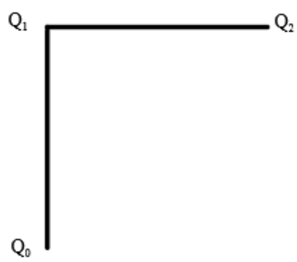
Lec 09 回顾练习 Bezier 曲线

练习一、反求 Bezier 曲线的控制顶点



已知 2 次 Bezier 曲线 $C(t)$ 过三个点 $Q_0(0,0)$、$Q_1(0,1)$，$Q_2(1,1)$、，反求一组 Bezier 曲线的控制顶点 $P_i(i=0,1,2)$。

解：

记

$$C(t)=\sum_{i=0}^{2}P_iB_{i,2}(t)=P_0B_{0,2}(t)+P_1B_{1,2}(t)+P_2B_{2,2}(t)$$ 令

$$C(\frac{i}{2})=Q_i, i=0,1,2$$

即：

$$\begin{cases} Q_0=P_0 \\ Q_1=P_0\cdot C_2^0\cdot(1-\frac{1}{2})^2\cdot(\frac{1}{2})^0+P_1\cdot C_2^1\cdot(1-\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}+P_2\cdot C_2^2(1-\frac{1}{2})^0\cdot(\frac{1}{2})^2 \\ Q_2=P_2 \end{cases}$$

亦即：

$$\begin{cases} Q_0=P_0 \\ Q_1=\frac{1}{4}P_0+\frac{1}{2}P_1+\frac{1}{4}P_2 \\ Q_2=P_2 \end{cases}$$

整理得：

$$\begin{cases} Q_0=P_0 \\ 4Q_1=P_0+2P_1+P_2 \\ Q_2=P_2 \end{cases}$$

将方程组中的（1）、（3）式代入（2）式，有：

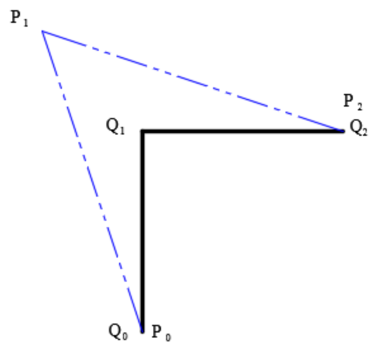
$$4Q_1=Q_0+2P_1+Q_2$$

于是有：

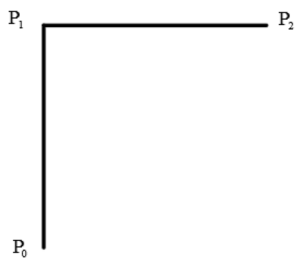
$$P_1=\frac{-Q_0+4Q_1-Q_2}{2}$$

代入点 Q_0、Q_1、Q_2 的坐标值，可得：

$P_0=(0,0)$、$P_1=(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$、$P_2=(1,1)$



练习二、Bezier 曲线的升阶



已知 2 次 Bezier 曲线 $C(t)$ 的控制顶点为：$P_0=(0,0)$、$P_1=(0,1)$、$P_2=(1,1)$，将其升阶到 3 次。求出升阶后的控制顶点 $P_j^{(1)}(j=0,1...3)$。

解：升阶后的控制顶点与原控制顶点的关系为：

$$P_j^{(1)}C_{n+1}^j=P_jC_n^j+P_{j-1}C_n^{j-}$$

即：

$$P_j^{(1)}=\frac{j}{n+1}P_{j-1}+(1-\frac{j}{n+1})P_j$$

取 $n=2$,代入上式有：

$$\begin{cases} P_0^{(1)} = P_0 \\ P_1^{(1)} = \dfrac{1}{3}P_0 + \dfrac{2}{3}P_1 \\ P_2^{(1)} = \dfrac{2}{3}P_1 + \dfrac{1}{3}P_2 \\ P_3^{(1)} = P_2 \end{cases}$$

将原控制顶点的坐标值代入上式，得：

$$\begin{cases} P_0^{(1)} = (0,0) \\ P_1^{(1)} = \dfrac{1}{3}(0,0) + \dfrac{2}{3}(0,1) = (0,\dfrac{2}{3}) \\ P_2^{(1)} = \dfrac{2}{3}(0,1) + \dfrac{1}{3}(1,1) = (\dfrac{1}{3},1) \\ P_3^{(1)} = (1,1) \end{cases}$$