(2) $P(x)/\omega_{n+1}(x) = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{P(x_k)}{(x - x_k)\omega_{n+1}'(x_k)}$

9. 利用差分证明：

(1) $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(2) $1 \times 3 + 2 \times 4 + \cdots + n(n+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$

10. 作三次多项式 $P_3(x)$，使它在 $x = 0$ 与 $x = \frac{\pi}{2}$ 处与 $\cos x$ 相切，并写出余项.



# 第二章　函数逼近

## 一、内容提要

1. 函数逼近的基本概念

**定义 2.1**　设 $S$ 是线性空间，$\|\cdot\|$ 是 $S$ 上的一实函数，若对任意的 $f, g \in S$，满足

(i) $\|f\| \geqslant 0$，当且仅当 $f \equiv 0$ 时 $\|f\| = 0$；

(ii) $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$，$\forall\, \alpha \in R$；

(iii) $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

则称 $\|\cdot\|$ 为线性空间 $S$ 上的范数．在 $S$ 上定义了范数之后，$S$ 就称为赋范线性空间，记为 $X$.

对于连续函数 $f(x)$，$x \in [a,b]$，常用的范数有：

$\infty$ -范数　$\|f\|_\infty = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$

1 -范数　$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$

2 -范数　$\|f\|_2 = (\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x)^{1/2}$

**定义 2.2**　设 $X$ 为赋范线性空间，范数为 $\|\cdot\|$，序列 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$，$f \in X$，若

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi_n - f\| = 0$$

则称序列 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 依范数 $\|\cdot\|$ 收敛于 $f$，记作 $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n = f$．对于 $[a, b]$ 上的连续函数，依 $\|\cdot\|_\infty$ 收敛就是一致收敛；依 $\|\cdot\|_2$ 收敛就是平方收敛.

**定义 2.3** 设 $f(x)$ 属于$[a,b]$上的连续函数集合 $C[a,b]$，$\varphi_i(x)$，$i=0,1,\cdots,n$ 是 $C[a,b]$ 中的一组线性无关的函数，$\Phi=\operatorname{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$. 若 $\varphi^*(x)\in\Phi$ 与 $f(x)$ 的距离最小，即 $\varphi^*=\sum_{i=0}^{n}a_i^*\varphi_i\in\Phi$，满足

$$\|f-\varphi^*\| = \min_{\varphi\in\Phi}\|f-\varphi\|$$

就称 $\varphi^*$ 是 $f$ 在函数类 $\Phi$ 中在范数 $\|\cdot\|$ 意义下的最佳逼近．当范数是 $\|\cdot\|_\infty$ 和 $\|\cdot\|_2$ 时，分别称为最佳一致逼近和最佳平方逼近(参阅参考文献 1,2).

2. 内积空间与正交多项式

**定义 2.4** 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，定义

$$(f,g)=\int_a^b\rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

称为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在$[a,b]$上带权 $\rho(x)$ 的内积．

线性空间定义了内积后，就成为内积空间．所有内积空间都满足以下公理：

(i) $(f,g)=(g,f)$，(对称性)

(ii) $(c_1f_1+c_2f_2,g)=c_1(f_1,g)+c_2(f_2,g)$，$c_1,c_2\in R$，(线性性)

(iii) $(f,f)\geqslant 0$，当且仅当 $f=0$ 时 $(f,f)=0$.(非负性)

显然，$(f,f)^{1/2}=(\int_a^b\rho(x)f^2(x)\mathrm{d}x)^{1/2}=\|f\|_2$，称为 $f$ 的加权欧氏(Euclid)模或加权 2-范数，$\rho\equiv1$ 时，就是 2-范数．

**定义 2.5** 设$[a,b]$为有限或无限区间，函数 $\rho(x)$ 为$[a,b]$上的权函数，对于多项式序列$\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$，若它们满足关系式

$$(P_j,P_k)=\int_a^b\rho(x)P_j(x)P_k(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & j\neq k\\ \int_a^b\rho(x)P_j^2(x)\mathrm{d}x=\gamma_j>0, & j=k\end{cases}$$



则称$\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$在$[a,b]$上带权 $\rho(x)$ 正交，并称 $P_n(x)$ 为$[a,b]$上带权 $\rho(x)$ 的 $n$ 次正交多项式．若 $\gamma_j=1,j=0,1,\cdots$，则称$\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$为标准正交的．

正交多项式有许多重要性质，见参考文献 1,2.

