac{1}{3}z^{-1}X(z) \quad \boxed{x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)}$$

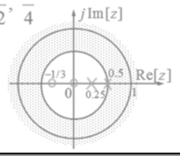
系统函数：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

零点：$z=-\frac{1}{3}, 0$ 极点：$z=\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

2）由于系统为因果稳定系统，

故收敛域：$|z|>\frac{1}{2}$



离散时间系统分析--(例1)(3)

3）对H(z)求z反变换即得单位抽样响应h(n)，用部分分式法

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$$H(z)=\frac{\frac{10}{3}z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{7}{3}z}{z-\frac{1}{4}}$$

$$h(n)=\left[\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

离散时间系统分析--(例2)

例：已知系统函数 $H(z)=\frac{0.95}{(1-0.5z^{-1})(1-0.1z)}$； $10<|z|\le\infty$

求系统的单位脉冲响应及系统性质

解：系统函数$H(z)$有两个极点，$z_1=0.5$， $z_2=10$。收敛域包含∞点，因此系统一定是因果系统，但单位圆不在收敛域内，因此可判定系统是不稳定的。

$$h(n)=IZT[H(z)]$$
$$=\begin{cases}\mathrm{Re}\,s[H(z)z^{n-1}]_{z=0.5}+\mathrm{Re}\,s[H(z)z^{n-1}]_{z=10} & n\ge 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$
$$=(0.5^n-10^n)u(n)$$

离散时间系统分析--(例３)

例：系统函数不变，但收敛域不同

$$H(z)=\frac{0.95}{(1-0.5z^{-1})(1-0.1z)}; \quad 0.5<|z|\le 10$$

求系统的单位脉冲响应及系统性质

解：收敛域是包括单位圆而不包括∞点的有限环域，判定系统是稳定的，但是非因果的。用留数定理求$H(z)$的反变换：

$$h(n)=IZT[H(z)]$$
$$=\begin{cases}\mathrm{Re}\,s[H(z)z^{n-1}]_{z=0.5} & n\ge 0\\ -\mathrm{Re}\,s[H(z)z^{n-1}]_{z=10} & n<0\end{cases}$$
$$=0.5^n u(n)+10^n u(-n-1)$$

The End

谢谢！

请批评指正