Modern Control Theory
Spring 2017

Weijun Zhang （张伟军）

Associate Professor, Robotics Institute

School of mechanical Engineering

Office:930 main building of M.E. school

zhangweijun@sjtu.edu.edu.cn

021-34205559

课程概要

- 概述（6-1）
- 静态最优化问题（6-3）
- 泛函的概念及变分法（6-6）
- 有约束条件的泛函极值（6-7）
- 线性二次型最优控制问题（6-12）

最优控制

基本概念

（1）最优控制是系统设计的一种方法。它所研究的中心问题是如何选择控制信号才能保证控制系统的性能在某种意义下最优。

（2）按照控制对象的动态特性，选择一个容许控制，使得被控对象按照技术要求运转，同时使性能指标达到最优值。

（3）从数学方面看，最优控制问题就是求解一类带有约束条件的泛函极值问题。

(4) 二次型广泛用于控制输入能量的消耗/终端误差的要求以及过程中和过程中对误差的要求

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[x^T Q_1(t)x + u^T Q_2(t)u\right] + \frac{1}{2}x^T(t_f)Q_0 x(t_f)$$

最优控制的定义

1. 状态方程

一个集中参数的受控系统总可以用一组一阶微分方程来描述，即状态方程，其一般形式为：

$$\dot{X}(t) = f(X(t), u(t), t)$$

$X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ 是n维状态向量　　　$u = [u_1, u_2, \cdots, u_r]^T$ 为r维控制向量

$f(X(t), u(t), t)$ 为n维函数向量

$$\dot{X}(t) = f(X(t), u(t), t) = \begin{bmatrix} f_1(X(t), u(t), t) \\ f_2(X(t), u(t), t) \\ \vdots \\ f_n(X(t), u(t), t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t) \cdots x_n(t), u_1(t), u_2(t) \cdots u_r(t), t) \\ f_2(x_1(t), x_2(t) \cdots x_n(t), u_1(t), u_2(t) \cdots u_r(t), t) \\ \vdots \\ f_n(x_1(t), x_2(t) \cdots x_n(t), u_1(t), u_2(t) \cdots u_r(t), t) \end{bmatrix}$$

最优控制的定义

2.容许控制(控制域)

在实际控制问题中，大多数控制量受客观条件的限制，只能在一定范围内取值，这种限制通常可以用如下不等式约束来表示：

$$0 \le u(t) \le u_{\max} \quad \text{或} \left| u_i \right| \le \alpha \quad i = 1,2\cdots r$$

$$\left\{ U \middle| \varphi_j(x,u) <= 0 \right\} \quad \text{或} u(t) \in U$$

3.始端集

$$X(t_0) = X(0) \quad \text{或者} \Omega_0 = \left\{ x(t_0) \Big|_{\rho_j x(t_0)=0} \right\} \quad j = 1,2,\ldots m\,(m <= n)$$

最优控制的定义

4.终端条件(目标集)

$$\begin{cases} g_1(x(t_f),t_f)=0 \\ g_2(x(t_f),t_f)\le 0 \end{cases}$$

$$M=\{x(t_f);x(t_f)\in R^n, g_1(x(t_f),t_f)=0, g_2(x(t_f),t_f)\le 0\}$$

5. 性能指标

$$J=\Phi(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f} L(x(t),u(t),t)dt$$

其中第一项是接近目标集程度，即末态控制精度的度量，称为末值型性能指标。

第二项称为积分型性能指标，它能反映控制过程偏差在某种意义下的平均或控制过程的快速性，同时能反映燃料或能量的消耗。

最优控制的定义

6：最优控制的提法

已知受控系统的状态方程及给定的初态

$$\dot{X}(t) = f(X(t), u(t), t) \qquad X(t_0) = X(0)$$

规定的目标集为M，求一容许控制$u(t) \in U, t \in [t_0, t_f]$,使系统从给定的初态出发，在$t_f > t_0$时刻转移到目标集M，并使性能指标

$$J = \theta（x(t_f), t_f）+ \int_{t_0}^{t_f} F（x(t), u(t), t)dt$$

为最小。

记$u^*(t)$, $t \in [t_0, t_f]$,为 最优控制（极值控制），相应的轨线$X^*(t)$称为最优轨线（极值轨线），而性能指标$J^*=J（u^*(\cdot)）$则称为最优性能指标。

最优控制的定义

6：最优控制的提法

已知受控系统的状态方程及给定的初态

$$\dot{X}(t) = f(X(t), u(t), t) \qquad X(t_0) = X(0)$$

规定的目标集为M，求一容许控制u(t)∈U,t∈ $[t_0,t_f]$,使系统从给定的初态出发，在$t_f>t_0$时刻转移到目标集M，并使性能指标

$$J = \theta(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), t)dt$$

为最小。

记u*(t), t∈ $[t_0,t_f]$,为 最优控制（极值控制），相应的轨线X*(t)称为最优轨线（极值轨线），而性能指标J*=J（u*(·)）则称为最优性能指标。

最优控制的定义

6：最优控制的分类

1）积分型性能指标

$$J=\int_{t_0}^{t_f} L[X(t),u(t),t]dt$$

拉格朗日问题。

2）终值型性能指标

$$J=\Phi[X(t_f),t_f]$$

迈耶尔问题。

3）复合型性能指标

$$J=\Phi[X(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f} L[X(t),u(t),t]dt$$

波尔扎问题

最优控制举例

1：最小时间控制 $$J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} 1 \cdot dt$$

2：最小燃料消耗控制

粗略地说，控制量u(t)与燃料消耗量成正比，最小燃料消耗问题的性能指标为：

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)|\, dt$$

3：最小能量控制

设标量控制函数$u^2(t)$与所消耗的功率成正比，则最小能量控制问题的性能指标为：

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^2(t) dt$$

线性调节器

给定一个线性系统，其平衡状态X(0)=0，设计的目的是保持系统处于平衡状态，即这个系统应能从任何初始状态返回平衡状态。这种系统称为线性调节器。

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}(t)dt \qquad J=\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}q_i x_i^{\ 2}(t)dt$$

对u(t)有约束的性能指标为：$J=\int_{t_0}^{t_f}\frac{1}{2}[X^T(t)QX(t)+u^T(t)Ru(t)]dt$

式中Q和R都是正定加权矩阵。

有限时间线性调节器性能指标：

$$J=\frac{1}{2}X^T(t_f)PX(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}\frac{1}{2}[X^T(t)QX(t)+u^T(t)Ru(t)]dt$$

P≥0，Q≥0，R>0，均为对称加权矩阵。

课程概要

- 概述（6－1）
- 静态最优化问题（6－3）
- 泛函的概念及变分法（6－6）
- 有约束条件的泛函极值（6－7）
- 极小值原理（6－8）

最优化问题的解

1. 函数极值问题

一：多变量函数极值问题

设二元函数f（x_1,x_2），在点（x_1*,x_2*）处有极值f（x_1*,x_2*）的必要条件为：

$$f_{x_1}^{*}=\left.\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{(x_1^*,x_2^*)}=0 \quad f_{x_2}^{*}=\left.\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{(x_1^*,x_2^*)}=0$$

f（x_1*,x_2*）取极小值的充分条件为：

$$f_{x_1x_1}^{*}(\Delta x_1)^2+2f_{x_1x_2}^{*}\Delta x_1\Delta x_2+f_{x_2x_2}^{*}(\Delta x_2)^2>0$$

或

$$(\Delta x_1,\Delta x_2)\begin{bmatrix} f_{x_1x_1}^{*} & f_{x_1x_2}^{*} \\ f_{x_1x_2}^{*} & f_{x_2x_2}^{*} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1 \\ \Delta x_2\end{bmatrix}>0$$

最优化问题的解

1. 函数极值问题

一：多变量函数极值问题

设二元函数f（x_1,x_2），在点（x_1*,x_2*）处有极值f（x_1*,x_2*）的必要条件为：

$$f_{x_1}^* = \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\bigg|_{(x_1^*,x_2^*)} = 0 \quad f_{x_2}^* = \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\bigg|_{(x_1^*,x_2^*)} = 0$$

f（x_1*,x_2*）取极小值的充分条件为：

$$f_{x_1x_1}^*(\Delta x_1)^2 + 2 f_{x_1x_2}^* \Delta x_1 \Delta x_2 + f_{x_2x_2}^*(\Delta x_2)^2 > 0$$

或

$$(\Delta x_1, \Delta x_2)\begin{bmatrix} f_{x_1x_1}^* & f_{x_1x_2}^* \\ f_{x_1x_2}^* & f_{x_2x_2}^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$F_{xx}^{*}=\begin{bmatrix} f_{x_1x_1}^{*} & f_{x_1x_2}^{*} \\ f_{x_2x_1}^{*} & f_{x_2x_2}^{*} \end{bmatrix} \quad 正定$$

其中

$$f_{x_1x_1}^{*}=\left.\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\right|_{(x_1^*,x_2^*)}$$

$$f_{x_1x_2}^{*}=\left.\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}\right|_{(x_1^*,x_2^*)}$$

$$f_{x_2x_2}^{*}=\left.\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}\right|_{(x_1^*,x_2^*)}$$

上述结论可以推广到自变量多于两个的情形

设n 个变量的多元函数f（x_1，x_2，……x_n），若f（x）在x*处有极小值，其必要条件为：

$$F_x^* = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{[x_1^*, x_2^* \cdots x_n^*]} = 0$$

充分条件为：

$$F_{xx}^* = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

为正定矩阵。

例题1. 设 $f = f(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 - 6x_2 + 3$

求f的极值点及其极小值

二：有约束条件的函数极值问题

设目标函数J＝f（x,u），等式约束条件为g(x,u)=0

x—n维列矢量；

u—r维列矢量；

g—m维矢量函数；

构造拉格朗日函数 $H = J + \lambda^T g(x,u)$

式中λ为与g同维的列矢量，称为拉格朗日乘子。

函数L有极值的必要条件为： $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0$

展开得

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_1}=0 \qquad \frac{\partial H}{\partial \lambda_1}=g_1(x_1,x_2,\cdots x_n)=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_2}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_2}=0 \qquad \frac{\partial H}{\partial \lambda_2}=g_2(x_1,x_2,\cdots x_n)=0$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_n}=\frac{\partial f}{\partial x_n}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_n}=0 \qquad \frac{\partial H}{\partial \lambda_m}=g_m(x_1,x_2,\cdots x_n)=0$$

例题2. 设 $J=f(x,u)=\frac{1}{2}x^TQ_1x+\frac{1}{2}u^TQ_2u$

求J的极值点及其极小值，约束条件为： $g(x,u)=x+Fu+d$

其中Q_1，Q_2均为正定矩阵，F为任意矩阵

课程概要

- 概述（6－1）
- 静态最优化问题（6－3）
- 泛函的概念及变分法（6－6）
- 有约束条件的泛函极值（6－7）
- 极小值原理（6－8）

一、泛函的定义

如果变量J对于某一函数类中的每一个函数$x(t)$，都有一个确定的值与之对应，那么就称变量J为依赖于函数$x(t)$的泛函，记为：

$$J=J[x(t)]。$$

说明：由于函数的值是由自变量的选取而确定的，而泛函的值是由函数的选取而确定的，所以将泛函理解为“函数的函数”。

$x(t)$称为泛函的宗量

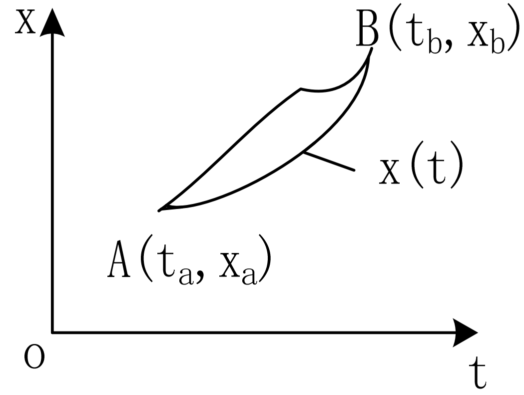
例1 函数的定积分

$$J=\int_0^1 x(t)dt$$

是泛函。因为变量J的值是由函数的选取而确定的。

泛函及变分法

在平面上连接给定两点$A(t_a，x_a)$和$B(t_b，x_b)$的曲线的弧长J是一个泛函



当曲线方程$x=x(t)$（满足$x(t_a)= x_a$，$x(t_b)= x_b$）给定后，可算出它在A、B两点间的弧长：

弧线元长度：$ds = \sqrt{(dt)^2 + (dx)^2} = \sqrt{1+\dot{x}^2}dt$

弧长：$J = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt$

泛函及变分法

一、定义：

弧线元长度：$ds = \sqrt{(dt)^2 + (dx)^2} = \sqrt{1 + \dot{x}^2}dt$

弧长： $J = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt$

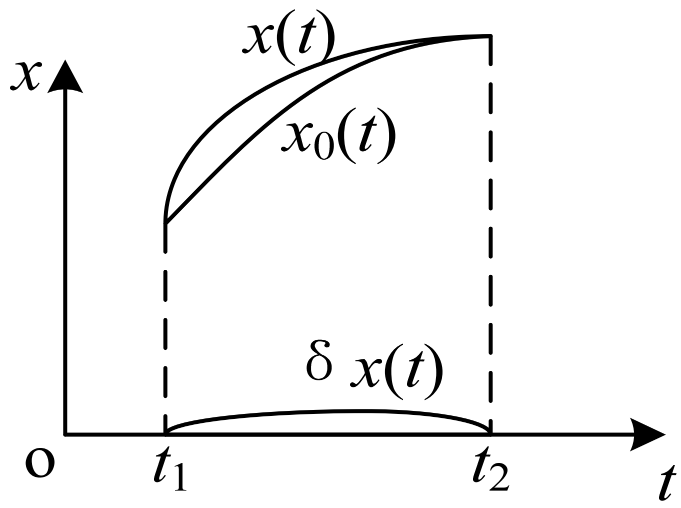
$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), \dot{x}(t), t]dt$$

