代入 x_i 的数值并化简，得

$$\begin{cases}2a+b=-1\\ a=0\end{cases}$$

所以　$a=0,\ b=-1,\ l_2(x)=-(x-1)(x-3)$

故
$$\begin{aligned}P_3(x)=&-\frac{1}{2}(x-2)^2(x-3)\cdot 2-\\&(x-1)(x-3)\cdot 4+\\&\frac{1}{2}(x-1)(x-2)^2\cdot 12-\\&3(x-1)(x-2)(x-3)=\\&2x^3-9x^2+15x-6\end{aligned}$$

解三　用构造差商表加取极限的办法来做.

设 $y=f(x)$ 具有四阶连续导数. 取 $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ x_4=x_2+h$，构造差商表如下：

x_i	y_i	一阶差商	二阶差商	三阶差商
1	2			
2	4	2		
3	12	8	3	
$2+h$	$f(2+h)$	$\dfrac{f(2+h)-12}{h-1}$	$\dfrac{f(2+h)-8h-4}{h(h-1)}$	$\dfrac{f(2+h)-3h^2-5h-4}{h(h^2-1)}$

利用牛顿插值公式，有

$$\widetilde{P}_3(x)=2+2(x-1)+3(x-1)(x-2)+\frac{f(2+h)-3h^2-5h-4}{h(h^2-1)}(x-1)(x-2)(x-3)$$

其余项为

$$\widetilde{R}_3(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi_h)(x-1)(x-2)(x-3)(x-2-h)$$

令 $h\to 0$，注意到 $f(2)=4$，则有

$$\begin{aligned}P_3(x)=&\lim_{h\to 0}\widetilde{P}_3(x)=2+2(x-1)+3(x-1)(x-2)+\\&\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(2+h)-4}{h(h^2-1)}-\frac{3h^2+5h}{h(h^2-1)}\right]\times\\&(x-1)(x-2)(x-3)=\\&2+2(x-1)+3(x-1)(x-2)+\\&(-f'(2)+5)(x-1)(x-2)(x-3)=\\&3x^2-7x+6+2(x-1)(x-2)(x-3)=\\&2x^3-9x^2+15x-6\end{aligned}$$

$$R_3(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-1)(x-2)^2(x-3)$$

注记　上述解法中，解法一、二是我们特别推荐的，但这两种办法不能同时求出 $R_3(x)$. 解法三是学生做题时容易想到的，但一般技术上要求较高，这个方法同时也求出了 $R_3(x)$. 下面给出另一种常用的求 $R_3(x)$ 的办法：

根据题意，余项 $R_3(x)=f(x)-P_3(x)$ 应具有形式：

$$R_3(x)=K(x)(x-1)(x-2)^2(x-3)$$

作辅助函数 $\varphi(t)=f(t)-P_3(t)-K(x)(t-1)(t-2)^2(t-3)$ 则 $\varphi(t)$ 在点 $x,1,2,3$ 处有 5 个零点（$t=2$ 为二重零点），反复应用罗尔定理，知至少有一个 $\xi\in(1,3)$，使得 $\varphi^{(4)}(\xi)=0$，即

$$\varphi^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-4!K(x)=0$$

所以
$$K(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

$$R_3(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-1)(x-2)^2(x-3)$$

可以看出，$R_3(x)$ 的表达式是很有规律的.

例 1-11　求一个次数不高于四的多项式 $P_4(x)$，使它满足 $P_4(0)=P_4'(0)=0,\ P_4(1)=P_4'(1)=1,\ P_4(2)=1.$

分析　这又是一个非标准插值问题，我们可以按上题中的各种解法的思路去做. 但上题解法一在这里又可按两种方法去做. 一种是先求牛顿或拉格朗日型插值，再通过待定系数法求 $P_4(x)$；另一种是先求埃尔米特插值，再通过待定系数法确定 $P_4(x)$. 下面仅给出三种做法，供读者参考.

