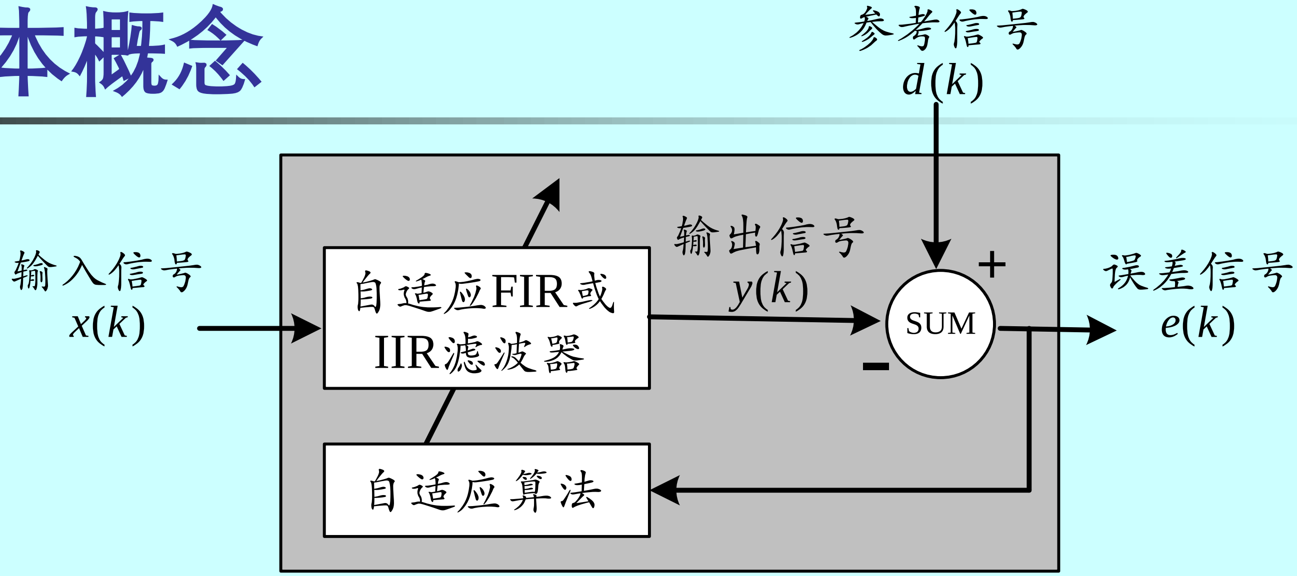
自适应滤波器

《工程信号处理及设备诊断》

提纲

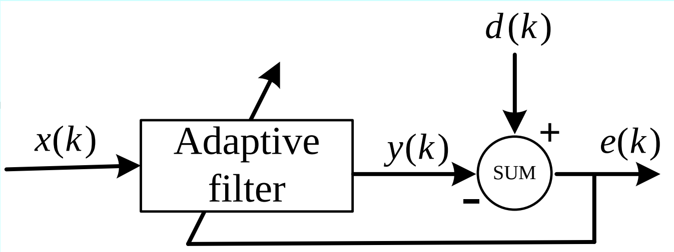
- 基本概念
- 应用

基本概念



- 滤波器输入和输出 $$y(k)=x(k)*h(k)$$
- 定义滤波器的输出与特定参考信号的差值为误差信号 $$e(k)=d(n)-y(k)$$
- 自适应滤波器能够根据输入和参考信号的变化，自适应的调整滤波器系数，使得误差信号的均方值达到最小 $$\boxed{E\left\{e^2(k)\right\}\Rightarrow \min}$$

基本概念



■维纳-霍夫(Wiener-Hopf)方程

- 一般情况下，自适应滤波器均设计成FIR滤波器的形式，假定滤波器系数向量有M个系数

$$\mathbf{H}=[h(0),h(1),\ldots,h(M-1)]^T$$

- 此时，系统的输入、输出关系为

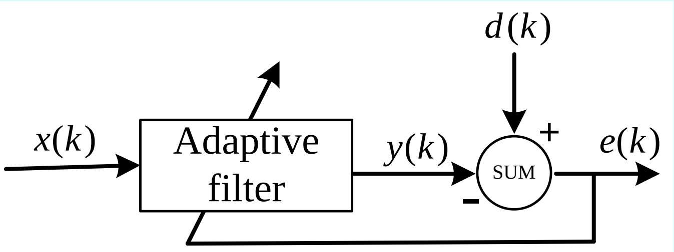
$$y(k)=x(k)*h(k)=\sum_{m=0}^{M-1}h(m)x(k-m)$$

