第五讲

平稳随机信号处理

《数字信号处理》第一部分

提纲

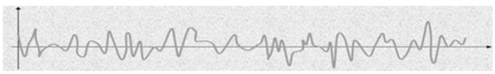
- 随机信号的基本概念及描述
- 实平稳随机信号通过线性时不变系统
- 经典功率谱估计
- 参数模型功率谱估计

随机信号的基本概念及描述

- 随机信号的基本概念及描述
- 实平稳随机信号通过线性时不变系统
- 经典功率谱估计
- 参数模型功率谱估计

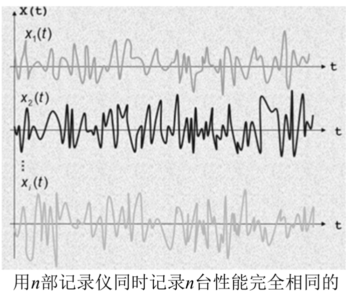
随机信号的基本概念及描述

- 基本概念
  - 当描述系统性态的状态变量不能用确切的时间函数来表述，无法确定状态变量在某瞬时的确切数值，其物理过程具有不可重复性和不可预知性时，则称这样的物理过程是随机的。描述它们的测量数据就是随机信号，在数学上也称为随机过程
  - 随机信号 => 平稳随机信号、非平稳随机信号
    - 如果一个随机信号的概率分布规律与统计特性不随时间的推移而变化，就称为平稳随机信号，反之即为非平稳随机信号
    - 平稳随机信号的统计特性与时间原点的选取无关



随机信号的基本概念及描述

- 基本概念

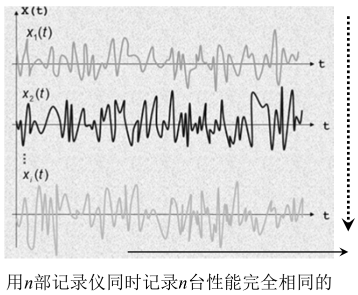


用n部记录仪同时记录n台性能完全相同的接收机的输出噪声电压波形

- $x_i(t)$是随时间作无规律的变化，且不因具有相同类型、相同测试条件而得到相同的波形输出。即使n足够大，也不可能找到两个完全相同的重复波形。因此，该噪声电压是个随机信号

随机信号的基本概念及描述

- 基本概念



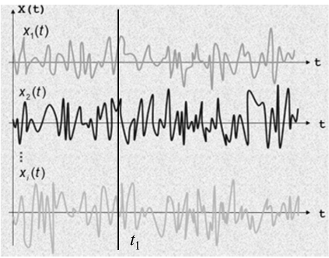
用n部记录仪同时记录n台性能完全相同的接收机的输出噪声电压波形

- 全部可能观测到的波形记录$\{x_i(t)\}$称为“样本空间”或“集合”，该集合就是一个随机过程，也即随机信号，记为$X(t)$

- 样本空间中的每个波形记录$x_i(t)$称为“样本函数”或“实现”

随机信号的基本概念及描述

■ 基本概念



用n部记录仪同时记录n台性能完全相同的接收机的输出噪声电压波形

■ 对一个特定的时刻t_1，状态$\{x_i(t_1)\}$或$X(t_1)$表示在该时刻观察$X(t)$各样本函数的取值，称为随机变量

■ 状态$X(t_i)$是一族随时间变化的随机变量，或称：随机信号$X(t)$是依赖于时间t的随机变量，我们可以用描述随机变量的方法来描述随机信号

随机信号的基本概念及描述

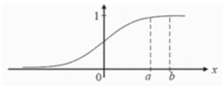
■ 随机变量X的描述

■ 随机变量用大写X表示，小写x表示随机变量的一个实现

■ 概率分布函数

$$P(x) = \text{Probablity}(X \le x) = \text{Probablity}(X \in (-\infty, x])$$

■ 概率分布函数性质



$$0 \le P(x) \le 1$$

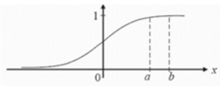
$$P(-\infty) = 0 \qquad P(\infty) = 1$$

$$x < y \quad \Rightarrow \quad P(x) < P(y)$$

随机信号的基本概念及描述

■ 随机变量X的描述

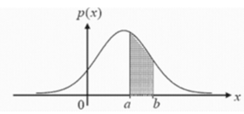
■ 概率密度函数 $p(x) = dP(x)/dx$



■ 与概率分布函数关系

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(v)dv$$

■ 概率密度函数性质



$$p(x) \ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

$$P(b) - P(a) = \int_{a}^{b} p(x)dx$$

随机信号的基本概念及描述

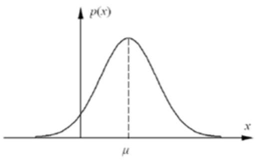
■ 随机变量X的描述

■ 一个均匀分布的实随机变量X的取值范围若是$[b,a]$，则其概率密度

$$p(x) = \frac{1}{a-b}$$

■ 若X服从高斯分布，则其概率密度

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

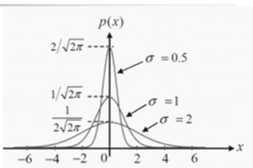


随机信号的基本概念及描述

■ 随机变量X的描述

■ 高斯分布

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



■ 标准正态分布

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad \sigma^2 = 1 \qquad \mu = 0$$

■ 中心极限定理：多个不同分布随机变量的和，其分布趋向于高斯分布

$$S = \sum_k X_k$$

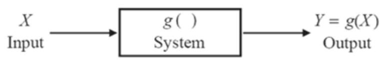
随机信号的基本概念及描述

■ 随机变量X的描述

■ 均值

$$\mu_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

■ 系统随机输出的均值



$$\mu_Y = E\{Y\} = E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)dx$$

随机信号的基本概念及描述

- 随机变量X的描述
  - 均方值 $$D_X^2 = E\{|X|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 p(x)dx$$
  - 方差 $$\sigma_X^2 = E\{|X-\mu|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu|^2 p(x)dx$$
  - m阶原点矩 $$\eta_X^m = E\{(X)^m\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x)^m p(x)dx$$
  - m阶中心矩 $$\gamma_X^m = E\{(X-\mu_X)^m\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^m p(x)dx$$

随机信号的基本概念及描述

- 两个随机变量X、Y的描述
  - 联合概率分布函数
    $$P(x,y) = \mathrm{Probablity}(X \le x \cap Y \le y)$$
  - 联合概率密度函数
    $$p(x,y) = \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial x \partial y}$$
  - 关系
    $$P(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)dvdu$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(u,v)dvdu = 1 \qquad \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} p(u,v)dvdu = P(x)$$

随机信号的基本概念及描述

- 两个随机变量X、Y的描述
  - 相关(correlation)
    $$E\{XY\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp(x,y)dxdy$$
  - 协方差(covariance)
    $$Cov(X,Y) = \sigma_{xy} = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}$$
    $$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y)p(x,y)dxdy$$
  - 二者关系
    $$Cov(X,Y) = E\{XY\} - \mu_X\mu_Y = E\{XY\} - E\{X\}E\{Y\}$$

随机信号的基本概念及描述

- 两个随机变量X、Y的描述
  - X与Y不相关(uncorrelated)
    $$Cov(X,Y) = 0 \Leftrightarrow E\{XY\} = E\{X\}E\{Y\}$$ 或
    $$E\{XY\} = 0, \quad \text{when} \quad \mu_X = \mu_Y = 0$$
  - X与Y统计独立(independent)
    $$p(x,y) = p(x)p(y)$$
  - X与Y统计独立,则X与Y一定不相关；反之，不一定
    - 对于零均值随机变量X，令$Y=X^2$
      $$Cov(X,Y) = E\{XY\} - E\{X\}E\{Y\} = E\{X^3\} = 0$$
    - 协方差描述X与Y的线性相关关系

随机信号的基本概念及描述

- 两个随机变量X、Y的描述
  - 相关系数(correlation coefficient) $\sigma_X^2 = E\{|X-\mu|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu|^2 p(x)dx$
    $$\rho_{XY}(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}}{\sigma_X\sigma_Y}$$
    $$-1 \le \rho_{XY}(X,Y) \le 1$$
  - ρ_{XY}描述X与Y间的线性相关性
    $$Y = aX + b \Rightarrow \rho_{XY}(X,Y) = 1$$
    - $\rho_{XY}=0$，X与Y间的没有线性相关性
      $$Y = X^2$$

随机信号的基本概念及描述

- 随机信号$X(t)$的描述
  - 随机信号的概率分布函数

    对随机信号$X(t)$离散化，得离散随机信号$X(nT_s)$ (简记$X(n)$)
    - 一维分布函数：描述随机信号$X(n)$在某一个时刻n上的统计特性
      $$P_X(x,n) = P(X(n) \le x)$$
    - 二维分布函数
      $$P_X(x_1,x_2;n_1,n_2) = P\{X(n_1) \le x_1, X(n_2) \le x_2\}$$
    - m维分布函数
      $$P_X(x_1,x_2,\ldots,x_m;n_1,n_2,\ldots,n_m)$$
      $$= P\{X(n_1) \le x_1, X(n_2) \le x_2, \ldots, X(n_m) \le x_m\}$$