求泛函的极值问题称为**变分问题**，其相应的方法称为**变分法**。

泛函及变分法

二、泛函宗量的变分

泛函$J[x(t)]$的宗量是函数$x(t)$，其变分是指在同一函数类中的两个函数间的差：



$$\delta x(t) \triangleq x(t) - x_0(t)$$

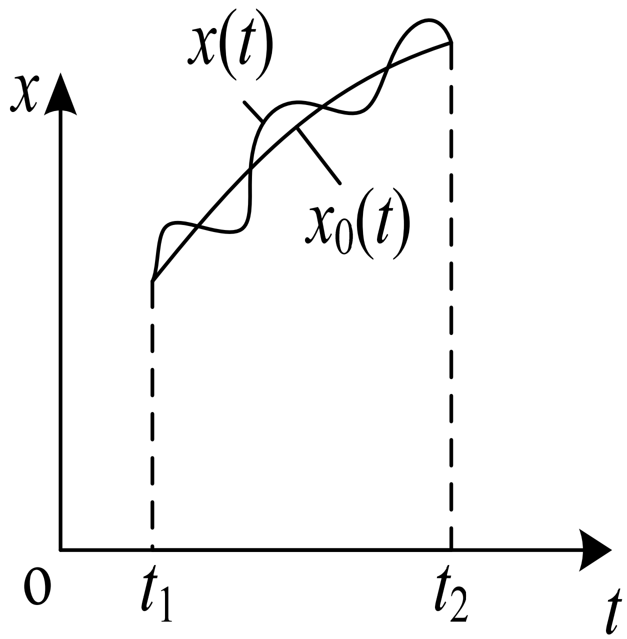
泛函及变分法

- 零阶相近

当函数 $x(t)$ 与 $x_0(t)$ 之差的绝对值，即

$$|x(t)-x_0(t)|, \quad t_1 \le t \le t_2$$

对于 $x(t)$ 的定义域中的一切 t（$t_1 \le t \le t_2$）都很小时，称函数 $x(t)$ 与函数 $x_0(t)$ 是相近的，也称为零阶相近。



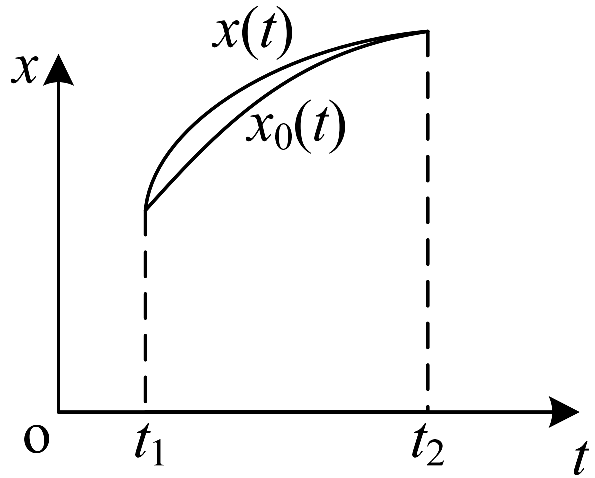
泛函及变分法

- 一阶相近

当函数$x(t)$与$x_0(t)$之差的绝对值以及它们的一阶导数$\dot{x}(t)$和$\dot{x}_0(t)$之差的绝对值，即

$$\left|x(t)-x_0(t)\right|,\left|\dot{x}(t)-\dot{x}_0(t)\right| \quad t_1 \le t \le t_2$$

都很小，称函数 $x(t)$与函数 $x_0(t)$是一阶相近的



注意：

一阶相近的两个函数，必然是零阶相近，反之不成立。

泛函及变分法

- ***k* 阶相近**

当 $\left|x(t)-x_0(t)\right|,\left|\dot{x}(t)-\dot{x}_0(t)\right|,\ldots\left|x^{(k)}(t)-x_0^{(k)}(t)\right|\qquad t_1\le t\le t_2$

都很小时，称函数$x(t)$与函数$x_0(t)$是k阶相近的。

泛函及变分法

- **泛函的连续性**

如果对于任意给定的正数ε，可以找到这样一个$\delta>0$，当

$$d[x(t),\ x_0(t)]<\delta$$

时，存在

$$|J[x(t)]-J[x_0(t)]|<\varepsilon$$

那么，就说泛函J在点$x_0(t)$处是连续的。

根据所采用的函数之间距离定义的不同，其对应的泛函分别称为零阶连续泛函或k阶连续泛函。

泛函及变分法

四、线性泛函

连续泛函如果满足下列条件：

（1） $J[x_1(t)+x_2(t)]=J[x_1(t)]+J[x_2(t)]$

叠加性

（2） $J[cx(t)]=c\,J[x(t)]$

齐次性

其中，c是任意常数，就称为线性泛函。例如

$$J[x(t)]=\int_{t_1}^{t_2}[tx(t)+(\sin t)\dot{x}(t)]dt$$

$$J[x(t)]=\int_{t_1}^{t_2}[p(t)x(t)+q(t)\dot{x}(t)]dt$$

$$J[x(t)]=x(t)\big|_{t=2}$$

都满足上述两个条件，故均为线性泛函。

泛函及变分法

五、泛函的变分

如果连续泛函$J[x(t)]$的增量可以表示为：

$$\Delta J[x(t)] = J[x(t)+\delta x(t)] - J[x(t)]$$

$$= J[x(t), \delta x(t)] + r[x(t), \delta x(t)]$$

其中，$J[x(t), \delta x(t)]$是关于$\delta x(t)$的线性连续泛函

$r[x(t), \delta x(t)]$是关于$\delta x(t)$的高阶无穷小。

则，$J[x(t), \delta x(t)]$称为泛函的变分，记为

$$\boxed{\delta J = J[x(t), \delta x(t)]}$$

泛函及变分法

即，泛函的变分是泛函增量的线性主部。当一个泛函具有变分时，即泛函的增量可以用上式来表示时，称该泛函是可微的。例如，泛函

$$J[x(t)]=\int_0^1 x^2(t)dt$$

的增量为：

$$\Delta J=\int_0^1[x(t)+\delta x(t)]^2 dt-\int_0^1 x^2(t)dt$$

$$=\int_0^1[2x(t)\delta x(t)+\delta x^2(t)]dt$$

$$=\int_0^1 2x(t)\delta x(t)dt+\int_0^1\delta x^2(t)dt$$

于是，其变分为：$\delta J=\int_0^1 2x(t)\delta x(t)dt$

泛函及变分法

引理1　　泛函$J[x(t)]$的变分为：

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[x(t) + \alpha \delta x(t)]\bigg|_{\alpha=0}$$

例4 求泛函 $J[x(t)]=\int_0^1 x^2(t)dt$ 的变分。

根据引理1，该泛函的变分为：

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial\alpha}J[x(t)+\alpha\delta x(t)]\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\int_0^1[x(t)+\alpha\delta x(t)]^2dt\right\}\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\int_0^1\frac{\partial}{\partial\alpha}[x(t)+\alpha\delta x(t)]^2\Big|_{\alpha=0}dt$$

$$=\int_0^1\{2[x(t)+\alpha\delta x(t)]\delta x(t)\}\Big|_{\alpha=0}dt$$

$$=\int_0^1 2x(t)\delta x(t)dt$$

例5　求泛函 $J=\int_{t_0}^{t_f} L[x(t),\dot{x}(t),t]dt$ 的变分

根据引理1，所求泛函的变分为：

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial\alpha}J[x(t)+\alpha\delta x(t)]\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\int_{t_0}^{t_f} L[x(t)+\alpha\delta x(t),\dot{x}(t)+\alpha\delta\dot{x}(t),t]dt\right\}\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}L[x(t)+\alpha\delta x(t),\dot{x}(t)+\alpha\delta\dot{x}(t),t]\Big|_{\alpha=0}\right\}dt$$

泛函及变分法

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial L[x(t), \dot{x}(t), t]}{\partial x(t)} \delta x(t) + \frac{\partial L[x(t), \dot{x}(t), t]}{\partial \dot{x}(t)} \delta \dot{x}(t) \right\} dt$$

若设 $L[x(t), \dot{x}(t), t] = x^2(t) + \dot{x}^2(t) + t^2$

则 $$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} 2[x(t)\delta x(t) + \dot{x}(t)\delta \dot{x}(t)]dt$$

泛函及变分法

例6 求泛函 $H=H[x(t),u(t),t]$ 的变分

根据引理1，所求泛函的变分为：

$$\delta H=\frac{\partial}{\partial\alpha}H[x(t)+\alpha\delta x(t),u(t)+\alpha\delta u(t)]\bigg|_{\alpha=0}$$

$$=\frac{\partial H[x(t)+\alpha\delta x(t),u(t)+\alpha\delta u(t),t]}{\partial[x(t)+\alpha\delta x(t)]}\delta x(t)+\frac{\partial H[x(t)+\alpha\delta x(t),u(t)+\alpha\delta u(t),t]}{\partial[u(t)+\alpha\delta u(t)]}\delta u(t)\bigg|_{\alpha=0}$$

$$=\frac{\partial H[x(t),u(t),t]}{\partial x(t)}\delta x(t)+\frac{\partial H[x(t),u(t),t]}{\partial u(t)}\delta u(t)$$

泛函及变分法

泛函的极值

如果泛函$J[x(t)]$在函数空间中点$x_0(t)$的邻域内，其增量为：

$$\Delta J = J[x(t)] - J[x_0(t)] \geq 0$$

就称泛函$J[x(t)]$在点$x_0(t)$处达到极小值；

如果泛函$J[x(t)]$在函数空间中点$x_0(t)$的邻域内，其增量为：

$$\Delta J = J[x(t)] - J[x_0(t)] \leq 0$$

就称泛函$J[x(t)]$在点$x_0(t)$处达到极大值；

$x_0(t)$的邻域包含满足条件$d[x(t), x_0(t)] < \delta$所有$x(t)$构成的球（即以$x_0(t)$为圆心，以δ为半径的球）。

泛函及变分法

定理1（必要条件）

若泛函$J[x(t)]$是连续可微的，并且在点$x_0(t)$处达到极值，则泛函在点$x_0(t)$处的变分等于零，即

$$\delta J[x_0(t),\delta x(t)]=0$$

证明：对于任意给定的$\delta x(t)$，$J[x_0(t)+\alpha\delta x(t)]$既是函数$\delta x(t)$的泛函，又是变量$\alpha$的函数。

泛函$J[x_0(t)+\alpha\delta x(t)]$在$x_0(t)$处达到极值，也可看成是函数$J[x_0(t)+\alpha\delta x(t)]$在$\alpha=0$处达到极值，所以函数$J[x_0(t)+\alpha\delta x(t)]$对变量$\alpha$的偏导数在$\alpha=0$处应等于零，即

$$\left.\frac{\partial}{\partial\alpha}J[x_0(t)+\alpha\delta x(t)]\right|_{\alpha=0}=0$$

泛函及变分法

而

$$\delta J[x_0(t),\delta x(t)]=\frac{\partial}{\partial\alpha}J[x_0(t)+\alpha\delta x(t)]\Big|_{\alpha=0}$$

