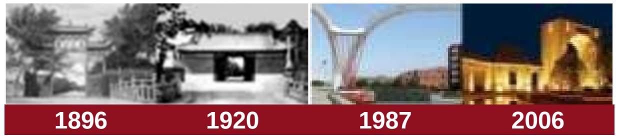
上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY



ME6011 弹性塑性力学

讲课教师： 沈 彬 博士

办 公 室： 机械A楼720室

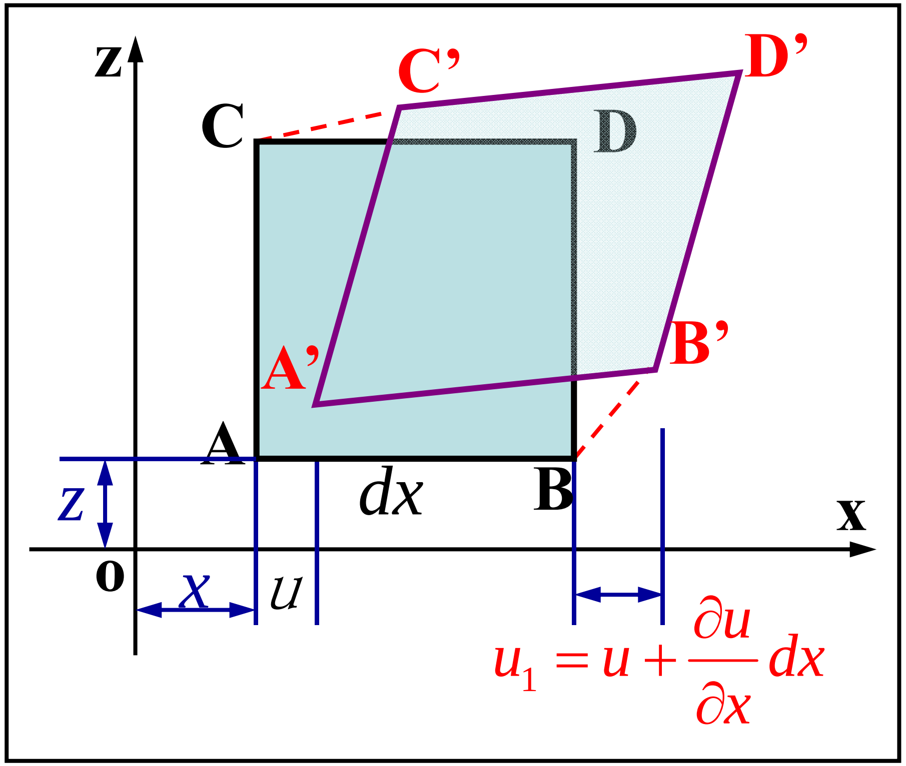
电 话： 021-34206556

13818945392

E-Mail： binshen@sjtu.edu.cn

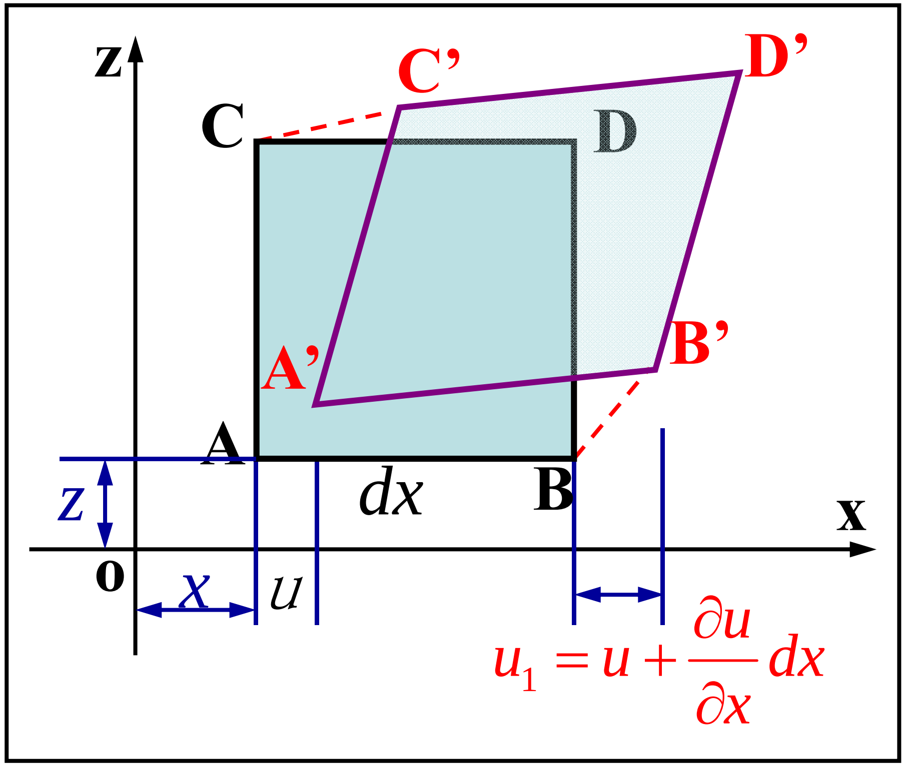
第三章 应变分析

- 应变状态，应变与位移关系
- 主应变
- 应变张量与应变偏量
- 应变协调方程



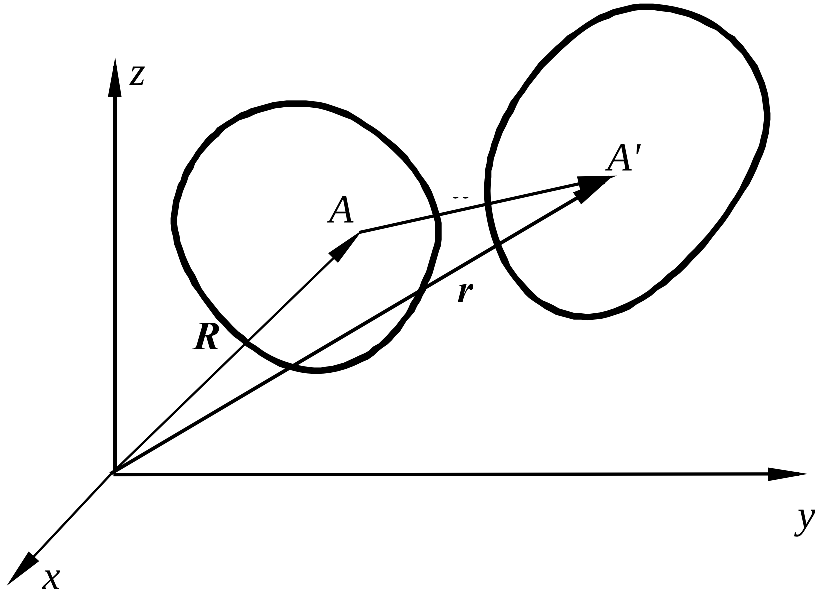
第三章 应变分析

- 应变状态，应变与位移关系
- 主应变
- 应变张量与应变偏量
- 应变协调方程



位移及其位移分量

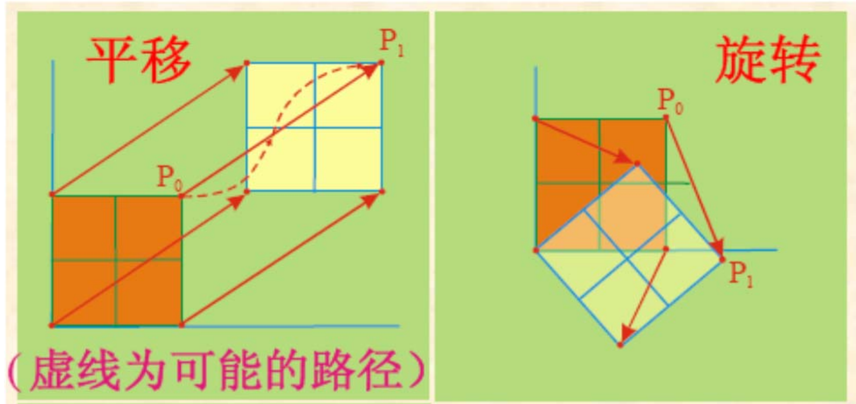
- 由于外部因素作用（载荷或温度改变等）引起**物体内部**各质点位置的改变称**位移**。
- 物体内任意一点的位移，用它在x、y、z三个坐标轴上的投影u、v、w来表示。以沿坐标轴正方向的为正。