随机信号的基本概念及描述

- 随机信号$X(n)$的描述
  - 对随机信号$X(t)$离散化，得到离散随机信号$X(nTs)$（简记为$X(n)$）。对$X(n)$的每一次实现，记为$x(n,i)$, n表示时间，i表示样本序号，对n,i的不同组合，有以下解释：
    - 若n固定，则$x(n,i)$相对标量i的集合为时刻n的随机变量；
    - 若i固定，则$x(n,i)$相对标量n的集合构成一维的离散时间序列$x(n)$；
    - 若n和i都固定，则$x(n,i)$是一个具体的数值；
    - 若n和i都是变量，则$x(n,i)$是一个随机信号。

随机信号的基本概念及描述

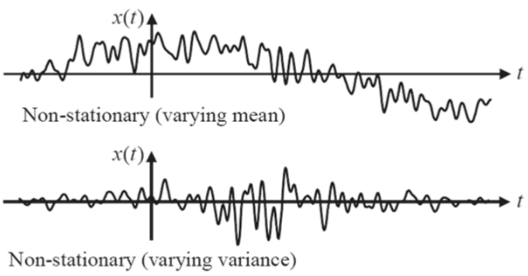
- 随机信号$X(n)$的描述

随机信号的“集总平均”：$X(n)$的无穷多样本$x(n,i)$在时刻n对应相加(或相乘后再相加)

  - 均值 $\mu_X(n)=E\{X(n)\}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}x(n,i)$
  - 方差 $\sigma_X^2(n)=E\{|X(n)-\mu_X(n)|^2\}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}|x(n,i)-\mu_X(n)|^2$
  - 均方 $D_X^2(n)=E\{|X(n)|^2\}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}|x(n,i)|^2$
  - 自相关函数 $r_X(n_1,n_2)=E\{X^*(n_1)X(n_2)\}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}x^*(n_1,i)x(n_2,i)$
  - 自协方差函数
$$c_X(n_1,n_2)=E\{[X(n_1)-\mu_X(n_1)]^*[X(n_2)-\mu_X(n_2)]\}$$

随机信号的基本概念及描述

- 非平稳随机信号示例



随机信号的基本概念及描述

- 随机信号$X(n)$的描述
  - 随机信号的自相关函数$r_X(n_1,n_2)$描述了信号$X(n)$在n_1,n_2这两个时刻的相互关系。若$n_1=n_2=n$，则

$$r_X(n,n_2)=E\{|X(n)|^2\}=D_X^2(n)\qquad c_X(n_1,n_2)=E\{|X(n)-\mu_X(n)|^2\}=\sigma_X^2(n)$$

  - 对两个随机信号$X(n)$, $Y(n)$, 其互相关和互协方差函数分别定义为

$$r_{XY}(n_1,n_2)=E\{X^*(n_1)Y(n_2)\}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x^*(n_1,i)y(n_2,i)$$
$$c_{XY}(n_1,n_2)=E\{[X(n_1)-\mu_X(n_1)]^*[Y(n_2)-\mu_Y(n_2)]\}$$

  - 若$X(n)$和$Y(n)$不相关：

$$c_{XY}(n_1,n_2)=0\longrightarrow r_{XY}(n_1,n_2)=\mu_X^*(n_1)\mu_Y(n_2)$$

随机信号的基本概念及描述

- 平稳随机信号的描述 实际描述的是宽平稳随机信号
  - 一个离散随机信号$X(n)$，如果其均值与时间n无关，其自相关函数$r_X(n_1,n_2)$和n_1, n_2的选取起点无关，而仅和n_2, n_1之差有关，称$X(n)$为宽平稳随机信号
  - 均值 $\mu_X(n)=\mu_X=E\{X(n)\}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}x(n,i)$
  - 自相关函数 $r_X(n_1,n_2)=r_X(m)=E\{X^*(n)X(n+m)\}\quad m=n_2-n_1$
  - 方差 $\sigma_X^2(n)=\sigma_X^2=E\{|X(n)-\mu_X|^2\}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}|x(n,i)-\mu_X|^2$
  - 均方 $D_X^2(n)=D_X^2=E\{|X(n)|^2\}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}|x(n,i)|^2$

随机信号的基本概念及描述

- 例：
  - 随机相位正弦序列 $X(n)=A\sin(2\pi fnT_s+\Phi)$
式中，A, f均为常数，Φ是随机变量，在$0\sim2\pi$内服从均匀分布

$$p(\Phi)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi} & 0\le\varphi\le2\pi\\ 0 & other\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mu_X(n)&=E\{A\sin(2\pi fnT_s+\Phi)\}\\&=\int_0^{2\pi}A\sin(2\pi fnT_s+\phi)\frac{1}{2\pi}d\phi\\&=0\end{aligned}$$

随机信号的基本概念及描述

- 例(续)：
  - 随机相位正弦序列 $X(n)=A\sin(2\pi fnT_s+\Phi)$
    式中，A, f均为常数，Φ是随机变量，在$0\sim2\pi$内服从均匀分布

$$\begin{aligned} r_X(n_1,n_2) &= E\{A^2\sin(2\pi fn_1T_s+\Phi)\sin(2\pi fn_2T_s+\Phi)\} \\ &= \frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(2\pi fn_1T_s+\phi)\sin(2\pi fn_2T_s+\phi)d\phi \\ &= \frac{A^2}{2}\cos\left[2\pi f(n_2-n_1)T_s\right] \end{aligned}$$

  - 该序列是宽平稳随机序列

随机信号的基本概念及描述

- 例：
  - 随机振幅正弦序列 $X(n)=A\sin(2\pi fnT_s)$
    式中，f均为常数，A为服从高斯分布随机变量，设其均值为0，方差为σ^2

$$\begin{aligned} \mu_X(n) &= E\{X(n)\}=E\{A\sin(2\pi fnT_s)\} \\ &= \sin(2\pi fnT_s)E\{A\}=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_X(n_1,n_2) &= E\{A^2\sin(2\pi fn_1T_s)\sin(2\pi fn_2T_s)\} \\ &= \sigma^2\sin(2\pi fn_1T_s)\sin(2\pi fn_2T_s) \end{aligned}$$

  - 该序列不是宽平稳随机序列

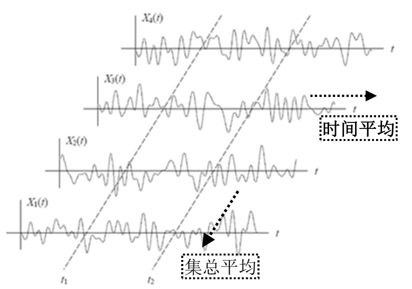
随机信号的基本概念及描述

$$r_X(m)=E\{X^*(n)X(n+m)\}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x^*(n,i)x(n+m,i)$$

  - 要精确地求出上式，需要知道$x(n,i)$的无穷多个样本--〉集总平均
- 各态历经随机信号
  - 对一个平稳随机信号$X(n)$，如果它的所有样本函数在某一固定时刻的一阶和二阶统计特性和单一样本函数在长时间内的统计特性一致，则称$X(n)$为各态历经信号
  - 随机信号的集总平均 = 各态历经信号的时间平均

随机信号的基本概念及描述

- 各态历经随机信号的描述



  - 具有各态历经性质的随机信号，由于能够使用单一的样本函数来做时间平均，替代集合平均，以求其均值和自相关函数，所以在分析和处理时比较方便
  - $X(n)$简记为$x(n)$

随机信号的基本概念及描述

- 各态历经随机信号的描述
  - 均值 $\mu_x=E\{x(n)\}=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M}x(n)$
  - 方差 $\sigma_x^2=E\{[x(n)-\mu_x]^2\}=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M}(x(n)-\mu_x)^2$
  - 自相关函数
    $r_x(m)=E\{x^*(n)x(n+m)\}=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M}x^*(n)x(n+m)$
  - 自协方差函数

$$\begin{aligned} c_x(m) &= E\{[x(n)-\mu_x]^*[x(n+m)-\mu_x]\} \\ &= r_x(m)-\mu_x^2 \end{aligned}$$

随机信号的基本概念及描述

- 相关函数性质 $\boxed{r_x(m)=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M}x^*(n)x(n+m)}$
  - 若$x(n)$是实信号，则$r_x(m)$为偶函数，即$r_x(m)=r_x(-m)$；若$x(n)$是复信号，则$r_x(m)$满足$r_x(m)=r_x^*(-m)$
  - $r_x(m)$在m=0时取最大值，即$r_x(0)\geqslant r_x(m)$
  - $r_{xy}(m)=r^*_{yx}(-m)$. 若$x(n),y(n)$是实信号，有$r_{xy}(m)=r_{yx}(-m)$，即$r_{xy}(m)$不是偶函数
  - $r_{xy}(m)$满足$r_x(0)r_y(0)\geqslant|r_{xy}(m)|^2$

