第二讲

Z变换及离散时间系统分析

《数字信号处理》第一部分

提 纲

- z变换
  - 定义、收敛域、反变换、性质
- 离散时间系统分析
  - 基本概念
  - 线性时不变系统的输入、输出关系
  - 离散时间系统分析

z变换的定义

- z变换的定义
- z变换的收敛域
- z反变换
- z变换的性质

z变换的定义

- 引入z变换的目的
  - 利用差分方程可求离散时间系统的结构及瞬态解。为了分析系统的重要特性，如稳定性和频率响应等等，需要研究离散时间系统的z变换(类似于模拟系统的拉氏变换)，它是分析离散时间系统和信号的重要工具。

z变换的定义

- 一个离散序列 $x(n)$的z变换(双边)定义为

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

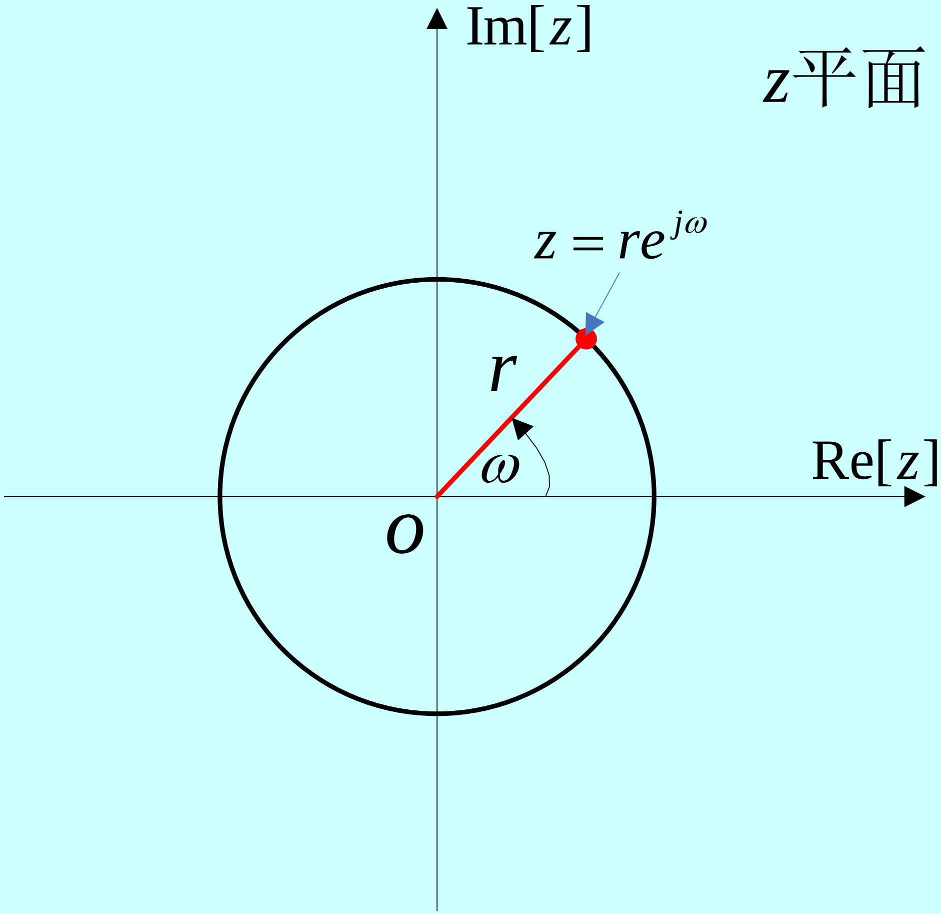
  - 其中z为复变量，以其实部为横坐标，虚部为纵坐标构成的平面为 z 平面。常用$ZT[x(n)]$表示对序列$x(n)$的z变换。

- 单边 z 变换：
  - 单边 z 变换只是对单边序列($n\geq 0$部分)进行变换的z变换，其定义为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

z变换的定义

- z平面



z变换的定义

- 典型序列的z变换 $$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

(1)单位脉冲序列 $\delta(n) \xrightarrow{z} 1$

(2)单位阶跃序列 $u(n) \xrightarrow{z} \dfrac{z}{z-1}, \quad |z|>1$

(3)实指数序列 $a^n u(n) \xrightarrow{z} \dfrac{z}{z-a}, \quad |z|>|a|$

z变换的定义

■ 典型序列的z变换

(4) 单边正弦序列 $\sin(n\omega_0)u(n)$

$$\xrightarrow{z} \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}-\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right)$$

$$=\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1},\quad |z|>1$$

(5) 单边余弦序列 $\cos(n\omega_0)u(n)$

$$\xrightarrow{z} \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}+\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right)$$

$$=\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1},\quad |z|>1$$

z变换的收敛域

- z变换的定义
- z变换的收敛域
- z反变换
- z变换的性质

z变换的收敛域

- 收敛域(ROC：Region of Convergence)
- 对于任意给定序列$x(n)$，若存在一个集合∈，使$X(z)$收敛，则称∈ 为$X(z)$的收敛域
  - *若给定$X(z)$，必须同时给定收敛域才能唯一地确定$x(n)$*
- $X(z)$收敛的充要条件是满足绝对可和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right| = M < \infty$$

