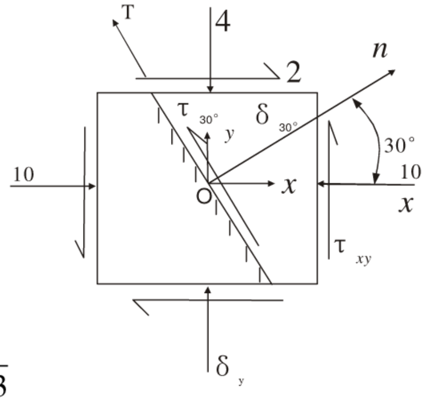
第二章　应力理论和应变理论

2—3．试求图示单元体斜截面上的 σ_{30° 和 τ_{30°（应力单位为 **MPa**）并说明使用材料力学求斜截面应力为公式应用于弹性力学的应力计算时，其符号及正负值应作何修正。



题1-3图

解：在右图示单元体上建立 ***xoy*** 坐标，则知

$\sigma_x = -10$　　$\sigma_y = -4$　　$\tau_{xy} = -2$

（以上应力符号均按材力的规定）

代入材力有关公式得：

$$\sigma_{30^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$= \frac{-10-4}{2} + \frac{-10+4}{2}\cos 60^\circ + 2\sin 60^\circ = -7 - 3\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -6.768 \quad -6.77\ (MPa)$$

$$\tau_{30^\circ} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cdot\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha = \frac{-10+4}{2}\cdot\sin 60^\circ - 2\cos 60^\circ$$

$$= -3\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\times\frac{1}{2} = -3.598 \quad -3.60\ (MPa)$$

代入弹性力学的有关公式得：　　已知　$\sigma_x = -10$　　$\sigma_y = -4$　　$\tau_{xy} = +2$

$$\sigma_{30^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$= \frac{-10-4}{2} + \frac{-10+4}{2}\cos 60^\circ + 2\sin 60^\circ = -7 - 3\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -6.768 \quad -6.77\ (MPa)$$

$$\tau_{30^\circ} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cdot\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha = -\frac{-10+4}{2}\cdot\sin 60^\circ + 2\cos 60^\circ$$

$$= 3\times\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\times\frac{1}{2} = 3.598 \quad 3.60\ (MPa)$$

由以上计算知，材力与弹力在计算某一斜截面上的应力时，所使用的公式是不同的，所得结果剪应力的正负值不同，但都反映了同一客观实事。

2—6. 悬挂的等直杆在自重 **W** 作用下（如图所示）。材料比重为 γ 弹性模量为 **E**，横截面面积为 **A**。试求离固定端 **z** 处一点 **C** 的应变 ε_z 与杆的总伸长量 Δ**l**。

解：据题意选点如图所示坐标系 **xoz**，在距下端（原点）为 **z** 处的 **c** 点取一截面考虑下半段杆的平衡得：

c 截面的内力：$N_z=\gamma \cdot A \cdot z$ ；

c 截面上的应力：$\sigma_z=\dfrac{N_z}{A}=\dfrac{\gamma\cdot A\cdot z}{A}=\gamma\cdot z$；

所以离下端为 z 处的任意一点 c 的线应变 ε_z 为：

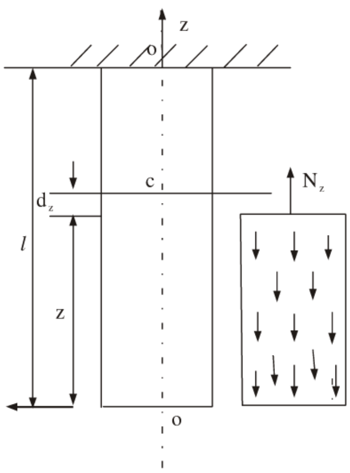
$$\varepsilon_z=\frac{\sigma_z}{E}=\frac{\gamma z}{E};$$

则距下端（原点）为 z 的一段杆件在自重作用下，其伸长量为：

$$l_z=\int_\circ^z \cdot d(\Delta l)=\int_\circ^z \varepsilon_z\cdot d_z=\int_\circ^z\frac{\gamma z}{E}d_z=\frac{\gamma}{E}\int_\circ^z z d_y=\frac{\gamma z^2}{2E};$$

显然该杆件的总的伸长量为（也即下端面的位移）：

$$l=\int_\circ^l d(\Delta l)=\frac{\gamma\cdot l^2}{2E}=\frac{\gamma\cdot A\cdot l\cdot l}{2EA}=\frac{W\cdot l}{2EA}$$；（$W=\gamma Al$）



题1—6图

2—9.已知物体内一点的应力张量为：$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}500 & 300 & -800\\ +300 & 0 & -300\\ -800 & -300 & 1100\end{bmatrix}$

应力单位为 kg/cm^2 。

试确定外法线为 $n_i\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\}$（也即三个方向余弦都相等）的微分斜截面上的总应力 $\bar{P}_n$、正应力 σ_n 及剪应力 τ_n 。

解：首先求出该斜截面上全应力 $\bar{P}_n$ 在 x、y、z 三个方向的三个分量：$n'=n_x=n_y=n_z$

$$P_x=\left(\sigma_x+\tau_{xy}+\tau_{xz}\right)n'=\left[5+3+\left(-8\right)\right]\times10^2\times\frac{1}{\sqrt{3}}=0$$

$$P_y=\left(\tau_{yx}+\sigma_y+\tau_{yz}\right)n'=\left[3+0+\left(-3\right)\right]\times10^2\times\frac{1}{\sqrt{3}}=0$$

$$P_z=\left(\tau_{zx}+\tau_{yz}+\sigma_z\right)n'=\left[\left(-8\right)+\left(-3\right)+11\right]\times10^2\times\frac{1}{\sqrt{3}}=0$$

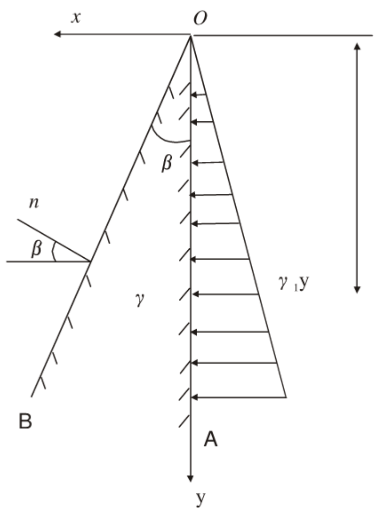
所以知，该斜截面上的全应力 $\bar{P}_n$ 及正应力 σ_n、剪应力 τ_n 均为零，也即：

$P_n=\sigma_n=\tau_n=0$

2—15. 如图所示三角形截面水坝材料的比重为 γ，水的比重为 γ_1。已求得应力解为：

$\sigma_x=ax+by$，$\sigma_y=cx+dy-\gamma y$，$\tau_{xy}=-dx-ay$；

试根据直边及斜边上的边界条件，确定常数 a、b、c、d。



解：首先列出 OA、OB 两边的应力边界条件：

OA 边：$l_1=-1$；$l_2=0$；$T_x=\gamma_1 y$；$T_y=0$ 则 $\sigma_x=-\gamma_1 y$；$\tau_{xy}=0$

代入：$\sigma_x=ax+by$；$\tau_{xy}=-dx-ay$ 并注意此时：$x=0$

得：$b=-\gamma_1$；$a=0$；

OB 边：$l_1=\cos\beta$；$l_2=-\sin\beta$，$T_x=T_y=0$

则：$$\begin{cases}\sigma_x\cos\beta+\tau_{xy}\sin\beta=0\\ \tau_{yx}\cos\beta+\sigma_y\sin\beta=0\end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

