题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							
批阅人							

上海交通大学 2014-2015 第一学期《矩阵理论》试卷(A)卷

班级号____________学号____________姓名____________成绩____________

一. 单项选择题: (共 15 分,每题 3 分)

1. $n(\geq 2)$阶实奇异矩阵$\mathbf{A}$的特征多项式与最小多项式相等，则$\mathbf{A}$的伴随矩阵列空间的维数为(　　　)

A. 0　　B. 1　　C. n-1　　D. n

2. 设σ是n维线性空间$\mathbf{V}$到自身的线性变换，下列条件中与其它三个条件不同的一个条件是(　　　)

A. $\boldsymbol{\sigma}$是单映射　　B. $\dim(\mathrm{Im}(\boldsymbol{\sigma})) = n$

C. $\boldsymbol{\sigma}$是一一对应　　D. $\boldsymbol{\sigma}$适合条件$\boldsymbol{\sigma}^n = \mathbf{0}$

3. 设$\mathbf{A}$是实的反对称矩阵，则下列命题正确的是(　　　)

A. $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$是实的反对称矩阵　　B. $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$是正交矩阵

C. $\mathbf{cos\,A}$是实的反对称矩阵　　D. $\mathbf{sin\,A}$是实的对称矩阵

4. 设方阵$\mathbf{A}$幂收敛到方阵$\mathbf{B}$，则下列说法

① $|\mathbf{B}| = 0$　　② $\mathbf{B}$是幂等矩阵

③ $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}$　　④ $\mathrm{r}(\mathbf{A}) \geq \mathrm{r}(\mathbf{B})$

正确的有(　　　)个

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 设n维向量$\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{n}}(1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)^{\mathrm{T}}, n \geq 2$，$\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$，其中$\mathbf{I}$为单位矩阵，则下列选项正确的是(　　　)

A. $\|\mathbf{B}\|_1 = 1$　　B. $\|\mathbf{B}\|_\infty = 1$　　C. $\|\mathbf{B}\|_2 = 1$　　D. $\|\mathbf{B}\|_F = 1$

二. 填空题: (共 15 分,每题 3 分)

1. 设 $\mathbf{e}^{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} \\ 0 & \mathrm{e}^2 \end{pmatrix}$,则$\mathbf{A}$ =(　　　　　　　　　　).

2. 设n阶方阵$\mathbf{A}$的最小多项式为$\lambda^k(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_{n-k})$，其中$n \geq k \geq 2$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-k}$全不为 0，则 $\dim \mathbf{R}(\mathbf{A}^{k-1})$=(　　　　　　　　　　).

3. 设$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 $\mathbf{sinA}$的 Jordan 标准形$\mathbf{J}_{\mathbf{sinA}}$ =(　　　　　　　　　　).

4. 矩阵$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$\mathbf{A}$的 Cholesky 分解$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}$，则下三角矩阵$\mathbf{L}$ = (　　　　　　　　　　).

5. 设给定矩阵$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$，矩阵空间$\mathbf{R}^{2\times 2}$上线性变换$\mathbf{T}$为: $\mathbf{T}(\mathbf{X}) = k\mathbf{X} + \mathbf{AXB}$，$\forall \mathbf{X} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$．$\mathbf{T}$是可逆变换当且仅当参数k满足条件(　　　　　　　　　　).

三. (本题 15 分)

(1) 设$\mathbf{V}$是有限维欧氏空间, $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$是一个单位向量, $\mathbf{V}$上线性变换$\boldsymbol{\sigma}$定义为:

$$\text{对任意}\mathbf{y} \in \mathbf{V},\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - a(\mathbf{y}, \mathbf{u})\mathbf{u},$$

这里$(\mathbf{y}, \mathbf{u})$表示向量$\mathbf{y}$和$\mathbf{u}$之间的内积. 试求非 0 实数 a, 使得$\boldsymbol{\sigma}$是$\mathbf{V}$上正交变换.

(2) 多项式空间$\mathbf{R}[x]_3$中的内积定义如下: 对任意$f(x), g(x) \in \mathbf{R}[x]_3$, $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. 试求$\mathbf{R}[\mathrm{x}]_3$中向量$\boldsymbol{\alpha} = 1$和$\boldsymbol{\beta} = x$的长度; 并求正实数$k$和单位向量$\mathbf{u} \in \mathbf{R}[x]_3$, 使得上述正交变换$\boldsymbol{\sigma}$将向量$\boldsymbol{\alpha}$变成$k\boldsymbol{\beta}$.

四. (本题 15 分)

设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(1) 求矩阵$\mathbf{A}$的一个满秩分解$\mathbf{LR}$, 使得$\mathbf{L}$的第一列为矩阵$\mathbf{A}$的最后一列, 并给出$\mathbf{A}$的列空间$\mathbf{R}(\mathbf{A})$的一组基;

(2) 求$\mathbf{A}$的左零化空间$\mathrm{N}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$的一组基;

(3) 设$\mathbf{b}=(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^{\mathrm{T}}$, 求向量 $\mathbf{b}$ 在线性空间$\mathbf{R}(\mathbf{A})$上的最佳近似.

(4) 设$\boldsymbol{\sigma}$是线性空间$\mathbf{R}^4$上的正交投影变换, 且满足$\boldsymbol{\sigma}$的像空间$\mathrm{Im}(\boldsymbol{\sigma})=\mathbf{R}(\mathbf{A})$, 试求$\boldsymbol{\sigma}$在标准基$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4$下的矩阵.

五. (本题 15 分)

矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 5\\ 1 & -1 & -4\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

(1) 求矩阵$\mathbf{A}$的 Jordan 标准形$\mathbf{J}$;

(2) 试求可对角化矩阵$\mathbf{D}$和幂零矩阵$\mathbf{N}$, 满足$\mathbf{A}=\mathbf{D}+\mathbf{N}$, 且$\mathbf{DN}=\mathbf{ND}$.

(3) 计算$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$;

(4) 设$\mathbf{x}(0)=(1\quad 2\quad 3)^{\mathrm{T}}$. 求定解问题$\mathbf{x}'(t)=\mathbf{Ax}(t)$的解.

六. (本题 15 分)

设 $\boldsymbol{\sigma}$ 是由线性空间$\mathbf{R}^m$到线性空间$\mathbf{R}^n$上的线性变换，其中$m \le n$.

(1) 试证：存在$\mathbf{R}^m$到$\mathbf{R}^m$上的幂等变换$\boldsymbol{\tau}$,及$\mathbf{R}^m$到$\mathbf{R}^n$上的单变换$\boldsymbol{\varphi}$,使得$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\tau}$.

(2) 令$m = 2, n = 4$，线性变换$\boldsymbol{\sigma}$为:$\boldsymbol{\sigma}(x, y)^{\mathrm{T}} = (x, y, 2x, -y)^{\mathrm{T}}$. 试求$\mathbf{R}^2$上一组标准正交基,及$\mathbf{R}^4$上一组标准正交基，使得线性变换$\boldsymbol{\sigma}$在这两组基下的矩阵为对角线元素均非负的$4 \times 2$对角矩阵.

七. (本题 10 分)

n阶方阵$\mathbf{X}$的迹$\mathrm{tr}(\mathbf{X})$是$\mathbf{X}$的对角线上元素之和.

证明变换$\mathrm{tr}: \mathbf{X} \to \mathrm{tr}(\mathbf{X})$是线性空间$\mathbf{M}_\mathrm{n}(\mathbf{R})$到$\mathbf{R}$的满足性质: $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{XY}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{YX})$及

$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{I}) = n$的唯一的线性变换.