z变换的收敛域

级数收敛的判定方法

- 可使用比值法和根植法来判定级数是否收敛，对于

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|a_n\right|$$

- 计算比值 $\longrightarrow$ $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

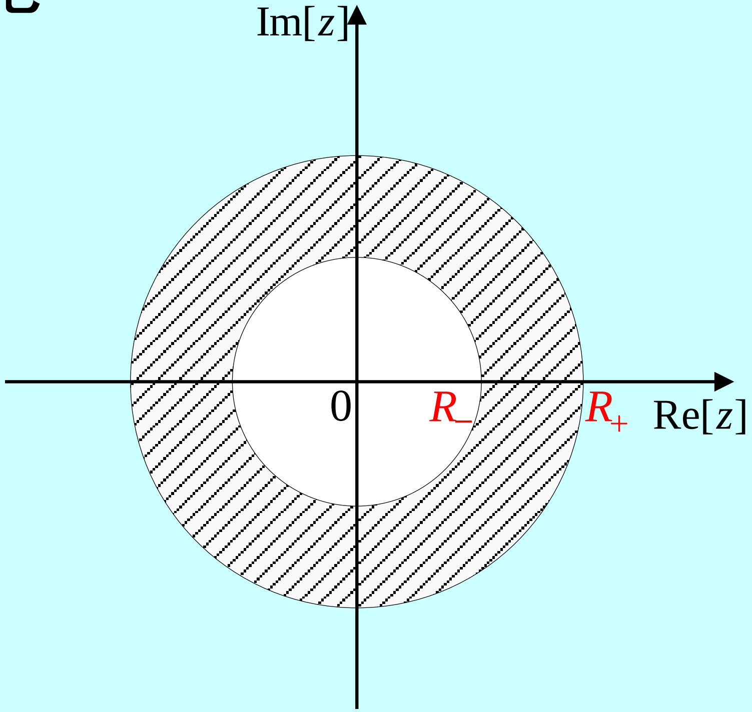
- 计算根值 $\longrightarrow$ $\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$

- 判定条件
  - $\rho < 1$ 级数收敛
  - $\rho > 1$ 级数发散

z变换的收敛域

4种典型序列的收敛域讨论

- 有限长序列
- 右边序列
- 左边序列
- 双边序列



收敛域分别是以R_-,R_+为半径的两个圆组成的环状域，R_-,R_+称收敛半径，R_+可以大到无穷大，R_-小到0

z变换的收敛域

有限长序列

- 此序列只在有限的区间($n_1 \le n \le n_2$)具有非零的有限值，此时，z变换为：

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

- 分3种情况讨论

1) $n_1<0, n_2>0$ 时，除 $z=\infty$ 及 $z=0$ 外，$X(z)$在z平面上处处收敛。即收敛域为：

$$0<|z|<\infty$$

z变换的收敛域

- 有限长序列 $$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

2) $n_1<0,\ n_2\le 0$ 时，除 $z=\infty$ 外，$X(z)$在z平面上处处收敛。即收敛域为：

$$|z|<\infty$$

3) $n_1\ge 0,\ n_2>0$ 时，除z=0外，$X(z)$在z平面上处处收敛。即收敛域为：

$$|z|>0$$

- 所以，有限长序列的z变换收敛域至少为：

$$0<|z|<\infty$$ 且有可能包括 $z=\infty$ 或 $z=0$ 点

z变换的收敛域

右边序列

- 此序列是有始无终的序列，即当($n<n_1$时$x(n)=0$),此序列的z变换为：

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

根据根值判别法：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x(n)z^{-n}\right|}<1$$

即：$|z|>\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(n)|}=R_{x1}$

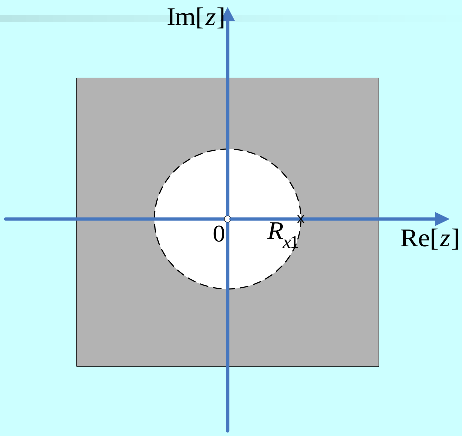
$\longrightarrow$ 当$|z|>R_{x1}$，则该级数收敛.

其中R_{x1}是级数的收敛半径.

z变换的收敛域

■ 右边序列

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty}x(n)z^{-n}$$



- 右边序列的收敛域是半径为R_{x1}的圆外部分

1) 如果$n_1 \geq 0$，则收敛域包括$z=\infty$。即收敛域为

$$|z| > R_{x1}$$

2) 如果$n_1 < 0$，则收敛域不包括$z=\infty$。即收敛域为

$$R_{x1} < |z| < \infty$$

z变换的收敛域

左边序列

- 此序列是无始有终的序列，即当$(n>n_2$时$,x(n)=0)$,此序列的z变换为：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

令$m=-n$,上式变为：$X(z)=\sum_{m=-n_2}^{\infty} x(-m)z^{m}$

根据根值判别法：

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\left|x(-m)z^m\right|}<1$$

即：$|z|<\dfrac{1}{\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{|x(-m)|}}=R_{x2}$

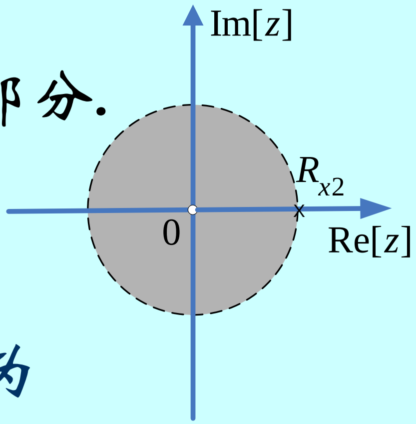
其收敛域为：$|z|<R_{x2}$

其中R_{x2}是级数的收敛半径.

z变换的收敛域

- 左边序列 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}$

  - 可见,左边序列的收敛域是半径为R_{x2}的圆内部分.



$$|z|<R_{x2}$$

1) 如果$n_2\geq 0$，则收敛域不包括$z=0$。即收敛域为

$$0<|z|<R_{x2}$$

2) 如果$n_2\leq 0$，则收敛域包括$z=0$。即收敛域为

$$|z|<R_{x2}$$

z变换的收敛域

双边序列

- 双边序列是从 $n=-\infty$ 延伸到 $n=+\infty$ 的序列，此序列的z变换为：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

- 双边序列看成左边序列和右边序列的z变换叠加。

其收敛域为：两级数收敛域的重叠部分.