随机信号的基本概念及描述

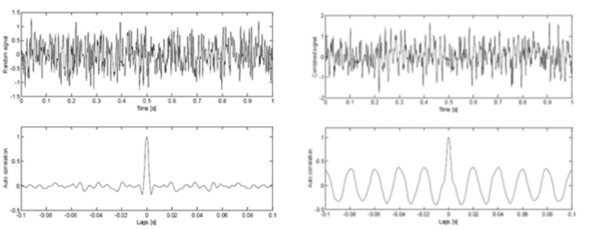
- 相关函数性质
  - 由$r_x(-M),\ldots,r_x(0),\ldots,r_x(M)$这$2M+1$个自相关函数组成的矩阵是非负定的

$$\mathbf{R}_M=\left[r_x(m-n)\right]_{(M+1)\times(M+1)}=\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(-1) & \cdots & r_x(-M) \\ r_x(1) & r_x(0) & \cdots & r_x(-M+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_x(M) & r_x(M-1) & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix}$$

  - $\mathbf{R}_M$称为Hermitian对称的Toeplitz矩阵；若$x(n)$是实信号，则$\mathbf{R}_M$称为实对称的Toeplitz矩阵。$\mathbf{R}_M$的主对角线以及与主对角线平行的对角线上的元素都相等。

随机信号的基本概念及描述

- 自相关函数应用
  - 自相关函数有助于检测混淆在随机过程中确定性周期信号



宽带随机信号及其自相关函数

宽带随机信号+周期信号及其自相关函数

随机信号的基本概念及描述

- 自相关函数估计的计算
  - $X(n)$是宽平稳各态遍历随机信号，$x(n)$是其一个样本

$$r_x(m)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x^*(n)x(n+m)$$

  - 在实际应用中，我们所遇到的大都是实际物理信号，$x(n)$是因果实信号，即得到$x(n)$的N个观察值$x(0), x(1),\ldots, x(N-1)$，则自相关函数的估计为

$$\hat{r}_x(m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x(n+m)=\boxed{\frac{1}{N}x(-m)*x(m)}$$

$$y(t)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)=x(t)*h(t) \qquad -(N-1)\le m\le N-1$$

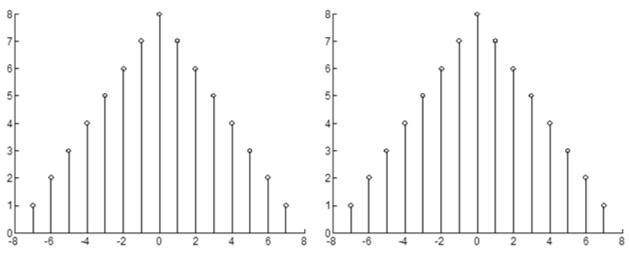
随机信号的基本概念及描述

- 利用MATLAB计算相关函数的估计
  - 利用conv函数计算 $\hat{r}_x(m)=\frac{1}{N}x(-m)*x(m)$
  - 利用xcorr函数计算
    - xcorr(x,y); % 随机信号 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的互相关
    - xcorr(x); % 随机信号 $x(n)$ 的自相关
  - 示例

```
xn=[1 1 1 1 1 1 1 1];
N=length(xn); m=(-N+1):(N-1);   % 数据长度，相关域变量
rm_corr = xcorr(xn);            %利用xcorr函数计算
figure; stem(m,rm_corr)
yn = xn(mod(-[0:1:N-1],N)+1);   %利用conv函数计算
rm_conv = conv(xn,yn);
figure; stem(m,rm_conv)
```


随机信号的基本概念及描述

- 利用MATLAB计算相关函数的估计



rm_corr rm_conv

随机信号的基本概念及描述

- 相关函数的估计快速计算

$$\hat{r}_x(m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x(n+m)=\frac{1}{N}x(-m)*x(m) \qquad -(N-1)\le m\le N-1$$

  - 时域卷积对应频域乘积
  - 两个长度为N的序列的线性卷积，结果是一长度为(2N-1)点的序列。为了能用DFT来计算线性卷积，需要把这两个数据至少通过补零扩充到2N-1点。为利用FFT作快速计算，通常扩充至2的整数次幂长度

$$\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\hat{r}_x(m)e^{-j\omega m}=\frac{1}{N}\left|X(\omega)\right|^2 \longrightarrow \hat{r}_x(m)=IDFT\left(X^*(\omega)\cdot X(\omega)\right)$$

随机信号的基本概念及描述

- 各态历经随机信号的描述
  - 功率谱密度：维纳-辛钦(Wiener-Khintchine)定理

$$P_x(\omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_x(m)e^{-j\omega m} \quad \Longleftrightarrow \quad r_x(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_x(\omega)e^{j\omega m}d\omega$$

$$P_{xy}(\omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xy}(m)e^{-j\omega m} \qquad r_{xy}(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{xy}(\omega)e^{j\omega m}d\omega$$

  - 功率谱密度反映了信号功率随频率的分布，它与自相关函数构成一对傅立叶变换对
  - $r_x(0)$表示时间域的平均功率，$P_x(\omega)$反映单位频率范围内的功率对总的功率的贡献，因此称功率谱密度

$$r_x(0)=E\{|x(n)|^2\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_x(\omega)d\omega$$

随机信号的基本概念及描述

- 功率谱密度的性质

$$\sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_x(m)e^{-j\omega m}=\frac{1}{N}\left|X(\omega)\right|^2$$

  - 不论信号$x(n)$是实数的还是复数的，$P_x(\omega)$都是ω的实函数，因此功率谱失去了相位信息
  - $P_x(\omega)$对所有的ω都是非负的 $r_x(0)=E\{|x(n)|^2\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_x(\omega)d\omega$
  - 如果$x(n)$是实的，由于$r_x(m)$是偶函数，则$P_x(\omega)$是ω的偶函数
  - 功率谱曲线在$(-\pi,\pi)$内的面积等于信号的均方值
  - 对随机信号$u(n)$，如果$P_x(\omega)$在$(-\pi,\pi)$内始终为常数，则称该信号为白噪声信号，即白噪声信号的自相关函数为δ函数，表明该信号在任意两个不同的时刻都是不相关的
    - “白噪声”的名称来源于牛顿，他指出，白光包含了所有频率的光波

实平稳随机信号通过线性时不变系统

- 随机信号的基本概念及描述
- 实平稳随机信号通过线性时不变系统
- 经典功率谱估计
- 参数模型功率谱估计

实平稳随机信号通过线性时不变系统

- 设$x(n)$为一平稳随机信号，它通过一线性时不变系统$H(z)$后，输出为$y(n)$:

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- 研究平稳随机信号通过线性移不变系统后，输出与输入信号数字特征量的关系：
  - 输出信号的均值
  - 输出信号的自相关函数
  - 输出信号的功率谱
  - 输入/输出信号的互相关函数、互功率谱以及互相干函数

实平稳随机信号通过线性时不变系统

- 输出信号的均值

$$\mu_y=\mu_x H(e^{j0})$$

  - 证明
    - 输出$y(n)$是平稳随机信号，脉冲响应$h(n)$为确定信号

$$\mu_y=E\{y(n)\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)E\{x(n-k)\}$$

$$=\mu_x \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)}_{H(e^{j0})}$$

实平稳随机信号通过线性时不变系统

- 输出信号的自相关函数
  - 证明 $r_y(m)=r_x(m)*h(m)*h(-m)$

$$r_y(m)=E\{y(n)y(n+m)\}=E\left\{\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)x(n-l)\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n+m-k)\right)\right\}$$

$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(l)h(k)E\{x(n-l)x(n+m-k)\}$$

$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(l)h(k)r_x(m-k+l)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)h(m+l)*r_x(m+l)$$

