**A 卷第 3 题.　B 卷第 4 题(15 分)**

(1) $\left(\sigma(x),\sigma(x)\right) = (x - a(x,u)u, x - a(x,u)u)$

$= (x,x) - a(x,u)^2 - a(x,u)(u,x) + a^2(x,u)^2(u,u) = (x,x)$　**(4 分)**

这样，$2a(x,u)^2 = a^2(x,u)^2$

所以当$a = 2$ 时, $\sigma$是$V$上正交变换.　**(2 分)**

**(2)** $\alpha$的长度为:$\sqrt{(\alpha,\alpha)} = \sqrt{\int_0^1 1dx} = 1$　**(2 分)**

$\beta$的长度为:$\sqrt{(\beta,\beta)} = \sqrt{\int_0^1 x^2dx} = \sqrt{\frac{1}{3}}$　**(2 分)**

考虑$\alpha - 2(\alpha,u)u = k\beta$，必须有$(\alpha,\alpha) = (k\beta,k\beta) = k^2(\beta,\beta)$

得到正实数$k = \sqrt{3}$.　**(2 分)**

这样，$2(\alpha,u)u = \alpha - \sqrt{3}\beta = 1 - \sqrt{3}x$. 令$u = t(1 - \sqrt{3}x)$,考虑

$$1 = (u,u) = \int_0^1 t^2\left(1 - \sqrt{3}x\right)^2 dx = t^2(2 - \sqrt{3})$$

所以$t = \pm\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. 得到$u = \pm\sqrt{2 + \sqrt{3}}(1 - \sqrt{3}x)$　**(3 分)**

**A 卷第 4 题.　B 卷第 3 题(15 分)**

(1)对矩阵$B=\begin{pmatrix}-1&0&0&1&0\\1&1&-1&0&1\\-2&-1&1&1&-1\\0&1&-1&1&1\end{pmatrix}$作初等行变换化为 Hermite 标准形为:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&-1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad \textbf{(2 分)}$$

所求满秩分解为:

$$A=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\\-2&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1&0&1\\1&-1&1&1&0\end{pmatrix}\qquad \textbf{(2 分)}$$

$R(A)$ 的一组基为$\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$　　**(2 分)**

(2)解方程组$(x_1\quad x_2\quad x_3\quad x_4)\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\\-2&-1\\0&1\end{pmatrix}=0$,得到$A$的左零化空间$N(A^T)$的一组基为

$$(-1\quad 1\quad 1\quad 0),(-1\quad -1\quad 0\quad 1)\qquad \textbf{(2 分)}$$

**(3) 方法一：**

考虑矩阵

$$\begin{pmatrix}-1&0&-1&-1&1\\1&1&1&-1&1\\-2&-1&1&0&1\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

作初等行变换化为 Hermite 标准形为:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&4/3\\0&0&1&0&1/3\\0&0&0&1&-1/3\end{pmatrix}\qquad \textbf{(1 分)}$$

向量 b 在线性空间$R(A)$上的最佳近似为:

$$-\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}+4/3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1/3\\2/3\\4/3\end{pmatrix}\qquad \textbf{(2 分)}$$

**方法二:** 解方程组

$$A^TAx=A^Tb$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

等价于

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

得到一个解为

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad \textbf{(2 分)}$$

所以最佳近似为

$$A\begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1分)}$$

(4)由已知得到

$$\sigma\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(3 分)}$$

由基$e_1, e_2, e_3, e_4$到基$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 分)}$$

$\sigma$在基$e_1, e_2, e_3, e_4$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2 分)}$$

**A 卷第 5 题.　B 卷第 6 题(15 分)**

(1)　特征多项式: $|\lambda I - A| = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$　**(1 分)**

　特征值 1 的几何重数为 1　**(1 分)**

得到矩阵$A$的 Jordan 标准形$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.　**(1 分)**

(2)　考虑$A(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3) = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)J$,可得,

$$\begin{cases} A\alpha_1 = \alpha_1 \\ A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ A\alpha_3 = -2\alpha_3 \end{cases}$$

等价于

$$\begin{cases} (A-I)\alpha_1 = 0 \\ (A-I)\alpha_2 = \alpha_1 \\ (A+2I)\alpha_3 = 0 \end{cases}$$　**(2 分)**

