



第六讲

滤波器设计

《工程信号处理》

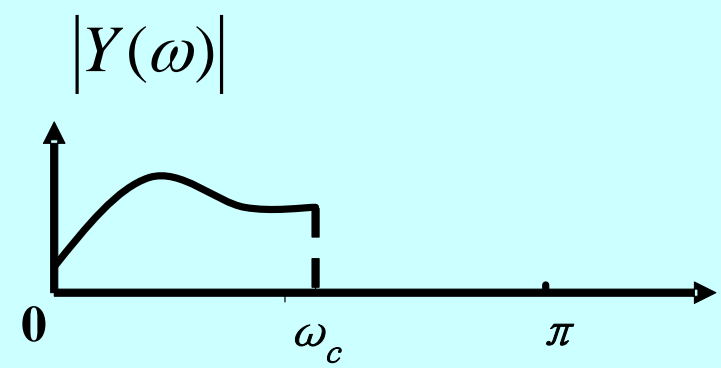
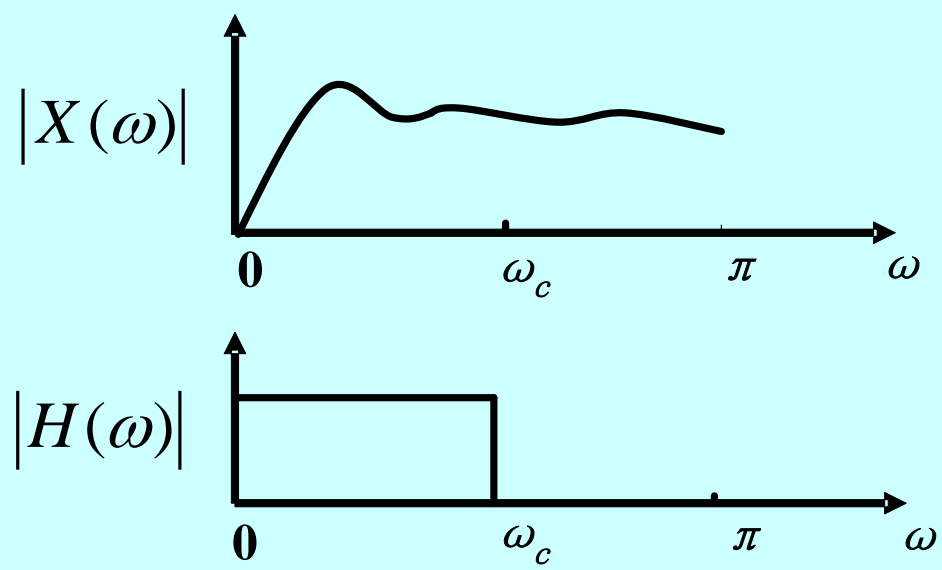
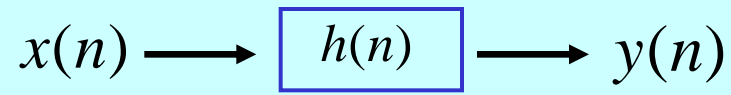


滤波器的基本概念

- 滤波器的基本概念
- IIR滤波器的设计
- FIR数字滤波器的线性相位特性
- FIR数字滤波器的窗函数设计法
- FIR数字滤波器的最优化设计

滤波器的基本概念

- 滤波器指对输入信号成分起过滤作用的器件



通过频域过滤信号杂波成分

$$y(n) = x(n) * h(n) \rightarrow Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

滤波器的基本概念

■ 数字滤波器的分类

■ 从单位脉冲响应分类，可以分成无限冲激响应(IIR)滤波器和有限冲激响应(FIR)滤波器，系统函数分别为：

■ 有 M 个零点， N 个极点，对于稳定系统，极点应集中在单位圆内

$$H(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} h(n)z^{-n} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - z_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})} \quad \{a_k\} \text{不全为0}$$

■ 有 N 个零点，极点都集中在 $z=0$ 处， \therefore 滤波器总是稳定的

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = A \prod_{r=1}^{N-1} (1 - z_r z^{-1}) \quad \{a_k\} \text{全部为0}$$

滤波器的基本概念

■ 数字滤波器的分类

■ IIR滤波器的特点

- 单位冲激响应 $h(n)$ 是无限长的。
- 系统函数 $H(z)$ 在有限长 z 平面 ($0 < |z| < \infty$) 有极点存在(可能不稳定)
- 设计借助模拟滤波器的技术
- 容易取得比较好的通带与阻带衰减特性

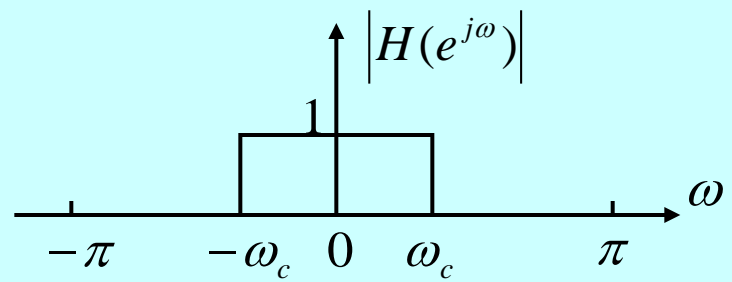
■ FIR滤波器的特点

- 系统的单位冲激响应 $h(n)$ 在有限个 n 值处不为零, 即 $h(n)$ 是个有限长序列
- 系统函数 $H(z)$ 在 $|z| > 0$ 处收敛, 极点全部在 $z=0$ 处(即FIR一定为稳定系统)
- 易于实现线性相位
- 允许设计多通带(或多阻带)滤波器

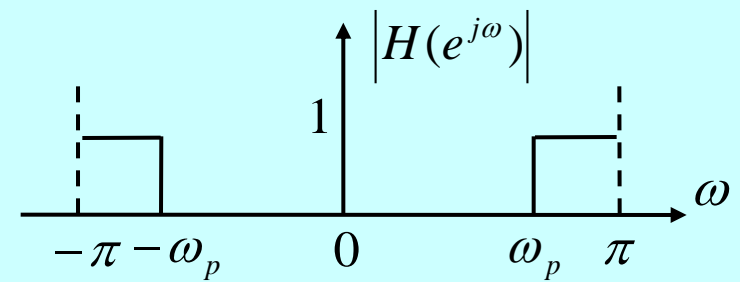
滤波器的基本概念

■ 数字滤波器的分类

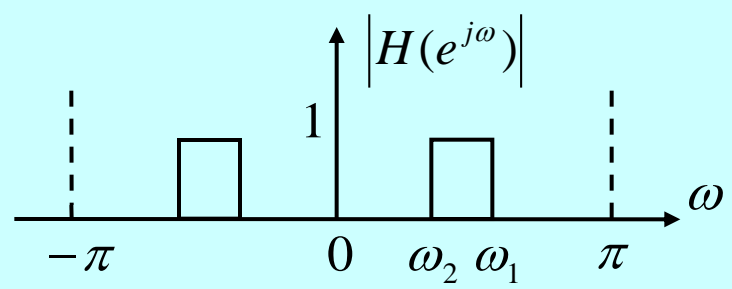
■ 按频率响应特性分类



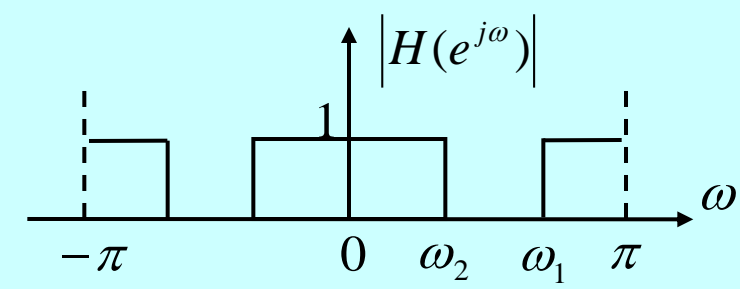
低通



高通



带通



带阻

滤波器的基本概念

■ 数字滤波器的技术要求

■ 数字滤波器频率响应函数 $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$

■ 幅频特性：信号通过滤波器后的各频率成分衰减情况

■ 相频特性：各频率成分通过滤波器后在时间上的延时情况

■ 选频滤波器：一般要求幅频特性，相频特性一般不要求

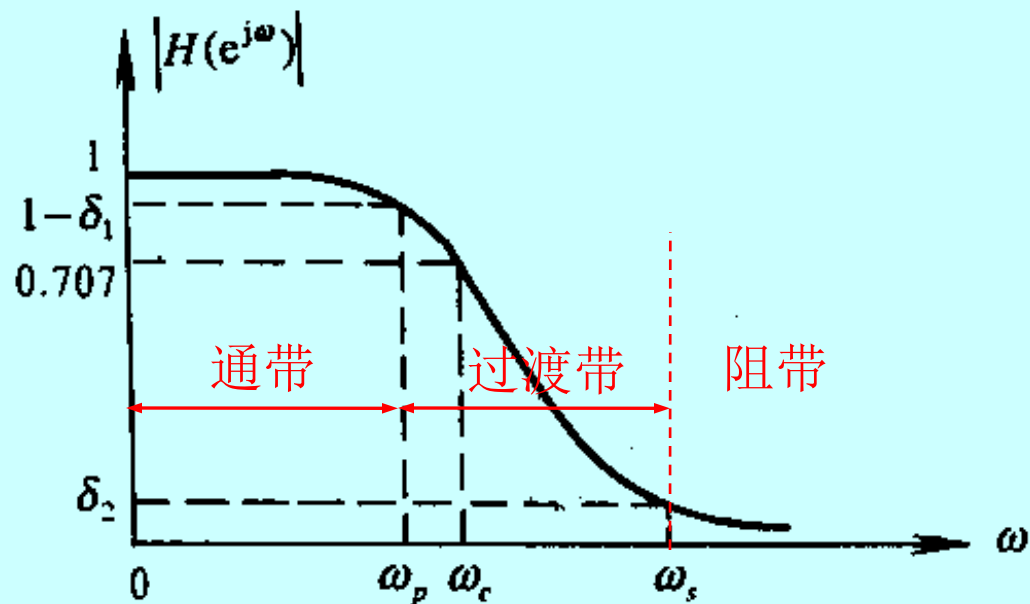
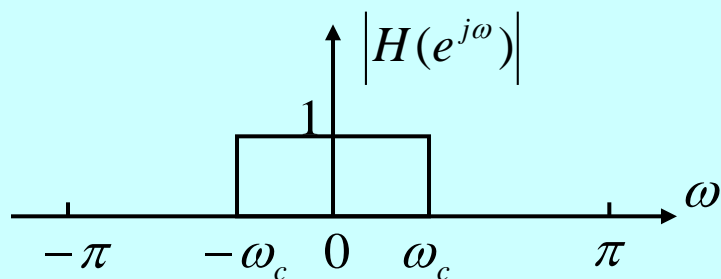
■ 线性相位数字滤波器：若对输出波形有要求，则需要考虑相频特性的技术指标，如语音合成，波形传输，图像信号处理，则需设计线性相位数字滤波器

滤波器的基本概念

■ 数字滤波器的技术要求

■ 理想滤波器物理上是不可实现的，原因在于从一个频带到另一个之间的突变，为了物理上可实现，需要：

- 过渡带：在通带和阻带之间设置一定宽度的过渡带
- 误差容限：在通带和阻带内也不一定严格为 1 或 0，而应给以较小的误差容限



滤波器的基本概念

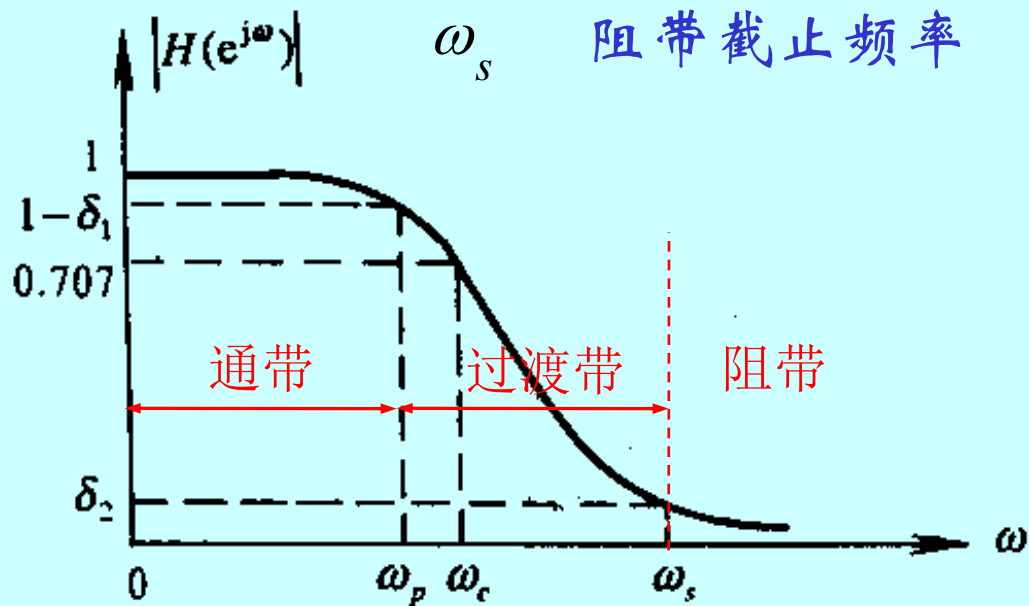
■ 数字滤波器的技术要求

■ 实际滤波器的幅频特性技术指标由以下几个指标给出：

- 通带截止频率
- 通带内允许的最大衰减
- 阻带截止频率
- 阻带内应达到的最小衰减

ω_p 通带截止频率

ω_s 阻带截止频率



低通滤波器的幅频特性

滤波器的基本概念

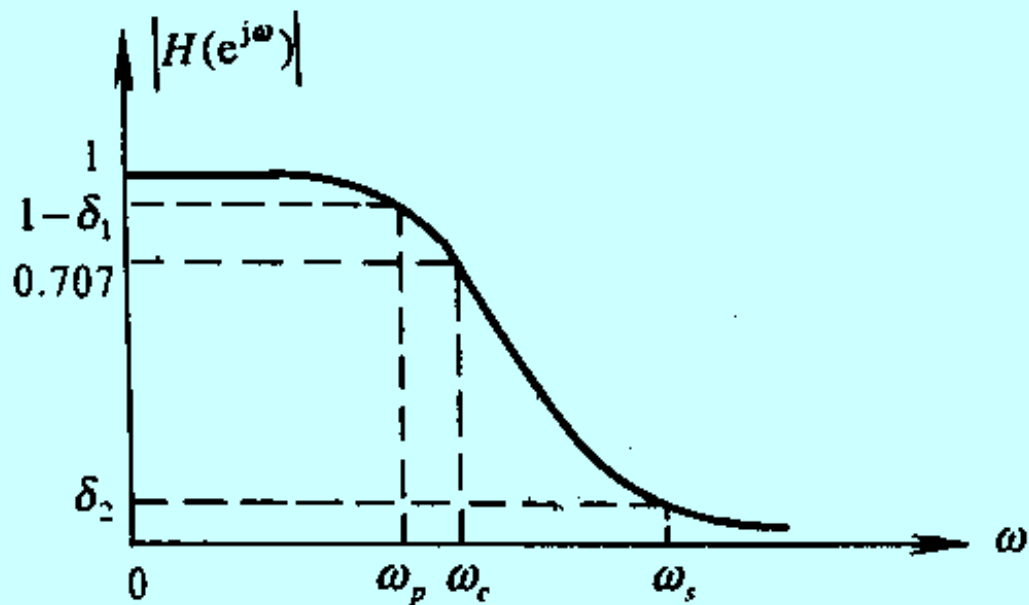
■ 数字滤波器的技术要求

- 通带内允许的最大衰减
 α_p 定义为:

$$\alpha_p = 20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_p})|} \text{ dB}$$

- 如将 $|H(e^{j0})|$ 归一化为 1, 则表示成:

$$\begin{aligned} \alpha_p &= -20 \lg |H(e^{j\omega_p})| \text{ dB} \\ &= -20 \lg |1 - \delta_1| \text{ dB} \end{aligned}$$



低通滤波器的幅频特性

滤波器的基本概念

■ 数字滤波器的技术要求

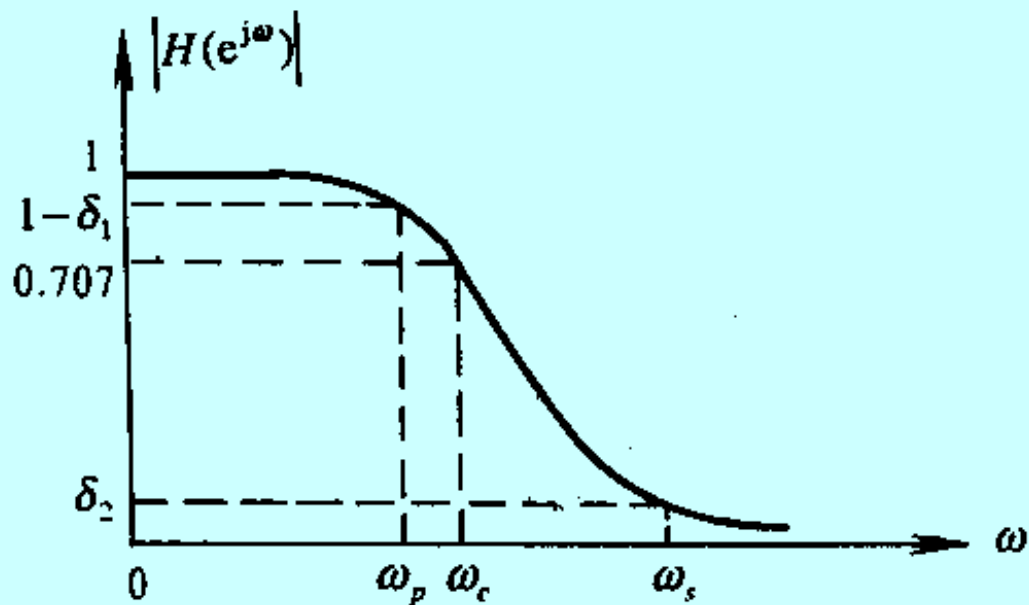
- 阻带内允许的最小衰减
 α_s 定义为

$$\alpha_s = 20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_s})|} \text{ dB}$$