比较上面两式，又考虑$\delta x(t)$是任意给定的，所以，

$$\delta J[x_0(t),\delta x(t)]=0$$

本节所讨论的定义、引理和定理，稍加变动就可以应用于含有多个未知函数的泛函：

$J[x_1(t)，\quad x_2(t)，\quad \ldots，\quad x_n(t)]$

1：始端时刻t_0和终端时刻t_f都给定时的泛函极值

设 $J=\int_{t_0}^{t_f} F[x(t),\dot{x}(t),t]dt$

函数x*(t)使J为极小

令： $x(t)=x^*(t)+\varepsilon\eta(t)$

式中ε是一个很小的参数，η（t）是一个连续可导的任意函数

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_f} F[x^*(t)+\varepsilon\eta(t),\dot{x}^*(t)+\varepsilon\dot{\eta}(t),t]dt$$

其取极小值的必要条件为： $\left.\frac{\partial J(x)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$

上式为J(x)取极小值的必要条件

J(x)取极小值的充分条件 $\left.\frac{\partial J^2(x)}{\partial \varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}>0$

J(x)为极大、极小，通常可根据系统的物理性质来判断。

由必要条件 $\left.\frac{\partial J(x)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$

$$\left.\frac{\partial J(x)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{t_0}^{t_f}[\eta(t)\frac{\partial F}{\partial x}+\dot{\eta}(t)\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_f}\eta\frac{\partial F}{\partial x}dt+\int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}d\eta(t)$$

$$==\int_{t_0}^{t_f}\eta(\frac{\partial F}{\partial x}dt-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}})dt+\left.\eta\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0}^{t_f}=0$$

J(x)取极值的必要条件为：

欧拉方程 $$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=0$$

横截条件 $$\left.\eta(t)\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0}^{t_f}=0$$

不同函数F的欧拉方程为：

$$F[x(t),t] \qquad \frac{\partial F}{\partial x}=0$$

$$F[\dot{x}(t)] \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x}=0$$

$$F[\dot{x}(t),t] \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x}+\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial t}=0$$

$$F[x(t),\dot{x}(t)] \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x}+\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}\partial \mathrm{x}}\dot{x}-\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

由横截条件 $\eta(t)\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Bigg|_{t_0}^{t_f}=0$

当t_0和t_f给定时，根据$x(t_0)$,$x(t_f)$是固定的或自由的各种组合，可导出边界条件

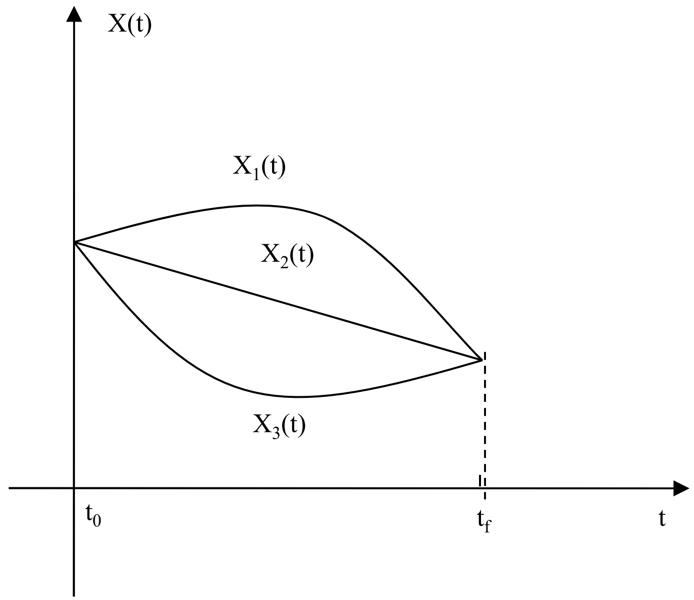
（1）固定始端和固定终端

$x(t_0)=x_0$, $x(t_f)=x_f$

$$\eta(t)\ \Big|_{t_0}^{t_f}=0$$

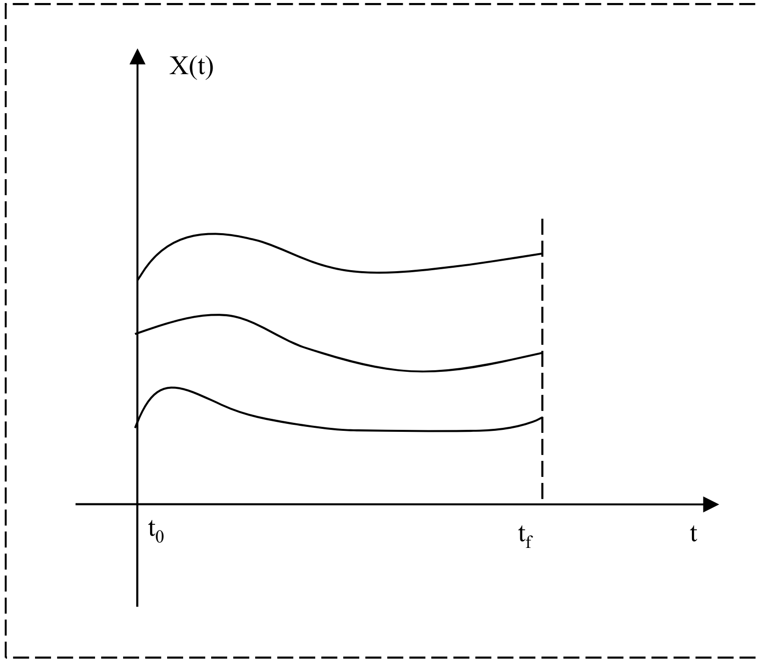
故边界条件为：

$x(t_0)=x_0$, $x(t_f)=x_f$



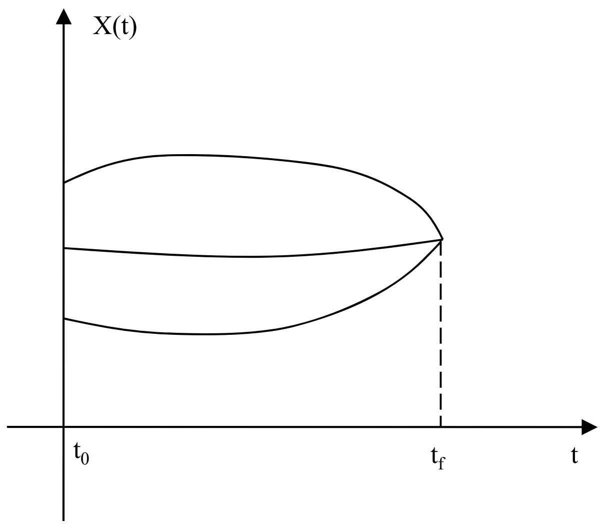
(2)自由始端和自由终端

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f} = 0$$



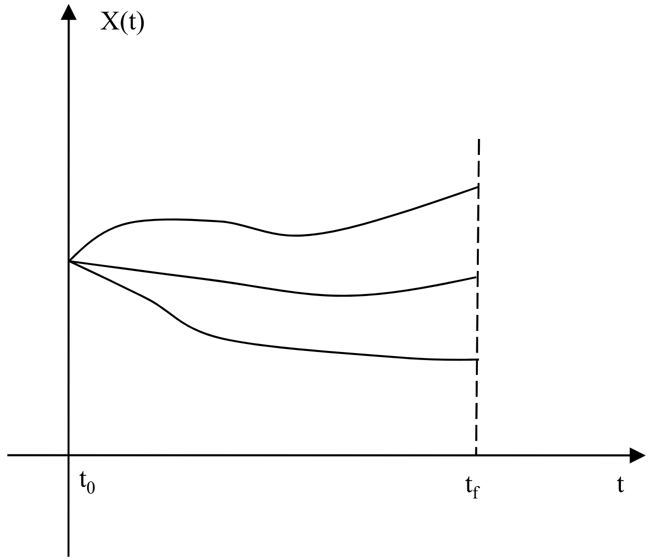
（3）自由始端和固定终端

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0} = 0 \qquad x(t_f)=x_f$$



（4）固定始端和自由终端

$x(t_0)=x_0$ $\qquad \left.\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}=0$



极小值的充分条件：

$$\left.\frac{\partial J^2(x)}{\partial \varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}>0$$

$$\int_{t_0}^{t_f}[\eta^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\eta\dot{\eta}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \dot{x}}+\dot{\eta}^2\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}]dt>0 \qquad \int_{t_0}^{t_f}[\eta \quad \dot{\eta}]\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \dot{x}}\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta\\ \dot{\eta}\end{bmatrix}dt>0$$

故J(x)取极小值的充分条件：$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial \dot{x}}\\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial \dot{x}} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\end{bmatrix}$ 为正定

例1 设性能指标为： $J=\int_1^2(\dot{x}+\dot{x}^2t^2)dt$ 边界条件为：x(1)=1,x(2)=2,

求J为极值时的x*(t)

解 $F(x,\dot{x},t)=\dot{x}+\dot{x}^2t^2$

由欧拉方程 $\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=0$

$$\frac{d}{dt}(1+2\dot{x}t^2)=0$$

$$x^*(t)=\frac{C_1}{t}+C_2$$

根据边界条件，x(1)=1,x(2)=2 $x^*(t)=-\frac{2}{t}+3$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \dot{x}} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2t^2 \end{bmatrix}$$ 正半定，J(x)为极小值

例2

设性能指标为：$J=\int_0^{\pi/2}(2\dot{u}^2+2\dot{x}^2+4ux)dt$

边界条件为：

$$u(0)=0 \quad u(\pi/2)=1$$
$$x(0)=1 \quad x(\pi/2)=-1$$

求J为极值时的x*(t)

例3

设受控对象的微分方程为 $\dot{x}=u$ $\quad J=\int_0^{t_f}(x^2+u^2)dt$

边界条件为$x(t_0)$及$x(t_f)$

2：未给定终端时刻的泛函极值问题

若始端时刻t_0给定，始端状态$x(t_0)$固定或沿规定的边界曲线移动；而终端时刻t_f自由，终端状态$x(t_f)$自由或沿规定的曲线移动，这类最优控制问题称之为未给定终端时刻的泛函极值问题。

设系统性能指标:　$J=\int_{t_0}^{t_f} L[x(t),\dot{x}(t),t]dt$

式中t_0是已知的，t_f未给定，$x(t_0)$给定或未给定

$$x(t)=x^*(t)+\varepsilon\eta(t) \qquad \dot{x}(t)=\dot{x}^*(t)+\varepsilon\dot{\eta}(t) \qquad t_f=t_f^*+\varepsilon\xi(t^*_f)$$

$$J=\int_{t_0}^{t_f^*+\varepsilon\xi(t^*_f)} F[x^*(t)+\varepsilon\eta(t),\dot{x}^*(t)+\varepsilon\dot{\eta}(t),t]dt$$

J取极值的必要条件为：　$\left.\frac{\partial J}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$。

$$J=\int_{t_0}^{t_f^*+\varepsilon\xi(t^*_f)}F[x^*(t)+\varepsilon\eta(t),\dot{x}^*(t)+\varepsilon\dot{\eta}(t),t]dt$$

$$\int_{t_0}^{t_f^*}[\eta(t)\frac{\partial F}{\partial x}+\dot{\eta}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}]dt+F[x(t_f^*),\dot{x}(t_f^*),t_f^*]\zeta(t^*_f)=0$$

上式第二项分部积分

$$\int_{t_0}^{t_f^*}\dot{\eta}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}dt=\eta(t)\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0}^{t_f^*}-\int_{t_0}^{t_f^*}\eta(t)\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}dt$$

于是有：

$$\int_{t_0}^{t_f^*}\eta(t)[\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}]dt+\eta(t)\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0}^{t_f^*}+F[x(t_f^*),\dot{x}(t_f^*),t_f^*]\zeta(t^*_f)=0$$

得J(x)取极值得必要条件为

欧拉方程 $$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=0$$

横截条件 $$\eta(t)\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0}^{t_f^*}+F[x(t_f^*),\dot{x}(t_f^*),t_f^*]\zeta(t^*_f)=0$$ 。

由横截条件可推出各种情况下的边界条件：$\eta(t)\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0}^{t_f^*}+F[x(t_f^*),\dot{x}(t_f^*),t_f^*]\zeta(t^*_f)=0$