$$\frac{1}{4}x^2(x-3)^2$$

注记 ① 本题也可不求 $l_0(x)$ 和 $\beta_0(x)$，因 $y_0 = y_0' = 0$；

② 其它类型的非规则插值问题可仿照上述方法去做．

例 1－12 已知下列数值表，求符合表值的插值多项式，并给出插值余项表达式．

x_i	0	1	2
y_i	2	1	2
y_i'	-2	-1	
y_i''	-10		

分析 这是一个带一阶、二阶导数的非标准插值问题，6 个条件可确定一个 5 次多项式，前述各种方法原则上都适用，读者可自行练习．下文仅给出用拉格朗日插值法加待定系数法的做法，供读者理解、体会．

解答 首先作一个满足条件

x	0	1	2
$P_2(x)$	2	1	2

的拉格朗日多项式 $P_2(x)$，容易求得

$$P_2(x) = x^2 - 2x + 2$$

因此，所求的 5 次多项式 $P_5(x)$ 可表示为

$$P_5(x) = P_2(x) + x(x-1)(x-2)H_2(x)$$

对 $P_5(x)$ 求导两次，得

$$P_5'(x) = P_2'(x) + [(x-1)(x-2) + x(x-2) + x(x-1)]H_2(x) + x(x-1)(x-2)H_2'(x)$$

$$P_5''(x) = P_2''(x) + [x-2+x-1+x-2+x+x-1+x]H_2(x) + 2[(x-1)(x-2) + x(x-2) + x(x-1)]H_2'(x) + x(x-1)(x-2)H_2''(x)$$

所以 $P_5'(0) = P_2'(0) + 2H_2(0) = -2$

$$P_5'(1) = P_2'(1) - H_2(1) = -1$$

$$P_5''(0) = P_2''(0) - 6H_2(0) + 4H_2'(0) = -10$$

由 $P_2'(0) = -2$，$P_2'(1) = 0$，$P_2''(0) = 2$ 得

$$H_2(0) = [-P_5'(0) - 2]/2 = 0$$

$$H_2(1) = P_5'(1) + 1 = 1$$

$$H_2'(0) = \frac{1}{4}[6H_2(0) - P_2''(0) - 10] = -3$$

因此，$H_2(x)$ 满足插值条件

x	0	1
$H_2(x)$	0	1
$H_2'(x)$	-3	

再找 $P_1(x)$，满足 $P_1(0) = 0$，$P_1(1) = 1$，则 $P_1(x) = \frac{x-1}{0-1} \times 0 + \frac{x-0}{1-0} \times 1 = x$，故 $H_2(x)$ 可以表示为

$$H_2(x) = P_1(x) + A(x-1)x$$

容易验证 $H_2(x)$ 满足 $H_2(0) = 0$，$H_2(1) = 1$，利用导数条件，可确定 $A = P_1'(0) + 3 = 4$，故

$$H_2(x) = x + 4(x-1)x = 4x^2 - 3x$$

$$P_5(x) = P_2(x) + x(x-1)(x-2)H_2(x) = 4x^5 - 15x^4 + 17x^3 - 5x^2 - 2x + 2$$

类似于例 1－10 的办法，可得余项 $R_5(x) = \frac{1}{6!}f^{(6)}(\xi)(x-0)^3(x-1)^2(x-2)$．

例 1-13 若 $f(x)=x^7+x^3+1$,求 $f[2^0,\ 2^1,\ \cdots,\ 2^7]$ 和 $f[2^0,\ 2^1,\ \cdots,\ 2^8]$.

分析 本题求 $f(x)$ 的 7 阶和 8 阶差商.对于一般的函数 $f(x)$,可以按定义通过构造差商表的办法来求.但对于多项式,差商与导数的关系可以利用,差商阶数与多项式的次数之间的关系也可利用.

解答 由差商与导数之间的关系

$$f[x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n]=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

以及 $f^{(7)}(x)=7!$,$f^{(8)}(x)=0$

$$f[2^0,\ 2^1,\ \cdots,\ 2^7]=\frac{1}{7!}7!=1$$

知

$$f[2^0,\ 2^1,\ \cdots,\ 2^8]=\frac{1}{8!}\times 0=0$$

例 1-14 若 $f(x)=\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$,$x_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 互异,求 $f[x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_p]$ 之值,这里 $p\leqslant n+1$.