- 如将 $|H(e^{j0})|$ 归一化为 1,

则表示成:

$$\begin{aligned} \alpha_s &= -20 \lg |H(e^{j\omega_s})| \text{ dB} \\ &= -20 \lg |\delta_2| \text{ dB} \end{aligned}$$



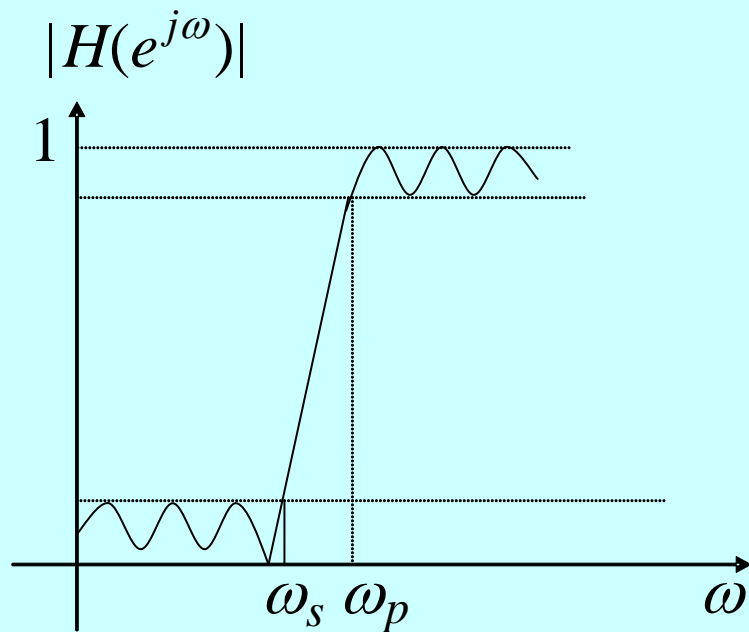
低通滤波器的幅频特性

滤波器的基本概念

■ 数字滤波器的技术要求

■ ω_p
通带截止频率

■ ω_s
阻带截止频率



高通滤波器的幅频特性

滤波器的基本概念

■ 数字滤波器的技术要求

■ ω_{pl}

通带下限截止频率

■ ω_{ph}

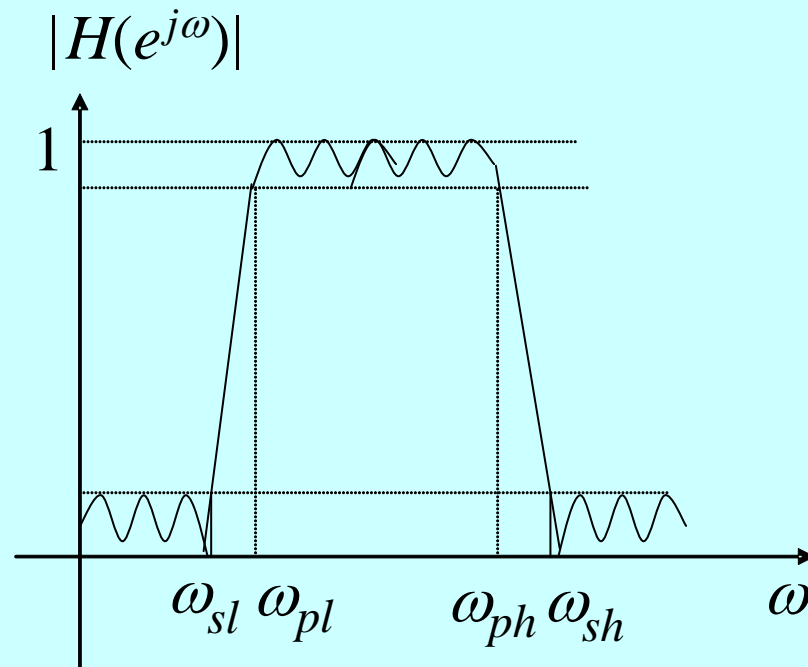
通带上限截止频率

■ ω_{sl}

阻带下限截止频率

■ ω_{sh}

阻带上限截止频率



带通滤波器的幅频特性

滤波器的基本概念

■ 数字滤波器的技术要求

■ ω_{pl}

通带下限截止频率

■ ω_{ph}

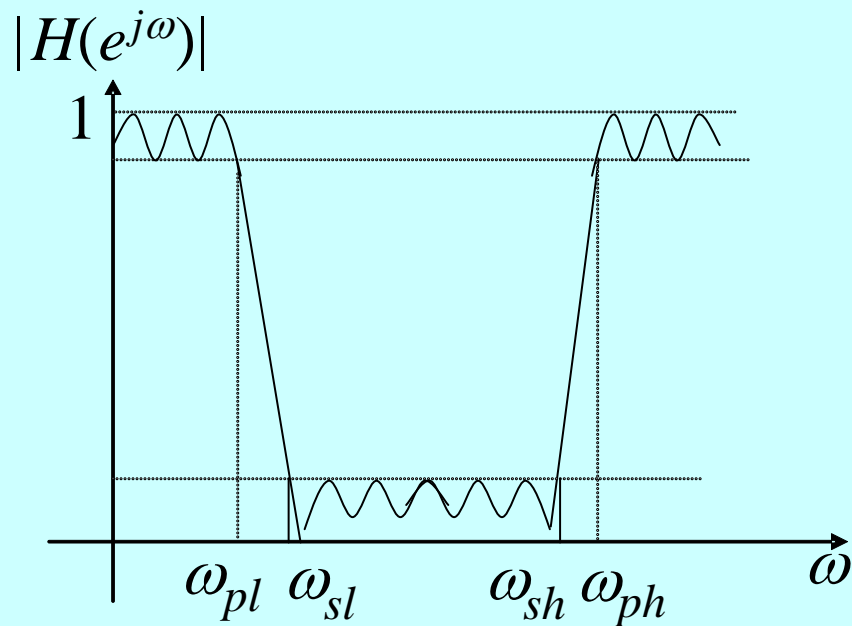
通带上限截止频率

■ ω_{sl}

阻带下限截止频率

■ ω_{sh}

阻带上限截止频率



带阻滤波器的幅频特性

滤波器的基本概念

■ 数字滤波器设计

- 设计滤波器的过程即为求系统函数 $H(z)$ 的过程

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - z_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

- 关键为确定 $H(z)$ 的系数组 $\{b_r\}$ 、 $\{a_k\}$ 或零、极点 $\{z_r\}$ 、 $\{p_k\}$
- IIR滤波器和FIR滤波器的设计方法不同
 - IIR滤波器常用设计方法是借助模拟滤波器的设计方法进行。其设计步骤是：先设计模拟滤波器得到传输函数 $H_a(s)$ ，然后将 $H_a(s)$ 按某种方法转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$
 - FIR滤波器的设计方法是建立在对理想滤波器频率特性作某种近似的基础上的。常用近似方法有窗口设计法，频率抽样法及最佳一致逼近法



IIR滤波器的设计

- 滤波器的基本概念
- IIR滤波器的设计
- FIR数字滤波器的线性相位特性
- FIR数字滤波器的窗函数设计法
- FIR数字滤波器的最优化设计

IIR滤波器的设计

■ 利用模拟滤波器的理论设计IIR滤波器

■ 模拟滤波器的设计方法非常成熟，许多典型系统有成熟的公式、图表可以查阅，便于设计

■ 设计步骤：

(1) 将数字滤波器的技术要求 $\xrightarrow{\text{某种变换}}$ 对模拟滤波器的技术要求；

(2) 设计模拟滤波器 — 求模拟滤波器的传递函数 $H_a(s)$ ；

(3) $H_a(s) \xrightarrow{\text{某种变换}} H(z)$

IIR滤波器的设计

■ 模拟低通滤波器的设计

■ 给定模拟低通滤波器的技术指标：

Ω_p : 通带截止频率

Ω_s : 阻带截止频率

α_p : 通带允许的最大衰减

α_s : 阻带应达到的最小衰减

■ 希望设计一个模拟低通滤波器 $G(s)$ ，有以下关系：

$$\alpha_p = \alpha(\Omega_p) = -10\lg|G(j\Omega_p)|^2 \quad \alpha_s = \alpha(\Omega_s) = -10\lg|G(j\Omega_s)|^2$$

■ 给定滤波器的技术指标，则可以求得满足要求的滤波器幅频特性。目前人们已经给出了几种不同类型的表达式，它们代表了不同类型的滤波器：巴特沃斯型，切比雪夫型，椭圆型

IIR滤波器的设计

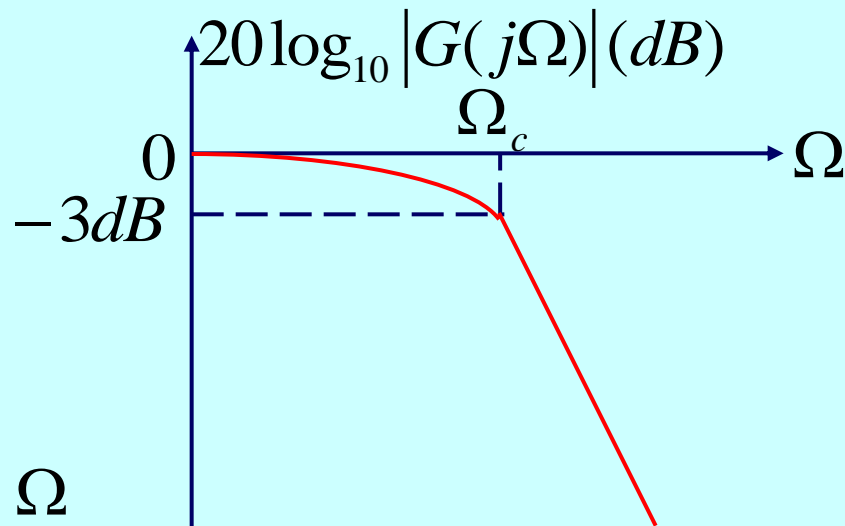
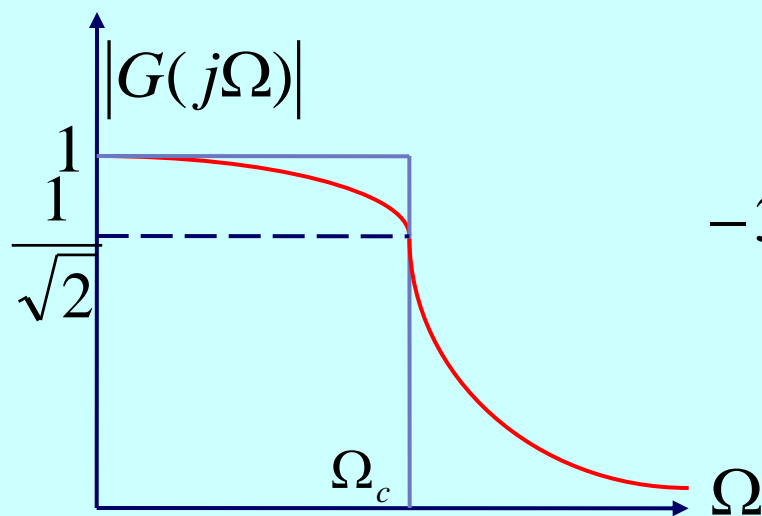
■ Butterworth低通滤波器的幅频特性

$$|G(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}}$$

N 为滤波器的阶数 (正整数)

$$|\Omega| < \Omega_c, \quad \left|\frac{\Omega}{\Omega_c}\right| < 1, \quad \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N} \ll 1, \quad |G(j\Omega)| \approx 1$$

$$|\Omega| > \Omega_c, \quad \left|\frac{\Omega}{\Omega_c}\right| > 1, \quad \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N} \gg 1, \quad |G(j\Omega)| \rightarrow 0$$



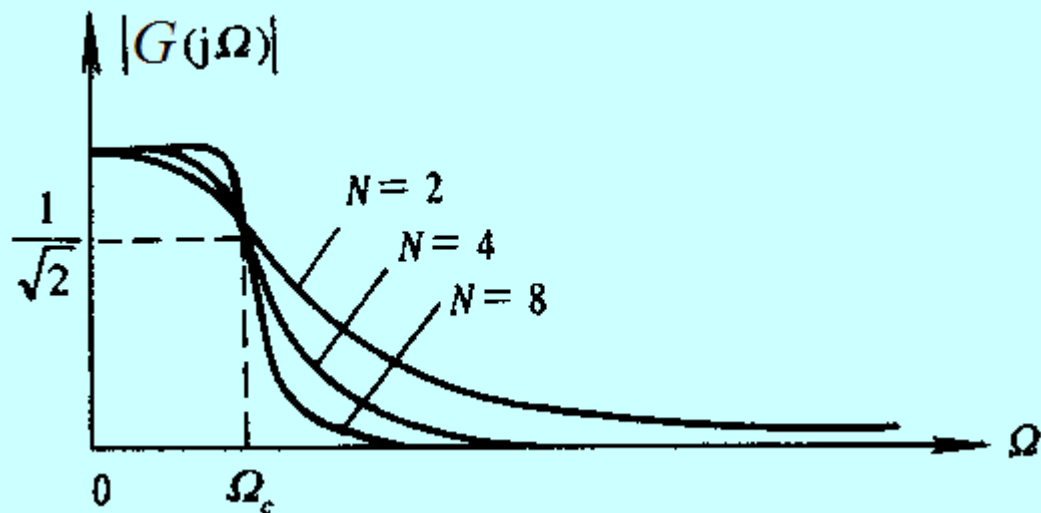
IIR滤波器的设计

■ Butterworth低通滤波器的幅频特性

- 具有通带内最大平坦的振幅特性，且随 $\Omega \nearrow$ 单调 \searrow
- 滤波器的阶数 N 越大，通带和阻带的近似性越好，过渡带也越陡
- 不管 N 为多少，所有幅频特性曲线都经过-3dB点

$$|G(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}}$$

N 为滤波器的阶数 (正整数)



IIR滤波器的设计

■ 用MATLAB 设计Butterworth模拟低通滤波器

■ $[N, W_n] = \text{buttord}(W_p, W_s, R_p, R_s, 's')$

- N --满足 W_p, W_s, R_p, R_s 的滤波器最小阶数； W_n ---3dB截止频率；
- W_p --通带截止频率； W_s --阻带截止频率；
- R_p --通带内允许的最大衰减； R_s --阻带内允许的最小衰减

■ $[z, p, k] = \text{buttap}(N)$

- 得到 N 阶模拟低通原型滤波器 $G(p)$ 的零、极点和增益

■ $[b, a] = \text{zp2tf}(z, p, k)$

- 从零、极点和增益得到(模拟低通原型滤波器)系数

■ $[B, A] = \text{lp2lp}(b, a, W_n)$

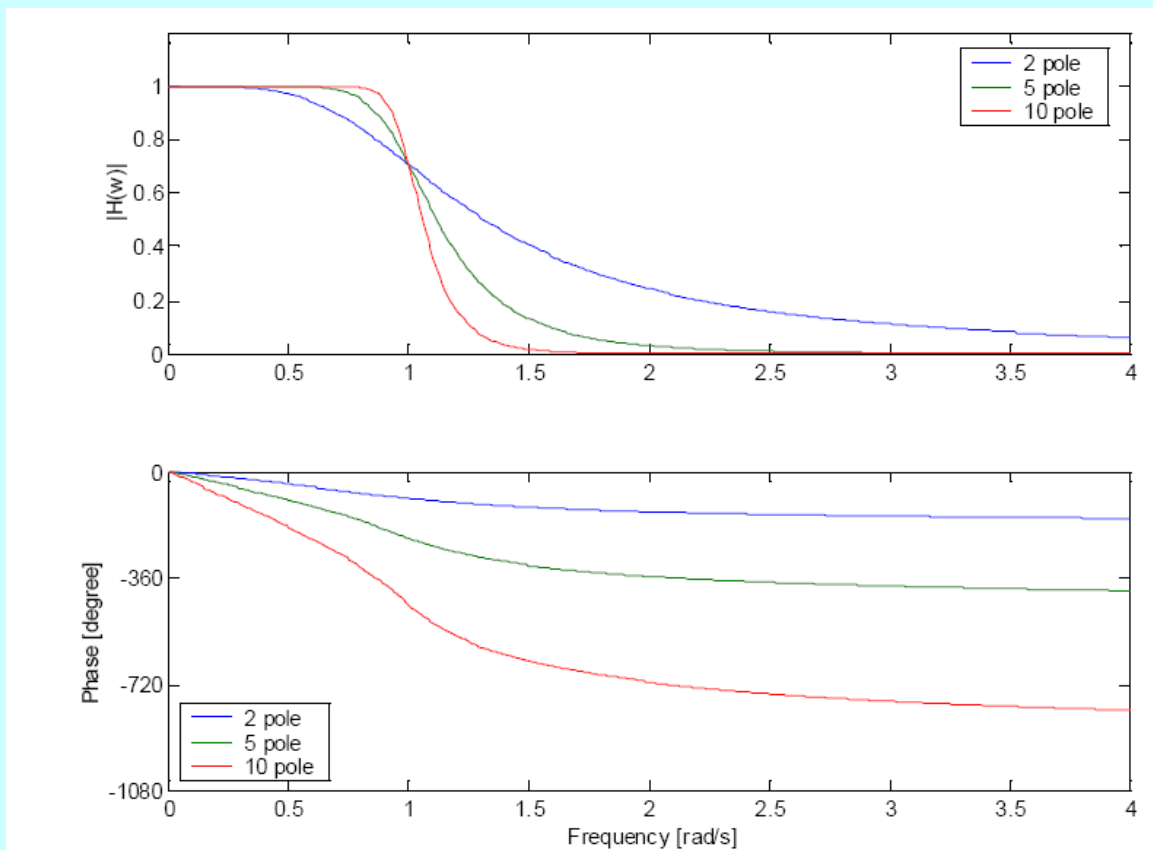
- 由模拟低通原型滤波器 $G(p)$ 的系数转换为截止频率为 W_n 的模拟低通滤波器系统函数系数