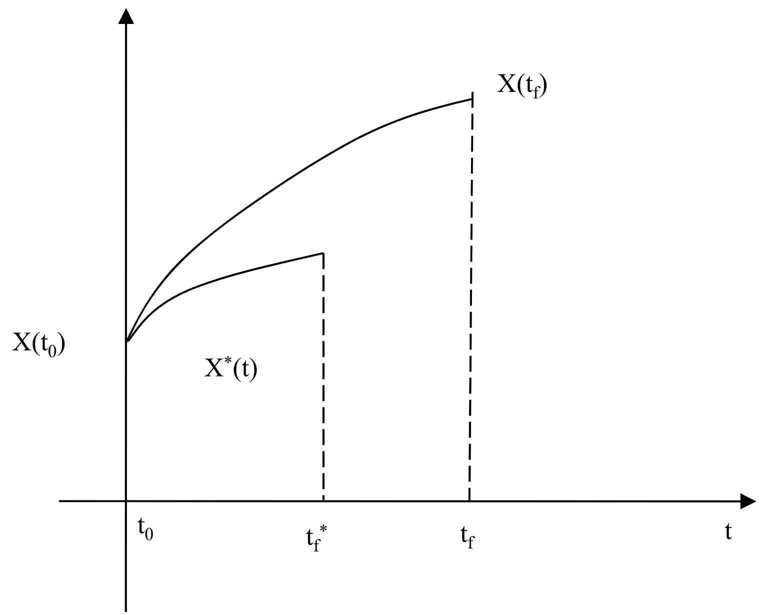
1）给定始端和自由终端

此时，$x(t_0)=x_0,\eta(t_0)=0,\xi(t_f)$和$\eta(t_f)$自由

可得边界条件与横截条件为：$x(t_0)=x_0$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t=t_f^*}=0$$

$$F[x(t_f^*),\dot{x}(t_f^*),t_f^*]=0$$

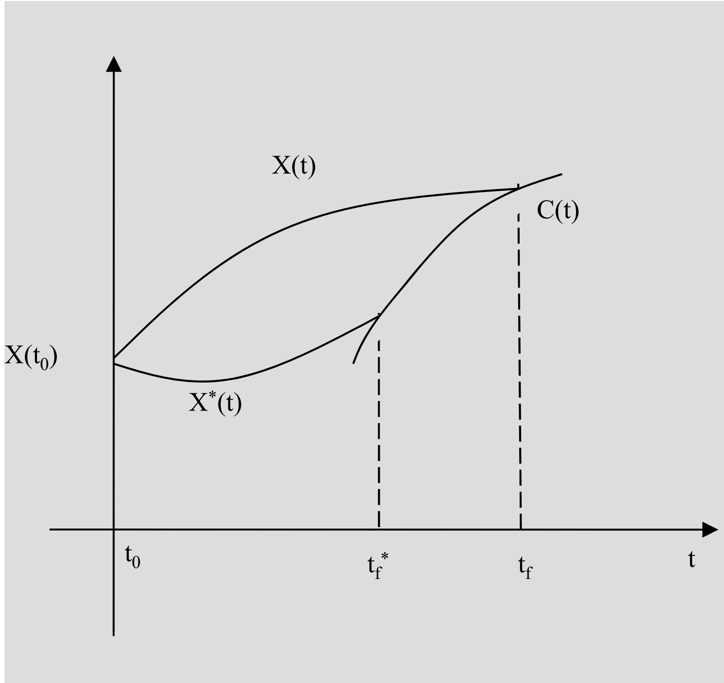


由于最优轨线x*(t)的t_f即是最优时刻t_f*,上式可写为：

$$x(t_0)=x_0 \qquad F[x,\dot{x},t]\Big|_{t_f}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f}=0 \quad 。$$

2）给定始端$x(t_0)=x_0$和终端有约束$x(t_f)=C(t_f)$

$$\eta(t)\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0}^{t_f^*}+F[x(t_f^*),\dot{x}(t_f^*),t_f^*]\zeta(t^*_f)=0$$



$$x(t)=x^*(t)+\varepsilon\eta(t)$$

代入 $x(t_f)=C(t_f)$

$$x^*[t_f^*+\varepsilon\xi(t^*_f)]+\varepsilon\eta[t_f^*+\varepsilon\xi(t^*_f)]=$$

$$=x[t_f^*+\varepsilon\xi(t^*_f)]=C[t_f^*+\varepsilon\xi(t^*_f)]$$

上式对ε求偏导，并令ε＝0

$$\eta(t_f^*)=[\dot{C}(t_f^*)-\dot{x}^*(t_f^*)]\xi(t^*_f)$$

可得边界条件与横截条件为：

$$x(t_0)=x_0 \qquad x(t_f)=C(t_f) \qquad \left\{[\dot{c}(t)-\dot{x}(t)]\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}+F(x,\dot{x},t)\right\}\Big|_{t=t_f}=0\text{。}$$

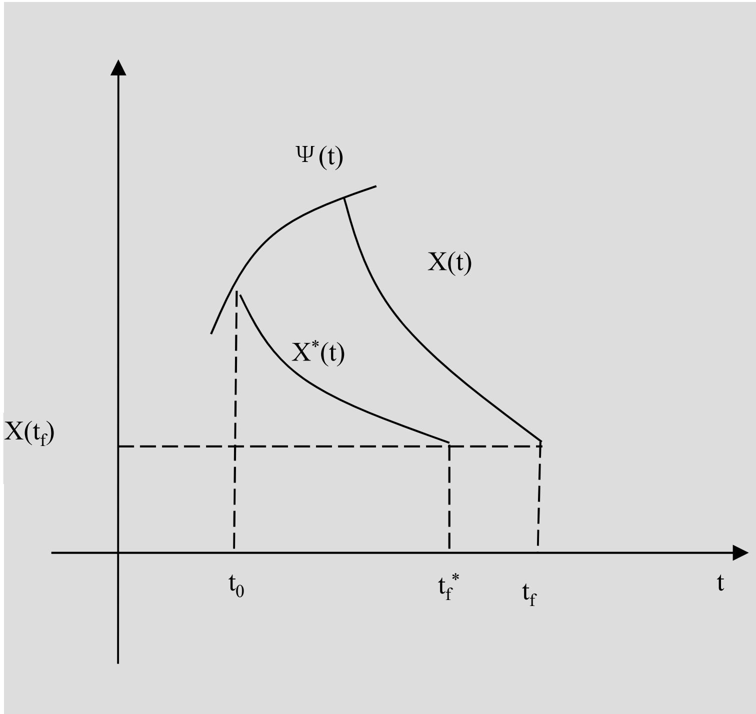
（3）终端$x(t_f)$固定，始端有约束$x(t_0)=\Psi(t_0)$

边界条件与横截条件为：

$$x(t_f) = x_f$$

$$x(t_0) = \psi(t_0)$$

$$\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)[\dot{\psi}(t) - \dot{x}(t)] + F(x,\dot{x},t)\right\}\bigg|_{t_0} = 0$$



从以上讨论可以看出，不论边界情况如何，泛函极值都必须满足欧拉方程，只是在求解欧拉方程时，对于不同边界情况，应采用不同的边界条件与横截条件。

例2

求使性能指标

$$J=\int_{t_0}^{t_f}(1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}dt$$

为极小时的最优轨线x*(t)。设x(0)=1，$x(t_f)=C(t_f)$，$C(t_f)=2-t$, t_f未给定。

解 显然，所给出的性能指标就是x(t)的弧长，也就是说，要求从x(0)到直线C(t)的弧长未最短。

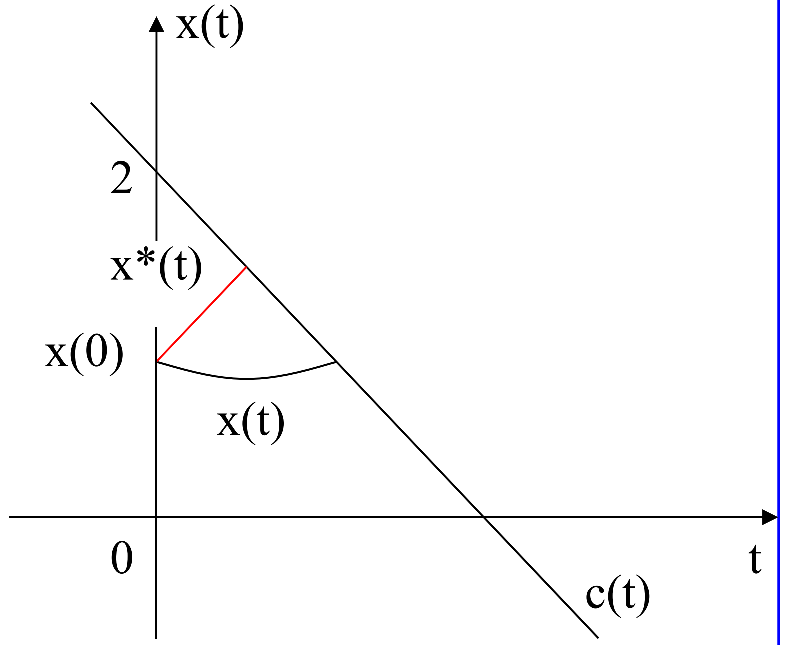
$$F(x,\dot{x},t)=(1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}$$

欧拉方程为：

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=0$$

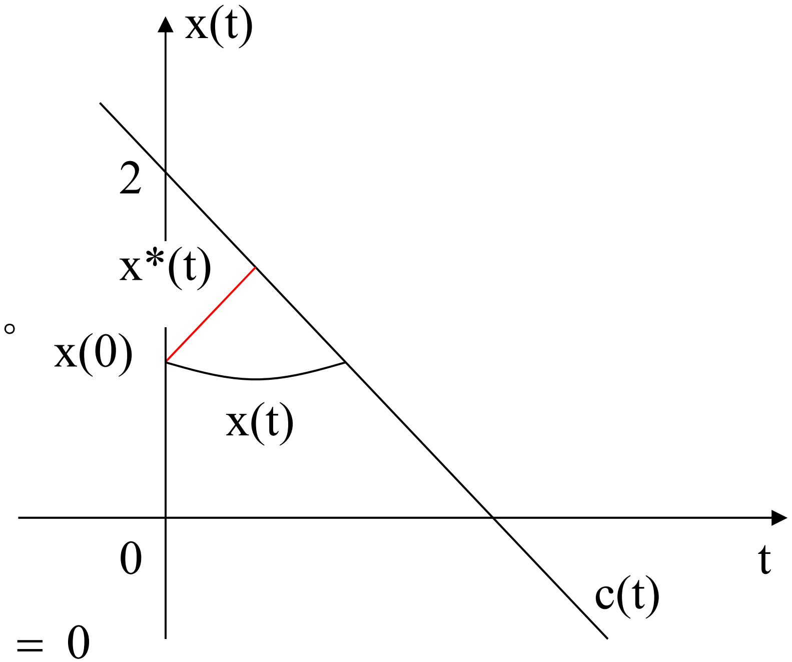
$$0-\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{x}}{(1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}}\right]=0$$

$$\frac{\dot{x}}{(1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}}=c$$ 。



$$\dot{x}^2 = \frac{c}{1-c^2} = a^2$$

$$\dot{x} = a \qquad x(t) = at + b$$



这是一个$x(t_0)$固定，$x(t_f)$约束情况下的极值问题。由边界条件

$x(t_0)=x（0）\Rightarrow b=1, x(t)=at+1$

横截条件 $$\left.\left\{[\dot{c}(t)-\dot{x}(t)]\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}+F\right\}\right|_{t=t_f}=0$$

$$\Rightarrow \left.\left\{[-1-\dot{x}]\frac{\dot{x}}{(1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}}+(1+\dot{x})^{\frac{1}{2}}\right\}\right|_{t=t_f}=0$$

解得 $\dot{x}(t_f)=1 \qquad a=1$

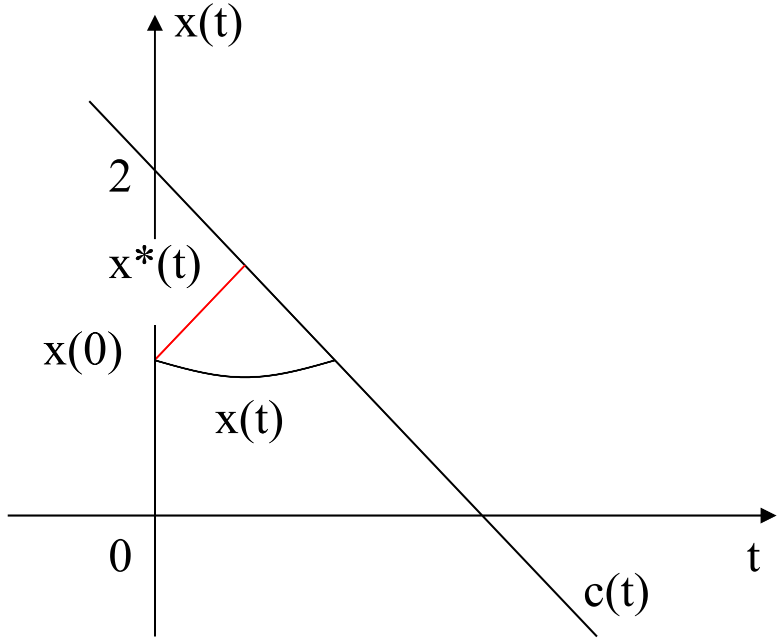
$$x^*(t)=t+1$$ 。

由边界条件　$x(t_f) = C(t_f)$

$$t_f + 1 = 2 - t_f$$

$$t_f^* = \tfrac{1}{2}$$

$$J^* = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 + \dot{x}^{*2})^{\frac{1}{2}} dt = \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$