- 误差信号的均方值可写为

$$E\left\{e^2(k)\right\}=E\left\{\left[d(k)-\sum_{m=0}^{M-1}h(m)x(k-m)\right]^2\right\}$$

- 将上式对$h(m)$求偏导，并且令偏导数等于零，则确定使均方误差最小时的$h_{opt}(m)$

基本概念



■ 维纳-霍夫(Wiener-Hopf)方程

- 求导

$$\frac{\partial E\left\{e^2(k)\right\}}{\partial h(j)} = 2E\left\{e(k)\frac{\partial e(k)}{\partial h(j)}\right\} = 0, \quad M-1 \ge j \ge 0$$

当均方误差最小时，估计误差与滤波器的输入正交

$$E\left\{e(k)x(k-j)\right\} = 0$$

$$e(k) = d(k) - \sum_{m=0}^{M-1} h(m)x(k-m)$$

- 维纳-霍夫方程

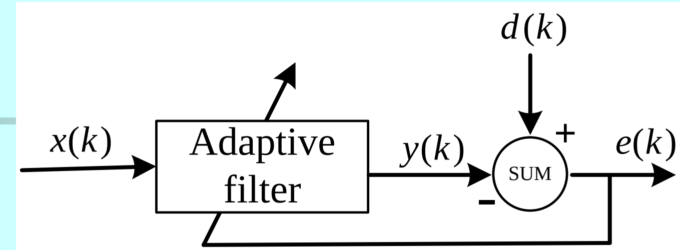
$$r_{xd}(j) = \sum_{m=0}^{M-1} h_{opt}(m) r_{xx}(j-m) \qquad M-1 \ge j \ge 0$$

$r_{xx}(j-m) = E\left\{x(n-j)x(n-m)\right\}$ autocorrelation sequence of $x(k)$

$r_{xd}(j) = E\left\{d(n)x(n-j)\right\}$ cross-correlation sequence of $x(k)$ and $d(k)$

基本概念

■维纳-霍夫(Wiener-Hopf)方程



$$r_{xd}(j)=\sum_{m=0}^{M-1} h_{opt}(m) r_{xx}(j-m) \qquad j=0,1,2,\ldots,M-1$$

■ 矩阵形式维纳-霍夫方程

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(M-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(M-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{xx}(M-1) & r_{xx}(M-2) & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(M-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xd}(0) \\ r_{xd}(1) \\ \vdots \\ r_{xd}(M-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}_o=\mathbf{P}_{xd} \longrightarrow \mathbf{H}_o=\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{P}_{xd}$$

复习

AR模型的正则方程

- Yule-Walker方程

$$r_x(m)=\begin{cases}-\sum_{k=1}^{p}a_k r_x(m-k) & m\ge 1\\ -\sum_{k=1}^{p}a_k r_x(m-k)+\sigma^2 & m=0\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & r_x(2) & \cdots & r_x(p)\\ r_x(1) & r_x(0) & r_x(1) & \cdots & r_x(p-1)\\ r_x(2) & r_x(1) & r_x(0) & \cdots & r_x(p-2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ r_x(p) & r_x(p-1) & r_x(p-2) & \cdots & r_x(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma^2\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

一个p阶的AR模型共有p+1个参数，即$a_1,\ldots,a_p$, σ^2 , 只要知道$x(n)$的前p+1个自相关函数值，就可以通过求解线性方程组解出AR模型参数的值

基本概念

- 维纳-霍夫(Wiener-Hopf)方程 $\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}_o=\mathbf{P}_{xd}$

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(M-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(M-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{xx}(M-1) & r_{xx}(M-2) & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(M-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xd}(0) \\ r_{xd}(1) \\ \vdots \\ r_{xd}(M-1) \end{bmatrix}$$

