



上海交通大学

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY



# ME6011 弹性塑性力学

讲课教师： 沈彬 博士

办公室： 机械A楼720室

电话： 021-34206556

13818945392

E-Mail: [binshen@sjtu.edu.cn](mailto:binshen@sjtu.edu.cn)



## 第三章 弹性与塑性应力应变关系

- 简单应力状态下的基本试验
- 弹性力学中常用的简化力学模型
- 广义胡克定律
- 特雷斯卡和米泽斯屈服条件
- 塑性应力应变关系
- 德鲁克公设



# 特雷斯卡和米泽斯屈服条件

研究塑性变形和作用力之间的关系及在塑性变形后物体内部应力分布规律的学科称为塑性力学。

塑性力学问题的特点（4点）：

- 应力与应变之间的关系（本构关系）是非线性的，其非线性性质与具体材料有关；
- 应力与应变之间没有一一对应的关系，它与加载历史有关；
- 在变形体中有弹性变形区和塑性变形区，而在求解问题时需要找出弹性区和塑性区的分界线；
- 需要区分是加载过程还是卸载过程，在塑性区，加载过程中要使用塑性的应力应变关系，而卸载过程中则应使用广义胡克定律。



# 屈服条件概念

## 1). 单向拉压应力状态的屈服条件

$$\sigma = \sigma_s$$

## 2). 复杂应力状态的屈服函数

$$F(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = 0$$

一点的应力状态由6个分量确定，不能选取某一个应力分量的数值作为判断材料是否进入塑性状态的标准。

### 应力空间、应变空间：

分别以应力分量和应变分量为坐标轴组成的空间，空间内的任一点代表一个应力状态或应变状态。

### 应力路径、应变路径：

应力和应变的变化在相应空间绘出的曲线。

### 屈服面：

应力空间内各屈服点连接成的，区分弹性和塑性状态的分界面。



# 屈服条件概念

## 3). 屈服条件/屈服函数 (描述屈服面的数学表达式)

$F(\sigma_{ij}) < 0$ : 材料处于弹性状态

$F(\sigma_{ij}) = 0$ : 材料开始屈服进入塑性状态

**各向同性材料:**

屈服条件应与方向无关，故屈服条件可用三个主应力表示：

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$$

静水压力部分对塑性变形的影响可忽略，故屈服条件也可用主偏量应力表示：

$$F(S_1, S_2, S_3) = 0$$



# 屈服条件的发展

伽利略 (Galileo) :

材料进入塑性状态由最大主应力引起;

圣维南 (Saint-Venant) :

最大的主应变能使材料进入塑性状态;

贝尔特拉密 (Beltrami) :

弹性能达到某一极限值。



**被实验推翻**

原因：各向等压状态，压应力可以远远超过材料屈服极限，但并未进入塑性状态



**与实验结果不一致**

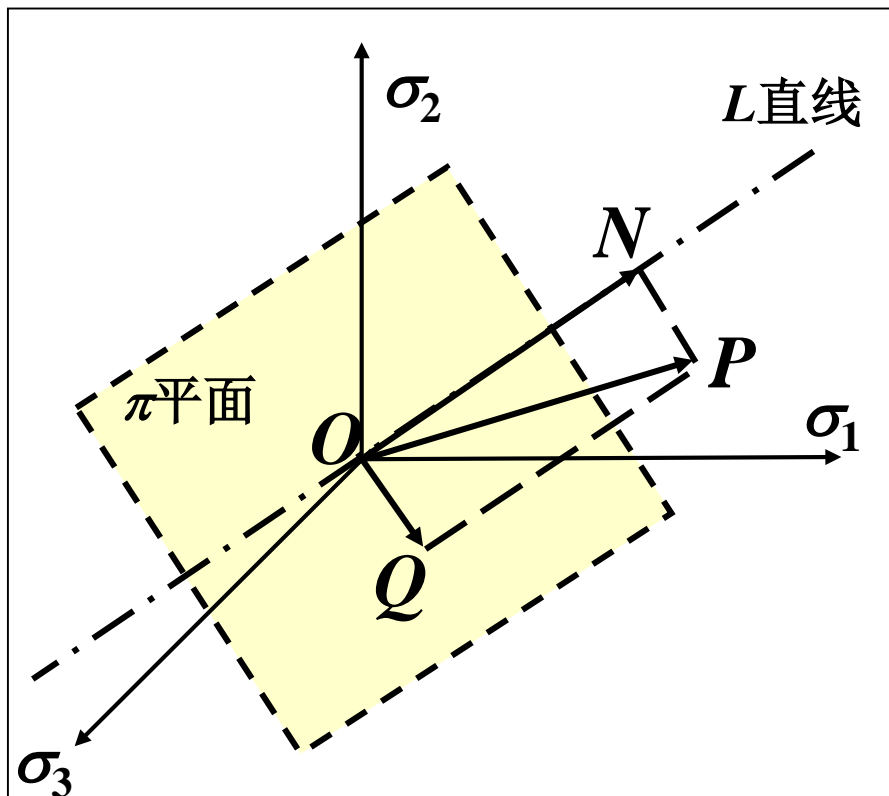
原因：将形状变形能和体积变形能混在一起考虑

1864年，特雷斯卡 (Tresca)，法国——最大剪应力

1913年，米泽斯 (Von-Mises)，德国——最大变形能



# 主应力空间



## L直线:

在主应力空间内，过原点且和三个坐标轴夹角相等的直线。

方程:  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

## $\pi$ 平面:

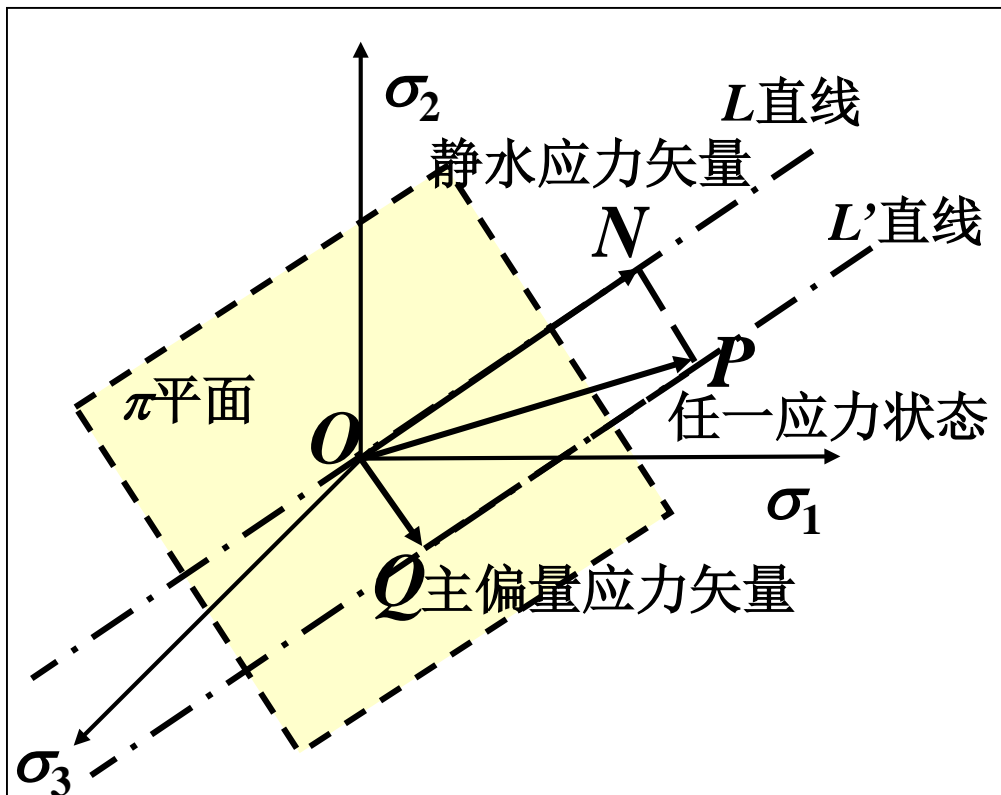
主应力空间内过原点且和L直线垂直的平面。

方程:  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$

$\pi$ 平面上任意法线上的个点所代表的应力状态，其应力偏量相同，仅静水压力不同，因此如果该线上的某一点满足屈服条件，那么，该线上的所有点均满足屈服条件。



# 主应力空间



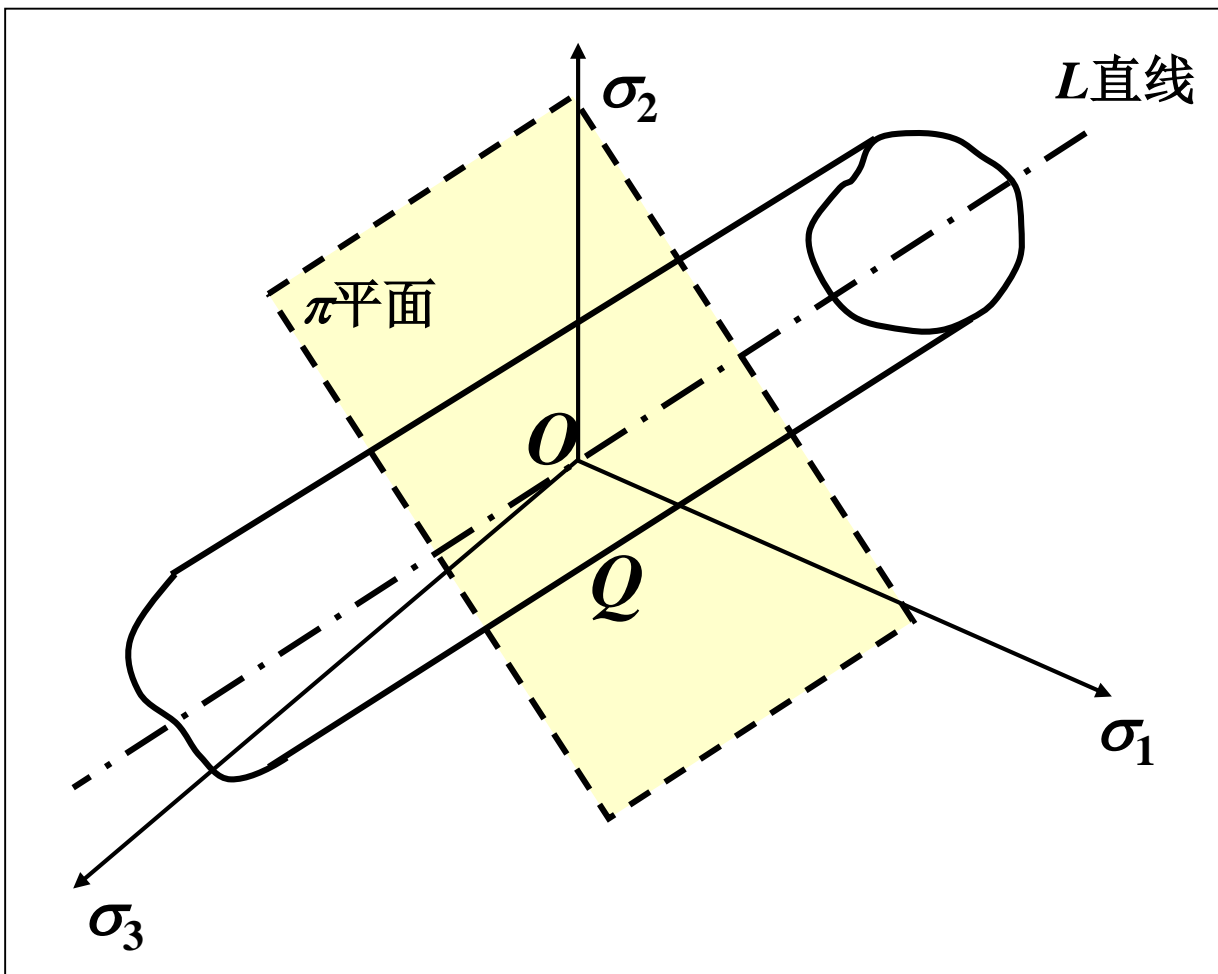
- 主应力空间中一点 $P$ ，将矢量 $OP$ 分解为静水应力矢量 $ON$ 和主偏量应力矢量 $OQ$ 。
- 屈服与否与静水应力矢量无关，就是说与 $ON$ 长度无关，只与主偏量应力矢量有关。
- 当 $P$ 达到屈服时， $L'$ 上任一点都屈服，说明屈服面是个柱面，母线 $L'$ 与 $L$ 平行且垂直于 $\pi$ 平面。

