练习 1：

试计算曲线 $\vec{P}(t)=(10\cos t,10\sin t,20t)$ 的切向量、曲率和挠率。

参考公式：$k(t)=\dfrac{\left|\vec{P}'(t)\times\vec{P}''(t)\right|}{\left|\vec{P}'(t)\right|^3}$，$\tau(t)=\dfrac{\vec{P}'(t)\times\vec{P}''(t)\cdot\vec{P}'''(t)}{\left|\vec{P}'(t)\times\vec{P}''(t)\right|^2}$

解：

切向量为：

$\vec{P}'(t)=(-10\sin t,10\cos t,20)$

两阶导向量为：

$\vec{P}''(t)=(-10\cos t,-10\sin t,0)$

$\vec{P}'''(t)=(10\sin t,-10\cos t,0)$

$\vec{P}'(t)\times\vec{P}''(t)=(\text{-10sint,10cost,20})\times(\text{-10cost,-10sint,0})$

$$=\left(\begin{vmatrix}10\cos t & 20\\ -10\sin t & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}20 & -10\sin t\\ 0 & -10\cos t\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-10\sin t & 10\cos t\\ -10\cos t & -10\sin t\end{vmatrix}\right)$$

$=(\text{200sint,-200cost,100})$

曲率为：

$$k(t)=\frac{\left|\vec{P}'(t)\times\vec{P}''(t)\right|}{\left|\vec{P}'(t)\right|^3}=\frac{\left|(\text{200sint,-200cost,100})\right|}{\left|(-10\sin t,10\cos t,20)\right|^3}=\frac{100\sqrt{5}}{(10\sqrt{5})^3}=\frac{100\sqrt{5}}{5000\sqrt{5}}=\frac{1}{50}$$

$$\tau(t)=\frac{\vec{P}'(t)\times\vec{P}''(t)\cdot\vec{P}'''(t)}{\left|\vec{P}'(t)\times\vec{P}''(t)\right|^2}=\frac{(\text{200sint,-200cost,100})\cdot(10\sin t,-10\cos t,0)}{\left|(\text{200sint,-200cost,100})\right|^2}$$

$$=\frac{2000}{50000}=\frac{1}{25}$$

练习 2：Hermite 曲线构造

已知平面 Hermite 曲线过 $\vec{P}_0=(10,0)$、$\vec{P}_1=(50,0)$ 两点，

曲线在 $\vec{P}_0$、$\vec{P}_1$ 两点的切向量分别为 $\vec{P}_0'=(1,1)$、$\vec{P}_1'=(1,\text{-}1)$。

试求出该曲线的参数表达式并简要作出其图形。

解：Hermite 曲线的调和函数分别为：

$F_1=2t^3-3t^2+1$

$F_2=-2t^3+3t^2$

$F_3=t^3-2t^2+t$

$F_4 = t^3 - t^2$

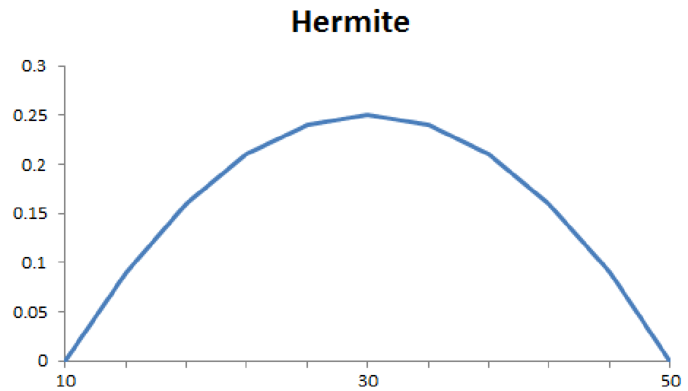
过 $\vec{P}_0$、$\vec{P}_1$ 两点的 Hermite 曲线为：

$$\vec{P}(t)=F_1\vec{P}_0+F_2\vec{P}_1+F_3\vec{P}_0'+F_4\vec{P}_1'$$

$$=(2t^3-3t^2+1)(10,0)+(-2t^3+3t^2)(50,0)+(t^3-2t^2+t)(1,1)+(t^3-t^2)(1,-1)$$

$$=(-78t^3+117t^2+t+10,-t^2+t)$$

其图形为：



练习 3：连续性

已知两条平面参数曲线:

$S_1(t)=(t^3+2t+1,3t^3-2t) \qquad t\in[0,1]$

$S_2(t)=(t^3+t^2+5t+4,t^3+3t^2+7t+1) \qquad t\in[0,1]$

试分析它们的连续性。

解：由两条曲线的定义，有

$$\begin{cases} S_1(1)=(4,1) \\ S_2(0)=(4,1) \end{cases}$$

所以 S_1 和 S_2 在点(4,1)处 C^0 连续。

接下来计算它们的一阶导数，有：

$$\begin{cases} S_1'(t)=(3t^2+2,9t^2-2) \\ S_2'(t)=(3t^2+2t+5,3t^2+6t+7) \end{cases}$$

于是有：

$$\begin{cases} S_1'(1)=(5,7) \\ S_2'(0)=(5,7) \end{cases}$$

所以 S_1 和 S_2 在点(4,1)处 C^1 连续。

接下来计算它们的 2 阶导数，有：

$$\begin{cases} S_1''(t) = (6t, 18t) \\ S_2''(t) = (6t+2, 6t+6) \end{cases}$$

于是有：

$$\begin{cases} S_1''(1) = (6, 18) \\ S_2''(0) = (2, 6) \end{cases}$$

可知 $S_1''(1)$ 和 $S_2''(0)$ 方向一致，但大小不同，所以 S_1 和 S_2 在点(4,1)处 GC^2 连续。