将已知条件：$\sigma_x=-\gamma_1 y$；$\tau_{xy}=-dx$；$\sigma_y=cx+dy-\gamma y$ 代入（a）式得：

$$\begin{cases}-\gamma_1 y\cos\beta+dx\sin\beta=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)\\ -dx\cos\beta-\left(cx+dy-\gamma y\right)\sin\beta=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(c)\end{cases}$$

化简（b）式得：$d=\gamma_1 ctg^2\beta$；

化简（c）式得：$c=\gamma ctg\beta-2\gamma_1 ctg^3\beta$

2—17. 已知一点处的应力张量为 $\begin{bmatrix}12 & 6 & 0\\ 6 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\times10^3 Pa$

试求该点的最大主应力及其主方向。

解：由题意知该点处于平面应力状态，且知：$\sigma_x=12\times10^3$　　$\sigma_y=10\times10^3$　　$\tau_{xy}=6\times10^3$，且该点的主应力可由下式求得：

$$\sigma_{1.2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\left[\frac{12+10}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{12-10}{2}\right)^2+6^2}\right]\times10^3$$

$$=\left(11\pm\sqrt{37}\right)\times10^3=\left(11\pm6.0828\right)\times10^3=\begin{matrix}17.083\times10^3\\4.91724\times10^3\end{matrix}\left(Pa\right)$$

则显然：$\sigma_1=17.083\times10^3\,Pa$　　$\sigma_2=4.917\times10^3\,Pa$　　$\sigma_3=0$

σ_1 与 x 轴正向的夹角为：（按材力公式计算）

$$tg\,2\theta=\frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{-2\times(-6)}{12-10}=\frac{+12}{2}=+6\qquad\frac{\sin2\theta}{\cos2\theta}=\frac{+}{+}$$

显然 2θ 为第Ⅰ象限角：$2\theta=arctg(+6)=+80.5376°$

则：$\theta=+40.2688$　40°　16′　或（-139°　44′）

2—19. 已知应力分量为：$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=0$，$\tau_{zy}=a$，$\tau_{zx}=b$，试计算出主应力 σ_1、σ_2、σ_3 并求出 σ_2 的主方向。

解：由 2—11 题计算结果知该题的三个主应力分别为：

$$\sigma_1=\sqrt{a^2+b^2}\text{；}\ \sigma_2=0\text{；}\ \sigma_3=-\sqrt{a^2+b^2}\text{；}$$

设 σ_2 与三个坐标轴 x、y、z 的方向余弦为：l_{21}、l_{22}、l_{23}，于是将方向余弦和 σ_2 值代入下式即可求出 σ_2 的主方向来。

$$\begin{cases}l_{21}\left(\sigma_x-\sigma_2\right)+l_{22}\tau_{yx}+l_{23}\tau_{xz}=l_{23}\tau_{xz}=0\cdots\cdots\cdots(1)\\l_{21}\tau_{yx}+l_{22}\left(\sigma_y-\sigma_2\right)+l_{23}\tau_{yz}=l_{23}\tau_{zy}=0\cdots\cdots\cdots(2)\\l_{21}\tau_{zx}+l_{22}\tau_{zy}+l_{23}\left(\sigma_z-\sigma_2\right)=l_{21}\tau_{yx}+l_{22}\tau_{zy}=0\cdots\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

以及：$l_{21}^2+l_{22}^2+l_{23}^2=1\cdots\cdots\cdots(4)$

由（1）（2）得：$l_{23}=0$　　由（3）得：$\frac{l_{21}}{l_{22}}=-\frac{a}{b}$；$\frac{l_{22}}{l_{21}}=-\frac{b}{a}$；

将以上结果代入（4）式分别得：$l_{21}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{l_{22}}{l_{21}}\right)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{b}{a}\right)^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$；

$$l_{22}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{l_{21}}{l_{22}}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{a}{b}\right)^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\text{；}$$

$$l_{21}=-\frac{a}{b}l_{22}\ \therefore l_{22}=-\frac{b}{a}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ 同理 $$l_{21}=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

于是主应力 σ_2 的一组方向余弦为：（$\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\mp\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，**0**）；

σ_3 的一组方向余弦为（$\pm\frac{\sqrt{2}b}{2\sqrt{a^2+b^2}}$，$\pm\frac{\sqrt{2}a}{2\sqrt{a^2+b^2}}$，$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$）；

2—20.证明下列等式：

（**1**）：$J_2=I_2+\frac{1}{3}I_1^2$；　　　　（**3**）：$I_2=-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{kk}-\sigma_{ik}\sigma_{ik}\right)$；

证明（**1**）：等式的右端为：$I_2+\frac{1}{3}I_1^2=-\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)+\frac{1}{3}\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right)^2$

$$=\frac{1}{3}\left(\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+\sigma_3{}^2+2\sigma_1\sigma_2+2\sigma_2\sigma_3+2\sigma_3\sigma_1\right)-\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)$$

$$=\frac{2}{6}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2\right)+\frac{4}{6}\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)-\frac{6}{6}\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)$$

$$=\frac{2}{6}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_1\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\sigma_1^2-2\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2+\sigma_2^2-2\sigma_2\sigma_3+\sigma_3^2+\sigma_3^2-2\sigma_3\sigma_1+\sigma_1^2\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right]=J_2$$

故左端=右端

证明（**3**）：$I_2=-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{kk}-\sigma_{ik}\sigma_{ik}\right)$

右端=$\frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{kk}-\sigma_{ik}\sigma_{ik}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2+2\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)-\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2+2\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)-\sigma_x^2-\sigma_y^2-\sigma_z^2-2\left(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x\right)\right]$$

$$=-\left(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2\right)=I_2$$

2—28：设一物体的各点发生如下的位移。$\begin{cases}u=a_0+a_1x+a_2y+a_3z\\ v=b_0+b_1x+b_2y+b_3z\\ w=c_0+c_1x+c_2y+c_3z\end{cases}$

式中 a_0、a_1………c_1、c_2 均为常数，试证各点的应变分量为常数。

证明：将已知位移分量函数式分别代入几何方程得：

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=a_1\quad;\quad\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=b_2\quad;\quad\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}=c_3\quad;\quad\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=b_1+a_2\quad;$$

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=c_2+b_3\;;\qquad\gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}=a_3+c_1\;;$$

2—29：设已知下列位移，试求指定点的应变状态。

（1）：$\begin{cases}u=\left(3x^2+20\right)\times10^{-2}\\ v=\left(4yx\right)\times10^{-2}\end{cases}$ 在（0，2）点处；

（2）：$\begin{cases}u=\left(6x^2+15\right)\times10^{-2}\\ w=\left(3z^2-2xy\right)\times10^{-2}\\ v=\left(8zy\right)\times10^{-2}\end{cases}$ 在（1，3，4）点处

解（1）：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon_x=6x\cdot10^{-2}\qquad\dfrac{\partial v}{\partial y}=\varepsilon_y=4x\cdot10^{-2}\qquad\gamma_{xy}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=0+4y\cdot10^{-2}$

在（0，2）点处，该点的应变分量为：$\varepsilon_x=\varepsilon_y=0$；$\gamma_{xy}=8\times10^{-2}$；

写成张量形式则为：$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}0&4&0\\4&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\times10^{-2}$；

解（2）：将已知位移分量函数式代入几何方程求出应变分量函数式，然后将已知点坐标（1，3，4）代入应变分量函数式。求出设点的应变状态。

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=12x10^{-2}=12\times10^{-2}\;;\qquad\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=8z10^{-2}=32\times10^{-2}$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}=6z10^{-2}=24\times10^{-2}\;;\qquad\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=\left[8y+\left(-2x\right)\right]10^{-2}=\left(24-2\right)\times10^{-2}=22\times10^{-2}$$

$$\gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=\left(-2y+0\right)10^{-2}=-6\times10^{-2}\;;$$