$R_{x1}<|z|<R_{x2}$ $\quad R_{x2}>R_{x1}$ 则该级数收敛.其中 $R_{x1}>0, R_{x2}<\infty$.

可见，

双边序列的收敛域是以半径为 R_{x1} 和 R_{x2} 之间的圆环部分.

z反变换

- z变换的定义
- z变换的收敛域
- z反变换
- z变换的性质

z反变换

- z反变换定义
  - 从$X(z)$中还原出原序列$x(n)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \longrightarrow x(n)=IZT[X(z)]$$

  - 实质：求$X(z)$幂级数展开式

- z反变换的求解方法：
  - 围线积分法（留数法）
  - 部分分式法
  - 长除法

z反变换—部分分式展开法(1)

- $X(z)$表示成z的有理分式形式： $X(z)=\dfrac{B(z)}{A(z)}=\dfrac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}$

展开成部分分式形式

$$X(z)=\sum_{n=0}^{M-N} A_n z^{-n}+\sum_{k=1}^{N-r}\frac{B_k}{1-z_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{r}\frac{C_k}{(1-z_i z^{-1})^k}$$

- 其中，$M \geq N$时，才存在A_n；z_k为$X(z)$的各单极点，z_i为$X(z)$的一个r阶极点。

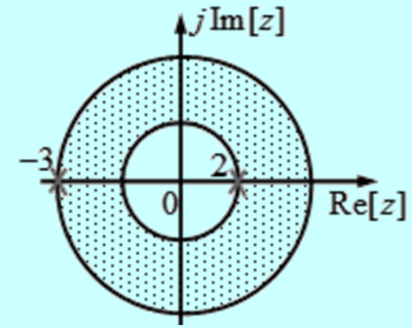
z反变换—部分分式展开法(2)

部分z变换因式对应的时间序列

$X(z)$	Corresponding Time Series $x(n)$	
	ROC: $\|z\|>R$	ROC: $\|z\|<R$
$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$a^n u(n)$	$-a^n u(-n-1)$
$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$(n+1)a^n u(n)$	$-(n+1)a^n u(-n-1)$
$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^m}$	$\dfrac{1}{(m-1)!}(n+1)\cdots(n+m-1)a^n u(n)$	$\dfrac{-1}{(m-1)!}(n+1)\cdots(n+m-1)a^n u(-n-1)$

z反变换—部分分式展开法(3)

例： $X(z)=\dfrac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}$, $2<|z|<3$, 求z反变换



解： $X(z)=\dfrac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}=\dfrac{1}{1-2z^{-1}}+\dfrac{-1}{1+3z^{-1}}$

$$\frac{1}{1-2z^{-1}}\xrightarrow{|z|>2}2^{n}u(n)$$

$$\frac{-1}{1+3z^{-1}}\xrightarrow{|z|<3}(-3)^{n}u(-n-1)$$

$ZT[a^{n}u(n)]=\dfrac{1}{1-az^{-1}}\quad |z|>|a|$

$ZT[a^{n}u(-n-1)]=\dfrac{-1}{1-az^{-1}}\quad |z|<|a|$

$$\therefore x(n)=2^{n}u(n)+(-3)^{n}u(-n-1)$$

z变换的性质

- z变换的定义
- z变换的收敛域
- z反变换
- z变换的性质

z变换的性质

线性性质

$$若\ x(n) \xrightarrow{Z} X(z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$$

$$y(n) \xrightarrow{Z} Y(z) \quad (R_{y1} < |z| < R_{y2})$$

$$则\ ax(n) + by(n) \xrightarrow{Z} aX(z) + bY(z)$$

$$(R_1 < |z| < R_2)$$

$$其中: R_1 = \max(R_{x1}, R_{y1}), R_2 = \min(R_{x2}, R_{y2})$$

z变换的性质—线性(例)

已知双曲余弦序列 $x(n)=\cosh(n\omega_0)u(n)$, 求其z变换

解： $\because \cosh\left(n\omega_0\right)u(n)=\frac{1}{2}e^{n\omega_0}u(n)+\frac{1}{2}e^{-n\omega_0}u(n)$

$$e^{n\omega_0}u(n)\rightarrow\frac{z}{z-e^{\omega_0}},\quad |z|>\left|e^{\omega_0}\right|;\qquad e^{-n\omega_0}u(n)\rightarrow\frac{z}{z-e^{-\omega_0}},\quad |z|>\left|e^{-\omega_0}\right|$$

$$\rightarrow X(z)=\frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{\omega_0}}+\frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{-\omega_0}}$$

$$=\frac{z\sinh\omega_0}{z^2-2z\cosh\omega_0+1};\quad |z|>\max(\left|e^{\omega_0}\right|,\left|e^{-\omega_0}\right|)$$

z变换的性质

序列的时移

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

- 双边z变换

$$x(n)\xrightarrow{Z}X(z);\quad x(n\pm m)\xrightarrow{Z}z^{\pm m}X(z)$$ ROC不变

- 单边z变换

若$x(n)u(n)\rightarrow X(z),\quad x(n)$为双边序列

则$$x(n+m)u(n)\rightarrow z^{m}\left[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$$

$$x(n-m)u(n)\rightarrow z^{-m}\left[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$$

如 $x(n-2)u(n)\rightarrow z^{-2}X(z)+z^{-1}x(-1)+x(-2)$

z变换的性质—序列的时移(例)

已知差分方程表示式

$$y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n)$$

边界条件$y(-1)=0$，用z变换方法求系统响应$y(n)$.