分析 由题中 $f(x)$ 的表达式知,$f(x_i)=0\ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$,因之由差商 $f[x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_p]=\sum\limits_{j=0}^{p}f(x_j)/\omega'_{p+1}(x_j)$ 这一性质,有可能得出本题结论.若直接用差商与导数的关系 $f[x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_p]=\dfrac{1}{p!}f^{(p)}(\xi)$,$p\leqslant n$ 时由于 ξ 不知道,因之难以得出 p 阶差商之值.若用定义去求,显然太繁琐.

解答 由差商性质

$$f[x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_p]=\sum_{j=0}^{p}f(x_j)/\omega'_{p+1}(x_j)$$

及 $f(x_j)=0$,$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$,有

$$f[x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_p]=0,\ p\leqslant n$$

而 $p=n+1$ 时,

$$f[x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{n+1}]=\sum_{j=0}^{n+1}f(x_j)/\omega'_{n+2}(x_j)=\frac{f(x_{n+1})}{\omega'_{n+2}(x_{n+1})}=\frac{f(x_{n+1})}{f(x_{n+1})}=1$$

$=(x_{n+1}-x_0)(x_{n+1}-x_1)\cdots(x_{n+1}-x_n)$

综上所述,我们有

$$f[x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_p]=\begin{cases}0,\ p\leqslant n\\ 1,\ p=n+1\end{cases}$$

例 1-15 在区间 $[a,b]$ 上任取插值节点:

$$a\leqslant x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n\leqslant b$$

作函数 $f(x)$ 的不高于 n 次的插值多项式 $P_n(x)$,假定 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上任意次可微,且 $|f^{(k)}(x)|\leqslant M$,$k=0,1,2,\cdots$,$x\in[a,b]$,当 $n\to\infty$ 时,序列 $\{P_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上是否收敛于 $f(x)$?

分析 是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)=f(x)$,关键要看在题中条件下,插值余项 $R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\omega_{n+1}(x)$ 是否趋于 $0(n\to\infty)$,对任意的 $x\in[a,b]$.因此,解答此题,需从插值余项的估计出发.

解答 设 $P_n(x)$ 是以 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$ 为节点的次数不超过 n 的插值多项式,由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上任意次可微,故有

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\omega_{n+1}(x),\quad \xi\in[a,b]$$

显然 $|\omega_{n+1}(x)|\leqslant(b-a)^{n+1}$.又由已知条件 $|f^{(k)}(x)|\leqslant M$,$n=1,\ 2,\cdots$,因此

$$|R_n(x)|=|f(x)-P_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

由高等数学知,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}=0$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|M\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}=0\right|$,对任意 $x\in[a,b]$ 成立.因此 $P_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

例 1-16 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数，且 $f(a)=f(b)=0$，求证：$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$.

分析 本题要证结论是 $|f(x)|$ 与 $|f''(x)|$ 之间的关系，而用泰勒展开方法难以奏效．因为用泰勒展开，不外乎在 a,b 或使 $f'(x)=0$ 的点处展开．但这些点处的展开式都不能直接得到 $f(x)$ 与 $f''(x)$ 之间的关系式．由于本章内容是代数插值，而且题设 $f(a)=f(b)=0$，容易想到，若用线性插值时，线性插值函数只能为 0，且误差为 $\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-a)(x-b)$，直接把 $f(x)$ 与 $f''(x)$ 联系起来，有可能得到题断．

证明 以 a、b 为节点进行插值，得

$$f(x)=P_1(x)+R_1(x)=\frac{(x-b)}{(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)}{(b-a)}f(b)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)(x-b)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)(x-b),\quad a<\xi<b$$

由于 $|(x-a)(x-b)|$ 在 $x=\frac{1}{2}(a+b)$ 处取得最大值，故

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|\cdot\max_{a\leqslant x\leqslant b}|(x-a)(x-b)|=\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$$

例 1-17 设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为 $n+1$ 个互异的插值节点，$l_i(x)$ $(i=0,1,\cdots,n)$ 为拉格朗日插值基函数．证明：

(1) $\sum\limits_{i=0}^{n}l_i(x)\equiv 1$;

(2) $\sum\limits_{i=0}^{n}l_i(x)x_i^k\equiv x^k,\quad k=0,1,2,\cdots,n$;

(3) $\sum\limits_{i=0}^{n}(x_i-x)^k l_i(x)\equiv 0,\quad k=0,1,2,\cdots,n$;

(4) $\sum\limits_{i=0}^{n}l_i(0)x_i^k=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k=1,2,\cdots,n\\ (-1)^n x_0x_1\cdots x_n, & k=n+1\end{cases}$

分析 本题有四个小题，都是关于插值基函数 $l_i(x)$ $(i=0,1,\cdots,n)$ 的性质的一些问题．考虑证明方法时，应该对常数进行插值和对 x^k 进行插值方面入手，通过耐心推证或巧妙地选取被插函数，有可能得到所需结论．

证明 (1) 对 $f(x)\equiv 1$，在 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处进行 n 次拉格朗日插值，则有

$$1=P_n(x)+R_n(x)=\sum_{i=0}^{n}l_i(x)\times 1+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\omega_{n+1}(x)$$

由于 $f^{(n+1)}(\xi)=0$，故有 $\sum\limits_{i=0}^{n}l_i(x)\equiv 1$.

(2) 对 $f(x)=x^k(k=0,1,\cdots,n)$ 进行 n 次拉格朗日插值，就有

$$\sum_{i=0}^{n}l_i(x)x_i^k\equiv x^k$$

（由此推论：任何次数不超过 n 的多项式的 n 次拉格朗日插值多项式就是它本身．）

(3) 将 $(x_i-x)^k$ 按二项式展开，得

$$(x_i-x)^k=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}x_i^jx^{k-j}$$

代入题断左端，得

$$\sum_{i=0}^{n}(x_i-x)^k l_i(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}x_i^jx^{k-j}\right)l_i(x)=$$

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}x^{k-j}\sum_{i=0}^{n}x_i^j l_i(x)$$

利用(2)的结论，有

$$\sum_{i=0}^{n}(x_i-x)^k l_i(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}x^{k-j}x^j=$$

$$x^k\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}=0$$

(4) 本小题可按(1)的思路去做．由拉格朗日插值公式，得

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}l_i(x)f(x_i)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\omega_{n+1}(x)$$

下对 $x^k(k=0,1,\cdots,n+1)$ 进行讨论：

当 $f(x)\equiv x^0=1$ 时，有 $\sum_{i=0}^{n}l_i(x)x^0\equiv 1$，故有

$$\sum_{i=0}^{n}l_i(0)\equiv 1;$$

当 $f(x)=x^k(k=1,2,\cdots,n)$ 时，由于 $f^{(n+1)}(\xi)=0$，故有

$$\sum_{i=0}^{n}l_i(x)x_i^k=x^k \qquad (\text{或由(2)知})$$

令 $x=0$，则有 $\quad \sum_{i=0}^{n}l_i(0)x_i^k=0;$

当 $f(x)=x^{n+1}$ 时，$f^{(n+1)}(\xi)=(n+1)!$，因此有 $R_n(x)=\omega_{n+1}(x)$，所以有

$$\sum_{i=0}^{n}l_i(x)x_i^{n+1}+\omega_{n+1}(x)=x^{n+1}$$

令 $x=0$，则

$$\sum_{i=0}^{n}l_i(0)x_i^{n+1}+\omega_{n+1}(0)=0$$

即 $\quad \sum_{i=0}^{n}l_i(0)x_i^{n+1}=-\omega_{n+1}(0)=(-1)^n x_0x_1\cdots x_n$

例 1-18 若 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 有互不相同的 n 个实根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，试证明

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0, & 0\leqslant k\leqslant n-2\\ a_0^{-1}, & k=n-1\end{cases}$$

分析 本题表达式让人容易想起差商的性质，即差商可用函数的线性组合表达出来这一性质．本题中虽然函数为 x^k，但分母不一样．然而题中已知 $f(x)$ 有 n 个实根，则 $f(x)=a_0\omega_n(x)$，因此，利用这些条件有可能得出题中结论．

