§4 插值过程的收敛性

在区间$[a,b]$上给定一个无穷三角矩阵

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (2.4.1)$$

设在$[a,b]$上给了一个函数 $f(x)$，用(2.4.1)中每一横行中的点作为插值点，作出 $f(x)$的插值多项式

$$L_0(x), L_1(x), \cdots, L_{n-1}(x), \cdots.$$

于是

$$L_{n-1}(x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}), k=1,2,\cdots,n, n=1,2,3\cdots.$$

现在我们问：当 n 无限增加时是否在全区间$[a,b]$上有$\lim\limits_{n\to\infty} L_n(x) = f(x)$？这就是问在固定的区间$[a,b]$上，如果加密插值点，插值多项式是否将更逼近被插值的函数？

假如函数 $f(x)$是整函数，可以证明，插值多项式 $L_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛到函数 $f(x)$。（证明见 И. П. Натансон《函数构造论》第三部分第一章§2.）

对于任何一个三角矩阵(2.4.1)，总有一类函数存在，它们按(2.4.1)作出的插值多项式 $L_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛．这类函数一定存在，因为至少整函数就具有这个性质．（当然多项式就是最简单的这种函数.）但是这类函数不能包括所有在$[a,b]$上的连续函数，这就是法伯(G. Faber)定理：对于任何一个三角矩阵（2.4.1)，总有连续函数 $f(x)$存在，它的按(2.4.1)中各横行结点做出的插值多项式 $L_n(x)$在$[a,b]$上不一致收敛到 $f(x)$．（证明见上面引文第三部分第 2 章§1 定理 2.）

但是对于任意一个给定的在$[a,b]$上连续的函数$f(x)$，总存在一个三角矩阵(2.4.1)使按之作出的插值多项式一致收敛到$f(x)$。

这就是马尔钦凯维奇(И. Марчинкевич)定理．（证明见上面引文的定理3.）

法伯定理并没有排除当(2.4.1)给定时，对任何一个连续函数作出的插值多项式在某些点上甚至在一切点上都收敛到$f(x)$的可能性．C. H. 伯恩斯坦在 1916 年证明了：对于函数$|x|$，在区间$[-1,+1]$上以

$$x_1^{(n)}=-1,\quad x_2^{(n)}=-1+\frac{2}{n-1},\quad x_3^{(n)}=-1+2\frac{2}{n-1},$$

$$\cdots, x_n^{(n)}=1$$

为结点的插值多项式 $L_{n-1}(x)$，当 n 增加时在$0<|x|<1$ 上均不收敛．（证明见上述引文的§2．注意，$x=\pm1$ 是结点。）

这就说明在同一区间上对于同一个函数，增加结点时，并不一定增加插值多项式的准确性。在实际计算中，如果插值多项式的阶越高，计算就越复杂.

下面我们来看函数

$$y=\frac{1}{1+x^2}$$

在$[-5, +5]$上用等距离结点的插值问题．这问题在本世纪初龙格(Runge)就研究过．下面在图 2.4 中画出了这函数的用 0，±1，$\pm2,\cdots$，±5 为插值结点的 10 次多项式的图形．大家可以看到在±5 附近，插值多项式与$1/(1+x^2)$偏离有多远.

现在我们来证明，当$|x|<\bar{r}=3.63\cdots$时，等距结点插值多项式收敛到$1/(1+x^2)$，而当$|x|>\bar{r}$时则发散．更确切地说，我们来分析 $R_n(x)=f(x)-L_n(x)$，并证明有 $\bar{r}=3.63\cdots$使

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0, \text{当}|x|<\bar{r}\text{时};\\&\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\infty, \text{当}|x|>\bar{r}\text{时}.\end{aligned}\qquad(2.4.2)$$