■ $[\text{mag}, \text{phase}] = \text{bode}(B, A, \omega)$

- 从系统函数得到滤波器频率响应函数的幅频、相频特性

IIR滤波器的设计

■ 用MATLAB 设计Butterworth模拟低通滤波器



2、5、10 极点 Butterworth 滤波器的幅频、相频特性， $\omega_c = 1$

IIR滤波器的设计

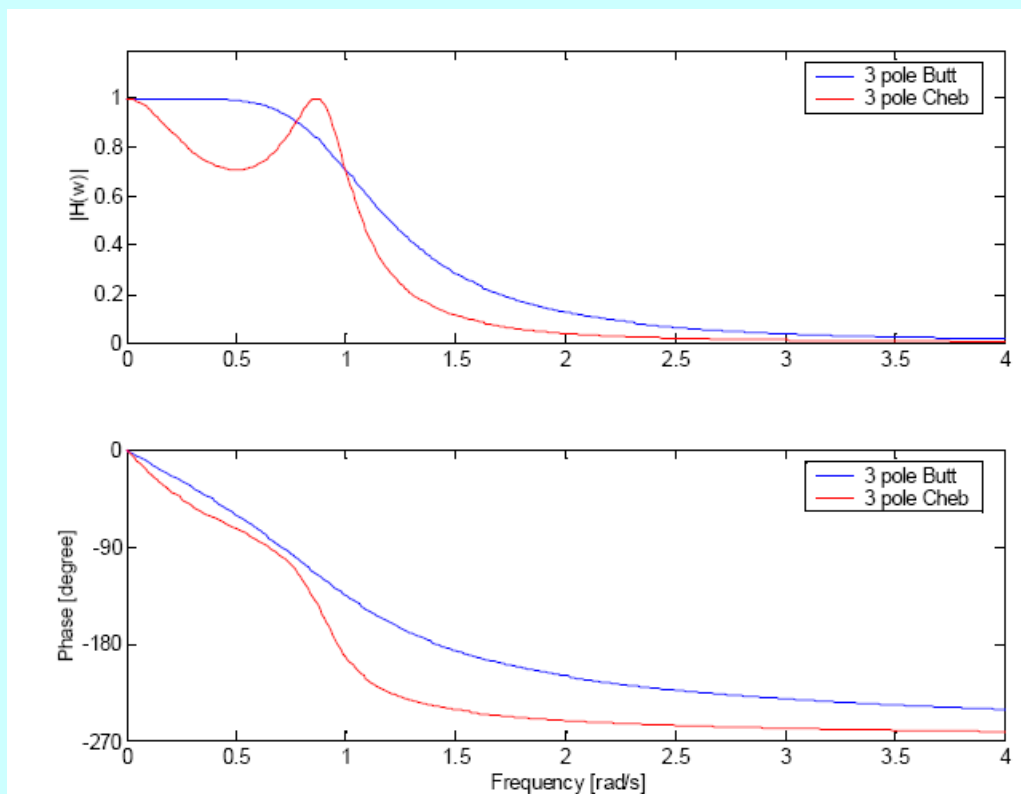
■ Chebyshev模拟低通滤波器

■ 引入原因

- Butterworth滤波器频率特性，无论在通带与阻带都随频率而单调变化，因此如果在通带边缘满足指标，则在通带内肯定会有富裕量，也就是会超过指标的要求，因而并不经济
- 一种改进方法是将指标的精度要求均匀地分布在通带内，或均匀分布在阻带内，或同时均匀在通带与阻带内，这时就可设计出阶数较低的滤波器。这种精度均匀分布的办法可通过选择具有等波纹特性的逼近函数来完成
- Chebyshev I型：在通带内等波纹，在阻带内单调；
- Chebyshev II型：在通带内单调，在阻带内等波纹

IIR滤波器的设计

■ Butterworth 与Chebyshev I 型滤波器比较

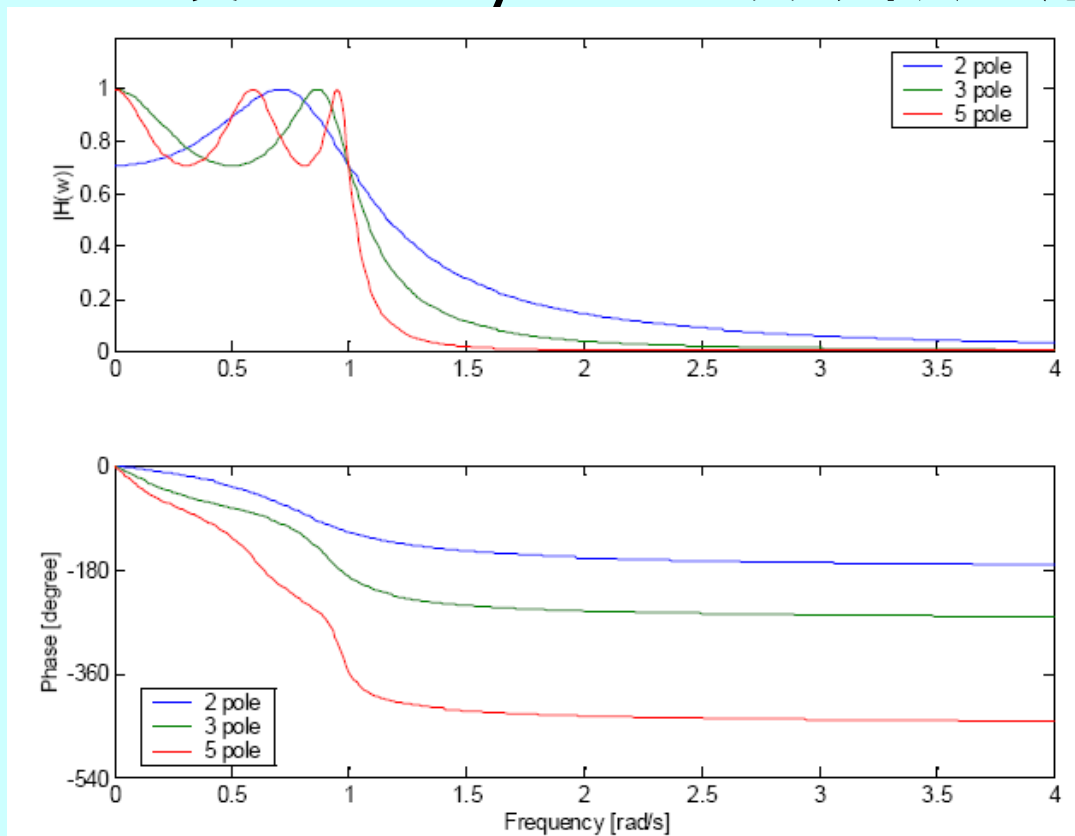


■ 由图可见，
Chebyshev I 型
滤波器的幅频曲
线在过渡带内的
衰减特性比
Butterworth 滤
波器要好。

3 极点 Butterworth 和 Chebyshev I 滤波器的幅频、相频特性， $\omega_c = 1$

IIR滤波器的设计

■ 用MATLAB 设计Chebyshev I模拟低通滤波器



2, 3, 5 极点 Chebyshev I 滤波器的幅频、相频特性, $\omega_c = 1$

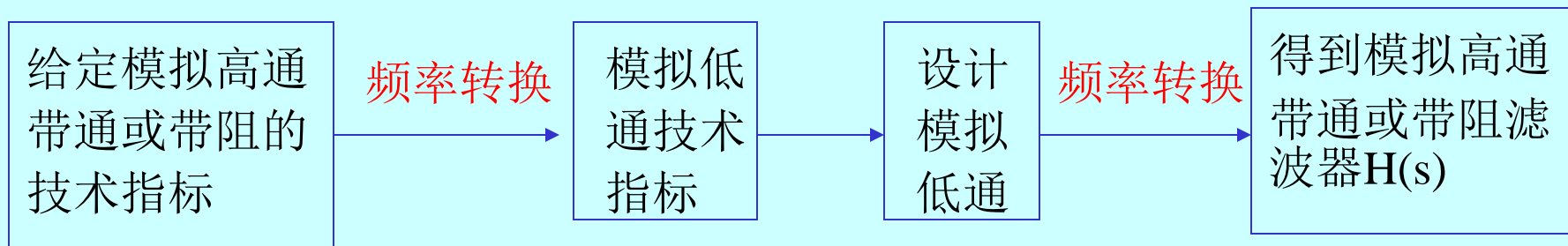
IIR滤波器的设计

■ Elliptic (椭圆)模拟低通滤波器

- 椭圆低通滤波器是一种零、极点型滤波器，它在有限频率范围内存在系统函数零点和极点。椭圆低通滤波器的通带和阻带都具有**等波纹特性**，因此通带，阻带逼近特性良好。对于同样的性能要求，它比前两种滤波器所需用的阶数都低，而且它的过渡带比较窄

IIR滤波器的设计

- 模拟高通、带通和带阻滤波器的设计方法
 - 先将要设计的滤波器的技术指标(主要是 Ω_p, Ω_s), 通过某种频率转变关系转换成模拟低通滤波器的技术指标
 - 依据这些技术指标设计出低通滤波器的系统函数。
 - 再依据频率转换关系变成所要设计的滤波器的系统函数



IIR滤波器的设计

■ 频率变换的MATLAB函数

■ $[b, a] = \text{lp2lp}(b, a, W_0)$

- 将截止频率为1的原型低通滤波器转换为截止频率为 W_0 的低通滤波器

■ $[b, a] = \text{lp2hp}(b, a, W_0)$

- 将截止频率为1的原型低通滤波器转换为截止频率为 W_0 的高通滤波器

■ $[b, a] = \text{lp2bp}(b, a, W_0, BW)$

- 将截止频率为1的原型低通滤波器转换为中心频率为 W_0 ，带宽为 BW 的带通滤波器

■ $[b, a] = \text{lp2bs}(b, a, W_0, BW)$

- 将截止频率为1的原型低通滤波器转换为中心频率为 W_0 ，带宽为 BW 的带阻滤波器

IIR滤波器的设计

■ 频率变换举例(1)

% 三极点Buttworth 滤波器

```
[z, p, k] = buttap (3);
```

```
[b, a] = zp2tf (z, p, k);
```

% 截止频率及截止频率转换

```
Wo = 5*2*pi;
```

```
[b, a] = lp2lp (b, a, Wo);
```

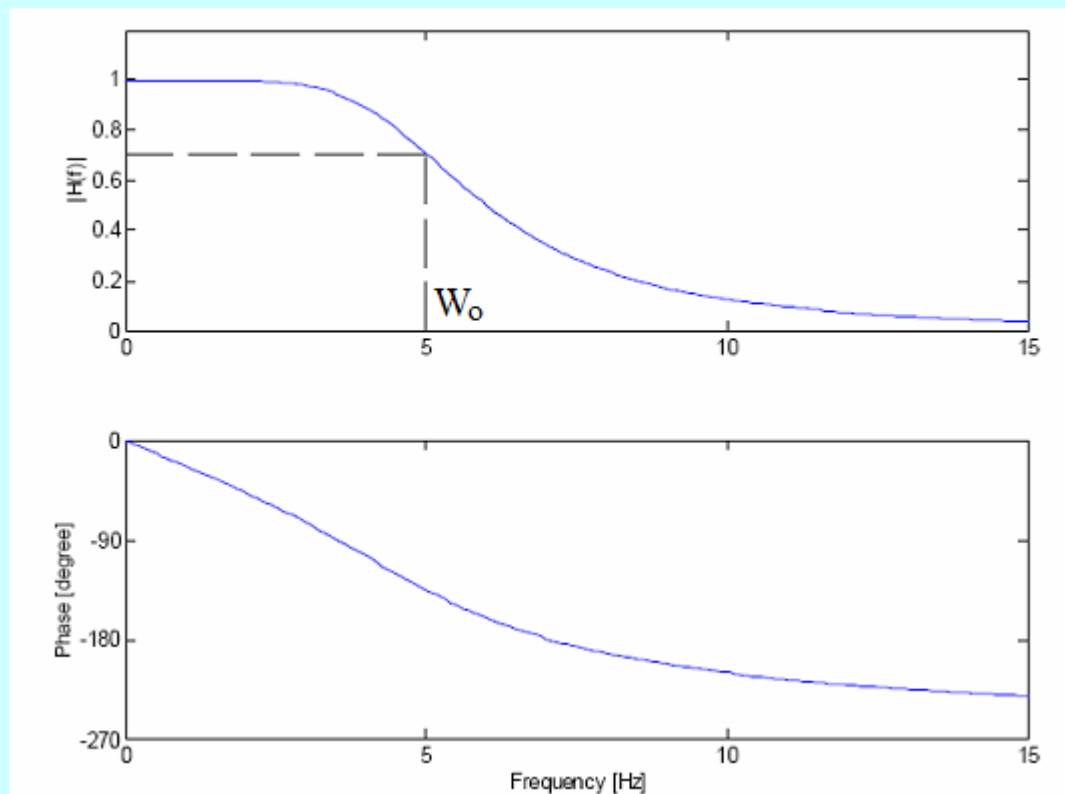
```
f = 15*[0:200]/200;
```

```
w = 2*pi*f;
```

```
[mag, phase] = bode (b, a, w);
```

```
subplot(211);plot(f,mag)
```

```
subplot(212);plot(f,phase)
```



IIR滤波器的设计

■ 频率变换举例(2)

% 三极点Buttworth 滤波器

```
[z, p, k] = buttap (3);
```

```
[b, a] = zp2tf (z, p, k);
```

% 带通滤波器中心频率及带宽

```
W0 = 8*2*pi;
```

```
BW = 2*2*pi;
```

```
[b, a] = lp2bp (b, a, W0, BW);
```

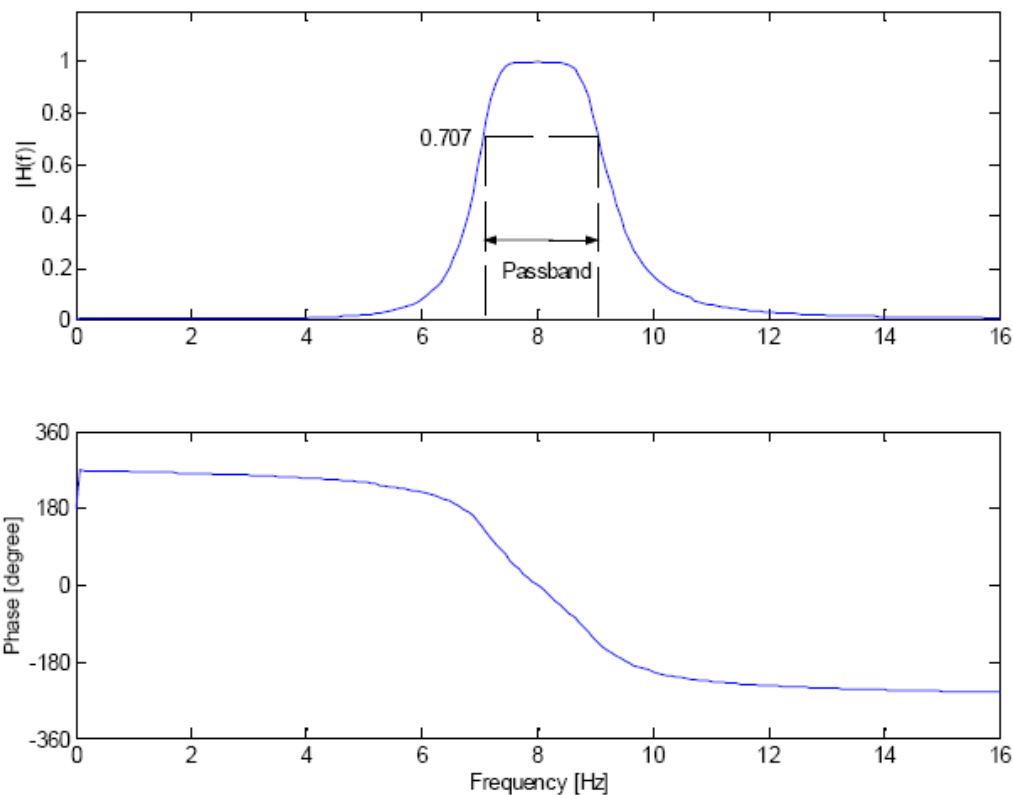
```
f = 16*[0:200]/200;
```

```
w = 2*pi*f;
```

```
[mag, phase] = bode (b, a, w);
```

```
subplot(211);plot(f,mag)
```

```
subplot(212);plot(f,phase)
```



IIR滤波器的设计

■ IIR模拟滤波器到IIR数字滤波器的转换

■ 脉冲响应不变法

- 脉冲响应不变法是从滤波器的脉冲响应出发，使数字滤波器的单位脉冲响应序列 $h(n)$ 模仿模拟滤波器的冲激响应 $g(t)$,使 $h(n)$ 正好等于 $g(t)$ 的采样值

■ 脉冲响应不变法的主要特点

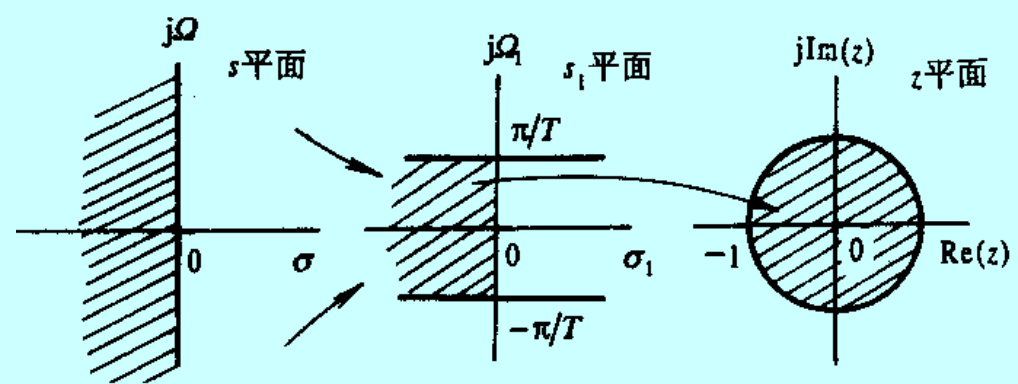
- 频率变换关系是线性的，即 $\omega = \Omega T_s$
- 数字滤波器的频响是模拟滤波器频响的周期延拓，周期为： $\Omega_s = 2\pi/T_s$
- 如果模拟滤波器的频响带限超过折叠频率 $\Omega_s/2$ ，会产生频率混叠，因此，**不适合用脉冲响应不变法设计高通和带阻滤波器**