无条件约束的泛函极值问题中的边界条件和横截条件列表

t_f固定	$x(t_0)$固定 $x(t_f)$固定	$x(t_0)=x_0 \qquad x(t_f)=x_f$
	$x(t_0)$自由 $x(t_f)$固定	$x(t_f)=x_f \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right\|_{t=t_0}=0$
t_f固定	$x(t_0)$固定 $x(t_f)$自由	$x(t_0)=x_0 \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right\|_{t=t_f}=0$
	$x(t_0)$自由 $x(t_f)$自由	$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right\|_{t=t_0}=0 \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right\|_{t=t_f}=0$
t_f自由	$x(t_0)$固定 $x(t_f)$自由	$x(t_0)=x_0 \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right\|_{t=t_f}=0 \qquad F[x,\dot{x},t]\big\|_{t=t_f}=0$
	$x(t_0)$固定 $x(t_f)$约束	$x(t_0)=x_0$ $x(t_f)=C(t_f)$ $\left.\left\{[\dot{c}(t)-\dot{x}(t)]\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}+F\right\}\right\|_{t=t_f}=0$
	$x(t_0)$约束 $x(t_f)$固定	$x(t_0)=\psi(t_0)$ $x(t_f)=x_f$ $\left.\left\{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}[\dot{\psi}(t)-\dot{x}(t)]+F\right\}\right\|_{t=t_0}=0$

3：向量函数泛函极值问题

在上面所讨论的公式中，都假定x是1维变量，但是，所有公式都可推广到n维变量的情况

设性能指标 $J=\int_{t_0}^{t_f} F(x,\dot{x},t)dt$

式中

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

则欧拉方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=0$$

式中

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_n} \end{bmatrix}$$

。

对于始端时刻t_0和终端时刻t_f都给定时，横截条件

$$\eta^T(t)\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\bigg|_{t_0}^{t_f}=0$$

式中

$$\eta(t)=\begin{bmatrix}\eta_1(t)\\ \eta_2(t)\\ \vdots\\ \eta_n(t)\end{bmatrix}$$

对于未给定终端时刻t_f时的横截条件为：

（1）给定始端和终端有约束：

$$\left\{[\dot{c}(t)-\dot{x}(t)]^T\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}+F\right\}\bigg|_{t=t_f}=0$$

（2）给定终端和始端有约束

$$\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)^T[\dot{\psi}(t)-\dot{x}(t)]+F\right\}\bigg|_{t=t_0}=0$$ 。

对于始端时刻t_0和终端时刻t_f都给定时，横截条件

$$\eta^T(t)\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\bigg|_{t_0}^{t_f}=0$$

式中

$$\eta(t)=\begin{bmatrix}\eta_1(t)\\ \eta_2(t)\\ \vdots\\ \eta_n(t)\end{bmatrix}$$

对于未给定终端时刻t_f时的横截条件为：

（1）给定始端和终端有约束：

$$\left\{[\dot{c}(t)-\dot{x}(t)]^T\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}+F\right\}\bigg|_{t=t_f}=0$$

（2）给定终端和始端有约束

$$\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)^T[\dot{\psi}(t)-\dot{x}(t)]+F\right\}\bigg|_{t=t_0}=0$$。

课程概要

- 概述（6－1）
- 静态最优化问题（6－3）
- 泛函的概念及变分法（6－6）
- 有约束条件的泛函极值（6－7）
- 线性二次型最优控制问题（6-12）

用变分法求解最优控制问题

设系统状态方程:

$$\dot{x} = f(x,u,t)$$

性能指标:

$$J = \theta[x(t_f),t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F(x,u,t)dt$$

式中 $x \in R^n$ $u \in R^p$ θ和F为纯量函数

最优控制问题就是寻求最优控制 $u^*(t)$ 及最优状态轨迹 $x^*(t)$

使性能指标J取极值.

一.初始时刻 t_0及始端状态$x(t_0)$给定, t_f 给定,终端自由

构造增广泛函

$$J_a = \theta[x(t_f),t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{F(x,u,t) + \lambda^T [f(x,u,t) - \dot{x}]\} dt$$

令哈密尔顿函数:

$$H(x,u,\lambda,t) = F(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t)$$

则

$$J_a = \theta[x(t_f),t_f] + \int_{t_0}^{t_f} [H(x,u,\lambda,t) - \lambda^T \dot{x}] dt$$

$$\delta J_a = (\frac{\partial \theta}{\partial x})^T \delta x\Big|_{t=t_f} + \int_{t_0}^{t_f} [(\frac{\partial H}{\partial x})^T \delta x + (\frac{\partial H}{\partial u})^T \delta u + (\frac{\partial H}{\partial \lambda})^T \delta\lambda - \dot{x}^T \delta\lambda - \lambda^T \delta\dot{x}] dt = 0$$

注意到:

$$\int_{t_0}^{t_f} \lambda^T \delta\dot{x} dt = \lambda^T \delta x\Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T \delta x dt \qquad \delta x(t_0) = 0$$

$$\delta J_a = (\frac{\partial \theta}{\partial x} - \lambda)^T \delta x\Big|_{t=t_f} + \int_{t_0}^{t_f} [(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda})^T \delta x + (\frac{\partial H}{\partial u})^T \delta u + (\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \dot{x})^T \delta \lambda] dt = 0$$

为使上式成立,应同时满足下列方程:

欧拉方程(伴随方程) $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$

状态方程 $\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}$

控制方程 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$

横截条件

$$(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \lambda)^T \delta x\Big|_{t=t_f} = 0$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \theta}{\partial x}\Big|_{t_f}$$

对于两端固定的情况下横截条件 $x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$

例 1 设系统状态方程为

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$$

$x(t)$ 的边界条件为 $x(0)=1, x(t_f)=0$

求最优控制 $u(t)$ 使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}(x^2+u^2)dt$$

为最小

解: 作哈密尔顿函数 $H = \frac{1}{2}(x^2+u^2)+\lambda(-x+u)$

欧拉方程 $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ $\dot{\lambda} = -x+\lambda$

控制方程 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0,$ $u+\lambda = 0$

状态方程 $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda},$ $\dot{x} = -x+u$

消除u $\begin{cases} \dot{\lambda} = -x + \lambda \\ \dot{x} = -x - \lambda \end{cases}$ $\begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ x \end{bmatrix}$

$$x = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t} + (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t}]x(0) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t})\lambda(0)$$

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t})x(0) + \frac{1}{2\sqrt{2}}[(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t} - (\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t}]\lambda(0)$$

由边界条件 $x(0) = 1, x(t_f) = 0$

$$\lambda(0) = \frac{(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t_f} + (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t_f}}{e^{\sqrt{2}t_f} - e^{-\sqrt{2}t_f}}$$

得最优控制

$$u = -\lambda$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\{e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t} + \frac{(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t_f} + (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t_f}}{e^{\sqrt{2}t_f} - e^{-\sqrt{2}t_f}}[(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t} + (\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{\ }t}]\}$$

例 2　有系统如图所示，欲使系统在2s内从状态

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \begin{bmatrix} \theta(0) \\ \omega(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{转移到} \quad \begin{bmatrix} \theta(2) \\ \omega(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求最优控制 $u(t)$ 使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2}\int_0^2 u^2 dt$$

为最小

例 3　例2中终端状态为 $\begin{bmatrix} \theta(2) \\ \omega(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{自由} \end{bmatrix}$　求最优控制 $u^*(t)$　$x^*(t)$

二. 初始时刻 t_0 及始端状态 $x(t_0)$ 给定, t_f 给定,终端约束.

设终端约束方程为 $M[x(t_f),t_f]=M[x(t_f)]=0 \qquad M\in R^q$

构造增广泛函:

$$J_a=\theta[x(t_f)]+v^T M[x(t_f)]+\int_{t_0}^{t_f}\{F(x,u,t)+\lambda^T[f(x,u,t)-\dot{x}]\}dt$$

$$=\theta[x(t_f)]+v^T M[x(t_f)]+\int_{t_0}^{t_f}\{H(x,u,\lambda,t)-\lambda^T\dot{x}]\}dt$$

式中 $v\in R^q$

$$\delta J_a=[\frac{\partial\theta}{\partial x}+(\frac{\partial M}{\partial x})^T v-\lambda]^T\delta x\Big|_{t=t_f}+\int_{t_0}^{t_f}[(\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda})^T\delta x+(\frac{\partial H}{\partial u})^T\delta u+(\frac{\partial H}{\partial\lambda}-x)^T\delta\lambda]dt$$
$$=0$$

J取极值的必要条件是

正则方程
$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} & \text{状态方程} \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} & \text{欧拉方程} \end{cases}$$

控制方程
$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

边界条件和横截条件
$$x(t_0) = x_0，\quad M[x(t_f)] = 0$$

$$\lambda(t_f) = \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^T v\right]\Bigg|_{t=t_f}$$

三. 初始时刻 t_0 及始端状态 $x(t_0)$ 给定, t_f 自由,终端约束

设终端约束为 $M[x(t_f),t_f]=0$

构造增广泛函 $J_a=\theta[x(t_f),t_f]+v^TM[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}[H(x,u,\lambda,t)-\lambda^T\dot{x}]dt$

$\delta J_a = 0$ 得J取极值的必要条件为:

正则方程
$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}\\[2ex] \dot{\lambda}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}\end{cases}$$

控制方程 $\dfrac{\partial H}{\partial u}=0$

边界条件和横截条件 $x(t_0)=x_0,\quad M[x(t_f),t_f]=0$

$$\lambda(t_f)=[\frac{\partial \theta}{\partial x}+(\frac{\partial M}{\partial x})^T v]\Big|_{t=t_f}$$

$$[H+\frac{\partial \theta}{\partial t}+v^T\frac{\partial M}{\partial t}]\Big|_{t=t_f}=0$$

用变分法求解最优解的必要条件

性能指标 $J=\theta[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}F(x,u,t)dt$

$$H(x,u,\lambda,t)=F(x,u,t)+\lambda^T f(x,u,t)$$

系统方程 $\dot{x}=f(x,u,t)$

约束条件 $x(t_0)=x_0,\quad M[x(t_f),t_f]=0$

正则方程 $\dot{x}=\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}\qquad \dot{\lambda}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}$

控制方程 $\dfrac{\partial H}{\partial u}=0$

条件边界条件和横截条件

t_f 给定	终端固定	$x(t_0)=x_0,\quad M[x(t_f)]=0 \Rightarrow x(t_f)=x_f$
	终端自由	$x(t_0)=x_0\quad \lambda(t_f)=\dfrac{\partial\theta}{\partial x(t_f)}$
	终端约束	$x(t_0)=x_0\quad M[x(t_f)]=0\quad \lambda(t_f)=[\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+(\dfrac{\partial M}{\partial x})^T v]_{t_f}$
t_f 自由	终端固定	$x(t_0)=x_0\quad x(t_f)=x_f\quad H(t_f)=-\dfrac{\partial\theta}{\partial t_f}$
	终端自由	$x(t_0)=x_0\quad \lambda(t_f)=\dfrac{\partial\theta}{\partial x(t_f)}\quad H(t_f)=-\dfrac{\partial\theta}{\partial t_f}$
	终端约束	$x(t_0)=x_0\quad M[x(t_f),t_f]=0$ $\lambda(t_f)=[\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+(\dfrac{\partial M}{\partial x})^T v]\Big\vert_{t=t_f}\quad H(t_f)=-[\dfrac{\partial\theta}{\partial t}+v^T\dfrac{\partial M}{\partial t}]\Big\vert_{t=t_f}$

例4 已知系统状态方程为 $\dot{x} = u(t), x(0) = 1$

求最优控制 $u^*(t)$ 使性能指标 $J = \int_0^1 e^{2t}(x^2 + u^2)dt$ 为最小

解 本题为 t_f 给定，终端自由的情况

$$H = e^{2t}(x^2 + u^2) + \lambda u$$

正则方程: $\dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$ 得 $\dot{x} = u$

$\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}$ $\dot{\lambda} = -2xe^{2t}$

控制方程 $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$ $\lambda + 2ue^{2t} = 0 \to \dot{\lambda} = -2(2u + \dot{u})e^{2t}$

$$-2xe^{2t} = -2(2u + \dot{u})e^{2t}$$

消除u $\ddot{x} + 2\dot{x} - x = 0$

$$x(t)=c_1e^{-(1+\sqrt{2})t}+c_2e^{-(1-\sqrt{2})t}$$

$$u=\dot{x}=-(1+\sqrt{2})c_1e^{-(1+\sqrt{2})t}-(1-\sqrt{2})c_2e^{-(1-\sqrt{2})t}$$

