$$X^{(k+1)} = (I - L)^{-1}(D + U)X^{(k)} + (I - L)^{-1}g,$$
$$k = 0,1,2,\cdots$$

其中$(I - L)^{-1}(D + U)$为 Gauss - Seidel 迭代法的迭代矩阵．

3. 逐次超松弛(SOR)迭代法

与 Jacobi 迭代法对应的 Gauss - Seidel 迭代法为

$$X^{(k+1)} = LX^{(k+1)} + UX^{(k)} + g,\ k = 0,1,2,\cdots$$

对$X^{(k)}$与$X^{(k+1)}$进行加权平均，平均值仍记为$X^{(k+1)}$，于是得逐次超松弛迭代法：

$$X^{(k+1)} = (1 - \omega)X^{(k)} + \omega(LX^{(k+1)} + UX^{(k)} + g)$$

或写成

$$X^{(k+1)} = (I - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)I + \omega U]X^{(k)} + \omega(I - \omega L)^{-1}g$$

其迭代矩阵为$L_\omega = (I - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)I + \omega U]$，$\omega$称为松弛因子．

4. 迭代法的收敛性判定

定理 6.1 对任意初始向量$X^{(0)}$和任意右端向量g，简单迭代法都收敛的充要条件是$\rho(B) < 1$.

定理 6.2 若迭代矩阵B满足$\|B\|_1 = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{n}|b_{ij}| < 1$，则简单迭代法和与之对应的 Gauss - Seidel 迭代法都收敛．

定理 6.3 若迭代矩阵B满足$\|B\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}| < 1$，则简单迭代法与和它对应的 Gauss - Seidel 迭代法都收敛．

定理 6.4 若系数阵A对称正定，则求解$AX = b$的与 Jacobi 迭代法对应的 Gauss - Seidel 迭代法收敛．

定理 6.5 若系数阵A严格对角占优或不可约弱对角占优，则求解$AX = b$的 Jacobi 迭代法和与之对应的 Gauss - Seidel 迭代法收敛．

定理 6.6 对所有松弛因子ω成立$\rho(L_\omega) \geqslant |\omega - 1|$；当$\omega$取实数时，逐次超松弛法收敛的必要条件是$0 < \omega < 2$.

定理 6.7 若系数矩阵A对称正定，则求解$AX = b$的逐次超松弛迭代法收敛的充要条件是$0 < \omega < 2$.

二、典型题分析

例 6 - 1 取初始向量$X^{(0)} = (0\quad 0\quad 0)^T$，用 Jacobi 迭代法求解如下方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

分析 这是常规计算题，首先写出 Jacobi 迭代格式，然后再依次迭代计算．

解答 Jacobi 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (-2x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}) + 1 \\ x_2^{(k+1)} = -(x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) + 3 \\ x_3^{(k+1)} = -2(x_1^{(k)} + x_2^{(k)}) + 5 \end{cases} \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

由$X^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$迭代求得

$$X^{(1)} = (1\quad 3\quad 5)^T$$
$$X^{(2)} = (5\quad -3\quad -3)^T$$
$$X^{(3)} = (1\quad 1\quad 1)^T$$
$$X^{(4)} = (1\quad 1\quad 1)^T$$

方程组的解为 $X = (1\quad 1\quad 1)^T$

注记 本题中 Jacobi 迭代矩阵B的谱半径为零，我们发现仅三次迭代就得到了方程组的精确解．参看例 6 - 3 和例 6 - 17.

例 6 - 2 如何对方程组

$$\begin{cases} -x_1 + 8x_2 + 0x_3 = 7 \\ -x_1 + 0x_2 + 9x_3 = 8 \\ 9x_1 - x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

进行调整，使得用 Gauss－Seidel 方法求解时收敛？并取初始向量 $X^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$，用该方法求近似解 $X^{(k+1)}$，使 $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|_\infty \leqslant 10^{-3}$.

分析 Gauss－Seidel 方法的收敛条件有不止一个，一般总是先考虑比较方便的充分条件．观察方程组的系数可以发现，有几个系数的绝对值相对较大，这使得我们有可能调整方程组中各方程的次序后就使方程组化为主对角线严格占优，从而 Gauss－Seidel 方法收敛．至于计算求解，只需先写出迭代格式，然后再依次迭代计算．

解答 将第三个方程调到第一行后有

$$\begin{cases} 9x_1 - x_2 - x_3 = 7 \\ -x_1 + 8x_2 + 0x_3 = 7 \\ -x_1 + 0x_2 + 9x_3 = 8 \end{cases}$$

这是主对角线严格占优方程组，故用 Gauss－Seidel 迭代法求解一定收敛．迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{9}(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 7) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8}(x_1^{(k+1)} + 7) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{9}(x_1^{(k+1)} + 8) \end{cases}$$

由 $x^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$，得

$$x^{(1)} = (0.777\,8 \quad 0.972\,2 \quad 0.975\,3)^T$$

$$x^{(2)} = (0.994\,2 \quad 0.999\,3 \quad 0.999\,4)^T$$

$$x^{(3)} = (0.999\,9 \quad 0.999\,9 \quad 0.999\,9)^T$$

$$x^{(4)} = (1.000\,0 \quad 1.000\,0 \quad 1.000\,0)^T$$

因为 $\|x^{(4)} - x^{(3)}\|_\infty = 0.000\,1 = 10^{-4} < 10^{-3}$，故取最后结果为 $x^{(4)} = (1.000\,0 \quad 1.000\,0 \quad 1.000\,0)^T$

例 6－3 设有迭代格式

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g,\ k = 1,2,\cdots$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

试证该迭代格式收敛．并取 $x^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$，计算 $x^{(4)}$.

分析 这是简单迭代法，迭代矩阵 B 的 ∞－范数和 1－范数显然不小于 1，于是我们考虑 B 的谱半径．

证明 设 λ 为 B 的特征值，则 $|B - \lambda I| = 0$，即

$$\begin{vmatrix} \lambda & -0.5 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -0.5 & \lambda & -0.5 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -0.5 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 = 0$$

故 $\rho(B) = 0 < 1$，从而该迭代格式收敛．由 $x^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$，经计算得

$$x^{(1)} = (-0.5 \quad 1 \quad -0.5)^T$$

$$x^{(2)} = \left(\frac{0.5}{\sqrt{2}} \quad 0.5 \quad -\frac{0.5}{\sqrt{2}}\right)^T$$

$$x^{(3)} = (0 \quad 1 \quad 0)^T$$

$$x^{(4)} = (0 \quad 1 \quad 0)^T$$

注记 由于 $\rho(B) = 0$，我们发现仅三次迭代就收敛到了精确解，这和例 6－1 有类似之处．事实上这两个例子隐含了一个普遍性的结论，请读者看例

6-17.

例 6-4 用逐次超松弛方法(SOR 法)求解方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

取初始向量 $x^{(0)}=(1\quad 1\quad 1\quad 1)^T$,松弛因子 $\omega=1.46$,要求 $\|X^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty\leqslant 10^{-5}$.

分析 这是常规计算题,先写出 SOR 法的计算格式,再按要求逐步计算.

解答 SOR 法的格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-0.46x_1^{(k)}+1.46[x_2^{(k)}+1]/2 \\ x_2^{(k+1)}=-0.46x_2^{(k)}+1.46[x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}]/2 \\ x_3^{(k+1)}=-0.46x_3^{(k)}+1.46[x_2^{(k+1)}+x_4^{(k)}+1]/2 \\ x_4^{(k+1)}=-0.46x_4^{(k)}+1.46x_3^{(k+1)}/2 \end{cases}$$

于是

$$x^{(1)}=(1\quad 1\quad 1.73\quad 0.802\,9)^T$$
$$x^{(2)}=(1\quad 1.5\quad 1.615\,32\quad 0.809\,85)^T$$
$$x^{(3)}=(1.365\quad 1.485\,63\quad 1.662\,65\quad 0.841\,20)^T$$
$$x^{(4)}=(1.186\,61\quad 1.396\,57\quad 1.598\,75\quad 0.780\,14)^T$$
$$x^{(5)}=(1.203\,66\quad 1.403\,33\quad 1.588\,51\quad 0.800\,75)^T$$
$$\vdots$$
$$x^{(15)}=(1.200\,00\quad 1.400\,01\quad 1.600\,00\quad 0.800\,00)^T$$
$$x^{(16)}=(1.200\,00\quad 1.400\,00\quad 1.600\,00\quad 0.800\,00)^T$$
$$x^{(17)}=(1.200\,00\quad 1.400\,00\quad 1.600\,00\quad 0.800\,00)^T$$

$x^{(17)}$ 已收敛到了精确解 $x=(1.2\quad 1.4\quad 1.6\quad 0.8)^T$,显然满足要求.