IIR滤波器的设计

IIR模拟滤波器到IIR数字滤波器的转换

■ 双线性变换法

- 脉冲响应不变法的主要缺点是频谱交叠产生的混淆，这是从 s 平面到 z 平面的标准变换 $z=e^{sT_s}$ 的多值对应关系导致的,为了克服这一缺点，通过二次变换建立 s 平面与 z 平面一一对应的单值关系，消除多值性，也就消除了混淆现象
- 模拟频率 Ω 和数字频率 ω 之间是非线性关系



IIR滤波器的设计

■ MATLAB中设计IIR数字滤波器的步骤

- 将所需类型的数字滤波器的技术指标转换成相应模拟滤波器的技术指标：如果采用双线性变换法，边界频率的转换关系为
$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
- 通过频率变换，将所需类型的模拟滤波器的技术指标转换成模拟低通滤波器的技术指标
- 按照模拟低通滤波器的技术指标设计模拟低通滤波器
- 将模拟低通滤波器，转换成所需类型的模拟滤波器(高通、带通及带阻)
- 采用双线性变换法或脉冲响应不变法，将模拟滤波器转换成所需类型的数字滤波器

IIR滤波器的设计

■ MATLAB函数直接设计IIR数字滤波器

■ MATLAB通过下列函数，将前页的步骤融合在一起，使用十分方便：

- butter Butterworth(巴特沃斯)数字滤波器的设计
- cheby1 Chebyshev(切比雪夫)I型数字滤波器的设计
- cheby2 Chebyshev(切比雪夫)II型数字滤波器的设计
- ellip 椭圆数字滤波器的设计

■ `[b,a] = butter(n,Wn,'ftype')` % Butterworth数字滤波器的设计

- b、a -- 所要求的数字滤波器系数；
- n -- 滤波器阶数；
- Wn----截止频率。 $Wn \in [0,1]$, $Wn=1$ 相当于 $0.5f_s$ (采样频率)。
- ‘ftype’--类型：无 – 表示低通或带通(此时 $Wn=[w1 \ w2]$)；
‘high’– 表示高通；
‘stop’且 $Wn=[w1 \ w2]$ – 表示带阻

IIR滤波器的设计-应用举例(1)

■ 设计Butterworth 低通数字滤波器的MATLAB 程序

■ 方法1

```
N = 2;           % 2-pole
T = 0.2;         % sampling period
Wo = 5;          % cutoff frequency(rad)
Wo = 2/T*tan(Wo*T/2); % transform cutoff frequency
[z, p, k] = buttap(N); % create a N-pole prototype analog filter
[b0, a0] = zp2tf(z, p, k);
[b, a] = lp2lp(b0, a0, Wo); % transfer the cutoff frequency to Wo
[b1, a1] = bilinear(b, a, 1/T) % convert an analog to a digital filter
```

IIR滤波器的设计-应用举例(1)

■ 设计Butterworth 低通数字滤波器的MATLAB 程序

■ 方法2

$N = 2; T = 0.2; W_o = 5;$

$\Omega = W_o * T / \pi;$ % normalized cutoff frequency

$[b2, a2] = \text{butter}(N, \Omega)$ % create a N-pole digital filter

■ 结果比较

$b1 = 0.1441 \quad 0.2882 \quad 0.1441$

$a1 = 1.0000 \quad -0.6775 \quad 0.2539$

$b2 = 0.1441 \quad 0.2882 \quad 0.1441$

$a2 = 1.0000 \quad -0.6775 \quad 0.2539$

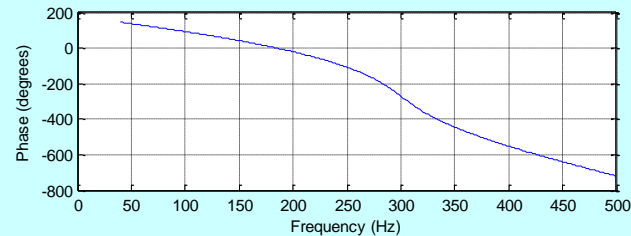
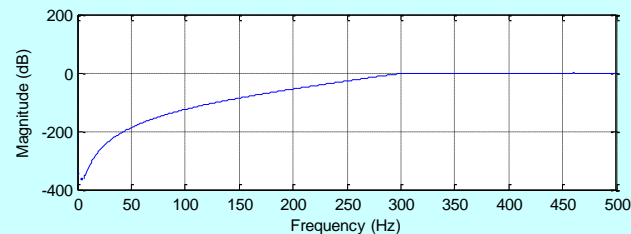
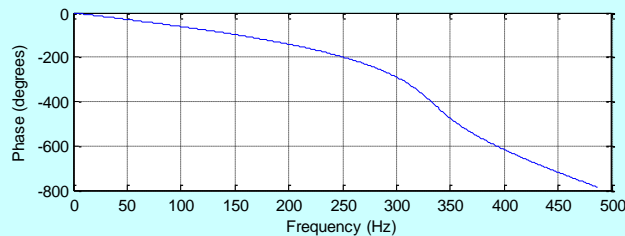
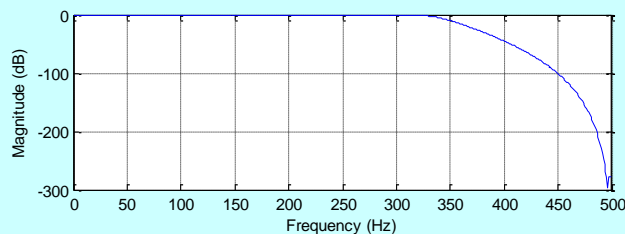
} 一致

IIR滤波器的设计-应用举例(2)

- (a) 设采样频率 $f_s=900\text{Hz}$, 设计 $n=9$ 阶的 Butterworth 的低通滤波器, 截止频率 $\omega_o=300\text{Hz}$;
- (b) 设采样频率 $f_s=1000\text{Hz}$, 设计 $n=10$ 阶的 Butterworth 的高通滤波器, 截止频率 $\omega_o=300\text{Hz}$

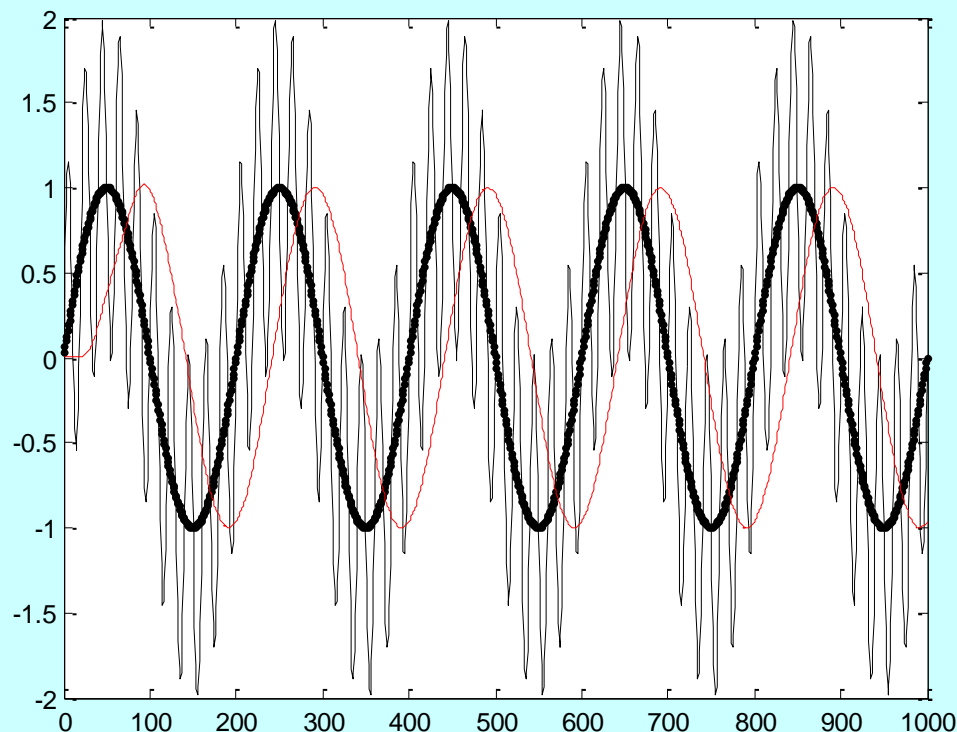
(a) `[b,a]=butter(9,300/450); freqz(b,a,512,900)`

(b) `[b,a]=butter(10,300/500,'high'); freqz(b,a,512,1000)`



IIR滤波器的设计-用低通滤波器滤波

```
k=[1:1:1000];  
dt = 0.001;  
t = k*dt;  
x1=sin(2*pi*5*t);  
x2=sin(2*pi*50*t);  
x=x1+x2; %信号  
%滤波器设计  
[b,a]=butter(9,20/500);  
%滤波  
y=filter(b,a,x);  
plot(k,x, 'k-',k,x1, 'k.',k,y,'r')
```



IIR滤波器的设计-用高通滤波器滤波

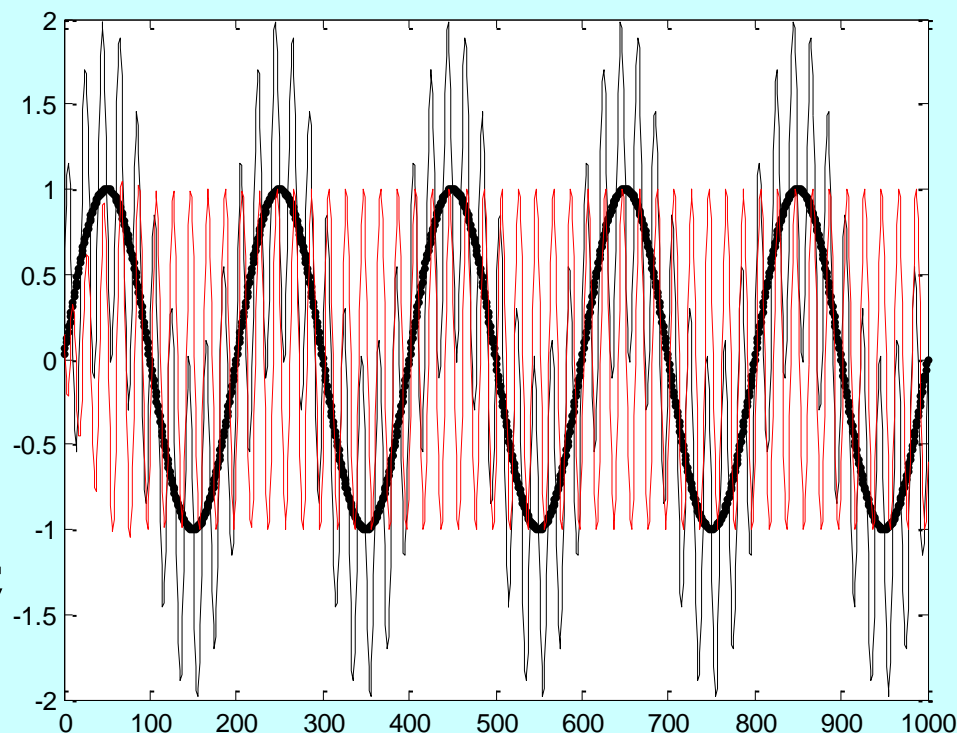
```
k=[1:1:1000];  
dt = 0.001;  
t = k*dt;  
x1=sin(2*pi*5*t);  
x2=sin(2*pi*50*t);  
x=x1+x2; %信号
```

%滤波器设计

```
[b,a]=butter(10,40/500,'high');
```

%滤波

```
y=filter(b,a,x);  
plot(k,x, 'k-',k,x1, 'k.',k,y,'r')
```



IIR滤波器的设计-应用举例(5)

- 设计一个低通滤波器，通带0-100Hz， $\alpha_p < 1\text{dB}$ ， $\alpha_s = 30\text{dB}$

■ 分析：取采样频率 $f_s = 1000\text{Hz}$ ，则 $W_p = 100/500$ ； $W_s = 150/500$

$W_p = 100/500$; % $f_s/2$

$W_s = 150/500$;

$A_p = 1$; % α_p

$A_s = 30$; % α_s

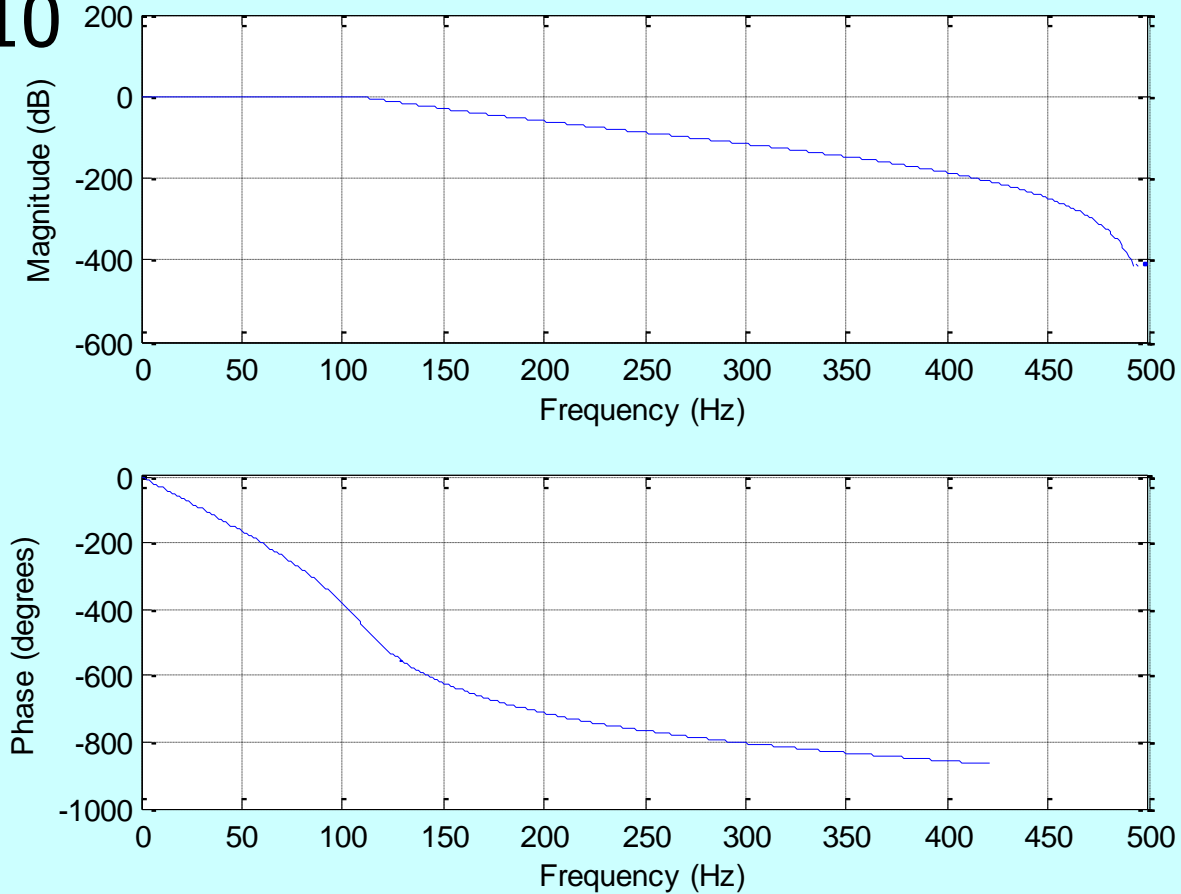
$[n, W_n] = \text{buttord}(W_p, W_s, A_p, A_s)$;

$[b, a] = \text{butter}(n, W_n)$;

$\text{freqz}(b, a, 512, 1000)$

IIR滤波器的设计-应用举例(5)

- 滤波器幅频和相频特性如下，求得滤波器阶数为 $n=10$



IIR滤波器的设计-应用举例(6)

- 设计一个带通滤波器，通带100–250Hz，阻带截止频率上限50Hz，下限300Hz $\alpha_p < 1\text{dB}$, $\alpha_s = 30\text{dB}$