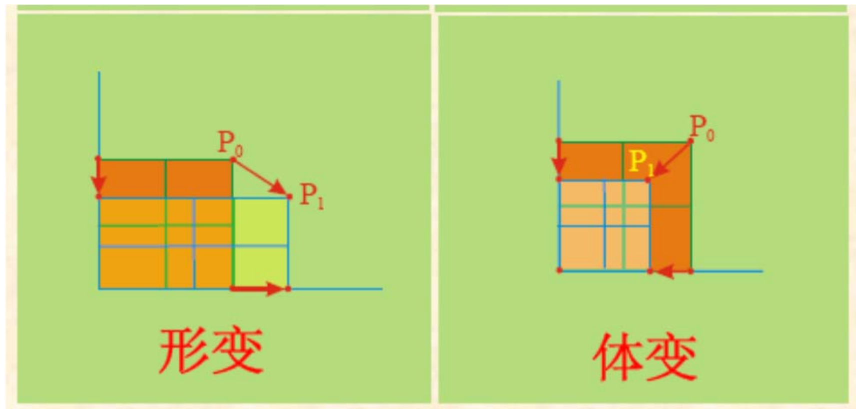


$$u(x,y,z)=r_x-R_x$$
$$v(x,y,z)=r_y-R_y$$
$$w(x,y,z)=r_z-R_z$$

位移种类

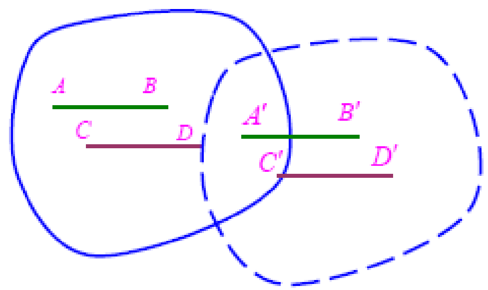
- **刚体位移**：物体内部各点位置变化，但仍**保持初始状态相对位置不变**。分为平行移动、转动位移。
- **变形位移**：位置改变+物体内部各个点的相对位置改变，**即物体的形状发生改变**。分为形状改变和体积改变。



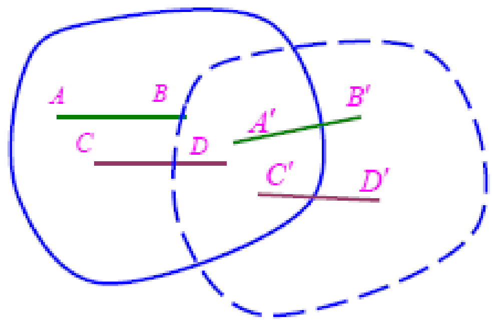


变形与应变

- **变形**：物体中若任意两个点的相对位置发生了变化，即认为物体有了变形。
- **应变**：发生变形的物体中将出现应变状态。
- **均匀应变**：物体内各点的应变特征相同的应变，其特征是：应变前的直线在应变后仍然是直线，一组平行线应变后仍然互相平行 。
- **不均匀应变**：物体内各点的应变特征发生变化的应变，其特征是：与均匀应变相反，直线经应变后不再是直线，而成了曲线或折线，平行线应变后不再互相平行。
- **非均匀应变又可分成连续应变（变形）和不连续应变（变形）**：如果物体内从一点到另一点的应变状态是逐渐改变的，则称为连续应变（变形）；如果是突然改变的，则应变是不连续的，称为不连续应变（变形）。

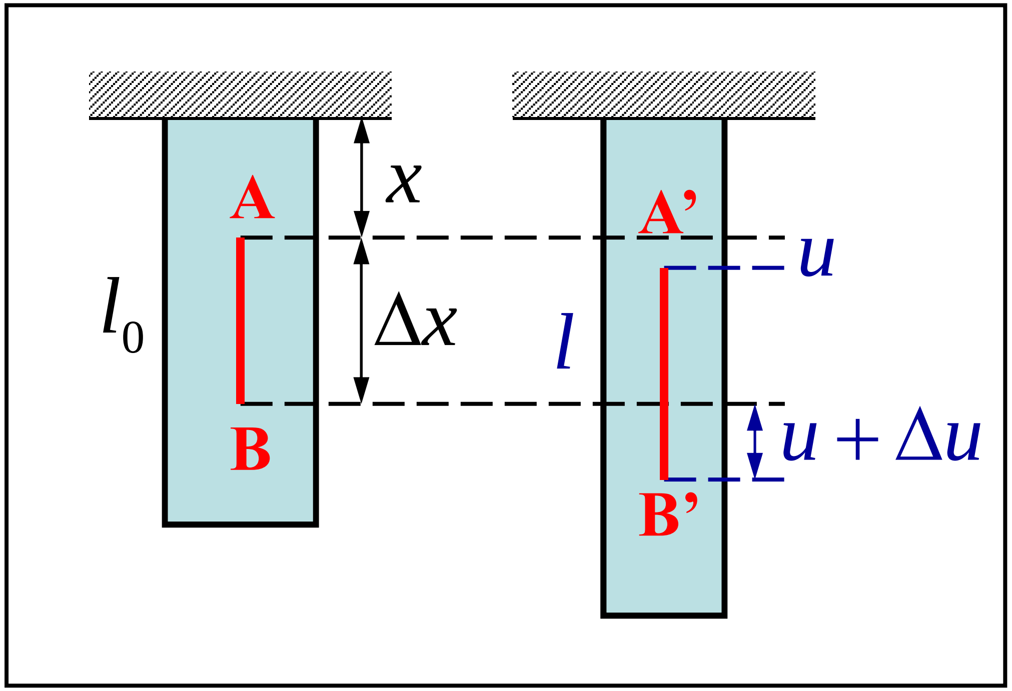


均匀应变



不均匀应变

正应变定义



沿x方向的正应变

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

<u>如果变形的分布是均匀的</u>

$$\varepsilon_x = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

平行六面体的变形

根据投影的变形规律来判断整个平行六面体的变形。

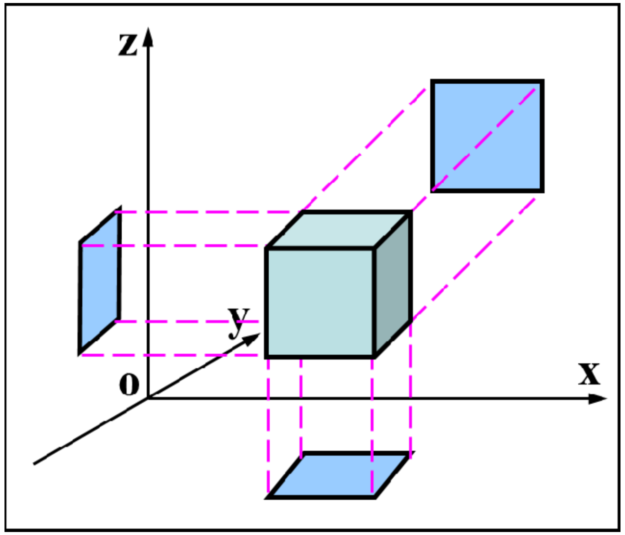
假设：

- 由于变形微小，所以可以认为两个平行面在坐标面上的投影只相差高阶的微量；
- 因而两个平行面的投影面可以合并为一个投影面；

设在直角坐标系中A点的坐标：

- 变形前：(x, y, z)；
- 变形后：$(x+u, y+v, z+w)$

u，v，w是A点位移在x, y, z轴上的投影，它们都是x, y, z的连续函数，并且位移的导数也是连续的。



平行六面体的变形

A点的位移（沿**x**轴）： $u = f_1(x, y, z)$

B点的位移（沿**x**轴）： $u_1 = f_1(x + dx, y, z) = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$

在***x***轴上投影的伸长量

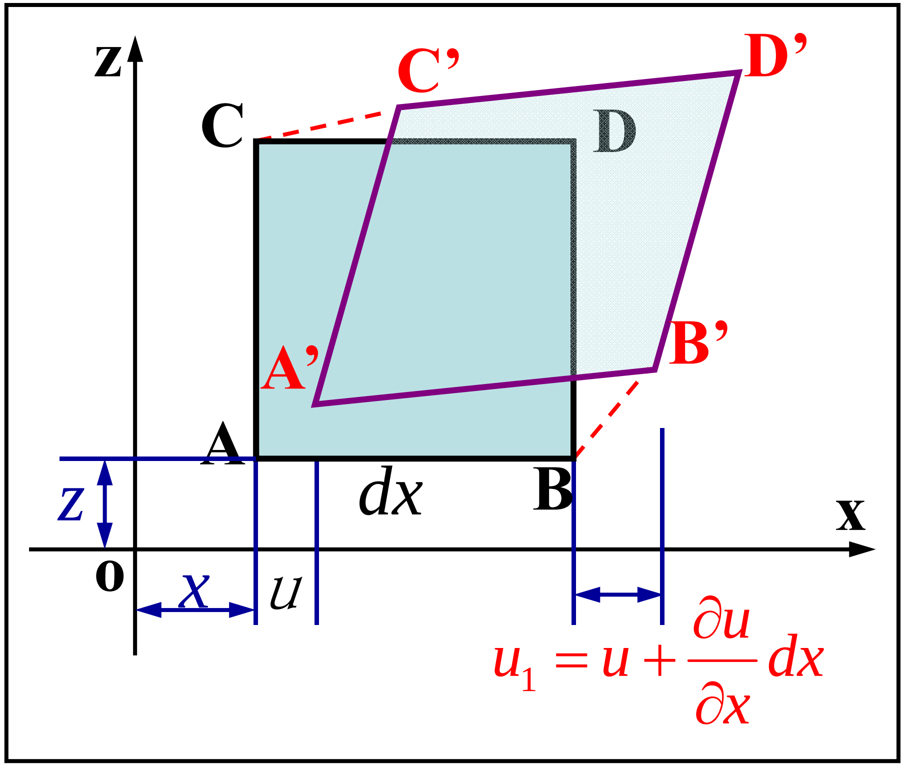
$$u_1 - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