注记 本题已将松弛因子确定,事实上不同的松弛因子会对收敛速度

有明显影响,求解一个对称正定方程组时如何选取最佳松弛因子 ω_{opt} 并不容易,有关这方面的讨论可参阅参考文献 2,9. 显然 $\omega=1$ 时 SOR 法就是 Gauss-Seidel 方法.

例 6-5 给定方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

证明 Jacobi 方法发散而 Gauss-Seidel 方法收敛.

分析 观察系数阵的特点,它既不严格对角占优,也不对称正定,因此应该写出 Gauss-Seidel 方法的迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$,然后再观察是否 $\|\boldsymbol{B}\|_1<1$ 或 $\|\boldsymbol{B}\|_\infty<1$ 或求出 $\rho(\boldsymbol{B})$,看其是否小于 1. 而要证 Jacobi 方法发散,一般情况下只能想法说明其迭代矩阵的谱半径不小于 1.

证明 (1) 对 Jacobi 方法,迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

设其特征值为 λ,则

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\lambda^3+\frac{5}{4}\lambda=0,\ \lambda_1=0,\ \lambda_{2,3}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}i$$

$\rho(\boldsymbol{B})=\sqrt{5}/2>1$,故 Jacobi 方法发散.

(2) 对 Gauss-Seidel 方法,迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\left[\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & & \\ -1 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\&0&-1\\&&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{-1}{2}&\frac{-1}{2}\\0&0&\frac{-1}{2}\end{bmatrix}$$

显然其特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=\frac{-1}{2}$，$\rho(\boldsymbol{B})=\frac{1}{2}<1$，故 Gauss - Seidel 方法收敛．

注记 这里所说的 Jacobi 方法"发散"，其具体含义应该说成"不是对任意初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 都收敛"，也就是说"对有的初始向量 Jacobi 方法发散，但对有些初始向量它又可能收敛"，决不是说"对任意初始向量它都发散"．事实上，本题一定存在初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$，使得 Jacobi 方法收敛，参阅例 6-16.

例 6-6 讨论用 Jacobi 法和 Gauss - Seidel 方法解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 时的收敛性，如果收敛，并比较哪种方法收敛较快，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&-2\\0&2&1\\-2&1&2\end{bmatrix}$$

分析 如果两种方法发散，则一般应求迭代矩阵的谱半径，说明它小于1；如果两种方法收敛，但要比较收敛速度一般也应求谱半径．总之，应该求迭代矩阵的谱半径．

解答 (1) 对 Jacobi 方法，迭代矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$

$\rho(\boldsymbol{B})=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{12}}<1$，方法收敛．

(2) 对 Guass - Seidel 方法，迭代矩阵

$$\boldsymbol{B}=\left[\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&&\\0&0&\\1&-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix}0&0&\frac{2}{3}\\&0&-\frac{1}{2}\\&&0\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}0&0&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{11}{12}\end{bmatrix}$$

$\rho(\boldsymbol{B})=\frac{11}{12}<1$，故方法收敛．

因为 $\frac{11}{12}<\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{12}}$，故 Gauss - Seidel 方法较 Jacobi 方法收敛快．

例 6-7 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times2}$ 是二阶矩阵，且 $a_{11}a_{22}\neq0$. 试证求解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 Jacobi 方法与 Gauss - Seidel 方法同时收敛或发散.

分析 只要说明 Jacobi 迭代矩阵与 Gauss - Seidel 迭代矩阵有相同的谱半径或者虽然谱半径不同但同时小于 1 或大于等于 1 即可．

证明 Jacobi 法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}0&-\frac{a_{12}}{a_{11}}\\-\frac{a_{21}}{a_{22}}&0\end{bmatrix}$$

其谱半径为 $\rho(\boldsymbol{B}_1)=\sqrt{\left|\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|}$；而 Gauss - Seidel 法的迭代矩阵为

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \end{bmatrix}$$

故其谱半径为 $\rho(B_2) = \left|\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{12}}\right|$. 显然 $\rho(B_1)$ 与 $\rho(B_2)$ 同时小于 1、等于或大于 1，因而 Jacobi 法和 Gauss - Seidel 法具有相同的敛散性.

例 6-8 设线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ -3 & 2 & a \end{bmatrix}$$

试求能使 Jacobi 方法收敛的 a 的取值范围.

分析 本题实际上也就是说 a 在什么范围以外不收敛，只要涉及到发散，一般总要按收敛的充要条件去讨论，因此首先求迭代矩阵的谱半径.

解答 当 $a \neq 0$ 时，Jacobi 方法的迭代矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{a} & -\dfrac{3}{a} \\ -\dfrac{1}{a} & 0 & -\dfrac{2}{a} \\ \dfrac{3}{a} & -\dfrac{2}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

由 $|\lambda I - B| = 0$ 得 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm\dfrac{4}{|a|}$，故 $\rho(B) = \dfrac{4}{|a|}$ 由 $\rho(B) < 1$ 得 $|a| > 4$，即 $|a| > 4$ 时 $\rho(B) < 1$，Jacobi 方法收敛.

例 6-9 设矩阵 A 非奇异，试证用 Gauss - Seidel 方法求解 $A^TAx = b$ 时是收敛的.

分析 系数矩阵的对称性是显然的，只要能证明 A^TA 正定，即可说明 Gauss - Seidel 方法收敛.

证明 设 $x \neq 0$，则因 A 非奇异，故 $Ax \neq 0$，从而 $(Ax, Ax) = (Ax)^T(Ax) = x^T(A^TA)x > 0$，即 A^TA 正定.

由定理 6.4 知 Gauss - Seidel 方法求解 $A^TAx = b$ 收敛.

例 6-10 设 A 为正交矩阵，$B = 2I - A$. 求证线性方程组 $B^TBx = b$ 用 Gauss - Seidel 方法求解必收敛.

分析 系数矩阵 B^TB 显然对称，只要能证明 B^TB 正定即可说明 Gauss - Seidel 方法的收敛性.

证明 因 A 正交，故 $A^TA = I$，设 λ 是 A 的特征值，则有 $x \neq 0$，使

$$Ax = \lambda x$$

两边与 Ax 作内积，有

$$(Ax, Ax) = \lambda(Ax, x), \quad (x, A^TAx) = \lambda^2(x, x)$$

从而有 $(x, x) = \lambda^2(x, x)$, $(\lambda^2 - 1)(x, x) = 0$, $|\lambda| = 1$. 又 B 的特征值为 $2 - \lambda$，故 B 的特征值不为零，从而 B 非奇异. 由例 6-9 知 B^TB 正定，所以 Guass - Seidel 方法收敛(定理 6.4).

例 6-11 设求解方程组 $Ax = b$ 的简单迭代法

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

收敛. 求证：对 $0 < \omega < 1$，迭代法

$$x^{(k+1)} = [(1 - \omega)I + \omega B]x^{(k)} + \omega g \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

收敛.

分析 由于已知 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 收敛，故谱半径 $\rho(B) < 1$，如果把第二个迭代法的迭代矩阵的特征值和 B 的特征值联系起来，则有可能完成证明.

证明 设 $C = (1 - \omega)I + \omega B$, $\lambda(C)$, $\lambda(B)$ 分别为 C 和 B 的特征值，则显然

$$\lambda(C) = (1 - \omega) + \omega\lambda(B)$$

因为 $0 < \omega < 1$，$\lambda(C)$ 是 1 和 $\lambda(B)$ 的加权平均，故

$$|\lambda(B)| < |\lambda(C)| < 1$$

即迭代法 $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + \omega g\ (k = 0,1,2,\cdots)$ 收敛.

例 6-12 设有迭代格式

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

其中 $B = I - A$. 如果 A 和 B 的特征值全为正数,试证该迭代格式收敛.

分析 本题主要是根据 A、B 和单位矩阵 I 之间的特征值的关系设法导出 $\rho(B) < 1$,从而说明迭代格式收敛.

证明 因为 $B = I - A$,故 $\lambda(B) = 1 - \lambda(A)$, $\lambda(A) + \lambda(B) = 1$,由于已知 $\lambda(A)$ 和 $\lambda(B)$ 全为正数,故 $0 < \lambda(B) < 1$ 从而 $\rho(B) < 1$,所以该迭代格式收敛.

例 6-13 设求解方程组 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代格式为

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

求证:若 $\|B\|_\infty < 1$,则相应的 Gauss-Seidel 方法收敛.

分析 本题应把 B 的元素通过 A 的元素表示出来,再由 $\|B\|_\infty < 1$ 推出 A 所具有的特点,进而讨论 Gauss-Seidel 方法的收敛性.