$i=m+l$

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(h(i)*r_x(i)\right)h(i-m)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(h(i)*r_x(i)\right)h(-(m-i))$$

$$=r_x(m)*h(m)*h(-m)$$

实平稳随机信号通过线性时不变系统

■ 输出信号的功率谱

■ 证明 $P_y(\omega)=|H(\omega)|^2 P_x(\omega)$

$$P_y(\omega)=\mathrm{DTFT}(r_y(m))=\mathrm{DTFT}(r_x(m)*h(m)*h(-m))$$

$$=\mathrm{DTFT}\boxed{(h(m)*h(-m))}\cdot\boxed{\mathrm{DTFT}(r_x(m))}$$

$\mathrm{DTFT}(h(m)*h(-m))=|H(\omega)|^2$

$P_x(\omega)$

■ 输出信号的方差

$$\sigma_y^2=c_y(0)=r_y(0)-\mu_y^2$$
$$=h^2(0)E[x^2(n)]-\mu_x^2H^2(e^{j0})$$

实平稳随机信号通过线性时不变系统

■ 输入/输出信号的互相关函数及互功率谱

■ 互相关

$$r_{xy}(m)=E\{x(n)y(n+m)\}=h(m)*r_x(m)$$

$$r_{yx}(m)=E\{y(n)x(n+m)\}=h(-m)*r_x(m)$$

■ 互功率谱

$$P_{xy}(\omega)=\mathrm{DTFT}(r_{xy}(m))=H(\omega)P_x(\omega)$$
$$P_{yx}(\omega)=\mathrm{DTFT}(r_{yx}(m))=H^*(\omega)P_x(\omega)$$
$$P_y(\omega)=H^*(\omega)H(\omega)P_x(\omega)=P_{yx}(\omega)H(\omega)$$

系统频响函数的求解方法

实平稳随机信号通过线性时不变系统

■ 输入/输出信号的互相干函数

$$C_{xy}^2(\omega)=\frac{|P_{xy}(\omega)|^2}{P_{xx}(\omega)P_{yy}(\omega)}$$

$$|P_{xy}(\omega)|^2\le P_{xx}(\omega)P_{yy}(\omega) \longrightarrow 0\le C_{xy}^2(\omega)\le 1$$

■ 同相关系数，互相干函数亦可描述两信号的线性相关性

■ 如果平稳随机信号$x(n)$和$y(n)$分别为线性时不变系统的输入和输出信号

$$P_{yy}(\omega)=|H(\omega)|^2P_{xx}(\omega) \qquad P_{xy}(\omega)=H(\omega)P_{xx}(\omega)$$
$$\downarrow$$
$$C_{xy}^2(\omega)=1$$

实平稳随机信号通过线性时不变系统

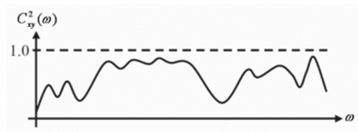
■ 输入/输出信号的互相干函数

■ 输入、输出信号$x(n)$和$y(n)$互相干函数小于1的原因

■ 输入、输出信号$x(n)$和$y(n)$间存在噪声

■ 输入、输出信号$x(n)$和$y(n)$间具有不相关成分，或者存在非线性相关关系

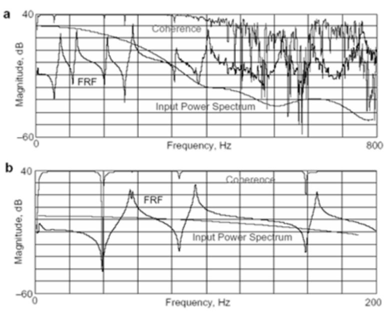
■ 输出信号$y(n)$不仅仅是由$x(n)$引起，可能还有其它的输入源



互相干函数随频率变化关系

实平稳随机信号通过线性时不变系统

■ 模态测试中，互相干函数常用来校验频响函数



测试数据举例如下图所示，图a的自谱由于力锤头太软而不平坦，同时使得互相干在后半部分频率处很差，图b中在某些频率处的互相干函数drop off，这是由于这些频率是结构的反共振频率(即无论多大的能量都不能引起共振)

实平稳随机信号通过线性时不变系统

零均值平稳白噪声通过系统$y(n)$-$\alpha y(n$-1)=$x(n)$, $|\alpha|$<1,求输出的自相关函数、平均功率和功率谱

■ 分析：零均值白噪声的特征为

■ 均值 $\mu_x=E\{x(n)\}=0$

■ 功率谱 $P_x(\omega)=\sigma^2$

■ 自相关函数 $r_x(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma^2e^{jm\omega}d\omega=\sigma^2\delta(m)$

实平稳随机信号通过线性时不变系统

零均值平稳白噪声通过系统$y(n)-\alpha y(n-1)=x(n)$, $|\alpha|<1$,求输出的自相关函数、平均功率和功率谱

- 先获得系统的系统函数、单位脉冲响应及频率响应
  - 系统函数

$$H(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad |z|>|\alpha|$$

  - 单位脉冲响应

$$h(n)=\alpha^n u(n)$$

  - 频率响应

$$H(\omega)=\frac{1}{1-\alpha e^{j\omega}} \qquad |H(\omega)|^2=\frac{1}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$$

实平稳随机信号通过线性时不变系统

零均值平稳白噪声通过系统$y(n)-\alpha y(n-1)=x(n)$, $|\alpha|<1$,求输出的自相关函数、平均功率和功率谱

- 计算输出的自相关函数 $h(n)=\alpha^n u(n)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)h(n+m)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\alpha^{n+m}=\frac{\alpha^m}{1-\alpha^2} & m\ge 0\\ \sum_{n=-m}^{\infty}\alpha^n\alpha^{n+m}=\frac{\alpha^{-m}}{1-\alpha^2} & m<0\end{cases}=\frac{\alpha^{|m|}}{1-\alpha^2}$$

$$r_y(m)=h(m)*h(-m)*r_x(m)=\sigma^2\delta(m)*h(m)*h(-m)=\sigma^2 r_h(m)=\frac{\sigma^2\alpha^{|m|}}{1-\alpha^2}$$

实平稳随机信号通过线性时不变系统

零均值平稳白噪声通过系统$y(n)-\alpha y(n-1)=x(n)$, $|\alpha|<1$,求输出的自相关函数、平均功率和功率谱

- 输出平均功率

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}y^2(n)=r_y(0)=\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$$

- 输出功率谱

$$P_y(\omega)=|H(\omega)|^2 P_x(\omega)=\frac{\sigma^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$$

实平稳随机信号通过线性时不变系统

零均值平稳白噪声通过系统$y(n)-\alpha y(n-1)=x(n)$, $|\alpha|<1$,求输出的自相关函数、平均功率和功率谱

- 输入输出互功率谱

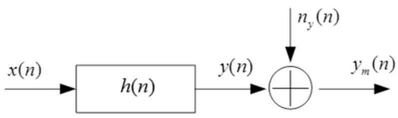
$$P_{xy}(\omega)=H(\omega)P_x(\omega)=\frac{\sigma^2}{1-\alpha e^{j\omega}}$$

- 输入输出互相干函数

$$C_{xy}^2(\omega)=\frac{\left|P_{xy}(\omega)\right|^2}{P_{xx}(\omega)P_{yy}(\omega)}=1$$

实平稳随机信号通过线性时不变系统

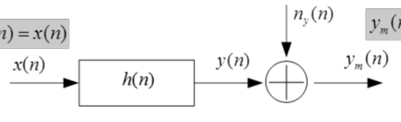
- 输出信号受噪声影响下的系统频响函数的计算
  - 输出信号$y(n)$混有测量噪声$n_y(n)$，实际测量的输出信号为$y_m(n)=y(n)+n_y(n)$
  - 假定$n_y(n)$与输入信号$x(n)$不相关，则由于$x(n)$与$y(n)$线性相关，则$n_y(n)$与输出信号$y(n)$亦不相关
  - 假定输入信号$x(n)$不受测量信号的影响



实平稳随机信号通过线性时不变系统

- 输出信号受噪声影响下的系统频响函数的计算

$x_m(n)=x(n)$ $\quad$ $y_m(n)=y(n)+n_y(n)$



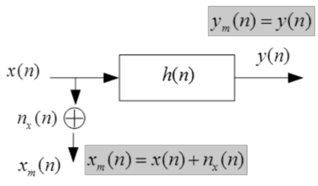
$$H_1(\omega)=\frac{\mathrm{DTFT}\left[R_{x_m y_m}(k)\right]}{\mathrm{DTFT}\left[R_{x_m x_m}(k)\right]}=\frac{P_{x_m y_m}(\omega)}{P_{x_m x_m}(\omega)} \qquad R_{x_m x_m}(k)=R_{xx}(k)$$

$$\begin{aligned}R_{x_m y_m}(k)&=E\left\{x(n)y_m(n+k)\right\}\\&=E\left\{x(n)[y(n+k)+n_y(n+k)]\right\}\\&=R_{xy}(k)\end{aligned}$$

$$\boxed{H_1(\omega)=\frac{P_{x_m y_m}(\omega)}{P_{x_m x_m}(\omega)}=\frac{P_{xy}(\omega)}{P_{xx}(\omega)}}$$