一个应力状态是否会进入屈服只取决于它在 $\pi$ 平面上的投影，屈服曲面与 $\pi$ 平面的交线称为屈服线 $C$ 。



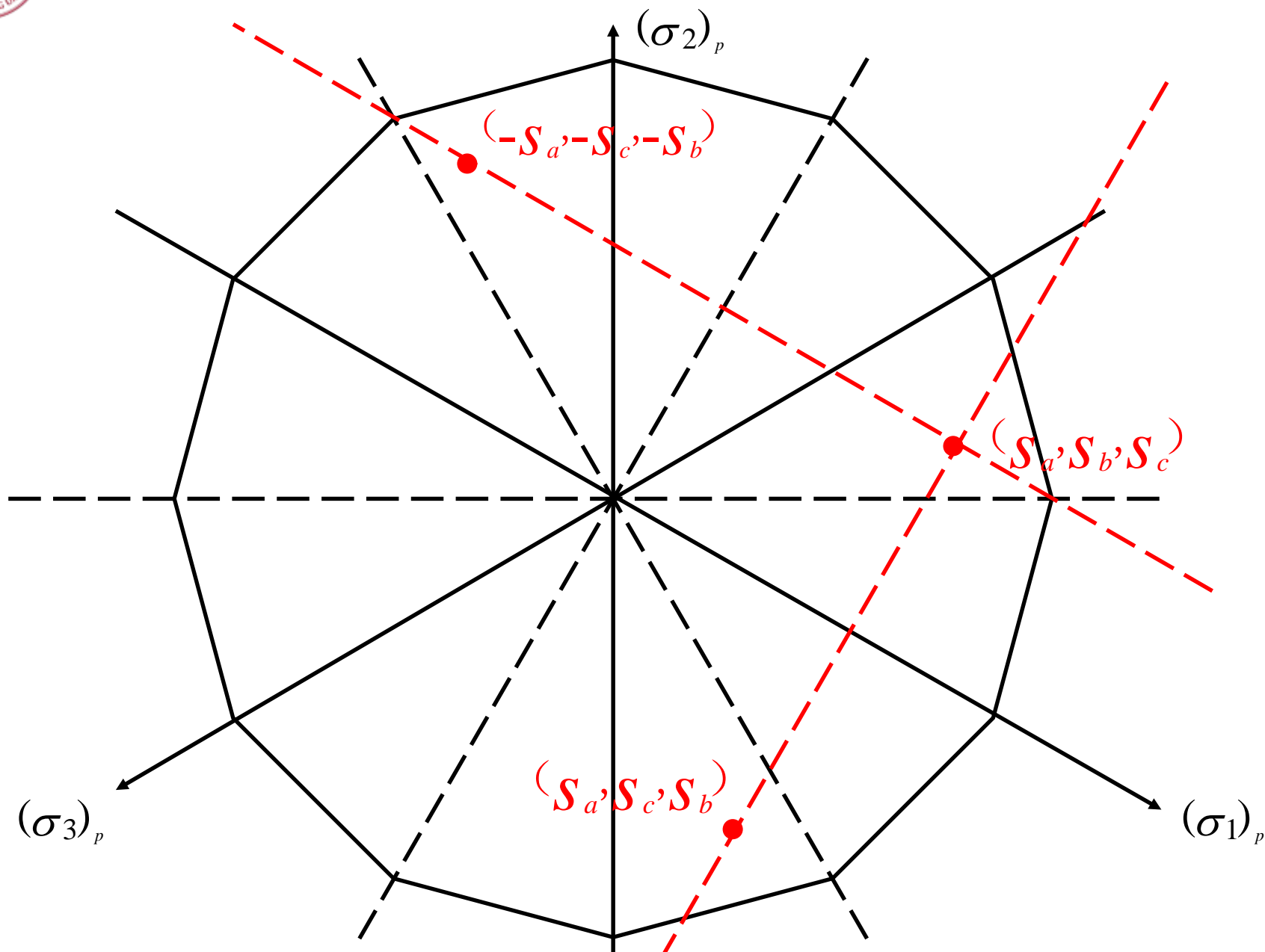


# 屈服面在主应力空间的一般形状





# 屈服面在 $\pi$ 平面上的—般形状





# 特雷斯卡屈服条件

1864年，H. Tresca (法国) 在做了一系列金属挤压实验的基础上，发现了在变形的金属表面有很细的痕纹，而这些痕纹的方向很接近最大剪应力的方向。因此认为金属的塑性变形是由剪应力引起晶体滑移而形成的

当最大剪应力达到某一极限时，材料进入塑性状态

$$\text{若: } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k \quad (\text{材料的第三强度理论})$$

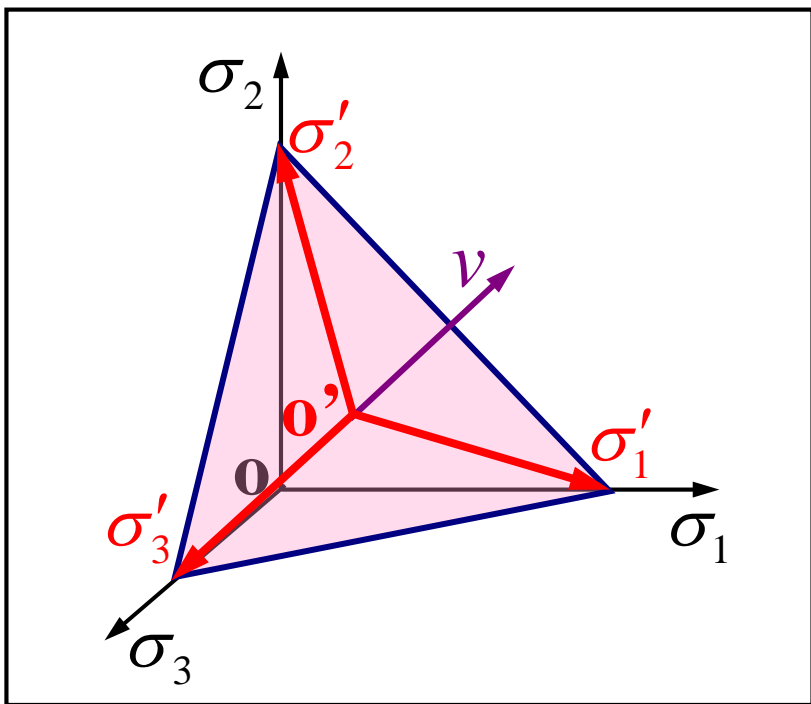
若不知道主应力的的大小和次序，则特雷斯卡条件写为：

$$\begin{cases} |\sigma_1 - \sigma_2| = 2k \\ |\sigma_2 - \sigma_3| = 2k \\ |\sigma_3 - \sigma_1| = 2k \end{cases}$$

只要有一个式子成立，  
材料便已进入屈服状态



# 特雷斯卡屈服条件几何表示



$\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$  分别是三个主应力在 $\pi$ 平面上的投影。

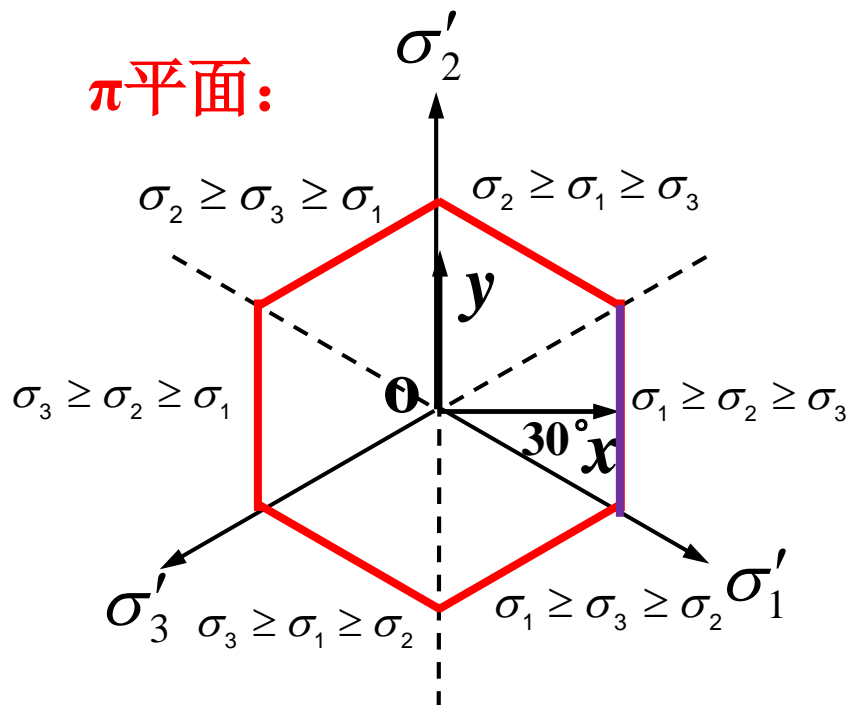
$\sigma_i$  与  $\sigma'_i$  的夹角余弦为  $\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\sigma'_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_i$$



# 特雷斯卡屈服条件几何表示

**$\pi$ 平面:**



$\pi$ 平面上的屈服曲线 (正六角形)

在平面内取直角坐标系:

$$x = \sigma'_1 \cos 30^\circ - \sigma'_3 \cos 30^\circ$$

$$= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{2}}$$

$$y = \sigma'_2 - \sigma'_1 \sin 30^\circ - \sigma'_3 \sin 30^\circ$$

$$= \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{6}}$$

在几何上, 当  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  时,

$$x = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}k = \text{常量}$$

在  $-30^\circ \leq \theta_\sigma \leq 30^\circ$  范围内表示一条平行于  $y$  轴的直线。对称拓展后为一**正六角形**。

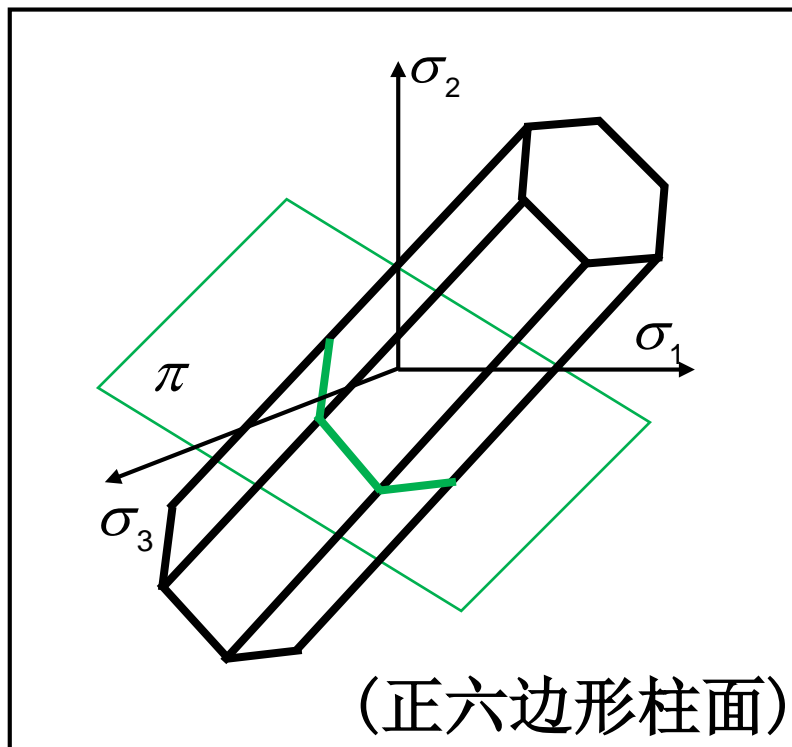


# 特雷斯卡屈服条件几何表示

## 1) 主应力空间内的屈服条件

$$\begin{cases} |\sigma_1 - \sigma_2| = 2k \\ |\sigma_2 - \sigma_3| = 2k \\ |\sigma_3 - \sigma_1| = 2k \end{cases}$$

在主应力空间等式给出一个正六边形柱面，母线平行于L，这就是特雷斯卡屈服条件对应的屈服曲面。





# 特雷斯卡屈服条件几何表示

## 2) 平面应力状态的屈服条件

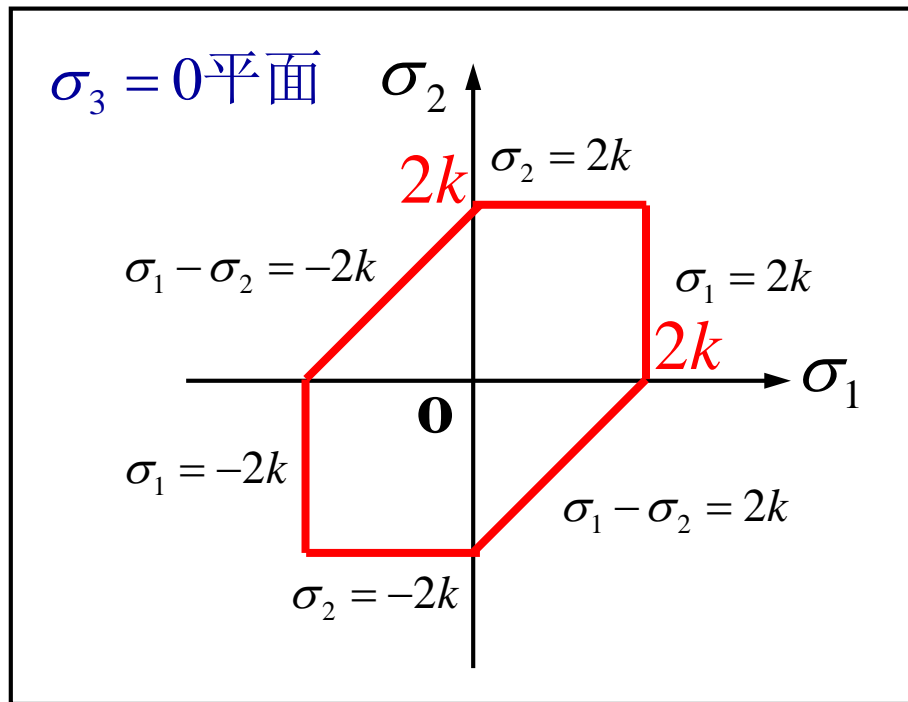
设:  $\sigma_3 = 0$

则等式变成:

$$|\sigma_1| = 2k$$

$$|\sigma_2| = 2k$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = 2k$$



在平面给出的屈服轨迹呈斜六边形（相当于正六边形柱面被 $\sigma_3 = 0$ 平面斜截所得图形）



# 常数K值的确定

由单向拉伸实验确定：

$$\sigma_1 = \sigma_s, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\sigma_s}{2}$$