证明 由于 B 是 Jacobi 方法的迭代矩阵,故

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

又 $\|B\|_\infty < 1$, 故 $\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}| < 1$, 即 $\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|-\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$, $(i = 1,2,\cdots,n)$

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}| < |a_{ii}|, \ (i = 1,2,\cdots,n)$$

这说明系数矩阵 A 是按行严格对角占优,所以由定理 6.5 知 Gauss-Seidel 方法收敛.

例 6-14 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为对称正定矩阵,$D = \mathrm{diag}(a_{ii})$. 求证:Gauss-Seidel 方法求解方程组

$$D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}}x = b$$

必收敛.

分析 由于 A 对称正定,故对角阵 $D^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{diag}(\dfrac{1}{\sqrt{a_{ii}}})$ 显然也对称正定,从而 $D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}}$ 的对称性是无疑的. 只要能根据线性代数理论由 A 的正定性推出 $D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}}$ 的正定性,即可由定理 6.4 说明 Gauss-Seidel 方法的收敛性.

证明 因为 A 对称正定,故 A 一定有分解.

$$A = S^{\mathrm{T}}S \ (S \text{ 为非奇异下三角阵})$$

从而 $D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}}S^{\mathrm{T}}SD^{-\frac{1}{2}} = (D^{-\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}SD^{-\frac{1}{2}} = (SD^{-\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}}(SD^{-\frac{1}{2}})$

显然 $SD^{-\frac{1}{2}}$ 非奇异,于是 $(SD^{-\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}}(SD^{-\frac{1}{2}})$ 对称正定(见例 6-9),即系数阵 $D^{-\frac{1}{2}}AD^{\frac{1}{2}}$ 对称正定,从而 Gauss-Seidel 方法收敛.

例 6-15 设 A 为 n 阶非奇异矩阵,求证 $Ax = b$ 的解总能通过 Gauss-Seidel 方法得到.

分析 注意本题的含义,Gauss-Seidel 方法只是能得到解 x,但未必解的就是 $Ax = b$ 本身,完全可能是求解一个和 $Ax = b$ 等价的方程组. 因此虽然 A 未必对称正定,但可设法把方程组 $Ax = b$ 等价转化为适合 Gauss-Seidel 方法的条件,这样就可以用 Gauss-Seidel 方法了.

证明 因为 A 非奇异,故 $Ax = b$ 与 $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$ 一定是同解

方程组．由例 6－9 知，Gauss－Seidel 方法求解对称正定方程组 $A^{T}Ax=A^{T}b$ 一定收敛，即 Gauss－Seidel 方法一定能得到 $Ax=b$ 的解．

例 6－16 设 $x=Bx+g$ 有惟一解 x^{*}．若矩阵 B 的谱半径 $\rho(B)>1$，但 B 有一个特征值 λ 满足 $|\lambda|<1$，求证：存在初始向 $x^{(0)}$，使得由迭代格式

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

产生的序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛于 x^{*}．

分析 $\rho(B)>1$，则简单迭代法发散，其具体含义应理解为不是对任意初始向量都收敛，即也可能存在使简单迭代法收敛的初始向量，事实上本题已明确说明了这一点．为证明该结论，应将特征值 λ 和误差 $|x^{(k+1)}-x^{*}|$ 联系起来，这是因为已无法再按 $\rho(B)<1$ 来判断收敛了．

证明 因 x^{*} 是解，故 $x^{*}=Bx^{*}+g$，与 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$ 相减有

$$x^{(k+1)}-x^{*}=B(x^{(k)}-x^{*})=\cdots=B^{k+1}(x^{(0)}-x^{*})$$

设 B 的与 λ 对应的特征向量为 y，则

$$By=\lambda y,\ B^{k+1}y=\lambda^{k+1}y$$

若取初始向量 $x^{(0)}=x^{*}+y$，则

$$x^{(k+1)}-x^{*}=B^{k+1}y=\lambda^{k+1}y$$

从而 $\|x^{(k+1)}-x^{*}\|=|\lambda^{k+1}|\cdot\|y\|$．因为 $|\lambda|<1$，故

$$\|x^{(k+1)}-x^{*}\|\to 0\ (\text{当 } k\to\infty \text{ 时})$$

所以存在初始向 $x^{(0)}$，使上述迭代法收敛．

例 6－17 对迭代格式

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

求证：如果迭代矩阵 B 的谱半径 $\rho(B)=0$，则对任意初始向量 $x^{(0)}$，$x^{(n)}$ 一定是

$$x=Bx+g$$

的解向量，其中 n 为矩阵 B 的阶数．

分析 $\rho(B)=0<1$，则该迭代格式收敛，这是无疑的，但仅迭代有能限步就收敛，这就需要在 B 的特征值全为零上下功夫，比如设法把 B 用其特征值的某种形式表示出来．由于 B 未必相似于对角阵(即特征值构成的对角阵)，于是自然想到 B 的若当标准形．

证明 由线性代数理论可知，B 一定相似于它的若当标准形 J，即有可逆阵 P，使

$$B=P^{-1}JP$$

由于 B 的特征值全为 0，故 J 一定有如下形式：

$$J=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & & & 0\end{pmatrix}_{n\times n}$$

方程组 $x=Bx+g$ 等价于 $(I-B)x=g$，由于 $\lambda(B)=0$，故 $\lambda(I-B)=1-\lambda(B)=1\neq 0$，从而 $I-B$ 非奇异，即 $(I-B)x=g$ 有惟一解 x^{*}．于是

$$x^{*}=Bx^{*}+g$$

与所述迭代格式相减有

$$x^{(k+1)}-x^{*}=B(x^{(k)}-x^{*})$$

于是 $$x^{(n)}-x^{*}=B^{n}(x^{(0)}-x^{*})$$

注意到 J 的形式，则 $J^{n}=0$，于是

$$B^{n}=P^{-1}J^{n}P=0$$

即 $$x^{(n)}-x^{*}=0,\ \text{即 } x^{(n)}=x^{*}$$

注记 简单迭代法 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g\ (k=0,1,2,\cdots)$ 收敛的快慢与 $\rho(B)$ 的大小有关，$\rho(B)$ 越小，收敛越快，$\rho(B)=0$ 时已达最小，故收敛应最快

. 本题说明 $\rho(B)=0$ 时仅经过有限步（n 步）就一定得到精确解.

例 6-18 设 A、B 是 n 阶矩阵，A 非奇异. 考虑如下方程组

$$\begin{cases}Ax+By=b_1\\Bx+Ay=b_2\end{cases}$$

其中 $b_1,b_2\in R^n$ 是已知向量，$x,y\in R^n$ 是未知向量. 求证：如果 $A^{-1}B$ 的谱半径 $\rho(A^{-1}B)<1$，则下列迭代格式

$$\begin{cases}Ax^{(k+1)}=-By^{(k)}+b_1\\Ay^{(k+1)}=-Bx^{(k)}+b_2\end{cases}\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

必收敛.

分析 本题中方程组里的每个方程实际还是一个方程组，借用矩阵的分块表示方法，我们可以把该方程组统一在一起而写成一个大方程组，这是讨论这种方程组的最基本的思路.

证明 原方程组可写为如下分块矩阵的表达形式

$$\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

而迭代格式可写为相应形式

$$\begin{pmatrix}A&O\\O&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^{(k+1)}\\y^{(k+1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&-B\\-B&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^{(k)}\\y^{(k)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

其中的 O 为 n 阶零矩阵. 该格式的迭代矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}A&O\\O&A\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}O&-B\\-B&O\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\O&A^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&-B\\-B&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&-A^{-1}B\\-A^{-1}B&O\end{pmatrix}$$

设其特征值为 λ，相应的特征向量为

$$z=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\neq 0$$

其中 $z_1,z_2\in R^n$. 于是

$$Cz=\lambda z$$

$$\begin{pmatrix}O&-A^{-1}B\\-A^{-1}B&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}Bz_2=(-\lambda)z_1\tag{1}$$

$$A^{-1}Bz_1=(-\lambda)z_2\tag{2}$$

如果 $z_1=z_2$，则方程(1)或(2)说明 $(-\lambda)$ 就是 $A^{-1}B$ 的特征值（注意 $z_1=z_2\neq 0$）；如果 $z_1\neq z_2$，则(2)－(1)有

$$A^{-1}B(z_1-z_2)=\lambda(z_1-z_2)$$

这说明 λ 一定是 $A^{-1}B$ 的特征值. 因为 $\rho(A^{-1}B)<1$，于是 $|\lambda|<1$，从而 $\rho(C)<1$，所述格式收敛.