考虑$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & b_1 \\ 1 & -2 & -4 & b_2 \\ -1 & -1 & 1 & b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_1+b_2-b_3 \\ 1 & -2 & -4 & b_2 \\ 1 & 1 & -1 & -b_3 \end{pmatrix}$

可取$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　**(2 分)**

令$P = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

则$A = PJP^{-1}$

求得

$$D = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$　**(1 分)**

$$N = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$　**(1 分)**

**(3)　方法一:**

由于

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$　**(2 分)**

$$e^{At} = P\begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} e^t - 2te^t & e^t - 2te^t - e^{-2t} & e^t + 2te^t - e^{-2t} \\ te^t & te^t + e^{-2t} & -e^t - te^t + e^{-2t} \\ -te^t & -te^t & e^t + te^t \end{pmatrix}$$　**(2 分)**

**方法二:**

$A$的最小多项式为$(\lambda-1)^2(\lambda+2)$. 这样可设$g(\lambda) = a + b\lambda + c\lambda^2$，并令$f(\lambda) = e^{\lambda t}$

考虑

$$\begin{cases} e^{t} = f(1) = g(1) = a + b + c \\ te^{t} = f'(1) = g'(1) = b + 2c \\ e^{-2t} = f(-2) = g(-2) = a - 2b + 4c \end{cases}$$ **(1 分)**

解得:

$$a = \frac{8e^{t}-6te^{t}+e^{-2t}}{9}, b = \frac{2e^{t}+3te^{t}-2e^{-2t}}{9}, c = \frac{-e^{t}+3te^{t}+e^{-2t}}{9}$$ **(1 分)**

那么

$$e^{At} = g(A) = \begin{pmatrix} e^{t} - 2te^{t} & e^{t} - 2te^{t} - e^{-2t} & e^{t} + 2te^{t} - e^{-2t} \\ te^{t} & te^{t} + e^{-2t} & -e^{t} - te^{t} + e^{-2t} \\ -te^{t} & -te^{t} & e^{t} + te^{t} \end{pmatrix}$$ **(2分)**

(4) 定解问题解为

$$x(t) = e^{At}x(0) = \begin{pmatrix} -2te^{t} + e^{t} & -2te^{t} + e^{t} - e^{-2t} & 2te^{t} + e^{t} - e^{-2t} \\ te^{t} & te^{t} + e^{-2t} & -te^{t} - e^{t} + e^{-2t} \\ -te^{t} & -te^{t} & te^{t} + e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6e^{t} - 5e^{-2t} \\ -3e^{t} + 5e^{-2t} \\ 3e^{t} \end{pmatrix}$$

**(2 分)**

**A 卷第 6 题.　B 卷第 5 题(15 分)**

(1) 取$R^m$中一组基为$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$,及$R^n$中一组基为$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$. 再令$n\times m$矩阵$A$是线性变换$\sigma$在这两组基下的矩阵,即

$$\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)A$$

存在$n$阶方阵$B$和$m$阶方阵$C$,使得

$$A=B\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}C,$$

其中$r=r(A)$为矩阵$A$的秩.　　　　**(2 分)**

注意

$$A=B\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{n\times m}C=B_n(I_n\quad 0)_{n\times m}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times m}C_m=B_n\begin{pmatrix} I_m\\ 0\end{pmatrix}_{n\times m}C_mC_m^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times m}C_m$$

**(1 分)**

定义线性变换:

$$\tau(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)C_m^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times m}C_m$$ **(1 分)**

$$\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)B_n\begin{pmatrix} I_m\\ 0\end{pmatrix}_{n\times m}C_m$$ **(1 分)**

由于矩阵$C_m^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times m}C_m$是幂等矩阵,所以线性变换$\tau$是$R^m$到$R^m$上幂等变换.

由于矩阵$B_n\begin{pmatrix} I_m\\ 0\end{pmatrix}_{n\times m}C_m$ 是列满秩矩阵,所以线性变换$\varphi$是$R^m$到$R^n$上单变换. 最后,

$$\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)A=$$

$$(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)B_n(I_n\quad 0)_{n\times m}C_mC_m^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times m}C_m=$$

$$\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)C_m^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times m}C_m=\varphi(\tau(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m))$$ **(1 分)**

(2) 取$R^2$中标准基为$e_1,e_2$,及$R^4$中标准基为$e_1',e_2',e_3',e_4'$,则线性变换在这两组基下矩阵为

$\sigma(e_1,e_2)=(e_1',e_2',e_3',e_4')A$,

其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$ **(1 分)**

计算$$A^TA=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$A$的非 0 奇异值为$\sqrt{5}$和$\sqrt{2}$.

