上海交通大学 2013-2014 学年第一学期《矩阵理论》试卷

姓名__________　　学号____________　　教师姓名__________　　成绩______

一. 单项选择题(每题 3 分, 共 15 分)

(C), (A), (B), (B), (C)

二. 填空题(每题 3 分, 共 15 分)

6. 设 $\sigma((x,y,z)^T) = (x+2y-z, y+z, x-3z)^T$ 是欧氏空间 R^3 上的线性变换, 则 σ 的伴随变换 σ^* 的像空间 $Im(\sigma^*)$ 的一个标准正交基为($\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{110}}\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$, 不唯一).

7. 设两个 3 阶矩阵 A 与 B 满足条件 $A \neq 0, A^2 = 0, B^2 = I$. 如果 $I+B$ 的零空间 $N(A)$ 的维数为 2, 则 $\begin{pmatrix} A-B & A+B \\ A+B & A-B \end{pmatrix}$ 的极小多项式=($x^2(x-2)(x+2)$).

8. 设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$ 是两个 n 维向量, 其中$x_1 = y_1 = 1$. 如果 $xy^T = LU$ 是矩阵 xy^T 的三角分解, 则 $UL = ($ $\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$).

9. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\cos(At) = ($ $I - \frac{t^2}{2}A$ 或 $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$).

10. 设 α, β 是两个正交的 $n\,(n \geq 2)$ 维向量, 且 $\alpha^*\alpha = \beta^*\beta = 4$, 则矩阵 $\alpha\beta^* + \beta\alpha^*$ 的 Moore-Penrose 逆为($\frac{\alpha\beta^* + \beta\alpha^*}{16}$).

三. 计算题与证明题 (11-14 题每题 15 分, 15题 10 分, 共 70 分)

11. **设** $U = \{(x, y, z, w) \,|\, x + y + z + w = 0\}$, $W = \{(x, y, z, w) \,|\, x - y + z - w = 0\}$ **是通常欧氏空间** $\mathbb{R}^4$ **的两个子空间.**

(1) 求 $U \cap W$, $U + W$ **的维数与各自的一组标准正交基;**

(2) 求 U **的一个 2 维子空间** U_0 **使得 其正交补空间** $U_0^{\perp} \subseteq W$**;**

(3) 设 σ **是** $\mathbb{R}^4$ **上的正交投影变换使得** $Ker(\sigma) = U$**, 求** σ **在标准基下的矩阵.**

解:(1) $\dim U \cap W = 2$**;**

注意:答案不唯一。一组标准正交基为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) 答案不唯一: $U_0 = Span\{(1, -1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, -1)\}; U_0^{\perp} = Span\{(1, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 1)\}$

(3) 答案唯一! $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$**.**

12. 设有 $n\,(n\geq 2)$ 阶实对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1+a_n^2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \\ a_1 & 1+a_1^2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1+a_2^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 1+a_{n-2}^2 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 1+a_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

其中 $a_i\,(1\leq i\leq n)$ 为实数. 记 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$.

(1) 判断集合 $U=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,f(x)=0\}$ 是否为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间; 如果是, 求其维数; 如果否, 求其生成的子空间的维数;

(2) 设存在 $\mathbb{R}^n$ 的内积 $(\bullet,\bullet)$ 使得对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 有 $(x,x)=f(x)$, 求 $a_i\,(1\leq i\leq n)$ 的值; 并求向量 $\alpha=(1,0,\cdots,0)^T$ 与 $\beta=(1,1,\cdots,1)^T$ 在该内积下的长度与夹角.

解：(1) 是子空间. 当$a_1a_2\cdots a_n=(-1)^n$时，该子空间的维数为1；否则该子空间的维数为0. (参考解法：$A=B^TB$，其中 $B=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 于是$A$半正定. $x^TAx=f(x)=0$当且仅当$x^TB^TBx=0$当且仅当$Bx=0$，故是子空间. 注意到$r(A)=r(B)\geq n-1$，故子空间的维数只能为0或1. 但B可逆当且仅当$a_1a_2\cdots a_n\neq(-1)^n$.

另解：易知

$$f(x)=x^Tx=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2.$$

所以 $f(x)=0$当且仅当 $x_1+a_1x_2=0, x_2+a_2x_3=0,\cdots,x_{n-1}+a_{n-1}x_n=0, x_n+a_nx_1=0$. 故是子空间, 且当 $a_1a_2\cdots a_n=(-1)^n$ 时维数为1，否则为0.)

(2) $(x,x)=f(x)$是内积当且仅当A是正定矩阵当且仅当$a_1a_2\cdots a_n\neq(-1)^n$. 此时$(\alpha,\alpha)=a_{11}=1+a_n^2$，故$\|\alpha\|=\sqrt{1+a_n^2}$；$(\beta,\beta)=\sum\limits_{i=1}^n(1+a_i)^2$.