例 6-19 设矩阵 A 对称正定，$D=\mathrm{diag}\,(a_{11},a_{22},a_{33},\cdots,a_{nn})$. 试证：若 $2D-A$ 正定，则 Jacobi 迭代法求解方程组 $Ax=b$ 必收敛

分析 Jacobi 法的迭代矩阵为 $I-D^{-1}A$，应设法把它和 $2D-A$ 联系起来，这只需通过简单的矩阵运算就可以做到.

证明 设 Jacobi 法的迭代矩阵 $B=I-D^{-1}A$ 的特征值为 λ，相应的特征向量为 $x\neq 0$，则

$(I-D^{-1}A)x=\lambda x$，两边左乘 D 有

$(D-A)x=\lambda Dx$，两边加 Dx 有

$(2D-A)x=(\lambda+1)Dx$，于是

$((2D-A)x,x)=(\lambda+1)(Dx,x)$

$$\lambda+1=\frac{((2D-A)x,x)}{(Dx,x)}=\frac{2(Dx,x)-(Ax,x)}{(Dx,x)}\tag{1}$$

因为 A 正定，故 $a_{ii}>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，从而 D 也正定. 又 $2D-A$ 正定，故(1)右端为正，即 $\lambda>-1$. 再由(1)，因 A 正定而有 $(Ax,x)>0$，故

$$\lambda+1<\frac{2(Dx,x)-0}{(Dx,x)}=2，从而\quad\lambda<1$$

所以 $|\lambda|<1$，$\rho(B)<1$，Jacobi 方法收敛.

例 6 - 20 设 A 为对称正定矩阵．考虑迭代格式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega\left[A\left(\frac{x^{(k+1)} + x^{(k)}}{2}\right) - b\right], \quad \omega > 0$$

求证：(1) 对任意初始向量 $x^{(0)}$，$\{x^{(k)}\}$ 收敛；

(2) $\{x^{(k)}\}$ 收敛到 $Ax = b$ 的解．

分析 从所给格式的形式看，首先应把它整理成简单格式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ 的形式，然后讨论 B 的特征值的大小，这主要是根据 A 的正定性来进行．

证明 (1) 所给格式可化为

$$x^{(k+1)} = (I + \frac{\omega}{2}A)^{-1}(I - \frac{\omega}{2}A)x^{(k)} + \omega(I + \frac{\omega}{2}A)^{-1}b$$

这里 $(I + \frac{\omega}{2}A)^{-1}$ 存在是因为 A 对称正定，而 $\omega > 0$，故 $I + \frac{\omega}{2}A$ 也对称正定，从而 $(I + \frac{\omega}{2}A)$ 可逆．设迭代矩阵

$$B = (I + \frac{\omega}{2}A)^{-1}(I - \frac{\omega}{2}A)$$

的特征值为 λ，$x \neq 0$ 为相应的特征向量，故

$$Bx = \lambda x, \ (I - \frac{\omega}{2}A)x = \lambda(I + \frac{\omega}{2}A)x$$

与 x 作内积有

$$((I - \frac{\omega}{2}A)x, x) = \lambda((I + \frac{\omega}{2}A)x, x)$$

$$\lambda = \frac{((I - \frac{\omega}{2}A)x, x)}{((I + \frac{\omega}{2}A)x, x)} = \frac{(x, x) - \frac{\omega}{2}(Ax, x)}{(x, x) + \frac{\omega}{2}(Ax, x)}$$

因 A 正定，故 $(Ax, x) > 0$，于是显然 $|\lambda| < 1$，$\rho(B) < 1$，从而格式收敛；

(2) 设 $\{x^{(k)}\}$ 收敛到 x^*，则

$$x^* = x^* - \omega\left[A\left(\frac{x^* + x^*}{2}\right) - b\right]，即$$

$Ax^* = b$，即 $\{x^{(k)}\}$ 收敛到 $Ax = b$ 的解．

例 6 - 21 设 H 为 n 阶实对称矩阵，A 为 n 阶对称正定矩阵．考虑迭代格式

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + d$$

如果 $A - HAH$ 正定，求证此格式从任意初始点 $x^{(0)}$ 出发都收敛．

分析 本题应设法证明 $\rho(H) < 1$，为此应把 H 的特征值的定义 $Hu = \lambda u$ 和 $A - HAH$ 的正定性联系起来．

证明 设 λ 为 H 的任一特征值，$u \neq 0$ 为相应的特征向量，则 $Hu = \lambda u$，从而

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{T}}(A - HAH)u = {} & u^{\mathrm{T}}Au - u^{\mathrm{T}}HAHu = \\ & u^{\mathrm{T}}Au - (Hu)^{\mathrm{T}}A(Hu) = \\ & u^{\mathrm{T}}Au - (\lambda u)^{\mathrm{T}}A(\lambda u) = \\ & (1 - \lambda^2)(u^{\mathrm{T}}Au) \end{aligned}$$

因为 $A - HAH$ 和 A 正定，故 $u^{\mathrm{T}}(A - HAH)u^{\mathrm{T}} = (1 - \lambda^2)u^{\mathrm{T}}Au > 0$，$1 - \lambda^2 > 0$，即 $\lambda^2 < 1$，$|\lambda| < 1$，$\rho(H) < 1$，从而此格式对任意初始点 $x^{(0)}$ 都收敛．

例 6 - 22 设求解方程组 $Ax = b$ 的 Jacobi 方法的迭代矩阵为 $B = L + U$(L,U 分别为严格下、上三角矩阵)．求证：当 $\|L\| + \|U\| < 1$ 时相应的 Gauss - Seidel 方法收敛．

分析 本题应该把 Gauss - Seidel 方法用 L 和 U 的形式表示出来，这样才容易和条件 $\|L\| + \|U\| < 1$ 联系起来．

证明 Gauss - Seidel 迭代公式可表示为

$$x^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + g \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

方程组 $Ax = b$ 的解 x^* 自然也满足

$$x^* = Lx^* + Ux^* + g \tag{2}$$

(1) 与 (2) 相减，则

$$\begin{aligned} \|x^{(k+1)} - x^*\| = {} & \|L(x^{(k+1)} - x^*) + U(x^{(k)} - x^*)\| \leqslant \\ & \|L\| \cdot \|x^{(k+1)} - x^*\| + \|U\| \cdot \end{aligned}$$

$$\| x^{(k)} - x^* \|$$

从而

$$\| x^{(k+1)} - x^* \| \leqslant \frac{\| U \|}{1 - \| L \|} \| x^{(k)} - x^* \| \leqslant \cdots \leqslant$$

$$\left[\frac{\| U \|}{1 - \| L \|}\right]^{k+1} \| x^{(0)} - x^* \|$$

因 $\| L \| + \| U \| < 1$，故 $\| U \| < 1 - \| L \|$，$0 < \frac{\| U \|}{1 - \| L \|} < 1$，从而

$$\lim_{k \to \infty} \| x^{(k+1)} - x^* \| \leqslant$$

$$\lim_{k \to \infty} \left[\frac{\| u \|}{1 - \| L \|}\right]^{k+1} \| x^{(0)} - x^* \| = 0$$

即 $x^{(k+1)}$ 收敛到解 x^*，Gauss - Seidel 法收敛．

例 6-23 设 A 为 n 阶对称正定矩阵，求证当参数 α 满足 $0 < \alpha < \frac{2}{\| A \|}$ 时，如下迭代格式

$$x^{(k+1)} = (I - \alpha A)x^{(k)} + \alpha b \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

收敛．

分析 本题中的格式是简单迭代格式，因此考虑迭代矩阵 $I - \alpha A$ 的谱半径小于 1 是自然的．

证明 设 λ 为 A 的特征值，则迭代矩阵 $I - \alpha A$ 的特征值为 $\mu = 1 - \alpha\lambda$，由 $|\mu| < 1$ 即 $|1 - \alpha\lambda| < 1$ 解得

$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda} \quad (\text{注意 } A \text{ 对称正定因而 } \lambda > 0)$$

设 $x \neq 0$ 是 A 的与 λ 对应的特征向量，则

$$Ax = \lambda x, \ \| \lambda x \| = \| Ax \| \leqslant \| A \| \cdot \| x \|$$

$$|\lambda| \cdot \| x \| \leqslant \| A \| \cdot \| x \| \quad (x \neq 0)$$

$$|\lambda| \leqslant \| A \|$$

所以，当 $0 < \alpha < \frac{2}{\| A \|}$ 时，更有 $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda}$，从而 $|1 - \alpha\lambda| < 1$ 即 $|\mu| < 1$，$\rho(I - \alpha A) < 1$，于是迭代格式收敛

例 6-24 设矩阵 A 对称正定．考虑迭代格式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau(Ax^{(k)} - b) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