沿***x***轴的伸长线应变

$$\varepsilon_x = \frac{u_1 - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

沿***y***和***z***轴的伸长线应变

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$



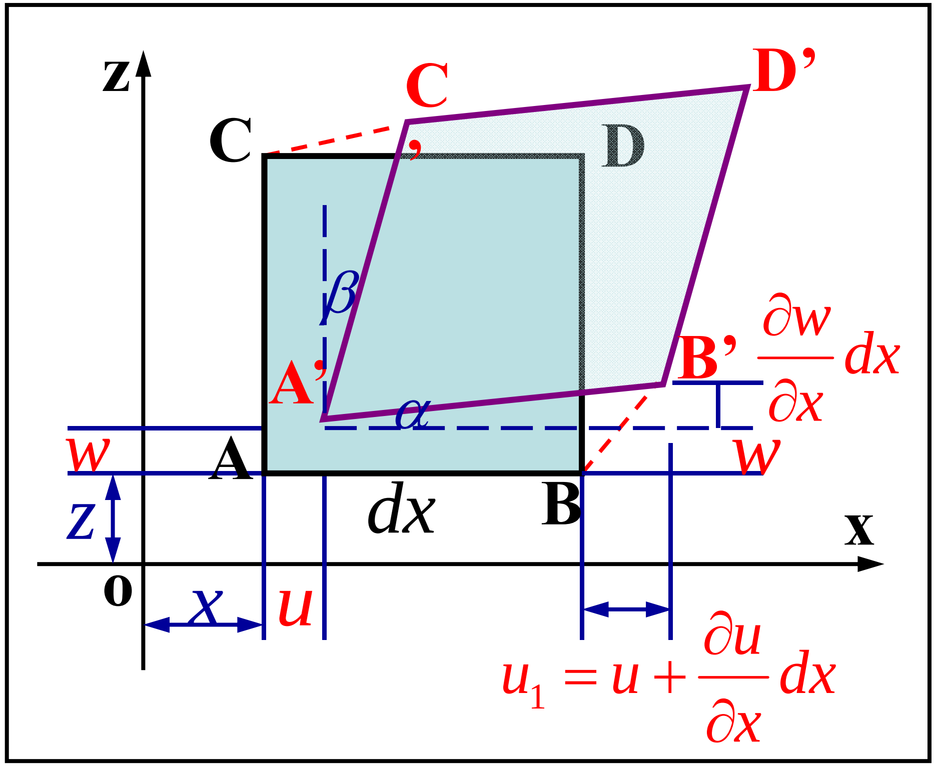
平行六面体的变形

***xoz*平面内的角应变：** $\gamma_{zx} = \alpha + \beta$

***A*点的位移（沿z轴）：**

$$w = f_3(x, y, z)$$

***B*点的位移（沿z轴）：**



$$w_1 = f_3(x + dx, y, z) = w + \frac{\partial w}{\partial x}dx$$

***B*点与*A*点沿*z*轴的位移差**

$$w_1 - w = \frac{\partial w}{\partial x}dx$$

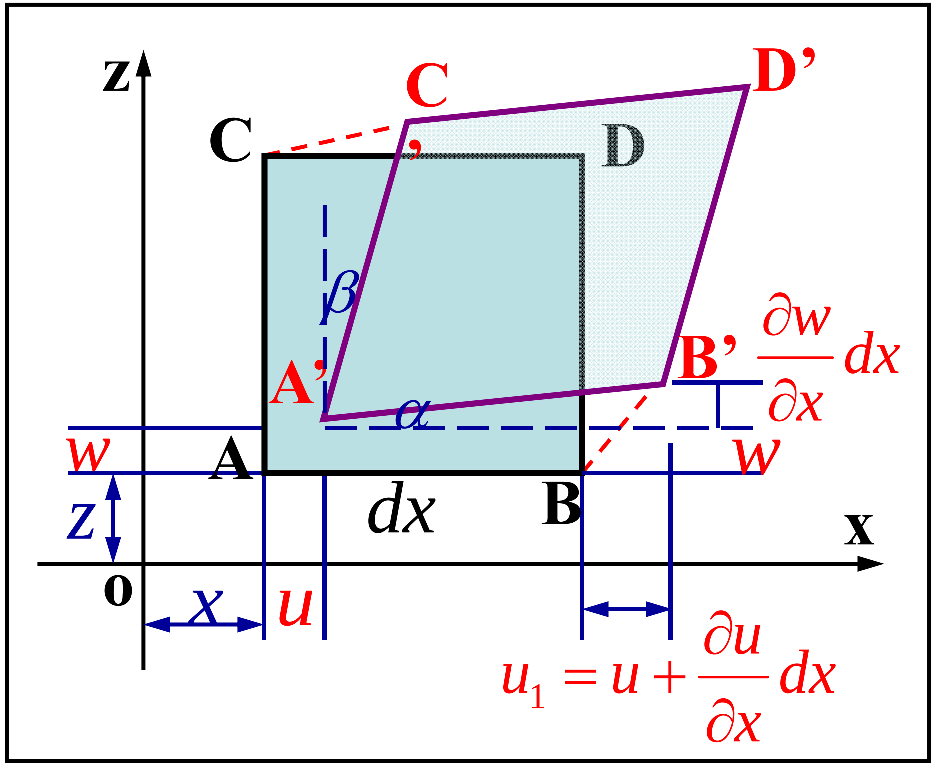
平行六面体的变形

变形是微小的，因此：

$$\alpha \approx \tan\alpha$$

$$= \frac{\dfrac{\partial w}{\partial x}dx}{dx + \dfrac{\partial u}{\partial x}dx}$$

$$= \frac{\dfrac{\partial w}{\partial x}}{1 + \dfrac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial w}{\partial x}$$