解：对方程式两端分别取z变换，

$$Y(z)-0.9z^{-1}Y(z)=\frac{0.05z}{z-1} \qquad |z|>1$$

$$Y(z)=\frac{0.05z}{(z-1)(z-0.9)}$$

$$Y(z)=\frac{0.05z^2}{(z-1)(z-0.9)}$$

部分分式展开：

$$Y(z)=\frac{0.5z}{z-1}-\frac{0.45z}{z-0.9}$$

$$y(n)=[-0.45(0.9)^n+0.5]u(n)$$

z变换的性质

■序列的线性加权(z域微分)

若 $x(n) \rightarrow X(z)$ ➡ $nx(n) \xrightarrow{Z} -z\dfrac{d}{dz}X(z);\quad n^m x(n) \xrightarrow{Z} \left[-z\dfrac{d}{dz}\right]^m X(z)$

ROC不变

证明： $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

$$\frac{dX(z)}{dz}=\frac{d}{dz}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{d}{dz}(z^{-n})$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-n)z^{-n-1}=-z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n}=-z^{-1}ZT[nx(n)]$$

$$\therefore \quad ZT[nx(n)]=-z\frac{dX(z)}{dz}$$

时域序列乘n等效于z域中求导且乘以(-z).

z变换的性质—序列的线性加权(z域微分)(例)

例　已知: $u(n) \to \dfrac{z}{z-1}$; 求斜变序列 $nu(n)$ 的z变换.

解: $nu(n) \to -z\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z}{z-1}\right) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$

例　求序列 $n^2u(n)$ 的z变换

解: $\because u(n) \to \dfrac{z}{z-1}$

$$\therefore n^2u(n) \to \left[-z\frac{d}{dz}\right]^2\left(\frac{z}{z-1}\right) = -z\frac{d}{dz}\left[-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)\right]$$

$$= \frac{z^2+z}{(z-1)^3}$$

z变换的性质

■乘以指数序列(z域尺度变换)

$$若\ x(n) \xrightarrow{Z} X(z),\quad R_{x_1} < |z| < R_{x_2}$$

$$则\ a^n x(n) \xrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{a}\right),\quad R_{x_1} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x_2}$$

■可见$x(n)$乘以指数序列等效于z平面尺度展缩。

$$例:\ a^{-n} x(n) \xrightarrow{Z} X(az),\quad R_{x_1} < |az| < R_{x_2}$$

$$(-1)^n x(n) \xrightarrow{Z} X(-z),\quad R_{x_1} < |z| < R_{x_2}$$

z变换的性质

序列的时域卷积

- 设$y(n)$为$x(n)$与$h(n)$的卷积：

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

且 $$X(z) = ZT[x(n)] \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

$$H(z) = ZT[h(n)] \quad R_{h^-} < |z| < R_{h^+}$$

则 $$Y(z) = ZT[y(n)] = X(z) \cdot H(z)$$

$$\max(R_{x^-}, R_{h^-}) < |z| < \min(R_{x^+}, R_{h^+})$$

当零点与极点相抵消时，收敛域扩大

z变换的性质—序列的时域卷积(证明)

证：$$ZT[x(n)*h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)*h(n)]z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)z^{-n}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-m)z^{-n}]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-m}H(z)$$

$$= H(z)X(z)$$

$$\max\left(R_{x^-}, R_{h^-}\right) < |z| < \min\left(R_{x^+}, R_{h^+}\right)$$

当零点与极点相抵消时，收敛域扩大

z变换的性质

共轭序列

若 $ZT[x(n)] = X(z) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

则 $ZT[x^*(n)] = X^*(z^*) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

证： $ZT[x^*(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)(z^*)^{-n}]^*$

$= X^*(z^*) \qquad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

z变换的性质

序列翻转

若 $ZT[x(n)] = X(z) \qquad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

则 $ZT[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \frac{1}{R_{x^+}} < |z| < \frac{1}{R_{x^-}}$

证： $ZT[x(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{n}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^{-1})^{-n} = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$R_{x^-} < \left|\frac{1}{z}\right| < R_{x^+} \Rightarrow \frac{1}{R_{x^+}} < |z| < \frac{1}{R_{x^-}}$$

离散时间系统的基本概念

- **离散时间系统的基本概念**
- 线性时不变系统的输入、输出关系
- 离散时间系统分析

离散时间系统的基本概念

- 离散时间系统的定义
  - 将输入序列x(n)映射成输出序列y(n)的变换或映射

$$y(n)=T[x(n)]$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow y(n)$$

  - 离散时间系统中最重要、最常用的是线性、时不变系统
- 系统的单位脉冲响应
  - 输入为单位冲激序列$\delta(n)$时系统的输出称为单位脉冲响应，记为 $h(n)$