- 定义输入向量为：

$$\mathbf{x}(k)=\left[x(k),x(k-1),\cdots,x(k-M+1)\right]^T$$

- 输入向量$M\times M$的相关矩阵可写为

$$\mathbf{R}_{xx}=E\left\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\right\}$$

- 输入向量与期望响应的$M\times 1$互相关向量可写为

$$\mathbf{P}_{xd}=E\left\{\mathbf{x}(k)d(k)\right\}$$

基本概念

- 自适应滤波器的最速下降算法
  - 滤波器系数的直接算法

$$\mathbf{H}_o = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{P}_{xd}$$

  - 虽然通过上式可以实现滤波器最优系数的求解，但实际中并不利用相关矩阵的求逆来实现。这是因为对于庞大的矩阵，求逆将会带来巨大的计算量。
  - 滤波器的最优求解一般都通过迭代的方式
  - 定义代价函数J(**H**)，J(**H**)是滤波器系数向量**H**的函数。通过多次迭代使滤波器的系数向量逐渐趋近于最优解$\mathbf{H}_o$，并且对于所有的**H**满足

$$\mathrm{J}\left(\mathbf{H}_0\right) \le \mathrm{J}\left(\mathbf{H}\right)$$

基本概念

- 自适应滤波器的最速下降算法
  - 迭代过程的一般描述为：从某一初始猜想**H(0)**出发，通过迭代依次产生一系列的滤波器系数向量**H(1), H(2) , …**使得代价函数在算法的每次迭代都是下降的，即

$$\mathrm{J}\left(\mathbf{H}(k+1)\right) < \mathrm{J}\left(\mathbf{H}(k)\right)$$

  - 常用迭代方法是最速下降法，即沿着代价函数**J(H)**的负梯度方向，连续地调整滤波器系数向量。迭代过程可以表示为：

$$\mathbf{H}(k+1) = \mathbf{H}(k) - \frac{1}{2}\mu\nabla \mathrm{J}\left(\mathbf{H}(k)\right)$$

  - 其中 μ 是步长参数，1/2因子的引入是为了数学上的处理方便

基本概念

- 自适应滤波器的最速下降算法
  - 代价函数J(H)用误差信号的均方值表示

$$J\left(\mathbf{H}(k)\right)=E\left\{e\left(k\right)^2\right\}$$

$$\mathbf{x}\left(k\right)=\left[x\left(k\right),x\left(k-1\right),\cdots,x\left(k-M+1\right)\right]^T$$

$$\mathbf{H}(k)=[h(0),h(1),\ldots,h(M-1)]^T$$

$$e(k)=d(k)-\sum_{m=0}^{M-1}h(m)x(k-m)$$
$$=d(k)-\mathbf{x}^T(k)\mathbf{H}(k)$$

$$J\left(\mathbf{H}\left(k\right)\right)=E\left\{d(k)^2\right\}-\mathbf{H}^T\left(k\right)\mathbf{P}_{xd}-\mathbf{P}_{xd}^T\mathbf{H}\left(k\right)+\mathbf{H}^T\left(k\right)\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}\left(k\right)$$

基本概念

- 自适应滤波器的最速下降算法
  - 代价函数J(H)对H求导，可得

$$\mathrm{J}\left(\mathbf{H}(k)\right)=E\left\{d(k)^{2}\right\}-\mathbf{H}^{T}(k)\mathbf{P}_{xd}-\mathbf{P}_{xd}^{T}\mathbf{H}(k)+\mathbf{H}^{T}(k)\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}(k)$$

$$\nabla J\left(\mathbf{H}(k)\right)=-2\mathbf{P}_{xd}+2\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}(k)$$