常用的正交多项式有：

(i) 切比雪夫 (Chebyshev) 多项式：

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),\ n\geqslant 0$$

这是在$[-1,1]$上带权 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交多项式，且

$$T_n(1)=1,\ (T_n,T_n)=\begin{cases}\pi, & n=0\\ \pi/2, & n>0\end{cases}$$

(ii) 勒让德 (Legendre) 多项式：

$$P_0(x)=1,\ P_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n],\ n\geqslant 1$$

对一切 $n$，它们在$[-1,1]$上带权 $\rho(x)\equiv1$ 正交，且

$$P_n(1)=1,\ (P_n,P_n)=\frac{2}{2n+1}$$

(iii) 拉盖尔 (Laguerre) 多项式：

$$L_n(x)=\mathrm{e}^x\frac{d^n}{dx^n}\{x^ne^{-x}\},\ n\geqslant 0$$

对一切 $n$，它们在$[0,+\infty)$上带权 $\rho(x)=e^{-x}$ 正交，且

$$(L_n,L_n)=(n!)^2$$

(iv) 埃尔米特 (Hermite) 多项式：

$$H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}),\ n\geqslant 0$$

它们在$(-\infty,+\infty)$上带权 $\rho(x)=e^{-x^2}$ 正交，且

$$(H_n,H_n)=2^n\cdot n!\sqrt{\pi}$$

3. 函数的最佳平方逼近

函数的最佳平方逼近定义见定义 2.3，逼近函数 $\varphi^*(x)$ 的系

数 $a_i^*$ $(i=0,1,\cdots,n)$ 满足正规方程组：

$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_k,\varphi_j)a_j^* = (f,\varphi_k),\ k=0,1,2,\cdots,n$$

逼近误差 $\delta_n = f(x)-\varphi^*(x)$ 满足关系式

$$\|\delta_n\|_2^2 = (f-\varphi^*, f-\varphi^*) = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n}a_k^*(f,\varphi_k)$$

当 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 是带权 $\rho(x)$ 正交时，直接有

$$a_k^* = \frac{(\varphi_k,f)}{(\varphi_k,\varphi_k)},\ k=0,1,2,\cdots,n$$

若给定一组离散数据 $(x_i,y_i)$，$i=1,2,\cdots,N$，常用最小二乘曲线进行拟合．此时，只需把上述内积理解为

$$(f,g) = \sum_{i=1}^{N}\rho(x_i)f(x_i)g(x_i)$$

则拟合多项式的系数 $a_i^*$ $(i=0,1,\cdots,n)$ 满足的正规方程组、平方逼近误差等均与上述相同．

**定理 2.1** 在所有首项系数为 1 的 $n$ 次多项式中，首项系数为 1 的 $n$ 次勒让德多项式 $\widetilde{P}_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上与零的平方逼近误差最小，即

$$\|Q_n\|_2^2 = \int_{-1}^{1}Q_n^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \|\widetilde{P}_n\|_2^2$$

4．最佳一致逼近多项式

**定义 2.6** 设 $f(x)\in C[a,b]$；$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n}a_ix^i \in H_n = \mathrm{Span}\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$，称

$$\Delta(f,P_n) = \|f-P_n\|_\infty = \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_n(x)|$$

为 $P_n(x)$ 与 $f(x)$ 的偏差；$E_n = \min\limits_{P_n\in H_n}\Delta(f,P_n)$ 称为 $P_n(x)$ 与 $f(x)$ 的最小偏差．

若存在 $P_n^*\in H_n$，使 $\Delta(f,P_n^*) = E_n$，则称 $P_n^*$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最佳一致逼近多项式．



**定理 2.2** $n$ 次最佳一致逼近多项式是存在惟一的．

**定理 2.3** $P_n^*(x)\in H_n$ 是 $f(x)\in C[a,b]$ 的最佳一致逼近多项式的充要条件是，在 $[a,b]$ 上至少有 $n+2$ 个轮流为正负的偏差点，即至少有 $n+2$ 个点 $a\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{n+2}\leqslant b$，使得

$$P_n^*(x_k) - f(x_k) = (-1)^k\sigma\|f-P_n^*\|_\infty,\ \sigma=\pm 1$$
$$k=1,2,\cdots,n+2$$

上述点 $\{x_k\}_{k=1}^{n+2}$ 称为切比雪夫交错点组．

**定理 2.4** 在 $[-1,1]$ 上，在首项系数为 1 的一切 $n$ 次多项式集合 $\boldsymbol{P}_n(x)$ 中，$\omega_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ 与零的偏差最小，即

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\omega_n(x)-0| \leqslant \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|p_n(x)-0|,\quad \forall\ p_n(x)\in\boldsymbol{P}_n(x)$$