$$h(n)=T[\delta(n)]$$

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow h(n)$$

离散时间系统的基本概念

线性系统

- 满足叠加原理的系统称为线性系统

设$x_1(n)$和$x_2(n)$分别作为系统的输入序列，其输出分别用$y_1(n)$和$y_2(n)$表示，即

$$y_1(n) = \mathrm{T}[x_1(n)], \quad y_2(n) = \mathrm{T}[x_2(n)]$$

那么线性系统一定满足下面公式：

$$\mathrm{T}[x_1(n) + x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n)$$

$$\mathrm{T}[ax_1(n)] = ay_1(n)$$

$$\mathrm{T}[ax_1(n)+bx_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$$

上式中，a和b均是常数

离散时间系统的基本概念

线性系统

- 线性系统具有叠加性和齐次性，因此分析计算很方便。非线性系统不满足叠加性和齐次性。
- 例：判断是否为线性系统

$$(a)\quad y(n)=\log(x(n))$$

$$(b)\quad y(n)=6x(n+2)+4x(n+1)+2x(n)+1$$

$$(c)\quad y(n)=x(n)\sin(n\pi/2)$$

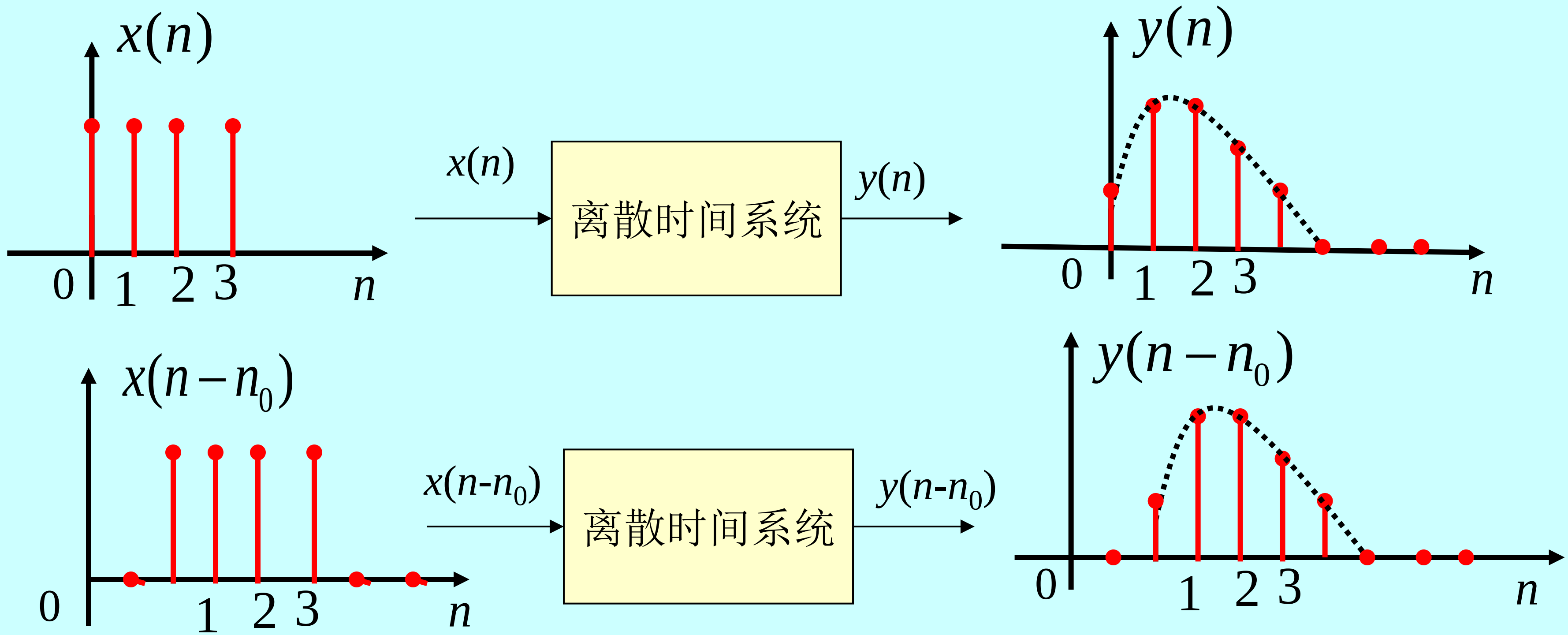
$$(d)\quad y(n)=\mathrm{Re}\{x(n)\}$$

离散时间系统的基本概念

时不变系统

- 系统对于输入信号的响应与信号加于系统的时间无关

$y(n) = T[x(n)] \longrightarrow y(n-n_0) = T[x(n-n_0)]$ (n_0为任意整数)



离散时间系统的基本概念

■时不变系统

- 例1：检查 $y(n) = ax(n) + b$ 代表的系统是否是时不变系统，式中 a 和 b 是常数

$$y(n) = ax(n) + b$$

$$y(n-n_0) = ax(n-n_0) + b$$

$$y(n-n_0) = \mathrm{T}[x(n-n_0)]$$

- 因此该系统是时不变系统

离散时间系统的基本概念

时不变系统

- 例2：映射$y(n)=nx(n)$所代表的系统是否具有时不变性

$$y(n)=nx(n)$$

$$y(n-n_0)=(n-n_0)x(n-n_0)$$

$$T[x(n-n_0)]=nx(n-n_0)$$

$$y(n-n_0)\neq T[x(n-n_0)]$$

- 因此，该系统属于时变系统

离散时间系统的基本概念

- 线性时不变系统
  - 具有时不变特性的线性系统
- 系统的稳定性
  - **稳定系统**：对于每一个有界输入产生一个有界输出的系统
  - **充要条件**：其单位脉冲响应绝对可求和 $\sum_{m=-\infty}^{\infty}|h(m)|<\infty$
- 系统的因果性
  - **因果系统**：系统的输出$y(n)$只取决于当前以及过去的输入，即$x(n)$，$x(n-1)$，$x(n-2)\ldots$
  - **非因果系统**：如果系统的输出$y(n)$取决于$x(n+1), x(n+2), \ldots$等未来的输入（不现实的系统）
  - **充要条件**：当$n<0$时，$h(n)\equiv 0$

离散时间系统的基本概念

- 系统的因果性
  - 因果系统例子

$$y(n) = ay(n-1) + x(n), \quad a\text{为常数}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{2} b(k)x(n-k), \quad b(0), b(1), b(2)\text{为常数}$$

$$y(n) = nx(n)$$

  - 非因果系统例子

$$y(n) = x(n+1)$$

$$y(n) = x(n^2)$$

线性时不变系统的输入、输出关系

- 离散时间系统的基本概念
- 线性时不变系统的输入、输出关系
- 离散时间系统分析

线性时不变系统的输入输出关系

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

输入信号$x(n)$可表示为δ(n)及其移位的线性组合

系统输出

$$y(n)=T[x(n)]=T[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)]$$

线性性(叠加性)