相同的方法可得 $\beta = \dfrac{\partial u}{\partial z}$

平行六面体的变形

***xoz*平面内的角应变：** $$\gamma_{zx} = \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

***xoy*平面内的角应变：** $$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

***yoz*平面内的角应变：** $$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

应变与位移关系

直角坐标的应变几何方程

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

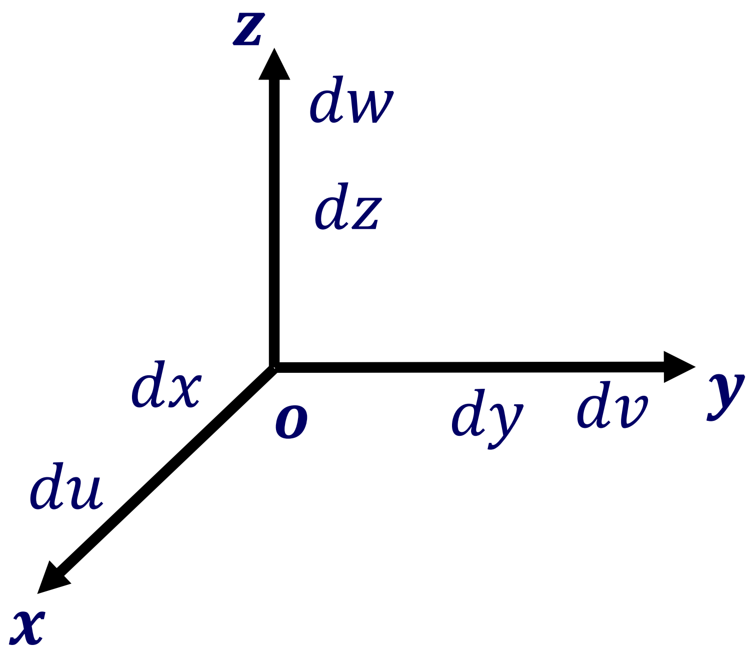
$\varepsilon_x > 0$, u随x增大而增大

$\gamma_{xy} > 0$, 六面体夹角减小

正剪应变

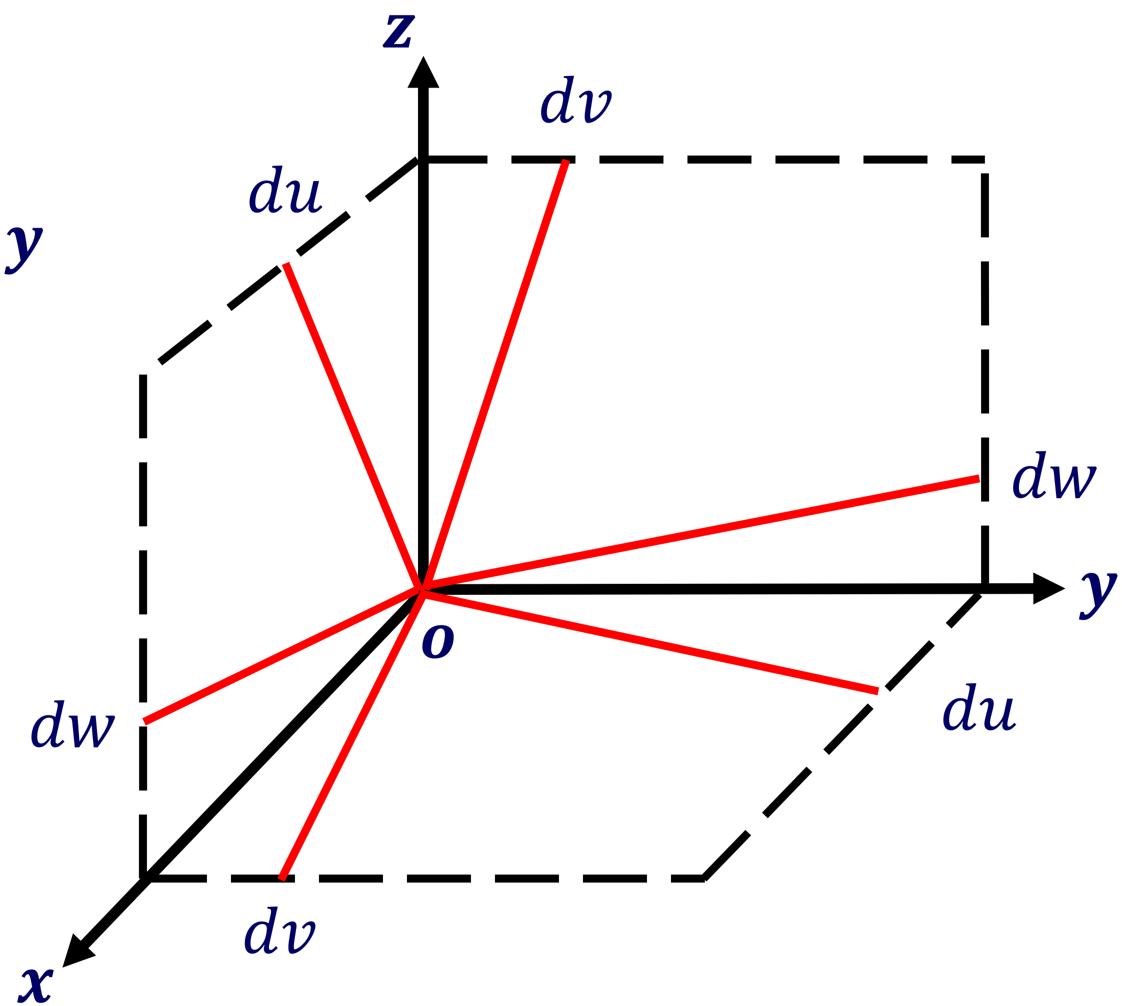
Cauchy几何方程

Cauchy几何方程



正应变

剪应变



应变与位移关系——圆柱坐标

圆柱坐标应变的几何方程

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}$$

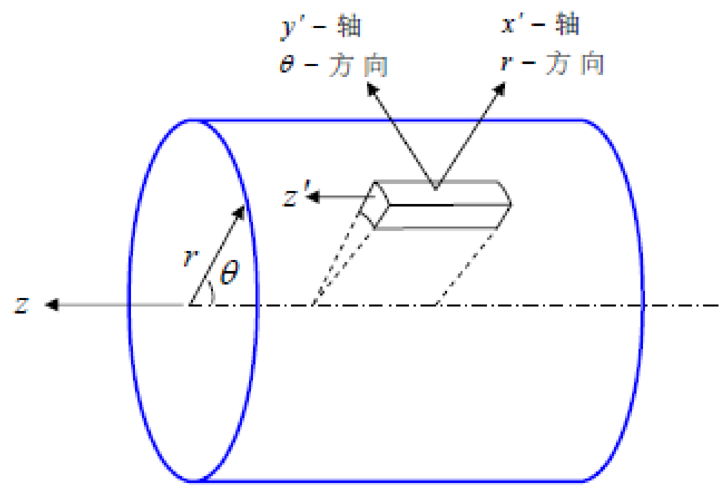
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

u*, *v*, *w分别表示一点位移在径向(***r***方向)，环向(***θ***方向)和轴向(***z***方向)的分量



应变与位移关系——平面极坐标

平面极坐标的几何方程 (r, θ)

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \boxed{\frac{u}{r}}$$

发生径向位移所引起的环向线应变分量

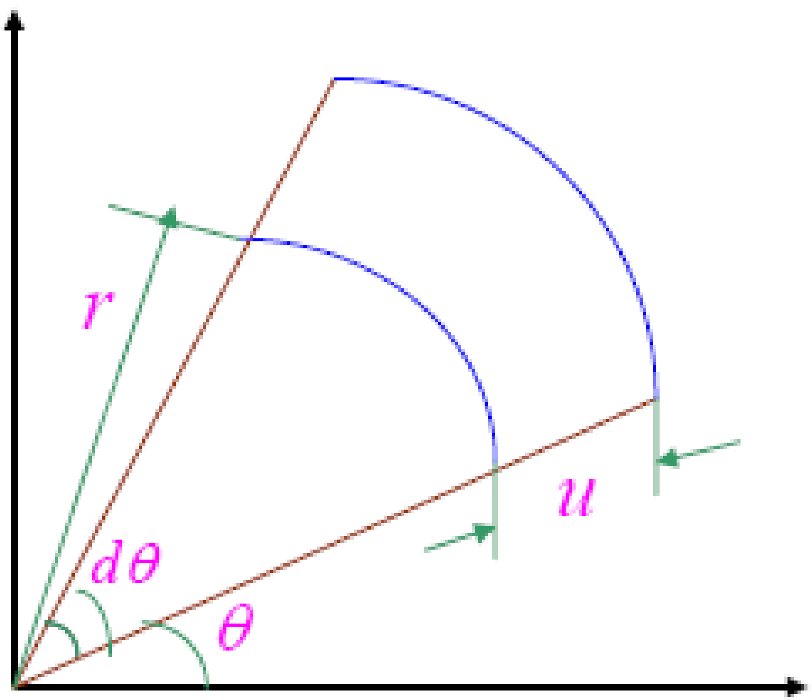
$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} - \boxed{\frac{v}{r}}$$

发生环向位移所引起的剪应变分量

应变与位移关系——平面极坐标

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial\theta} + \boxed{\frac{u}{r}}$$

发生径向位移所引起的环向线应变分量



具有相同径向位移的微元

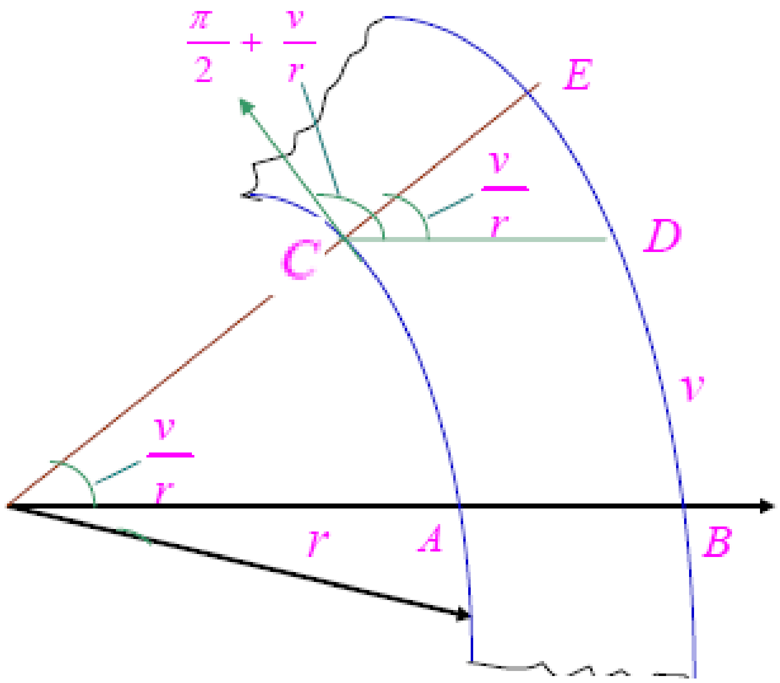
假定平面物体的半径为r，圆周上微圆弧段发生了相同的位移u，则变形后该微单元弧段长度为(r+u)dθ，而原始长度为rdθ，相对伸长为

$$\varepsilon_\theta = \frac{(r+u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r}$$

应变与位移关系——平面极坐标

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}$$

发生环向位移所引起的剪应变分量



具有环向移动的圆弧

- 如果平面变形体某一微元线段AB发生了环向形式的位移，即在变形后线段上各点沿其环向方向移动了相同的距离v
- 变形前与半径重合的直线段AB，变形后移动到CD位置，不再与C点的半径方向CE相重合，而彼此的夹角为v/r
- 于是微元线段AB变形后的CD与C点圆周切线(θ坐标线正方向)夹角为90°+v/r，夹角比增大了v/r，根据剪应变的定义，即发生了剪应变

应变与位移关系

轴对称问题（平面）

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}$$

$$v = 0 \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

球对称问题（空间） (r, θ, φ)

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \qquad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}$$

