第 1 章补充作业 3 答案

1. （数学规划）设 f_1 和 f_2 是非空凸集 $S \subset R^n$ 上的凸函数，则 $\max\{f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})\}$ 也是 S 上的凸函数。

证明：令 $f(\boldsymbol{x}) = \max\{f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})\}$。任取 $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in S$，$\lambda \in (0,1)$，则 $\lambda\boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2 \in S$，不妨设

$$f_1(\lambda\boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2) \geq f_2(\lambda\boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2)$$

则

$$\begin{aligned}
& f(\lambda\boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2) = \max\{f_1(\lambda\boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2, f_2(\lambda\boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2\} \\
& = f_1(\lambda\boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2) \\
& \leq \lambda f_1(\boldsymbol{x}^1) + (1-\lambda) f_1(\boldsymbol{x}^2) \\
& \leq \lambda f(\boldsymbol{x}^1) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}^2)
\end{aligned}$$

因此 $f(\boldsymbol{x}) = \max\{f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})\}$ 是 S 上的凸函数。

2. （最优化）设 f_1 和 f_2 是非空凸集 $S \subset R^n$ 上的凸函数，则 $\max\{f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})\}$ 也是 S 上的凸函数。

证明：令 $f(\boldsymbol{x}) = \max\{f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})\}$。任取 $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in S$，$\lambda \in (0,1)$，则 $\lambda\boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2 \in S$，不妨设

$$f_1(\lambda\boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2) \geq f_2(\lambda\boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2)$$

则

$$\begin{aligned}
& f(\lambda\boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2) = \max\{f_1(\lambda\boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2, f_2(\lambda\boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2\} \\
& = f_1(\lambda\boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2) \\
& \leq \lambda f_1(\boldsymbol{x}^1) + (1-\lambda) f_1(\boldsymbol{x}^2) \\
& \leq \lambda f(\boldsymbol{x}^1) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}^2)
\end{aligned}$$

因此 $f(\boldsymbol{x}) = \max\{f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})\}$ 是 S 上的凸函数。