为使 $x^{(k+1)}$ 收敛到 $Ax = b$ 的解 x^*，试讨论参数 τ 的取值范围．

分析 首先应把所给格式整理为规范的简单迭代格式的形式，然后再讨论迭代矩阵的谱半径的大小．

解答 所述格式可写为

$$x^{(k+1)} = (I - \tau A)x^{(k)} + \tau b \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

因为 A 对称正定，故其特征值为正，不妨设为 $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. 迭代矩阵

$$B = I - \tau A$$

的特征值为 $1 - \tau\lambda_i$. 为使格式收敛，应

$$|1 - \tau\lambda_i| < 1$$

$~~-1<1-\tau\lambda_i<1~~$

由此解得 $0 < \tau < \frac{2}{\lambda_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，公共解为

$1 < \tau\lambda_i - 1 <$

$$0 < \tau < \frac{2}{\lambda_n}$$

$-1 < \tau\lambda_i - 1 < 1$

这就是所求的 τ 的取值范围．由于

$0 < \tau\lambda_i < 2$

$$\lambda_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$0 < \tau <$

故实用中可取 $\tau < 2/\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

例 6-25 设有对称矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$，$D = \mathrm{diag}(a_{ii})$，其中 $a_{ii} > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 求证：若 $2I - D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}}$ 正定，则用 Gauss - Seidel 方法求解方程组 $(2D - A)x = b$ 必收敛．

分析 由于 A 对称，故系数阵 $2D - A$ 的对称性是显然的．如果能证 $2D - A$ 正定，则由定理 6.4 可知 Gauss - Seidel 方法收敛．而为证 $2D - A$ 正定，可把它和 $2I - D^{-\frac{1}{2}}AD^{\frac{1}{2}}$ 的正定性联系起来

证明 任给非零向量 $\boldsymbol{x} \neq 0$，令 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}x$，因 $a_{ii} > 0$，故 $\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}$ 非奇异，$\boldsymbol{y} \neq 0$，从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{y}) = \\ &\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}(2\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{y} = \\ &\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}})\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

由于 $2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}$ 对称正定，故上式右端大于零，从而 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} > 0$，即 $2\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$ 正定．由定理 6.4 知 Gauss-Seidel 方法解 $(2\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 必收敛．

三、习题六

1. 用 Jacobi 方法和 Gauss-Seidel 方法求解方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases}$$

要求取 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$，计算 $\boldsymbol{x}^{(5)}$，并分别与精确解 $\boldsymbol{x} = (3\ 2\ 1)^{\mathrm{T}}$ 比较.

2. 用 Gauss-Seidel 方法解方程组

$$\begin{cases} 9x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 8x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 - x_2 - 8x_3 = 9 \end{cases}$$

要求 $\| \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)} \|_\infty \leqslant 10^{-4}$.

3. 分别取松弛因子 $\omega = 1.03$，$\omega = 1$ 和 $\omega = 1.1$，用 SOR 法解方程组

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

要求 $\| \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)} \| \leqslant 10^{-5}$ 时迭代终止．

4. 求证矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

当 $-0.5 < a < 1$ 时正定，当 $-0.5 < a < 0$ 时 Jacobi 迭代法解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 收敛．.

5. 设有方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定阵．试证当松弛因子 ω 满足 $0 < \omega < \dfrac{2}{\beta}$（$\beta$ 为 A 的最大特征值）时下述迭代法收敛：

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(b - Ax^{(k)}) \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

6. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$．证明：$\| \boldsymbol{A} \|_1 = \| \boldsymbol{A} \|_\infty > 1$，但级数

$$\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^k + \cdots$$

还是收敛的．

7. 求一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，使得对任何矩阵范数 $\| \cdot \|$，都有 $\rho(\boldsymbol{A}) < \| \boldsymbol{A} \|$．

第七章　矩阵的特征值与特征向量的计算

一、内容提要

1. 圆盘定理(Gerschgorin 定理) 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的任何一个特征值至少位于复平面上的几个圆盘

$$D_i=\{z\,|\,|z-a_{ii}|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\},i=1,2,\cdots,n$$

中的一个圆盘上.

2. 乘幂法与反幂法

剩幂法是求一个实矩阵的按模最大的特征值和对应的特征向量的方法. 它是一个迭代法. 设 λ_i 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{x}_i$ 为 λ_i 对应的特征向量,并且有

$$|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$$

及 $\boldsymbol{x}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 线性无关,则对任一非零向量 $\boldsymbol{V}^{(0)}$,乘幂法的计算公式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{U}^{(K)}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}^{(K-1)}\\ \boldsymbol{V}^{(K)}=\boldsymbol{U}^{(K)}/\max(\boldsymbol{U}^{(K)}),K=1,2,\cdots\end{cases}$$

其中 $\max(\boldsymbol{U}^{(K)})$ 是向量 $\boldsymbol{U}^{(K)}$ 中绝对值最大的一个分量. 迭代结果的各种情况讨论见参考文献 1,3. 特别当 $|\lambda_1|>|\lambda_2|$ 时,$\boldsymbol{V}^{(k)}\to\boldsymbol{x}_1/\max(\boldsymbol{x}_1)$,$\max(\boldsymbol{U}^{(K)})\to\lambda_1\quad(k\to\infty)$.

反幂法及两方法的加速法见参考文献 1,2.

3. 实对称阵的雅可比(Jacobi) 方法

雅可比方法是求一个实对称矩阵的全部特征值与特征向量的

方法,其基本思想是通过正交相似变换,把实对称矩阵化为对角阵,该对角阵的对角元就是原对称矩阵的特征值.

记 $\boldsymbol{A}_0=\boldsymbol{A}$,施行一系列正交相似变换 $\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{R}_k^{\mathrm{T}}$, $k=1,2,\cdots$, 若 $\boldsymbol{A}_{k-1}$ 中非对角元素中按模最大的是 $a_{pq}^{(k-1)}$(设 $p<q$,即在 $\boldsymbol{A}_{k-1}$ 的上半部分中选),则

$$\boldsymbol{R}_k=$$

$$\begin{array}{cl}\begin{bmatrix}1 &&&&&&&&&& \\ &\ddots&&&&&&&&& \\ &&1&&&&&&&& \\ &&&\cos\theta&&&&\sin\theta&&& \\ &&&&1&&&&&& \\ &&&&&\ddots&&&&& \\ &&&&&&1&&&& \\ &&&-\sin&&&&\cos\theta&&& \\ &&&&&&&&1&& \\ &&&&&&&&&\ddots& \\ &&&&&&&&&&1\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow p\text{ 行}\\ \\ \\ \\ \leftarrow q\text{ 行}\\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

其中 θ 的选取必须满足 $\tan2\theta=2a_{pq}^{(k-1)}/(a_{pp}^{(k-1)}-a_{qq}^{(k-1)})$,$|\theta|\leqslant\frac{\pi}{4}$. 当 $a_{pp}^{(k-1)}=a_{qq}^{(k-1)}$ 时,$\theta=\mathrm{sign}(a_{pq}^{(k-1)})\pi/4$,$\cos\theta=\sqrt{2}/2$,$\sin\theta=\mathrm{sign}(a_{pq}^{(k-1)})\cos\theta$;当 $a_{pp}^{(k-1)}\neq a_{qq}^{(k-1)}$ 时,令 $\tan2\theta=\frac{1}{c}$,则 $\tan^2\theta+2c\cdot\tan\theta-1=0$,$\tan\theta=\mathrm{sign}(c)/[|c|+\sqrt{c^2+1}]$,$\cos\theta=1/\sqrt{1+t^2}$,$\sin\theta=t\cos\theta$. 这样就得 $a_{pq}^{(k)}=a_{qp}^{(k)}=0$,$\boldsymbol{A}$ 的特征向量是正交相似变换矩阵 $\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{R}_k^{\mathrm{T}}$ 的各个列向量.

4. QR 方法、Householder 变换、对称三对角阵的二分法等见参考文献 1,2.

二、典型题分析、求解

例 7-1　求方阵 $\boldsymbol{A}$ 按模最大的特征值与相应的特征向量.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 16 & 36 \end{pmatrix}$$

解答　取初始向量 $V^{(0)} = (1\quad 1\quad 1)^{\mathrm{T}}$，用迭代法 $U^{(k)} = AV^{(k-1)}, V^{(k)} = U^{(k)}/\max(U^{(k)}), k = 1,2,\cdots$

$\vartheta_k = A u_{k-1}$　$u_k = \frac{\vartheta_k}{\max \vartheta_k}$

计算得：

k	0	1	2	3	4	5
ϑ_k . $U^{(k)}$		12	8.357	8.168	8.157	8.156
		27	19.98	19.60	19.57	19.57
		56	44.57	43.92	43.88	43.88
$\max(\vartheta_k)$ $\max(U^{(k)})$		56	44.57	43.92	43.88	43.88
u_k. $V^{(k)}$	1	0.214 3	0.187 5	0.186 0	0.185 9	0.185 9
	1	0.482 0	0.448 3	0.446 3	0.446 0	0.446 0
	1	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0

从上表可知，(若保留小数点后 4 位，则 $V^{(4)}$ 与 $V^{(5)}$) 已完全相同，故所求特征值为 $\lambda_1 = \max(U^{(5)}) = 43.88$，对应的特征向量为 $(8.156, 19.57, 43.88)^{\mathrm{T}}$.