其中 $T_n(x)$ 是 $n$ 次切比雪夫多项式．

## 二、典型题分析

**例 2-1** 判定函数 $1,x,x^2-\frac{1}{3}$ 在 $[-1,1]$ 上两两正交，并求一个三次多项式，使其在 $[-1,1]$ 上与上述函数两两正交．

**分析** 所谓正交，一般应考虑在某种内积意义下正交．题中未明确规定内积，我们可理解为通常意义下的内积 $(f,g) = \int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$，然后按照正交性定义去验证、判定．

**解答** 按内积 $(f,g) = \int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 来判定．

由于

$$(1,x) = \int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x = 0$$

$$(1,x^2-\frac{1}{3}) = \int_{-1}^{1}(x^2-\frac{1}{3})\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1}(x^2-\frac{1}{3})\mathrm{d}x = 0$$

$$(x,x^2-\frac{1}{3})=\int_{-1}^{1}x(x^2-\frac{1}{3})\mathrm{d}x=0$$

以 $1,x,x^2-\frac{1}{3}$ 在$[-1,1]$上两两正交.

设所求三次多项式为 $P_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3,x\in$ $-1,1]$,由于 $P_3(x)$ 与前述三个多项式都正交,故应满足

$$(1,P_3(x))=0,\ (x_1,P_3(x))=0,\ (x^2-\frac{1}{3},P_3(x))=0$$

$$\int_{-1}^{1}(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)\mathrm{d}x=2a_0+\frac{2}{3}a_2=0$$

$$\int_{-1}^{1}(a_0x+a_1x^2+a_2x^3+a_3x^4)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}a_1+\frac{2}{5}a_3=0$$

$$\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{1}{3})(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)\mathrm{d}x=(\frac{2}{5}-\frac{2}{9})a_2=0$$

解得,$a_0=0,a_1=-\frac{3}{5}a_3,a_2=0,a_3$ 任意非零常数,故所求 $(x)$ 有无穷多个:

$$P_3(x)=-\frac{3}{5}a_3x+a_3x^3$$

若取特殊的 $a_3=1$,则 $P_3(x)=x^3-\frac{3}{5}x$.

**注记** 关于 $P_3(x)$ 的求法,还可按正交多项式的关系来求.由于首项系为 1 的正交多项式存在关系式:

$P_0(x)=1,\ P_1(x)=(x-\alpha_1)P_0(x)$

$P_2(x)=(x-\alpha_2)P_1(x)-\beta_1P_0(x)$

……

$P_{k+1}(x)=(x-\alpha_{k+1})P_k(x)-\beta_kP_{k-1}(x),\ k=1,2,\cdots,n-1$

$\alpha_{k+1}=(xP_k,P_k)/(P_k,P_k),\ k=0,1,2,\cdots,n-1$

$\beta_k=(P_k,P_k)/(P_{k-1},P_{k-1}),\ k=1,2,\cdots,n-1$

在本题中 $P_0(x)=1,P_1(x)=x\ (\alpha_1=0),\ P_2(x)=x^2-\frac{1}{3}\ (\alpha_2=0,$ $=\frac{1}{3})$ 求得



$$\alpha_3=\int_{-1}^{1}x(x^2-\frac{1}{3})^2\mathrm{d}x/\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{1}{3})^2\mathrm{d}x=0$$

$$\beta_2=\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{1}{3})^2\mathrm{d}x/\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=4/15$$

故 $P_3(x)=xP_2(x)-\frac{4}{15}P_1(x)=x(x^2-\frac{1}{3})-\frac{4}{15}x=$

$$x^3-\frac{3}{5}x$$

**例 2-2** 利用正交化方法求$[0,1]$上带权 $\rho(x)=\ln\frac{1}{x}$ 的前三个正交多项式 $P_0(x),P_1(x),P_2(x)$.

**分析** 本题主要是为了进一步熟悉正交多项式的构造方法.这里要求带权 $\ln\frac{1}{x}$ 正交,在上题注记中的有关公式带权也成立.

**解答** $\rho(x)=\ln\frac{1}{x}=-\ln x$,利用公式

$$P_0(x)=1$$
$$P_1(x)=(x-\alpha_1)P_0(x)$$
$$P_2(x)=(x-\alpha_2)P_1(x)-\beta_1P_0(x)$$
$$\alpha_{k+1}=(xP_k,P_k)/(P_k,P_k),k=0,1$$
$$\beta_1=(P_1,P_1)/(P_0,P_0)$$

以及内积定义$(f,g)=\int_0^1\rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$,得

$$(P_0,P_0)=-\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=1$$

$$(xP_0,P_0)=-\int_0^1\ln x\cdot x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$$