  - 最速下降算法迭代过程

$$\mathbf{H}(k+1)=\mathbf{H}(k)-\frac{1}{2}\mu\nabla \mathrm{J}\left(\mathbf{H}(k)\right)=\mathbf{H}(k)+\mu[\mathbf{P}_{xd}-\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}(k)]$$

$$e(k)=d(k)-\mathbf{x}^{T}(k)\mathbf{H}(k)$$

$$\mathbf{R}_{xx}=E\left\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^{T}(k)\right\}$$

$$\mathbf{P}_{xd}=E\left\{\mathbf{x}(k)d(k)\right\}$$

$$\mathbf{H}(k+1)=\mathbf{H}(k)+\mu E\left\{\mathbf{x}(k)e(k)\right\}$$

  - 当输入信号和误差信号正交时，系数向量达到最优解$\mathbf{H}_{o}$

基本概念

- 最小均方(LMS, least-mean-square)自适应滤波器算法
  - 最速下降算法需要计算输入向量的自相关矩阵$\mathbf{R}_{xx}$及其与期望响应的互相关向量$\mathbf{P}_{xd}$
  - 最小均方自适应迭代算法是利用$\mathbf{R}_{xx}$和$\mathbf{P}_{xd}$的瞬时估计值实现迭代

$$\hat{\mathbf{P}}_{xd} = \mathbf{x}(k)d(k)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{R}_{xx} = E\left\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\right\}}$$

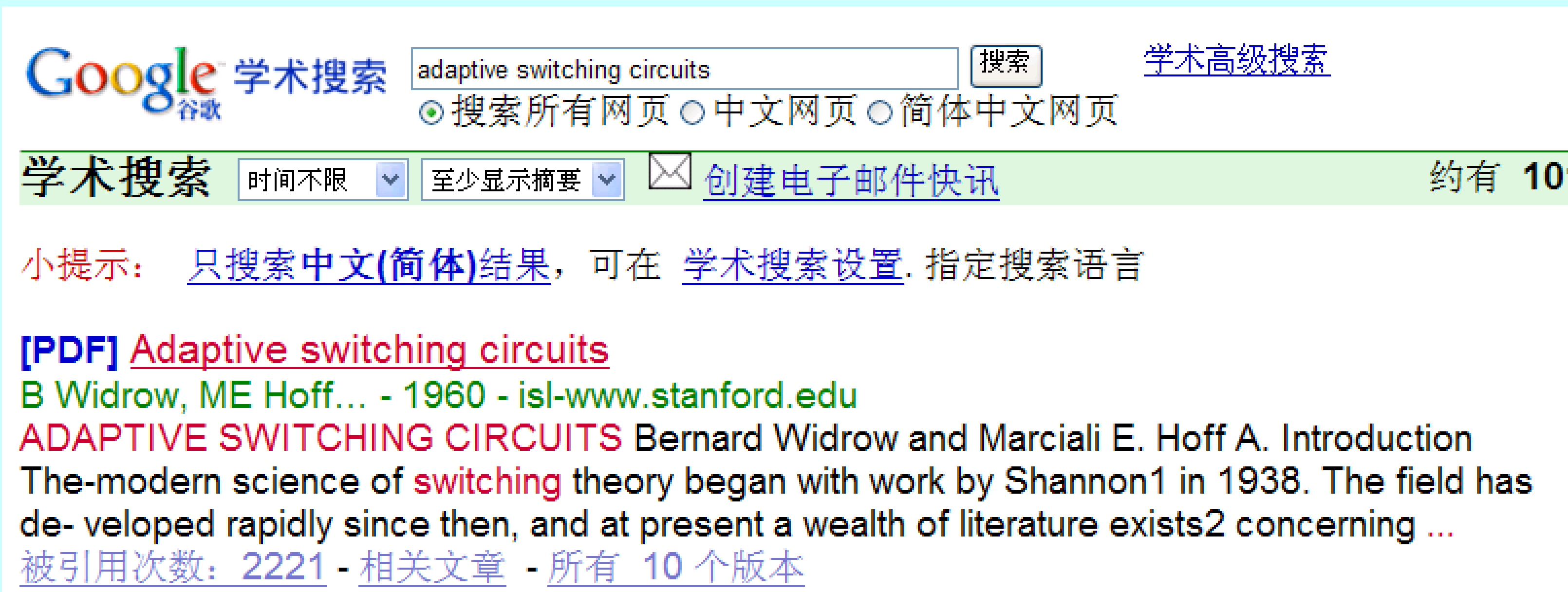
$$\boxed{\mathbf{P}_{xd} = E\left\{\mathbf{x}(k)d(k)\right\}}$$