用张量形式表示则为：

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}12 & 0 & -3\\ 0 & 32 & 11\\ -3 & 11 & 24\end{bmatrix}\times10^{-2}$$

2—32：试说明下列应变状态是否可能（式中 a、b、c 均为常数）

$$(1):\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}c\left(x^2+y^2\right) & cxy & 0\\ cxy & cy^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$(2):\ \varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}axy^2 & 0 & \frac{1}{2}\left(ax^2+by^2\right)\\ 0 & ax^2y & \frac{1}{2}\left(az^2+by^2\right)\\ \frac{1}{2}\left(ax^2+by^2\right) & \frac{1}{2}\left(az^2+by^2\right) & 0\end{bmatrix}$$

$$(3):\ \varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}c\left(x^2+y^2\right)z & cxyz & 0\\ cxyz & cy^2z & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

解（1）：由应变张量 ε_{ij} 知：$\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zx}=\varepsilon_{zy}=\varepsilon_{z}=0$ 而 ε_{x}、ε_{y}、ε_{xy} 及 ε_{yx} 又都是 x、y 坐标的函数，所以这是一个平面应变问题。

将 ε_{x}、ε_{y}、ε_{xy} 代入二维情况下，应变分量所应满足的变形协调条件知：

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$$ 也即：$2c+0=2c$ 知满足。

所以说，该应变状态是可能的。

解（2）：将已知各应变分量代入空间问题所应满足的变形协调方程得：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\\
\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}\\
\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x}\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{（1）}$$

得：$$\left.\begin{aligned}2ax+2ay=0\\0+0=0\\0+0=0\\0=0\\2b\neq0\\0=0\end{aligned}\right\}$$ 不满足，因此该应变状态是不可能的。

解（3）：将已知应变分量代入上（1）式得：

$$\left.\begin{aligned}2cz+0=2cz\\0+0\neq0\\0=0\\2cy=2cy\\2cx\neq0\end{aligned}\right\}$$ 不满足，因此该点的应变状态是不可能的。

第三章：弹性变形及其本构方程

3-5．试依据物体三向受拉，体积不会缩小的体积应变规律，来证明泊松比 V 的上下限为 **0** $<V<\frac{1}{2}$；

证明：当材料处于各向等值的均匀拉伸应力状态下时，其应力分量为：

$\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=p$ $\qquad\qquad$ $\sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$

如果我们定义材料的体积弹性模量为 k，则显然：$k=\dfrac{p}{e}$，e 为体积应变。

将上述应力分量的值代入广义胡克定律：$\sigma_{ij}=2G\varepsilon_{ij}+\lambda\delta_{ij}e$ 得：

$$\begin{cases} p=2G\varepsilon_1+\lambda e \\ p=2G\varepsilon_2+\lambda e \\ p=2G\varepsilon_3+\lambda e \end{cases} \Rightarrow \text{三式相加得：} 3p=(3\lambda+2G)e$$

将 $p=ke$ 代入上式得：$k=\dfrac{1}{3}(2G+3\lambda)=\lambda+\dfrac{2}{3}G$ ……………………（1）

由弹性应变能 u_0 的正定性（也就是说在任何非零的应力值作用下，材料变形时，其弹性应变能总是正的。）知 $k>0$，$E>0$，$G>0$。

因：$u_0=u_{or}+u_{od}=\dfrac{1}{18k}I_1^2+\dfrac{1}{2G}J_2=\dfrac{1}{2}ke^2+Ge_{ij}e_{ij}$

我们知道体积变形 e 与形状变化部分，这两部分可看成是相互独立的，因此由 u_0 的正定性可推知：

$k>0$，$G>0$。

而又知：　$E=\dfrac{9kG}{3k+G}$　　　所以：$E>0$。

我们将（1）式变化为：

$$k=\frac{2}{3}G+\lambda=\frac{2}{3}G+\frac{2GV}{1-2V}=\frac{2G(1-2V)+6GV}{3(1-2V)}=\frac{2G(1+V)}{3(1-2V)}=\frac{2(1+V)E}{3(1-2V)2\cdot(1+V)}=\frac{E}{3(1-2V)}$$

$$=\frac{2G(1+V)}{3(1-2V)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（2）$$

由（2）式及 $k>0$，$G>0$，$E>0$ 知：$1+V\geqslant0$，$1-2V\geqslant0$。

解得：$-1\leqslant V\leqslant\dfrac{1}{2}$。

但是由于到目前为止，还没有发现有 $V<0$ 的材料，而只发现有 V 值接近于其极限值 $\dfrac{1}{2}$ 的材料（例如：橡胶、石腊）和 V 值几乎等于零的材料（例如：软木）。因此，一般认为泊松比 V 的上、下限值为 $\dfrac{1}{2}$ 和 0，所以得：$0<V<\dfrac{1}{2}$　或：$0\leqslant V\leqslant\dfrac{1}{2}$；

3-10．直径为 D=40mm 的铝圆柱体，紧密地放入厚度为 $\delta=2mm$ 的钢套中，圆柱受轴向压力 P=40KN。若铝的弹性常数据 E_1=70G p_a .V_1=0.35,钢的弹性常数 E=210G p_a。试求筒内的周向应力。

解：设铝块受压$\sigma_1=\sigma_2=-q$

而$\sigma_3=\dfrac{-40\times10^3}{\frac{1}{4}\pi\times4^2\times10^{-4}}=-\dfrac{100}{\pi}$

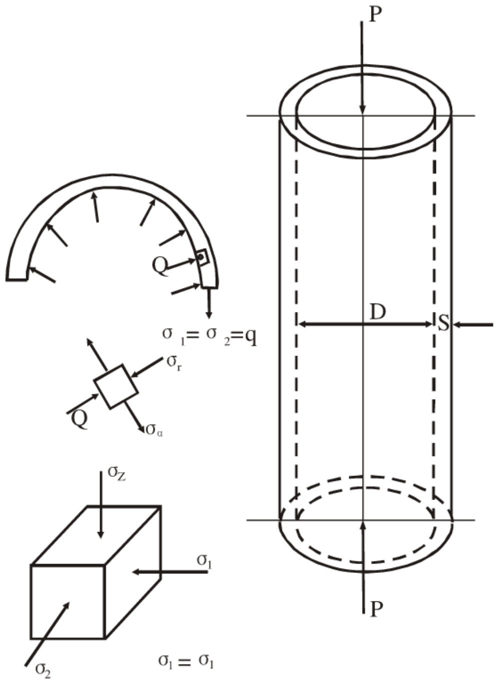
则周向应变

$$\varepsilon_{铝}=\frac{1}{E_{铝}}\left[-q-r\left(-q-\frac{100}{\pi}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{钢}=\frac{1}{E_{钢}}\frac{q\times4\times10^{-2}}{2\times0.2\times10^{-2}}=\frac{10q}{E_{钢}}$$

∵ $\varepsilon_{铝}=\varepsilon_{钢}$ **q=2.8MN/m^2**

钢套 $\sigma_\theta=\dfrac{qD}{2t}=28MN/m^2$



$\sigma_r=\dfrac{qv}{2t}$ ； $\sigma_\theta=\dfrac{qr}{t}$ ； $\sigma_z=0$ ； $\sigma_r=E\cdot\varepsilon_1$；