所以 $\alpha_1=(xP_0,P_0)/(P_0,P_0)=\frac{1}{4}$,

$$P_1(x)=x-\frac{1}{4}$$

再由 $(P_1,P_1)=\int_0^1(-\ln x)(x-\frac{1}{4})^2\mathrm{d}x=\frac{7}{144}$

$$(xP_1,P_1)=\int_0^1(-\ln x)x(x-\frac{1}{4})^2\mathrm{d}x=13/576$$

得 $\quad \alpha_2 = (xP_1,P_1)/(P_1,P_1) = 13/28$,

$$\beta_1 = (P_1,P_1)/(P_0,P_0) = 7/144$$

故得 $\quad P_2(x) = (x - 13/28)(x - \frac{1}{4}) - 7/144 =$

$$x^2 - \frac{5}{7}x + 17/252$$

**例 2-3** 在$[\frac{1}{4},1]$上的所有连续函数的集合$C[\frac{1}{4},1]$中，给定 $f(x) = \sqrt{x}$，子集 $\Phi = \mathrm{span}\{1,x\}$ 对于 $f_1(x),f_2(x) \in C[\frac{1}{4},1]$，定义内积$(f_1,f_2) = \int_{\frac{1}{4}}^{1} f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x$，试在 $\Phi$ 中寻找一线性函数 $a_0^* + a_1^* x$，使它为 $\sqrt{x}$ 的最佳平方逼近函数．

**分析** $\Phi$ 中寻找一线性函数，使其成为 $\sqrt{x}$ 的最佳平方逼近函数，在有了内积定义后，只须求出正规方程组并解出即可．

**解答** 由 $\Phi$ 的定义知，$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, x \in [\frac{1}{4},1]$.

故

$$(\varphi_0,\varphi_0) = \int_{\frac{1}{4}}^{1} 1^2\mathrm{d}x = \frac{3}{4}$$

$$(\varphi_0,\varphi_1) = \int_{\frac{1}{4}}^{1} x\mathrm{d}x = 15/32$$

$$(\varphi_1,\varphi_1) = \int_{\frac{1}{4}}^{1} x^2\mathrm{d}x = 21/64$$

$$(f,\varphi_0) = \int_{\frac{1}{4}}^{1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 7/12$$

$$(f,\varphi_1) = \int_{\frac{1}{4}}^{1} \sqrt{x}\cdot x\mathrm{d}x = 31/80$$

所以正规方程组为

$$\begin{cases} \frac{3}{4}a_0^* + \frac{15}{32}a_1^* = \frac{7}{12} \\ \frac{15}{32}a_0^* + \frac{27}{64}a_1^* = \frac{31}{80} \end{cases}$$



解得 $\quad a_0^* = 10/27, \quad a_1^* = 88/135$

故所求函数为 $\quad \varphi^*(x) = \frac{10}{27} + \frac{88}{135}x$

**例 2-4** 设 $\Phi_1 = \mathrm{span}\{1,x\}, \Phi_2 = \mathrm{span}\{x^{100},x^{101}\}$，分别在 $\Phi_1$、$\Phi_2$ 中求$[0,1]$上的连续函数 $f(x) = x^2$ 的最佳平方逼近函数，并比较其结果．

**分析** 本题实际上是两个题，分别在 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 中求 $x^2$ 的最佳平方逼近函数 $\varphi_1^* = a_0^* + a_1^* x$ 和 $\varphi_2^*(x) = b_0^* x^{100} + b_1^* x^{101}$，做法同上．比较结果是根据误差来比较精确度．

**解答** (1) 设 $\varphi_1^* = a_0^* + a_1^* x$，因

$$(\varphi_0,\varphi_0) = \int_0^1 1^2\mathrm{d}x = 1, \qquad (\varphi_0,\varphi_1) = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$(\varphi_1,\varphi_1) = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}, \qquad (\varphi_1,\varphi_0) = (\varphi_0,\varphi_1) = \frac{1}{2}$$

$$(f,\varphi_0) = \int_0^1 x^2\cdot 1\mathrm{d}x = \frac{1}{3}, \quad (f,\varphi_1) = \int_0^1 x^2\cdot x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$

故正规方程组为

$$\begin{cases} a_0^* + \frac{1}{2}a_1^* = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}a_0^* + \frac{1}{3}a_1^* = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$\int_0^1 |x^2|^2 dx$

$\int_0^1 x^4 dx$

$= 0.2$

解得 $\quad a_0^* = -\frac{1}{6},\ a_1^* = 1,\ \varphi_1^*(x) = -\frac{1}{6} + x.$

其平方逼近误差为

$$\|\varphi_1\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{1} a_k^*(f,\varphi_k) \approx 0.005\,56.$$