$$\mathbf{x}(k) = \left[x(k), x(k-1), \cdots, x(k-M+1)\right]^T$$

基本概念

■ LMS自适应滤波器算法

- LMS算法是Widrow和Hoff在1960年的一次学术会议上提出的，该算法的显著特点就是简单而且有效，常作为其他线性自适应滤波算法的参照标准



基本概念

■LMS自适应滤波器算法

- LMS算法迭代过程

$$\hat{\mathbf{H}}(k+1)=\hat{\mathbf{H}}(k)+\mu[\mathbf{x}(k)e(k)]$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx}=\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^{T}(k) \qquad \hat{\mathbf{P}}_{xd}=\mathbf{x}(k)d(k)$$

$$\hat{\mathbf{H}}(k+1)=\hat{\mathbf{H}}(k)+\mu[\hat{\mathbf{P}}_{xd}-\hat{\mathbf{R}}_{xx}\mathbf{H}(k)]$$

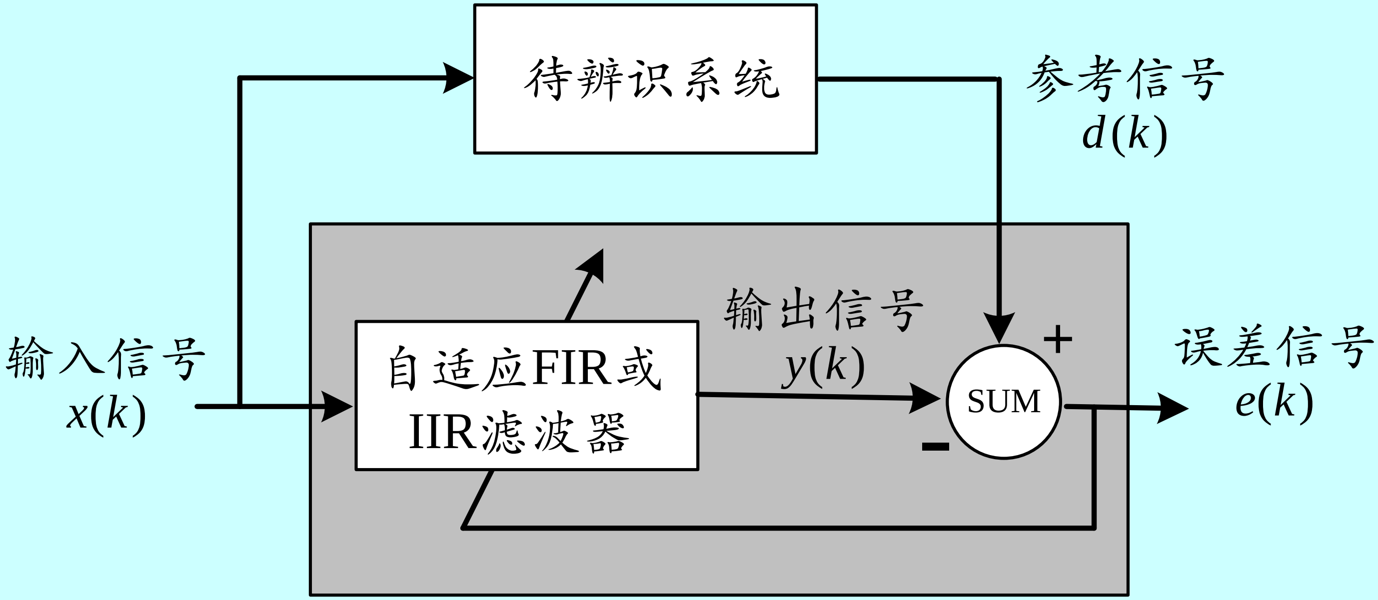
- 由于梯度噪声的存在，在迭代结束时，代价函数将不再收敛于$J(\mathbf{H}_o)$，其稳定解与维纳解$J(\mathbf{H}_o)$相差的程度 称之为失调。在设计自适应滤波器时，失调是可以控制的。采用较小的步长参数μ，可以很大程度上削弱使梯度噪声对滤波器系数的影响。
- 但是步长参数μ取得过小会是迭代计算变慢，对外界的变化不灵敏