4-14.试证明在弹性范围内剪应力不产生体积应变，并由纯剪状态说明 **v=0**。

证明：在外力作用下，物体将产生变形，也即将产生体积的改变和形状的改变。前者称为体变，后者称为形变。

并且可将一点的应力张量 σ_{ij} 和应变张量 ε_{ij} 分解为，球应力张量、球应变张量和偏应力张量、偏应变张量。

$$\begin{cases}\sigma_{ij}=\sigma_m\delta_{ij}+s_{ij}\\ \varepsilon_{ij}=\varepsilon_m\delta_{ij}+e_{ij}\end{cases}$$

而球应变张量只产生体变，偏应变张量只引起形变。

通过推导，我们在小变形的前提下，对于各向同性的线弹体建立了用球应力、球应变分量和偏应力分量，偏应变分量表示的广义胡克定律：

$$\begin{cases}\sigma_m=3k\varepsilon_m=k_e & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ s_{ij}=2Ge_{ij} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

(1) 式中：***e*** 为体积应变 $e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=I_1'$

由（**1**）式可知，物体的体积应变是由平均正力 σ_m 确定，由 e_{ij} 中的三个正应力之和为令，以及（**2**）式知，应变偏量只引起形变，而与体变无关。这说明物体产生体变时，只能是平均正应力 σ_m 作用的结果，而与偏应力张量无关进一步说就是与剪应力无关。物体的体积变形只能是并且完全是由球应力张量引起的。

由单位体积的应变比能公式：$u_o=u_{ov}+u_{od}=\dfrac{3}{2}\sigma_m\varepsilon_m+\dfrac{1}{2}s_{ij}e_{ij}$；也可说明物体的体变

只能是由球应力分量引起的。

当某一单元体处于纯剪切应力状态时：其弹性应变比能为：$u_o = u_{ov} + u_{od} = 0 + \dfrac{1}{2G}\tau_{xy}^2 = \dfrac{1+v}{E}\tau_{xy}^2$

由 $\boldsymbol{u_o}$ 的正定性知：$\boldsymbol{E>0}$，$\boldsymbol{1+v>0}$.得：$\boldsymbol{v>-1}$。

由于到目前为止还没有 $\boldsymbol{v<0}$ 的材料，所以，$\boldsymbol{v}$ 必须大于零。即得：$\boldsymbol{v>0}$。

3-16．给定单向拉伸曲线如图所示，ε_s、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{E'}$ 均为已知，当知道 **B** 点的应变为 ε 时，试求该点的塑性应变。

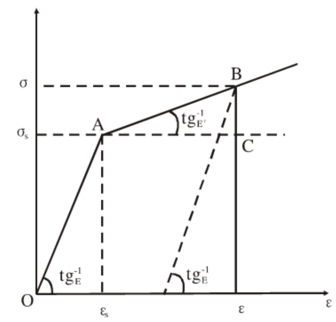
解：由该材料的 σ— ε 曲线图可知，该种材料为线性强化弹塑性材料。由于 $\boldsymbol{B}$ 点的应变已进入弹塑性阶段，故该点的应变应为：$\varepsilon_B = \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$

故：$\varepsilon_p = \varepsilon - \varepsilon_e$

$$= \varepsilon - \frac{\sigma}{E} = \varepsilon - \frac{1}{E}\left[\sigma_e + E'(\varepsilon - \varepsilon_e)\right] = \varepsilon - \frac{1}{E}\left[E\varepsilon_s + E'(\varepsilon - \varepsilon_s)\right]$$

$$= \varepsilon - \frac{E}{E}\varepsilon_s - \frac{E_1}{E}\varepsilon + \frac{E'}{E}\varepsilon_s = \varepsilon\left(1 - \frac{E'}{E}\right) - \varepsilon_s\left(1 - \frac{E'}{E}\right)$$

$$= (\varepsilon - \varepsilon_s)\left(1 - \frac{E'}{E}\right);$$



3-19．已知藻壁圆筒承受拉应力 $\sigma_z = \dfrac{\sigma_s}{2}$ 及扭矩的作用，若使用 **Mises** 条件，试求屈服时扭转应力应为多大？并求出此时塑性应变增量的比值。

解：由于是藻壁圆筒，所可认圆筒上各点的应力状态是均匀分布的。据题意圆筒内任意一点的应力状态为：（采用柱坐标表示）

$$\sigma_\theta = 0，\ \sigma_r = 0，\ \sigma_z = \frac{\sigma_s}{2}；\ \tau_{r\theta} = 0，\ \tau_{\theta z} = \tau；\ \tau_{zr} = 0；$$

于是据 **miess** 屈服条件知，当该藻壁圆筒在轴向拉力（固定不变）ρ 及扭矩 ***M***（遂渐增大，直到材料产生屈服）的作用下，产生屈服时，有：

$$\sigma_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\left(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{zr}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(-\frac{\sigma_s}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_s}{2}\right)^2 + 6\tau^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sigma_s^2}{2} + 6\tau^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

解出 τ 得：$\tau = \frac{\sigma_s}{2}$；

τ 就是当圆筒屈服时其横截面上的扭转应力。

任意一点的球应力分量 σ_m 为：$\sigma_m = \frac{\sigma_\theta + \sigma_r + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_s}{6}$

应力偏量为：$s_\theta = \sigma_\theta - \sigma_m = -\frac{\sigma_s}{6}$；$s_r = \sigma_r - \sigma_m = -\frac{\sigma_s}{6}$；$s_z = \sigma_z - \sigma_m = \frac{\sigma_s}{2} - \frac{\sigma_s}{6} = \frac{\sigma_s}{3}$；

$$s_{\theta r} = s_{rz} = \tau_{\theta r} = \tau_{rz} = 0；\ s_{z\theta} = \tau_{z\theta} = \tau = \frac{\sigma_s}{2}；$$

由增量理论知：$d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij} d\lambda$

于是得：$d\varepsilon_\theta^p = d\lambda s_\theta = -\frac{\sigma_s}{6} d\lambda$；$d\varepsilon_r^p = d\lambda s_r = -\frac{\sigma_s}{6} d\lambda$；$d\varepsilon_z^p = d\lambda s_z = \frac{\sigma_s}{3} d\lambda$；

$$d\varepsilon_{\theta r}^p = d\lambda s_{\theta r} = 0；\ d\varepsilon_{rz}^p = d\lambda s_{rz} = 0；\ d\varepsilon_{z\theta}^p = d\lambda s_{z\theta} = \frac{\sigma_s}{2} d\lambda$$

所以此时的塑性应变增量的比值为：

$$d\varepsilon_\theta^p : d\varepsilon_r^p : d\varepsilon_z^p : d\varepsilon_{\theta r}^p : d\varepsilon_{rz}^p : d\varepsilon_{z\theta}^p = \left(-\frac{\sigma_s}{6}\right) : \left(-\frac{\sigma_s}{6}\right) : \frac{\sigma_s}{3} : \mathbf{0} : \mathbf{0} : \frac{\sigma_s}{2}$$

也即：$d\varepsilon_\theta^p : d\varepsilon_r^p : d\varepsilon_z^p : d\gamma_{\theta r}^p : d\gamma_{rz}^p : d\gamma_{z\theta}^p =$ **（-1）：（-1）：2：0：0：6；**

3-20. 一藻壁圆筒平均半径为 ***r***，壁厚为 ***t***，承受内压力 ***p*** 作用，且材料是不可压缩的，$v = \frac{1}{2}$；讨论下列三种情况：