实平稳随机信号通过线性时不变系统

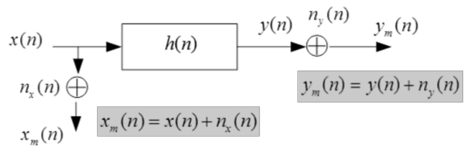
- 输入信号受噪声影响下的系统频响函数的计算
  - 输入信号$x(n)$混有测量噪声$n_x(n)$，实际测量的输入信号为$x_m(n)=x(n)+n_x(n)$
  - 假定$n_x(n)$与输入信号$x(n)$不相关，则由于$x(n)$与$y(n)$线性相关，则$n_x(n)$与输出信号$y(n)$亦不相关
  - 假定输出信号$y(n)$不受测量信号的影响



$$H_2(\omega)=\frac{P_{y_m y_m}(\omega)}{P_{y_m x_m}(\omega)}=\frac{P_{yy}(\omega)}{P_{yx}(\omega)}$$

实平稳随机信号通过线性时不变系统

- 输入、输出信号均受噪声影响下的系统频响函数的计算



  - 这种情况的计算分析比较复杂，具体请参考电子参考书Ref03第290~294页

经典功率谱估计

- 随机信号的基本概念及描述
- 实平稳随机信号通过线性时不变系统
- 经典功率谱估计
- 参数模型功率谱估计

经典功率谱估计

- 功率谱估计的相关法(间接法)与周期图法(直接法) ☑
- 功率谱估计质量
- 功率谱估计方法改进
- 利用MATLAB实现功率谱估计

经典功率谱估计--相关法

- 相关法的理论基础
  - 维纳-辛钦(Wiener-Khintchine)定理

$$P_x(\omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_x(m)e^{-j\omega m} \iff r_x(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_x(\omega)e^{j\omega m}d\omega$$

  - 计算方法
    - 由随机信号一个样本的N个观测值计算自相关函数的估计$\hat{r}_x(m)$
    - 对$\hat{r}_x(m)$进行DTFT即得该随机信号的功率谱估计$\hat{P}_x(\omega)$

经典功率谱估计--相关法

- 相关法功率谱估计
  - 广义平稳随机信号自相关函数的定义

$$r_X(m)=E\{X^*(n)X(n+m)\}$$

  - 各态历经随机信号自相关函数的定义

$$r_x(m)=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M}x^*(n)x(n+m)$$

  - 有限长信号(因果实信号)的自相关函数的计算

$$\hat{r}_x(m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x(n+m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}x(n)x(n+m)$$

经典功率谱估计--相关法

例：相关法进行功率谱估计
已知实平稳随机信号$X[n]$单一样本的N个观测值为$x[n]$={1, 0，-1}，试利用相关法估计其功率谱

- 分析
  - 相关法计算功率谱估计的关键是获得随机信号的自相关函数估计
  - 再由维纳—辛钦公式，对自相关函数估计进行傅氏变换即得功率谱估计

经典功率谱估计--相关法

例：相关法进行功率谱估计
已知实平稳随机信号$X[n]$单一样本的N个观测值为$x[n]$={1, 0，-1}，试利用相关法估计其功率谱

- 求解

$$\hat{r}_x(m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}x(n)x(n+m)$$

  - $X[n]$的自相关函数估计值为：

$$\hat{r}_x(m)=\frac{1}{N}x(-m)*x(m)=\frac{1}{3}\{-1,0,\overset{\downarrow}{2},0,-1\}$$

  - 对自相关函数进行傅里叶变换得$X[n]$的功率谱估计：

$$\hat{P}_x(\omega)=\mathrm{DTFT}(\hat{r}_x(m))=\frac{1}{3}\{-e^{j2\omega}+2-e^{-j2\omega}\}$$

$$=\frac{2}{3}(1-\cos2\omega)$$

$$\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\hat{r}_x(m)e^{-j\omega m}$$

经典功率谱估计--周期图法

- 周期图法功率谱估计的计算
  - 已知随机信号$x(n)$的N点观察数据，有$\hat{r}_x(m)=\frac{1}{N}x(-m)*x(m)$

$$\hat{P}_x(\omega)=\frac{1}{N}\mathrm{DTFT}(x(-m)*x(m))=\frac{1}{N}X^*(\omega)X(\omega)=\frac{1}{N}|X(\omega)|^2$$

  - 计算随机信号$x(n)$的N点观察数据$x_N(n)$的DFT，然后取其幅值的平方并除以N作为对$x(n)$真实功率谱的估计

$$x_N(n)\xrightarrow{DFT}\underset{X_N(k)}{\mathrm{DFT}[x_N(n)]}\xrightarrow{\text{PSD estimate}}\hat{P}_{PER}(k)=\frac{1}{N}|X_N(k)|^2$$

经典功率谱估计--周期图法

例1：周期图法进行功率谱估计
已知实平稳随机信号$X[n]$单一样本的N个观测值为$x[n]$={1, 0，-1}，试利用周期图法估计其功率谱

- 分析
  - 利用周期图法计算功率谱估计的关键是获得随机序列单一样本N个观测值的傅氏变换
  - 再由下式即得功率谱估计

$$\hat{P}_{PER}(\omega)=\frac{1}{N}|X_N(\omega)|^2 \qquad \hat{P}_{PER}(k)=\frac{1}{N}|X_N(k)|^2$$

经典功率谱估计--周期图法

例1：周期图法进行功率谱估计
已知实平稳随机信号$X[n]$单一样本的N个观测值为$x[n]$={1, 0，-1}，试利用周期图法估计其功率谱

- 求解
  - 对$x(n)$进行离散时间傅里叶变换(DTFT)

$$X_N(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{j\omega n}=1-e^{-j2\omega}$$

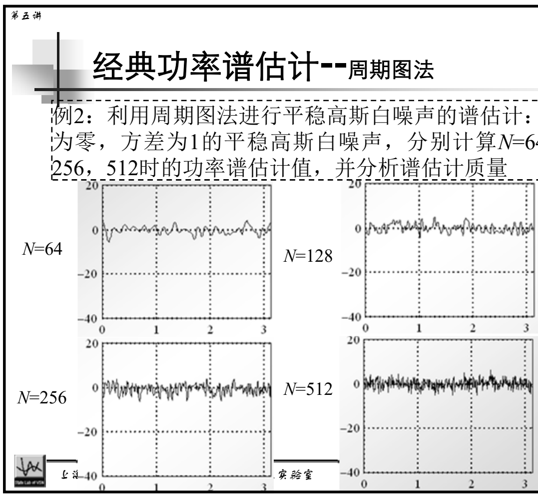
  - 功率谱估计为

$$\hat{P}_{PER}(\omega)=\frac{1}{N}|X_N(\omega)|^2=\frac{1}{N}X^*{}_N(\omega)X_N(\omega)$$

$$=\frac{1}{3}(1-e^{j2\omega})(1-e^{-j2\omega})=\frac{2}{3}(1-\cos2\omega)$$

经典功率谱估计--周期图法

例2：利用周期图法进行平稳高斯白噪声的谱估计：N点均值为零，方差为1的平稳高斯白噪声，分别计算N=64，128，256，512时的功率谱估计计值，并分析谱估计质量



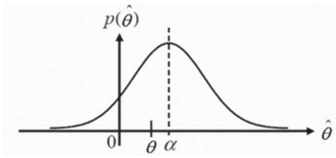
的方差不随N的增加而减小
而减小，即周期图法谱估计
但波动大小不随数据长度N的增加
功率谱估计值在0dB附近波动，

经典功率谱估计

- 功率谱估计的相关法(间接法)与周期图法(直接法)
- 功率谱估计质量☑
- 功率谱估计方法改进
- 利用MATLAB实现功率谱估计

功率谱估计质量

- 问题的描述



对随机信号$x(n)$，在实际工作中，我们能得到的往往是其一次实现的有限长数据，即$x(0), x(1),\ldots, x(N\text{-}1)$，要由这$N$个数据来估计$x(n)$的均值、方差、自相关函数、功率谱及其它所感兴趣的参数。设信号$x(n)$的某一个特征量的真值为θ，估计值为$\hat{\theta}$，我们关心的是如何衡量$\hat{\theta}$ 对θ的近似程度

功率谱估计质量

- 估计质量的评价
  - 估计量的偏差

$\boxed{bia\{\hat{\theta}\}=0 \longrightarrow \hat{\theta}\text{ 是 }\theta\text{ 的无偏估计}}$

$$bia\{\hat{\theta}\}=E\{\hat{\theta}\}-\theta$$

$\boxed{\lim_{N\to\infty} bia\{\hat{\theta}\}=0 \longrightarrow \hat{\theta}\text{ 是 }\theta\text{ 的渐进无偏估计}}$

  - 估计量的方差：反映各次估计值对估计均值的离散程度

$$var\{\hat{\theta}\}=E\{(\hat{\theta}-E\{\hat{\theta}\})^2\}$$

  - 估计量的均方差

$$\mathrm{MSE}\{\hat{\theta}\}=E\{(\hat{\theta}-\theta)^2\}=var\{\hat{\theta}\}+(bia\{\hat{\theta}\})^2$$