$(-\frac{1}{6})\cdot\frac{1}{3} - 1\cdot\frac{1}{4}$

$\frac{1}{180}$

(2) 设 $\varphi_2^*(x) = b_0^* x^{100} + b_1^* x^{101}$，因

$$(\varphi_0,\varphi_0) = \int_0^1 (x^{100})^2\mathrm{d}x = \frac{1}{201}$$

$$(\varphi_0,\varphi_1) = (\varphi_1,\varphi_0) = \int_0^1 x^{100}\cdot x^{101}\mathrm{d}x = \frac{1}{202}$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^1 (x^{101})^2\mathrm{d}x=\frac{1}{203}$$

$$(f,\varphi_0)=\int_0^1 x^{102}\mathrm{d}x=\frac{1}{103},$$

$$(f,\varphi_1)=\int_0^1 x^{103}\mathrm{d}x=\frac{1}{104}$$

所以由正规方程组

$$\begin{cases}\dfrac{1}{201}b_0^*+\dfrac{1}{202}b_1^*=\dfrac{1}{103}\\ \dfrac{1}{202}b_0^*+\dfrac{1}{203}b_1^*=\dfrac{1}{104}\end{cases}$$

得 $\quad b_0^*\approx 375.242\ 53,\ b_1^*\approx -375.148\ 25$

$$\varphi_2^*(x)=375.242\ 53x^{100}-375.148\ 25x^{101}.$$

平方逼近误差为

$$\|\delta_2\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{k=0}^{1}b_k^*(f,\varphi_k)=\int_0^1 x^4\mathrm{d}x-$$

$$[375.242\ 53\times\frac{1}{103}-375.148\ 5\times\frac{1}{104}]\approx$$

$$0.164\ 06$$

显然,在平方逼近意义下,(1) 比(2) 好.

**例 2-5** 试用勒让德多项式构造 $f(x)=x^4$ 在$[-1,1]$上的二次最佳平方逼近多项式,并估计平方逼近误差 $\|\delta\|_2^2$.

**分析** 该题与前面一题的区别在于选取勒让德多项式为基函数,此时正规方程的系数矩阵为对角阵,直接可解得 $a_k^*=\frac{1}{2}(2k+1)(f,P_k),k=0,1,2$.

**解答** 由 $P_0(x)=1,P_1(x)=x,P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$,得

$$(f,P_0)=\int_{-1}^1 x^4\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$$



$$(f,P_1)=\int_{-1}^1 x^4\cdot x\mathrm{d}x=0$$

$$(f,P_2)=\int_{-1}^1 x^4\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)\mathrm{d}x=\frac{8}{35}$$

又由 $\quad a_k^*=\dfrac{2k+1}{2}(f,P_k),\ k=0,1,2$

得

$$a_0^*=\frac{1}{2}(f,P_0)=\frac{1}{5}$$

$$a_1^*=\frac{3}{2}(f,P_1)=0$$

$$a_2^*=\frac{5}{2}(f,P_2)=\frac{4}{7}$$

故 $f(x)=x^4$ 在$[-1,1]$上的二次最佳平方逼近多项式为

$$\varphi_2^*(x)=\frac{1}{5}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)=\frac{6}{7}x^2-\frac{3}{35}$$

$$\|\delta\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{k=0}^{2}\frac{2}{2k+1}(a_k^*)^2=$$

$$\int_{-1}^1 x^8\mathrm{d}x-[2\times(\frac{1}{5})^2+\frac{2}{5}(\frac{4}{7})^2]\approx$$

$$0.011\ 609\ 977$$

**例 2-6** 求函数 $y=\arctan x$ 在$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式.

**分析** 本题的定义区间为$[0,1]$,其做法一般有三种:一种是直接在 $\Phi=\mathrm{span}\{1,x\}$ 中求;另一种将$[0,1]$转化为$[-1,1]$,用勒让德多项式来求;第三种是我们自己在$[0,1]$上构造正交多项式,然后去求解.

**解一** 设 $\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=x,\ \Phi=\mathrm{span}\{\varphi_0,\varphi_1\}$,所求函数为 $\varphi_1^*(x)=a_0^*+a_1^*x$,则

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^1 1\mathrm{d}x=1$$

$$(\varphi_0,\varphi_1)=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

$$(\varphi_0,y)=\int_0^1\arctan x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\ln 2$$

$$(\varphi_1,y)=\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

由正规方程组

$$\begin{cases} a_0^*+\frac{1}{2}a_1^*=\frac{\pi}{4}-\ln 2 \\ \frac{1}{2}a_0^*+\frac{1}{3}a_1^*=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2} \end{cases}$$