由纯剪切实验确定：

$$\sigma_1 = \tau_s, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau_s$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_s \quad \Rightarrow \quad k = \tau_s$$



$$\sigma_s = 2\tau_s$$

(多数材料，近似成立)

物理意义：材料处于塑性状态时，其最大剪应力是一不变的定值。该定值只取决于材料在变形条件下的性质，而与应力状态无关。





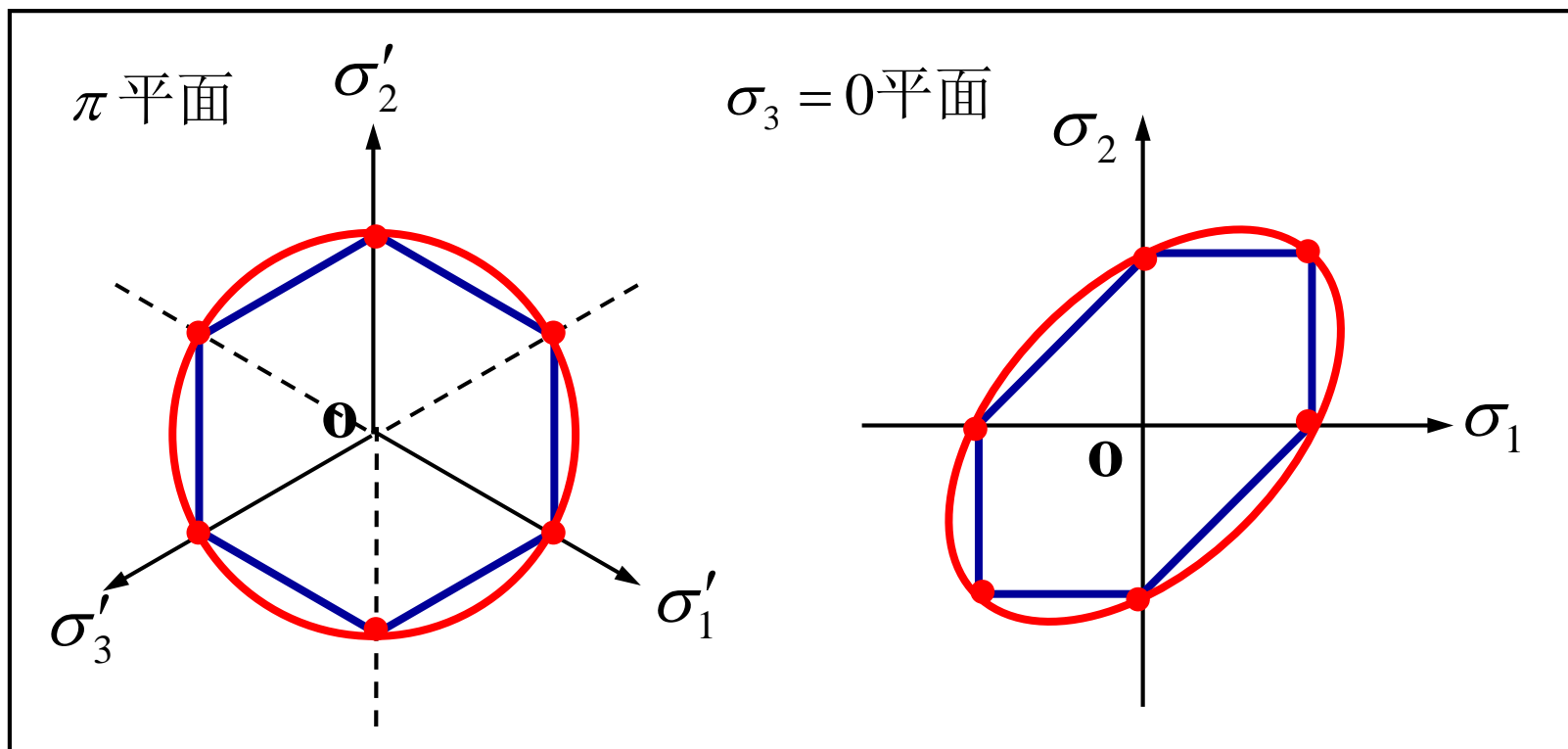
# 特雷斯卡屈服条件的局限性

- 特雷斯卡屈服条件在主应力方向已知时表达式简单线性而得到广泛应用。但在主应力方向未知时，表达式过于复杂，不便应用。
- 特雷斯卡屈服条件在主应力方向和大小都已知时未体现中间应力对材料屈服的影响，显得不尽合理，且屈服线上的角点给数学处理上带来困难。



# 米泽斯屈服条件

1913年，R. Von Mises (德国) 指出，在等倾面上，特雷斯卡六边形的六个顶点是由实验(拉伸实验)得来的，但连接这六个点直线却具有假设的性质。米泽斯提出用连接 $\pi$ 平面上的特雷斯卡六边形的六个顶点的圆来代替原来的六边形。





# 米泽斯屈服条件

圆的方程为：

$$x^2 + y^2 = R^2$$

由中几何关系可得：

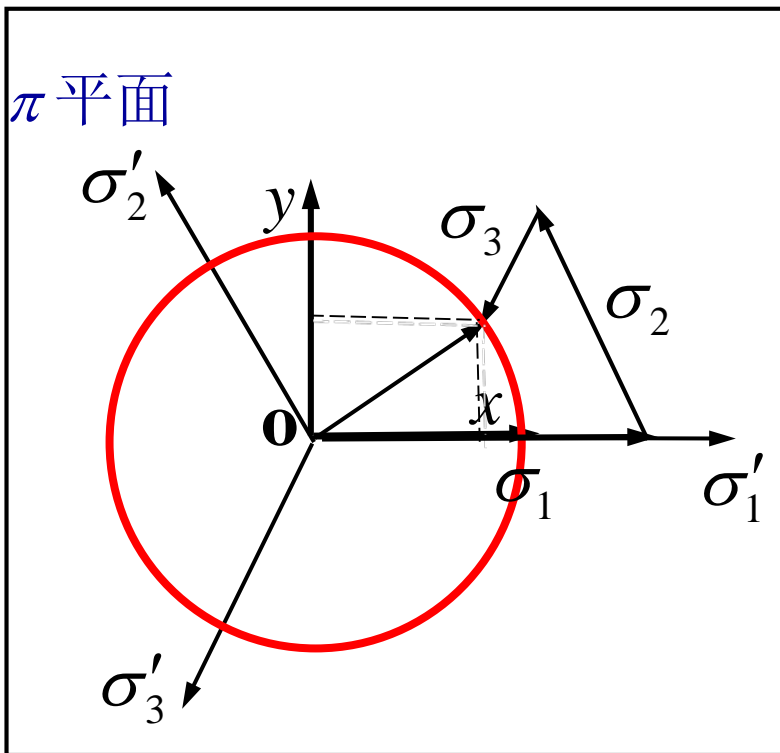
$$x = \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$$

将 $x, y$ 的表达式代入圆的方程可得：

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2R^2 \quad \text{塑性}$$
$$< 2R^2 \quad \text{弹性}$$

米泽斯条件与特雷斯卡条件一样，不受静水压力影响，也满足应力互换的原则





# 米泽斯屈服条件物理解释

1927年, H. Hencky(德国)从变形能角度考虑

能量准则: 反映把单位体积形状变化比能(畸变能)作为材料是否进入塑性状态的依据, 体现当 $W_s$ 达到一定值时, 材料便开始屈服。

弹性总应变能 $W$ 等于体积变化位能 $W_v$ 与弹性形状变化位能 $W_s$ 之和:

$$W = \frac{1}{2} \sum \sigma_i \varepsilon_i = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$$

$$W_v = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$W_s = W - W_v = \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$



# 应力强度

纳戴 (A. L. Nadai) 认为等倾面上的剪应力达到某一定值时材料即进入塑形状态；

伊柳辛（前苏联）提出了**应力强度**的概念，应力强度是表征物体受力程度的参量。伊柳辛认为，当应力强度等于材料单向拉伸的屈服极限时，材料进入塑性状态。

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_s$$

应力强度用应力偏量来表示，即：

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sigma_s$$



# R值的确定

由单向拉伸实验确定：

$$\sigma_1 = \sigma_s, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$2\sigma_1^2 = 2R^2 \implies R = \sigma_s$$

由纯剪切实验确定：

$$\sigma_1 = \tau_s, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau_s$$

$$6\tau_s^2 = 2R^2 \implies R = \sqrt{3}\tau_s$$



$$\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$$

(多数材料，近似成立)

物理意义：材料处于塑性状态时，其等效应力是一不变的定值，该定值只取决于材料在塑性变形时的性质，而与应力状态无关。



# 米泽斯屈服面

主应力空间中是一个垂直于正八面体斜面或者 $\pi$ 平面的圆柱体

## 空间应力状态

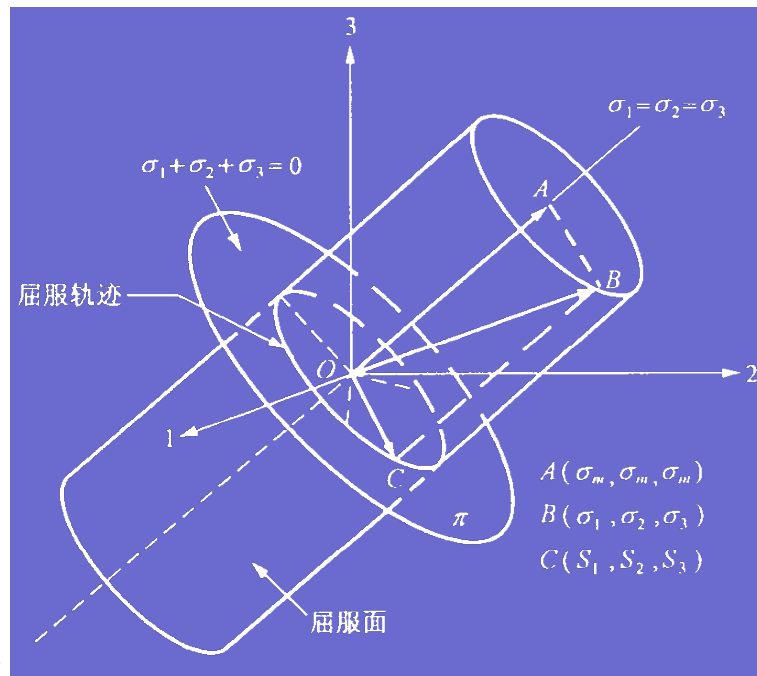
$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6\tau_s^2$$

## 平面应力状态

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_s^2$$

$$\sigma_3 = 0$$

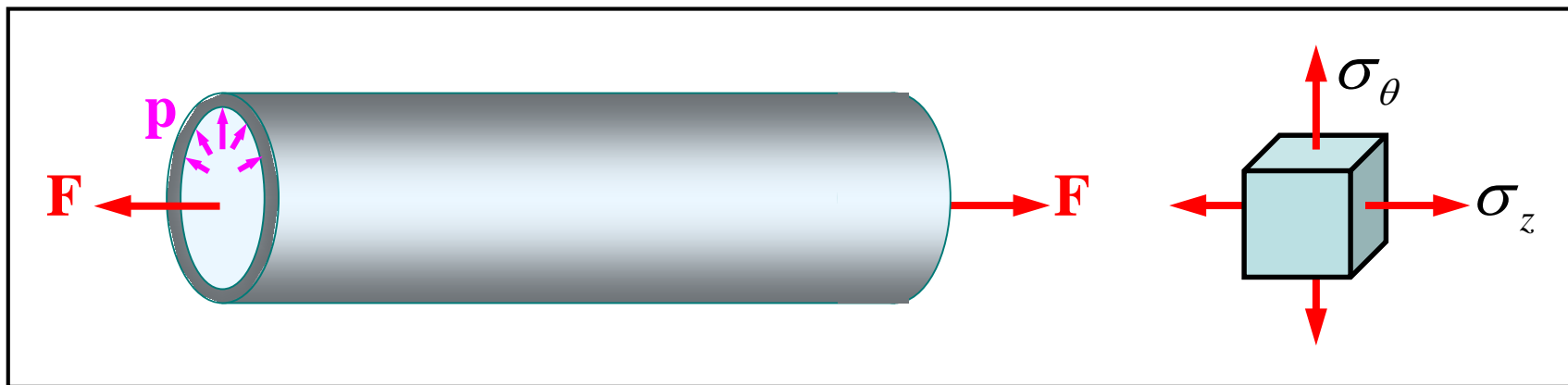




# 两种屈服条件的实验验证

## 1) 薄壁圆管受拉力 $F$ 和内压力 $p$ 作用

1925年Lode曾在软钢、铜和镍的薄壁筒上做过试验，使薄壁筒受**轴向力 $F$** 和**内压 $p$** 的作用。设圆筒壁厚为 $t$ ，平均直径为 $D$ 。 $t \ll D$



$$\sigma_{\theta} = \frac{pD}{2t}, \quad \sigma_z = \frac{F}{\pi Dt}, \quad \sigma_r \approx 0$$