（1）：管的两端是自由的；

（2）：管的两端是固定的；

（3）：管的两端是封闭的；

分别用 **mises** 和 **Tresca** 两种屈服条件讨论 ***p*** 多大时，管子开始屈服，如已知单向拉伸试验 σ_r 值。

解：由于是藻壁圆筒，若采用柱坐标时，σ_r**≈0**，据题意首先分析三种情况下，圆筒内任意

一点的应力状态：

（1）：$\sigma_\theta = \dfrac{pr}{t} = \sigma_1$；$\sigma_r = 0 = \sigma_z = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$

（2）：$\sigma_\theta = \dfrac{pr}{t} = \sigma_1$；$\sigma_r = 0 = \sigma_3$；$\sigma_z = v \cdot \sigma_\theta = \dfrac{vpr}{t} = \dfrac{pr}{2t} = \sigma_2$；

（3）：$\sigma_\theta = \dfrac{pr}{t} = \sigma_1$；$\sigma_r = 0 = \sigma_3$；$\sigma_z = \dfrac{pr}{2t} = \sigma_2$；

显然知，若采用 **Tresca** 条件讨论时，（**1**）、（**2**）、（**3**）三种情况所得结果相同，也即：

$$\tau_{\max} = k = \tau_s = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_\theta}{2} = \frac{pr}{2t} = \frac{\sigma_s}{2};$$

解出得：$p = \dfrac{\sigma_s t}{r}$；

若采用 **mises** 屈服条件讨论时，则（**2**）（**3**）两种情况所得结论一样。于是得：

（**1**）：$2\sigma_s^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \left(\dfrac{pr}{t}\right)^2 = \left(-\dfrac{pr}{2t}\right)^2$

解出得：$p = \dfrac{\sigma_s t}{r}$；

（**2**）、（**3**）：$2\sigma_s^2 = \left(\dfrac{pr}{t} - \dfrac{pr}{2t}\right)^2 + \left(\dfrac{pr}{2t} - 0\right)^2 + \left(0 - \dfrac{pr}{t}\right)^2$

解出得：$p = \dfrac{2\sigma_s t}{\sqrt{3}r}$；

3-22．给出以下问题的最大剪应力条件与畸变能条件：

（**1**）：受内压作用的封闭薄壁圆管。设内压 q，平均半径为 r，壁厚为 t，材料为理想弹塑性。

（**2**）：受拉力 p 和旁矩作用的杆。杆为矩形截面，面积 $b \times h$，材料为理想弹塑性。

解（**1**）：由于是薄壁圆管且 $\dfrac{t}{r}$**<<1**。所以可以认为管壁上任意一点的应力状态为平面应力状态，即 σ_r**=0,**且应力均匀分布。那么任意一点的三个主应力为：

$$\sigma_\theta = \frac{qr}{t} = \sigma_1;\quad \sigma_r = 0 = \sigma_3;\quad \sigma_z = \frac{qr}{2t} = \sigma_2;$$

若采用 **Tresca** 屈服条件，则有：

$$\tau_{\max} = \tau_s = \frac{\sigma_s}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} = \frac{qr}{2t};$$

故得：$\sigma_s = \dfrac{qr}{t}$；　或：$\tau_s = \dfrac{qr}{2t}$；

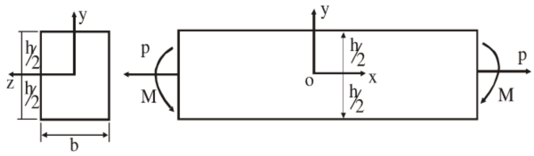
若采用 **mises** 屈服条件，则有：

$$2\sigma_s^2 = 6\tau_s^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

$$= (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2$$

$$= \left(\frac{qr}{t} - \frac{qr}{2t}\right)^2 + \left(\frac{qr}{2t}\right)^2 + \left(-\frac{qr}{t}\right)^2 = \frac{3q^2r^2}{2t^2};$$

故得：$\sigma_s = \dfrac{\sqrt{3}qr}{2t}$； 或：$\tau_s = \dfrac{qr}{2t}$；



解（2）：该杆内任意一点的应力状态为单向应力状态，（受力如图示）

$$\sigma_x = \frac{P}{F} + \frac{My}{J_z} = \sigma_1$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

且知，当杆件产生屈服时，首先在杆件顶面各点屈服，故知 $y = +\dfrac{h}{2}$

得：$\sigma_1 = \sigma_x = \dfrac{P}{bh} + \dfrac{6M}{bh^2}$； $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

若采用 **Tresca** 屈服条件，则有：

$$\tau_{\max} = \tau_s = \frac{\sigma_s}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \left(\frac{P}{bh} + \frac{6M}{bh^2}\right)\frac{1}{2};$$

故得：$\sigma_s = \dfrac{1}{bh}\left(P + \dfrac{6M}{h}\right)$； 或：$\tau_s = \dfrac{1}{2bh}\left(P + \dfrac{6M}{h}\right)$；

若采用 **mises** 屈服条件，则有：

$$2\sigma_s^2 = 6\tau_s^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_1^2 = 2\left(\frac{P}{bh} + \frac{6M}{bh^2}\right)^2$$

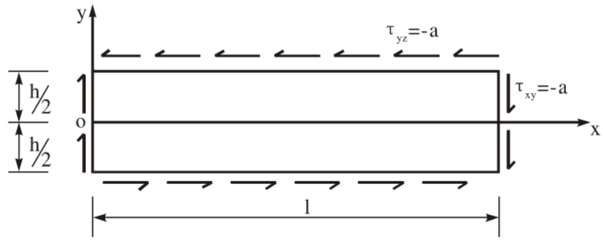
故得：$\sigma_s = \dfrac{1}{bh}\left(P + \dfrac{6M}{h}\right)$；或：$\tau_s = \dfrac{1}{\sqrt{3}bh}\left(P + \dfrac{6M}{h}\right)$；

一般以 σ_s 为准（拉伸讨验）

第五章 平面问题直角坐标解答

5-2：给出$\varphi = axy$；（**1**）：捡查φ是否可作为应力函数。（**2**）：如以φ为应力函数，求出应力分量的表达式。（**3**）：指出在图示矩形板边界上对应着什么样的边界力。（坐标如图所示）

解：将$\varphi = axy$代入$\nabla^4\varphi = 0$式



得：$\nabla^2\nabla^2\varphi = 0$ 满足。

故知$\varphi = axy$可作为应力函数。

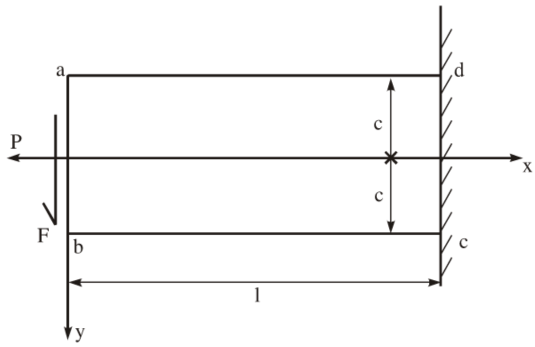
求出相应的应力分量为：

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0；\ \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0；\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = -a；$$

上述应力分量$\sigma_x = \sigma_y = 0$；$\tau_{xy} = -a$在图示矩形板的边界上对应着如图所示边界面力，该板处于纯剪切应力状态。

5-4：试分析下列应力函数对一端固定的直杆可解出什么样的平面问题。

$$\varphi = \frac{3F}{4c}\left(xy - \frac{xy^3}{3c^2}\right) + \frac{q}{2}y^2；$$



解：首先将函数φ式代入$\nabla^2\varphi = 0$式知，满足。故该函数可做为应力函数求得应力分量为：

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{3F}{4c}\left(-\frac{2x}{c^2}y\right) + q = q - \frac{3F}{2c^3}xy；\ \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0；$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = -\frac{3F}{4c}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) = -\frac{12F}{2h^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = -\frac{F}{2J_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)；$$