解得 $a_0^*=3-2\ln 2-\frac{\pi}{2}\approx 0.042\,909$

$$a_1^*=\frac{3}{2}\pi-6+3\ln 2\approx 0.791\,831$$

$$\varphi_1^*(x)=0.042\,909+0.791\,831x$$

**解二** 作变量替换 $x=\frac{1}{2}(t+1)$，将$[0,1]$变换到$[-1,1]$，函数 $y=\arctan x,x\in[0,1]$变为 $y=\arctan\frac{t+1}{2},t\in[-1,1]$. 由于勒让德多项式在$[-1,1]$上正交，且 $P_0(t)=1,P_1(t)=t$，从而有

$$(P_0,y)=\int_{-1}^1\arctan(\frac{t+1}{2})\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-\ln 2$$

$$(P_1,y)=\int_{-1}^1 t\arctan(\frac{t+1}{2})\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-2+\ln 2$$

故 $$a_0^*=\frac{1}{2}(P_0,y)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

$$a_1^*=\frac{3}{2}(P_1,y)=\frac{3}{2}[\frac{\pi}{2}-2+\ln 2]$$

所求的一次最佳平方逼近多项式为

$$\tilde{\varphi}_1^*(t)=(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\ln 2)+\frac{3}{2}(\frac{\pi}{2}-2+\ln 2)t$$



即 $\varphi_1^*(x)=(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2)+\frac{3}{2}(\frac{\pi}{2}-2+\ln 2)(2x-1)\approx$

$$0.042\,909+0.791\,831x$$

**解三** 直接在$[0,1]$上构造正交多项式 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x-\alpha$. 由于要求 $(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=\int_0^1(x-\alpha)\mathrm{d}x=0$，故有 $\alpha=\frac{1}{2}$.

因此可在 $\Phi=\mathrm{span}\{1,x-\frac{1}{2}\}$ 中寻找 $\varphi_1^*(x)=a_0^*+a_1^*\varphi_1(x)$. 经计算知

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^1 1\mathrm{d}x=1,\quad (\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^1(x-\frac{1}{2})^2\mathrm{d}x=\frac{1}{12}$$

$$(\varphi_0,y)=\int_0^1\arctan x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

$$(\varphi_1,y)=\int_0^1(x-\frac{1}{2})\arctan x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(\frac{\pi}{4}-2+\ln 2)$$

由正规方程组

$$\begin{cases} a_0^*(\varphi_0,\varphi_0)+a_1^*(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_0,y) \\ a_0^*(\varphi_0,\varphi_1)+a_1^*(\varphi_1,\varphi_1)=(\varphi_1,y) \end{cases}$$

解得 $a_0^*=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2,\quad a_1^*=3[\frac{\pi}{2}-2+\ln 2]$

故 $\varphi_1^*(x)=(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2)+3[\frac{\pi}{2}-2+\ln 2](x-\frac{1}{2})\approx$

$$0.042\,909+0.791\,831x$$

三种做法结果完全一致.

**注记** 关于任一有限区间$[a,b]$上 $y=f(x)$ 的高次最佳平方逼近多项式的求法，完全可仿照上述三种方法来求解.

**例 2-7** 求 $a,b$ 使 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[ax+b-\sin x]^2\mathrm{d}x$ 达到最小.

**分析** 本题实际上是在$[0,\frac{\pi}{2}]$上，用 $ax+b$ 逼近 $\sin x$ 的问题，所采用的度量为 2-范数，即属最佳平方逼近问题，自然有下列两种做法.

**解一** 由于题中积分达到最小，实际上是$[0,\frac{\pi}{2}]$上求$\varphi^*(x)=b+ax\in\Phi=\mathrm{span}\{1,x\}$，使其成为$\sin x$的最佳平方逼近多项式，故$b,a$满足正规方程组：

$$\begin{cases}b(\varphi_0,\varphi_0)+a(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_0,\sin x)\\ b(\varphi_1,\varphi_0)+a(\varphi_1,\varphi_1)=(\varphi_1,\sin x)\end{cases}$$

实际计算有

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\frac{\pi}{2},\ (\varphi_0,\varphi_1)=\frac{\pi^2}{8},\ (\varphi_1,\varphi_1)=\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2})^3$$

$$(\varphi_0,\sin x)=1,\ (\varphi_1,\sin x)=1$$

故有

$$\begin{cases}\frac{\pi}{2}b+\frac{\pi^2}{8}a=1\\ \frac{\pi^2}{8}b+\frac{\pi^3}{24}a=1\end{cases}$$

解得 $a\approx 0.664\ 438\ 9$， $b\approx 0.114\ 770\ 7$

**解二** 按最佳平方逼近的原始方法求解．令

$$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(ax+b-\sin x)^2\mathrm{d}x$$

$a,b$使$I(a,b)$达最小，必须满足

$$\frac{\partial I}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial I}{\partial b}=0$$

即有

$$\begin{cases}2\int_0^{\pi/2}(ax+b-\sin x)x\mathrm{d}x=0\\ 2\int_0^{\pi/2}(ax+b-\sin x)\mathrm{d}x=0\end{cases}$$

