

## 课程网站

<http://math.sjtu.edu.cn/course/skymath/>

## 习题

### 第一节习题

习题 1. 利用定积分或其它不同于课堂上的方法证明素数无限。

习题 1'. (1) 求  $2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 = 211$  的素因子。

(2) 证明费马数  $F_5$  不是素数。

### 第二节习题

习题 2. 勾股定理反映了直角三角形三条边长之间的关系，试研究面积的勾股定理。

小组讨论题之一：证明费马平方和定理。

### 第三节习题

习题 3. 求一个三元正定二次型使得其不能表示的最小正整数 (该数称为 truant) 是 14. 找出该二次型对应的格的 2 组不同的基使得其中至少一组基的基向量不是两两垂直的.

小组讨论题之二：将“Conway 的士兵”数学化并分析士兵可能到达的最大高度.

习题 4. 可以把所有的多项式分成奇偶吗？可以把所有的有理数 (实数、复数) 分成奇偶吗？为什么？

习题 5. 画出  $\mathbb{F}_3$  平面上的直线和圆，并与  $\mathbb{F}_2$  平面上的直线和圆作比较.

### 第四节习题

小组大作业之三 (本题请每组的女同学动手)：制作若干 Mobius 曲面，研究下列问题：(1) 和圆柱面的差别；(2) 沿中线撕开；(3) 再沿中线撕开；(4) 试给出一般结论.

## 第五节习题

习题 6. 试研究球面  $S^2$  上的圆周, 即研究这样的集合: 设  $Q$  是  $S^2$  上给定的一点,  $r$  是一个固定的正数,  $d(P, Q)$  表示点  $P$  到  $Q$  的球面距离. 求集合  $\{P \in S^2 \mid d(P, Q) = r\}$ .

**小组大作业之四: 查找并领会一种非欧几何的模型, 使得过该几何中的任意一条直线  $L$  外一点, 可以做无数多条直线与  $L$  平行 (即无交点).**

## 第六节习题

习题 7. (1) 试求  $\sqrt{2}$  的连分数表示.

(2) 根据  $\pi$  的连分数表示找出  $\pi$  的前 5 个最佳分数近似, 解释其中分数  $\frac{22}{7}$  (约率)、 $\frac{355}{113}$  (密率) 与阿基米德 (Achimedes)、祖冲之的方法之间的关联.

## 第七节习题

习题 8. (1) 利用级数

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

证明欧拉公式.

(2) 证明

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ki\pi/n} = 0$$

并解释其几何意义.(当  $n = 2$  时, 此即欧拉公式.)

小组大作业之五. 建立 “Love is a fallacy” 中的逻辑佯谬 (1.Dicto Simpliciter 草率前提; 2. Hasty Generalization 草率结论、以偏概全; 3.Post Hoc 假性因果; 4.Contradictory Premises 矛盾前提; 5.Ad Misericordiam 文不对题、答非所问; 6. False Analogy 错误类比; 7.Hypothesis Contrary to Fact 虚假假设; 8.Poisoning the Well 人身攻击) 的数学模型, 并从数学的角度说明这些佯谬合理与否.

## 第八节习题

习题 9. 求下列级数的值:

$$(1) 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = ?$$

$$(2) \frac{1}{2^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^6} + \frac{1}{10^6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^6} = ?$$

小组大作业之六. 研究悖论中所包含的数学思想, 分析若干中西方的典故 (至少包括惠施与庄子、公孙龙、芝诺悖论、囚徒悖论等) 以及生活中的例子.

## 第九节习题

习题 10. 设初始 (= 第 0 个) 正三角形的边长为 1. 求第  $n$  个 Koch 雪花的长度与面积. 研究当  $n \rightarrow \infty$  时 Koch 雪花的长度与面积的变化.

## 第十节习题

习题 11. (1) 求实数集合与复数集合的一个一一对应, 从而证明: 实数与复数一样多.

(2) 证明直线上的点与空间中的点一样多.

习题 11'. 解释贝特朗悖论.

## 第十一节习题

习题 12. 证明平面亲吻数  $K_2 = 6$ , 即与单位圆相切并且互不相交 (可以相切) 的单位圆最多有 6 个.

## 第十二节习题

习题 13. 利用球极投影证明: 去掉球面上的一个点的曲面是平面.