第 7 章作业参考答案（2）

P243/3：

K-T 条件：

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}u_1-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u_2-\begin{pmatrix}-2(x_1-3)\\1\end{pmatrix}u_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ u_1(4-x_1-x_2)=0,u_2(x_2+7)=0,u_3(-(x_1-3)^2+x_2+1)=0\\ 4-x_1-x_2\geq 0,x_2+7\geq 0,-(x_1-3)^2+x_2+1\geq 0\\ u_1\geq 0,u_2\geq 0,u_3\geq 0\end{cases}$$

$$\overset{x_2+7>0\Rightarrow u_2=0}{\Rightarrow}\begin{cases}4+u_1+2u_3(x_1-3)=0\\ -3+u_1-u_3=0\\ u_1(4-x_1-x_2)=0,u_3(-(x_1-3)^2+x_2+1)=0\\ 4-x_1-x_2\geq 0,x_2+7\geq 0,-(x_1-3)^2+x_2+1\geq 0\\ u_1\geq 0,u_3\geq 0\end{cases}$$

当 $u_1=0$，则 $u_3=-3<0$

当 $u_3=0$，则 $u_1=-4<0$

当 $u_1,u_3>0$，则 $\begin{cases}4-x_1-x_2=0,\\ x_2+7\geq 0,\\ -(x_1-3)^2+x_2+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1,\\ x_2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_1=16/3>0,\\ u_2=7/3>0\end{cases}$，因此 $\begin{cases}x_1=1,\\ x_2=3\end{cases}$ 满足 K-T 条件。

P243/4：

对 $\boldsymbol{x}^1=(3/2,9/4)^T$：可行，起作用：第一个。K-T 条件：

$$\begin{cases}2(x_1-9/4)+2u_1x_1=0,\\ 2(x_2-2)-u_1=0,\end{cases}\overset{x_1=3/2,x_2=9/4}{\Rightarrow}\quad u_1=1/2>0，\ \boldsymbol{x}^1=(3/2,9/4)^T$$ 是 K-T 点，原问题凸，

$\boldsymbol{x}^1=(3/2,9/4)^T$ 是最优解。

对 $\boldsymbol{x}^2=(9/4,2)^T$：不可行，不是最优解。

对 $\boldsymbol{x}^3=(0,2)^T$：可行，起作用：第三个。K-T 条件：

$$\begin{cases}2(x_1-9/4)+2u_1x_1=0,\\ 2(x_2-2)-u_1=0,\end{cases}\overset{x_1=0,x_2=2}{\Rightarrow}\quad u_1=-9/2<0，\ \boldsymbol{x}^3=(0,2)^T$$ 不是 K-T 点，不是最优解。

P244/7：

$$\begin{cases}\min f(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2\\ s.t.\quad x_1+x_2\geq 4\\ \qquad 2x_1+x_2\geq 5\end{cases}$$

K-T 条件：$\begin{cases} 2x_1-u_1-2u_2=0 \\ 2x_2-u_1-u_2=0 \\ u_1(x_1+x_2-4)=0, u_2(2x_1+x_2-5)=0 \\ x_1+x_2\geq 4, 2x_1+x_2\geq 5 \\ u_1\geq 0, u_2\geq 0 \end{cases}$

当u_1=0，$u_2=0$，则$\begin{cases} 2x_1=0 \\ 2x_2=0 \\ x_1+x_2\geq 4, 2x_1+x_2\geq 5 \end{cases}$，无解

当u_1=0，$u_2>0$，则$\begin{cases} 2x_1-2u_2=0 \\ 2x_2-u_2=0 \\ x_1+x_2\geq 4, 2x_1+x_2=5 \\ u_2\geq 0 \end{cases}$，无解

当u_1>0，$u_2=0$，则$\begin{cases} 2x_1-u_1=0 \\ 2x_2-u_1=0 \\ x_1+x_2=4, 2x_1+x_2\geq 5 \\ u_1\geq 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=2 \\ u_1=4 \end{cases}\Rightarrow \boldsymbol{x}^*=(2,2)^T$ 是 K-T 点，原问题凸，$\boldsymbol{x}^*=(2,2)^T$ 是最优解。

当u_1>0，$u_2>0$，则$\begin{cases} 2x_1-u_1-2u_2=0 \\ 2x_2-u_1-u_2=0 \\ x_1+x_2=4, 2x_1+x_2=5 \\ u_1\geq 0, u_2\geq 0 \end{cases}$，无解。