应变与位移关系

Cauchy几何方程：

一、物理意义：几何方程表示位移与应变之间关系；

二、位移含质点间的相对位移和刚体位移；

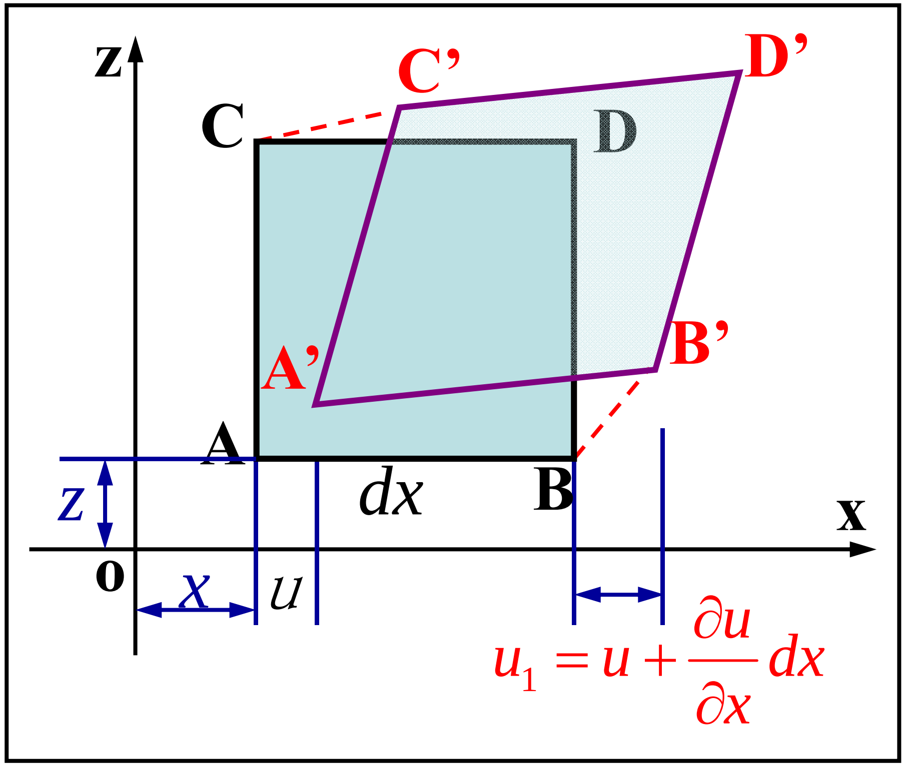
三、应变正负号规定：正应变（伸长为正，缩短为负）

剪应变（角减为正，角增为负）

四、推导中应用到小变形、连续性假设和泰勒展开。

第三章 应变分析

- 应变状态，应变与位移关系
- 主应变
- 应变张量与应变偏量
- 应变协调方程



主应变

主平面，主方向，主应变

一点的应变状态也可以用张量表示—应变张量

引进符号

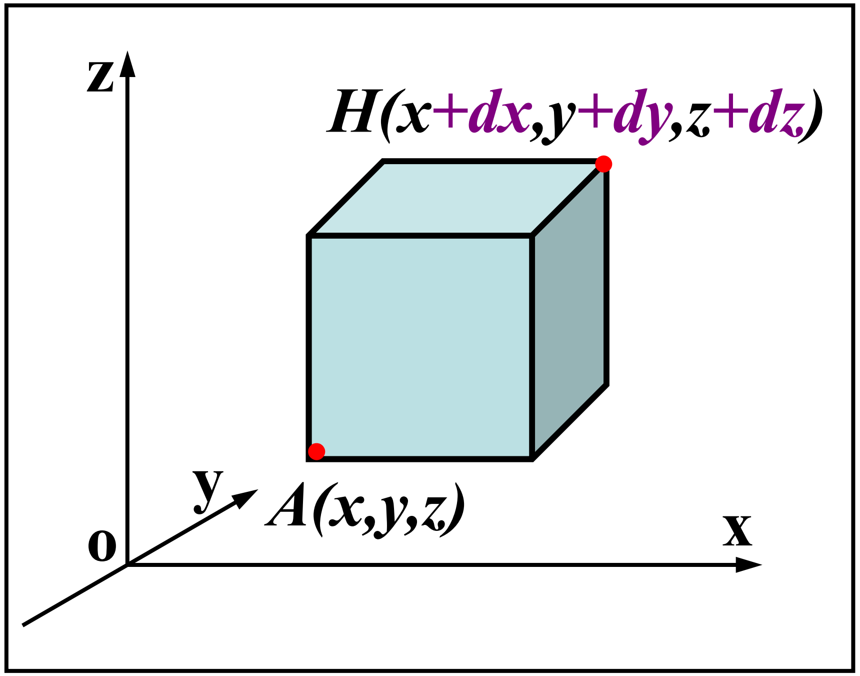
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\gamma_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

主应变



设有*ACDBEGHF*正六面微单元体可以认为它的应变是均匀的。

变形前：*A*(*x*，*y*，*z*)

变形后：*A'*(*x*+*u*，*y*+*v*，*z*+*w*)

A点的位移*u*、*v*、*w*为*x*，*y*，*z*的连续函数

$$u = f(x, y, z)$$

H点

变形前： *H* [(*x*+dx),(*y*+dy),(*z*+dz)]

变形后： *H'* {[(*x*+dx)+(*u*+d*u*)]，[(*y*+dy)+(*v*+dv)]，[(*z*+dz)+(*w*+dw)]}

其中 du、dv、dw 为*H* 点相对于*A* 点的位移。

$$u + du = f(x + dx, y + dy, z + dz)$$

主应变

根据Taylor级数展开

$$u+du=\underbrace{f(x,y,z)}_{u}+\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\cancel{(dx,dy,dz\text{的高阶项})}$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\quad=\varepsilon_x dx+\varepsilon_{xy}dy+\varepsilon_{xz}dz$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)dz$$

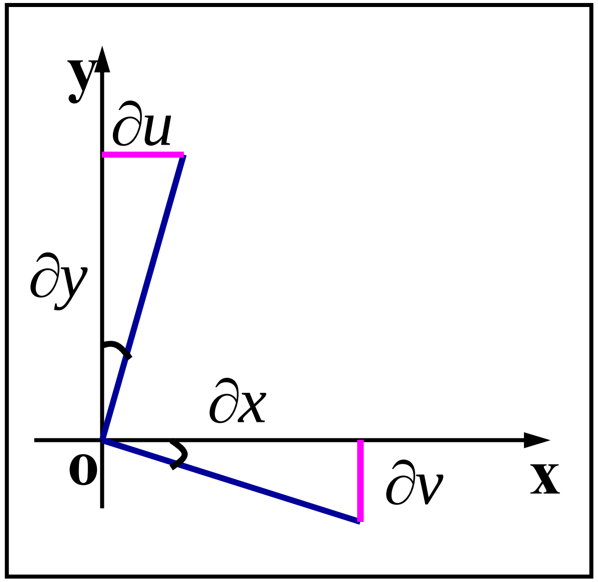
$$\boxed{\cancel{+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)dz}}$$

刚体转动，不引起应变

同理可得

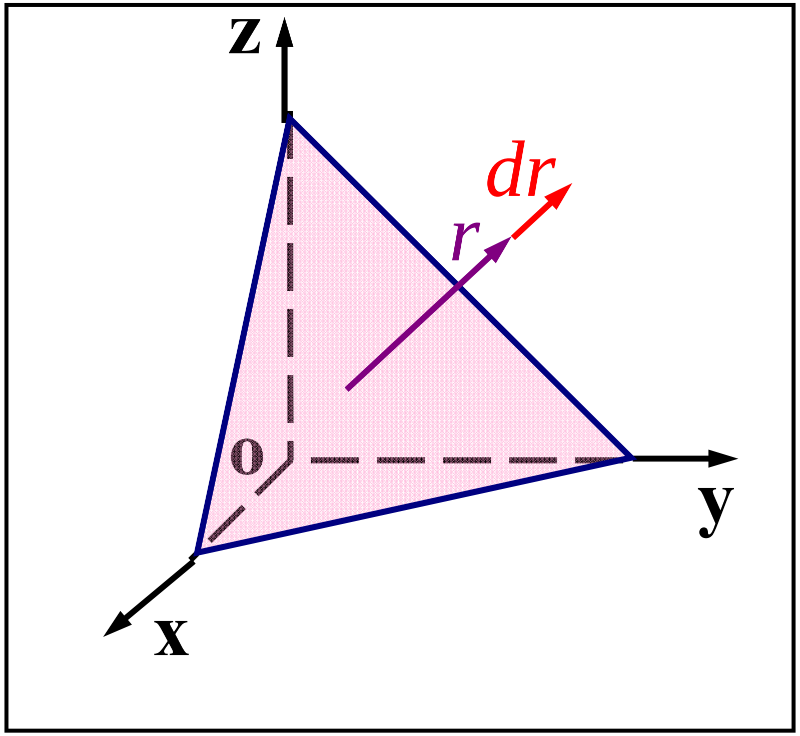
$$dv=\varepsilon_{yx}dx+\varepsilon_y dy+\varepsilon_{yz}dz$$

$$dw=\varepsilon_{zx}dx+\varepsilon_{zy}dy+\varepsilon_z dz$$



主应变

主应变空间中，$r(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 表示一个应变状态



若增加了一个增量**dr**，且其方向保持不变，

则$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{dr}$在坐标轴上的投影是成比例的。

$$\varepsilon=\frac{dr}{r}=\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy}=\frac{dw}{dz}$$

$$du=\varepsilon dx,\ dv=\varepsilon dy,\ dw=\varepsilon dz$$

<u>系数行列式为零</u>

$$\begin{cases} du=\varepsilon dx=\varepsilon_x dx+\varepsilon_{xy}dy+\varepsilon_{xz}dz \\ dv=\varepsilon dy=\varepsilon_{yx}dx+\varepsilon_y dy+\varepsilon_{yz}dz \\ dw=\varepsilon dz=\varepsilon_{zx}dx+\varepsilon_{zy}dy+\varepsilon_z dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\varepsilon_x-\varepsilon)dx+\varepsilon_{xy}dy+\varepsilon_{xz}dz=0 \\ \varepsilon_{yx}dx+(\varepsilon_y-\varepsilon)dy+\varepsilon_{yz}dz=0 \\ \varepsilon_{zx}dx+\varepsilon_{zy}dy+(\varepsilon_z-\varepsilon)dz=0 \end{cases}$$