把$[-5,5]$分为 n 等分，取 $h=10/n$,，设结点为

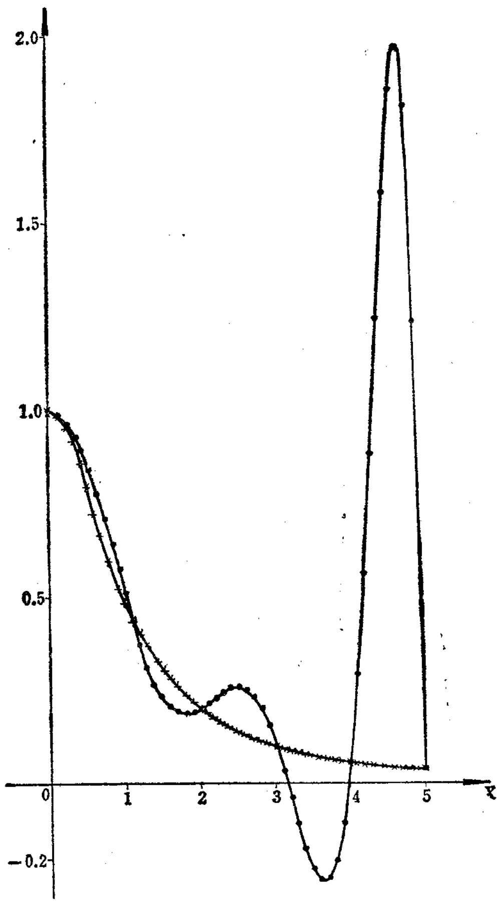

图 2.4　$y=(1+x^2)^{-1}$ 及其在$[-5,5]$上的 11 个等距节点插值多项式，只画出了右半枝

$$-5=x_0<x_1<\cdots<x_n=5,\ x_k=-5+\frac{10k}{n},\ k=0,1,\cdots,n.$$

当 $n=2m-1$ 时，共有 $2m$ 个结点，0 的两边各有 m 个结点，0 本身不是结点．当 $n=2m$ 时，结点把区间分为 $2m$ 个小区间，0 是结点．

下面我们只就 $n=2m-1$ 时加以证明．此时 0 不是结点，其他结点对称地分布在 0 的两边．于是

$$-x_0=x_n,\quad -x_1=x_{n-1},\quad \cdots,\ -x_m=x_{m-1}.$$

因之，

$$\begin{aligned}\Omega(x)&=\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)=\prod_{k=0}^{m-1}(x-x_k)\prod_{k=m}^{n}(x-x_k)\\&=\prod_{k=0}^{m-1}(x-x_k)\prod_{k=0}^{m-1}(x+x_k)\\&=\prod_{k=0}^{m-1}(x^2-x_k^2).\end{aligned}\tag{2.4.3}$$

又

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{1+x^2}\\&=\frac{-1}{(i-x)(i+x)}\\&=-\frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{i-x}+\frac{1}{i+x}\right\}.\end{aligned}\tag{2.4.4}$$

用习题(2.10)的结果，就有

$$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{1}{\Omega(i)}\cdot\frac{1}{1+x^2}.\tag{2.4.5}$$

由(2.3.18)

$$R_{2m-1}(x)=\Omega(x)f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]$$
$$=\frac{\Omega(x)}{\Omega(i)}\cdot\frac{1}{1+x^2}. \tag{2.4.6}$$

于是

$$(1+x^2)R_{2m-1}(x)=\frac{\Omega(x)}{\Omega(i)}$$
$$=\prod_{k=0}^{m-1}\frac{x^2-x_k^2}{i^2-x_k^2}$$
$$=\prod_{k=0}^{m-1}\frac{x_k^2-x^2}{x_k^2+1}. \tag{2.4.7}$$

令

$$r_{2m-1}(x)=h\ln|(1+x^2)R_{2m-1}(x)|$$
$$=h\sum_{k=0}^{m-1}\ln\frac{|x_k^2-x^2|}{x_k^2+1}. \tag{2.4.8}$$

由黎曼(Riemann)定积分的定义，从上式得

$$\lim_{m\to\infty}r_{2m-1}(x)=\int_{-5}^{0}\ln\frac{|t^2-x^2|}{t^2+1}dt$$
$$=\int_0^5\ln\frac{|t^2-x^2|}{1+t^2}dt$$
$$=x\ln\frac{x+5}{5-x}+5\ln(5^2-x^2)-5\ln(26)$$
$$-2\operatorname{arc\,tg}(5).$$

现在我们来研究函数

$$r(x)\equiv x\ln\frac{x+5}{5-x}+5\ln(5^2-x^2)-5\ln(26)$$
$$-2\operatorname{arc\,tg}(5).$$

容易知道

(1) $r(x)$是偶函数，从而只需考虑 $x\geqslant 0$.

(2) $r'(x)=\ln\frac{x+5}{5-x}\begin{cases}>0, \text{当 } x>0 \text{ 时;}\\ =0, \text{当 } x=0 \text{ 时;}\\ <0, \text{当 } x<0 \text{ 时.}\end{cases}$

(3) $r''(x)=\frac{10}{5^2-x^2}>0$, 故$r(x)$向上凹.

