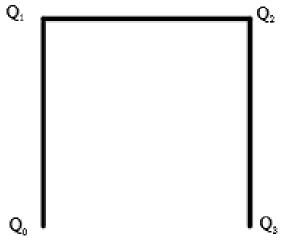
例一、反求Bezier曲线的控制顶点



已知 3 次 Bezier 曲线 $C(t)$ 过四个点 $Q_0(0,0)$、$Q_1(0,1)$，$Q_2(1,1)$、$Q_3(1,0)$，反求一组 Bezier 曲线的控制顶点 $P_i(i=0,1...3)$。

解：

记

$$C(t)=\sum_{i=0}^{3}P_iB_{i,3}(t)=P_0B_{0,3}(t)+P_1B_{1,3}(t)+P_2B_{2,3}(t)+P_3B_{3,3}(t)$$ 令

$$C(\frac{i}{3})=Q_i,i=0,1,2,3$$

即：

$$\begin{cases}Q_0=P_0\\ Q_1=P_0\cdot C_3^0\cdot(1-\frac{1}{3})^3\cdot(\frac{1}{3})^0+P_1\cdot C_3^1\cdot(1-\frac{1}{3})^2\cdot\frac{1}{3}+P_2\cdot C_3^2\cdot(1-\frac{1}{3})^1\cdot(\frac{1}{3})^2+P_3\cdot C_3^3\cdot(1-\frac{1}{3})^0\cdot(\frac{1}{3})^3\\ Q_2=P_0\cdot C_3^0\cdot(1-\frac{2}{3})^3\cdot(\frac{2}{3})^0+P_1\cdot C_3^1\cdot(1-\frac{2}{3})^2\cdot\frac{2}{3}+P_2\cdot C_3^2\cdot(1-\frac{2}{3})^1\cdot(\frac{2}{3})^2+P_3\cdot C_3^3\cdot(1-\frac{2}{3})^0\cdot(\frac{2}{3})^3\\ Q_3=P_3\end{cases}$$

亦即：

$$\begin{cases}Q_0=P_0\\ Q_1=P_0\cdot\frac{8}{27}+P_1\cdot\frac{4}{9}+P_2\cdot\frac{2}{9}+P_3\cdot\frac{1}{27}\\ Q_2=P_0\cdot\frac{1}{27}+P_1\cdot\frac{2}{9}+P_2\cdot\frac{4}{9}+P_3\cdot\frac{8}{27}\\ Q_3=P_3\end{cases}$$

整理得：

$$\begin{cases}Q_0=P_0\\ 27Q_1=8P_0+12P_1+6P_2+P_3\\ 27Q_2=P_0+3P_1+12P_2+8P_3\\ Q_3=P_3\end{cases}$$

将方程组中的（1）、（4）式代入（2）、（3）式，有：

$$\begin{cases}12P_1+6P_2=27Q_1\text{-}8P_0\text{-}P_3=27Q_1\text{-}8Q_0\text{-}Q_3\\ 6P_1+12P_2=27Q_2\text{-}P_0\text{-}8P_3=27Q_2\text{-}Q_0\text{-}8Q_3\end{cases}$$

上述方程组（1）×2-（2），有：

$$18P_1=\text{-}15Q_0+54Q_1\text{-}27Q_2+6Q_3$$

于是有：

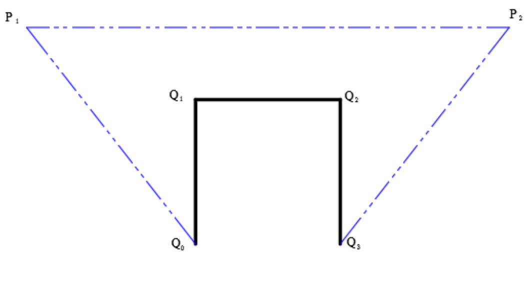
$$P_1=\frac{\text{-}15Q_0+54Q_1\text{-}27Q_2+6Q_3}{18}=\frac{\text{-}5Q_0+18Q_1\text{-}9Q_2+2Q_3}{6}$$

同理可得：

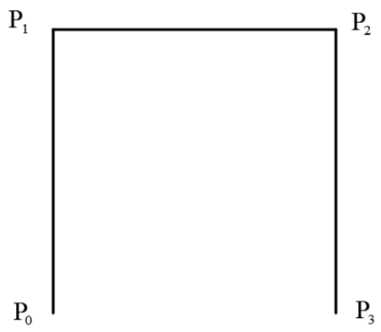
$$P_2=\frac{2Q_0\text{-}9Q_1+18Q_2\text{-}5Q_3}{6}$$