自适应滤波器的应用

- 时变在线系统辨识
- 自适应噪声消除
  - 声音信号的谐波干扰消除
  - 正弦信号里的随机噪声消除
  - 管道噪声自适应消除
  - 胎儿心电监护

自适应滤波器的应用

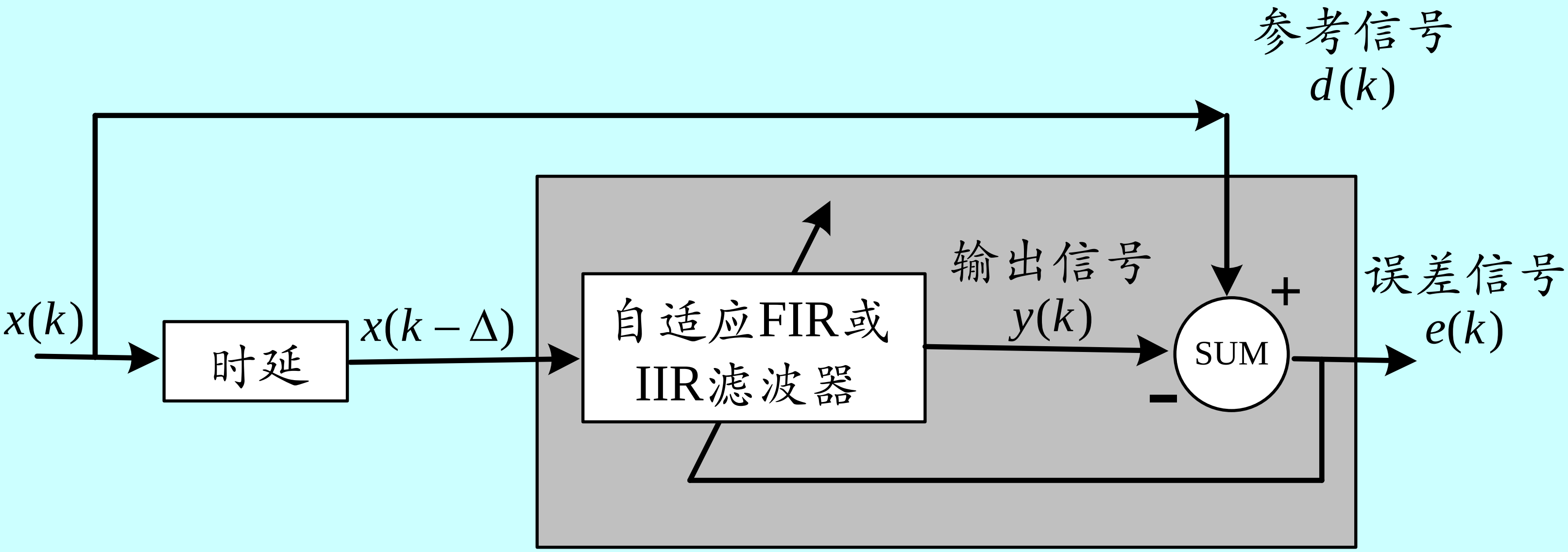
■ 系统辨识



adaptive_filters_01_system_ID.m

自适应滤波器的应用

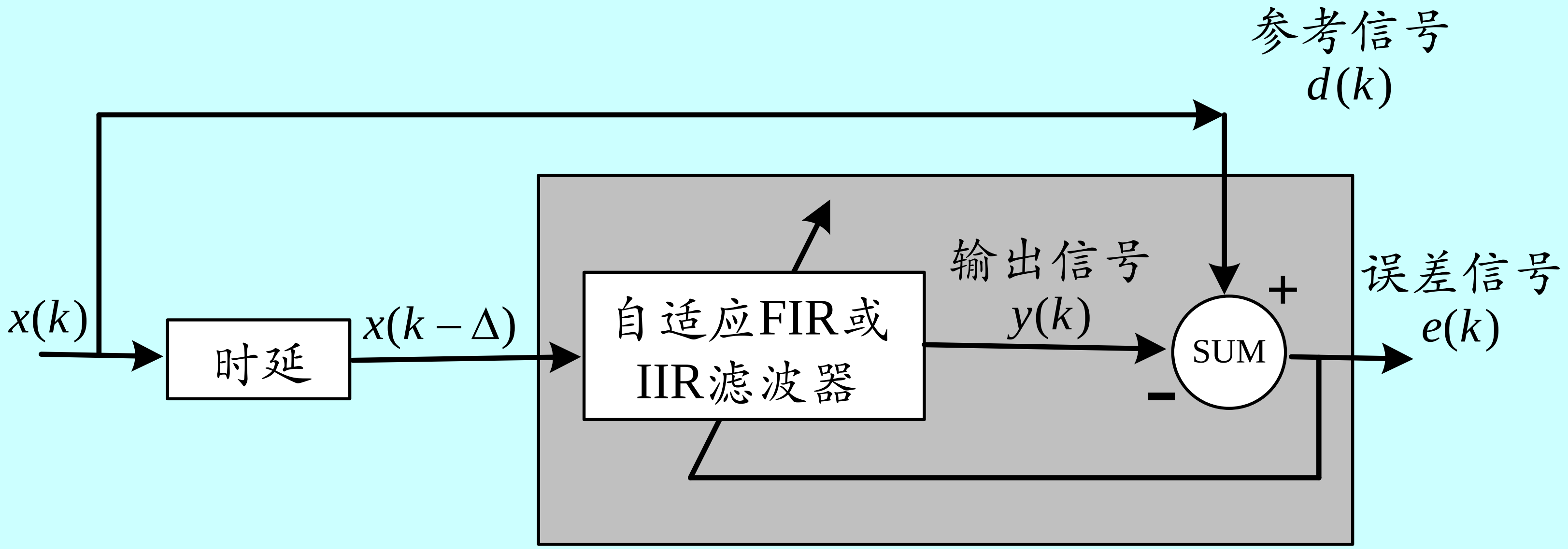