边界条件与横截条件 $x(t_0)=x_0\quad \lambda(t_f)=\dfrac{\partial\theta}{\partial x(t_f)}\Rightarrow x(0)=1,\lambda(1)=0$

求得

$$c_1=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)e^{-2\sqrt{2}}}\qquad c_2=\frac{(\sqrt{2}+1)e^{-2\sqrt{2}}}{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)e^{-2\sqrt{2}}}$$

最后得最优控制 $u^*(t)=\dfrac{-1}{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)e^{-2\sqrt{2}}}[e^{-(1+\sqrt{2})t}-e^{-2\sqrt{2}}\cdot e^{-(1-\sqrt{2})t}]$

$$=-1.7957[e^{-2.4142t}-0.0591e^{0.4142t}]$$

例5　设系统的状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$

$$x_1(0) = 0 \qquad x_2(0) = 0$$

性能指标　$J = \frac{1}{2}[x_1(2) - 5]^2 + \frac{1}{2}[x_2(2) - 2]^2 + \frac{1}{2}\int_0^2 u^2 dt$

终端约束条件　$x_1(2) + 5x_2(2) = 15$

试求使 $J = \min$ 的最优控制

解　本题为 $t_f = 2$给定　终端受约束的 最优解问题

$$H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-x_2 + u)$$

$$= \frac{1}{2}u^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)x_2 + \lambda_2 u$$

$$\theta = \frac{1}{2}[x_1(2) - 5]^2 + \frac{1}{2}[x_2(2) - 2]^2$$

$$M = x_1(2) + 5x_2(2) - 15 = 0$$

正则方程 $\dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} \to \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_2 + u$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \to \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dot{\lambda}_1 = 0, \lambda_1(t) = c_1$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = \lambda_2 - \lambda_1, \lambda_2(t) = c_2 e^t + c_1$$

$$H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-x_2 + u)$$

$$= \frac{1}{2}u^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)x_2 + \lambda_2 u$$

$$\theta = \frac{1}{2}[x_1(2) - 5]^2 + \frac{1}{2}[x_2(2) - 2]^2$$

$$M = x_1(2) + 5x_2(2) - 15 = 0$$

控制方程 $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \to u + \lambda_2 = 0 \to u(t) = -c_2 e^t - c_1$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u$$

$$x_2(t) = c_3 e^{-t} - \frac{1}{2}c_2 e^t - c_1$$

$$x_1(t) = -c_3 e^{-t} - \frac{1}{2}c_2 e^t - c_1 t + c_4$$

边界条件和横截条件

$$x_1(t) = -c_3 e^{-t} - \frac{1}{2} c_2 e^{t} - c_1 t + c_4$$

$$x_2(t) = c_3 e^{-t} - \frac{1}{2} c_2 e^{t} - c_1$$

$$\theta = \frac{1}{2}[x_1(2) - 5]^2 + \frac{1}{2}[x_2(2) - 2]^2$$

$$M = x_1(2) + 5x_2(2) - 15 = 0$$

$$x(0) = 0, \rightarrow -0.5c_2 - c_3 + c_4 = 0$$

$$-c_1 - 0.5c_2 + c_3 = 0$$

$$\lambda_1(t_f) = \frac{\partial \theta}{\partial x_1(t_f)} + \left(\frac{\partial M}{\partial x_1(t_f)}\right)^T v(t_f)$$

$$\lambda_1(2) = x_1(2) - 5 + v = c_1$$

$$\lambda_2(t_f) = \frac{\partial \theta}{\partial x_2(t_f)} + \left(\frac{\partial M}{\partial x_2(t_f)}\right)^T v(t_f)$$

$$\lambda_2(2) = x_2(2) - 2 + 5v = c_2 e^2 + c_1$$

代入 $x_1(2)$, $x_2(2)$

$$
\begin{cases}
-0.5c_2 - c_3 + c_4 = 0 \\
-c_1 - 0.5c_2 + c_3 = 0 \\
-7c_1 - 3e^2 c_2 + 4e^{-2} c_3 + c_4 = 15 \leftarrow x_1(2) + 5x_2(2) = 15 \\
-3c_1 - 0.5e^2 c_2 - e^{-2} c_3 + c_4 + v = 5 \\
-2c_1 - 1.5e^2 c_2 + e^{-2} c_3 + 5v = 2
\end{cases}
$$

解得 $c_1 = -0.73 \qquad c_2 = -0.13$

$$
u^*(t) = -c_2 e^t + c_1 = 0.13e^t + 0.73
$$

例6　设系统的状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$

$x(0) = 0$　　t_f待定

性能指标　$J = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dt$

终端约束条件　$x_1(1) + x_2(1) - 1 = 0$

试求使 $J = \min$ 的最优控制

课程概要

- 概述（6－1）
- 静态最优化问题（6－3）
- 泛函的概念及变分法（6－6）
- 有约束条件的泛函极值（6－7）
- 二次型最优控制（6－8）

6.12 线性二次型问题的最优控制

6.12.2 线性连续系统状态调节器

1:有限时间状态调节器

设线性系统状态方程为 $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \qquad x(t_0) = x_0$

二次型性能指标为

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)Px(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

$x(t) \in R^n, u(t) \in R^p, u(t)$ 不受约束 $\quad x(t_f)$ 自由，t_f 有限

对于 $t \in [t_0, t_f] \quad A(t), B(t), Q(t), R(t)$ 均连续、有界

$P \geq 0, P = P^T, Q \geq 0, Q = Q^T, R > 0, R = R^T$

要求寻找最优控制$u^*(t)$，使J为最小。

令 $$H(x,u,\lambda,t)=\frac{1}{2}x^T(t)Q(t)x(t)+\frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t)+\lambda^T[A(t)x(t)+B(t)u(t)]$$

正则方程 $$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}=A(t)x(t)+B(t)u(t)$$

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}=-Q(t)x(t)-A^T(t)\lambda(t)$$

由于$u(t)$不受约束 $$\frac{\partial H}{\partial u}=0\Rightarrow R(t)u(t)+B^T(t)\lambda(t)=0$$

$$u^*(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t)$$

代入正则方程

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)-B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t)$$

$$\dot{\lambda}(t)=-Q(t)x(t)-A^T(t)\lambda(t)$$

这是一组一阶微分方程，边界条件和横截条件为

边界条件和横截条件为

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -Q(t)x(t) - A^T(t)\lambda(t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial}{\partial x(t_f)}\left[\frac{1}{2}x^T(t_f)Px(t_f)\right] = Px(t_f)$$

显然，可以假定 $\lambda(t)$与$x(t)$之间存在线性关系。

$$\lambda(t) = K(t)x(t)$$

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{K}(t)x(t) + K(t)\dot{x}(t)$$

$$= \left[\dot{K}(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\right]x(t)$$

$$\dot{\lambda}(t) = [-Q(t) - A^T(t)K(t)]x(t)$$

$$\therefore \dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - Q(t)$$

上式称为矩阵黎卡提方程，其边界条件为 $K(t_f) = P$

由黎卡提方程求出$K(t)$后，则最优控制为

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t)$$

引理5-1　若$K(t)$是黎卡提方程的解，则$K(t)$对所有的 $t\in[t_0,t_f]$ 是对称的

$$K(t)=K^T(t)$$

引理 5-2　控制 $u(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t)$ 至少产生了一个局部最小。

引理 5-3　若上述状态调节器问题的最优解存在，则最优控制是唯一的。

定理 5-4　已知线性时变系统的状态方程

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

和性能指标：$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)Px(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$

其中$u(t)$不受约束，t_f有限，$P(t)$和$Q(t)$为半正定对称矩阵，$R(t)$为正定对称阵，则最优控制存在且是唯一的，并且由下式确定：

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t)$$

其中对称矩阵$K(t)$是下列黎卡提方程的唯一解

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - Q(t)$$

$$K(t_f) = P$$

而最优状态$x^*(t)$则是下列线性微分方程的解：

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)]x(t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

几点说明：

1) 最优控制规律是一个状态线性反馈规律，它能方便地实现闭环最优控制；

2) 由于$K(t)$是非线性微分方程的解，通常情况下难以求得解析解，需要由计算机求出其数值解，又因为其边界条件在终端处，所以需要逆时间方向求解，因此应在过程开始之前就将$K(t)$解出，存入计算机以供过程使用；

3) 只要控制时间$[t_0,t_f]$是有限的，$K(t)$就是时变的（即使状态方程和性能指标J是定常的），因而最优反馈系统将成为线性时变系统；

4) 将最优控制$u^*(t)$及最优状态轨线$x^*(t)$代入性能指标函数，得性能指标得最小值为：

$$J^* = \frac{1}{2} x^T(t_0) K(t_0) x(t_0)$$

5) 当控制时间$[t_0,t_f]$为有限时间时，状态调节器最优解的存在不要求系统能控，这是因为所采用的性能指标是为了保持系统的状态$x(t)$接近零状态。当控制时间$[t_0,t_f]$为有限时间时，即使系统不能控，不能控状态对性能指标的影响也是有限的，在$[t_0,t_f]$区间中性能指标不至于变为无穷，故最优控制存在。如果$t_f \to \infty$，则只有当系统能控时，状态调节器才存在最优解。

例5-1　已知一阶系统的状态方程为：

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t) \qquad x(0) = x_0$$

二次型性能指标为：

$$J = \frac{1}{2} f x^2(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left[q x^2(t) + r u^2(t) \right] dt$$

$f \geq 0, q > 0, r > 0$　　求使系统性能指标J为最小值使的最优控制$u^*(t)$。

解　$P = f, Q(t) = q, R(t) = r$

最优控制

$$u^*(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) K(t) x(t)$$

$$= -\frac{1}{r} \cdot 1 \cdot K(t) x(t)$$

其中$K(t)$为黎卡提方程 $\dot{K}(t)=-2aK(t)+\frac{1}{r}K^2(t)-q$

$K(t_f)=f$ 的解

$$K(t)=r\cdot\frac{\beta+a+(\beta-a)\dfrac{f/r-a-\beta}{f/r-a+\beta}e^{2\beta(t-t_f)}}{1-\dfrac{f/r-a-\beta}{f/r-a+\beta}e^{2\beta(t-t_f)}}$$

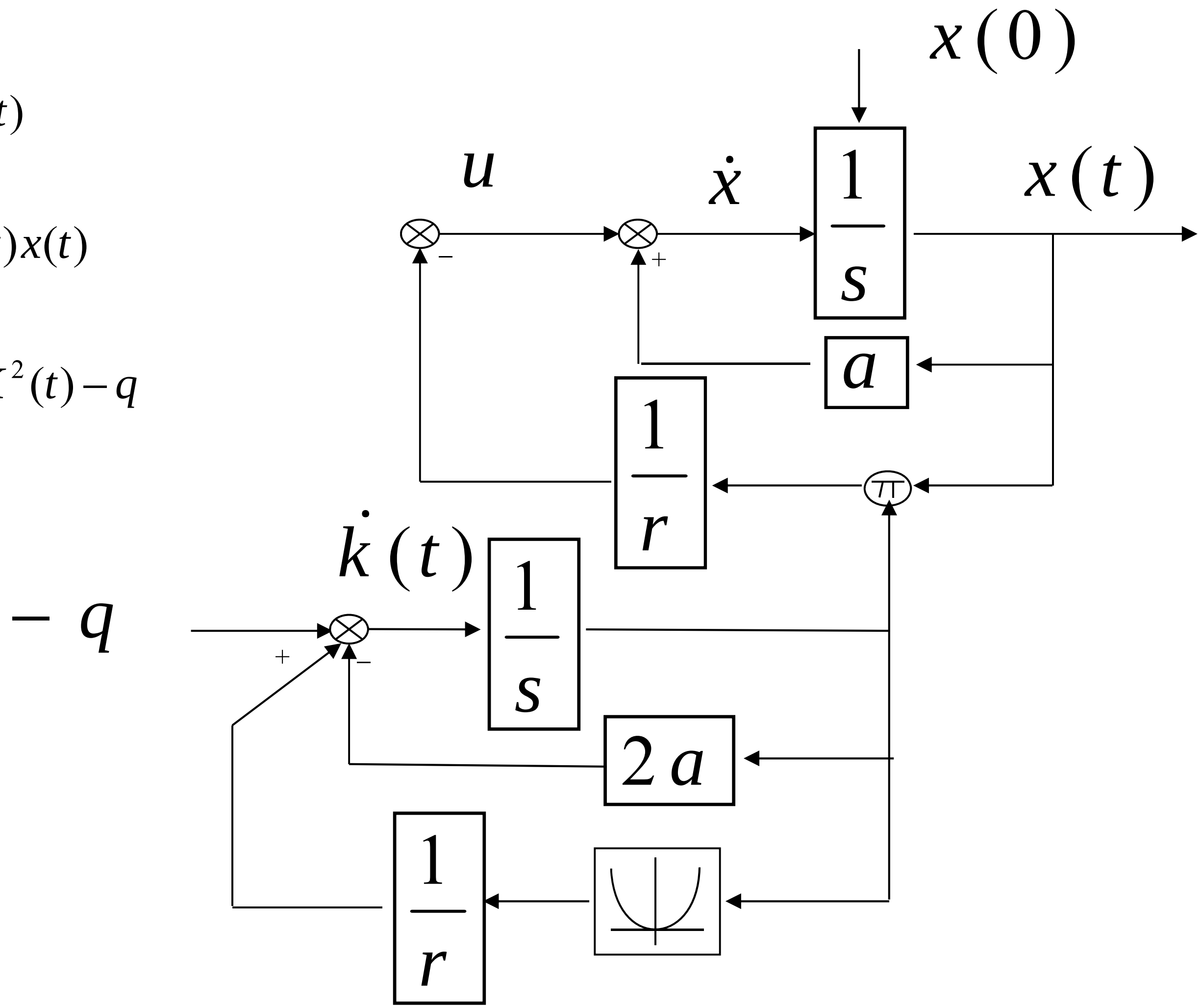
$$\beta=\sqrt{\frac{q}{r}+a^2}$$

最优线性反馈系统结构图

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t)$$

$$u^*(t) = -\frac{1}{r} \cdot 1 \cdot K(t)x(t)$$

$$\dot{K}(t) = -2aK(t) + \frac{1}{r}K^2(t) - q$$



例5-2 二阶系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

二次型性能指标为

$$J = \frac{1}{2}\left[x_1^2(t_f) + 2x_2^2(t_f)\right] + \frac{1}{2}\int_0^3 \left(2x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2 + \frac{1}{2}u^2\right)dt$$