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)T[\delta(n-m)]$$

时不变特性

$$h(n-m)=T[\delta(n-m)]$$

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

式中$x(m)$与$h(n\text{-}m)$的位置可以对调，$h(n)*x(n)$

线性卷积
或
直接卷积

线性时不变系统的输入输出关系

线性卷积

计算公式

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

计算步骤

①将$x(n)$和$h(n)$用$x(m)$和$h(m)$表示，并将$h(m)$进行**翻转**，形成$h(-m)$

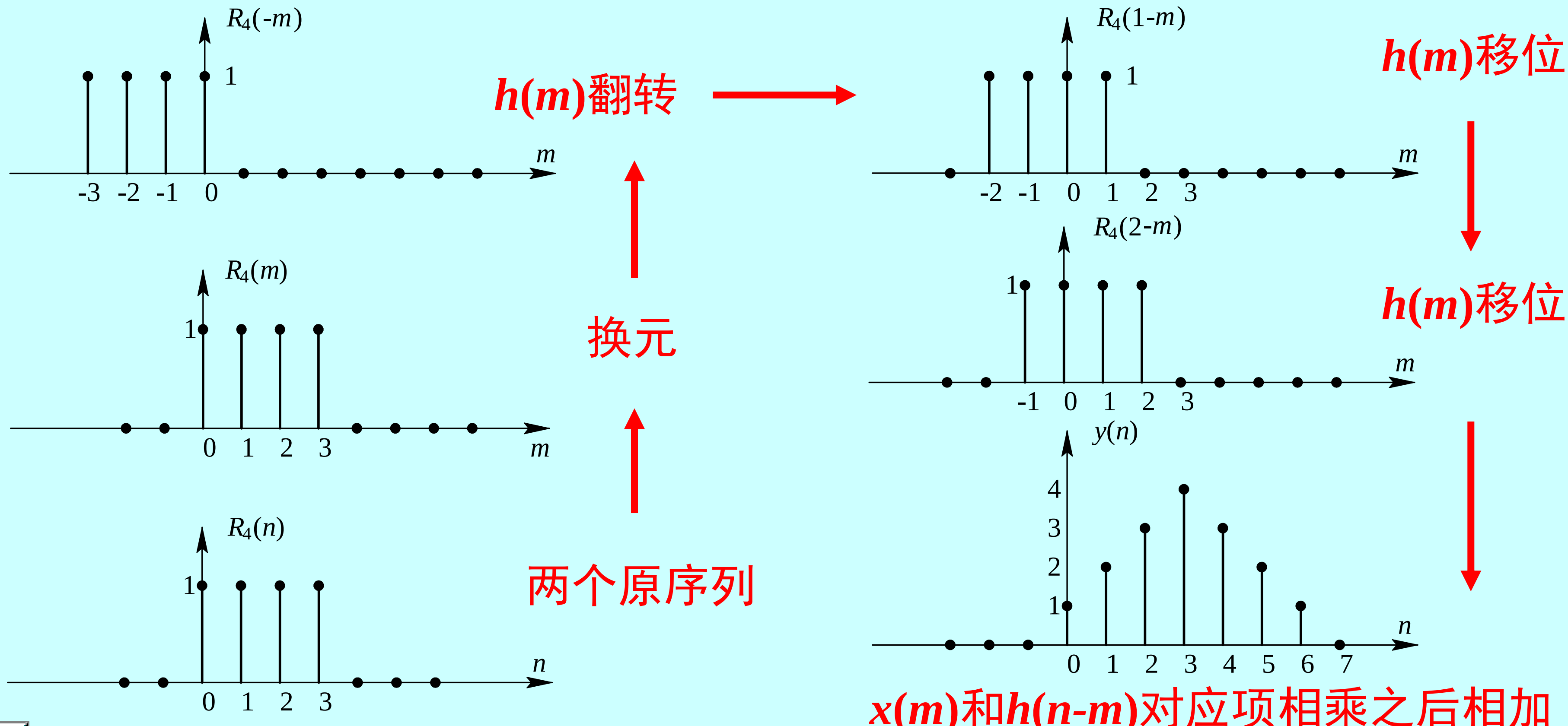
②将$h(-m)$**移位**n，得到$h(n-m)$。当$n>0$时，序列右移；$n<0$时，序列左移

③将$x(m)$和$h(n-m)$所有对应项相乘之后相加

按照以上三个步骤可得到卷积结果$y(n)$。

线性时不变系统的输入输出关系

- 例：设$x(n)=R_4(n)$，$h(n)=R_4(n)$，求$y(n)=x(n)*h(n)$。



线性时不变系统的输入输出关系

线性卷积讨论

- 卷积中主要运算是翻转、移位、相乘和相加
- 设线性卷积前两序列分别的长度是N和M，卷积后的新序列长度为 $N+M-1$

线性卷积服从交换律、结合律和分配律

- $x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$

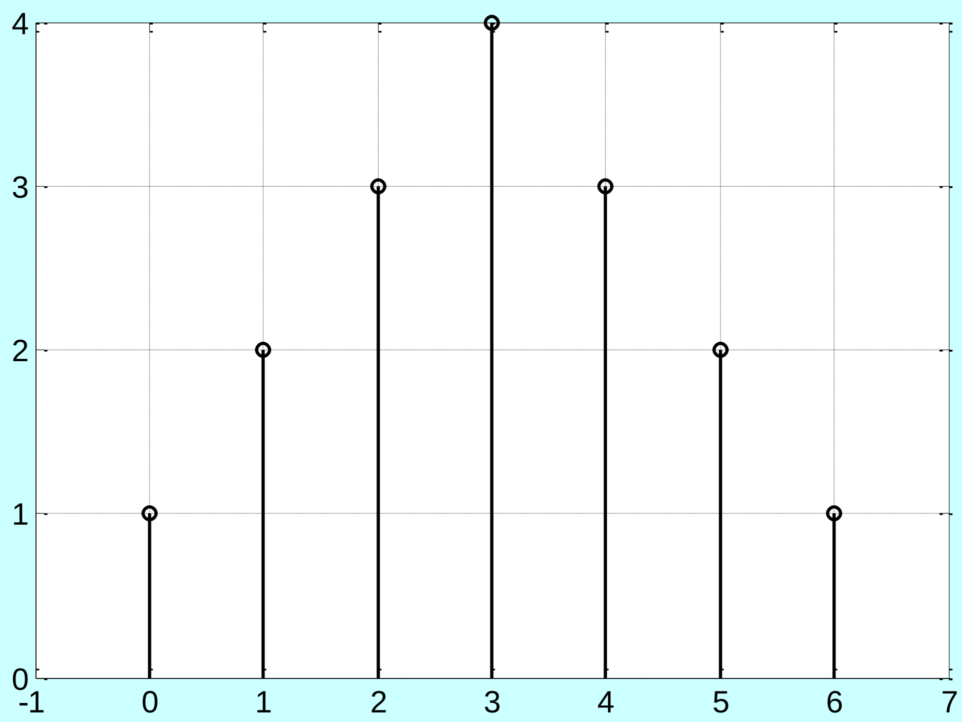
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