代入点 Q_0、Q_1、Q_2、Q_3 的坐标值，可得：

$P_0=(0,0)$、$P_1=(-\frac{7}{6},\frac{3}{2})$，$P_2=(\frac{13}{6},\frac{3}{2})$、$P_3=(1,0)$



例二、Bezier 曲线的升阶



已知 3 次 Bezier 曲线 $C(t)$ 的控制顶点为：$P_0=(0,0)$、$P_1=(0,1)$、$P_2=(1,1)$、$P_3=(1,0)$，将其升阶到 4 次。求出升阶后的控制顶点 $P_j^{(1)}(j=0,1...4)$。

解: 升阶后的控制顶点与原控制顶点的关系为：

$$P_j^{(1)}C_{n+1}^j = P_j C_n^j + P_{j-1}C_n^{j-1}$$

即：

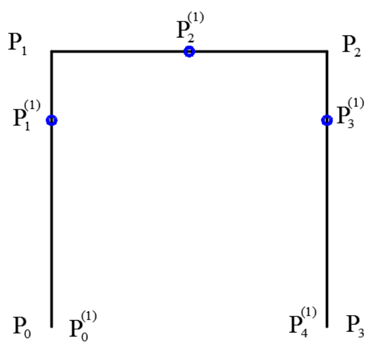
$$P_j^{(1)} = \frac{j}{n+1}P_{j-1} + \left(1-\frac{j}{n+1}\right)P_j$$

取 $n=3$,代入上式有：

$$\begin{cases} P_0^{(1)} = P_0 \\ P_1^{(1)} = \frac{1}{4}P_0 + \frac{3}{4}P_1 \\ P_2^{(1)} = \frac{2}{4}P_1 + \frac{2}{4}P_2 \\ P_3^{(1)} = \frac{3}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_3 \\ P_4^{(1)} = P_3 \end{cases}$$

将原控制顶点的坐标值代入上式，得：

$$\begin{cases} P_0^{(1)} = P_0 = (0,0) \\ P_1^{(1)} = \frac{1}{4}P_0 + \frac{3}{4}P_1 = (0,\frac{3}{4}) \\ P_2^{(1)} = \frac{2}{4}P_1 + \frac{2}{4}P_2 = (\frac{1}{2},1) \\ P_3^{(1)} = \frac{3}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_3 = (1,\frac{3}{4}) \\ P_4^{(1)} = P_3 = (1,0) \end{cases}$$



例三、有理 Bezier 曲线—圆的有理 Bezier 表示

给出圆心在原点，半径为 1 的圆的有理二次 Bezier 表示。

解：我们知道，圆心在原点，半径为 1 的圆可以表示为有理多项式：

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t)=\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases} \tag{1}$$

有理二次 Bezier 表示为：

$$C(t)=\frac{\sum_{i=0}^{2} h_i P_i B_{i,2}(t)}{\sum_{i=0}^{2} h_i B_{i,2}(t)}=\frac{h_0P_0B_{0,2}(t)+h_1P_1B_{1,2}(t)+h_2P_2B_{2,2}(t)}{h_0B_{0,2}(t)+h_1B_{1,2}(t)+h_2B_{2,2}(t)} \tag{2}$$

其中：

$$B_{0,2}(t)=(1-t)^2,\ B_{1,2}(t)=2t(1\text{-}t),\ B_{2,2}(t)=t^2$$

由于式（1）和式（2）等价，分母相等，有：

$$h_0B_{0,2}(t)+h_1B_{1,2}(t)+h_2B_{2,2}(t)=1+t^2$$

经整理，有：

$$h_0+(2h_1\text{-}2h_0)t+(h_0\text{-}2h_1+h_2)t^2=1+t^2$$

于是有：

$$h_0=1,h_1=1,h_2= \tag{3}$$

再由于式（1）和式（2）的分子相等，有：

$$(1-t^2,2t)=h_0P_0B_{0,2}(t)+h_1P_1B_{1,2}(t)+h_2P_2B_{2,2}(t)$$

整理得，

$$(1,0)+2(0,1)t+(-1,0)t^2=P_0+2(P_1-P_0)t+(P_0-2P_1+2P_2)t^2$$

于是有，

$$P_0=(1,0),P_1=(1,1),P_0=(0,1) \tag{4}$$

将式（3）、（4）代入式（2），可得圆的有理二次 Bezier 表示，即为式（1）。