试求使系统性能指标J为最小的最优控制$u^*(t)$

解

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, R = \frac{1}{2}$$

最优控制为

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T K(t)x$$

因为$k(t)$为对称矩阵，设 $K(t)=\begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{12}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix}$

$$\therefore u^*(t)=-2k_{12}(t)x_1-2k_{22}(t)x_2$$

$K(t)$满足黎卡提方程

$$\dot{K}(t)+K(t)A+A^TK(t)-K(t)BR^{-1}B^TK(t)+Q=0$$

$$K(3)=P$$

整理得

$$\begin{cases} \dot{k}_{11}(t)=2k_{12}^2(t)-2 \\ \dot{k}_{12}(t)=-k_{11}(t)+2k_{12}(t)k_{22}(t)-1 \\ \dot{k}_{22}(t)=-2k_{12}(t)+2k_{22}^2(t)-4 \\ k_{11}(3)=1 \\ k_{12}(3)=0 \\ k_{22}(3)=2 \end{cases}$$

解此微分方程得$K(t)$，代入$u^*(t)$表达式，可得最优控制。显然，由于微分方程组的非线性性，不能求得其解析解，而只能利用计算机求得其数值解。

2:无限时间状态调节器

设线性定常系统状态方程为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

$[A,B]$能控，$u(t)$不受约束，二次型性能指标为

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$$

其中Q，R为常数矩阵 $Q \ge 0, Q = Q^T, R > 0, R = R^T$

要求确定最优控制$u^*(t)$，使J为最小。

与有限时间状态调节器相比，有如下几点不同：

1)系统是时不变的，性能指标中的权矩阵为常值矩阵。

2）终端时刻 $t_f \to \infty$

当$[t_0, t_f]$为有限时间时，最优控制系统是时变的；

$t_f \to \infty$ 希望最优控制系统是定常的。

3）终值权矩阵$P=0$ $t_f \to \infty$ 终值性能指标将失去工程意义

4）要求受控系统完全能控，以保证最优控制系统的稳定性

如果系统不可控 $t_f \to \infty$ 性能指标就有可能趋于无穷大，无法比较控制的优劣，也就无法确定最优控制。

结果如下

当 $Q \geq 0, Q = Q^T$ 矩阵对（A，B）完全能控时，存在唯一的最优控制：

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T\hat{K}x(t)$$

其中 $\hat{K}$ 为$n \times n$常值正定对称阵，它满足黎卡提代数方程：

$$\hat{K}A + A^T\hat{K} - \hat{K}BR^{-1}B^T\hat{K} + Q = 0$$

一般情况下，需要用数值方法求解。

闭环最优控制的状态方程为：

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T\hat{K})x \qquad x(t_0) = x_0$$

解此方程可得最优轨线$x^*(t)$，性能指标的最小值为：

$$J^* = \frac{1}{2}x^T(t_0)\hat{K}x(t_0)$$

上述最优控制系统并不一定是稳定的，只有矩阵 $G = A - BR^{-1}B^T\hat{K}$

的所有特征值都具有负实部时，系统才是稳定的，可能反复计算多次 [选Q求 $\hat{K}$

若 $\hat{K}$ 为正定对称阵，则闭环最优系统是稳定的。

可以证明，若$DD^T=Q$，（A，D）能观测，则对于对称非负定加权矩阵Q，当（A，B）能控时，可以保证最优控制$u^*(t)$的存在性和唯一性，且闭环最优控制系统是稳定的。

例5-4 考虑下列可控系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = u$$

性能指标
$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left[x_1^2 + 2bx_1x_2 + ax_2^2 + u^2\right]dt$$

$$a - b^2 > 0$$

求最优控制$u(t)$使性能指标J为最小。

解

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P = 0, Q = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix}, R = 1$$

由于 $a - b^2 > 0$ 则Q为正定阵。

设

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \hat{k}_{11} & \hat{k}_{12} \\ \hat{k}_{12} & \hat{k}_{22} \end{bmatrix}$$

可由黎卡提代数方程

$$\hat{K}A + A^T\hat{K} - \hat{K}BR^{-1}B^T\hat{K} + Q = 0$$

求得
$$\begin{cases} \hat{k}_{12} = \pm 1 \\ -\hat{k}_{11} + \hat{k}_{12}\hat{k}_{22} - b = 0 \\ -2\hat{k}_{12} + \hat{k}_{22}^2 - a = 0 \end{cases}$$

可以求出
$$\begin{cases} \hat{k}_{12} = \pm 1 \\ \hat{k}_{11} = \hat{k}_{12}\hat{k}_{22} - b \\ \hat{k}_{22} = \pm\sqrt{2\hat{k}_{12} + a} \end{cases}$$

考虑到 $\hat{K}, Q$ 应为正定对称矩阵，则
$$\begin{cases} \hat{k}_{11} > 0 \\ \hat{k}_{11}\hat{k}_{22} - \hat{k}_{12}^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{k}_{11} > 0 \\ \hat{k}_{22} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{k}_{12} = 1 \\ \hat{k}_{22} = \sqrt{a+2} \\ \hat{k}_{11} = \sqrt{a+2} - b \end{cases}$$

$\hat{k}_{12} = -1$ 是不满足要求的，证明如下

$$\begin{cases} \hat{k}_{12} = \pm 1 \\ \hat{k}_{11} = \hat{k}_{12}\hat{k}_{22} - b \\ \hat{k}_{22} = \pm\sqrt{2\hat{k}_{12} + a} \end{cases}$$

若 $\hat{k}_{12} = -1$

$$\hat{k}_{22} = \sqrt{a-2} \Rightarrow a > 2$$

$$\hat{k}_{11} = \hat{k}_{12}\hat{k}_{22} - b = -\sqrt{a-2} - b > 0$$

$$\Rightarrow b < -\sqrt{a-2} < 0$$

由于 $\hat{k}_{11}\hat{k}_{22} - \hat{k}_{12}^2 > 0$

$$(-\sqrt{a-2} - b)\sqrt{a-2} - 1 > 0$$

$$-(a-2) - b\sqrt{a-2} - 1 > 0$$

$$-b\sqrt{a-2} > a - 1$$

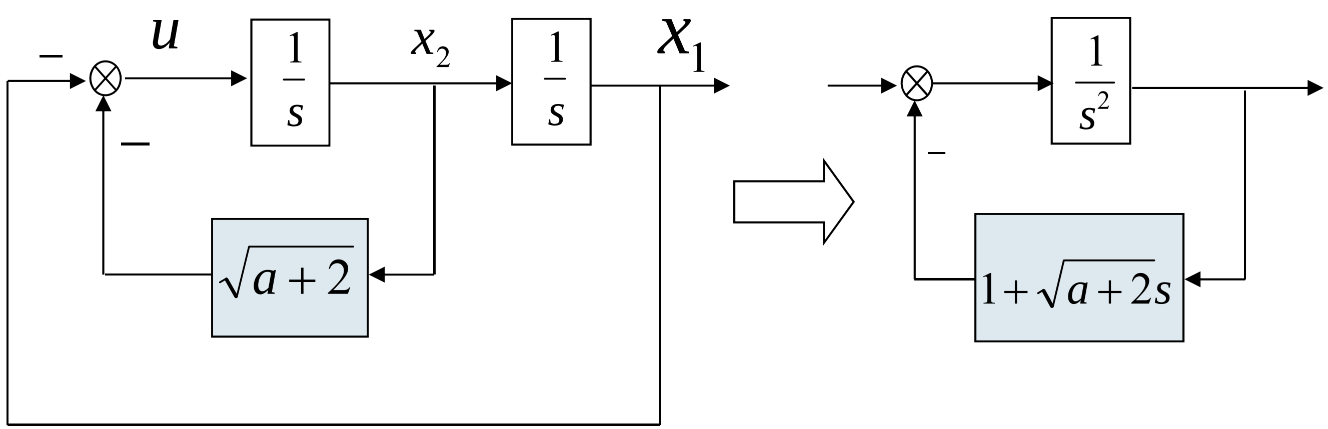
由于 $b < 0, a > 2$ 上式两边为正，平方后有 $b^2(a-2) > (a-1)^2$

$$b^2 > \frac{(a-1)^2}{a-2} = a + \frac{1}{a-2} > a$$

与 $a - b^2 > 0$ 矛盾

最优控制为 $u(t) = -R^{-1}B^T\hat{K}x(t) = -\hat{k}_{12}x_1 - \hat{k}_{22}x_2 = -x_1 - \sqrt{a+2}x_2$

最优控制系统结构图为 $\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = u$



状态调节器的稳定性

由线性定常最优调节器组成的闭环反馈控制系统状态方程为：

$$\dot{x} = Ax + Bu = [A - BR^{-1}B^T\hat{K}]x \qquad u^*(t) = -R^{-1}B^T\hat{K}x(t)$$

设李雅普诺夫函数为

$$V(x) = x^T\hat{K}x$$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T\hat{K}x + x^T\hat{K}\dot{x} = -x^T[Q + \hat{K}BR^{-1}B^T\hat{K}]x$$

由于Q、R均为正定阵，故 $\dot{V}(x)$ 负定，即系统是渐近稳定的。

2 ：无限时间定常输出调节器

设线性定常系统状态方程为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (5\text{-}1)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

其中$u(k)$不受约束，终端时刻t_f无限，A、B、C为适当维数的常值矩阵。二次型性能指标：

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[y^T(t)Qy(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \qquad (5\text{-}2)$$

其中Q，R为对称正定常值矩阵，要求确定最优控制$u^*(k)$，使性能指标J为最小。

定理5-7 对于系统(5-1)和性能指标(5-2),若(A,B,C)能控能观测，则存在唯一的最优控制：

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T\hat{K}x(t)$$

其中 $\hat{K}$ 为对称正定常值矩阵，它满足黎卡提代数方程

$$\hat{K}A + A^T\hat{K} - \hat{K}BR^{-1}B^T\hat{K} + C^TQC = 0$$

最优轨线$x^*(t)$满足微分方程

$$\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^T\hat{K})x(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

性能指标的最小值为：

$$J^* = \frac{1}{2}x^T(t_0)\hat{K}x(t_0)$$

设 $\hat{K}=\begin{bmatrix}\hat{k}_{11} & \hat{k}_{12}\\ \hat{k}_{12} & \hat{k}_{22}\end{bmatrix}$ 代入黎卡提矩阵代数方程

$$\hat{K}A+A^T\hat{K}-\hat{K}BR^{-1}B^T\hat{K}+C^TQC=0$$

求得

$$\begin{cases}\hat{k}_{12}=\pm\sqrt{r}\\ \hat{k}_{11}-\hat{k}_{12}\hat{k}_{22}/r=0\\ 2\hat{k}_{12}-\hat{k}_{22}^2/r=0, \qquad \Rightarrow \hat{k}_{22}=\pm\sqrt{2\hat{k}_{12}r}\Rightarrow \hat{k}_{12}\geq 0\end{cases}$$