- 自适应噪声消除
  - 声音信号的谐波干扰消除



adaptive_filters_02_adapt_noise_cancellation.m

自适应滤波器的应用

- 自适应噪声消除
  - 正弦信号里的随机噪声消除

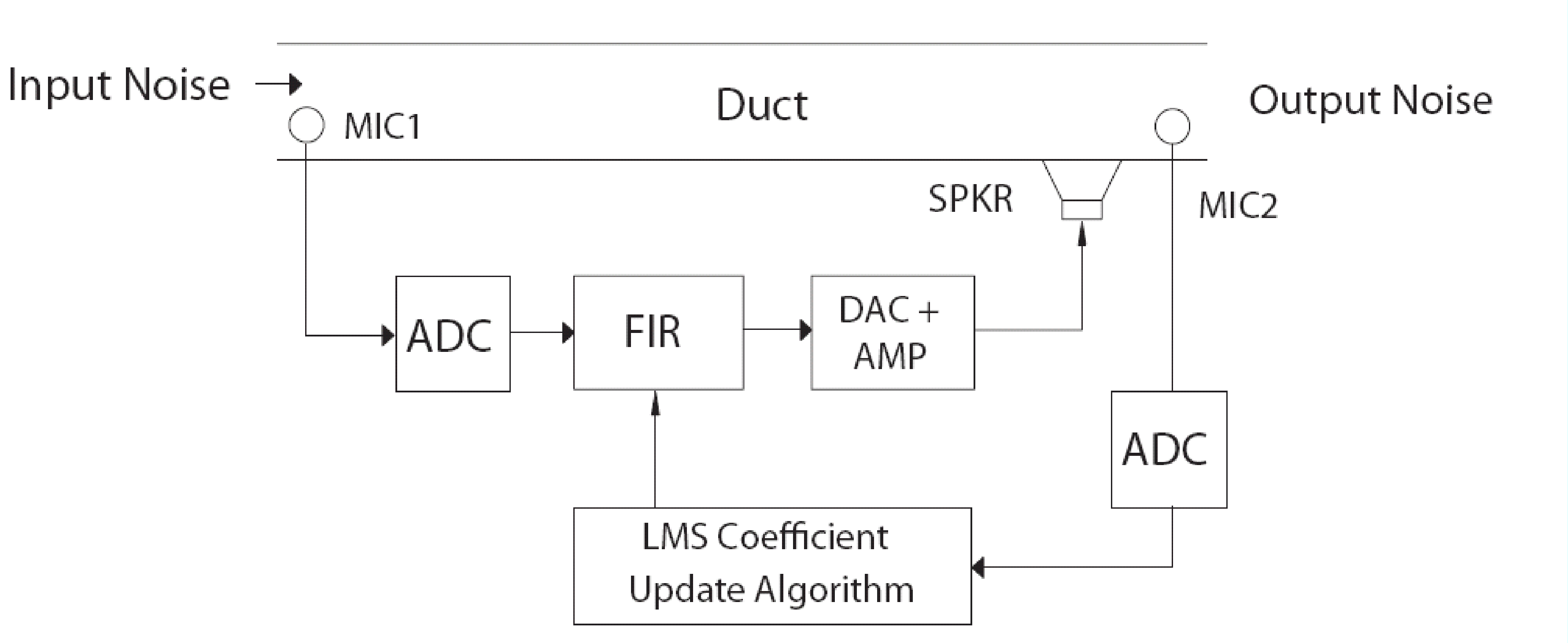


adaptive_filters_03_adapt_noise_cancellation.m