显然上述应力分量在 ***ad*** 边界及 ***bc*** 边界上对应的面力分量均为零，而在 ***ad*** 边界上则切向面力分量呈对称于原点 ***o*** 的抛物线型分布，指向都朝下，法向面力为均布分布的载荷 ***q***。

显然法向均布载荷 ***q*** 在该面上可合成为一轴向拉力 ***p*** 且 ***p=2cq***；而切向面力分量在该面上则可合成为一切向集中力：

$$F = \int_{-h/2}^{h/2} F dy = \int_{-h/2}^{h/2} -\tau_{xy} dy = +\frac{6F}{h^3}\left[\int_{-h/2}^{h/2}\frac{h^2}{4}dy - \int_{-h/2}^{h/2}y^2 dy\right] = \frac{-6F}{3h^3}y^3\Big|_{-h/2}^{h/2} + \frac{6Fh^2}{4h^3}y\Big|_{-h/2}^{h/2}$$

$$= -\frac{2F}{h^3}\left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right) + \frac{6Fh^2}{4h^3}\left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) = -\frac{F}{2} + \frac{3F}{2} = +F$$

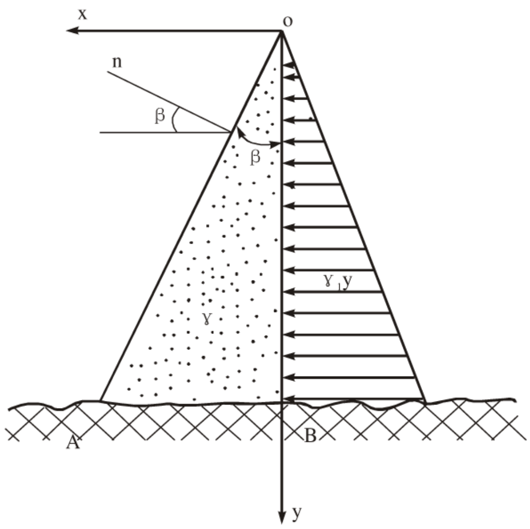
而 ***cd*** 边界则为位移边界条件要求，***u*=0**，***v*=0**，***w*=0** 以及转角条件。

由以上分析可知，该应力函数对于一端固定的直杆（坐标系如图示），可解决在自由端受轴向拉伸（拉力为 ***p*=2*cq***）和横向集中力 **F** 作用下的弯曲问题。（如图示）

5-6：已求得三角形坝体的应力　为：

$$\begin{cases}\sigma_x = ax + by \\ \sigma_y = cx + dy \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = -dx - ay - \gamma x \\ \tau_{xz} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0\end{cases}$$

其中 γ 为坝体的材料容重， γ_1 为水的容重，试据边界条件求出常数 ***a***、***b***、***c***、***d*** 的值。



解：据图示列出水坝 **OA** 边界和 **OB** 边界面上的应力边界条件：

OB 边：***x*=0**， ***l*=cos(180°)=-1**　，　***m*=0**， $T_x = \gamma y$， $T_y = 0$

故得：$\begin{cases}-\sigma_x = T_x = \gamma_1 y & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a) \\ -\tau_{xy} = T_y = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)\end{cases}$

OA 边：$x = y\,\mathrm{tg}\,\beta$ ，$l = \cos\beta$，$m = \cos(90° + \beta) = -\sin\beta$ ，$T_x = T_y = 0$

故有：$\begin{cases}\sigma_x \cos\beta - \tau_{xy}\sin\beta = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(c) \\ \tau_{yx}\cos\beta - \sigma_y \sin\beta = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(d)\end{cases}$

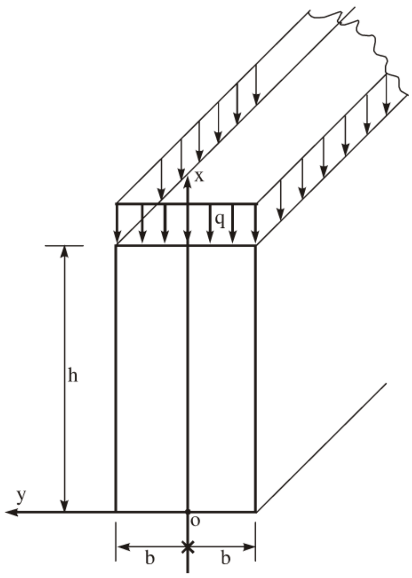
将 $\sigma_x\big|_{x=0} = ax + by = by$ 代入（**a**）式得：$b = -\gamma_1$；

将：$\tau_{xy}\big|_{x=0} = -ay$ 代入（**b**）式得：$-(-ay) = 0$ 得 **a=0**；

将σ_x、τ_{xy}代入（**c**）式得：$d=\gamma_1 ctg^2\beta-\gamma$；

将σ_y、τ_{yx}代入（**d**）式得：$c=\gamma ctg\beta-2\gamma_1 ctg^3\beta$；

5-7：很长的直角六面体，在均匀压力 q 的作用下，放置在绝对刚性和光滑和基础上，不计体力。试确定其应力分量和位移分量。



解：由题意知，该问题为一平面应变问题。由于不计体力所以平面应力与平面应变的变形协调方程是一样的，故可取一单位长度的直角六面体来研究其应力状态。当求知应力分量函数后，再由平面应变的本构关系求得应变分量，进一步积分再利用有关位移边界条件确定积分常数后求得位移分量。

这里我们采用逆解法，首先据题目设应力函数$\varphi=ay^2$显然φ式满足双调和方程式$\nabla^4\varphi=0$。相应应力分量为：$\sigma_x=2a$，$\sigma_y=0$，$\tau_{xy}=0$ 显然直角六面体左右两面的应力边界条件自动满足。

对于项边：$y=h$, $l=1,m=0,T_x=-q$, $T_y=0$ 则可定出：$a=\frac{-q}{2}$；

对于底边：$y=0$, $l=-1,m=0,T_x=q$, $T_y=0$ 同样定出：$a=-\frac{q}{2}$；

因此满足该问题所有应力边界条件的解为：

$$\sigma_x=-q\text{，}\sigma_y=0\text{，}\tau_{xy}=\tau_{yx}=0$$

应这分量为：

$$\varepsilon_x=\frac{1-v^2}{E}\sigma_x=\frac{v^2-1}{E}q\text{，}\varepsilon_y=\frac{(1+v)v}{E}q\text{，}\gamma_{xy}=0$$

积分得：$\begin{cases} u=\dfrac{v^2-1}{E}qx+f\left(y\right)+A \\ v=\dfrac{\left(1+v\right)v}{E}qy+f_1\left(x\right)+B \\ w=0 \end{cases}$

利用位移边界条件确定积分常数：

（1） 当 $x=0$, $y=0$ 时，$u=0$ 则：$A=0$

（2） 当 $x=0$, $y=0$ 时，$v=0$ 则：$B=0$

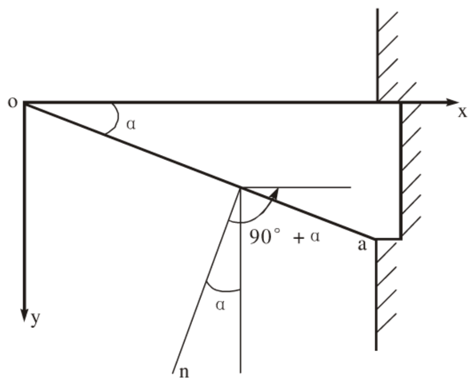
（3） 当 $x=0$ 时，$u=0$ 则：$f\,(y)=0$

（4） 当 $y=0$ 时，$v=0$ 则：$f_1(x)=0$

因此知该问题的位移分量为：

$$u=\frac{v^2-1}{E}qx\ ; \qquad v=\frac{\left(1+v\right)v}{E}qy\ ; \qquad w=0$$

5-10: 设图中的三角形悬臂梁只受重力作用。而梁的比重为 p，试用纯三次式：$\varphi=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ 的应力函数求解应力分量?