若  $\sigma_{\theta} \geq \sigma_z$ ，则  $\sigma_1 = \sigma_{\theta}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_z$ ,  $\sigma_3 = \sigma_r$





# 两种屈服条件的实验验证

## 1) 薄壁圆管受拉力 $F$ 和内压力 $p$ 作用

由罗德参数: 
$$\mu_{\sigma} = \frac{(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2})}{(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2})} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

可得: 
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \mu_{\sigma} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \mu_{\sigma} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \mu_{\sigma} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\ \quad = \frac{1 - \mu_{\sigma}}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \\ \\ \sigma_2 - \sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \mu_{\sigma} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \sigma_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \mu_{\sigma} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\ \quad = \frac{1 + \mu_{\sigma}}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \end{array} \right.$$



# 两种屈服条件的实验验证

## 1) 薄壁圆管受拉力 $F$ 和内压力 $p$ 作用

代入米泽斯条件  $\frac{(1-\mu_\sigma)^2}{4}(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \frac{(1+\mu_\sigma)^2}{4}(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 \left[ \frac{(1-\mu_\sigma)^2}{4} + \frac{(1+\mu_\sigma)^2}{4} + 1 \right] = 2\sigma_s^2$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 \left( \frac{3 + \mu_\sigma^2}{2} \right) = 2\sigma_s^2$$

$$\left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_s} \right)^2 = \frac{4}{3 + \mu_\sigma^2}$$

米泽斯屈服条件:

$$\boxed{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_s} = \frac{2}{\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}}}$$



# 两种屈服条件的实验验证

## 1) 薄壁圆管受拉力 $F$ 和内压力 $p$ 作用

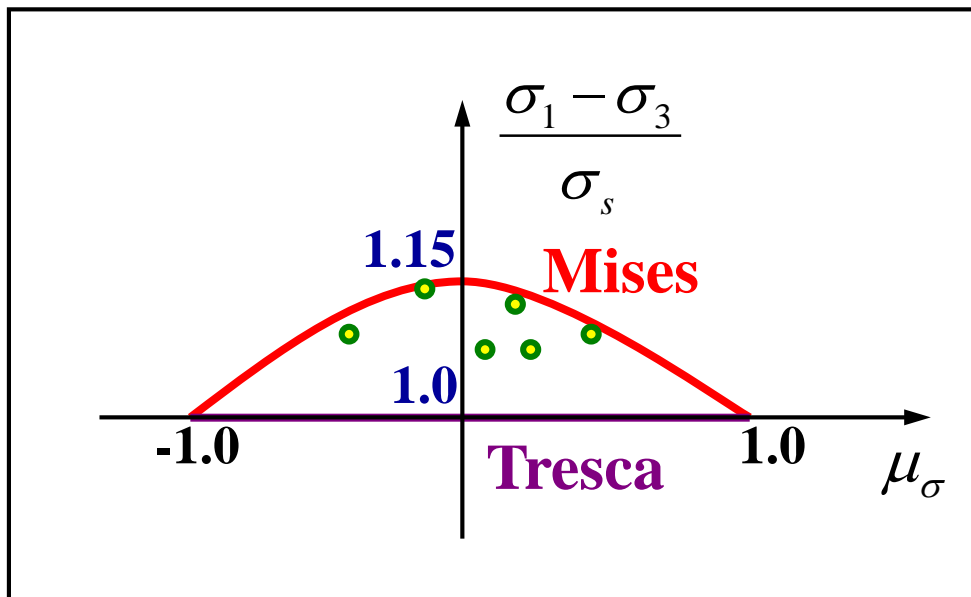
特雷斯卡屈服条件:

$$\text{令: } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_s} = 1$$

米泽斯屈服条件表示一条抛物线;

特雷斯特屈服条件表示平行横坐标的直线



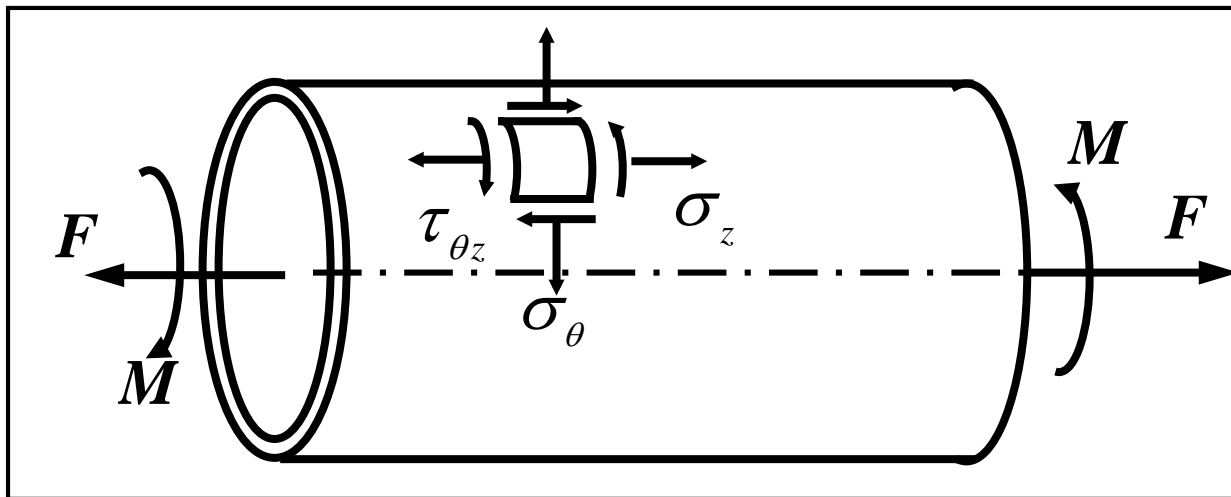
轴向拉力和内压采用不同的比例, 即采用不同的lode常数做实验, 实验结果比较符合Mises屈服条件



# 两种屈服条件的实验验证

## 2) 薄壁圆管受拉力 $F$ 和扭矩 $M$ 作用

1931年G. I. Taylor和H. Quinney曾用软钢、铜和铝制成的薄壁筒做拉扭联合试验。设圆筒壁厚为 $t$ ,平均直径为 $D$ ,  $t \ll D$



$$\sigma_z = \frac{F}{\pi D t}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{2M}{\pi D^2 t}, \quad \sigma_\theta = \sigma_r \approx 0$$

主应力:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\theta z}^2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\theta z}^2}$$



# 两种屈服条件的实验验证

## 2) 薄壁圆管受拉力 $F$ 和扭矩 $M$ 作用

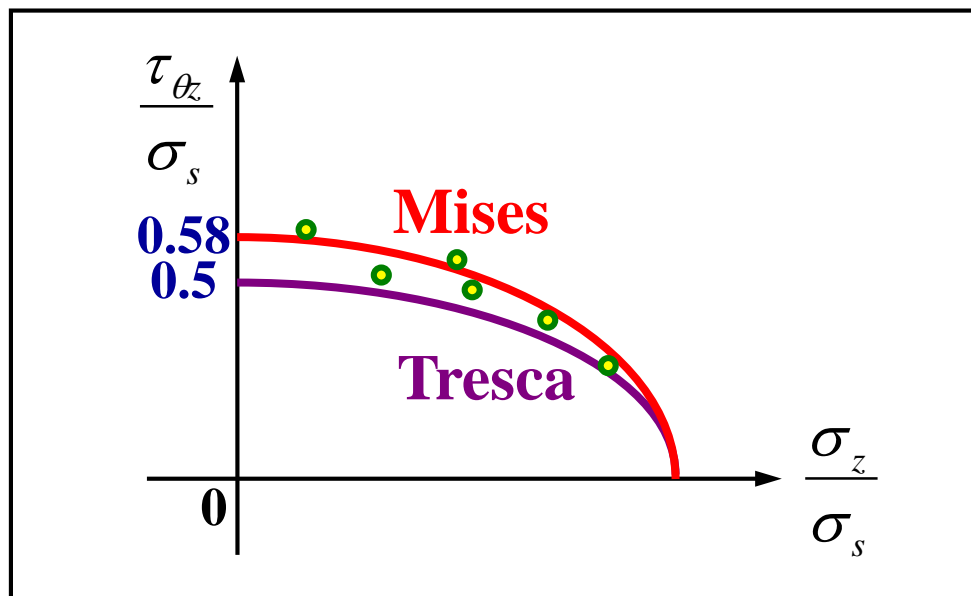
特雷斯卡屈服条件:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{\theta z}^2} = \frac{\sigma_s}{2} \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{\sigma_z}{\sigma_s} \right)^2 + 4 \left( \frac{\tau_{\theta z}}{\sigma_s} \right)^2 = 1$$

米泽斯屈服条件:

$$\begin{aligned} & (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \\ &= 2\sigma_z^2 + 6\tau_{\theta z}^2 = 2\sigma_s^2 \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{\sigma_z}{\sigma_s} \right)^2 + 3 \left( \frac{\tau_{\theta z}}{\sigma_s} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

**结论:** 对于韧性材料,  
Mises屈服条件比Tresca屈服条件更能接近于实验结果。二者相对偏差不会超过15.5%。





## 例题3

已知**两端封闭**的薄壁圆管，平均半径为 $r_0$ ，管的厚度为 $t_0$ ，受内压 $p$ 的作用。试分别按Tresca和Mises屈服条件写出此薄壁圆管在屈服时 $p$ 的表达式。

解：根据薄壁圆管的平衡条件有

$$\sigma_{\theta} = \frac{pr_0}{t_0}, \quad \sigma_z = \frac{pr_0}{2t_0}, \quad \sigma_r = -p \quad \sigma_{\theta} > \sigma_z > \sigma_r$$

代入Tresca屈服条件  $\sigma_{\theta} - \sigma_r = \sigma_s \implies p = \frac{\sigma_s}{1 + (r_0/t_0)}$

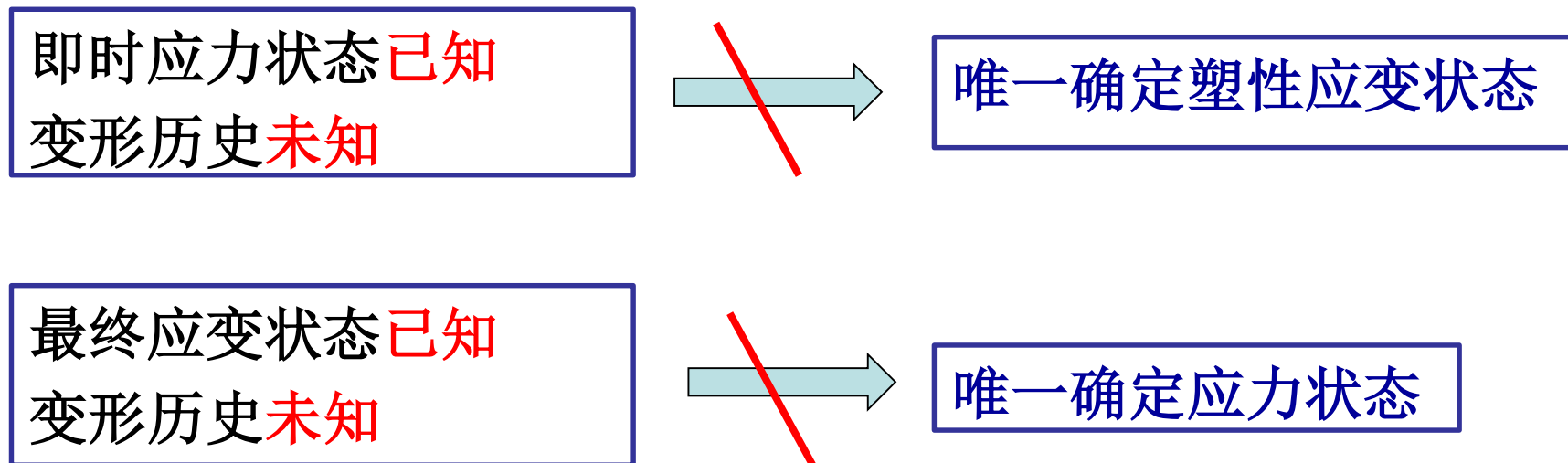
代入Mises屈服条件  $(\sigma_{\theta} - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_{\theta})^2 = 2\sigma_s^2$

$$\implies p = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3(r_0/t_0)^2 + 6(r_0/t_0) + 4}}$$



# 塑性应力应变关系

在塑性变形阶段，应力和应变的关系是非线性的



应变不仅和应力状态有关，还和变形历史有关。



# 塑性应力应变关系

塑性本构关系：

从宏观上讨论变形固体在塑性状态下的应力-应变关系，反映材料进入塑性以后的力学特性。

## 两类塑性本构关系：

全量理论/形变理论

建立在弹塑性小变形理论上，它建立了应力与应变全量间的关系。

增量理论/流动理论

均与Drucker公  
设有密切关系

考虑应变历史，描述材料在塑性状态时应力与应变速度或应变增量之间关系的理论





# 应变增量

在变形过程中，物体各点都处于运动状态，某一时刻  $t$ ，速度分量为： $v_x, v_y, v_z$  *or*  $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$

速度分量是  $x, y, z, t$  的函数，在无限小时段内各点产生的位移为：

$$du = \dot{u}dt, \quad dv = \dot{v}dt, \quad dw = \dot{w}dt$$

这些位移引起的应变称为应变增量。

$$d\varepsilon_x = \frac{\partial du}{\partial x} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dt$$

$$d\varepsilon_y = \frac{\partial dv}{\partial y} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} dt$$

$$d\varepsilon_z = \frac{\partial dw}{\partial z} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} dt$$