$\boxed{\mathrm{MSE}\{\hat{\theta}\}=0 \longrightarrow \hat{\theta}\text{ 是 }\theta\text{ 的一致估计}}$

功率谱估计质量—周期图法

- 周期图法功率谱估计的质量
  - 均值

$$E\{\hat{P}_{PER}(\omega)\}=\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\frac{N-|m|}{N}r_x(m)e^{-j\omega m}$$

$N\to\infty$，$E\{\hat{P}_{PER}(\omega)\}=P_x(\omega)\}$，渐进无偏估计

  - 方差

$$var\{\hat{P}_{PER}(\omega)\}=P_x^2(\omega)\{1+\left(\frac{\sin(N\omega)}{N\sin\omega}\right)^2\}$$

N增加，方差不减小，不是一致估计

功率谱估计质量—相关法

- 相关法与周期图方法计算功率谱等效的条件

$$\hat{r}_x(m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x(n+m)=\frac{1}{N}x(-m)*x(m)$$

$$\Downarrow \quad -(N-1)\le m\le N-1$$

$$\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\hat{r}_x(m)e^{-j\omega m}=\frac{1}{N}|X(\omega)|^2$$

  - 当时延m取值的最大值为N-1时，两者等效
  - 以上说明：随着时延m取值范围的增大，相关法功率谱估计质量的方差特性会具有和周期图法功率谱估计一样的缺点。

经典功率谱估计

- 功率谱估计的相关法(间接法)与周期图法(直接法)
- 功率谱估计质量
- 功率谱估计方法改进☑
- 利用MATLAB实现功率谱估计

经典功率谱估计--改进

- 问题的提出
  - 功率谱估计的方差不随N的增加减小
  - 如何提高谱估计质量?
    - 减小方差
  - 方法:

对自相关函数估计值加窗

将N个观测值分段, 计算各段的周期图, 再取平均

经典功率谱估计--改进

- 平滑周期图(Blackman-Tukey法)
  - 对自相关函数估计值加窗, 将误差较大的估计值截去

$$\hat{P}_M(\omega) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} w(m)\hat{r}_x(m)e^{-jm\omega}$$

  - 窗函数$w(m)$ ($M<N$)满足下述条件

$$\begin{cases} 0 \le w(m) \le w(0) = 1 & \\ w(m) = w(-m) & |m| < M \\ w(m) = 0 & |m| \ge M \end{cases}$$

经典功率谱估计--改进

- 平滑周期图(Blackman-Tukey法)
  - B-T法进行功率谱估计的主要步骤
    - (1) 利用观测数据估计自相关函数
    - (2) 对自相关函数估计值加窗
    - (3) 计算加窗后自相关函数的DTFT
  - 优点: $\hat{P}_M(\omega)$波动比$\hat{P}_{PER}(\omega)$小, 可证是一致估计
  - 缺点: 降低了频率分辨率

经典功率谱估计--改进

- 平均周期图法(Welch-Bartlett法)
  - 将随机序列$X(n)$的N个观测值分成L段

$$x^i(n) = x(iM+n);\ i = 0,1,...,L-1;\ n = 0,1,...,M-1$$

  - 第i段序列的周期图为

$$\hat{P}^i_{PER}(\omega) = \frac{1}{M}\left|X_M(\omega)\right|^2$$

  - 平均周期图

$$\hat{P}^L_M(\omega) = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1}\hat{P}^i_{PER}(\omega)$$

经典功率谱估计--改进

- 平均周期图法(Welch-Bartlett法)
  - 平均周期图法估计质量

$$var\{\hat{P}^L_M(\omega)\} = \frac{1}{L}var\{\hat{P}^i_{PER}(\omega)\}$$

L→∞, 方差为零, 是一致估计

$$bia\{\hat{P}_{PER}(\omega)\} = -\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\frac{|m|}{N}r_x(m)e^{-j\omega m}$$

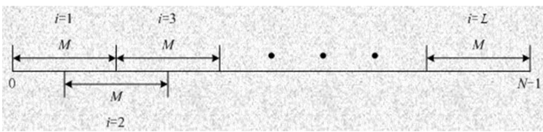
$$\Big\downarrow$$

$$bia\{\hat{P}^i_{PER}(\omega)\} > bia\{\hat{P}_{PER}(\omega)\}$$

平均周期图方差减小的代价之一是偏差增大

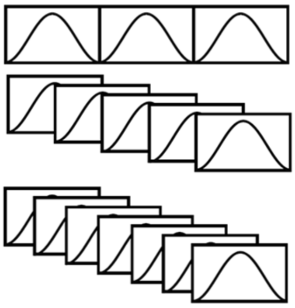
经典功率谱估计--改进

- 重叠平均周期图法(Welch法)
  - 平均周期图法优点: 减小方差
  - 缺点: 增加估计的偏差, 降低了谱的分辨率
  - 原因: 分段即加窗, 段越多, 窗越短, 主瓣宽度越大
  - 解决方法: 将各段数据有一定程度的重叠



经典功率谱估计--改进

- 重叠平均周期图法(Welch法)
  - 加汉宁窗
  - 分段重叠率 0
  - 分段重叠率 50%
  - 分段重叠率 66%



经典功率谱估计--改进

例：利用Welch法进行平稳高斯白噪声的谱估计

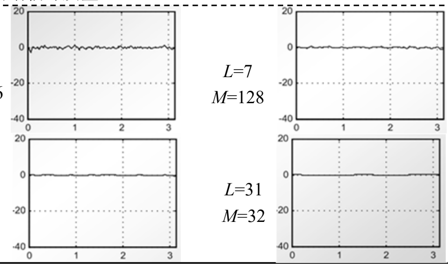
产生30组512点均值为零，方差为1的平稳高斯白噪声，利用Welch法按照50%重叠分别将其分成L=3，7，15，31段，计算功率谱估计值，并分析谱估计质量

L=3 M=256

L=7 M=128

L=15 M=64

L=31 M=32



- 随着分段数L的增加，谱估计越来越平滑，方差明显减小

经典功率谱估计

- 功率谱估计的相关法(间接法)与周期图法(直接法)
- 功率谱估计质量
- 功率谱估计方法改进
- 利用MATLAB实现功率谱估计☑

经典功率谱估计

- 利用MATLAB进行非参数功率谱估计
  - 周期图法

    [Pxx,F] = periodogram(X,WINDOW,NFFT,Fs)
    - X：进行功率谱估计的有限长输入序列；
    - WINDOW：指定窗函数，默认值为矩形窗(boxcar)；
    - NFFT：DFT的点数， NFFT> X，默认值为256；
    - Fs ：绘制功率谱曲线的抽样频率，默认值为1；
    - Pxx：功率谱估计值；
    - F：Pxx值所对应的频率点

经典功率谱估计

- Welch平均周期图法的MATLAB实现
  - [Pxx,F] = pwelch(X,WINDOW,NOVERLAP,NFFT,Fs)
    - X,NFFT,Fs用法同periodogram 函数；
    - WINDOW：指定窗函数，默认值为hanning窗；
    - NOVERLAP指定分段重叠的样本数
    - 如果使用boxcar窗，且NOVERLAP=0，则可得到Bartlett法的平均周期图
    - 如果NOVERLAP=L/2，则可得到重叠50%的Welch法平均周期图

经典功率谱估计

例：一序列含有白噪声和两个频率间隔很近的余弦信号，

$$x(n)=\cos(0.3\pi n)+\cos(0.32\pi n)+rand(n)$$

设分别采用周期图法和Welch法估计该序列的功率谱

- 周期图法：可用函数periodogram，也可直接编程

```
N=512; Nfft=1024; Fs=1; n=0:N-1;
xn=cos(0.3*pi*n)+cos(0.32*pi*n)+randn(size(n));
XF=fft(xn,Nfft);
Pxx=abs(XF).^2/length(n);
index=0:round(Nfft/2-1);
w=2*pi*index*Fs/Nfft;
figure
plot(w,10*log(Pxx(index+1)))
```

经典功率谱估计

例：一序列含有白噪声和两个频率间隔很近的余弦信号，

$$x(n)=\cos(0.3\pi n)+\cos(0.32\pi n)+rand(n)$$

设分别采用周期图法和Welch法估计该序列的功率谱

- Welch法：

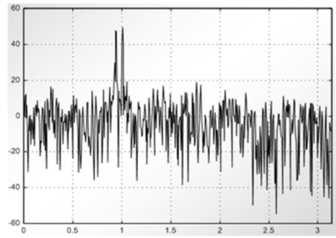
```
N=512; Nfft=1024; Fs=1; n=0:N-1;
xn=cos(0.3*pi*n)+cos(0.32*pi*n)+randn(size(n));
M=input('M=')
window=boxcar(M);  noverlap=M/2;
[Pxx2 w]=pwelch(xn,window,noverlap,Nfft);
figure; plot(w,10*log(Pxx2)),grid
```