(4) $r(0)=5\ln\frac{25}{26}-2\operatorname{arc\,tg}(5)<0$,

$$r(5-0)=10\ln(10)-5\ln(26)-2\operatorname{arc\,tg}(5)$$
$$>10\ln(10)-5\ln(30)-5$$
$$=5\left(\ln\left(\frac{10}{3}\right)-1\right)>0.$$

所以唯一地存在 $\bar{r}\in(0,5)$，使 $r(\bar{r})=0$. 用求方程根的方法求得 $\bar{r}\approx3.63\cdots$. 以下分两种情况讨论.

(甲) 当 $\bar{r}<|x|<5$ 时，$r(x)>0$，这就是说

$$\lim_{m\to\infty}r_{2m-1}(x)=r(x)>0.$$

从而有$M>0$，使对于一切 $m>M$，恒有

$$r_{2m-1}(x)>\frac{r(x)}{2}.$$

这就是

$$h\ln|(1+x^2)R_{2m-1}(x)|>\frac{r(x)}{2}.$$

于是 $|R_{2m-1}(x)|>\frac{1}{1+x^2}\exp\left\{\frac{r(x)}{2h}\right\}$，对任何$m>M$.

令$m\to+\infty$, $h\to0+0$，即得

$$\lim_{m\to\infty}|R_{2m-1}(x)|=+\infty.$$

类似可证

$$\lim_{m\to\infty}|R_{2m}(x)|=+\infty.$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=+\infty,\text{当 }\bar{r}<|x|<5\text{ 时}.$$

(乙) 对于 $|x|<\bar{r}$, $r(x)<0$, 即

$$\lim_{m\to\infty} r_{2m-1}(x)=r(x)<0.$$

因此有 $M>0$, 当 $m>M$ 时恒有

$$r_{2m-1}(x)<\frac{r(x)}{2}<0,$$

这就是

$$h\ln|(1+x^2)R_{2m-1}(x)|<\frac{r(x)}{2}.$$

故

$$|R_{2m-1}(x)|<\frac{1}{1+x^2}\exp\left\{\frac{r(x)}{2h}\right\},\text{当 }m>M\text{ 时}.$$

令 $m\to\infty$, 也就是 $h\to0+0$, 即有

$$\lim_{m\to\infty}R_{2m-1}(x)=0.$$

同理可证

$$\lim_{m\to+\infty}R_{2m}(x)=0,$$

故有

$$\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0,\text{当 }|x|<\bar{r}\text{ 时}.$$ □

§5 分段线性插值

在上节所说的函数

$$y=f(x)=\frac{1}{1+x^2} \tag{2.5.1}$$

的图 2.4 中, 如果我们把那里的 11 个插值点顺序连起来成为一条折线, 容易看出, 这折线和图 2.4 中的插值多项式相比, 将是一条较好的近似曲线.

这种折线就是在相邻结点之间作线性插值而成的, 称为**分段线性插值**.

设在区间 $[a,b]$ 上取定 $n+1$ 个结点的剖分

$$\Delta: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

它们之间不一定等距. 又给定函数值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$. 求作一函数 $\varphi(x)$ 使具有性质:

(1) $\varphi(x)\in C[a,b]$;

(2) 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上, $\varphi(x)$ 是线性多项式;

(3) 满足插值条件 $\varphi(x_k)=y_k$, $k=0,1,\cdots,n$.

这样的 $\varphi(x)$ 就叫做数据 $\{(x_k, y_k), k=0,1,\cdots,n\}$ 的**分段线性插值函数**. 它也可以看成基函数 $\{l_k(x)\}_{k=0}^{n}$ 的线性组合:

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k l_k(x), \tag{2.5.2}$$

其中

$$l_0(x)=\begin{cases}(x-x_1)(x_0-x_1)^{-1}, & x_0\leqslant x\leqslant x_1;\\ 0, & x\in[a,b]\setminus[x_0,x_1].\end{cases} \tag{2.5.3^0}$$

$$l_k(x)=\begin{cases}(x-x_{k-1})(x_k-x_{k-1})^{-1}, & x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k,\\ (x-x_{k+1})(x_k-x_{k+1})^{-1}, & x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1};\\ 0, & x\in[a,b]\setminus[x_{k-1},x_{k+1}],\end{cases} \tag{2.5.3^k}$$

$$k=1,2,\cdots,n-1.$$

$$l_n(x)=\begin{cases}(x-x_{n-1})(x_n-x_{n-1})^{-1}, & x_{n-1}\leqslant x\leqslant x_n;\\ 0, & x\in[a,b]\setminus[x_{n-1},x_n].\end{cases} \tag{2.5.3^n}$$

它们的图形如下: