上海交通大学 2015-2016 学年第一学期《矩阵理论》参考解答

一. 单项选择题(每题 3 分, 共 15 分) (A)卷答案：CBDAB；(B)卷答案：BCADC

二. 填空题(每题 3 分, 共 15 分) (A)卷答案：

6. 设 σ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换, $e_1=(1,0,)^T, e_2=(0,1)^T, \sigma(e_1)=e_1, \sigma(e_1+e_2)=2e_1$, 则 σ 关于基e_1+e_2, e_1-e_2的矩阵为($\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$).

7. 设 $e_1=(1,0,0)^T, e_2=(0,1,0)^T, A=(e_1,e_1)$. 则 $Ax=e_2$ 的最优解为($k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, k$ 任意).

8. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\cos^2(At)-\sin^2(At)=$($\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2t^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$).

9. 设 A 是秩为 2 的 3 阶投影矩阵, $B=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(I-A)^n}{3^n}$, 则 e^{2B} 的Jordan标准型为(对角矩阵$diag(e^2,e^2,e^3)$或$\begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$–任意次序皆可).

10. 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}^n\ (n\geq 2), \|\bullet\|_2$ 是向量的 2-范数(即欧几里德范数), $\|\alpha\|_2=2, \|\beta\|_2=1, \alpha^*\beta=1$. 则矩阵 $\alpha\beta^*+\beta\alpha^*$ 的 Moore-Penrose 广义逆为($(\beta\ \ \alpha)\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix}$或$3(\alpha\beta^*+\beta\alpha^*)-2(\alpha\alpha^*+2\beta\beta^*)$).

(B)卷答案：

6. 设 σ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换, $e_1=(1,0,)^T, e_2=(0,1)^T, \sigma(e_1)=e_1, \sigma(e_1+e_2)=2e_1$, 则 σ 关于基e_1+e_2, e_1-e_2的矩阵为($\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$).

7. 设 $e_1=(1,0,0)^T, e_2=(0,1,0)^T, A=(e_1,e_1)$. 则 $Ax=e_2$ 的最优解为($k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, k$ 任意).

8. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\cos^2(At)-\sin^2(At)=$ ($\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2t^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$).

9. 设 A 是秩为 2 的 3 阶投影矩阵, $B=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(I-A)^n}{2^n}$, 则 e^{2B} 的Jordan标准型为(对角矩阵$diag(e^2,e^2,e^4)$或$\begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix}$–任意次序皆可).

10. 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}^n\ (n\geq 2), \|\bullet\|_2$ 是向量的 2-范数(即欧几里德范数), $\|\alpha\|_2=1, \|\beta\|_2=2, \alpha^*\beta=1$. 则矩阵 $\alpha\beta^*+\beta\alpha^*$ 的 Moore-Penrose 广义逆为($(\beta\ \ \alpha)\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix}$或$3(\alpha\beta^*+\beta\alpha^*)-2(2\alpha\alpha^*+\beta\beta^*)$).

三. 计算题与证明题 (11-14 题每题 15 分, 15题 10 分, 共 70 分)

11． 设

$$U=\{(x,y,z,w)^T\in\mathbb{R}^4\,|\,x+y+z+w=0\},\ W=\{(x,y,z,w)^T\in\mathbb{R}^4\,|\,x-y+z-w=0\}$$

是通常欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 的两个子空间. 设 I 是 $\mathbb{R}^4$ 上的恒等变换.

(1) 求 U 与 $U\bigcap W$ 的正交补 $(U\bigcap W)^\perp$ 的各一组标准正交基;

(2) 试求出 $\mathbb{R}^4$ 上的所有正交变换 σ 使得线性变换 $I-\sigma$ 的核 $Ker(I-\sigma)=U$.

解：**(1)** U 的一组标准正交基为(答案不唯一)

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)^T;\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)^T;\alpha_3=\frac{1}{2}(1,1,-1,-1)^T.$$

....3分

由于 $(U\bigcap W)^\perp=U^\perp+W^\perp$, 故其一组标准正交基为(答案不唯一)

$$\beta_1=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T,\beta_2=\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T.$$

....7分

(2) 由于 $Ker(I-\sigma)=U$, 故$(I-\sigma)(U)=0$, 即$\sigma(U)=I(U)=U$. 因此

$$\sigma(\alpha_i)=\alpha_i,i=1,2,3.$$

....11分

再由 σ 是正交变换, 故 $\sigma(U^\perp)=U^\perp$. 因此

$$\sigma(\beta_1)=\pm\beta_1.$$

但若$\sigma(\beta_1)=\beta_1$，则$\sigma=I$是恒等变换，故 $Ker(I-\sigma)=\mathbb{R}^4$, 与 $Ker(I-\sigma)=U$ 矛盾!因此$\sigma(\beta_1)=-\beta_1$. 所以满足题意的正交变换恰有1个.

....15分

12. 设 $n \geq 2$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \in \mathbb{C}^n$. 定义线性变换 $\sigma:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 如下:

$$\sigma(x)=(x_2,x_3,...,x_n,x_1)^T.$$

设 σ 在标准基 $e_1,e_2,...,e_n$ 下的矩阵为 A, 其中 $e_i\,(1\leq i\leq n)$ 为 n 阶单位矩阵的第 i 列.

(1) 求 A;

(2) 求 σ 的特征值与特征向量;

(3) 求 A 的谱分解, 请写出乘法形式与加法形式.

解: **(1)** $A=(e_n,e_1,e_2,...,e_{n-1})$.

....**5分**

(2) σ 的特征值与特征向量就是 A 的特征值与特征向量. A 的特征方程为 $\lambda^n-1=0$. 因此 σ 的特征值为

$$\lambda_j=e^{\frac{2\pi i}{n}j}, 1\leq j\leq n.$$

σ 的属于特征值 λ_j 的特征向量为

$$\alpha_j=(\lambda_j,\lambda_j^2,...,\lambda_j^n)^T, 1\leq j\leq n.$$

....**10分**

(3) 由于 A 为**Hermite**矩阵, 属于不同特征值的特征向量彼此正交; 设$\beta_j=\frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_j$. 则因 $\alpha_j^*\alpha_j=n$ 知$U=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ 是由A 的特征向量构成的酉矩阵, 因此 A 的谱分解为

$$A=U\operatorname{diag}\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n U^*$$

与

$$A=\lambda_1\beta_1\beta_1^*+\lambda_2\beta_2\beta_2^*+...+\lambda_n\beta_n\beta_n^*.$$

....**15分**

13. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$**.**

(1) 求 A 的 **Jordan** 标准形 J**;**

(2) 计算 e^{At}**;**

(3) 设 $x(0)=(1,0,0)^T$**.** 求定解问题 $x'(t)=Ax(t)$ 的解**.**

解：**(1)** A 的 **Jordan** 标准形为

$$J=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

相应的变换矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

. . . . . .5分

(2)

$$e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & & \\ & e^t & te^t \\ & & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix} t+1 & 2t & -t \\ -t & 1-2t & t \\ -t & -2t & t+1 \end{pmatrix}$$

. . . . . .10分

(3)

$$x(t)=e^{At}x(0)=Pe^{Jt}P^{-1}e_1=e^t\begin{pmatrix} t+1 \\ -t \\ -t \end{pmatrix}$$

. . . . . .15分

14. 已知 n 阶**Hermite**矩阵 A 的秩为 r, 其谱分解为 $A=UDU^*$, 其中 U 为酉矩阵, $D=\operatorname{diag}(a_1,\cdots,a_r,0,\cdots,0)$ 是对角矩阵.

(1) 求 A 的一个满秩分解;

(2) 判断矩阵 e^A 是否存在三角分解(即 LU 分解)? 请说明理由;

(3) 求分块矩阵 $M=\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ 的奇异值分解.

解: **(1)** 设$B=\begin{pmatrix} \Lambda \\ 0_{(n-r)\times r} \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0_{(n-r)\times r} \end{pmatrix}$, 其中$\Lambda=\operatorname{diag}(a_1,\cdots,a_r)$. 令 $L=UB, R=CU^*$, 则$A=LR$ 是一个满秩分解.

....5分

(2) 因为A 是**Hermite**矩阵, 故e^A也是**Hermite**矩阵; 又A 的特征值均为实数, 因此e^A 的特征值均为正数. 所以e^A 是正定矩阵, 故存在三角分解.

....10分

(3) 以$s_j=sgn(a_j)$ 表示 $a_j, 1\le j\le r$ 的符号, $S=\operatorname{diag}(s_1,\cdots,s_r,1,\cdots,1)D$. 则 S 是酉矩阵, D 的绝对值矩阵$|D|=SD=\operatorname{diag}(|a_1|,\cdots,|a_r|,0,\cdots,0)$, $|a_j|$ 是A 的非零奇异值. 于是A 的奇异值分解为$A=W|D|U^*$, 其中$W=US$ 为酉矩阵. 因此

$$\begin{aligned} M=\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} UDU^* & UDU^* \\ UDU^* & UDU^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |D| & |D| \\ |D| & |D| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U^* & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix})\begin{pmatrix} \sqrt{2}|D| & \sqrt{2}|D| \\ 0 & 0 \end{pmatrix})\begin{pmatrix} U^* & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix})\begin{pmatrix} 2|D| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix})\begin{pmatrix} U^* & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix} \\ &= X\begin{pmatrix} 2|D| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Y \end{aligned}$$

其中$X=\begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix})$, $Y=(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix})\begin{pmatrix} U^* & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix}$ 均为酉矩阵. 故知A 的奇异值分解为

$$A=X\begin{pmatrix} 2|D| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Y.$$

....15分

15. 设 A 为 n 阶复矩阵.

(1) 证明: 存在酉矩阵 U 和半正定矩阵 P, 使得 $A=UP$. (此分解称为 A 的极分解.)

(2) 给出 U 与 P 唯一的充分必要条件.

证明. (1) 设 $A=XDV$ 是 A 的奇异值分解, 则 $A=(XV)(V^*DV)=UP$, 其中 $U=XV$ 为酉矩阵, $P=V^*DV$ 是半正定矩阵(因其与半正定矩阵 D 合同).

..3分

(2) 下证 P 总是唯一的，而 U 唯一当且仅当 A 可逆.

显然, A 可逆当且仅当 P 可逆从而正定. 现设 A 可逆. 若 P, P_1 正定, U, U_1 为酉阵使得 $A=UP=U_1P_1$, 则 $U_1^*U=P_1P^{-1}$. 注意左端为酉矩阵而右端为正定矩阵. 由于正定矩阵可以酉对角化，因此存在酉矩阵 V 使得酉矩阵 $V^*U_1^*UV=D$ 是正定的对角矩阵. 于是 $D=I$ 是单位矩阵, 故 $U_1^*U=I$, 从而 $U=U_1$, 因此 $P=P_1$.

一般地有 $U_1^*UP=P_1$. 设 $V^*P_1V=\Lambda=\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是半正定对角矩阵, 其中 D 是 $r=r(A)=r(P)=r(P_1)$ 阶正定对角矩阵. 于是 $\Lambda=V^*U_1^*UPV=(V^*U_1^*UV)(V^*PV)=XQ$, 其中 X 为酉矩阵, Q 为半正定矩阵. 注意 Λ 的后 $n-r$ 列均为 **0**, 因此 Q 的后 $n-r$ 列也为 **0**，但 Q 是 **Hermite** 矩阵，因此其后 $n-r$ 行亦为 **0**. 即有

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=X\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 R 为 r 阶正定矩阵. 将 X 分块成 $X=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ 可知 $D=X_1R, X_3=0$. 于是 X_1 为 r 阶酉矩阵, 从而归结为可逆情形，而有 $D=R$, 因此 $\Lambda=Q$. 再注意 X 的后 $n-r$ 列可取为前 r 列的正交补的任何一组标准正交基. 所以当 $r\neq n$ 时, X 不唯一.

..10分