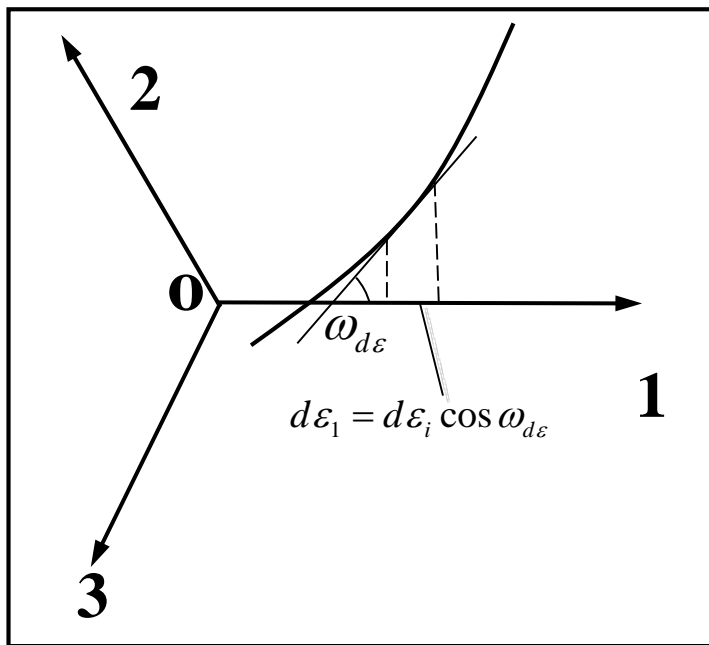
$$d\gamma_{xy} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} dt + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} dt$$

$$d\gamma_{yz} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} dt + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} dt$$

$$d\gamma_{zx} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} dt + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} dt$$



# 应变增量



$$\begin{cases} d\varepsilon_1 = d\varepsilon_i \cos \varepsilon_{d\varepsilon} \\ d\varepsilon_2 = d\varepsilon_i \cos(\varepsilon_{d\varepsilon} - 120^\circ) \\ d\varepsilon_3 = d\varepsilon_i \cos(\varepsilon_{d\varepsilon} - 240^\circ) \end{cases}$$

$$d\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2}$$

## 应变增量强度（等效应变增量）

$$d\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_x - d\varepsilon_y)^2 + (d\varepsilon_y - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(d\gamma_{xy}^2 + d\gamma_{yz}^2 + d\gamma_{zx}^2)}$$



# 应力和应变增量关系

为了确定塑性状态中应力和应变增量之间的关系，需要以实验为基础找出它们之间的关系。1925年，Lode做薄壁筒受轴向力和内压联合作用实验时，所采用的参数为

Lode应力参数

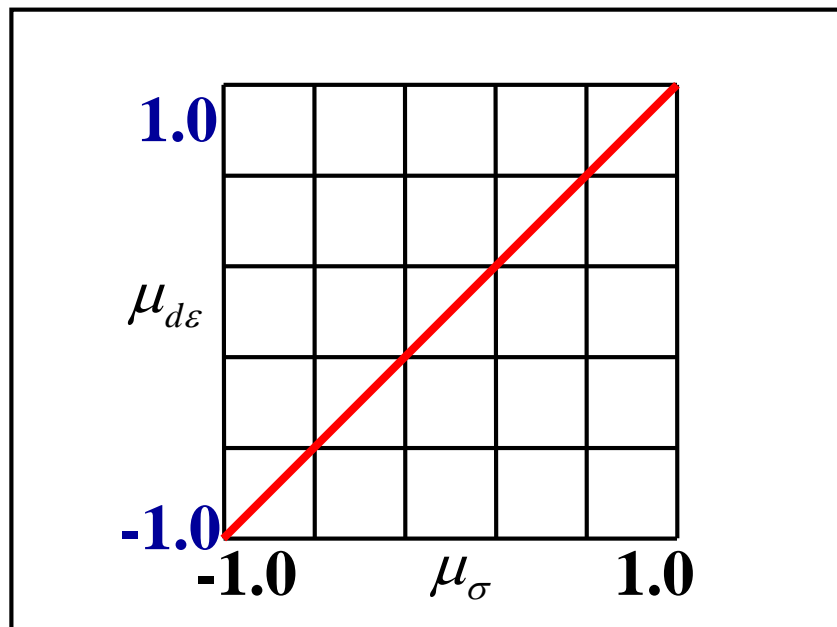
$$\mu_{\sigma} = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1$$

Lode应变增量参数

$$\mu_{d\varepsilon} = 2 \frac{d\varepsilon_2^p - d\varepsilon_3^p}{d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_3^p} - 1$$

由算出的主应力值可以得到 $\mu_{\sigma}$ 的值；通过实验得到 $d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p$ ，从而可以得到 $\mu_{d\varepsilon}$ 的值。

$$\mu_{\sigma} = \mu_{d\varepsilon}$$





# 莱维-米泽斯本构方程

由  $\mu_\sigma = \mu_{d\varepsilon}$  可得: 
$$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{d\varepsilon_2^p - d\varepsilon_3^p}{d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_3^p}$$

材料不可压缩  $\Rightarrow \frac{d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_3^p}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{d\varepsilon_2^p - d\varepsilon_3^p}{\sigma_2 - \sigma_3}$

$de_{ij} = d\varepsilon_{ij}$   $\Rightarrow \frac{de_1^p}{s_1} = \frac{de_2^p}{s_2} = \frac{de_3^p}{s_3} = d\lambda$   $d\lambda$ ——比例系数

不用主应力表示  $\Rightarrow \frac{de_x^p}{s_x} = \frac{de_y^p}{s_y} = \frac{de_z^p}{s_z} = \frac{d\gamma_{xy}}{2\tau_{xy}} = \frac{d\gamma_{yz}}{2\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}}{2\tau_{zx}} = d\lambda$

变形的某一瞬间，应变偏量增量的每一分量与相对应的应力偏量的比值都是相同的  $d\lambda$



# 莱维-米泽斯本构方程

Lévy-Mises理论中包含的假设:

- 应变偏量增量与应力偏量成比例
- 材料是不可压缩的;
- 材料是理想刚塑性的;
- 材料满足Mises屈服条件  $\sigma_i = \sigma_s$

若已知三个正应力的值, 便可确定  $d\varepsilon_x^p, d\varepsilon_y^p, d\varepsilon_z^p$  之间的比值, 但还不能确定各应力偏量的具体数值。如果给出  $d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p$  的值, 则可求出  $s_1, s_2, s_3$  的值, 但却求不出应力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  的值。只有给出  $\sigma_0$  的值后, 才能求出  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  的值。



# 普朗特-罗伊斯本构方程

在某些情况下，弹性应变是不能忽略的。例如在某些弹塑性问题中，需要考虑弹性回弹和残余应力，这时必须考虑弹性应变。

代入

$$\frac{e_x}{s_x} = \frac{e_y}{s_y} = \frac{e_z}{s_z} = \frac{1}{2G}$$

$$\begin{aligned} de_{ij} &= de_{ij}^e + de_{ij}^p \quad \text{代入} \quad \frac{de_1^p}{s_1} = \frac{de_2^p}{s_2} = \frac{de_3^p}{s_3} = d\lambda \\ &= \frac{ds_{ij}}{2G} + s_{ij}d\lambda \end{aligned}$$

$$de_x = \frac{ds_x}{2G} + s_x d\lambda$$

$$de_y = \frac{ds_y}{2G} + s_y d\lambda$$

$$de_z = \frac{ds_z}{2G} + s_z d\lambda$$

$$d\gamma_{xy} = \frac{d\tau_{xy}}{G} + 2\tau_{xy} d\lambda$$

$$d\gamma_{yz} = \frac{d\tau_{yz}}{G} + 2\tau_{yz} d\lambda$$

$$d\gamma_{zx} = \frac{d\tau_{zx}}{G} + 2\tau_{zx} d\lambda$$



# 普朗特-罗伊斯本构方程

$$(s_x - s_y)^2 + (s_y - s_z)^2 + (s_z - s_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\sigma_s^2$$

$$s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 - s_x s_y - s_y s_z - s_z s_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = \sigma_s^2$$

$$\frac{1}{2}(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = \frac{\sigma_s^2}{3} = k^2$$

$$s_x ds_x + s_y ds_y + s_z ds_z + 2\tau_{xy} d\tau_{xy} + 2\tau_{yz} d\tau_{yz} + \tau_{zx} d\tau_{zx} = 0$$



# 普朗特-罗伊斯本构方程

$$s_x de_x = s_x \frac{ds_x}{2G} + s_x^2 d\lambda \quad \tau_{xy} d\gamma_{xy} = \tau_{xy} \frac{d\tau_{xy}}{G} + 2\tau_{xy}^2 d\lambda$$

$$s_y de_y = s_y \frac{ds_y}{2G} + s_y^2 d\lambda \quad \tau_{yz} d\gamma_{yz} = \tau_{yz} \frac{d\tau_{yz}}{G} + 2\tau_{yz}^2 d\lambda$$

$$s_z de_z = s_z \frac{ds_z}{2G} + s_z^2 d\lambda \quad \tau_{zx} d\gamma_{zx} = \tau_{zx} \frac{d\tau_{zx}}{G} + 2\tau_{zx}^2 d\lambda$$

$$s_x ds_x + s_y ds_y + s_z ds_z + 2\tau_{xy} d\tau_{xy} + 2\tau_{yz} d\tau_{yz} + \tau_{zx} d\tau_{zx} = 0$$

$$\frac{1}{2}(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = \frac{\sigma_s^2}{3} = k^2$$





比例系数 $d\lambda$ 的确定:

$$2k^2 d\lambda = (s_x de_x + s_y de_y + s_z de_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{xz} d\gamma_{xz})$$

令:  $dW = s_x de_x + s_y de_y + s_z de_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{xz} d\gamma_{xz}$



$$d\lambda = \frac{dW}{2k^2} = \frac{3dW}{2\sigma_s^2}$$



# 普朗特-罗伊斯本构方程

$$\begin{aligned} de_x &= \frac{ds_x}{2G} + s_x \frac{3dW}{2\sigma_s^2} & d\gamma_{xy} &= \frac{d\tau_{xy}}{G} + \tau_{xy} \frac{3dW}{\sigma_s^2} \\ de_y &= \frac{ds_y}{2G} + s_y \frac{3dW}{2\sigma_s^2} & d\gamma_{yz} &= \frac{d\tau_{yz}}{G} + \tau_{yz} \frac{3dW}{\sigma_s^2} \\ de_z &= \frac{ds_z}{2G} + s_z \frac{3dW}{2\sigma_s^2} & d\gamma_{zx} &= \frac{d\tau_{zx}}{G} + \tau_{zx} \frac{3dW}{\sigma_s^2} \end{aligned}$$

**Prandtl-Reuss**理论中虽然只增加了弹性变形一项，但在计算中却比没有这一项要复杂很多，因此至今仍只有少数简单的问题获得了解析解。



# 全量理论

- **比例变形**：在塑性力学中，有一种特殊的变形情况，即各应变分量由始至终都按同一比例增加或减少，这种情况称为比例变形；
- **全量理论**：在比例变形条件下，应变强度增量可以积分并求得应变强度，从而建立了全量理论的应力-应变关系，因为这个理论考虑的是应变分量而不是应变增量；
- 全量理论是以比例变形为基础的理论，有时也被称为**形变理论**；
- 这一理论首先由亨奇提出，后来由伊柳辛将它整理的更为完善，问题提的更为明确，并给出了使用条件，因此这个理论亦称为**亨奇-伊柳辛理论**；



# 全量理论

形变理论的前提是比例变形，即各应变分量之间在变形过程中始终保持固定的比例。

$$d\varepsilon_1 : d\varepsilon_2 : d\varepsilon_3 = C_1 : C_2 : C_3$$

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_3} = \frac{C_1}{C_3}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{C_2}{C_1} \varepsilon_1 + D_1$$

$$\varepsilon_3 = \frac{C_3}{C_1} \varepsilon_1 + D_2$$

由于形变开始时，所有应变均为零，也就是说，当 $\varepsilon_1 = 0$ 时， $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ ，所以 $D_1 = D_2 = 0$ 。

$$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3 = C_1 : C_2 : C_3$$



# 全量理论

应变强度增量：

$$d\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(1 - \frac{C_2}{C_1}\right)^2 + \left(\frac{C_2}{C_1} - \frac{C_3}{C_1}\right)^2 + \left(\frac{C_3}{C_1} - 1\right)^2} d\varepsilon_1$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(1 - \frac{C_2}{C_1}\right)^2 + \left(\frac{C_2}{C_1} - \frac{C_3}{C_1}\right)^2 + \left(\frac{C_3}{C_1} - 1\right)^2} \varepsilon_1 + D_3$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} + D_3$$

当 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ ， $\varepsilon_i = 0$ ，所以 $D_3 = 0$

比例变形时， $\int d\varepsilon_i = \varepsilon_i$



# 全量理论——亨奇理论

伊柳辛证明了比例变形的必要条件是比例加载，而在比例加载的条件下，各应力分量都是按比例增长的。

$$s_{ij} = c s_{ij}^0, \quad \sigma_i = c \sigma_i^0, \quad ds_{ij} = s_{ij}^0 dc$$