证明 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=a_0(x-x_1)\cdots(x-x_n)=a_0\omega_n(x)$，$\varphi(x)=x^k$，则

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{a_0\omega_n'(x_j)}=\frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{\omega_n'(x_j)}$$

由差商性质，得

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{\omega_n'(x_j)}=\frac{1}{a_0}\varphi[x_1,x_2,\cdots,x_n]$$

再由差商与导数的关系，有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\frac{1}{a_0}\varphi[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\frac{1}{a_0}\frac{\varphi^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}=$$

$$\frac{1}{a_0}\frac{(x^k)^{(n-1)}}{(n-1)!}$$

所以，当 $0\leqslant k\leqslant n-2$ 时，上式为 0；当 $k=n-1$ 时上式为 a_0^{-1}.

例 1-19 利用差分性质证明：

(1) $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

(2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=[\frac{1}{2}n(n+1)]^2$

分析 本题结论是知道的．但这里要用差分性质来证，那就必须对某个函数构造差分．因此关键要寻找一个函数，使其利用差分的某个性质，经过推导，得出题断．

下面仅对(1)的结论给出两种证法，(2)的结论类似地可证．

证一 容易看出，当令 $g(n)=1+2+\cdots+n$ 时，$g(n)-g(n-1)=\Delta g_{n-1}=n$，为此可得差分表如下：

i	$g(i)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	0				
1	1	1			
2	$1+2$	2	1		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$n-1$	$g(n-1)$	$n-1$	1	0	
n	$g(n)$	n	1	0	

利用差分公式 $g_{i+n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^k g_i$，取 $i=0$，则

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^k g(0)=$$
$$g(0)+\binom{n}{1}\Delta g(0)+\binom{n}{2}\Delta^2 g(0)=$$
$$0+n\cdot 1+\frac{1}{2}n(n-1)\cdot 1=\frac{1}{2}n(n+1)$$

即 $$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

证二 由于

$$g(n)=\Delta g(n-1)+g(n-1)=$$
$$\Delta g(n-1)+\Delta g(n-2)+g(n-2)=\cdots=$$
$$\Delta g(n-1)+\Delta g(n-2)+\Delta g(n-3)+\cdots+$$
$$\Delta g(1)+g(1)$$

所以定义函数 $g(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$，只要证明 $\Delta g(i-1)=i\ (i=1,2,\cdots,n-1)$ 且 $g(1)=1$ 即可证得题断．事实上，$\Delta g(i-1)=g(i)-g(i-1)=\frac{1}{2}i(i+1)-\frac{1}{2}(i-1)i=\frac{1}{2}i(i+1-i+1)=\frac{1}{2}i\cdot 2=i\ (i=1,2,\cdots,n-1)$，$g(1)=1$ 是显然的．故 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$．

例 1-20 设 $l_0(x)$ 是以 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为插值点的插值基函数：

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$

试证明 $$l_0(x)=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$

分析 $l_0(x)$ 是一个 n 次多项式，因此对它进行牛顿 n 次多项式插值，二者应该相等．从题中要证的结论来看，各项分子表达式正好和牛顿多项式相同，只要能证明 $l_0(x)$ 的各阶差商刚好是题断中各项分母表达式的倒数即可．

证一 对 $l_0(x)$ 作差商表如下：

k	x_k	$l_0(x_k)$	$l_0[x_{k-1},x_k]$	$l_0[x_{k-1},x_k,x_{k+1}]$	$\cdots$	n 阶差商
0	x_0	1				
1	x_1	0	$\frac{1}{x_0-x_1}$			
2	x_2	0	0	$\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n	x_n	0	0	0	0	$\frac{1}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)}$

故由牛顿插值公式得

$$l_0(x)=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$

本题也可用纯粹代数运算导出，下面给出其具体推证．

证二

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots[(x-x_0)+(x_0-x_n)]}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}=$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}$$

对每次这样得到的后一项作与上面相同的运算，即可得

$$l_0(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}+\cdots+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+1$$

例 1-21 给定 x_0、$x_1\in[a,b]$，$x_0<x_1$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有三阶连续导数，证明：

$$f(x)=-\frac{(x-x_1)(x-2x_0+x_1)}{(x_1-x_0)^2}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{x_0-x_1}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2}f(x_1)+R(x)$$

这里 $R(x)=\frac{1}{6}(x-x_0)^2(x-x_1)f^{(3)}(\xi)$，$x_0<\xi<x_1$.