矩阵$A^TA$对于特征值$\lambda_1=5$的特征向量为$v_1=\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}$　　**(1 分)**

对于特征值$\lambda_2=2$的特征向量为$v_2=\begin{pmatrix} 0\\ 1\end{pmatrix}$　　**(1 分)**

得到$V=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

计算得到

$$u_1=\frac{Av_1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, u_2=\frac{Av_2}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},$$ **(1 分)**

解方程组$A^T x=0$,得到基础解系: $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ **(1 分)**

正交化,单位化得到: $u_3=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, u_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ **(1 分)**

得到$U=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}&0&-2/\sqrt{5}&0\\0&1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\2/\sqrt{5}&0&1/\sqrt{5}&0\\0&-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

A的奇异值分解为

$$A=U\begin{pmatrix}\sqrt{5}&0\\0&\sqrt{2}\\0&0\\0&0\end{pmatrix}V^T=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}&0&-2/\sqrt{5}&0\\0&1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\2/\sqrt{5}&0&1/\sqrt{5}&0\\0&-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5}&0\\0&\sqrt{2}\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$ **(1 分)**

考虑$R^2$中标准正交基为$e_1,e_2$，$R^4$中标准正交基为$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$,其中

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}&0&-2/\sqrt{5}&0\\0&1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\2/\sqrt{5}&0&1/\sqrt{5}&0\\0&-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

则有$\sigma(e_1,e_2)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\begin{pmatrix}\sqrt{5}&0\\0&\sqrt{2}\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$ **(2 分)**

**A 和 B 卷第 7 题. (10 分)**

对任何矩阵$X$及可逆矩阵$P$,都有

$\sigma(X)=\sigma(XPP^{-1})=\sigma(P^{-1}XP)$ **(2 分)**

这样,若矩阵$X$的 Jordan 标准型为$J(X)$,那么$\sigma(X)=\sigma(J(X))$. **(2 分)**

对任何基本矩阵$E_{ij}$,

当$i=j$时,有$J(E_{ij})=E_{11}$,由条件$\sigma(I)=n$,得到

$\sigma(E_{ii})=1$ **(2 分)**

当$i\neq j$时,有$J(E_{ij})=E_{12}$,取$Y$为初等矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则

$\sigma(E_{12})=\sigma(E_{12}Y)=\sigma(YE_{12})=\sigma(2E_{12})=2\sigma(E_{12})$ **(2 分)**

得到

$\sigma\left(E_{ij}\right)=\sigma(E_{12})=0$ **(2 分)**

最后对任何矩阵$X$，都有$\sigma(X)=tr(X)$

**方法二:**

对于基本矩阵$E_{i,i+1}$,取$Y$是将矩阵第$i$行与第$i+1$行交换的初等变换对应的初等矩阵,则

$YE_{i,i+1}=E_{i+1,i+1}$，$E_{i,i+1}Y=E_{i,i}$ **(2 分)**

由$\sigma\left(YE_{i,i+1}\right)=\sigma\left(E_{i,i+1}Y\right)$, **(1 分)**

得到$\sigma\left(E_{i+1,i+1}\right)=\sigma\left(E_{i,i}\right)$ **(1 分)**

再由$\sigma(I)=n$知, $\sigma(E_{ii})=1$. **(2 分)**

对于基本矩阵$E_{i,j}$,且$i\neq j$, 取$Y$是将矩阵第$i$行乘以 2 的初等变换对应的初等矩阵,则

$YE_{i,j}=2E_{i,j}$，$E_{i,j}Y=E_{i,j}$ **(2 分)**

这样,我们有$\sigma\left(2E_{i,j}\right)=\sigma\left(E_{i,j}\right)$, **(1 分)**

得到$\sigma\left(E_{i,j}\right)=0$. **(1 分)**

最后对任何矩阵$X$，都有$\sigma(X)=tr(X)$