亦即



$$\begin{cases}a\int_0^{\pi/2}x^2\mathrm{d}x+b\int_0^{\pi/2}x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}x\sin x\mathrm{d}x\\ a\int_0^{\pi/2}x\mathrm{d}x+b\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x\end{cases}$$

这就是解法一中的方程组，结果同前．

**注记** 按照解法一的理解，自然还有如例2-6的其它解法，请读者自己练习．

**例2-8** 求矛盾方程组的最小二乘解，已知

$$\begin{cases}x_1-x_2=1\\ -x_1+x_2=2\\ 2x_1-2x_2=3\\ -3x_1+x_2=4\end{cases}$$

**分析** 求解矛盾方程组，一般用最小二乘法．若所用的教材讲过，则直接求解正规方程组$A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}b$；若没有讲到，可按最小二乘原理来求解．

**解一** 由题知

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\\2&-2\\-3&1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

故正规方程组的系数矩阵与右端项分别为：

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}15&-9\\-9&7\end{pmatrix},\quad A^{\mathrm{T}}b=\begin{pmatrix}-7\\-1\end{pmatrix}$$

解正规方程组

$$\begin{cases}15x_1-9x_2=-7\\ -9x_1+7x_2=-1\end{cases}$$

得

$$x_1=-29/12,\quad x_2=-39/12$$

**解二** 用最小二乘原理去求解．

令 $r_1 = x_1 - x_2 - 1$, $r_2 = -x_1 + x_2 - 2$

$r_3 = 2x_1 - 2x_2 - 3$, $r_4 = -3x_1 + x_2 - 4$

上述误差的平方和为

$$\varphi(x_1,x_2) = \sum_{i=1}^{4} r_i^2 = (x_1 - x_2 - 1)^2 + (-x_1 + x_2 - 2)^2 + (2x_1 - 2x_2 - 3)^2 + (-3x_1 + x_2 - 4)^2$$

要求 $x_1,x_2$,使 $\varphi(x_1,x_2)$ 达到最小,必有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 2[(x_1 - x_2 - 1) + (-x_1 + x_2 - 2) + 2(2x_1 - 2x_2 - 3) - 3(-3x_1 + x_2 - 4)] = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 2[-(x_1 - x_2 - 1) + (-x_1 + x_2 - 2) - 2(2x_1 - 2x_2 - 3) + (-3x_1 + x_2 - 4)] = 0$$

化简得

$$\begin{cases} 15x_1 - 9x_2 = -7 \\ -9x_1 + 7x_2 = -1 \end{cases}$$

这和解法一中的正规方程组完全一样(正规方程组就是这样得来的),故下面过程略.

**例 2-9** 用最小二乘法求一个形如 $y = a + bx^2$ 的经验公式,使它与下列数据相拟合,并估计平方误差.

| $x_i$ | 19 | 25 | 31 | 38 | 44 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 19.0 | 32.3 | 49.0 | 73.3 | 97.8 |

**分析** 这类题目的做法,依所用教材而定.若教材讲了最佳平方逼近,则可直接写出正规方程组,然后求出 $a,b$;若教材仅讲矛盾方程组的求解,未讲最佳平方逼近,则可以构造一个矛盾方程组,用最小二乘法解矛盾方程组也可确定 $a,b$. 但二者是一致的,结果应相同才对.

**解一** 直接根据最佳平方逼近原理,写出正规方程组.



因 $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x^2$,故

$$(\varphi_0,\varphi_0) = \sum_{i=0}^{4} \varphi_0^2(x_i) = \sum_{i=0}^{4} 1^2 = 5$$

$$(\varphi_0,\varphi_1) = \sum_{i=0}^{4} \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) = \sum_{i=0}^{4} x_i^2 = 5\ 327$$

$$(\varphi_1,\varphi_1) = \sum_{i=0}^{4} \varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i) = \sum_{i=0}^{4} x_i^4 = 7\ 277\ 699$$

$$(\varphi_0,y) = \sum_{i=0}^{4} \varphi_0(x_i)y_i = \sum_{i=0}^{4} y_i = 271.4$$

$$(\varphi_1,y) = \sum_{i=0}^{4} \varphi_1(x_i)y_i = \sum_{i=0}^{4} x_i^2 y_i = 369\ 321.5$$

所以正规方程组为

$$\begin{cases} 5a + 5\ 327b = 271.4 \\ 5\ 327a + 7\ 277\ 699b = 369\ 321.5 \end{cases}$$