分析 这是一个非标准插值问题，且插值条件为

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$
1	x_1	$f(x_1)$	

类似于前面例 1-10，自然有几种证法．

证一 设满足条件 $(x_0,f(x_0))$、$(x_1,f(x_1))$ 的多项式为 $P_1(x)$，则所求插值多项式为

$$P(x)=P_1(x)+A(x-x_0)(x-x_1)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+A(x-x_0)(x-x_1)$$

显然 $P(x)$ 也满足 $P(x_0)=f(x_0)$，$P(x_1)=f(x_1)$．利用 $P'(x_0)=f'(x_0)$，得

$$P'(x_0)=f[x_0,x_1]+A(x_0-x_1)=f'(x_0)$$

解得 $\quad A=(f'(x_0)-f[x_0,x_1])/(x_0-x_1)$

故 $\quad P(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\frac{f'(x_0)-f[x_0,x_1]}{x_0-x_1}(x-x_0)(x-x_1)$

展成 $f(x_0)$、$f(x_1)$、$f'(x_0)$ 的线性组合式，就有题中结论．

关于 $R(x)$ 的表达式，可设 $R(x)=K(x)(x-x_0)^2(x-x_1)$，利用同例 1-10 的办法类似可得．

证二 用插值基函数的办法来证明．设满足给定条件的多项式为

$$P(x)=l_0(x)f(x_0)+\beta_0(x)f'(x_0)+l_1(x)f(x_1)$$

其中 $l_0(x)$、$\beta_0(x)$、$l_1(x)$ 均为次数不超过 2 的多项式，且满足条件：

$$l_0(x_0)=1,\quad \beta_0(x_0)=0,\quad l_1(x_0)=0$$
$$l_0'(x_0)=0,\quad \beta_0'(x_0)=1,\quad l_1'(x_0)=0$$
$$l_0(x_1)=0,\quad \beta_0(x_1)=0,\quad l_1(x_1)=1$$

故可设

$$l_0(x)=(ax+b)(x-x_1),\ \beta_0(x)=c(x-x_0)(x-x_1)$$
$$l_1(x)=d(x-x_0)^2$$

利用 $l_0(x_0)=1$，$l_0'(x_0)=0$，可得 $a=\frac{-1}{(x_0-x_1)^2}$，

$b=\frac{2x_0-x_1}{(x_0-x_1)^2}$, $l_0(x)=-\frac{(x-x_1)(x-2x_0+x_1)}{(x_0-x_1)^2}$;

由 $\beta_0'(x_0)=1$，解得 $c=\frac{1}{x_0-x_1}$，$\beta_0(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{x_0-x_1}$;

由 $l_1(x_1)=1$，解得 $d=\frac{1}{(x_1-x_0)^2}$，$l_1(x)=(x-x_0)^2/(x_1-x_0)^2$，所以

$$P(x)=-\frac{(x-x_1)(x-2x_0+x_1)}{(x_0-x_1)^2}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{x_0-x_1}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2}f(x_1)$$

关于余项 $R(x)$ 的做法同例 1-10.