例 7-2　用乘幂法求矩阵 A 的按模最大的特征值与对应的特征向量，已知

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

解答　取初始向量 $V^{(0)} = (1\quad 1\quad 1)^{\mathrm{T}}$，用乘幂法计算如下：

k	0	1	2	3	4
$U^{(k)}$		2	2	2	2
		2	1.5	2	1.5
		1	1.5	1	1.5
$\max(U^{(k)})$		2	2	2	2
$V^{(k)}$	1	1	1	1	1
	1	1	0.75	1	0.75
	1	0.5	0.75	0.5	0.75

从上表可以看出，$V^{(k)}$ 不收敛，故有可能是 $\lambda_1 = -\lambda_2$ 的情形．此时 $V^{(k)}$ 的第一个分量为 1，故 $(A^2V^{(k)})_1 \to \lambda_1^2 (k \to \infty)$，$AV^{(k)} \pm \lambda_1 V^{(k)}$ 可作为 λ_1, λ_2 的特征向量．$A^2V^{(4)} = (4\quad 3\quad 3)^{\mathrm{T}}$，故 $(A^2V^{(4)})_1 = 4 \to \lambda_1^2, \lambda_1 \approx 2, \lambda_2 \approx -2$.

对应于 λ_1、λ_2 的近似特征向量为

$$AV^{(4)} + \lambda_1 V^{(4)} = (4\quad 3.5\quad 2.5)^{\mathrm{T}}$$

$$AV^{(4)} - \lambda_1 V^{(4)} = (0\quad 0.5\quad -0.5)^{\mathrm{T}}$$

故 A 的按模最大的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$，对应的近似特征向量为 $(4\quad 3.5\quad 2.5)^{\mathrm{T}}$ 和 $(0\quad 0.5\quad -0.5)^{\mathrm{T}}$.

例 7-3　求下列矩阵 A 的两个按模最大(互为共轭) 的特征值及相应的特征向量．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

解答　取 $V^{(0)} = (1\quad 0\quad 1)^{\mathrm{T}}$，我们采用原始的乘幂法计算如下：

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$V^{(k)}$	1	3	7	13	17	3	-73	-307
	0	1	4	11	24	41	44	-29
	1	1	1	-9	-31	-79	-166	-249

上表中向量间数据毫无规律，因此需检查相邻三个向量之间是否存在线性关系．以 $V^{(7)}, V^{(6)}, V^{(5)}$ 为例，先考察第一、二个分量，使其满足线性关系：

$$\begin{cases} -307 - 73p + 3q = 0 \\ -29 + 44p + 41q = 0 \end{cases}$$

解得 $p=-4, q=5$，代入 $V^{(7)}, V^{(6)}, V^{(5)}$ 的第三个分量中，有

$$-249-166p-79q=0$$

所以三个向量之间存在如下线性关系：

$$V^{(7)}-4V^{(6)}+5V^{(5)}=0$$

解一元二次方程 $\lambda^2-4\lambda+5=0$，得 $\lambda_{1,2}=2\pm i$.

再由

$$A(V^{(k+1)}-\lambda_2 V^{(k)})\approx\lambda_1(V^{(k+1)}-\lambda_2 V^{(k)})$$

$$A(V^{(k+1)}-\lambda_1 V^{(k)})\approx\lambda_2(V^{k+1)}-\lambda_1 V^{(k)})$$

求得 λ_1、λ_2 对应的特征向量分别为

$$V^{(7)}-\lambda_2 V^{(6)}=(-161-73i \quad -117+44i \quad 73-161i)^{\mathrm{T}}$$

$$V^{(7)}-\lambda_1 V^{(6)}=(-161+73i \quad -117-44i \quad 73+161i)^{\mathrm{T}}.$$

例 7-4 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 1 & -3 & -3\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}$$

的按模最大的特征值与相应的特征向量 .

解答 取初始向量 $V^{(0)}=(0 \quad 0 \quad 1)^{\mathrm{T}}$，用乘幂法迭代，计算如下：

k	0	1	2	3	4	5	6
$V^{(K)}$	0	0	−0.12	0.0550	−0.0135	−0.0302	−0.0801
	0	−0.75	−0.12	−0.6330	−0.1773	−0.5476	−0.2459
	1	1	1	1	1	1	1
$\max(U^{(K)})$		4	6.25	4.36	5.899	4.5319	5.6428

可以看出，收敛速度很慢，且 $\max(U^{(k)})$ 有波动 . 从 $\max(U^{(k)})$ 的数值可以看出，λ_1 的值大约在 5 附近，故可考虑改用原点平移法，取平移因子 $p=-5$，则有可能使 $|\lambda_2-p|/|\lambda_1-p|<|\lambda_2|/|\lambda_1|$. 此时矩阵变为 $A-pI=A+5I$. 计算结果如下：

k	0	1	2	3
$V^{(k)}$	0	0	−0.033 3	−0.042 9
	0	−0.333 3	−0.366 7	−0.372 9
	1	1	1	1
$\max(U^{(k)})$		9	9.999 9	10.100 1
k	4	5	6	7
$V^{(k)}$	−0.045 3	−0.045 9	−0.046 1	−0.046 1
	−0.374 4	−0.374 8	−0.374 9	−0.374 9
	1	1	1	1
$\max(U^{(k)})$	10.118 7	10.123 2	10.124 4	10.124 7

由上表知，$A+5I$ 的按模最大的特征值为 $\lambda_1+5\approx 10.125$，故 A 的按模最大的特征值是 $\lambda_1\approx 5.125$. 相应的特征向量为 $x_1=(-0.046\,1 \quad -0.374\,9 \quad 1)^{\mathrm{T}}$.

例 7-5 已知

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -4 & 1\\ 1 & 1 & -6\end{pmatrix}$$

有一个近似特征值 $\lambda_j'=-6.42$，用反幂法求对应的特征向量，并改进特征值的精度 .

解答 对矩阵 $A-\lambda_j' I=A+6.42I$ 作三角分解，得

$$A+6.42I=LU=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.369\,003 & 1 & 0\\ 0.184\,503 & 0.375\,148 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5.42 & 3 & 1\\ 0 & 1.681\,993 & 0.630\,993\\ 0 & 0 & -1.218\,84\times 10^{-3}\end{pmatrix}$$

利用公式

$$LZ_k = Y_k, UX_{k+1} = Z_k, Y_{k+1} = X_{k+1}/\max(X_{k+1}),$$

取 $Z_0 = (1\quad 1\quad 1)^T$，由 $UX_1 = Z_0$，得

$$X_1 = (37.764\,395\quad 308.381\,912\quad -820.446\,848)^T$$

$$\max(X_1) = -820.446\,848$$

$$Y_1 = X_1/\max(X_1) = (-0.046\,029\quad -0.375\,871\quad 1)^T$$

由 $LZ_1 = Y_1$，得

$$Z_1 = (-0.046\,029\quad -0.358\,886\quad 1.143\,128)^T$$

再由 $UX_2 = Z_1$，得

$$X_2 = (43.279\,655\quad 351.627\,002\quad -937.875\,765)^T$$

$$\max(X_2) = -937.875\,765$$

$$Y_2 = X_2/\max(X_2) = (-0.046\,147\quad -0.374\,918\quad 1)^T$$

由于 Y_1 与 Y_2 的对应分量近似相等，故 A 的特征值为

$$\lambda_j = -6.42 + 1/\max(X_2) \approx -6.421\,07$$

相应的特征向量为 $(-0.046\,147\quad -0.374\,918\ 1)^T$.

例 7-6 利用雅可比方法求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

的全部特征值与特征向量.