$c$  — 随时间变化的参数，  
 $s_{ij}^0$  — 初始应力偏量的分量

代入普朗特-罗伊斯本构方程： $de_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} + s_{ij}d\lambda = \frac{s_{ij}^0 dc}{2G} + s_{ij}^0 c d\lambda$

积分后：

$$e_{ij} = s_{ij}^0 \left( \frac{c}{2G} + \int c d\lambda \right) = s_{ij}^0 \left( \frac{c}{2G} + \int c \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} \right) = \frac{s_{ij}}{2G} + \frac{3s_{ij}}{2\sigma_i} \varepsilon_i^p$$

$$\text{令: } \varphi = \frac{3G\varepsilon_i^p}{\sigma_i}$$

$$e_{ij} = \frac{s_{ij}}{2G} + \frac{3s_{ij}}{2\sigma_i} \varepsilon_i^p = e_{ij}^e + e_{ij}^p = \frac{1+\varphi}{2G} s_{ij}$$

弹性应变

塑性应变

亨奇本构方程



# 全量理论——伊柳辛理论

伊柳辛将亨奇形变理论的适用条件作了明确规定，并证明了简单加载定理。伊柳辛指出，在小弹塑性变形的情况下，总应变与应偏量成比例，即：

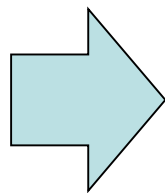
当采用主应力时：

$$\frac{e_x}{s_x} = \frac{e_y}{s_y} = \frac{e_z}{s_z} = \frac{\gamma_{xy}}{2\tau_{xy}} = \frac{\gamma_{yz}}{2\tau_{yz}} = \frac{\gamma_{zx}}{2\tau_{zx}} = \lambda$$

$$\frac{e_1}{s_1} = \frac{e_2}{s_2} = \frac{e_3}{s_3} = \lambda$$

应变强度表达式变为：

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_1 - e_3)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \lambda \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_1 - s_3)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \lambda \sqrt{2} \sigma_i\end{aligned}$$



$$\lambda = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}$$



# 伊柳辛本构方程

$$e_x = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} s_x, e_y = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} s_y, e_z = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} s_z$$

$$\gamma_{xy} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{xy}, \gamma_{yz} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{yz}, \gamma_{zx} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{zx}$$

## 弹性应变

$$e_x^e = \frac{1}{2G} s_x \quad \gamma_{xy}^e = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$e_y^e = \frac{1}{2G} s_y \quad \gamma_{yz}^e = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$e_z^e = \frac{1}{2G} s_z \quad \gamma_{zx}^e = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

## 塑性应变

$$e_x^p = \left( \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} - \frac{1}{2G} \right) s_x \quad \gamma_{xy}^p = \left( \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} - \frac{1}{G} \right) \tau_{xy}$$

$$e_y^p = \left( \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} - \frac{1}{2G} \right) s_y \quad \gamma_{yz}^p = \left( \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} - \frac{1}{G} \right) \tau_{yz}$$

$$e_z^p = \left( \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} - \frac{1}{2G} \right) s_z \quad \gamma_{zx}^p = \left( \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} - \frac{1}{G} \right) \tau_{zx}$$





# 伊柳辛形变理论

形变理论应满足的条件：简单加载条件

(1) 外载荷按比例加载，变形体处于主动变形过程（不出现中间卸载的情况）

(2) 材料的体积是不可压缩的，泊松比  $\mu = 0.5$ ;

简化具体计算，基本上与实验结果相符合

(3) 材料的应力-应变曲线具有幂强化的形式;

$\sigma_i = A \varepsilon_i^m$  避免区分弹性区和塑性区

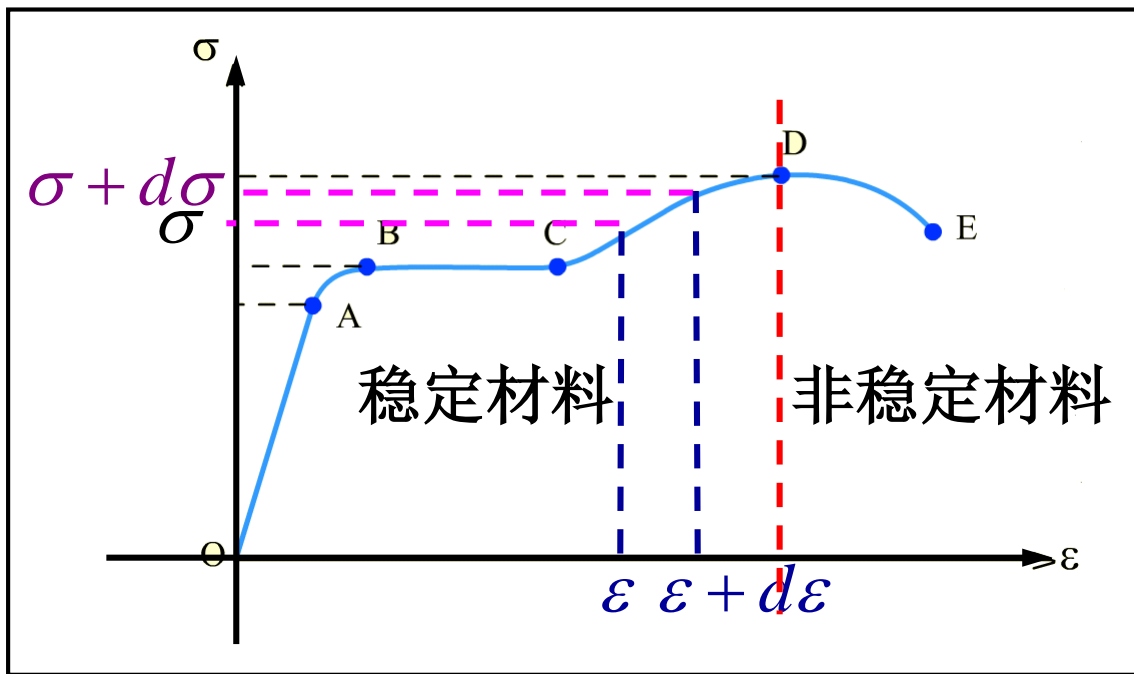
(4) 满足小弹塑性变形的各项条件。

塑性变形与弹性变形属于同一量级



# 德鲁克公设

50年代初期，Drucker (美国)提出了关于材料稳定性的公设。



稳定材料

$$d\sigma \cdot d\epsilon \geq 0$$

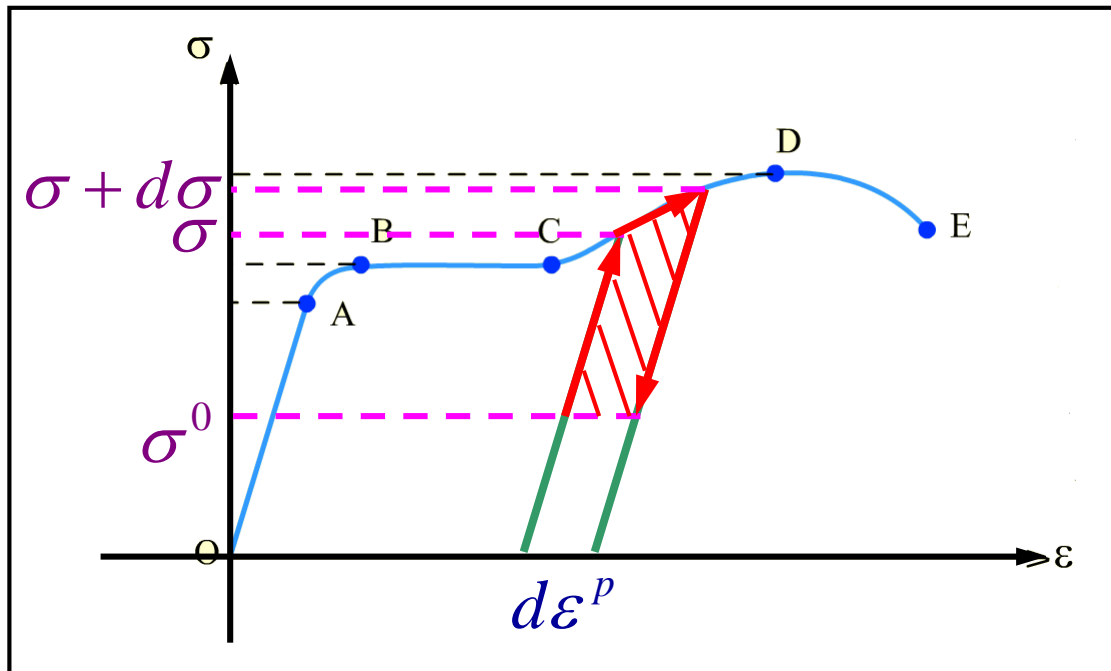
非稳定材料

$$d\sigma \cdot d\epsilon < 0$$



# 德鲁克公设

考虑稳定材料



应力循环

阴影部分的面积代表附加应力所作的塑性功。

对于稳定材料，该塑性功为正功。

$$(\sigma - \sigma^0) d\varepsilon^p > 0$$

$$d\sigma d\varepsilon^p > 0$$

Drucker将以上公式推广到复杂应力状态：

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ij}^p \geq 0$$

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \geq 0$$



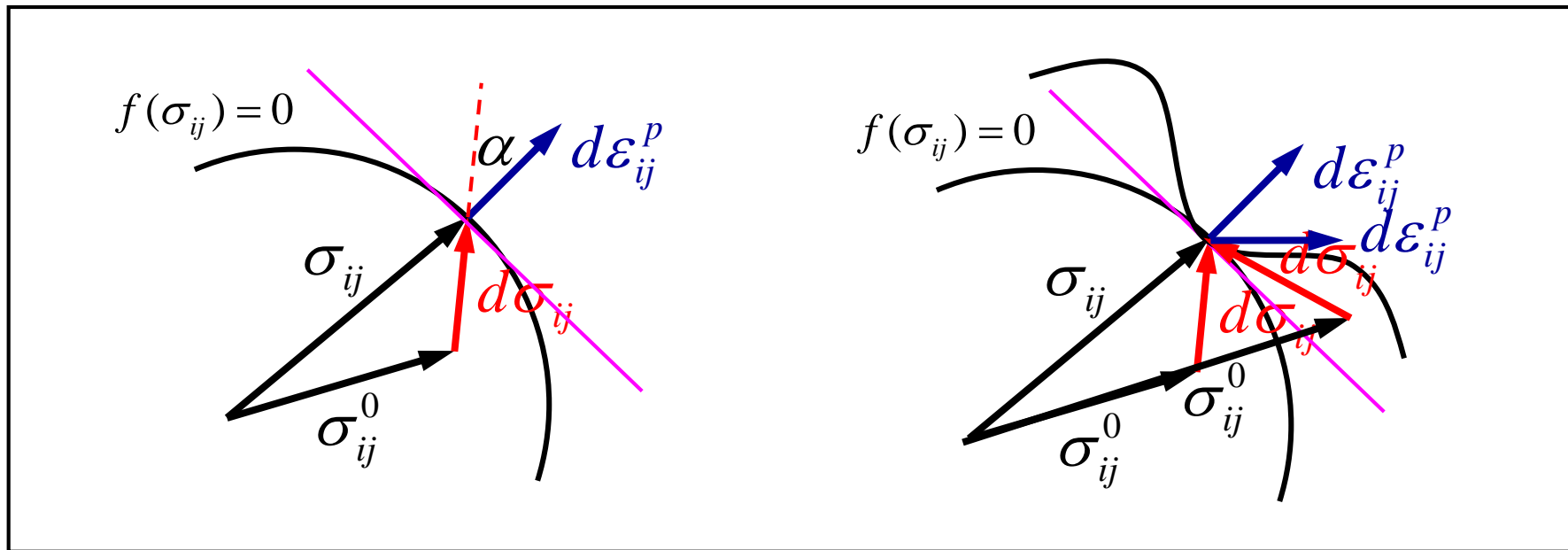
# 德鲁克公设几何意义

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ij}^p \geq 0$$



$$|\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0| \cdot |d\varepsilon_{ij}^p| \cdot \cos \alpha \geq 0$$

(将应力空间和塑性应变空间的坐标轴叠合)  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$



1) 屈服面是凸形的：若屈服面为凹，则可能  $\alpha > 90^\circ$

2) 塑性应变增量沿屈服面的外法线方向：若塑性应变增量方向任意，则可能  $\alpha > 90^\circ$



# 德鲁克公设正交性法则

## Drucker公设的正交性法则

→ 
$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, f(\sigma_{ij}) = 0 \text{ — 屈服函数}$$

$$f(\sigma_{ij}) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_s^2 = 0$$

➤ 矢量分析标量场的梯度：垂直于过此点的等值面，是指向函数增大的方向

➤ 塑性应变增量沿屈服面的外法线方向：正交性法则

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, d\lambda \text{ — 非负比例系数}$$

将塑性应变增量与屈服条件联系起来，屈服条件确定后，塑性应变增量可以确定，研究塑性力学中的物理关系有重要意义。



# 强化材料加载准则

$$d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p \geq 0$$

$d\varepsilon_{ij}^p$  不为零时,  $d\sigma_{ij}$  的方向  
必须指向加载面的外法线一侧

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \geq 0$$

强化材料的加卸载准则:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \quad \text{加载}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad \text{中性变载}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad \text{卸载}$$