- $x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = (x(n) * h_1(n)) * h_2(n)$
- $x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$

线性时不变系统的输入输出关系

■ 线性卷积的Matlab示例

```
x=ones(4,1);
h=ones(4,1);
y=conv(x,h);
stem([0:6],y)
```



线性时不变系统的输入输出关系

■ 线性卷积的矩阵计算 $y(n)=x(n)*h(n)$

$x(n)$: N点序列，$n=0,1,2,\ldots N-1$;
$h(n)$: M点序列，$n=0,1,2,\ldots M-1$;

⇨

$y(n)$: L点序列，$L=N+M-1$
$n=0,1,2,\ldots L-1$

$$
\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(M\text{-}1) \\ y(N-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ y(L-1) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
x(0) & & & \\
x(1) & x(0) & & \mathbf{0} \\
\vdots & & \ddots & \\
x(M-1) & \cdots & \cdots & x(0) \\
\vdots & \ddots & & \vdots \\
x(N-1) & \cdots & \cdots & x(N-M) \\
 & \ddots & & \vdots \\
\mathbf{0} & & \ddots & \vdots \\
 & & & x(N-1)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(M-1) \end{bmatrix}
$$

线性时不变系统的输入输出关系

- 输入输出关系的差分方程描述
  - 连续时间系统(模拟系统)通常用微分方程来描述
  - 离散时间系统则是用差分方程来表达输入输出之间的关系
  - 线性时不变系统可以用线性常系数差分方程来表示
  - N阶线性常系数差分方程的一般形式

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M}a_i x(n-i)-\sum_{i=1}^{N}b_i y(n-i)$$

其中：a_i、b_i 均为常数

线性时不变系统的输入输出关系

输入输出关系的差分方程描述

- 例：给定一阶差分方程及其输入

$$y(n)=1.5x(n)+\frac{1}{2}y(n-1) \qquad x(n)=\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

- 求给定初始条件下系统的瞬态解(用递推法)

初始条件为 $y(n)=0$，$n<0$

解：$n=0$以前的输出已由初始条件给定，瞬态解从n=0求起，由差分方程、初始条件和输入，得：

$$y(0)=1.5x(0)+\frac{1}{2}y(-1)=1.5$$

$$y(1)=1.5x(1)+\frac{1}{2}y(0)=0.75$$

依次递推，得

$$\boxed{y(n)=h(n)=1.5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)}$$

稳定、因果系统

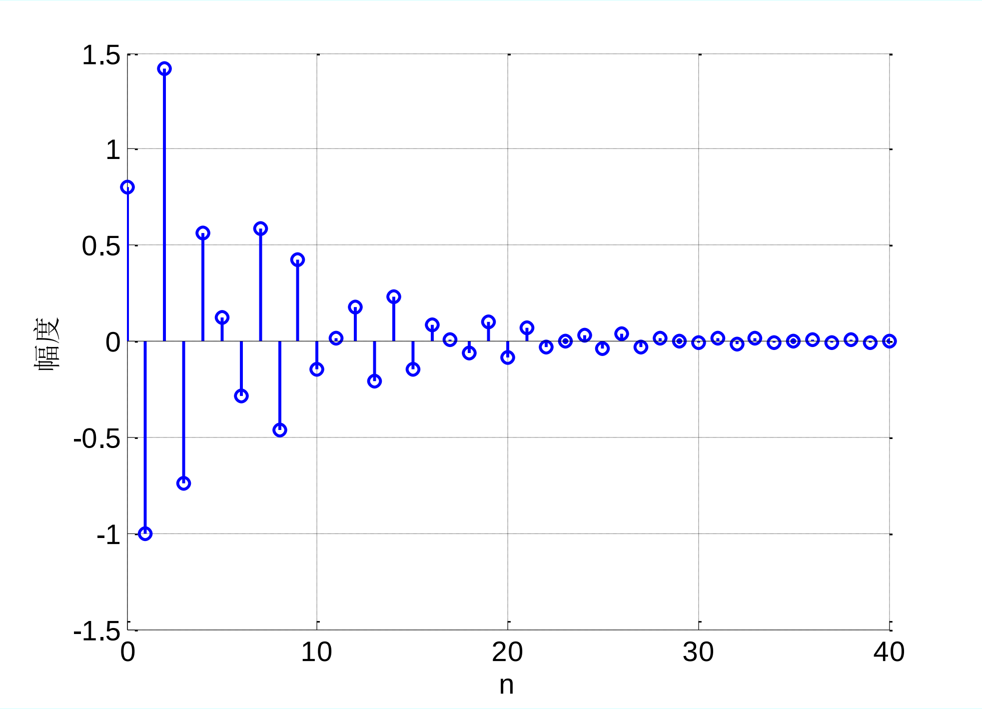
线性时不变系统的输入输出关系

- 利用MatLab来求解差分方程
  - MatLab是一种面向科学和工程计算的工具软件
  - 特点：计算功能强大，数十个工具箱，结果可视化
  - 例：试用MatLab计算下列差分方程的输出$y(n)$，假设输入序列 $x(n) = \delta(n)$，$0 \le n \le 40$

$$
\begin{aligned}
y(n)+0.7y(n-1)-0.45y(n-2)-0.6y(n-3)\\
=0.8x(n)-0.44x(n-1)+0.36x(n-2)+0.02x(n-3)
\end{aligned}
$$