主应变

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\varepsilon^3 - I_1'\varepsilon^2 + I_2'\varepsilon - I_3' = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$$

应变不变量

$$I_1' = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$I_2' = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{zx}^2$$

$$I_3' = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx} - \varepsilon_x\varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_y\varepsilon_{zx}^2 - \varepsilon_z\varepsilon_{xy}^2$$

主应变表示的应变不变量

$$I_1' = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$I_2' = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1$$

$$I_3' = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$

应变张量与应变偏量

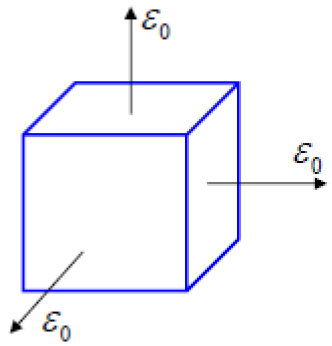
和应力相似，应变也可以用张量表示。也可以分解为与体积有关的球形应变张量和物体形状变化有关的应变偏量。

球形应变张量 $$\varepsilon_0\delta_{ij}=\begin{bmatrix}\varepsilon_0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_0\end{bmatrix}$$

平均应变：

$$\varepsilon_0=\frac{1}{3}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)$$

应变偏量 $$e_{ij}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x-\varepsilon_0 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y-\varepsilon_0 & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z-\varepsilon_0\end{bmatrix}$$



应变张量与应变偏量

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2\varepsilon_x - \varepsilon_y - \varepsilon_z) & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \frac{1}{3}(2\varepsilon_y - \varepsilon_x - \varepsilon_z) & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \frac{1}{3}(2\varepsilon_z - \varepsilon_x - \varepsilon_y) \end{bmatrix}$$

主应变表示应变偏量

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \end{bmatrix}$$

在考虑塑性变形时，经常采用体积不变假设，这时球形应变张量为零，则应变张量等于应变偏量。

- 一点的应变状态完全由应变张量确定
  - 任一方向上的正应变： $N(l,m,n)$

$$\varepsilon_N = l^2\varepsilon_x + m^2\varepsilon_y + n^2\varepsilon_z + 2lm\,\varepsilon_{xy} + 2mn\,\varepsilon_{yz} + 2nl\,\varepsilon_{zx}$$

应变张量与应变偏量

主剪应变

$$\begin{cases} \gamma_1 = \pm(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \\ \gamma_2 = \pm(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \\ \gamma_3 = \pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \end{cases}$$

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \implies \gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$$

正八面体剪应变

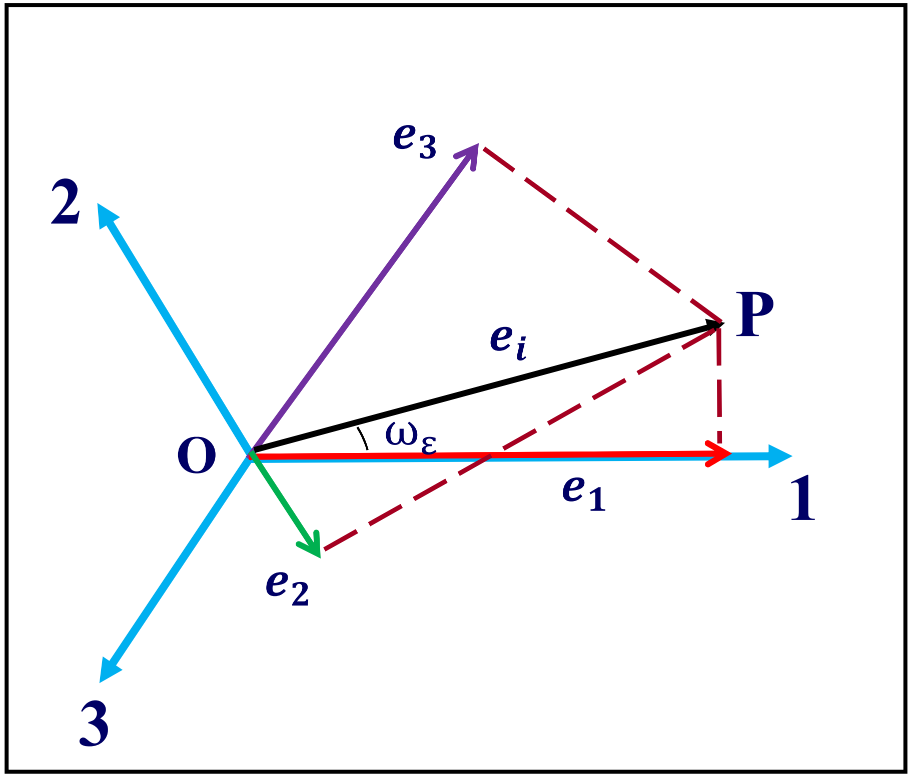
$$\gamma_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

应变强度（等效应变）

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

ε_i 表示变形的程度，永远是一个正值并与塑性变形功有直接的联系。

应变状态在等倾面上的几何关系



$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} \qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

$$e_1 = e_i \cos \omega_\varepsilon$$

$$e_1 = e_i \cos\left(\omega_\varepsilon - 120°\right)$$

$$e_1 = e_i \cos\left(\omega_\varepsilon - 240°\right)$$

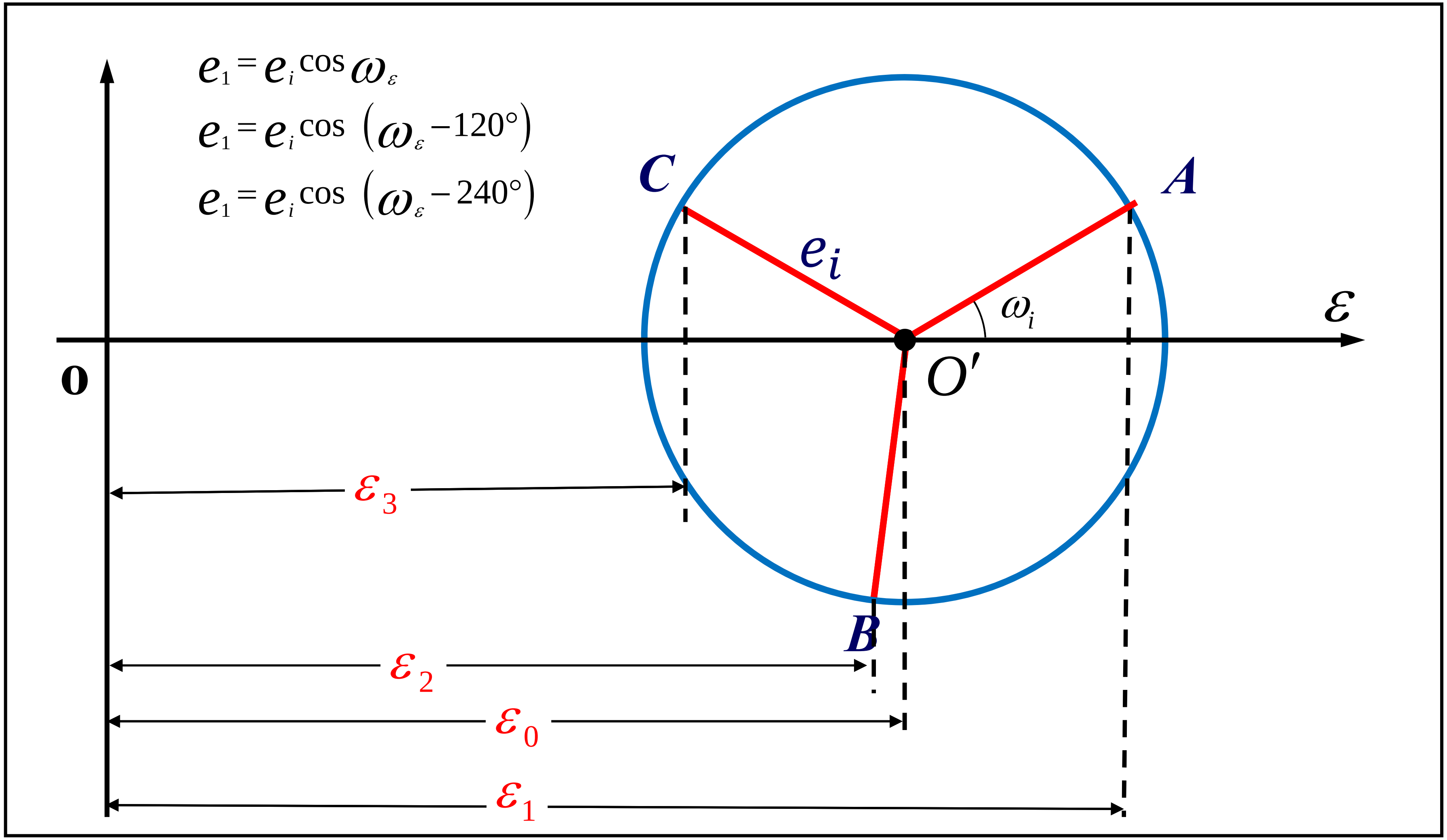
$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = \frac{3}{2} e_i^2$$