因此 $\|\beta\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n(1+a_i)^2}$. $\cos<\alpha,\beta>=\dfrac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}=\dfrac{1+a_1+a_n+a_n^2}{\sqrt{(1+a_n^2)\sum\limits_{i=1}^n(1+a_i)^2}}$.

13. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$**.**

(1) 求 A **的 Jordan 标准形** J**;**

(2) 计算 e^{At}**;**

(3) 设 $x(0)=(1,1,1)^T$**. 求定解问题** $x'(t)=Ax(t)$ **的解.**

解：(1) A**的 Jordan 标准形及变换矩阵分别为**

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) $e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}x(0)$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=e^t\begin{pmatrix} t+1 & 2t & -t \\ -t & -2t+1 & t \\ -t & -2t & t+1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$x(t)=e^{At}x(0)=\begin{pmatrix} 2t+1 \\ -2t+1 \\ -2t+1 \end{pmatrix}e^t.$$

14. 设两个 n 阶 **Hermite** 矩阵 A, B 的谱分解分别为 $A = UDU^*, B = V\Lambda V^*$，其中 U, V 均为酉矩阵，$D = \operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_s, 0, \cdots, 0), \Lambda = \operatorname{diag}(b_1, \cdots, b_t, 0, \cdots, 0)$ 是对角矩阵，$a_i \neq 0, 1 \leq i \leq s, b_j \neq 0, 1 \leq j \leq t$. 记 I 是 n 阶单位矩阵.

(1) 求 $C = A\, e^{iB}$ 的奇异值分解;

(2) 求 分块矩阵 $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的奇异值分解;

(3) 求 分块矩阵 $N = \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$ 的 **Moore-Penrose** 广义逆.

解：**(1)** $C = A\, e^{iB} = UDU^* e^{iB}$. 令$Q^* = U^* e^{iB}$，则因 B 是 **Hermite** 的，故e^{iB} 是酉矩阵，因此 Q 是酉矩阵，从而$C = UDQ^*$ 是**C** 的奇异值分解;

(2) 记 $D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $D_1 = \operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_s), \Lambda_1 = \operatorname{diag}(b_1, \cdots, b_t)$.

令$P = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$，则 P 是酉矩阵且 $P^* = P, P^2 = I_{2n}$. 记 $2n$ 阶矩阵 $R = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & I_s & 0 & 0 \\ ) & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$，

其中 I_s 是 s 阶单位矩阵. 则

$$MP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R^* \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}^*,$$

取 $S = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} R, T = P \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} R, \sum = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，即可得$M$ 的奇异值分解

$$M = S \sum T^*.$$

(3) N 是列满秩矩阵，因此

$N^\dagger = (N^* N)^{-1} N^* = (I + A^2)^{-1} (A^* \ I)$

$= U(\operatorname{diag}(\frac{a_1}{1+a_1^2}, \frac{a_2}{1+a_2^2}, \cdots, \frac{a_s}{1+a_s^2}, 0, \cdots, 0) \ \ \operatorname{diag}(\frac{1}{1+a_1^2}, \frac{1}{1+a_2^2}, \cdots, \frac{1}{1+a_s^2}, 1, \cdots, 1)) U^*.$

15. 设$V = M_n(\mathbb{C})$是全体n阶复矩阵构成的复线性空间, $A, B \in V$. 对任意$X \in V$, 定义$\sigma(X) = AX - XB$. 证明: A与B没有公共特征值的充分必要条件是对任意n阶矩阵$C \in V$, 存在唯一的n阶矩阵$X \in V$使得$\sigma(X) = C$.

证明：充分性. 设对任意n阶矩阵$C \in V$, 存在唯一的n阶矩阵$X \in V$使得$\sigma(X) = C$. 则$Ker(\sigma) = \{0\}$. 如果A与B有公共特征值λ, 则存在非零向量α, β, 使得$A\alpha = \lambda\alpha, B^T\beta = \lambda\beta$, 此处用到$B$与$B^T$有相同的特征值. 因此矩阵$\alpha\beta^T$非零, 且

$$\sigma(X) = A\alpha\beta^T - \alpha\beta^T B = \lambda\alpha\beta^T - \alpha(B^T\beta)^T = \lambda X - \lambda X = 0.$$

此与$Ker(\sigma) = \{0\}$矛盾! 因此A与B没有公共特征值.

必要性. 设A与B没有公共特征值, 只需证明σ可逆, 只需证明$Ker(\sigma) = \{0\}$. 设$C \in Ker(\sigma)$. 则$\sigma(C) = 0$即$AC = CB$. 于是$A^2C = AAC = ACB = CCB = C^2B$. 一般地, 有$A^kC = CB^k$. 故对任意多项式$f(x)$均有

$$f(A)C = Cf(B).$$

特别地, 取$f(x) = |xI - A$. 则由**Cayley-Hamilton**定理知$f(A) = 0$, 但因B与A无公共特征值, 因此$f(B)$可逆. 于是由$0 = f(A)C = Cf(B)$可得$C = 0$. 证毕.