线性时不变系统的输入输出关系

- 利用MatLab来求解差分方程
  - 解：MatLab程序如下
    - N=41;
    - b=[0.8 -0.44 0.36 0.22];
    - a=[1 0.7 -0.45 -0.6];
    - x=[1 zeros(1,N-1)];
    - k=0:1:N-1;
    - y=filter(b,a,x);
    - stem(k,y);
    - xlabel('n');
    - ylabel('幅度')
  - 结果绘图



离散时间系统分析

- 离散时间系统的基本概念
- 线性时不变系统的输入、输出关系
- 离散时间系统分析

离散时间系统分析

系统函数$H(z)$的定义

- 前面曾讨论过用单位脉冲响应$h(n)$来表示一个线性时不变离散系统的输入输出关系：

$$y(n) = x(n)*h(n)$$

两边取z变换：

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

则：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$ 定义为系统函数

- $H(z)$是单位脉冲响应$h(n)$的z变换

离散时间系统分析

差分方程与系统函数(1)

- 线性时不变离散系统也可用差分方程表示，考虑N阶差分方程：

$$\sum_{i=0}^{N} b_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{M} a_i x(n-i)$$

- 两边取z变换：

$$\sum_{i=0}^{N} b_i z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^{M} a_i z^{-i} X(z)$$

离散时间系统分析

差分方程与系统函数(2)

于是

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M}a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N}b_i z^{-i}}$$

上式也可用因子的形式来表示：

$$H(z)=A\frac{\prod_{i=1}^{M}(1-c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N}(1-d_i z^{-1})}$$

式中$\{c_i\}$、$\{d_i\}$是$H(z)$在z平面上的零点和极点，A为比例常数。

整个系统函数可以由它的全部零、极点来唯一确定。

离散时间系统分析

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

- 利用系统函数的极点分布分析因果性和稳定性
  - 因果系统　其单位脉冲响应一定满足：　$n<0, h(n)=0$

则其系统函数$H(z)$的收敛域一定包含 ∞，即 ∞不是极点

  - 稳定系统　要求 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$，要求其收敛域包含单位圆，

即$H(z)$的极点应该集中在单位圆内

$$h(n)=\sum_{k=1}^{N}C_k p_k^n$$

  - 因果稳定系统　收敛域包含 ∞ 和单位圆，收敛域可表示

为：$r<|z|\le\infty, 0<r<1$，极点应该集中在单位圆内

离散时间系统分析--(例1)(1)

例：已知离散LSI系统的差分方程：

(设系统初始状态为零)

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$$

其中：$x(n)$为输入，$y(n)$为输出。

1) 求系统函数，指出系统的零极点；

2) 若该系统是因果稳定的，指出系统的收敛域；

3) 求该因果稳定系统的单位抽样响应。

离散时间系统分析--(例1)(2)

解：1）对差分方程两边取Z变换：

$$\boxed{y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)} \quad Y(z)-\frac{3}{4}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)=X(z)+\frac{1}{3}z^{-1}X(z) \quad \boxed{x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)}$$

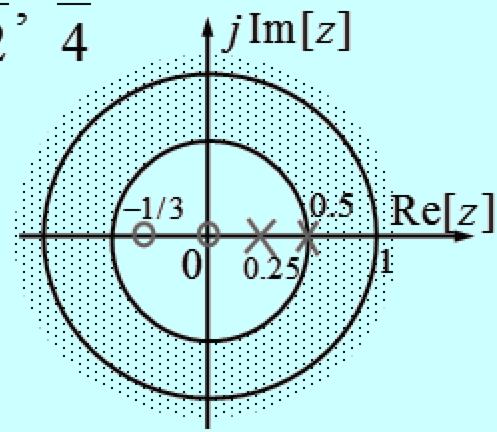
系统函数：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

零点：$z=-\frac{1}{3},\ 0$ 极点：$z=\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$

2）由于系统为因果稳定系统，

故收敛域：$|z|>\frac{1}{2}$



离散时间系统分析--(例1)(3)

3) 对H(z)求z反变换即得单位抽样响应h(n)，

用部分分式法

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$$H(z)=\frac{\frac{10}{3}z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{7}{3}z}{z-\frac{1}{4}}$$

$$h(n)=\left[\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right]u(n)$$

离散时间系统分析--(例2)

例：已知系统函数 $H(z)=\dfrac{0.95}{(1-0.5z^{-1})(1-0.1z)}$； $10<|z|\le\infty$

求系统的单位脉冲响应及系统性质

解：系统函数$H(z)$有两个极点，$z_1=0.5$， $z_2=10$。收敛域包含∞点，因此系统一定是因果系统，但单位圆不在收敛域内，因此可判定系统是不稳定的。

$$h(n)=IZT[H(z)]$$

$$=\begin{cases}\mathrm{Re}\,s[H(z)z^{n-1}]_{z=0.5}+\mathrm{Re}\,s[H(z)z^{n-1}]_{z=10} & n\ge 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

$$=(0.5^n-10^n)u(n)$$

离散时间系统分析--(例 3)

例：系统函数不变，但收敛域不同

$$H(z)=\frac{0.95}{(1-0.5z^{-1})(1-0.1z)};\quad 0.5<|z|\le 10$$

求系统的单位脉冲响应及系统性质

解：收敛域是包括单位圆而不包括∞点的有限环域，判定系统是稳定的，但是非因果的。用留数定理求$H(z)$的反变换：

$$h(n)=IZT[H(z)]$$

$$=\begin{cases}\mathrm{Re}\,s[H(z)z^{n-1}]_{z=0.5} & n\ge 0\\ -\mathrm{Re}\,s[H(z)z^{n-1}]_{z=10} & n<0\end{cases}$$

$$=0.5^n u(n)+10^n u(-n-1)$$

The End

谢谢！

请批评指正