解答 记 $A_0 = A$. $a_{12}^{(0)} = 2$ 为主元，且 $a_{11}^{(0)} = 1, a_{22}^{(1)} = -1$，故

$$c = (a_{11}^{(0)} - a_{22}^{(0)})/(2a_{12}^{(0)}) = 0.5$$

$$t = \tan\theta = \mathrm{sign}(c)/(|c| + \sqrt{1+c^2}) = 0.618\,034$$

$$\cos\theta = (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = 0.850\,651,\ \sin\theta = t\cos\theta = 0.525\,731$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.850\,651 & 0.525\,731 & 0 \\ -0.525\,731 & 0.850\,651 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = R_1A_0R_1^T = \begin{bmatrix} 2.236\,068 & 0 & 0.525\,731 \\ 0 & -2.236\,068 & 0.850\,651 \\ 0.525\,731 & 0.850\,651 & 3 \end{bmatrix}$$

$$H_1^T = H_0^TR_1^T = IR_1^T = \begin{bmatrix} 0.850\,651 & -0.525\,731 & 0 \\ 0.525\,731 & 0.850\,651 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

又由 $A^{(1)}$ 的元素知，$a_{23}^{(1)} = 0.850\,651$ 为主元，$a_{22}^{(1)} = -2.236\,068, a_{33}^{(1)} = 3$，故有

$$c = (a_{22}^{(1)} - a_{33}^{(1)})/(2a_{23}^{(1)}) = -3.077\,683$$

$$t = \tan\theta = -0.158\,384$$

$$\cos\theta = 0.987\,688, \sin\theta = -0.156\,434$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.987\,688 & -0.156\,434 \\ 0 & 0.156\,434 & 0.987\,688 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = R_2A_1R_2^T = \begin{bmatrix} 2.236\,068 & -0.082\,242 & 0.519\,258 \\ -0.082\,242 & -2.370\,798 & 0 \\ 0.519\,258 & 0 & 3.134\,73 \end{bmatrix}$$

$$H_2^T = H_1^TR_2^T = \begin{bmatrix} 0.850\,651 & -0.519\,258 & -0.082\,242 \\ 0.525\,731 & 0.840\,178 & 0.133\,071 \\ 0 & -0.156\,434 & 0.987\,688 \end{bmatrix}$$

从 A_2 知，$a_{13}^{(2)} = 0.519\,258$ 为主元，$a_{11}^{(2)} = 2.236\,068, a_{33}^{(2)} = 3.134\,73$，所以

$$c = -0.865\,333, t = -0.457\,089$$

$$\cos\theta = 0.909\,493, \sin\theta = -0.415\,719$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0.909\,493 & 0 & -0.415\,719 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.415\,719 & 0 & 0.909493 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = R_3A_2R_3^{\mathrm{T}} =$$

$$\begin{pmatrix} 1.998\,721 & -0.074\,799 & 0 \\ -0.074\,799 & -2.370\,788 & 0.034\,19 \\ 0 & 0.034\,19 & 3.372\,077 \end{pmatrix}$$

$$H_3^{\mathrm{T}} = H_2^{\mathrm{T}}R_3^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0.807\,851 & -0.519\,258 & 0.278\,833 \\ 0.422\,283 & 0.840\,178 & 0.339\,584 \\ -0.410\,601 & -0.156\,434 & 0.898\,295 \end{pmatrix}$$

于是 A 的特征值分别为

$$\lambda_1 \approx 3.372\,077,\ \lambda_2 \approx 1.998\,721,\ \lambda_3 \approx -2.370\,788$$

对应的特征向量是

$$u_1 = (0.278\,833 \quad 0.339\,584 \quad 0.898\,295)^{\mathrm{T}}$$

$$u_2 = (0.807\,851 \quad 0.422\,283 \quad -0.410\,601)^{\mathrm{T}}$$

$$u_3 = (-0.519258 \quad 0.840\,178 \quad -0.156\,434)^{\mathrm{T}}$$

注记 实际上 $|A-\lambda I| = 0$ 的根为 $\lambda_1 = 3.372\,281, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2.372\,281$,若将上述过程再算两步,结果就会很精确.

例 7-7 试用平面旋转变换化向量 $x = (2 \quad 3 \quad 0 \quad 5)^{\mathrm{T}}$ 与单位向量 e_1 同方向.

解答 记 $x = (\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \quad \xi_4)^{\mathrm{T}} = (2 \quad 3 \quad 0 \quad 5)^{\mathrm{T}}$. 消去第二个分量 3 的旋转变换为

$$\cos\theta = \xi_1/\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2} = 2/\sqrt{13},\ \sin\theta = \xi_2/\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2} = 3/\sqrt{13}$$

$$T_{12} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} & 0 & 0 \\ -3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故 $$y_1 = T_{12}x = (\sqrt{13} \quad 0 \quad 0 \quad 5)^{\mathrm{T}} = x_1$$

要消去 x_1 的第四个分量 5,再作变换

$$\cos\theta' = \xi_1'/\sqrt{\xi_1'^2+\xi_4'^2} = \sqrt{13}/\sqrt{38},\quad \sin\theta = \xi_4'/\sqrt{\xi_1'^2+\xi_4'^2} = 5/\sqrt{38}$$

$$T_{14} = \begin{pmatrix} \sqrt{13}/\sqrt{38} & 0 & 0 & 5/\sqrt{38} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5/\sqrt{38} & 0 & 0 & \sqrt{13}/\sqrt{38} \end{pmatrix}$$

因此 $y_2 = T_{14}x_1 = (\sqrt{38} \quad 0 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$,即 $y_2 = T_{14}T_{12}x = \sqrt{38}\mathrm{e}_1$,所用的旋转变换为

$$T = T_{14}T_{12} =$$

$$\begin{pmatrix} 2/\sqrt{38} & 3/\sqrt{38} & 0 & 5/\sqrt{38} \\ -3/\sqrt{38} & 2/\sqrt{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10/\sqrt{38\times 13} & -15/\sqrt{38\times 15} & 0 & \sqrt{13}/\sqrt{38} \end{pmatrix}$$

△ **例 7-8** 写出 R^2 中的向量 x 关于与 e_1 正交的轴的镜面反射变换.

解答 R^2 中 x 关于与 e_1 正交的轴的镜面反射变换,就是 x 关于 e_2 的镜面反射变换. 根据镜面反射变换的几何意义,所求变换为

$$\mathbf{H} = I - 2e_1e_1^{\mathrm{T}} = I - 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1 \quad 0) =$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

例 7-9 已知 $x = (1 \quad 0 \quad 1)^{\mathrm{T}}$,求一等模变换 H,使 $Hx = y = \pm \|x\|_2 e_1$.

解答 由题设 $x \neq y$，但 $\| x \|_2 = \| y \|_2$，根据反射矩阵的性质，可取

$$H = I - 2VV^{\mathrm{T}},\ V = (x + \| x \|_2 e_1) / \| x + \| x \|_2 e_1 \|_2$$

而 $x + \| x \|_2 e_1 = x + \sqrt{2} e_1 = (1 + \sqrt{2} \quad 0 \quad 1)^{\mathrm{T}}$，其 2-范数为 $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$，所以

$$V = \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \right)^{\mathrm{T}}$$

等模变换为

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} & 0 & -\frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} & 0 & \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

例 7-10 用 Householder 变换化下列对称矩阵为三对角阵.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

解答 用 Householder 变换的步骤，第一步：令 $A_1 = A$，则

$$\sigma_1 = \mathrm{sign}(a_{21}) \left(\sum_{i=2}^{4} a_{i1}^2 \right)^{1/2} = \sqrt{9} = 3$$

$u_1 = a_{21}^{(1)} + \sigma_1 e_1 = (2 \quad 1 \quad 2)^{\mathrm{T}} + 3(1 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}} = (5 \quad 1 \quad 2)^{\mathrm{T}}$

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \| u_1 \|_2^2 = \sigma_1 (\sigma_1 + a_{21}) = 3(3 + 2) = 15$$

$$R_1 = I - \rho_1^{-1} u_1 u_1^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 14/15 & -2/15 \\ -2/3 & -2/15 & 11/15 \end{pmatrix}$$

故

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & -1/3 & 14/15 & -2/15 \\ 0 & -2/3 & -2/15 & 11/15 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = H_1 A_1 H_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 7/3 & 21/45 & -3/45 \\ 0 & 21/45 & 354/225 & 303/225 \\ 0 & -3/45 & 303/225 & 21/225 \end{pmatrix}$$