解得 $a = 0.972\ 604\ 5$, $b = 0.050\ 035\ 1$

故经验公式为

$$y = 0.972\ 604\ 5 + 0.050\ 035\ 1x^2$$

平方逼近误差为

$$\|\delta\|_2^2 = \|y\|_2^2 - a(\varphi_0,y) - b(\varphi_1,y) = 0.015\ 023\ 2$$

$$\|\delta\|_2 = 0.123$$

**解二** 利用解矛盾方程组的办法来解决问题.

将 $x_i$ 代入经验公式,并令其所得之值为 $y_i$,得如下矛盾方程组:

$$\begin{cases} a + 19^2b = 19.0 \\ a + 25^2b = 32.3 \\ a + 31^2b = 49.0 \\ a + 38^2b = 73.3 \\ a + 44^2b = 97.8 \end{cases}$$

根据最小二乘法，可得正规方程组为

$$\begin{pmatrix} 5 & 5\ 327 \\ 5\ 327 & 7\ 277\ 699 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 271.4 \\ 369\ 321.5 \end{pmatrix}$$

以下同解法一，略去.

**例 2-10** 已知数据表如下，试用二次多项式来拟合：

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 15 | 14 | 14 | 14 | 14 | 15 | 16 |

**分析** 本题中 $y_i$ 的数据比较特殊，可用平移变换将数据变得容易处理.

**解答** 设 $y-14=\bar{y}$, $x-3=\bar{x}$，则上表可化为

| $\bar{x}_i$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{y}_i$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |

这时，取 $\varphi_0(\bar{x})=1, \varphi_1(\bar{x})=\bar{x}, \varphi_2(\bar{x})=\bar{x}^2$，并设所求二次多项式为 $\varphi_2^*(\bar{x})=a_0^*\varphi_0(\bar{x})+a_1^*\varphi_1(\bar{x})+a_2^*\varphi_2(\bar{x})$，容易得到

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=-3}^{3}1^2=7,\quad (\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=-3}^{3}\bar{x}_i=0$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=-3}^{3}\bar{x}_i^2=28,\quad (\varphi_0,\varphi_2)=\sum_{i=-3}^{3}\bar{x}_i^2=28$$

$$(\varphi_2,\varphi_2)=\sum_{i=-3}^{3}\bar{x}_i^4=196,\ (\varphi_1,\varphi_2)=\sum_{i=-3}^{3}\bar{x}_i^3=0$$

$$(\varphi_0,\bar{y})=\sum_{i=-3}^{3}\bar{y}_i=4,\quad (\varphi_1,\bar{y})=\sum_{i=-3}^{3}\bar{x}_i\bar{y}_i=5$$

$$(\varphi_2,\bar{y})=\sum_{i=-3}^{3}\bar{x}_i^2\bar{y}_i=31$$

得正规方程组如下：



$$\begin{cases} 7a_0^*+\quad 28a_2^*=4 \\ 28a_1^*=5 \\ 28a_0^*+196a_2^*=31 \end{cases}$$

解得 $a_0^*=-\dfrac{1}{7}$, $a_1^*=\dfrac{5}{28}$, $a_2^*=\dfrac{5}{28}$

$$\bar{y}=-\frac{1}{7}+\frac{5}{28}\bar{x}+\frac{5}{28}\bar{x}^2$$

亦即 $$y-14=-\frac{1}{7}+\frac{5}{28}(x-3)+\frac{5}{28}(x-3)^2$$

**例 2-11** 求形如 $y=ae^{bx}$（$a,b$ 为常数且 $a>0$）的经验公式，使它能和下表数据相拟合：

| $x_i$ | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 1.75 | 2.00 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 5.10 | 5.79 | 6.53 | 7.45 | 8.46 |

**分析** 经验公式 $y=ae^{bx}$ 不是多项式，应设法将其变为多项式. 本题可通过取对数的办法将 $y=ae^{bx}$ 变为 $\ln y=\ln a+bx$，若令 $\bar{y}=\ln y$, $A=\ln a$，则有 $\bar{y}=A+bx$. 求出 $y=A+bx$ 后，再变回 $y=ae^{bx}$ 即可.

**解答** 对经验公式 $y=ae^{bx}$ 两边取对数，得

$$\ln y=\ln a+bx$$

作变换 $\bar{y}=\ln y$, $A=\ln a$，则有 $\bar{y}=A+bx$. 取 $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x$. 为了求出 $A$、$b$，需将 $(x_i,y_i)$ 转化为 $(x_i,\bar{y}_i)$. 现将转化数值表列出：

| $x_i$ | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 1.75 | 2.00 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{y}_i$ | 1.629 | 1.756 | 1.876 | 2.008 | 2.135 |

根据最小二乘法，需求出正规方程组，经计算有

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{4}1^2=5,\ (\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{4}x_i=7.5,$$