解:显然 φ 式满足 $\nabla^2\varphi=0$ 式,可做为应力函数,相应的应力分量为:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x&=2cx+6by \\ \sigma_y&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x}-py=6ax+2by-py \\ \tau_{xy}&=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=-2bx-2cy \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (a)$$

边界条件：

***ox* 边：*y*=0 , *l*=0 ,*m*=-1, $F_x=F_y$=0**

则：2*bx*=0　得：*b*=0

-6*ax*=0　　得：*a*=0

***oa* 边：** $y = xtg\alpha$ ，$l=\cos\left(90^\circ+\alpha\right)=-\sin\alpha$ ；$m=\cos\alpha$ ；$F_x=F_y=0$

则：$\begin{cases} -\left(2cx+6dxtg\alpha\right)\sin\alpha-2cxtg\alpha\cdot\cos\alpha=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a) \\ 2cxtg\alpha\cdot\sin\alpha-pxtg\alpha\cdot\cos\alpha=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b) \end{cases}$

由（*c*） 式得：$c=\dfrac{p}{2}ctg\alpha$；

代入(*b*)式得：$d=-\dfrac{p}{3}ctg^2\alpha$；

所以（*a*）式变为：

$$\begin{cases} \sigma_x = pxctg\alpha-2pyctg^2\alpha \\ \sigma_y=-py \\ \tau_{xy}=-pyctga \end{cases}$$

第六章　平面问题的极坐标解

6-3:在极坐标中取$\varphi = A\ln r + Cr^2$, 式中 **A** 与 **C** 都是常数。(**i**)：检查φ是否可作应力函数？(**ii**)：写出应力分量表达式？(**iii**)：在 **r=a** 和 **r=b** 的边界上对应着怎样的边界条件？

解：首先将φ式代入$\nabla^4\varphi=0$式，其中：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=A\frac{1}{r}+2Cr;\quad \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{A}{r^2}+2C;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=-\frac{A}{r^2}+2C;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0.$$

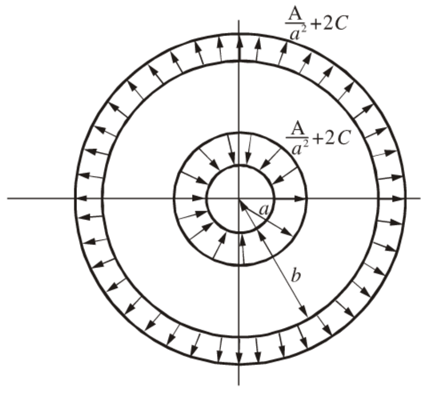
故：$$\nabla^4\varphi=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(-\frac{A}{r^2}+2C+\frac{A}{r^2}++2C+0\right)=0;$$

故：φ 式可作为应力函数。应力分量为：

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=\frac{A}{r^2}+2C;\qquad (a)$$

$$\sigma_\theta=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=-\frac{A}{r^2}+2C;\qquad (b)$$

$$\tau_{r\theta}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}=0;\qquad (c)$$



对于右图所示圆环，上述应力分量对应着如下边界条件：

当 **r=a** 时（内环）：（**l=-1， m=0.**）

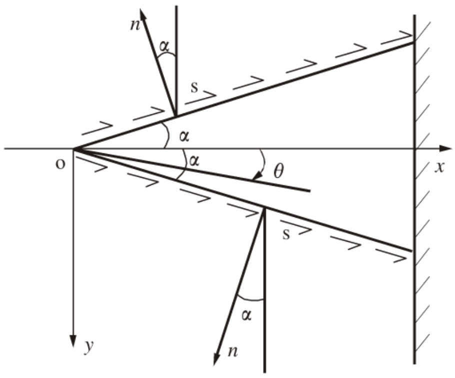
$$F_r=-\sigma_r\Big|_{r=a}=-\left(\frac{A}{a^2}+2C\right);\quad F_\theta=-\tau_{r\theta}\Big|_{r=a}=0;$$

当 **r= b** 时（外环）：（**l=1，m=0.**）

$$F_r=\sigma_r\Big|_{r=b}=\left(\frac{A}{b^2}+2C\right);\quad F_\theta=\tau_{r\theta}\Big|_{r=b}=0;$$

6-5：试确定应力函数 $\varphi=cr^2(\cos 2\theta-\cos 2\alpha)$ 中的常数 **c** 值。使满足题 **6-5** 图中的条件：

（**1**）在 $\theta=\alpha$ 面上，$\sigma_\theta=0$ $\tau_{r\theta}=s$;（**2**）在 $\theta=-\alpha$ 面上，$\sigma_\theta=0$ $\tau_{r\theta}=-s$; 并证明楔顶不有集中力与力偶作用。



解：首先将 φ 式代入 $\nabla^4\varphi=0$ 式，知其满足,故可做为应力函数。相应的应力分量为：

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}=2cr(\cos 2\theta-\cos 2\alpha)$; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-2cr^2\sin 2\theta$; $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=2c(\cos 2\theta-\cos 2\alpha)$; $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=-4cr^2\cos 2\theta$;

$\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}=-4cr\sin 2\theta$; 则得：

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=-2c(\cos 2\theta-\cos 2\alpha)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

$$\sigma_\theta=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=2c(\cos 2\theta-\cos 2\alpha)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

$$\tau_{r\theta}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}=2c\sin 2\theta\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(c)$$

边界条件：当 $\theta=\alpha$ 时，$\sigma_\theta=0.$ $\tau_{r\theta}=s$;则：$-2c(\cos 2\alpha-\cos 2\alpha)=0$ 得 $0=0.$ 自动满足

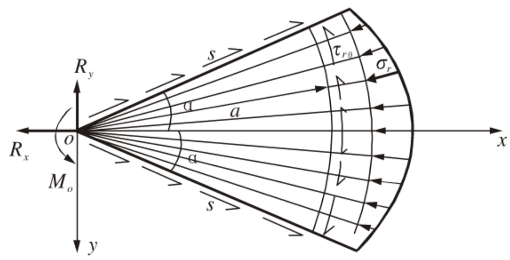
$2c\sin 2\alpha=s.$ 得：$c=\dfrac{s}{2\sin 2\alpha}$; $\theta=-\alpha$ 时. $\sigma_\theta=0,$ $\tau_{r\theta}=-s$; 当 $-2c[\cos(-2\alpha)-\cos 2\alpha]=0.$

因$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, 则$0=0$, $2c\sin(-2\alpha)=-2c\sin 2\alpha=-s$ 得 $c=\dfrac{s}{2\sin 2\alpha}$; 故得：

$$\varphi=\frac{sr^2}{2\sin 2\alpha}(\cos 2\theta-\cos 2\alpha); \qquad (e)$$

$$\sigma_r=\frac{-s}{\sin 2\alpha}(\cos 2\theta+\cos 2\alpha); \sigma_\alpha=\frac{s}{\sin 2\alpha}(\cos 2\theta-\cos 2\alpha); \tau_{r\theta}=\frac{s}{\sin 2\alpha}\cdot\sin 2\theta \qquad (f)$$

