

2.4 数值实验

(以下各题都需要利用 Matlab 完成)

2.4.1 实验目的 以 Hilbert 矩阵为例,研究处理病态问题可能遇到的困难.

内容 Hilbert 矩阵的定义是

$$H_n = (h_{i,j})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \cdots & 1/(n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2n-1) \end{pmatrix},$$

它是一个对称正定矩阵,而且 $\text{cond}(H_n)$ 随着 n 的增加迅速增加. 其逆矩阵 $H_n^{-1} = (\alpha_{i,j})$, 这里

$$\alpha_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j} (n+i-1)! (n+j-1)!}{(i+j-1) [(i-1)! (j-1)!]^2 (n-j)! (n-i)!}.$$

1) 画出 $\ln(\text{cond}(H_n)) \sim n$ 之间的曲线(可以用任何一种范数). 你能猜出 $\ln(\text{cond}(H_n)) \sim n$ 之间有何种关系吗? 提出你的猜测并想法验证.

2) 设 D 是 H_n 的对角线元素开方构成的矩阵. $\hat{H}_n = D^{-1} H_n D^{-1}$, 不难看出 \hat{H}_n 依然是对称矩阵, 而且对角线元素都是 1. 把 H_n 变成 \hat{H}_n 的技术称为预处理 (preconditioning). 画出 $\ln(\text{cond}(\hat{H}_n)/\text{cond}(H_n)) \sim n$ 之间的曲线(可以用任何一种范数). 你能对于预处理得出什么印象?

3) 对于 $4 \leq n \leq 12$, 给定不同的右端项 b . 分别用 $x_1 = H_n^{-1}b$, $\hat{x} = \hat{H}_n^{-1}D^{-1}b$, $x_2 = D^{-1}\hat{x}$ 以及 $x_3 = H_n \setminus b$ (这是 Matlab 的一条命令) 求解 $H_n x = b$, 比较计算结果.

4) 取不同的 n 并以 H_n 的第一列为右端向量 b . 用高斯-塞德尔迭代求解 $H_n x = b$, 观察其收敛性. 最后你能对于有关 Hilbert 矩阵的计算得出哪些结论.