$$e_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}$$

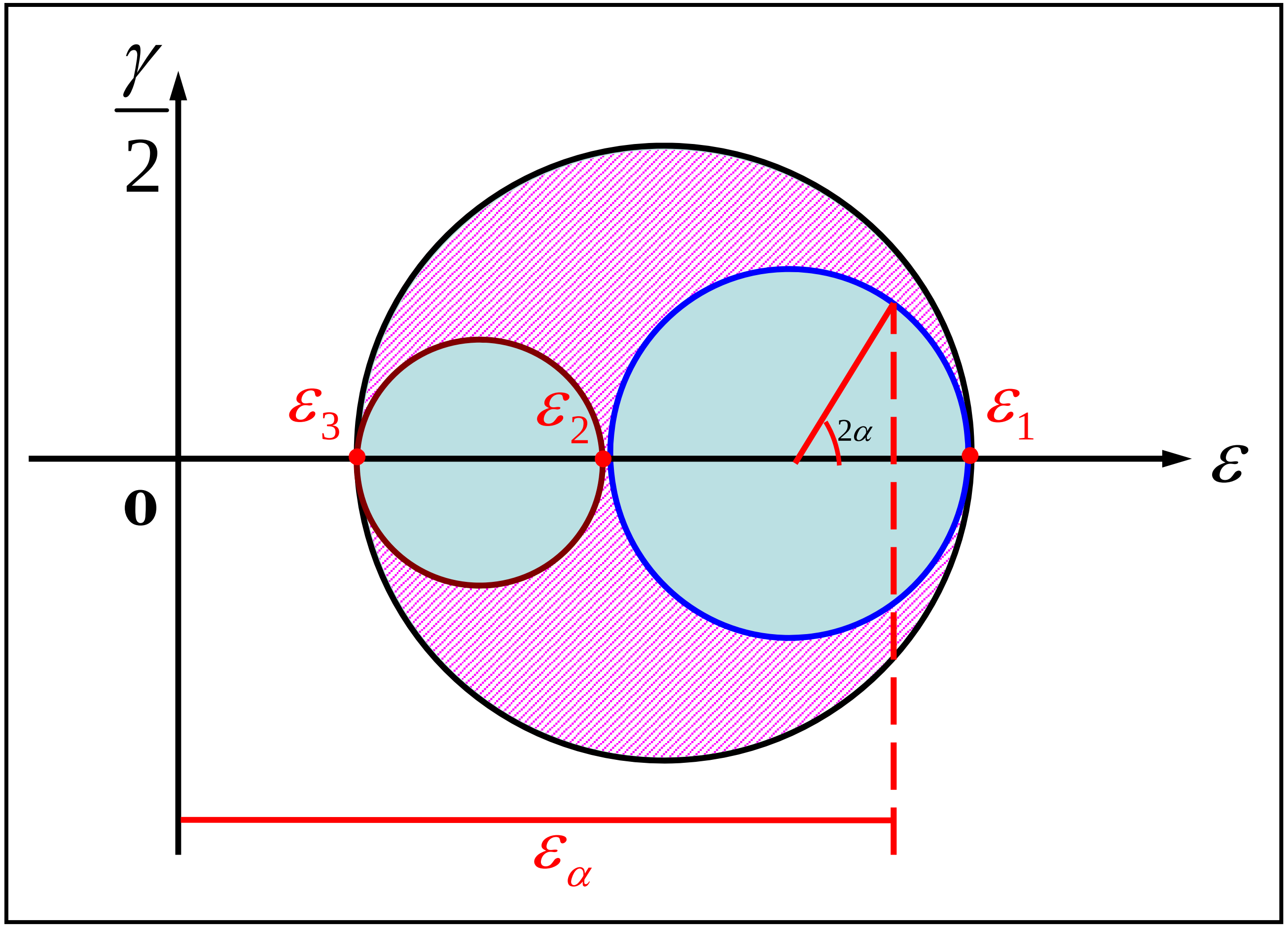
$$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) - \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 - e_1 e_2 - e_1 e_3 - e_2 e_3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

应变星圆


$e_1 = e_i \cos \omega_\varepsilon$
$e_1 = e_i \cos(\omega_\varepsilon - 120°)$
$e_1 = e_i \cos(\omega_\varepsilon - 240°)$
C
A
B
e_i
ω_i
ε
0
O'
ε_3
ε_2
ε_0
ε_1

应变莫尔圆



应变罗德参数 $\mu_\varepsilon = \dfrac{(\varepsilon_1-\varepsilon_3)/2-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{(\varepsilon_1-\varepsilon_3)/2} = \dfrac{2\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3}{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$ $\quad -1 \le \mu_\varepsilon \le 1$

例题1

设物体中点的位移函数为:

$$u = 10\times10^{-3} + 0.1\times10^{-3}xy + 0.05\times10^{-3}z$$

$$v = 5\times10^{-3} - 0.05\times10^{-3}x + 0.1\times10^{-3}yz$$

$$w = 10\times10^{-3} - 0.1\times10^{-3}xyz$$

试求物体中坐标为**(1,1,1)**的**P**点应变张量与应变偏量。

解: 根据几何方程可得

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0.1\times10^{-3}y,\ \ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.1\times10^{-3}z,\ \ \varepsilon_x = \frac{\partial w}{\partial z} = -0.1\times10^{-3}xy$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.1\times10^{-3}x - 0.05\times10^{-3}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = -0.1\times10^{-3}xz + 0.1\times10^{-3}y$$

$$\gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=-0.1\times10^{-3}yz+0.05\times10^{-3}$$

将P点的坐标(1,1,1)代入，并注意 $\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\gamma_{xy}\cdots$

应变张量： $$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.025 & -0.025\\ 0.025 & 0.1 & 0\\ -0.025 & 0 & -0.1\end{bmatrix}\times10^{-3}$$

$$\varepsilon_0=\frac{1}{3}(0.1+0.1-0.1)\times10^{-3}\approx0.033\times10^{-3}$$

应变偏量： $$e_{ij}=\begin{bmatrix}0.067 & 0.025 & -0.025\\ 0.025 & 0.067 & 0\\ -0.025 & 0 & -0.133\end{bmatrix}\times10^{-3}$$

✍ 例题2

设某一物体发生如下的位移：

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z, \quad v = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z$$

$$w = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z \qquad a_i, b_i, c_i \text{ 均为常数}$$

试证明：

（1）各应变分量在物体内为常数（即所谓均匀变形）；

（2）物体内的平面保持为平面，直线保持为直线，平行面保持为平行面，平行线保持为平行线，正平行六面体变成斜平行六面体，圆球面变成椭球面。

证明：① 各应变分量在物体内为常数

将位移分量代入几何方程（略）

② 变形后，物体内的平面保持为平面

设物体内某平面的方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$

变形后，该平面上任一点**(x,y,z)**将变到新位置，其坐标**(x_1,y_1,z_1)**为

$$x_1 = x + u = x + a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z$$
$$y_1 = y + v = y + b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z \quad \Longrightarrow \quad x,\ y,\ z$$
$$z_1 = z + w = z + c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z$$

$$x = A_1' x_1 + A_2' y_1 + A_3' z_1 + A_0'$$
$$y = B_1' x_1 + B_2' y_1 + B_3' z_1 + B_0' \quad \longrightarrow \quad Ax + By + Cz + D = 0$$
$$z = C_1' x_1 + C_2' y_1 + C_3' z_1 + C_0'$$

$$\Longrightarrow \quad A^* x_1 + B^* y_1 + C^* z_1 + D^* = 0$$ <u>平面方程</u>

③ 变形后，物体内的直线保持为直线

在变形前，于物体内任取一直线

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad \frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$$

两不平行平面的交线

$$\Longrightarrow \begin{cases} A_1^*x_1+B_1^*y_1+C_1^*z_1+D_1^*=0 \\ A_2^*x_1+B_2^*y_1+C_2^*z_1+D_2^*=0 \end{cases}$$