由（e）式可知，该应力函数在 **r=0** 处并不适用，所以（*f*）式也不反映 ***o*** 点处的应力状态。如果我们以 ***a*** 为半径截取一部分物体为研究对象(见右图示)，并假设在 ***o*** 点处存在集中力 R_x、R_y、及集中力偶 M_o,那么这部分物体在 R_x、R_y、M_o、以及 *s*、σ_r 和 $\tau_{r\theta}$ 这一力系的作用下应保持平衡状



态。但事实上，由于 *s* 及 σ_r 力的作用线都通过 ***o*** 点，$\tau_{r\theta}$ 及 σ_r、**s** 的分布又都对称为 **x** 轴，所以当考虑 $\sum M_o(\bar{F})=0$, 及 $\sum F_y=0$ 两平衡条件时，要求 $M_o=R_y=0$ 否则该物体将不平衡。

$$R_y=\int_{-\alpha}^{\alpha}[\sigma_r\sin\theta+\tau_{r\theta}\cos\theta]rd\theta=0; \quad M_o=-\int_{-\alpha}^{\alpha}[\sigma_r\sin\theta+\tau_{r\theta}\cos\theta]r^2d\theta=0$$

如果存在 R_x，则由楔形尖项处承受集中载荷的应力的讨论知（**8-25**）式，在楔形体内就一定存在有随 **r** 和 θ 而变化的应力分量 σ_r。然而我们在上述讨论中所得结果（*f*）中第一式中，并不存在随 **r** 而变化的这部分 σ_r 应力，所以要求 $R_x=0$。因此知，在楔顶（就题 **8-5** 图所示问题）不存在集中力与集中力偶的作用。

$$\left(R_x=\int_{-\alpha}^{\alpha}[\sigma_r\cos\theta-\tau_{r\theta}\sin\theta]rd\theta=-2sr\cos\alpha \qquad (\text{与边界力}s\text{平衡})\right)$$

（F_γ**=0**）和大小等于 $\dfrac{c}{a^2}$ 的负的切向面力分量 $F_\theta=-\dfrac{c}{a^2}$.（θ 以逆时针转向为正）。如果将内圆环上的切向面力分量 F_θ 对中心点 **0** 取矩，则得：$F_\theta\cdot 2\pi a\cdot a\cdot=\dfrac{c}{a^2}\cdot 2\pi\cdot a^2=M$. 故：$c=\dfrac{M}{2\pi}$；于是上式得：

$$\sigma_r = 0; \qquad \sigma_\theta = 0; \qquad \tau_{r\theta} = \frac{M}{2\pi r^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

①则当 ***r=a*** 时，对于内环边界对应着面力分量：$F_\theta = \frac{-M}{2\pi a^2}$；$F_r = 0$；

当 ***r=b*** 时，对于外环边界对应着面力分量：$F_\theta = \frac{M}{2\pi b^2}$；$F_r = 0$；

②如果：***r=a***（内环），***r=b***→∞.则为一无限大平板上挖有一半径为 ***a*** 的圆孔。在孔壁上作用有切向面力分量：$F_\theta = \frac{-M}{2\pi a^2}$；

③如果：***r=a***→**0**，***r=b***→∞，则为一无限大平板，在 ***o*** 点作用有一集中力偶 **M**。

第七章　柱体的扭转

7-1：试用半逆解法求圆截面柱体的扭转问题的解。

解：圆截面柱体，设其半径为 ***a***，则圆截面的边界的方程为：$x^2 + y^2 = r^2 = a^2 \ldots\ldots (a)$

设柱端作用有扭矩 M_T。采用半逆解法。据材料力学的有关理论知，该问题的应力解为：

$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yx} = \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{zy} = Ax; \quad \tau_{zx} = -Ay;$ 或 $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{zr} = \tau_{rz} = \tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} = 0; \quad \tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = Ar;$

所以由边界方程、上述应力分解以及 $\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ 或 $: \tau_{z\theta} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}$;并设满足 $\varphi_c = 0$（设边界 $r = a$）的应力函数为:

$$\varphi(r) = B\left(r^2 - a^2\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

$$\varphi(x, y) = B\left(x^2 + y^2 - a^2\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (b)$$

上(a)、(b)式中的 B 为待定常数。将(a)(b)分别代入应满足的应变协调方程得：

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -2G\theta \cdots\cdots\cdots\cdots (c)$$

得：$B = -\frac{1}{2}G\theta$; 故 $\varphi = -\frac{1}{2}G\theta\left(r^2 - a^2\right)$, $\varphi = -\frac{1}{2}G\theta\left(x^2 + y^2 - a^2\right) \cdots\cdots\cdots (d)$

将(d)式代入 $M_T = 2\iint \varphi dxdy$ 式得：$M_T = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}G\theta\right)\left[\iint x^2 dxdy + \iint y^2 dxdy - a^2 \iint dxdy\right]$

因：$\iint x^2 dxdy = \frac{\pi a^4}{4}; \quad \iint y^2 dxdy = \frac{\pi a^4}{4}; \quad \iint dxdy = \pi a^2; M_T = \frac{\pi G\theta a^4}{2}$;得 $: \theta = \frac{2M_T}{\pi G a^4}$

$$\varphi=-\frac{M_T}{\pi a^4}\left(r^2-a^2\right)=-\frac{M_T}{\pi a^4}\left(x^2+y^2-a^2\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(e)$$

由(e)式求得应力分量如下：

$$\tau_{zx}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{2M_T}{\pi a^4}y;\quad \tau_{zy}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{2M_T}{\pi a^4}x;\quad \tau_{z\theta}=\tau_{全}=\left(\tau_{zx}^2+\tau_{zy}^2\right)^{\frac{1}{2}}=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{2M_T}{\pi a^4}r;$$

位移分量为：$u=-\theta\cdot zy=-\frac{2M_T}{G\pi a^4}\cdot zy;\qquad v=\theta zx=\frac{2M_T}{\pi Ga^4}\cdot zx;\qquad w=0;$

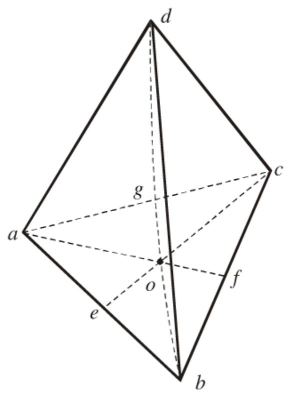
或： $S=\left(u^2+v^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{2M_T}{\pi Ga^4}\cdot zr;\qquad w=0;$

由式:

$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{G}\frac{\partial\varphi}{\partial y};\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{1}{G}\frac{\partial\varphi}{\partial x};$ 及上u、v式得：$\frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=0$。积分得：

$w=f(y), w=f_1(x)$ 只能等于一常数w_0，而w_0就是圆柱体在z方向的刚性位移，略去刚性位移，则$w=0$。只能等于一常数w_0,而w_0就是圆体在y方向的刚性位移略去,则$w=0$

7-10：求边长为 2a 的等边三角形截面柱体的极限扭矩。



解：做出边长为 2a 的等边三角形的三棱锥体如右图。显然：

$$\overline{ab}=\overline{bc}=\overline{ca}=2a,\quad \overline{ae}=\overline{eb}=\overline{bf}=\overline{fc}=\overline{cg}=\overline{ga}=a,\quad \overline{eo}=\overline{fo}=\overline{go}=atg30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}a;$$

设:od=h, 则：$tg\alpha=\frac{h}{\overline{eo}}=\frac{3h}{\sqrt{3}a}$ 令：$tg\alpha=K$，则：$h=\frac{\sqrt{3}}{3}aK$

故：$M_s = 2V = 2 \cdot \frac{1}{3} Sh = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(2a\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{3} aK = \frac{2}{3} a^3 K$；上式中 K 为纯剪屈服应力。