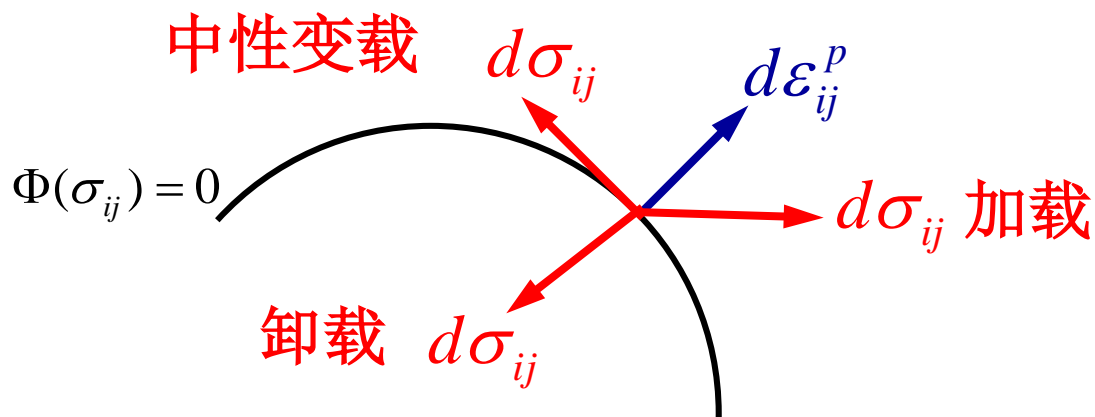
加载面  $f(\sigma_{ij}) = 0$

—变化的屈服曲面

**中性变载**—当应力增量沿加载面的切线方向变化而加载面并不扩大时, 不产生新的塑性变形。



# 理想塑性材料加载准则

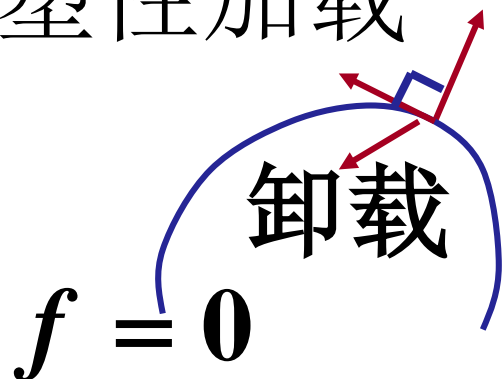


$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad \text{加载}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad \text{卸载}$$



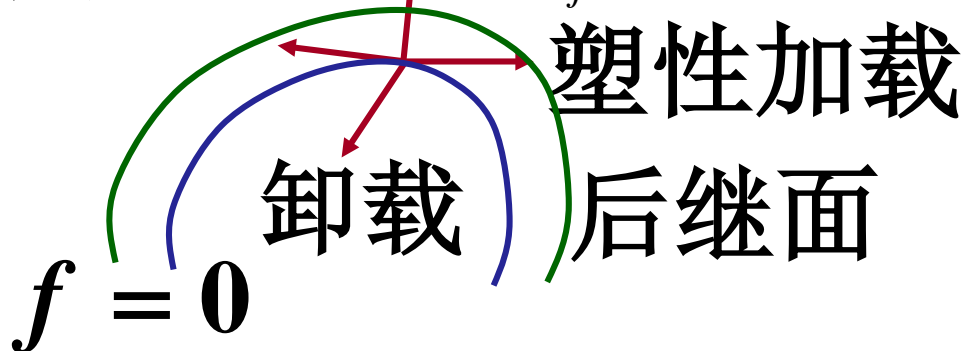
塑性加载



理想弹塑性材料

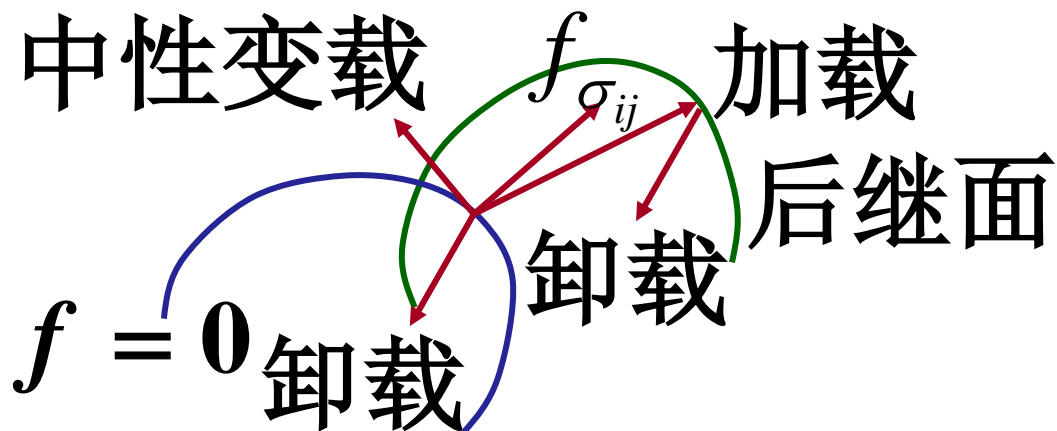
中性变载

$f_{\sigma_{ij}}$



等向强化弹塑性材料

中性变载



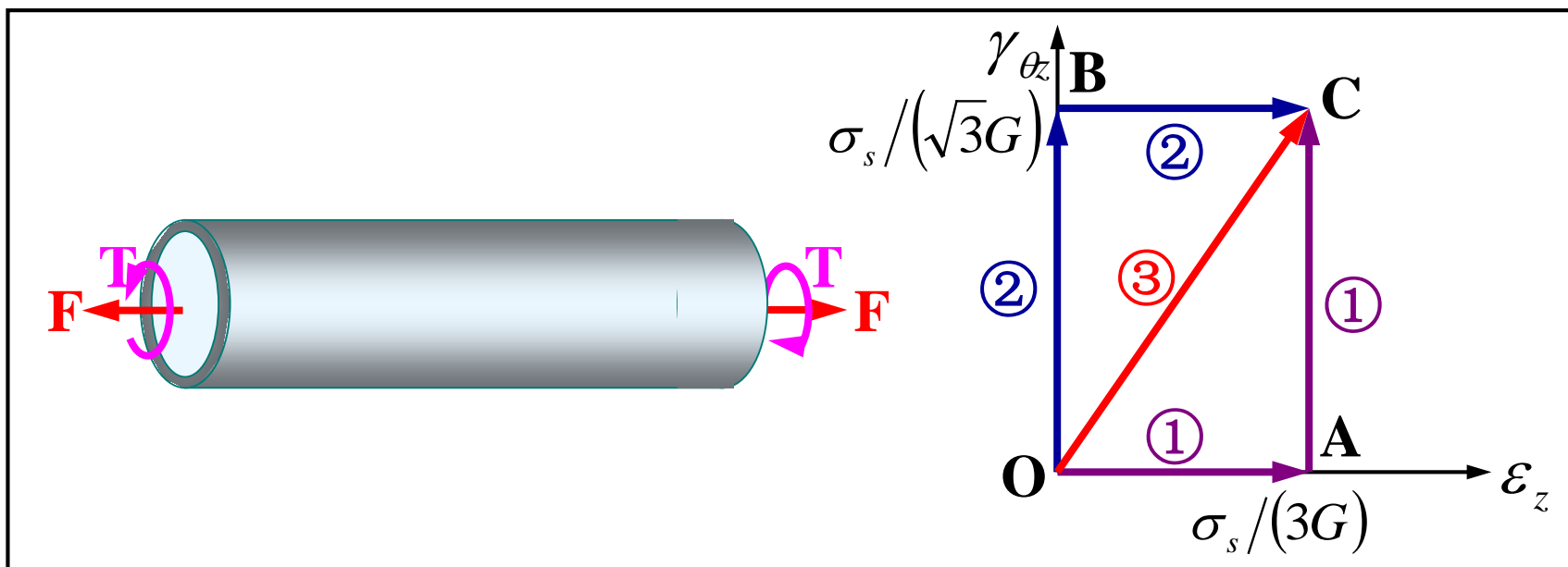
随动强化弹塑性材料





## 例题4

已知由不可压缩弹塑性材料做成的薄圆管，受轴向力及扭矩的作用。当变形为： $\varepsilon_z = \frac{\sigma_s}{E} = \frac{\sigma_s}{3G}$ ,  $\gamma_{\theta z} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}G}$  时，试按如下加载路径用普朗特-罗伊斯本构关系计算圆管中的应力。





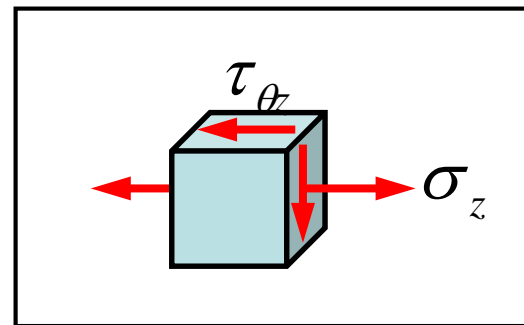
解：由拉伸作用使薄壁圆管进入塑性状态  $\varepsilon = \sigma_s / E$

由于材料不可压缩，泊松比  $\nu = \frac{1}{2}$ ，此时  $E = 2(1+\nu)G = 3G$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_s}{3G}$$

再分析薄壁圆管的应力状态：

圆管仅受  $\sigma_z, \tau_{\theta z}$ ，其余四个应力分量均为零。



求主应力  $\sigma_v^3 - \sigma_z \sigma_v^2 - \tau_{\theta z}^2 \sigma_v = 0$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\theta z}^2}, \quad \sigma_2 = 0$$
$$\sigma_3$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2$$

**Mises屈服条件**

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\theta z}^2} \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 \end{array} \right\} \longrightarrow \sigma_z^2 + 3\tau_{\theta z}^2 = \sigma_s^2$$



$$\text{令 } \sigma_z = \sigma, \quad \tau_{\theta z} = \tau$$

$$\text{则 } \sigma_0 = \frac{\sigma}{3}, \quad s_z = \sigma - \frac{\sigma}{3} = \frac{2}{3}\sigma, \quad s_r = s_\theta = -\frac{\sigma}{3}$$

由体积不可压缩, 有  $\varepsilon_0 = 0$

$$\text{则 } e_z = \varepsilon_z = \varepsilon, \quad e_r = \varepsilon_r = -\frac{1}{2}\varepsilon, \quad e_\theta = \varepsilon_\theta = -\frac{1}{2}\varepsilon, \quad \gamma_{\theta z} = \gamma$$

普朗特-罗伊斯本构关系:

$$de_z = \frac{ds_z}{2G} + s_z \frac{3dW}{2\sigma_s^2} \quad d\gamma_{z\theta} = \frac{d\tau}{G} + \tau \frac{3dW}{\sigma_s^2}$$

$$\text{其中 } dW = s_r de_r + s_\theta de_\theta + s_z de_z + \tau_{\theta z} d\gamma_{\theta z}$$

$$\begin{aligned} &= \left(-\frac{\sigma}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}d\varepsilon\right) + \left(-\frac{\sigma}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}d\varepsilon\right) + \frac{2\sigma}{3}d\varepsilon + \tau d\gamma \\ &= \sigma d\varepsilon + \tau d\gamma \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d\varepsilon = \frac{d\sigma}{3G} + \frac{\sigma(\sigma d\varepsilon + \tau d\gamma)}{\sigma_s^2} \quad d\gamma = \frac{d\tau}{G} + 3 \frac{\sigma d\varepsilon + \tau d\gamma}{\sigma_s^2} \tau$$



(1)按路径1加载，拉伸后

$$\varepsilon = \frac{\sigma_s}{3G} = \text{const} \quad \text{故} \quad d\varepsilon = 0 \quad d\gamma = \frac{d\tau}{G} + \frac{3\tau^2 d\gamma}{\sigma_s^2}$$

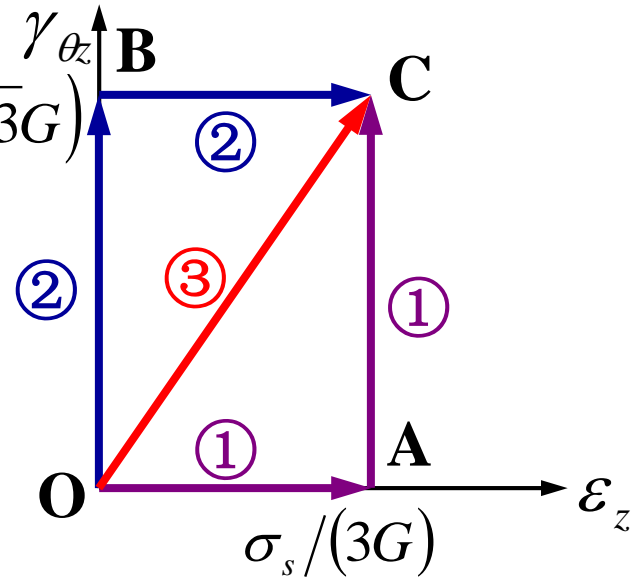
将上式改写为  $Gd\gamma = \frac{d\tau}{1 - \frac{3\tau^2}{\sigma_s^2}}$ ，并积分

$$G\gamma = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{3}}{\sigma_s} \tau + C$$

在A点处， $\gamma=0, \tau=0$  可得  $C=0$

$$\tau = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \operatorname{th} \frac{\sqrt{3}G\gamma}{\sigma_s} \quad \sigma = \sigma_s / \operatorname{ch} \frac{\sqrt{3}G\gamma}{\sigma_s}$$