经典功率谱估计

例：一序列含有白噪声和两个频率间隔很近的余弦信号，

$$x(n)=\cos(0.3\pi n)+\cos(0.32\pi n)+rand(n)$$

设分别采用周期图法和Welch法估计该序列的功率谱



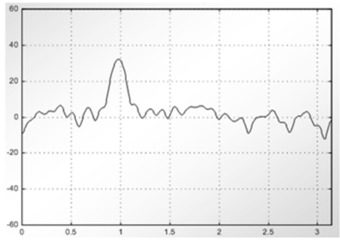
周期图法进行功率谱估计的结果
数据长度512

经典功率谱估计

例：一序列含有白噪声和两个频率间隔很近的余弦信号，

$$x(n)=\cos(0.3\pi n)+\cos(0.32\pi n)+rand(n)$$

设分别采用周期图法和Welch法估计该序列的功率谱



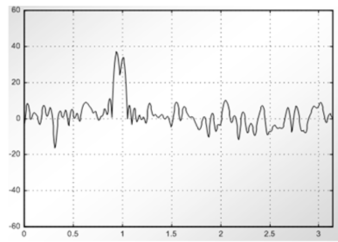
Welch法， M=64 的谱估计结果
总数据长度512，子数据段50%重叠

经典功率谱估计

例：一序列含有白噪声和两个频率间隔很近的余弦信号，

$$x(n)=\cos(0.3\pi n)+\cos(0.32\pi n)+rand(n)$$

设分别采用周期图法和Welch法估计该序列的功率谱



Welch法， M=128的谱估计结果
总数据长度512，子数据段50%重叠

经典功率谱估计

例：一序列含有白噪声和两个频率间隔很近的余弦信号，

$$x(n)=\cos(0.3\pi n)+\cos(0.32\pi n)+rand(n)$$

设分别采用周期图法和Welch法估计该序列的功率谱

- 结论：
  - 周期图法谱估计曲线的波动很大，即估计的方差较大
  - Welch法谱估计曲线较为平滑，方差减小，但分辨率降低
  - 对Welch法，当数据分段数增加，各段数据长度较短时，谱的分辨率明显下降，而谱估计曲线较为平滑，方差较小；反之，当数据分段数减小，各段数据长度较长时，谱分辨率明显提高，而谱估计曲线波动较大，方差较大

参数模型功率谱估计

- 随机信号的基本概念及描述
- 实平稳随机信号通过线性时不变系统
- 经典功率谱估计
- 参数模型功率谱估计

参数模型功率谱估计

- 问题提出
  - 经典功率谱估计方法存在的问题
    - 周期图方法方差性能不好，不是$P_x(\omega)$的一致估计

$$\hat{P}_x(\omega)=\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\hat{r}_x(m)e^{-j\omega m}=\frac{1}{N}\left|X(\omega)\right|^2$$

    - 平滑周期图和平均周期图改善了周期图的方差性能，但由于使用短数据序列，导致了谱分辨率的降低并增加了估计偏差

$$\hat{P}_M(\omega)=\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}w(m)\hat{r}_x(m)e^{-j m\omega}\qquad \hat{P}_M^L(\omega)=\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1}\hat{P}_x^i(\omega)$$

参数模型功率谱估计

- 参数模型法的基本思想
  - 假设模型阶数，在输入是冲激函数或白噪声的情况下，使其输出等于所研究的信号，至少也是对该信号的一个良好近似
  - 利用已知的自相关函数或数据求模型的参数
  - 利用求出的模型参数计算该信号的功率谱

参数模型功率谱估计

- 平稳随机信号的参数模型
  - 任何平稳随机信号可以看作是由白噪声序列激励一个因果的线性时不变系统产生的输出

方差为σ^2的白噪声 $u(n)$ → $H(z)=\dfrac{B(z)}{A(z)}$ → $x(n)$ 平稳随机信号

线性时不变系统

$$x(n)=-\sum_{k=1}^{p}a_k x(n-k)+\sum_{k=0}^{q}b_k u(n-k)$$

如果σ^2和模型参数a_k、b_k已知则可由上式求出$x(n)$的功率谱

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{1+\sum_{k=1}^{q}b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{p}a_k z^{-k}}\qquad (b_0=1)\qquad \Longrightarrow P_x(e^{j\omega})=\sigma^2\frac{\left|B(e^{j\omega})\right|^2}{\left|A(e^{j\omega})\right|^2}$$

参数模型功率谱估计

- 平稳随机信号的参数模型
  - (auto-regressive)AR模型：b_k (k=1, 2, …, q) 全部为零

$$x(n)=-\sum_{k=1}^{p}a_k x(n-k)+u(n)$$

$$H(z)=\frac{1}{A(z)}=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{p}a_k z^{-k}}$$

$$P_x(e^{j\omega})=\frac{\sigma^2}{\left|1+\sum_{k=1}^{p}a_k e^{-j\omega k}\right|^2}$$

AR模型，现在的输出是现在的输入和过去p个输出的加权和，全极点模型，容易反映功率谱中的峰值，有成熟算法，应用最广泛

参数模型功率谱估计

- 平稳随机信号的参数模型
  - (moving-average)MA模型：a_k (k=1, 2, …, p)全部为零

$$x(n)=u(n)+\sum_{k=1}^{q}b_k u(n-k)$$

$$H(z)=B(z)=1+\sum_{k=1}^{p}b_k z^{-k}$$

$$P_x(e^{j\omega})=\sigma^2\left|1+\sum_{k=1}^{q}b_k e^{-j\omega k}\right|^2$$

MA模型，现在的输出是现在和过去q个白噪声的加权和，全零点模型，容易反映功率谱中的谷值

参数模型功率谱估计

- 平稳随机信号的参数模型
  - ARMA模型：a_k、b_k不全为零

$$x(n)=-\sum_{k=1}^{p}a_k x(n-k)+\sum_{k=0}^{q}b_k u(n-k)$$

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{1+\sum_{k=1}^{q}b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{p}a_k z^{-k}}\qquad P_x(e^{j\omega})=\sigma^2\frac{\left|1+\sum_{k=1}^{q}b_k e^{-j\omega k}\right|^2}{\left|1+\sum_{k=1}^{p}a_k e^{-j\omega k}\right|^2}$$

参数模型功率谱估计

■ AR模型的正则方程

■ 假定$u(n)$和$x(n)$都是实平稳的随机信号， $u(n)$为白噪声，方差为σ^2

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) + u(n)$$

$\downarrow$ 等式两端同乘以$x(n-m)$，$m\geq 0$, 并求均值

$$E\{x(n-m)x(n)\} = -\sum_{k=1}^{p} a_k E\{x(n-k)x(n-m)\} + E\{x(n-m)u(n)\}$$

$$r_x(m) = E\{x^*(n)x(n+m)\} = E\{x^*(n-m)x(n)\}$$

$\downarrow$

$$r_x(m) = -\sum_{k=1}^{p} a_k r_x(m-k) + r_{xu}(m)$$

$$r_{xu}(m) = E\{x^*(n)u(n+m)\} = E\{x^*(n-m)u(n)\}$$

参数模型功率谱估计

■ AR模型的正则方程

■ $x(n)$是白噪声序列$u(n)$激励一个因果的线性时不变系统产生的输出

$$r_u(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma^2 e^{jm\omega} d\omega = \sigma^2\delta(m) \qquad x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(n-k)$$

$$r_{xu}(m) = E\{x(n-m)u(n)\} = E\left\{u(n)\sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(n-m-k)\right\}$$

$$= \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\delta(m+k) = \sigma^2 h(-m) \qquad m\geq 0$$

$\downarrow$

$$r_{xu}(m) = \begin{cases} 0 & m\geq 1 \\ \sigma^2 h(0) & m=0 \end{cases}$$

参数模型功率谱估计

■ AR模型的正则方程

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \longrightarrow h(0) = \lim_{z\to\infty} H(z)$$

AR模型系统函数

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} \longrightarrow h(0) = \lim_{z\to\infty} H(z) = 1$$

$$r_{xu}(m) = \begin{cases} 0 & m\geq 1 \\ \sigma^2 & m=0 \end{cases}$$

$$r_x(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k r_x(m-k) & m\geq 1 \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k r_x(m-k) + \sigma^2 & m=0 \end{cases}$$

参数模型功率谱估计

■ AR模型的正则方程

$$r_x(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k r_x(m-k) & m\geq 1 \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k r_x(m-k) + \sigma^2 & m=0 \end{cases}$$

■ Yule-Walker方程

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & r_x(2) & \cdots & r_x(p) \\ r_x(1) & r_x(0) & r_x(1) & \cdots & r_x(p-1) \\ r_x(2) & r_x(1) & r_x(0) & \cdots & r_x(p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_x(p) & r_x(p-1) & r_x(p-2) & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