自适应滤波器的应用

自适应噪声消除

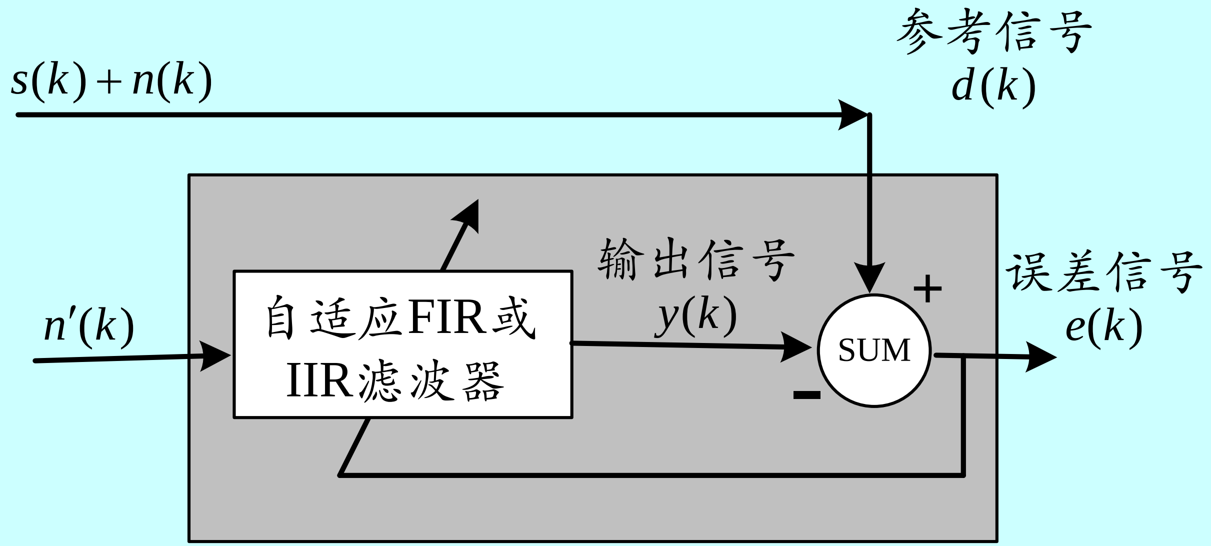
- 管道噪声自适应消除



adaptive_filters_04_adapt_noise_cancellation.m

自适应滤波器的应用

- 自适应噪声消除
  - *胎儿心电监护*



adaptive_filters_05_adapt_noise_cancellation.m

The End

谢谢！

请批评指正