两个不平行的平面方程

④ 变形后，物体内的平行面保持为平行面

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \qquad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

$$\Longrightarrow \quad A_1^*x_1+B_1^*y_1+C_1^*z_1+D_1^*=0$$

$$A_2^*x_1+B_2^*y_1+C_2^*z_1+D_2^*=0$$

可证明 $\frac{A_1^*}{A_2^*}=\frac{B_1^*}{B_2^*}=\frac{C_1^*}{C_2^*}$

⑤ 变形后，物体内的平行线保持为平行线

两平行线可视为两两平面所交的直线，
由前述结论可知，变形后仍为两两平行的平面，
所以其交线自然仍为平行直线。

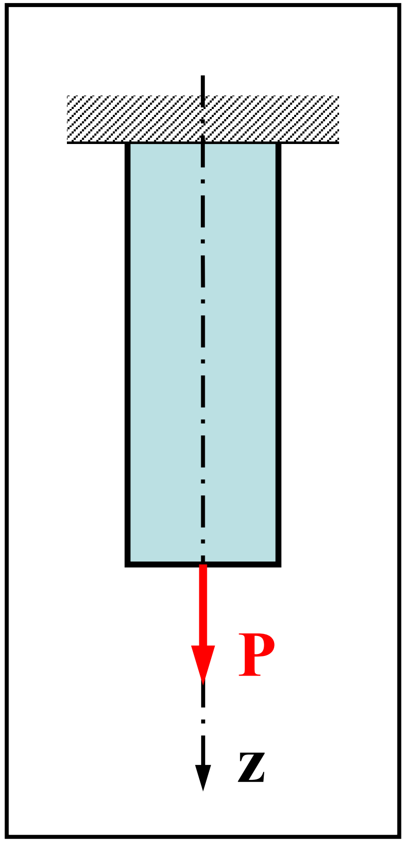
⑥ 变形后，正平行六面体变成斜平行六面体

变形前的正六面体，变形后，平行面保持平行，
而剪应变一般不全为零，即变形前互相垂直平面，
变形后不再垂直而变成斜平行六面体。

⑦ 变形后，物体内的圆球面变成椭球面

以等截面直杆的简单拉伸为例说明

$$\begin{cases} u = -\mu\varepsilon_z x \\ v = -\mu\varepsilon_z y \quad \varepsilon_z、\mu \text{ 均为常数，} \mu \text{ — 泊松比} \\ w = \varepsilon_z z \end{cases}$$



变形后 →

$$\begin{cases} x_1 = x + u = (1-\mu\varepsilon_z)x \\ y_1 = y + v = (1-\mu\varepsilon_z)y \\ z_1 = z + w = (1+\varepsilon_z)z \end{cases}$$

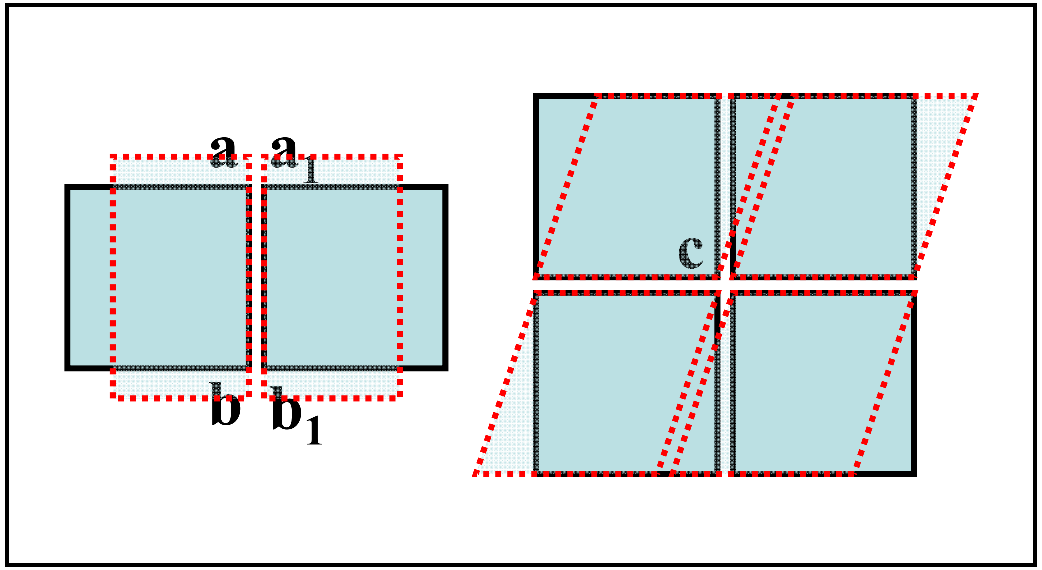
变形前，圆球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

变形后，椭球面方程为

$$\frac{x_1^2}{(1-\mu\varepsilon_z)^2} + \frac{y_1^2}{(1-\mu\varepsilon_z)^2} + \frac{z_1^2}{(1+\varepsilon_z)^2} = R^2$$

应变协调方程

研究物体变形时，一般都取一个平行六面体（单元体）微元进行分析。物体在变形时，各相邻的小单元体必然是互相有联系的，因此应该认为物体在变形前是连续的，变形后仍是连续的。



应变之间是以某种关系互相联系的。

应变协调方程

应变协调方程

从位移与应变关系的表达式出发

在应力分析中，已经指出必须建立平衡方程以保证物体总是处于平衡状态。然而，在应变分析中，必须由某些条件强加于应变分量以保证变形体连续。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

已知位移可以求出应变。但给定应变，那么有三个未知位移函数，有六个几何方程。如果不对应变加以限制就不能得到一个解。为了能得到一个单值的连续位移函数，必须对应变分量加以限制，这种约束被称为应变协调条件

应变协调方程

设物体中某一点的坐标是(*x*, *y*, *z*)，其位移是*u*, *v*, *w*，应变为 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$+$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y \partial z}$$

应变协调方程

直角坐标下的应变协调方程

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y \partial z} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}$$

平面应变问题

$$\varepsilon_z=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

所有应变都在一个平面内

只和**x**、**y**坐标相关

应变协调方程

圆柱坐标中的变形协调方程 (r, θ, z)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial r \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial \theta} + \gamma_{r\theta}\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}\right) - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\gamma_{\theta r})}{\partial r \partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial z^2} - r\frac{\partial^2}{\partial r \partial z}\left(\frac{\gamma_{\theta z}}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial \theta \partial z} = -2\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r}\left(\frac{\varepsilon_z}{r}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r\gamma_{\theta z})}{\partial r}\right] - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 (r^2 \gamma_{r\theta})}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\left(\frac{\gamma_{rz}}{r}\right) = -\frac{2}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 (r\gamma_{\theta z})}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial^2 (r\gamma_{\theta r})}{\partial z \partial \theta} = r\left[\varepsilon_r - \frac{\partial (r\varepsilon_\theta)}{\partial r}\right]$$

应变协调方程

平面问题极坐标中的变形协调方程 (r,θ)

$$\varepsilon_z=\gamma_{rz}=\gamma_{\theta z}=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varepsilon_r}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r})-\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\gamma_{\theta r})}{\partial r\partial\theta}$$

<u>轴对称问题（平面）</u>

应变分量与θ无关

$$r\frac{\partial^2\varepsilon_\theta}{\partial r^2}+2\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r}=\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial r}$$

应变协调方程

应变协调方程的物理意义

如果将变形体分解为许多微元体，每个微元体的变形都用六个应变分来那个描述

- 若应变分量不满足应变协调方程，则这些微元体将不能构成一个连续体，可能出现裂纹或者发生重叠
- 满足应变协调方程能保证变形前后物体的连续性
- 连续介质的应变状态是否可能，需要利用应变协调方程来检验

✍ 例题3

已知下列的应变分量是物体变形时产生的：

$$\varepsilon_x = A_0 + A_1(x^2 + y^2) + x^4 + y^4$$

$$\varepsilon_y = B_0 + B_1(x^2 + y^2) + x^4 + y^4$$

$$\gamma_{xy} = C_0 + C_1 xy(x^2 + y^2 + C_2) \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

试求系数之间应满足的关系式。

解：

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = 2A_1 + 12y^2, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2B_1 + 12x^2$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 3C_1 y^2 + 3C_1 x^2 + C_1 C_2$$

代入平面应变问题的变形协调方程

$$2A_1 + 12y^2 + 2B_1 + 12x^2 = 3C_1 y^2 + 3C_1 x^2 + C_1 C_2$$

比较上式系数可得

$$C_1 = 4$$

$$A_1 + B_1 = 2C_2$$

例题4

在平面轴对称情况下，轴向应变 ε_z为常数，试确定其余两个应变分量 ε_r和 ε_θ的表达式（材料是不可压缩的）。

解： $r\dfrac{\partial^2\varepsilon_\theta}{\partial r^2}+2\dfrac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r}=\dfrac{\partial\varepsilon_r}{\partial r} \Longrightarrow r\dfrac{d\varepsilon_\theta}{dr}+\varepsilon_\theta-\varepsilon_r=0$

当材料为不可压缩时，体积应变应为零

$$\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z=0 \Longrightarrow \varepsilon_r=-\varepsilon_\theta-\varepsilon_z$$

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}+2\frac{\varepsilon_\theta}{r}=-\frac{\varepsilon_z}{r} \Longrightarrow \varepsilon_\theta=-\frac{\varepsilon_z}{2}+\frac{C}{r^2}$$

积分常数C由边界条件确定 $\quad \varepsilon_r=-\dfrac{\varepsilon_z}{2}-\dfrac{C}{r^2}$

作业

谢 谢 各 位！

沈 彬 助理研究员
机械与动力工程学院

Email: binshen@sjtu.edu.cn

Tel: 021 3420 6556