证三 取 x_0、x_0+h、x_1 为插值节点，按牛顿插值公式，得

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_0+h]+\frac{1}{3!}f^{(3)}(\xi_h)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_0-h)$$

这里 $0<h<x_1-x_0$，$x_0<\xi_h<x_1$. 把 $f(x)$ 变形，有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}[f(x_0)-f(x_1)]+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{x_0-x_1}\{f[x_0,x_0+h]-f[x_0+h,x_1]\}+\frac{1}{3!}f^{(3)}(\xi_h)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_0-h)=$$

$$f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}f(x_0)-\frac{x-x_0}{x_0-x_1}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{x_0-x_1}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0+h-x_1)}\cdot[f(x_0+h)-f(x_1)]+\frac{1}{3!}f^{(3)}(\xi_h)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_0-h)$$

两边取 $h\to 0$ 的极限，有

$$f(x)=\lim_{h\to 0}f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}f(x_0)-\frac{x-x_0}{x_0-x_1}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{x_0-x_1}f'(x_0)-\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)^2}[f(x_0)-f(x_1)]+\frac{1}{3!}f^{(3)}(\xi)(x-x_0)^2(x-x_1)$$

合并即得证.

例 1-22 证明当 $h\to 0$ 时，牛顿插值多项式

$$N_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_0-h)+\cdots+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_0-h)\cdots[x-x_0-(n-1)h]$$

变为泰勒公式

$$P_n(x)=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}y^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

分析 本题 $N_n(x)$ 是以等距节点 $x_0,x_0+h,\cdots,x_0+(n-1)h$、$x_0+nh$ 为插值节点时的牛顿插值多项式. 意思很清楚，要证当 $h\to 0$ 时 $N_n(x)\to P_n(x)$（泰勒多项式）. 由于 $(x-x_0)(x-x_0-h)\cdots(x-x_0-(n-1)h)\to(x-x_0)^n(h\to 0)$ 不成问题，只须证明 $\Delta^k y_0/h^k\to y^{(k)}(x_0)$ 对 $k=1,2,\cdots,n$ 成立即可. 这一点可利用差分与导数的关系来做.

证明 由差分与导数的关系

$$\frac{\Delta^k y_0}{h^k} = y^{(k)}(\xi) = y^{(k)}(x_0 + \theta kh)$$

故有

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^k y_0}{h^k} = \lim_{h\to 0} y^{(k)}(x_0 + \theta kh) = y^{(k)}(x_0),$$

$$k = 1,2,\cdots,n$$

又由于$\lim\limits_{h\to 0}(x - x_0)(x - x_0 - h)\cdots(x - x_0 - (k-1)h) = (x - x_0)^k$,所以

$$\lim_{h\to 0} N_n(x) = P_n(x)$$

三、习题一

1. 已知连续函数 $y = f(x)$ 的如下数值表

x_i	0.10	0.19	0.26	0.31
$f(x_i)$	1.280	2.011	2.351	3.000

试构造差商(均差)表,并求 $f(0.23)$ 的近似值(小数点后至少保留 5 位).

2. 设 $P(x)$ 是一个次数不超过 4 的多项式,并有下列数据

x_i	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	0	14	54	132	260

求 $P(x)$ 的表达式.

3. 已知单调连续函数 $y = f(x)$ 的下列数据

x_i	-1.1	0.0	1.2	2.1
y_i	-2.20	-1.10	1.00	2.10

用插值法计算,x 为多少时 $f(x) \approx 0$(小数点后至少取 4 位).

4. 假设对 $f(x)$ 在步长为 h 的等距节点上造函数表,且 $|f''(x)| \leqslant M$. 证明:在表中任意相邻两点间做线性插值时误差不超过$\frac{1}{8}Mh^2$. 若取 $f(x) = \sin x$,问 h 应取多大才能保证线性插值的误差不大于$\frac{1}{2}\times 10^{-6}$.

5. 用插值法求矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征多项式 $f(\lambda)$.

6. 已知函数表

x_i	x_0	x_1	x_2
y_i	y_0		y_2
y_i'		y_1'	

求一个二次多项式 $H(x)$,使

$$H(x_0) = y_0,\ H'(x_1) = y_1',\ H(x_2) = y_2$$

7. 已知插值条件为

x	1	2	3
y	2	4	12
y'	1		-1

求相应的三次样条函数.

8. 设 $P(x)$ 是任意一个首项系数为 1 的 $n+1$ 次多项式,证明:

(1) $P(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} P(x_k)l_k(x) = \omega_{n+1}(x)$;

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) = \omega_{n+1}(x)$.