一个p阶的AR模型共有$p+1$个参数，即$a_1,\ldots,a_p, \sigma^2$，只要知道$x(n)$的前$p+1$个自相关函数值，就可以通过求解线性方程组解出AR模型参数的值

参数模型功率谱估计

■ AR模型参数的Levinson-Durbin快速算法

■ 定义$a_m(k)$为p阶AR模型在阶次为m时的第k个系数，$k=1, 2, \ldots, m$; $m=1,2,\ldots,p$, ρ_m为m阶时的前向预测的最小误差功率，当m=1时，有

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ a_1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

$$a_1(1) = -r_x(1)/r_x(0) \qquad \rho_1 = r_x(0) - r_x^2(1)/r_x(0) = r_x(0)[1-a_1^2(1)]$$

$\Downarrow$

$$\rho_0 = r_x(0) \longrightarrow \rho_1 = \rho_0[1-a_1^2(1)]$$

参数模型功率谱估计

■ AR模型参数的Levinson-Durbin快速算法

■ 定义AR模型在阶次为m时的第m个系数$a_m(m)$为k_m， k_m称为反射系数，那么由Yule-Walker方程Toeplitz矩阵的性质，可得到如下的递推公式：

$$k_m = -[\sum_{k=1}^{m-1} a_{m-1}(k) r_x(m-k) + r_x(m)]/\rho_{m-1}$$

$$a_m(k) = a_{m-1}(k) + k_m a_{m-1}(m-k)$$

$$\rho_m = \rho_{m-1}[1-k_m^2]$$

■ Levinson-Durbin算法从低阶开始递推，直到阶次p，给出了AR模型在每一个阶次时的所有参数，即$a_m(1), a_m(2),\ldots, a_m(m)$, $m=1, 2, \ldots, p$

参数模型功率谱估计

- AR模型阶次的选择
  - AR模型的阶次p一般事先是不知道的，需要事先选定一个稍大的值，在递推的过程中确定 $\rho_m = \rho_{m-1}[1-k_m^2]$
  - 对应不同阶次p的最小预测误差功率ρ_p是单调下降的，因此ρ_p的值降到多少才合适，有两个较常用的选择准则：
  - (1)最终预测误差准则

$$\mathrm{FPE}(k) = \rho_k \frac{N+(k+1)}{N-(k+1)}$$

  - (2)信息论准则

$$\mathrm{AIC}(k) = N\ln(\rho_k) + 2k$$

  - N为数据$x_N(n)$的长度，当阶次k增加时，FPE(k)和AIC(k)都将在某一个k处取得极小值

参数模型功率谱估计

- 利用Levinson-Durbin算法的MATLAB函数
  - A = levinson(R, ORDER)
    - ORDER: AR模型的阶数；
    - R: 观测序列的自相关函数；
    - A: 白噪声序列的方差和AR模型参数
  - [A, E, K]= aryule(X,ORDER)
    - X为观测序列；E为预测误差；K为反射系数
  - [Pxx,F] = pyulear(X,ORDER,NFFT,Fs)
    - Pxx：功率谱估计值；
    - F：Pxx值所对应的频率点
    - NFFT: 为DFT点数，默认值为256；
    - Fs: 绘制功率谱曲线的采样频率，默认值为1

参数模型功率谱估计

例：一序列含有白噪声和两个频率间隔很近的余弦信号，

$$x(n) = \cos(0.3\pi n) + \cos(0.32\pi n) + rand(n)$$

利用Levinson-Durbin算法进行AR谱估计

- 分析
  - 分三种情况：(1) 数据长度128，模型阶次80； (2)数据长度512，模型阶次40 ； (3)数据长度512，模型阶次80；

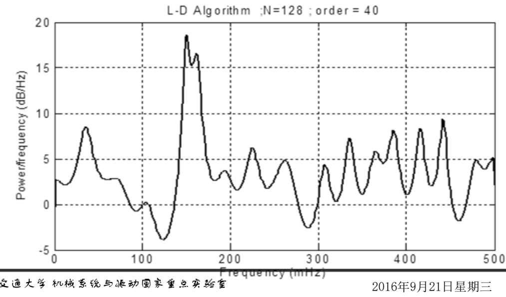
```
N=128; order=40;                %数据长度, 模型阶次
Nfft=1024; Fs=1; n=0:N-1;
xn=cos(0.3*pi*n)+cos(0.32*pi*n)+randn(size(n));
figure
pyulear(xn,order,Nfft,Fs);
title(['L-D Algorithm  ;N=',num2str(N),' ; order = ',num2str(order)])
```


参数模型功率谱估计

例：一序列含有白噪声和两个频率间隔很近的余弦信号，

$$x(n) = \cos(0.3\pi n) + \cos(0.32\pi n) + rand(n)$$

利用Levinson-Durbin算法进行AR谱估计

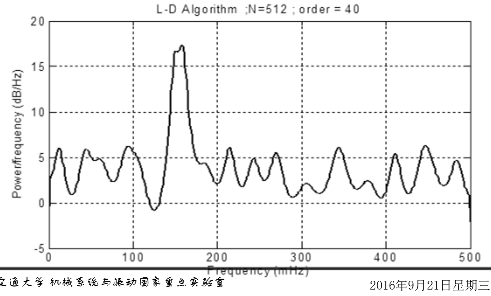


参数模型功率谱估计

例：一序列含有白噪声和两个频率间隔很近的余弦信号，

$$x(n) = \cos(0.3\pi n) + \cos(0.32\pi n) + rand(n)$$

利用Levinson-Durbin算法进行AR谱估计

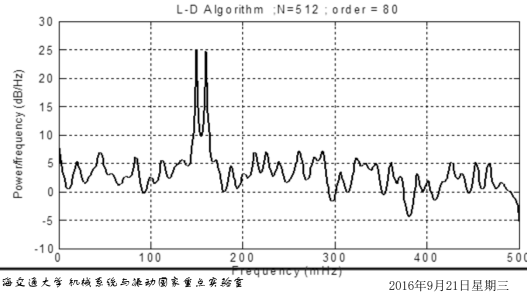


参数模型功率谱估计

例：一序列含有白噪声和两个频率间隔很近的余弦信号，

$$x(n) = \cos(0.3\pi n) + \cos(0.32\pi n) + rand(n)$$

利用Levinson-Durbin算法进行AR谱估计



参数模型功率谱估计

例：一序列含有白噪声和两个频率间隔很近的余弦信号，

$$x(n)=\cos(0.3\pi n)+\cos(0.32\pi n)+rand(n)$$

利用Levinson-Durbin算法进行AR谱估计

- 结论
  - 低阶AR模型的频率分辨率比高阶模型低
  - 观测数据N越短，谱估计误差越大，谱估计的分辨率越低
    - 观测数据越短，自相关函数估计误差越大，因此功率谱估计误差就越大

参数模型功率谱估计

- 计算AR模型谱估计的MATLAB函数
  - AR模型参数估计
    - [A,E]=aryule(x,order)
    - [A,E]=arburg(x,order)
    - [A,E]=arcov(x,order)
    - [A,E]=armcov(x,order)
  - AR模型功率谱估计
    - [Pxx,F]=pyulear(x,order,Nfft,Fs)
    - [Pxx,F]=pburg(x,order,Nfft,Fs)
    - [Pxx,F]=pcov(x,order,Nfft,Fs)
    - [Pxx,F]=pmcov(x,order,Nfft,Fs)

参数模型功率谱估计

- AR模型功率谱估计的特点
  - AR谱比经典谱平滑
  - AR谱的分辨率高
    - 经典谱估计的频率分辨率反比于信号的长度，而由于参数模型隐含着将数据和自相关函数的外推，因而其谱估计的分辨率不受$2\pi/N$的限制
  - AR谱的分辨率和信号的信噪比关系密切
    - 信噪比降低，谱的分辨率会降低
  - AR谱估计的质量受到阶次p的影响
    - p选得过低，谱太平滑，反映不出谱峰；
    - p选得过大，可能会产生虚假谱峰

参数模型功率谱估计

- AR模型正则方程(Yule-Walker方程)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k r_x(m-k)=\begin{cases}\sigma^2, & m=0\\ 0, & m=1,\ \cdots,\ p\end{cases} \qquad (a_0=1)$$

- MA模型正则方程

$$r_x(m)=\begin{cases}\sigma^2\sum\limits_{k=0}^{q-m} b_{k+m}b_k, & m=0,\ 1,\ \cdots,\ q\\ 0, & m>q\end{cases}$$

- ARMA模型正则方程

$$r_x(m)=\begin{cases}-\sum\limits_{k=1}^{p} a_k r_x(m-k)+\sigma^2\sum\limits_{k=0}^{q-m} b_{k+m}h(k), & m=0,\ 1,\ \cdots,\ q\\ -\sum\limits_{k=1}^{p} a_k r_x(m-k), & m>q\end{cases}$$

The End

谢谢！

请批评指正