$\hat{K}$ 阵的正定性，要求 $\hat{k}_{11}>0$，$\hat{k}_{11}\hat{k}_{22}-\hat{k}_{12}^2>0\Rightarrow \hat{k}_{22}>0$

故

$$\hat{k}_{12}=\sqrt{r},\quad \hat{k}_{22}=\left(2r\sqrt{r}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \hat{k}_{11}=(4r)^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore \hat{K}=\begin{bmatrix}(4r)^{\frac{1}{4}} & \sqrt{r}\\ \sqrt{r} & \sqrt{r}(4r)^{\frac{1}{4}}\end{bmatrix}$$

最优控制规律

$$u^*(t)=-R^{-1}B^T\hat{K}x(t)=-\frac{1}{\sqrt{r}}\left[x_1+(4r)^{\frac{1}{4}}x_2\right]$$

5-4 线性连续系统输出跟踪器

1：线性时变系统的跟踪问题

设线性时变系统为 $\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t),\qquad x(t_0)=x_0$

$y(t)=C(t)x(t)$

其中 $x\in R^n$，$u\in R^p$，$y\in R^m$

控制$u(t)$不受约束，时变矩阵$A(t)$、$B(t)$、$C(t)$具有适当的维数，且在$[t_0，t_f]$上连续、有界,，矩阵对$(A，C)$完全能观。

所谓跟踪问题就是寻找最优控制，使系统的实际输出$y(t)$在给定的时间区间$[t_0，t_f]$上尽可能地逼近理想输出$z(t)$,而又不过多地消耗能量。

定义误差向量为 $e(t)=z(t)-y(t)=z(t)-C(t)x(t)$

性能指标为 $$J=\frac{1}{2}e^T(t_f)Pe(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[e^T(t)Q(t)e(t)+u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

其中P、 $Q(t)$为半正定对称矩阵， $R(t)$为正定对称矩阵。

哈密尔顿函数：$$H=\frac{1}{2}[z(t)-C(t)x(t)]^T Q(k)[z(t)-C(t)x(t)]+\frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t)$$
$$+\lambda^T(t)[A(t)x(t)+B(t)u(t)]$$

正则方程
$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial\lambda(t)}=A(t)x(t)+B(t)u(t)$$
$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x(t)}=C^T(t)Q(t)[z(t)-C(t)x(t)]-A^T(t)\lambda(t)$$

控制方程
$$\frac{\partial H}{\partial u(t)}=R(t)u(t)+B^T(t)\lambda(t)=0$$
$$u^*(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t)$$

边界条件和横截条件 $x(t_0)=x_0$
$$\lambda(t_f)=\frac{\partial\theta}{\partial x(t_f)}=C^T x(t_f)P[C(t_f)x(t_f)-z(t_f)]$$

假设
$$\lambda(t)=K(t)x(t)-g(t)$$
$$\dot{\lambda}(t)=\dot{K}(t)x(t)+K(t)\dot{x}(t)-\dot{g}(t)$$
$$K(t_f)=C^T(t_f)PC(t_f)$$
$$g(t_f)=C^T(t_f)Pz(t_f)$$

把$u^*(t)$代入$\dot{x}(t)$　$\dot{x}(t)$　代入上式

$$\dot{\lambda}(t)=[\dot{K}(t)+K(t)A(t)-K(t)B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)K(t)]x(t)$$
$$+K(t)B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)g(t)-\dot{g}(t)$$

把λ(t)代入正则方程

$$\dot{\lambda}(t)=\left[-C^{T}(t)Q(t)C(t)-A^{T}(t)K(t)\right]x(t)+A^{T}(t)g(t)+C^{T}(t)Q(t)z(t)$$

上两式对任意时刻的$t\in[t_0,t_f]$　任何$x(t)$及任何$z(t)$均成立

$$\therefore\dot{K}(t)=-K(t)A(t)-A^{T}(t)K(t)+K(t)B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)K(t)-C^{T}(t)Q(t)C(t)$$
$$\dot{g}(t)=\left[K(t)B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)-A^{T}(t)\right]g(t)-C^{T}(t)Q(t)z(t)$$

上述两方程的边界条件　$K(t_f)=C^{T}(t_f)PC(t_f)$

$$g(t_f)=C^{T}(t_f)Pz(t_f)$$

利用计算机逆时间求数值解，得到$K(t)$、$g(t)$后，得出最优控制

$$u^{*}(t)=-R^{-1}B^{T}\left[K(t)x(t)-g(t)\right]$$

例5-10 设系统状态方程为 $\dot{x}_1 = x_2$

$$\dot{x}_2 = u$$

初始条件为t_0=0，$x_1(0)$=x_{10}，$x_2(0)$=x_{20}，输出方程为

$$y = x_1$$

求最优控制$u(t)$,使性能指标 $J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[(x_1 - z)^2 + u^2\right]dt$

为最小，z=a

解 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], Q = 1, R = 1, P = 0$

代入黎卡提方程，得 $\begin{cases} \dot{k}_{11} = -1 + k_{12}^2 \\ \dot{k}_{12} = -k_{11} + k_{12}k_{22} \\ \dot{k}_{22} = -2k_{12} + k_{22}^2 \end{cases}$

终端条件 $k_{11}(t_f) = k_{12}(t_f) = k_{22}(t_f) = 0$

如果设 $t_f \to \infty$ $\dot{k}_{11} = \dot{k}_{12} = \dot{k}_{22} = 0$

$$k_{11} = k_{22} = \sqrt{2}，\ k_{12} = k_{21} = 1$$

$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$ 代入 $\dot{g} = -\left[A - BR^{-1}B^T K\right]^T g - C^T Q z$

$$\dot{g}_1 = g_2 - z$$

$$\dot{g}_2 = -g_1 + \sqrt{2} g_2$$

终端条件 $g_1(t_f) = g_2(t_f) = 0$

如果设 $t_f \to \infty$ $\dot{g}_1 = \dot{g}_2 = 0$

$$g_2 = z = a，\ g_1 = \sqrt{2} a$$

最后，最优控制为

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T\left[Kx - g\right] = -x_1 - \sqrt{2} x_2 + g_2$$

2 ：线性定常系统的跟踪问题

对于线性定常系统，如果要求输出为常数向量，且终端时刻t_f很大时，则可按上述的线性时变系统的方法推导出一个近似的最优控制规律，虽然这个结构并不适应t_f趋向无穷大的情况，但对一般工程系统是足够精确的，有重要的实用价值。

设线性定常系统状态表达式为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

系统能控且能观测，设要求的输出z为常数向量，误差

$$e(t) = z - y(t) = z - C(t)x(t)$$

性能指标 $$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [e^T Qe + u^T Ru]dt$$

式中Q和R为正定的

当终端时间t_f足够大且有限时，得出如下近似结果：

最优控制为 $u^*(t) = -R^{-1}B^T\left[Kx(t) - g\right]$

K和g满足

$$-KA - A^TK + KBR^{-1}B^TK - C^TQC = 0$$

$$g \approx \left[KBR^{-1}B^T - A^T\right]^{-1}C^TQz$$

最优轨线应满足

$$\dot{x} = \left(A - BR^{-1}B^TK\right)x + BR^{-1}B^Tg$$

例5-11　设系统动态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

性能指标　$J = \int_0^{\infty} \left\{ [y(t) - 1]^2 + u^2(t) \right\} dt$　　即z=1

求最优控制使J为最小

解

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, Q = 1, R = 1, z = 1$$

设

$$K(t) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}$$

代入黎卡提方程，得：

$$\begin{cases} 400k_{12}^2 - 1 = 0 \\ 400k_{12}k_{22} - k_{11} + 2k_{12} = 0 \\ 400k_{22}^2 + 4k_{22} - 2k_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} \frac{6.63}{20} & 0.05 \\ 0.05 & \frac{4.63}{400} \end{bmatrix}$$

$$g = \left[KBR^{-1}B^T - A^T\right]^{-1} C^T Q z = \begin{bmatrix} \frac{6.63}{20} \\ \frac{1}{20} \end{bmatrix} z$$

最优控制律为

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -R^{-1}B^T\left[Kx - g\right] \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & \frac{4.63}{20} \end{bmatrix} x + z \\ &= 1 - x_1 - 0.23x_2 \end{aligned}$$

向量和矩阵的微分

1. 对数量（时间）的导数

设：X---L维向量； Y---M维向量； Z---N维向量；

- 向量对数量的导数

向量 $z(t)=\left[z_1(t) \quad z_2(t) \quad \ldots \quad z_n(t)\right]^T$

对数量t的导数：

$$\frac{dz(t)}{dt}=\left[\frac{dz_1(t)}{dt} \quad \frac{dz_2(t)}{dt} \quad \cdots \quad \frac{dz_n(t)}{dt}\right]^T$$

- 矩阵对数量的导数

nXm矩阵

$$F(t)=\begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1m}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2m}(t) \\ & \cdots & \cdots & \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

对数量t的导数：

$$\frac{dF(t)}{dt}=\begin{bmatrix} \frac{f_{11}(t)}{dt} & \frac{f_{12}(t)}{dt} & \cdots & \frac{f_{1m}(t)}{dt} \\ \frac{f_{21}(t)}{dt} & \frac{f_{22}(t)}{dt} & \cdots & \frac{f_{2m}(t)}{dt} \\ & \cdots & \cdots & \\ \frac{f_{n1}(t)}{dt} & \frac{f_{n2}(t)}{dt} & \cdots & \frac{f_{nm}(t)}{dt} \end{bmatrix}$$

2. 对向量的导数

- 数量对向量的导数

  数量函数f(**x**)对向量**x**的导数，定义为：

$$\frac{df(x)}{dx}=\left[\frac{df(x)}{dx_1}\quad\frac{df(x)}{dx_2}\quad\cdots\quad\frac{df(x)}{dx_L}\right]^T$$

- 向量对向量的导数

  向量函数**z(x)**对向量**x**的导数，定义为：

$$\frac{dz}{dx}=\begin{bmatrix} \frac{dz_1}{dx_1} & \frac{dz_1}{dx_2} & \cdots & \frac{dz_1}{dx_L} \\ \frac{dz_2}{dx_1} & \frac{dz_2}{dx_2} & \cdots & \frac{dz_2}{dx_L} \\ & \cdots & \cdots & \\ \frac{dz_n}{dx_1} & \frac{dz_n}{dx_2} & \cdots & \frac{dz_n}{dx_L} \end{bmatrix} \qquad \frac{dz^T}{dx}=\begin{bmatrix} \frac{dz_1}{dx_1} & \frac{dz_2}{dx_1} & \cdots & \frac{dz_n}{dx_1} \\ \frac{dz_1}{dx_2} & \frac{dz_2}{dx_2} & \cdots & \frac{dz_n}{dx_2} \\ \cdots & \cdots & & \\ \frac{dz_1}{dx_L} & \frac{dz_2}{dx_L} & \cdots & \frac{dz_n}{dx_L} \end{bmatrix}$$

- 两个向量的数积对向量的导数

设λ(t)和**f**[**x**(t),**u**(t),t]都是L维向量函数，其**数积**是：

$$\lambda^T f = f\lambda^T = \sum_{i=1}^{L}\lambda_i f_i$$

数积对向量x的导数是：

$$\frac{\partial}{\partial x}[\lambda^T f] = \frac{\partial}{\partial x}[\sum_{i=1}^{L}\lambda_i f_i]$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{L}\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\lambda_i \\ \sum_{i=1}^{L}\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\lambda_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{L}\frac{\partial f_i}{\partial x_L}\lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_L}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial 2_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_L}{\partial x_2} \\ & \cdots & \cdots & \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_L} & \frac{\partial f_2}{\partial x_L} & \cdots & \frac{\partial f_L}{\partial x_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_L \end{bmatrix} = \frac{\partial f^T}{\partial x}\lambda$$

3 复合函数的导数

- 向量复合函数的导数

  设向量复合函数**z**=**z**(**y**,**x**,t), **y**=**y**(**x**,t), **x**=**x**(t), 则

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{dz}{dt}=\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]\left[\frac{\partial y}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial y}{\partial t}\right]+\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}$$

4 线性型函数的导数

- 线性型函数对数量的导数

  设函数**z=Ay**, **A=A**(t), **y=y**(t), 则

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dA}{dt}y+A\frac{dy}{dt}$$

- 线性型函数对向量的导数

$$\frac{dz}{dy}=A$$

5 二次型函数的导数

- 二次型函数对向量的导数

  设函数f=$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{A}$=$\mathbf{A}$(t), $\mathbf{x}$=$\mathbf{x}$(t), 则

$$\frac{df}{dx} = Ax + A^T x$$

- 若矩阵A对称，则

$$\frac{df}{dx} = 2Ax$$