■ 分析：取采样频率 $f_s = 1000\text{Hz}$, 则

$$W_p = [100 \ 250]/500; \quad W_s = [50 \ 300]/500$$

$$W_p = [100 \ 250]/500;$$

$$W_s = [50 \ 300]/500;$$

$$R_p = 1; \quad \% \alpha_p$$

$$A_s = 30; \quad \% \alpha_s$$

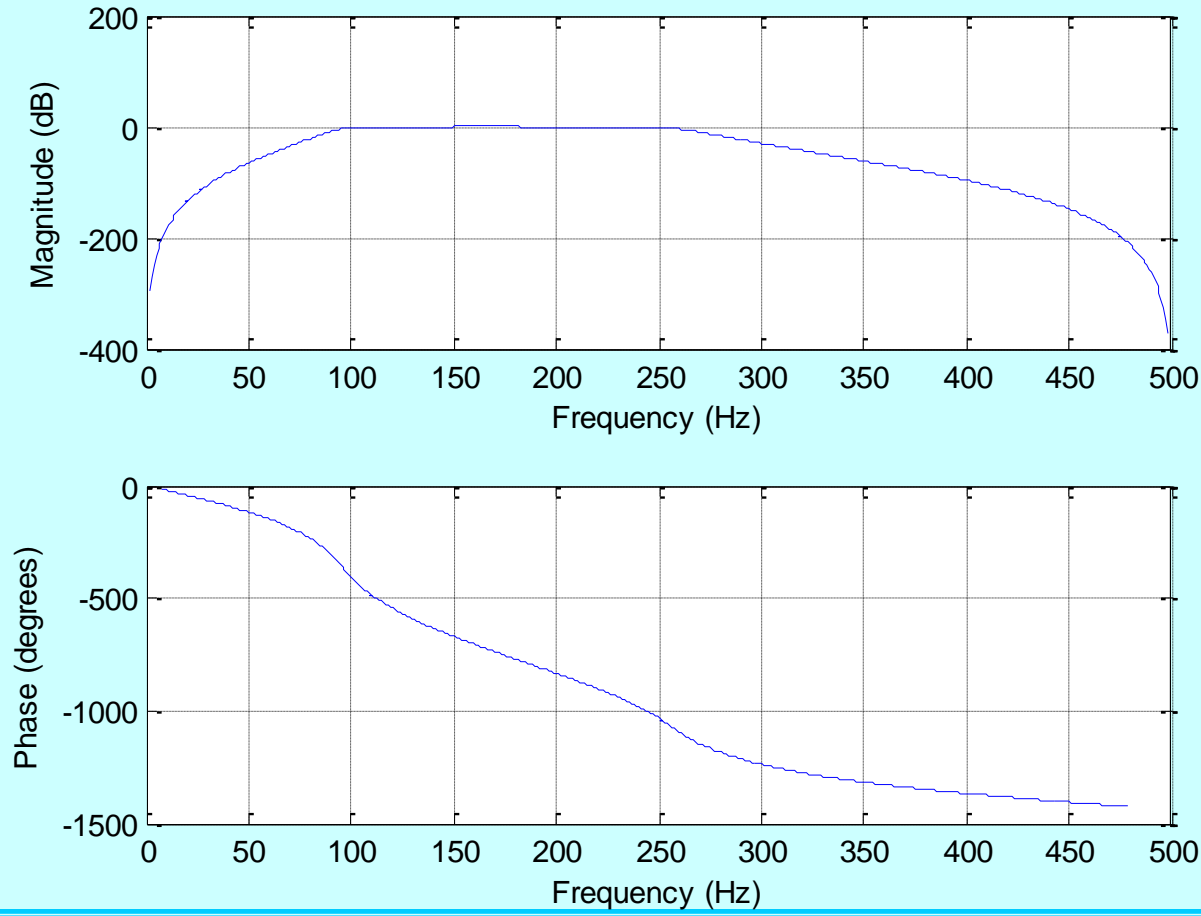
$$[n, W_n] = \text{buttord}(W_p, W_s, R_p, A_s);$$

$$[b, a] = \text{butter}(n, W_n);$$

$$\text{freqz}(b, a, 512, 1000)$$

IIR滤波器的设计-应用举例(6)

- 滤波器幅频和相频特性如下，求得滤波器阶数为 $n=8$





FIR数字滤波器的线性相位特性

- 滤波器的基本概念
- IIR滤波器的设计
- FIR数字滤波器的线性相位特性
- FIR数字滤波器的窗函数设计法
- FIR数字滤波器的最优化设计

FIR数字滤波器的特点(与IIR比较):

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = A \prod_{r=1}^{N-1} (1 - z_r z^{-1})$$

■ 优点

- 很容易获得严格的线性相位，避免被处理的信号产生相位失真；
- 可得到多带幅频特性；
- 极点全部在原点，无稳定性问题；
- 无反馈运算

■ 缺点

- 因为无极点，要获得好的过渡带特性，需以较高的阶数为代价；

FIR数字滤波器的线性相位特性

■ 线性相位的概念

- 离散时间系统的频率响应包含了幅频响应和相频响应两部分：

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = |H(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

- 线性相位就是指系统的相频特性是频率的线性函数，即

$$\phi(\omega) = -k\omega \quad k \text{ 为常数}$$

- 假定线性相位系统 $h(n)$ 的幅频特性为1，当信号 $x(n)$ 通过系统后，输出 $y(n)$ 的频率特性

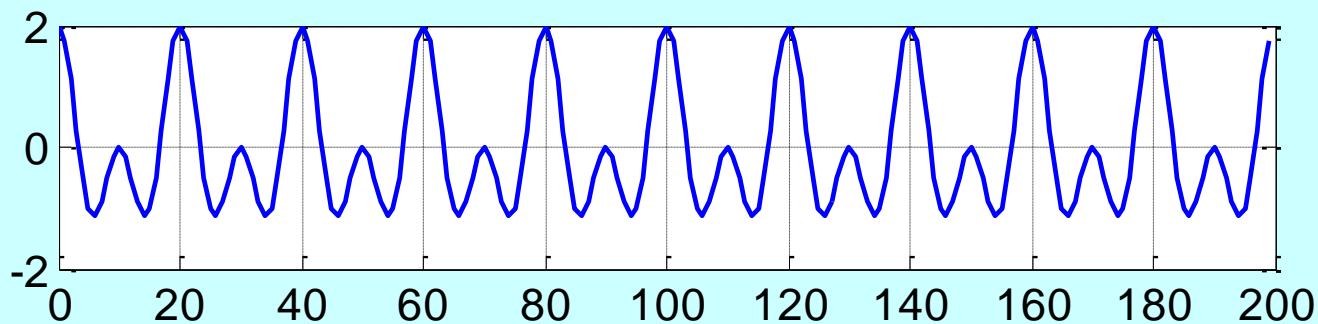
$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = e^{-jk\omega} |X(\omega)| e^{j\phi(\omega)} = |X(\omega)| e^{j\phi(\omega) - jk\omega}$$

- 即输出等于输入在时间上的位移达到无失真传输的目的

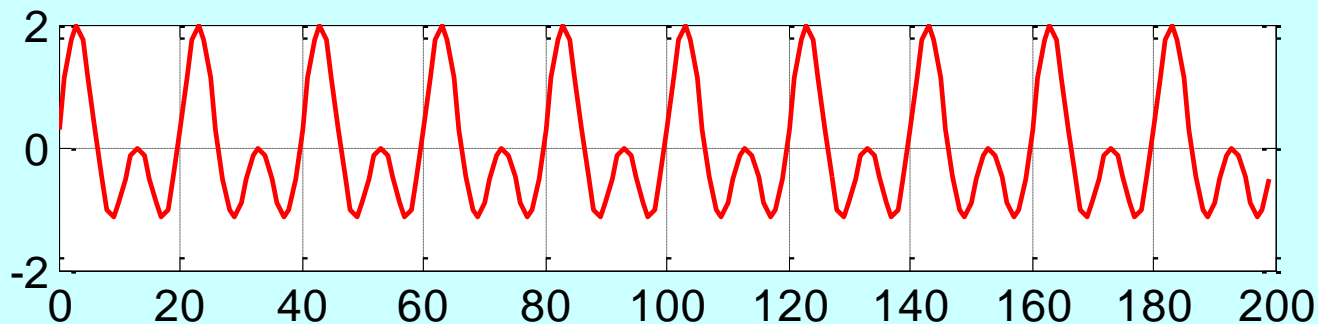
$$y(n) = x(n - k)$$

FIR数字滤波器的线性相位特性

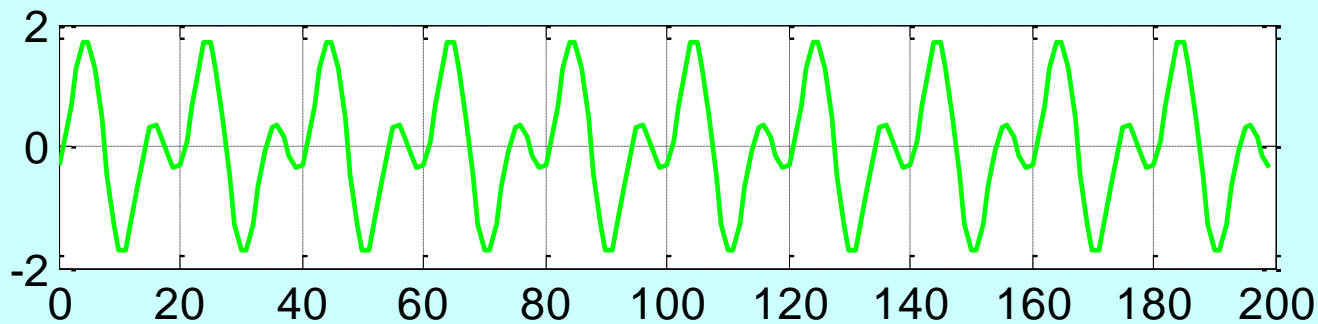
■ 例



输入



线性相位
系统输出



非线性相位
系统输出

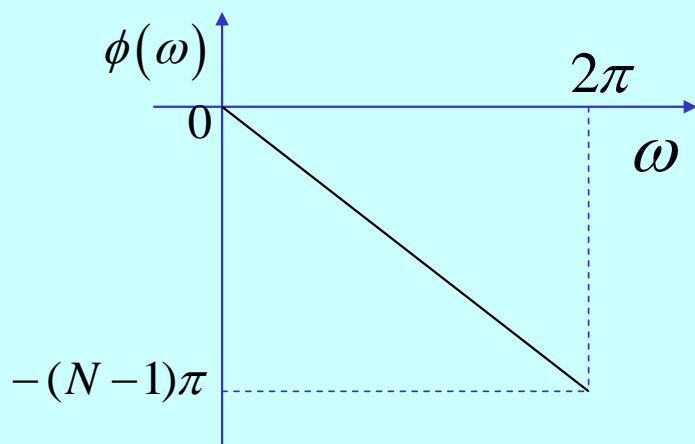
FIR数字滤波器的线性相位特性

FIR系统线性相位的条件

$$h(n) = \pm h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

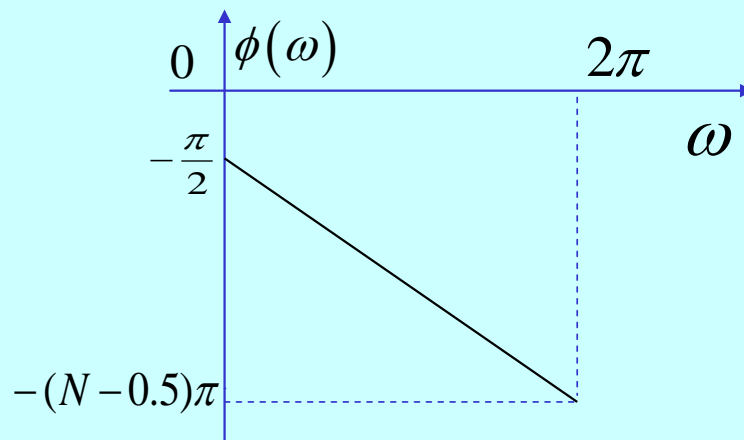
$h(n)$ 偶对称: $h(n) = h(N-1-n)$

$$\phi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$



$h(n)$ 奇对称: $h(n) = -h(N-1-n)$

$$\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega$$



FIR数字滤波器的线性相位特性

- 当 N 为奇数，同时关于 $(N-1)/2$ 偶对称 ($h(n)=h(N-1-n)$)

$$\begin{aligned} \therefore H(\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} h(m)e^{-j\omega(N-1-m)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{j\omega[n-(N-1)]} \end{aligned}$$

$$\therefore H(\omega) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{j\omega[n-(N-1)]} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \{ e^{-j\omega n} + e^{j\omega[n-(N-1)]} \}$$

$$= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[\frac{e^{-j\omega(n-\frac{N-1}{2})} + e^{j\omega(n-\frac{N-1}{2})}}{2} \right]$$

$$\cos\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]$$

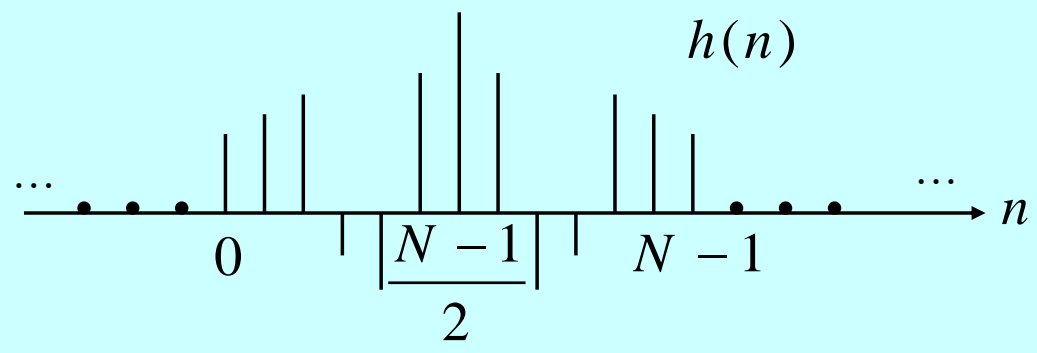
FIR数字滤波器的线性相位特性

- 当 N 为奇数，同时关于 $(N-1)/2$ 偶对称 ($h(n)=h(N-1-n)$)

$$H(\omega) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos[\omega(n - \frac{N-1}{2})] \quad \text{实数}$$

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\phi(\omega)} \rightarrow \phi(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2}$$

- 可见，若 $h(n)$ 关于 $(N-1)/2$ 偶对称，滤波器具有线性相位特性

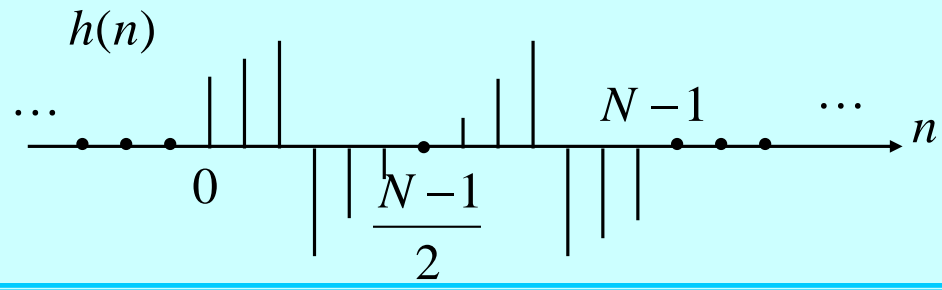


FIR数字滤波器的线性相位特性

- 当 N 为奇数，同时关于 $(N-1)/2$ 奇对称 ($h(n)=-h(N-1-n)$)

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} - \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{j\omega[n-(N-1)]} \right\} \\ &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} (-j) \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[\frac{e^{j\omega(n-\frac{N-1}{2})} - e^{-j\omega(n-\frac{N-1}{2})}}{2j} \right] \\ &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{-\phi(\omega)} \rightarrow \phi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} \omega \quad \text{线性相位特性}$$



FIR数字滤波器的线性相位特性

- N 为偶数，偶对称, $h(n)=h(N-1-n)$

$$\phi(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2}$$

- N 为偶数，奇对称, $h(n) = -h(N-1-n)$

$$\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} \omega$$

- 由上讨论可知，当FIR数字滤波器的抽样响应满足对称特性时，该滤波器具有线性相位特性
- 在设计一般用途的滤波器时， $h(n)$ 多取偶对称，长度 N 为奇数



FIR数字滤波器的窗函数设计法

- 滤波器的基本概念
- IIR滤波器的设计
- FIR数字滤波器的线性相位特性
- FIR数字滤波器的窗函数设计法
- FIR数字滤波器的最优化设计

FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 基本思想

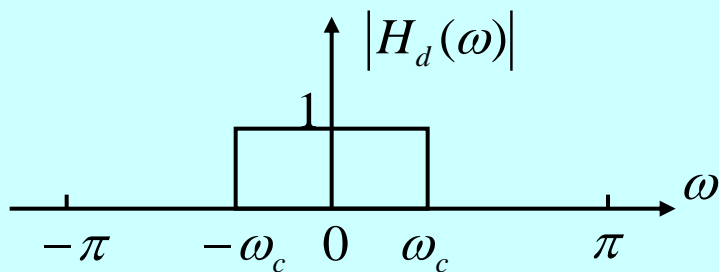
- 窗函数设计法是从单位脉冲响应序列着手，使 $h(n)$ 逼近理想的单位脉冲响应序列 $h_d(n)$ 。我们知道 $h_d(n)$ 可以从理想频响通过付氏反变换获得：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

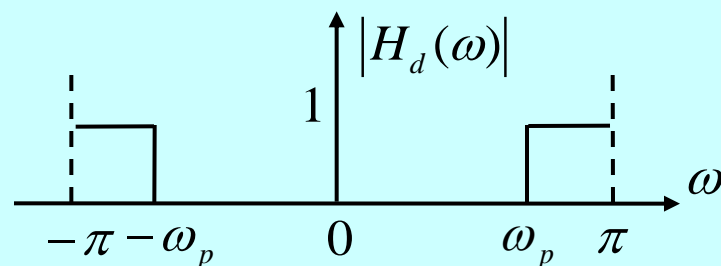
- 但一般来说，理想频响 $H_d(\omega)$ 是分段恒定的，在边界频率处有突变点，所以，这样得到的理想单位脉冲响应 $h_d(n)$ 往往都是无限长序列，而且是非因果的。但FIR的 $h(n)$ 是有限长的，问题是怎样用一个有限长的序列去近似无限长的 $h_d(n)$ ？