由  $\gamma = \sigma_s / (\sqrt{3}G)$  可得:  $\sigma = 0.648\sigma_s, \tau = 0.439\sigma_s$





(2)按路径2加载，扭转后

$$\gamma = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}G} = \text{const} \text{ 故 } d\gamma = 0 \quad d\varepsilon = \frac{d\sigma}{3G} + \frac{\sigma^2 d\varepsilon}{\sigma_s^2}$$

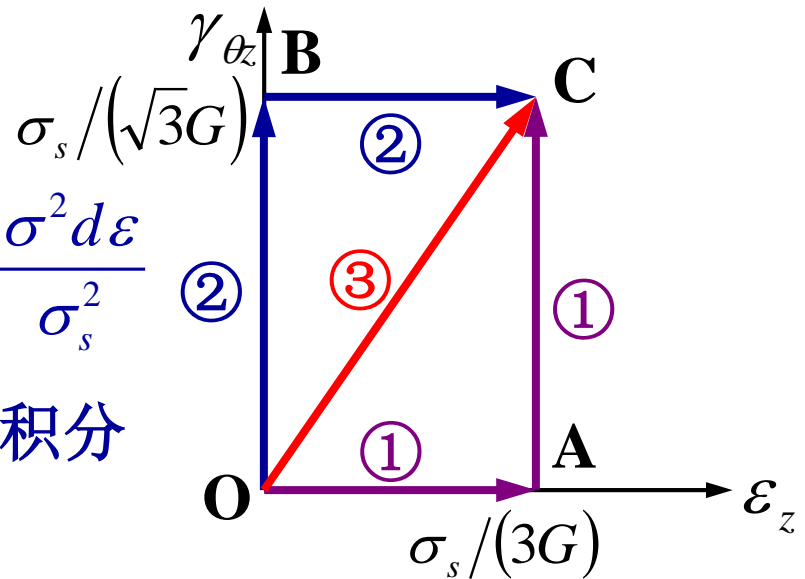
将上式改写为  $3Gd\varepsilon = \frac{d\sigma}{1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_s^2}}$ ，并积分

$$3G\varepsilon = \sigma_s \operatorname{arcth} \frac{\sigma}{\sigma_s} + C$$

在B点处， $\varepsilon=0, \sigma=0$  可得  $C=0$

$$\sigma = \sigma_s \operatorname{th} \frac{3G\varepsilon}{\sigma_s} \quad \tau = \sigma_s / (\sqrt{3} \operatorname{ch} \frac{3G\varepsilon}{\sigma_s})$$

由  $\varepsilon = \sigma_s / (3G)$  可得:  $\sigma = 0.762\sigma_s, \tau = 0.374\sigma_s$





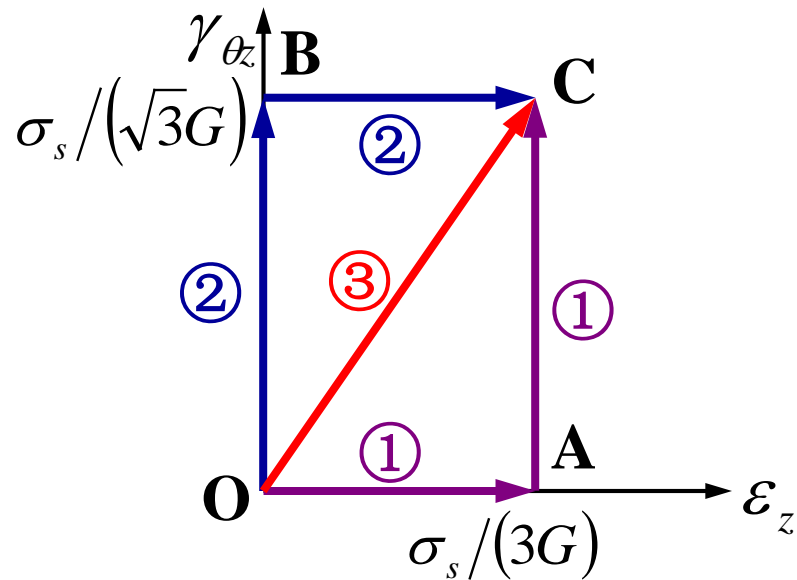
(3)按路径3加载, 使  $\gamma / \varepsilon = \text{const}$

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{G\gamma}{E\varepsilon} = \frac{G\sqrt{3}}{3G} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

由屈服条件可得

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_s^2$$

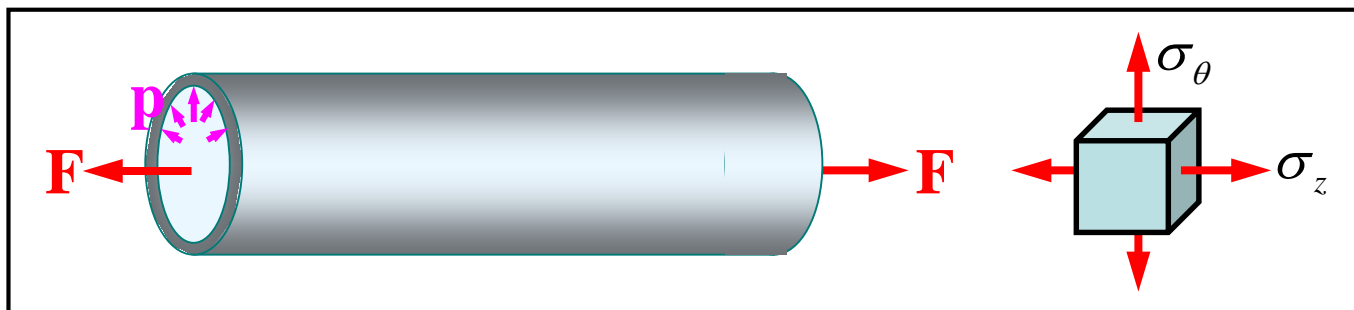
$$\sigma = \frac{\sigma_s}{\sqrt{2}} = 0.707\sigma_s, \tau = \frac{\sigma}{\sqrt{3}} = 0.408\sigma_s$$





## 例题5

一受轴向力作用的薄壁圆筒，其内半径为 $r$ ，壁厚为 $t$ 。若圆筒保持直径不变，只产生轴向伸长，材料不可压缩，试求达到塑性状态时需要多大的内压。



解：在塑性变形过程中，薄壁圆筒的直径保持不变，

周向应变  $\varepsilon_\theta = 0$

薄壁圆筒的伸长只能由筒壁变薄产生，

$$\varepsilon_z = -\varepsilon_r$$

$$e_\theta = 0, \quad e_z = -e_r \quad \frac{de_\theta^p}{s_\theta} = \frac{de_z^p}{s_z} = \frac{de_r^p}{s_r} \quad \Rightarrow \quad s_\theta = 0, \quad s_z = -s_r$$



屈服条件  $(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 = 2\sigma_s^2$

$$\sqrt{3(s_\theta^2 + s_z^2 + s_r^2)/2} = \sigma_s^2$$

$$s_\theta = 0, \quad s_z = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}, \quad s_r = -\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

为了将应力偏量分量表示成应力分量，引进  $\sigma_0$

$$\sigma_\theta = \sigma_0, \quad \sigma_z = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} + \sigma_0, \quad \sigma_r = -\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} + \sigma_0$$

由于  $\sigma_r$  比  $\sigma_\theta$  和  $\sigma_z$  小很多，因此可取  $\sigma_r = 0$

$$\sigma_r = \sigma_\theta - \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \quad \sigma_z = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

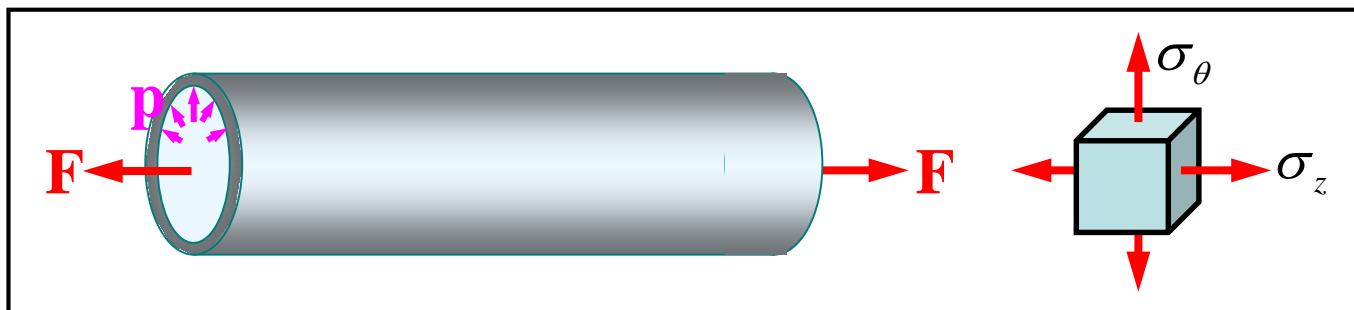
$$\sigma_\theta = \frac{pr}{t} \quad \Rightarrow \quad p = \sigma_\theta \frac{t}{r} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \frac{t}{r}$$





## 例题6

已知受内压 $p$ 和轴向力 $F$ 同时作用的薄壁圆筒，其内径为 $d$ ，壁厚为 $t$ ，且满足体积不可压缩条件，圆筒的屈服极限为 $\sigma_s$ 。若圆筒保持直径不变，试问轴向力 $F$ 应为多大？



解：由例5的分析可知，

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \quad \sigma_z = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \quad \sigma_r = 0$$

由内压 $p$ 引起的轴向力为  $\sigma_z' = \frac{pd}{4t}$

由外力 $F$ 引起的轴向力为  $\sigma_z'' = \frac{F}{\pi t d}$



轴向力之和为

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' = \frac{pd}{4t} + \frac{F}{\pi td} = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

由此得：

$$F = t\pi d \left( \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} - \frac{pd}{4t} \right)$$



## 例题7

设已知厚壁圆球的内半径为 $a$ ，外半径为 $b$ ，受内压 $p$ 的作用。如应力应变关系可用幂函数  $\sigma = A(\varepsilon)^m$  表示，试求厚壁球内应力分量  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi$  的表达式。

解：在球对称问题中，有

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}$$

由体积不可压缩条件可得：

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi = \frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r} = 0$$

解以上常微分方程后，得：

$$u = \frac{B}{r^2} \quad (B \text{ 为常数})$$



因此应变分量为  $\varepsilon_r = -\frac{2B}{r^3}$ ,  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{B}{r^3}$

在球对称问题中，应力强度表达式为：

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2} = \sigma_\varphi - \sigma_r$$

应变强度表达式为：

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3}(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r) = \frac{2}{3} \left( \frac{B}{r^3} + \frac{2B}{r^3} \right) = \frac{2B}{r^3}$$

根据题给条件和单一曲线假设，有：

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = A \left( \frac{2B}{r^3} \right)^m$$



由厚壁球的平衡方程:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + 2(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0$$

结合  $\sigma_\varphi - \sigma_r = A \left( \frac{2B}{r^3} \right)^m$  得:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = 2A \left( \frac{2B}{r^3} \right)^m = 2^{m+1} AB^m \frac{1}{r^{3m}}$$

积分上式后, 得:

$$\sigma_r = 2^{m+1} AB^m \left( -\frac{1}{3m} \right) \frac{1}{r^{3m}} + C$$

在  $r=b$  处,  $\sigma_r = 0$ , 由此得

$$C = \frac{2^{m+1}}{3m} AB^m \frac{1}{b^{3m}}$$



$$\sigma_r = \frac{2^{m+1}}{3m} AB^m \left( \frac{1}{b^{3m}} - \frac{1}{r^{3m}} \right)$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = \sigma_r + A \left( \frac{2B}{r^3} \right)^m = \frac{2^{m+1}}{3m} AB^m \left[ \frac{1}{b^{3m}} + \left( \frac{3m}{2} - 1 \right) \frac{1}{r^{3m}} \right]$$

在 $r=a$ 处,  $\sigma_r = -p$ , 由此得

$$p = \frac{2^{m+1}}{3m} AB^m \left( \frac{1}{a^{3m}} - \frac{1}{b^{3m}} \right)$$

式中,  $m$ 为介于0和1之间的正数,  $A$ 为材料参数, 由于 $p$ 为已知, 故利用上式可以求出 $B$ 的值并求出  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi$



## 例题 8

设一点的应力状态为  $\sigma_{ij}^{(0)} = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} MPa$

当它变为  $\sigma_{ij}^{(I)} = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix} MPa$  或  $\sigma_{ij}^{(II)} = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$

若材料为理想塑性材料，是加载还是卸载。



解：以Mises屈服条件为判断依据

$$\text{屈服函数 } f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_s^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 2[(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)d\sigma_1 + (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)d\sigma_2 + (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)d\sigma_3]$$

$$\textcircled{1} \quad \sigma_{ij}^{(0)} \rightarrow \sigma_{ij}^{(I)} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = -8 \times 10^4 \text{ MPa} < 0 \quad \text{卸载}$$

$$\textcircled{2} \quad \sigma_{ij}^{(0)} \rightarrow \sigma_{ij}^{(II)} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 4 \times 10^4 \text{ MPa} > 0 \quad \text{加载}$$





谢 谢 各 位 ！

沈 彬 助理研究员  
机械与动力工程学院

Email: [binshen@sjtu.edu.cn](mailto:binshen@sjtu.edu.cn)

Tel: 021 3420 6556