FIR数字滤波器的窗函数设计法

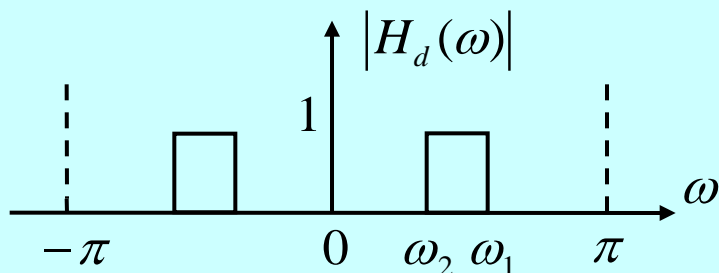
理想频响 $H_d(\omega)$



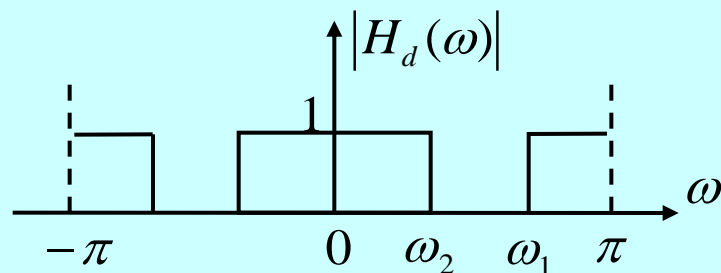
低通



高通



带通



带阻

FIR数字滤波器的窗函数设计法

- 怎样用一个有限长的序列去近似无限长的 $h_d(n)$
 - 最简单的办法是直接截取一段 $h(n)$ 代替 $h_d(n)$ 。这种截取可以形象地想象为 $h(n)$ 是通过一个“窗口”所看到的一段 $h_d(n)$ ，因此， $h(n)$ 也可表达为 $h_d(n)$ 和一个“窗函数”的乘积，即

$$h(n) = w(n) h_d(n)$$

- 在这里窗口函数就是矩形脉冲函数 $R_N(n)$ ，我们下面还可看到，为了改善设计滤波器的特性，窗函数还可以有其它的形式，相当于在矩形窗内对 $h_d(n)$ 作一定的加权处理

FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 设计步骤

$$H_d(\omega) \Rightarrow h_d(n) \Rightarrow h_d(n)w(n) \Rightarrow h(n) \Rightarrow H(\omega)$$

■ 设计实例及存在的问题

以一个截止频率为 ω_c 的线性相位理想低通滤波器为例, 讨论 FIR 的设计中存在的问题

■ (1) 对于给定的理想低通滤波器 $H_d(\omega)$, 计算 $h_d(n)$

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\omega\alpha} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

α : 低通滤波器的延时

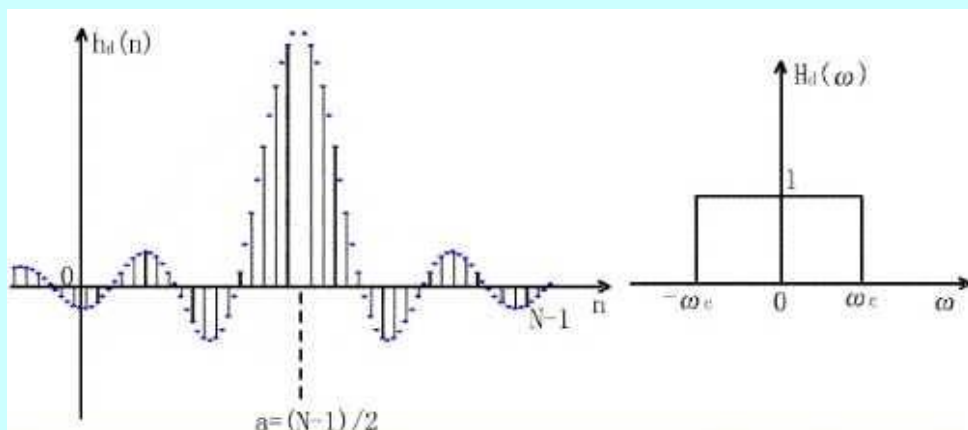
FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 设计实例及存在的问题

- (1) 对于给定的理想低通滤波器 $H_d(\omega)$, 计算 $h_d(n)$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin(\omega_c(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)}$$



理想特性的 $h_d(n)$
是一个以 α 为中心的偶对称的无限长非因果序列

理想特性的 $h_d(n)$ 和 $H_d(\omega)$

FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 设计实例及存在的问题

■ (2) 计算 $h(n)$

截取一段 $n=0 \sim N-1$ 的 $h_d(n)$ 作为 $h(n)$ ，为保证所得到的是线性相位FIR滤波器，下面的公式确定 N 值：

$$\alpha = (N-1)/2$$

$$h(n) = h_d(n)w_R(n) = \begin{cases} h_d(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ 为其它值} \end{cases}$$

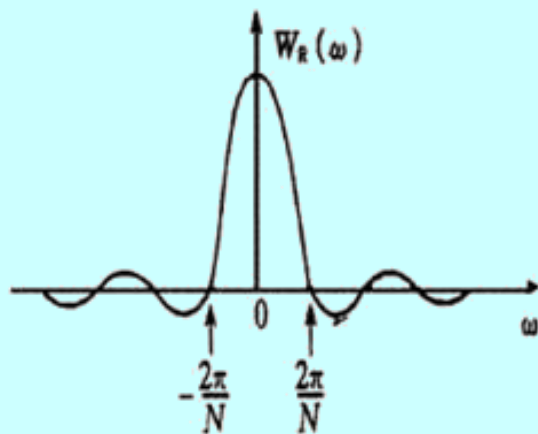
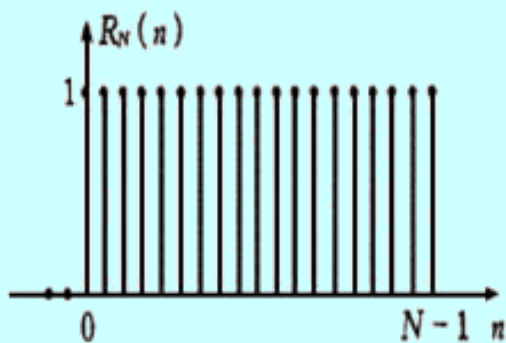
其中 $w_R(n) = R_N(n)$

FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 设计实例及存在的问题

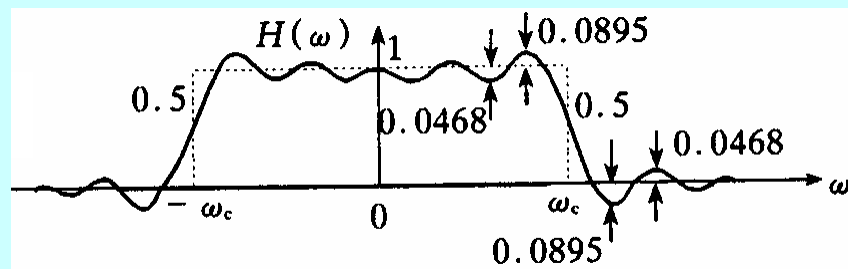
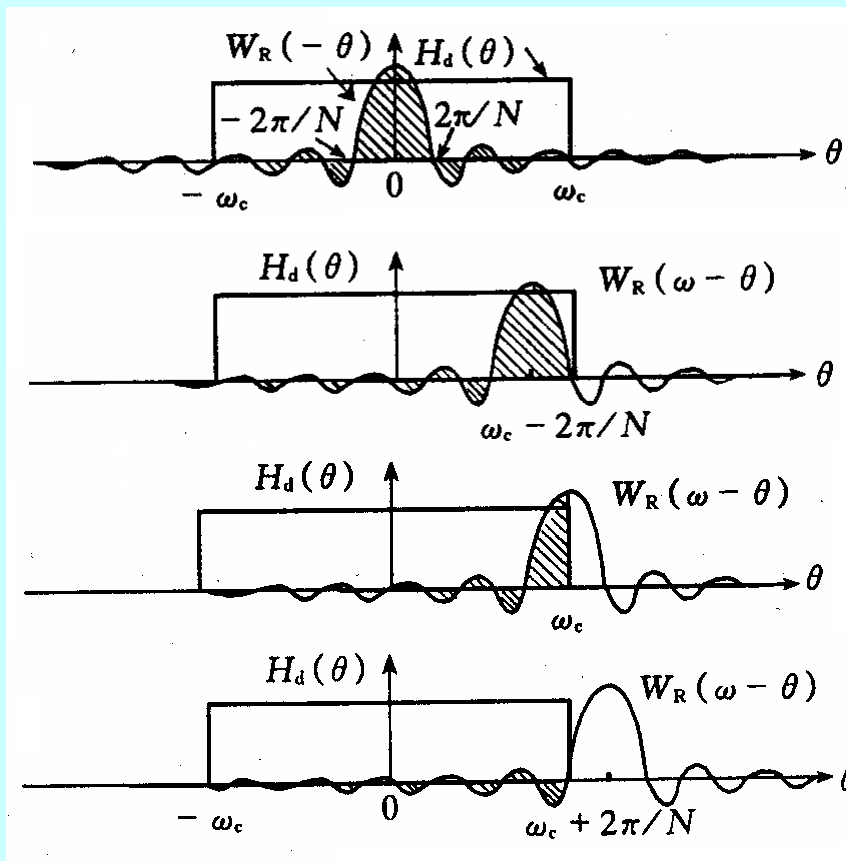
■ (3) 计算 $H(\omega)$:
$$H(\omega) = H_d(\omega) * W_R(\omega)$$

矩形窗函数及其幅度函数



FIR数字滤波器的窗函数设计法

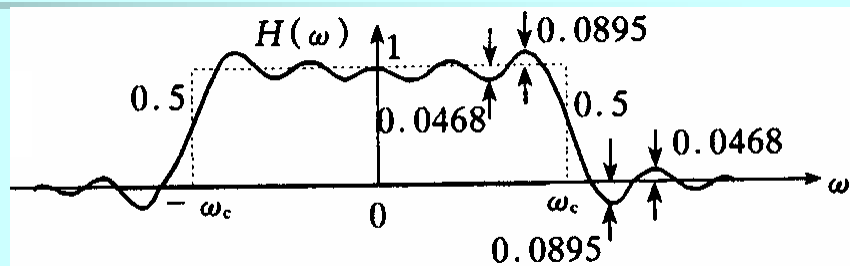
■ 设计实例及存在的问题：卷积过程分析



$$H(\omega) = H_d(\omega) * W_R(\omega)$$

FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 矩形窗对理想特性的影响



- 改变了理想频响的边沿特性，形成过渡带，宽为 $4\pi/N$ ，等于 $W_R(\omega)$ (矩形窗)的主瓣宽度。(决定于窗长)
- 过渡带两旁产生肩峰和余振(带内、带外起伏)，取决于 $W_R(\omega)$ 的旁瓣，旁瓣多，余振多；旁瓣相对值大，肩峰强，与 N 无关。(决定于窗口形状)
- N 增加,过渡带宽减小,肩峰值不变。所以 N 的改变不能改变主瓣与旁瓣的比例关系，只能改变 $W_R(\omega)$ 的绝对值大小和起伏的密度，当 N 增加时，幅值变大，频率轴变密，而最大肩峰永远为8.95%，这种现象称为吉布斯(Gibbs)效应

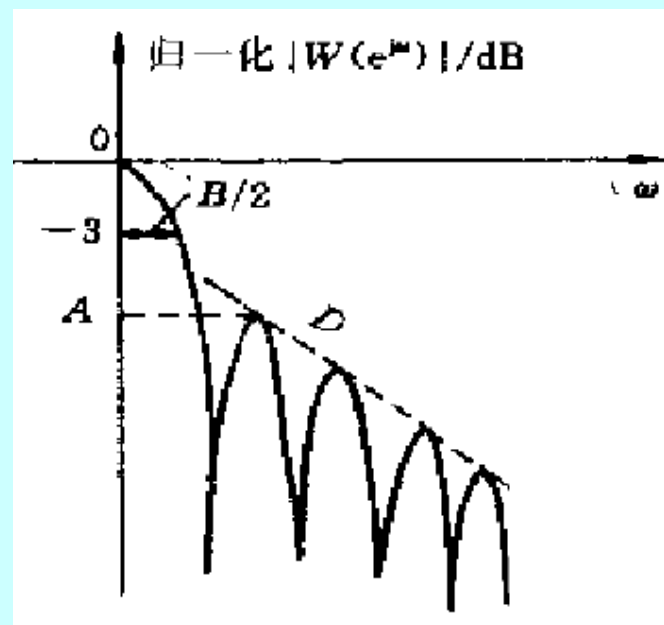
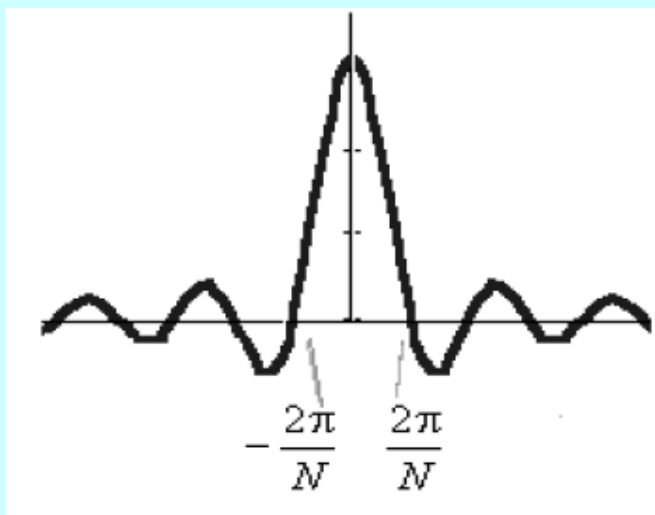
FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 解决的办法

- 肩峰值的大小决定了滤波器通带内的平稳程度和阻带内的衰减，所以对滤波器的性能有很大的影响。为了改善滤波器的特性，必须改变窗函数的形状，窗函数有许多种，但要满足以下两点要求：
 - 窗谱主瓣宽度要窄，以获得较陡的过渡带；
 - 相对于主瓣幅度，旁瓣要尽可能小，使能量尽量集中在主瓣中，这样就可以减小肩峰和余振，以提高阻带衰减和通带平稳性。
- 但实际上这两点不能兼得，一般总是通过增加主瓣宽度来换取对旁瓣的抑制

FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 描述窗函数频谱的指标



- -3dB 带宽 B 或过零点带宽 B_0 ;
- 最大的旁瓣峰值 A ;
- 旁瓣谱峰渐近衰减速率 D (dB/oct)

一个理想的窗函数应该具有最大的 D 和最小的 $B(B_0)$ 和 A

FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 几种常用的窗函数

■ 矩形窗(MATLAB函数 boxcar)

■ 三角窗(bartlett, triang)

$$\omega(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N} & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \\ \omega(N-n) & n = \frac{N}{2}, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$W(e^{j\omega}) = \frac{2}{N} e^{-j(\frac{N}{2}-1)\omega} \left[\frac{\sin(\frac{\omega N}{4})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right]^2$$

$$B_0 = \frac{8\pi}{N} \quad A = -27dB \quad D = -12dB / oct$$

FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 汉宁窗(升余弦窗) (hanning)

$$w(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right] R_N(n)$$

$$= 0.5R_N(n) - 0.25 \left(e^{j\frac{2\pi n}{N}} + e^{-j\frac{2\pi n}{N}} \right) R_N(n)$$

■ 利用付氏变换的移位特性，汉宁窗频谱的幅度函数 $W(\omega)$ 可用矩形窗的幅度函数表示为：

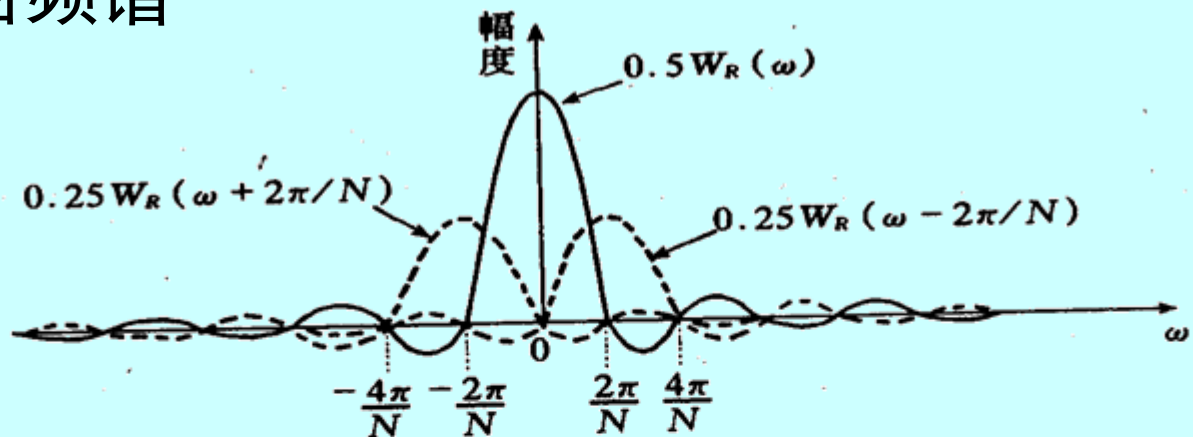
$$W(\omega) = 0.5W_R(\omega) + 0.25 \left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) \right]$$

■ 三部分矩形窗频谱相加，使旁瓣互相抵消，能量集中在主瓣，旁瓣大大减小，主瓣宽度增加1倍

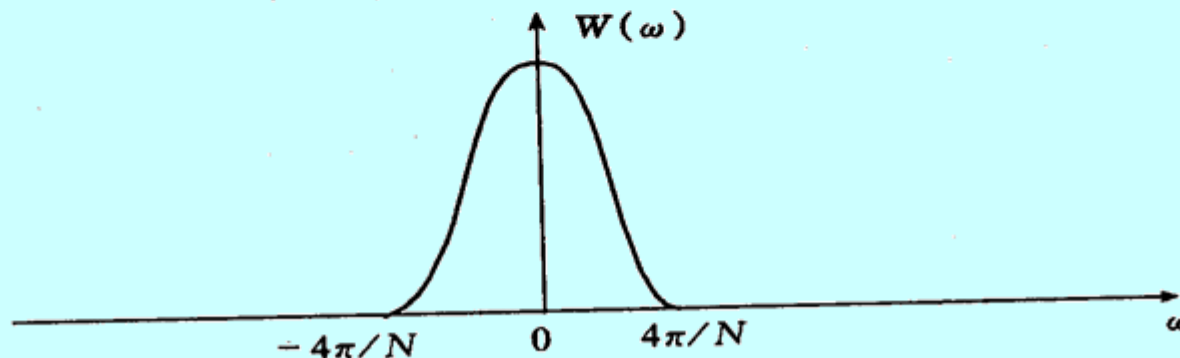
$$B_0 = \frac{8\pi}{N} \quad A = -32dB \quad D = -18dB / oct$$

FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 汉宁窗频谱



(a) 三部分频谱相加



(b) 相加结果

FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 哈明窗(hamming)

$$w(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n)$$

$$W(e^{j\omega}) = 0.5W_R(\omega) + 0.23 \left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) \right]$$

- 哈明窗是对汉宁窗的改进，在主瓣宽度（对应第一零点的宽度）相同的情况下，旁瓣进一步减小，可使99.96%的能量集中在窗谱的主瓣内

$$B_0 = \frac{8\pi}{N} \quad A = -43dB \quad D = -6dB / oct$$

FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 布莱克曼窗(三阶升余弦窗)(blackman)

$$w(n) = \left[0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) \right] R_N(n)$$

$$W(\omega) = 0.42W_R(\omega) + 0.25 \left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) \right] \\ + 0.04 \left[W_R\left(\omega - \frac{4\pi}{N}\right) + W_R\left(\omega + \frac{4\pi}{N}\right) \right]$$

- 增加一个二次谐波余弦分量，可进一步降低旁瓣，但主瓣宽度进一步增加，为 $12\pi/N$

$$B_0 = \frac{12\pi}{N} \quad A = -58dB \quad D = -18dB / oct$$

FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 凯塞窗(kaiser)

$$w(n) = \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left[1-2n/(N-1)\right]^2}\right)}{I_0(\beta)} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

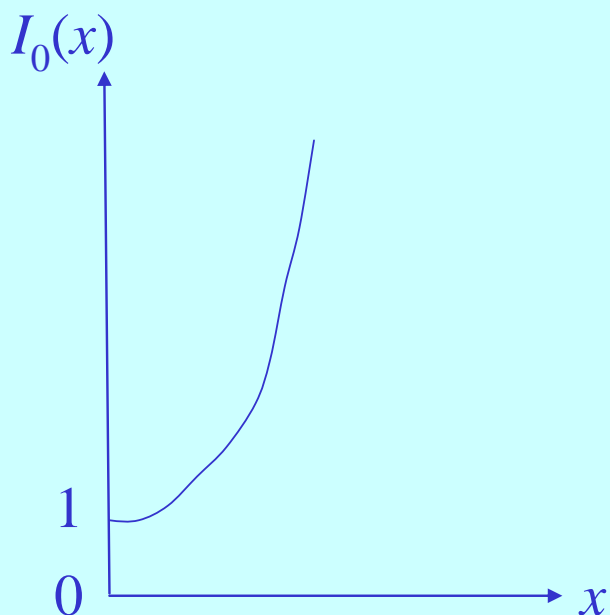
■ $I_0(x)$ 是零阶修正贝塞尔函数，参数 β 可自由选择，决定主瓣宽度与旁瓣衰减。 β 越大， $w(n)$ 窗越窄，其频谱的主瓣变宽，旁瓣变小。一般取 $4 < \beta < 9$

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2$$

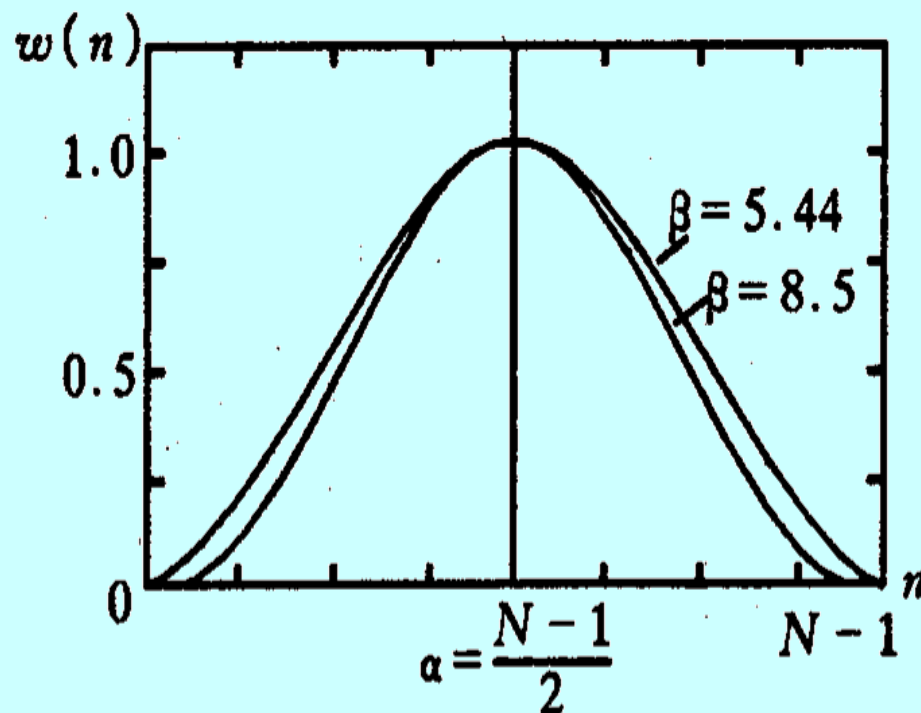
- $\beta=0$ 为矩形窗
- $\beta=5.44$ 接近哈明窗
- $\beta=8.5$ 接近布莱克曼窗

FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 凯塞窗(kaiser)



零阶修正贝塞尔函数

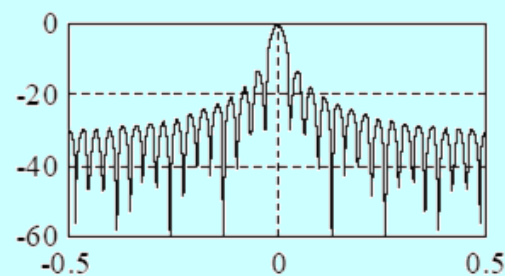
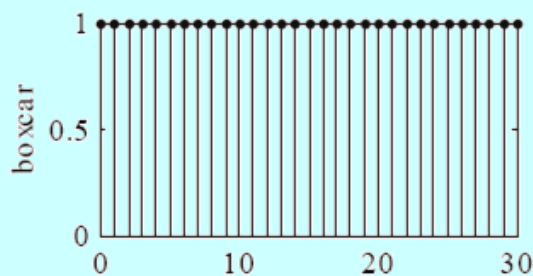


凯塞窗函数

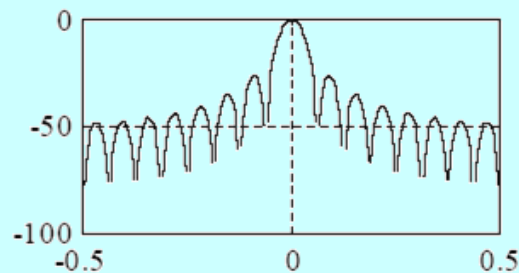
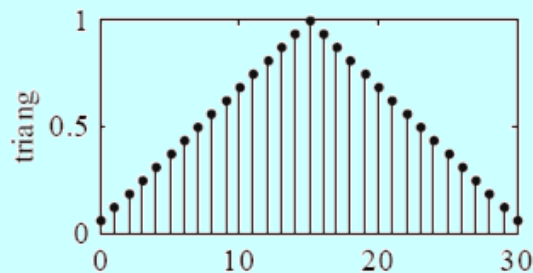
FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 几种窗函数时域图形及归一化对数幅频曲线

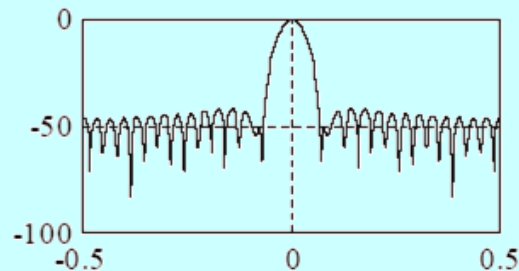
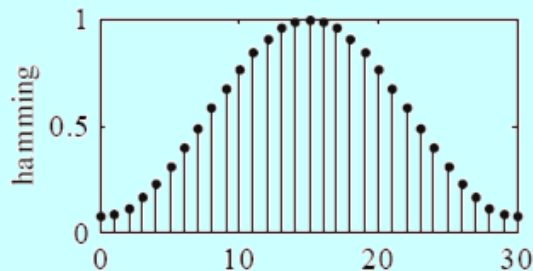
■ 矩形窗



■ 三角窗



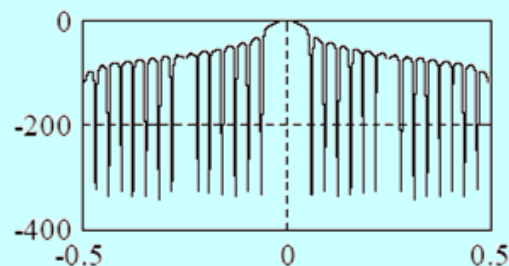
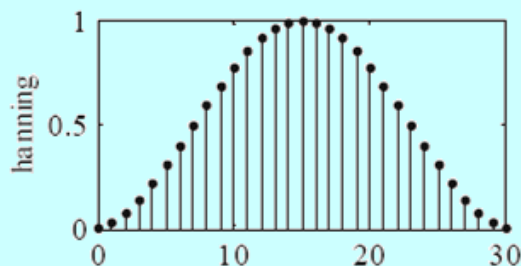
■ 哈明窗



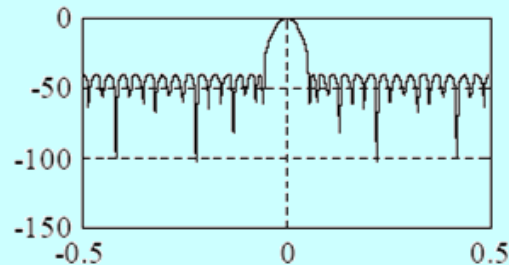
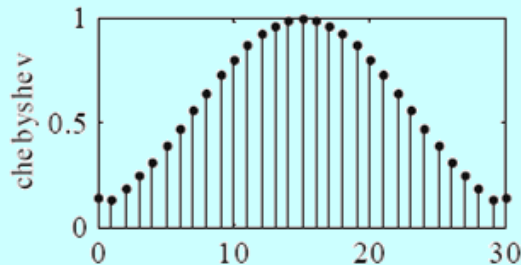
FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 几种窗函数时域图形及归一化对数幅频曲线

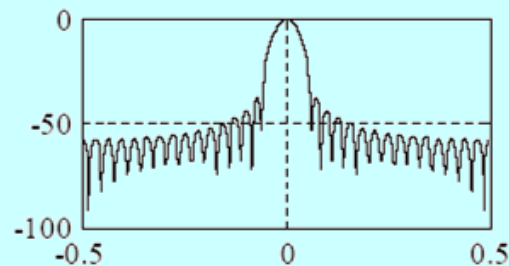
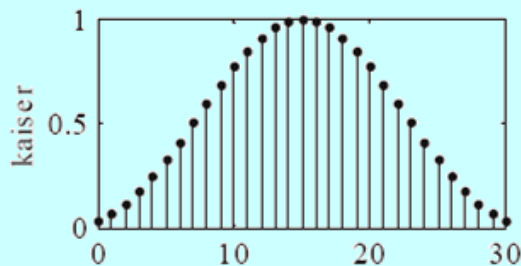
■ 汉宁窗



■ 切比雪夫窗



■ 凯塞窗



FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 几种窗函数基本参数的比较

| 窗函数 | 主瓣宽度(B_0) | 旁瓣峰值 幅度(dB) | 阻带最小 衰减(dB) |
|--------------------------|---------------|----------------|----------------|
| 矩形窗 | $4\pi/N$ | -13 | -21 |
| 三角窗 | $8\pi/N$ | -27 | -25 |
| 汉宁窗 | $8\pi/N$ | -32 | -44 |
| 哈明窗 | $8\pi/N$ | -43 | -53 |
| 布莱克曼窗 | $12\pi/N$ | -58 | -74 |
| 凯塞窗 ($\beta=7.865$) | $10\pi/N$ | -58 | -80 |

用矩形窗设计的滤波器主瓣宽度最窄，但阻带最小衰减也最小，仅-21dB；布莱克曼窗设计的阻带最小衰减最大，达-74dB，但主瓣宽度最宽，约为矩形窗的三倍。

FIR数字滤波器的窗函数设计法

- 例 用凯塞窗设计一FIR低通滤波器，低通边界频率 $\omega_p = 0.3\pi$ ，阻带边界频率 $\omega_s = 0.5\pi$ ，阻带衰减不小于50dB

要用到的基本关系式：

$$w(n) = \frac{I_o\left(\beta\sqrt{1-\left[1-2n/(N-1)\right]^2}\right)}{I_o(\beta)} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

零阶贝塞尔函数：

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(At - 8.7), & At \geq 50dB \\ 0.5842(At - 21)^{0.4} + 0.07886(At - 21), & 21dB < At < 50dB \\ 0, & At \leq 21dB \end{cases}$$

$$N \approx \frac{At - 8}{2.286\Delta\omega}$$

$\Delta\omega$ 过渡带宽； At 为阻带最小衰减



FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 例 用凯塞窗设计一FIR低通滤波器，低通边界频率 $\omega_p = 0.3\pi$ ，阻带边界频率 $\omega_s = 0.5\pi$ ，阻带衰减不小于50dB

首先求解 $h_d(n)$

根据指标要求其边界频率应为

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} = 0.4\pi$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \begin{cases} \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}, & n \neq \alpha \\ \omega_c / \pi & n = \alpha \end{cases}$$

然后确定 β, N 参数

$$\beta = 0.1102(50 - 8.7) = 4.55$$

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.2\pi \quad N = \frac{50 - 8}{2.285 \times 0.2\pi} \approx 30$$

FIR数字滤波器的窗函数设计法

MATLAB代码

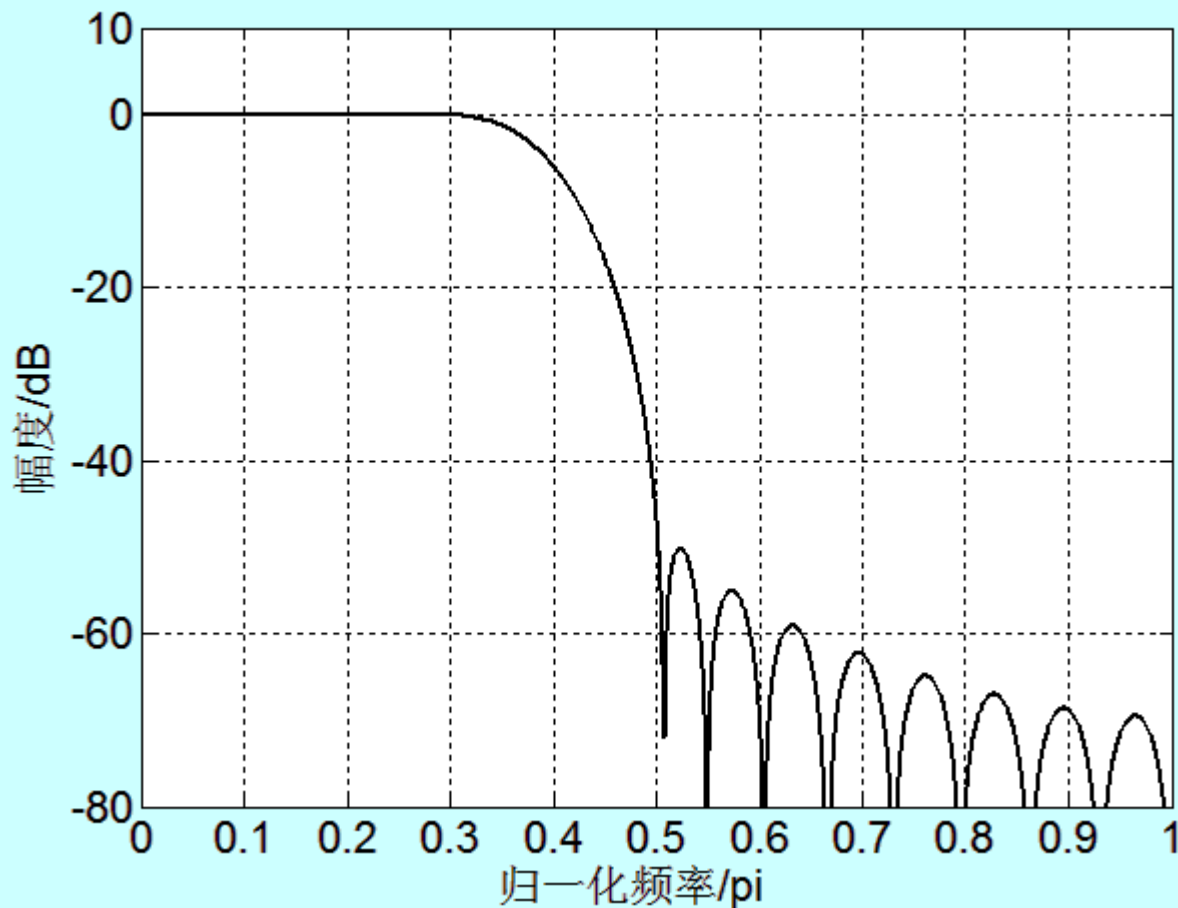
```
N = 30; BTA = 4.55;  
wn = kaiser (N,BTA);  
n=0:1:N-1;  
alfa=(N-1)/2;  
for i = 1:1:N  
    if n(i) == alfa  
        hd(i) = 0.4;  
    else  
        hd(i)=sin(0.4*pi*(n(i)-  
        alfa))./(pi*(n(i)-alfa));  
    end  
end
```

%续

```
h=hd.*wn';  
[h1,w1]=freqz(h,1);  
plot(w1/pi,20*log10(abs(h1)));  
axis([0,1,-80,10]);  
grid;  
xlabel('归一化频率/pi')  
ylabel('幅度/dB')
```

FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 凯塞窗设计举例



FIR数字滤波器的窗函数设计法

- 例 用哈明窗设计一FIR低通滤波器，低通边界频率 $\omega_p = 0.3\pi$ ，阻带边界频率 $\omega_s = 0.5\pi$ ，阻带衰减不小于50dB

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

■ MATLAB代码

```
N=1; flag=0; %续
while (flag>-50) figure(1);
    判断阻带衰减是否大于50dB plot(n,wn);
    N = N + 1; figure(2);
end plot(w1/pi,HdB);
```

FIR数字滤波器的窗函数设计法

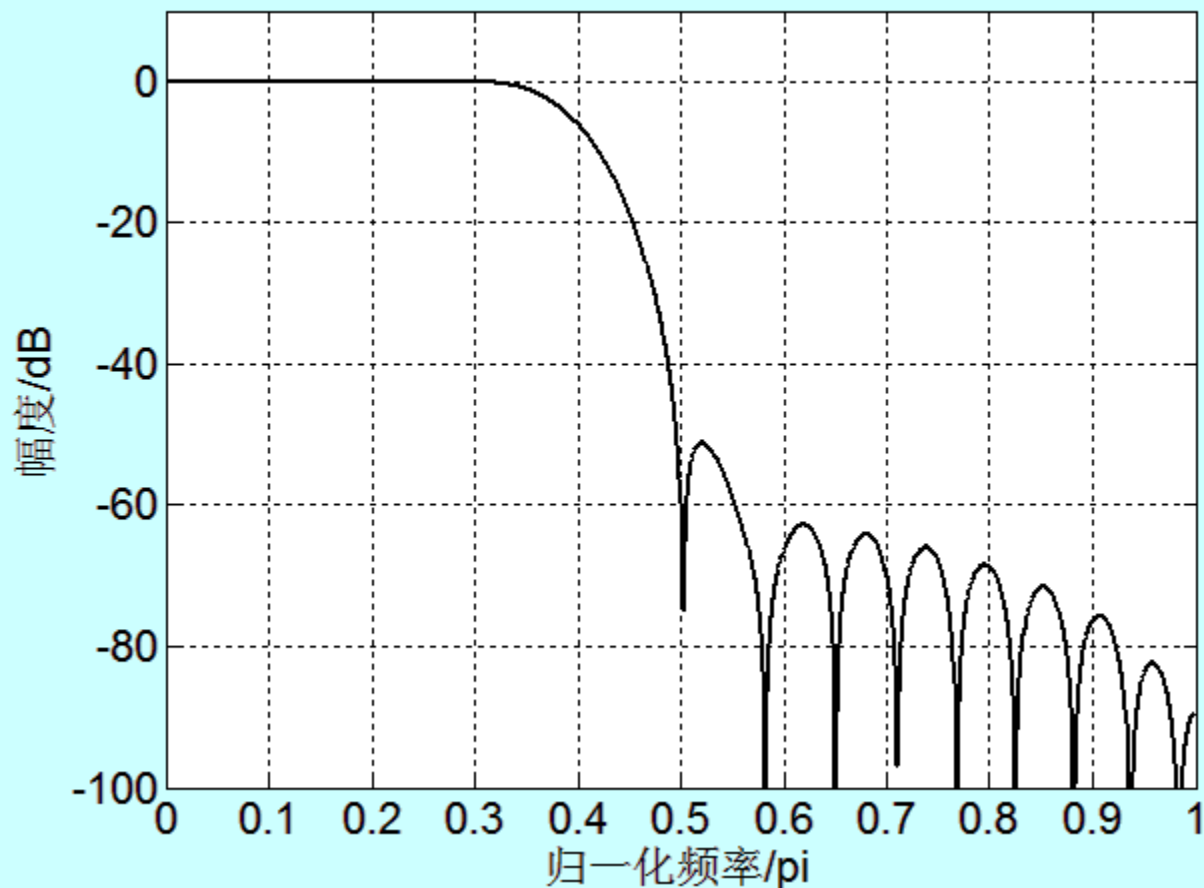
循环体内的代码

```
while (flag>-50)
    N=N+1;    n=0:1:N-1;    wn=0.54-0.46*cos(2*pi*n/(N-1));
    alfa=(N-1)/2;
    for k=1:N
        if(k-1==alfa)
            hd(k)=0.4;
        else
            hd(k)=sin(0.4*pi*(k-1-alfa))./(pi*(k-1-alfa));
        end
    end
    h=hd.*wn;
    [h1,w1]=freqz(h,1,1000);    HdB=20*log10(abs(h1));
    flag=max(HdB(500:1000));
end
```


FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 哈明窗设计举例

$N = 35$



FIR数字滤波器的窗函数设计法

■ 小结

- 由于本设计方法是选取某种好的窗函数对 $h_d(n)$ 予以截短来得到 $h(n)$ ，所以该设计方法称为“窗函数法”，其优点是设计简单，有闭合的公式可用，性能及参数都有表格资料可查，计算程序简单，较为实用
- 缺点是当 $H(\omega)$ 较为复杂时， $h_d(n)$ 不容易由反付里叶变换求得；边界频率因为加窗的影响而不易控制，也不能精确给定在通带和阻带内的衰减，一般是仅给出通带截止频率；其它参数靠 $h(n)$ 的长度 N 及所用窗函数的性质来决定，设计时要通过不断地变化 N 来检查是否达到希望的技术要求
- 设计其它形式的DF时，只要改变积分的上、下限即可



FIR数字滤波器的最优化设计

- 滤波器的基本概念
- IIR滤波器的设计
- FIR数字滤波器的线性相位特性
- FIR数字滤波器的窗函数设计法
- FIR数字滤波器的最优化设计

FIR数字滤波器的最优化设计

■ 引言

- 前面介绍的滤波器设计的窗函数法, 是对给定理想频率特性 $H_d(\omega)$ 的逼近; 窗函数法是先给出逼近方法, 所需变量, 然后再讨论其逼近特性
- 如果反过来要求在某种准则下设计滤波器各参数, 以获取最优的结果, 这就引出了最优化设计的概念, 最优化设计一般需要大量的计算, 所以一般需要依靠计算机进行辅助设计
- 最优化设计的前提是最优准则的确定, 在FIR滤波器最优化设计中, 常用的准则有
 - ①均方误差最小化准则
 - ②最大误差最小化准则

FIR数字滤波器的最优化设计

■ 均方误差最小化准则

- 若以 $E(\omega)$ 表示逼近误差，则 $E(\omega) = H_d(\omega) - H(\omega)$
那么均方误差为：

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(\omega) - H(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(\omega)|^2 d\omega$$

- 均方误差最小准则就是选择一组采样值，以使均方误差 $\varepsilon^2 = \min$ ，这一方法注重的是在整个 $-\pi \sim \pi$ 频率区间内总误差的全局最小，但不能保证局部频率点的性能，有些频率点可能会有较大的误差

FIR数字滤波器的最优化设计

■ 最大误差最小化准则

- 表达形式为 $\max |E(\omega)| = \min \quad \omega \in F$
- 其中 F 是根据要求预先给定的一个频率取值范围，可以是通带，也可以是阻带。最佳一致逼近即选择 N 个频率采样值(或时域 $h(n)$ 值)，在给定频带范围内使频响的最大逼近误差达到最小
- 最大误差最小化准则或称为最佳一致逼近准则，等波纹逼近准则
- 优点：可保证局部频率点的性能也是最优的，误差分布均匀，相同指标下，可用最少的阶数达到最佳化

FIR数字滤波器的最优化设计

■ 等波纹逼近法设计滤波器

■ 需要确定五个参数

滤波器 $h(n)$ 的长度 N

通带截止频率 ω_p

阻带截止频率 ω_s

通带纹波峰值 δ_1

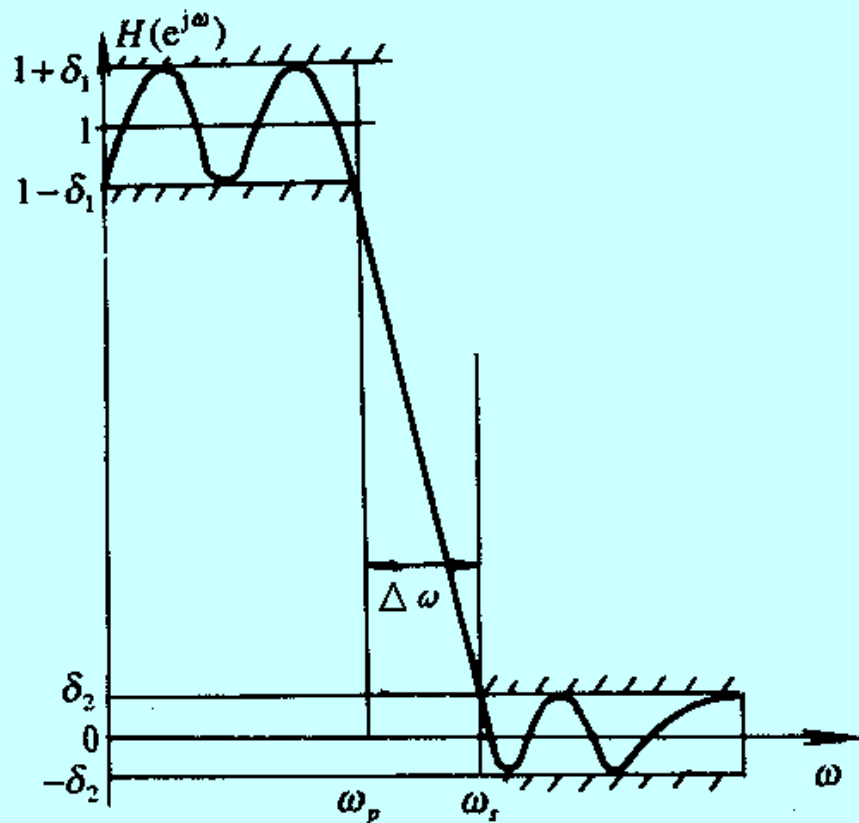
阻带纹波峰值 δ_2

■ 通带内允许的最大衰减

$$\alpha_p = -20\lg|1 - \delta_1| \text{ dB}$$

■ 阻带内允许的最小衰减

$$\alpha_s = -20\lg|\delta_2| \text{ dB}$$



FIR数字滤波器的最优化设计

■ 等波纹逼近法设计滤波器

■ 按前图所示的误差容限设计低通滤波器，就是说要在通带 $0 \leq \omega \leq \omega_p$ 内以最大误差 δ_1 逼近1，在阻带 $\omega_s \leq \omega \leq \pi$ 内以最大误差 δ_2 逼近零

■ 同时确定前述五个参数较困难，常用的两种逼近方法：

■ 1) 给定 N 、 δ_1 、 δ_2 ，以 ω_p 和 ω_s 为变量

缺点：边界频率不能精确确定

■ 2) 给定 N 、 ω_p 和 ω_s ，以 δ_1 和 δ_2 为变量，通过迭代运算，使逼近误差 δ_1 和 δ_2 最小，并确定 $h(n)$ ——切比雪夫最佳一致逼近

优点：能准确地指定通带和阻带边界频率

切比雪夫最佳一致逼近

■ 误差函数

■ 定义逼近误差函数

$$E(\omega) = W(\omega)[H_d(\omega) - H(\omega)]$$

- $E(\omega)$ 为所设计的滤波器与理想滤波器的幅频特性在通带和阻带内的误差值
- $W(\omega)$ 是已知的权函数，在不同频带可取不同的值，
- $H(\omega)$ 所要设计的滤波器的幅频特性
- $H_d(\omega)$ 理想滤波器的幅频特性

切比雪夫最佳一致逼近

■ 误差函数

- 例如，希望在固定 N, ω_p, ω_s 的情况下逼近一个低通滤波器，这时有

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases} \quad W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{k} & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 1 & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases} \quad \delta_1 = k\delta_2$$

- 对于FIR滤波器单位脉冲响应 $h(n)$ ，当长度 N 为奇数，偶对称时：

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^M a(n) \cos(\omega n) \quad M = \frac{N-1}{2}$$

$$a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right), a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right), n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$

切比雪夫最佳一致逼近

■ 误差函数

■ 在上述情况下，误差函数表达式为：

$$E(\omega) = W(\omega)[H_d(\omega) - \sum_{n=0}^M a(n) \cos(\omega n)] \quad (1)$$

■ 切比雪夫逼近问题变为，寻求一组系数 $a(n)$, $n = 0, 1, \dots, M$, 使逼近误差的最大值达到最小，即

$$\max |E(\omega)| = \min$$

$$0 \leq \omega \leq \omega_p \quad \omega_s \leq \omega \leq \pi$$

切比雪夫最佳一致逼近

■ 交替定理（最佳逼近定理）

- 令 F 表示闭区间 $0 \leq \omega \leq \pi$ 的任意闭子集，为了使 $H(\omega)$ 在 F 上唯一最佳地逼近于 $H_d(\omega)$ ，其充分必要条件是误差函数在 F 上至少应有 $(M+2)$ 次“交替”，即

$$E(\omega_i) = -E(\omega_{i-1}) = \max |E(\omega)|$$

$$\omega_0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_{M+1}, \quad \omega_i \in F$$

- $E(\omega)$ 至少有 $M+2$ 个极值，且极值正负相间，具有等波纹的性质

■ 雷米兹(Remez)算法给出了求解切比雪夫最佳一致逼近问题的方法

与本章内容有关的MATLAB文件

■ 窗函数产生

- boxcar(矩形窗)
- bartlett(三角窗)(两端为零)
- triang(三角窗)(两端不为零)
- hann(汉宁窗)(两端为零)
- hanning(汉宁窗)(两端不为零)
- hamming(哈明窗)
- blackman(布莱克曼窗)
- kaiser(凯赛窗)
- chebwin(切比雪夫窗)

example



与本章内容有关的MATLAB文件

- **fir1.m** 用“窗函数法”设计FIR DF
- 调用格式：
 - (1) $b = \text{fir1}(N, W_n, \text{window});$
 - (2) $b = \text{fir1}(N, W_n, \text{'high'}, \text{window});$
 - (3) $b = \text{fir1}(N, W_n, \text{'stop'}, \text{window});$
- N : 阶次, 滤波器长度为 $N+1$;
- W_n : 通带截止频率, 其值在 $0 \sim 1$ 之间, 1 对应 $F_s/2$;
- b : 滤波器系数
- 对格式(1), 若 W_n 为标量, 则设计低通滤波器; 若 W_n 是 1×2 的向量, 则用来设计带通滤波器; 若 W_n 是 $1 \times L$ 的向量, 则可用来设计 L 带滤波器。这时, 格式(1)要改为: $b = \text{fir1}(N, W_n, \text{'DC-1'}),$ 或 $b = \text{fir1}(N, W_n, \text{'DC-0'}).$ 前者保证第一个带为通带, 后者保证第一个带为阻带。
- 格式(2)用来设计高通滤波器;(3)用来设计带阻滤波器。
- 在上述所有格式中, 若不指定窗函数的类型, fir1自动选择Hamming窗。

example



与本章内容有关的MATLAB文件

■ fir2.m

- 采用“窗函数法”设计具有任意幅频相应的FIR 数字滤波器。
- 其调用格式是： $b = \text{fir2}(N, F, M);$
- F 是频率向量，其值在 $0 \sim 1$ 之间， M 是和 F 相对应的所希望的幅频相应。如同 fir1 ，缺省时自动选用Hamming窗

■ 例

- 设计一多带滤波器，要求理想幅频响应在归一化频率 $0.2 \sim 0.3$ ， $0.6 \sim 0.8$ 之间为1，其余为0



与本章内容有关的MATLAB文件

- `remez.m` 设计Chebyshev最佳一致逼近FIR滤波器、Hilbert变换器和差分器。其调用格式是：
 - (1) `b=remez(N, F, A);`
 - (2) `b=remez(N, F, A, W);`
 - (3) `b=remez(N,F,A,W,'Hilbert');`
 - (4) `b=remez(N, F, A,W, 'differentiator')`
- N 是给定的滤波器的阶次， b 是设计的滤波器的系数，其长度为 $N+1$ ； F 是频率向量， A 是对应 F 的各频段上的理想幅频响应， W 是各频段上的加权向量。需要指出的是，若 b 的长度为偶数，设计高通和带阻滤波器时有可能出现错误，因此，最好保证 b 的长度为奇数，也即 N 应为偶数

- 例 利用Chebyshev最佳一致逼近方法，设计一个低通FIR滤波器，要求通带边界频率 $\omega_p = 0.6\pi$ ，阻带边界 $\omega_s = 0.7\pi$



- 例 利用Chebyshev最佳一致逼近方法设计一个多阻带陷波器，以去除工频信号(50Hz)及二次、三次谐波(100Hz及150Hz)的干扰，已知采样频率为500Hz



与本章内容有关的MATLAB文件

- remezord.m 用来确定在用Chebyshev最佳一致逼近设计FIR滤波器时所需要的滤波器阶次。
- 调用格式是： $[N, Fo, Ao, W] = \text{remezord}(F, A, \text{DEV}, Fs)$ 。
- F、A的含意同文件remez，DEV是通带和阻带上的偏差；输出的是适合要求的滤波器阶次N、频率向量Fo、幅度向量Ao和加权向量W。
 - 若设计者事先不能确定要设计的滤波器的阶次，那调用remezord后，就可利用这一族参数调用remez，即 $b = \text{remez}(N, Fo, Ao, W)$ ，从而设计出所需要滤波器。因此，remez和remezord常结合起来使用。
 - 需要说明的是，remezord给出的阶次N有可能偏低，这时适当增加N即可；另外，最好判断一下，若N为奇数，就令其加一，使其变为偶数，这样b的长度为奇数。

- 例 利用Chebyshev最佳一致逼近方法，设计一个低通FIR滤波器，要求通带边界频率 $\omega_p = 0.6\pi$ ，阻带边界 $\omega_s = 0.7\pi$ ，通带内允许的最大衰减 $\alpha_p = 0.4916$ dB，阻带内允许的最小衰减 $\alpha_s = 44.7$ dB



- 例 利用Chebyshev最佳一致逼近方法设计一个多阻带陷波器，以去除工频信号(50Hz)及二次、三次谐波(100Hz及150Hz)的干扰，已知采样频率为500Hz，要求通带内允许的最大衰减 $\alpha_p = 0.153$ dB，阻带内允许的最小衰减 $\alpha_s = 16.92$ dB



The End

谢谢!

请批评指正