第二步，令 $\bar{a}_{32}^{(2)} = (21/45 \quad -3/45)^{\mathrm{T}} = (0.466\,7 \quad -0.066\,7)^{\mathrm{T}}$，则

$$\sigma_2 = \mathrm{sign}(a_{32}^{(2)}) \left[\sum_{i=3}^{4} (a_{i2}^{(2)})^2 \right]^{1/2} = \left[\left(\frac{21}{45} \right)^2 + \left(-\frac{3}{45} \right)^2 \right]^{1/2} = 0.471\,4$$

$$u_2 = \bar{a}_{32}^{(2)} + \sigma_2 e_1 = (0.938\,1, -0.066\,7)^{\mathrm{T}}$$

$$\rho_2 = \frac{1}{2} \| u_2 \|_2^2 = \sigma_2 (\sigma_2 + a_{32}^{(2)}) = 0.442\,2$$

$$R_2 = I - \rho_2^{-1} u_2 u_2^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -0.990\,1 & 0.141\,5 \\ 0.141\,5 & 0.989\,9 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{R_2}} \\ 0 & 0 & & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.990\,1 & 0.141\,5 \\ 0 & 0 & 0.141\,5 & 0.989\,9 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = H_2A_2H_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 2.3333 & -0.4714 & 0 \\ 0 & -0.4714 & 1.1667 & -1.5000 \\ 0 & 0 & -1.5000 & 0.5000 \end{bmatrix}$$

例 7-11 利用二分法计算对称三对角阵 A 的全部特征值：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

解答 设 A 的三个特征值的次序为 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$. 则 $\lambda_i \in [a, b], i = 1,2,3$,其中

$a = \min\{-1 \quad -4 \quad 2\} = -4,\ b = \max\{3 \quad 4 \quad 4\} = 4.$

A 的特征多项式序列为

$$f_0(\lambda) = 1,\ f_1(\lambda) = 1 - \lambda$$

$$f_2(\lambda) = (-1 - \lambda)f_1(\lambda) - 4$$

$$f_3(\lambda) = (3 - \lambda)f_2(\lambda) - f_1(\lambda)$$

(1) $\lambda = (-4 + 4)/2 = 0$

序列 $\{f_k(0)\} = \{1, 1, -5, -14\}$,所以 $S_3(0) = 2$,则 $\lambda_3 \in [-4, 0], \lambda_2, \lambda_1 \in [0, 4]$

(2) 计算 λ_3,列表如下：

$f_k(\lambda)$ \ k	0	1	2	3	$S_3(\lambda)$	λ_3 所在的区间
$f_k(0)$	1	1	−5	−14	2	$\lambda_3 \in [-4, 0]$
$f_k(-2)$	1	3	−1	−8	2	$\lambda_3 \in [-4, -2]$
$f_k(-3)$	1	1	4	20	3	$\lambda_3 \in [-3, -2]$
$f_k(-2.5)$	1	1.5	1.25	3.375	3	$\lambda_3 \in [-2.5, -2]$

取 $\lambda_3 \approx -2.25$.

(3) 隔离 λ_1、λ_2.

计算 $\lambda = (0 + 4)/2 = 2$

$\{f_k(2)\} = \{1, -1, -1, 0\}, S_3(2) = 2$,所以 λ_1、$\lambda_2 \in [2, 4]$.

再算 $\lambda = (2 + 4)/2 = 3, \{f_k(3)\} = \{1, -2, 4, 2\}$

则 $$S_3(3) = 1$$

故 $$\lambda_1 \in [3, 4],\ \lambda_2 \in [2, 3].$$

(4) 计算 λ_2,列表如下：

$f_k(\lambda)$ \ k	0	1	2	3	$S_3(\lambda)$	λ_2 所在的区间
$f_k(3)$	1	−2	4	2	1	$\lambda_2 \in [2, 3]$
$f_k(2.5)$	1	−1.5	1.25	2.25	1	$\lambda_2 \in [2, 2.5]$

取 $\lambda_2 \approx 2.25$.

(5) 计算 λ_1,列表如下：

$f_k(\lambda)$ \ k	0	1	2	3	$S_3(\lambda)$	λ_1 所在的区间
$f_k(3)$	1	−2	4	2	1	$\lambda_1 \in [3, 4]$
$f_k(3.5)$	1	−2.5	7.25	−1.125	0	$\lambda_1 \in [3, 3.5]$

取 $\lambda_1 \approx 3.25$.

所以 A 的三个特征值的近似值分别为 3.25, 2.25, −2.25.

注记 本题没有算得非常精确,因二分法大家都已掌握,无非是再多算几次而已.

例 7-12 试用初等旋转变换求矩阵 与7-13比较

$$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\0&2&2\\2&1&2\end{pmatrix}$$

的 QR 分解.

解答 第一步,先将 $a_{31}=2$ 变为 0. 为此,取

$\cos\theta=2/\sqrt{2^2+2^2}=1/\sqrt{2}$, $\sin\theta=2/\sqrt{2^2+2^2}=1/\sqrt{2}$

故旋转变换为

$$T_{31}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0\\-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

因此

$$A_1=T_{31}A=\begin{pmatrix}4/\sqrt{2}&3/\sqrt{2}&3/\sqrt{2}\\0&2&2\\0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

第二步,将 A_1 的元素 $a_{32}=-1/\sqrt{2}$ 变为 0,取

$\cos\theta=2/\sqrt{2^2+(-1/\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}/3$, $\sin\theta=(-1/\sqrt{2})/\sqrt{2^2+(1/\sqrt{2})^2}=-\dfrac{1}{3}$

则旋转矩阵为

$$T_{32}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2\sqrt{2}/3&-1/3\\0&1/3&2\sqrt{2}/3\end{pmatrix}$$

$$A_2=T_{32}A_1=T_{32}T_{31}A=$$

$$\begin{pmatrix}2\sqrt{2}&3/\sqrt{2}&3/\sqrt{2}\\0&3/\sqrt{2}&7/(3\sqrt{2})\\0&0&4/3\end{pmatrix}=R$$

最后,由 $A=T_{31}^{\mathrm{T}}T_{32}^{\mathrm{T}}R=QR$,得

$$Q=T_{31}^{\mathrm{T}}T_{32}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/(3\sqrt{2})&-2/\sqrt{3}\\0&2\sqrt{2}/3&1/3\\1/\sqrt{2}&-1/(3\sqrt{2})&2/3\end{pmatrix},$$

$$R=\begin{pmatrix}2\sqrt{2}&3/\sqrt{2}&3/\sqrt{2}\\0&3/\sqrt{2}&7/(3/\sqrt{2})\\0&0&4/3\end{pmatrix}$$

例 7-13 用 Householder 变换化矩阵 A 为 QR 分解形式,

$$A=\begin{pmatrix}0&2&0\\2&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$$

解答 记 $A_1=A, A=(a_1,a_2,a_3)$

第一步,求 H_1 使 H_1a_1 与 e_1 同方向,即 $Ha_1=-\sigma_1e_1$.

$$\sigma_1=\mathrm{sign}(a_{11})(\sum_{i=1}^{3}a_{i1}^2)^{1/2}=\sqrt{0+2^2+0}=2$$

$$u_1=a_1+\sigma_1e_1=(0\quad 2\quad 0)^{\mathrm{T}}+2(1\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}=(2\quad 2\quad 0)^{\mathrm{T}}$$

$$\rho_1=\frac{1}{2}\|u_1\|_2^2=\sigma_1(\sigma_1+a_{11})=4$$

$$H_1=I-\rho_1^{-1}u_1u_1^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A_2=H_1A_1=\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\0&-2&0\\0&2&1\end{pmatrix}$$

第二步,令 $a_2^{(2)}=(-2\quad 2)^{\mathrm{T}}$,求 $H_2^{(2)}$,使 $H_2^{(2)}a_2^{(2)}$ 与 $e_1^{(2)}$ 同向,即 $H_2^{(2)}a_2^{(2)}=-\sigma_1^{(2)}e_1^{(2)}$. 经计算,得

符号>a11

$\sigma = \pm\|a\|$ $\quad w = \dfrac{a_1+\sigma e_1}{\|a_1+\sigma e_1\|_2}$

$H = I - 2ww^T$

$$\sigma_1^{(2)} = \operatorname{sign}(a_{22}^{(2)})\left(\sum_{i=2}^{3}(a_{i2}^{(2)})^2\right)^{1/2} = -\sqrt{(-2)^2+2^2} = -2\sqrt{2}$$

$$u_2^{(2)} = a_2^{(2)} + \sigma_1^{(2)} e_1^{(2)} = (-4.828 \quad 2)^{\mathrm{T}}$$

$$\rho_2 = \frac{1}{2}\|u_2^{(2)}\|_2^2 = \sigma_1^{(2)}(\sigma_1^{(2)} + a_{22}^{(2)}) = 13.657$$

$$H_2^{(2)} = I - \rho_2^{-1} u_2^{(2)} u_2^{(2)\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -0.707 & 0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{pmatrix}$$

所以

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.707 & 0.707 \\ 0 & 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = H_2A_2 = H_2H_1A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2.828 & 0.707 \\ 0 & 0 & 0.707 \end{bmatrix} = R$$

故
$$A = (H_2H_1)^{-1}R = H_1^{\mathrm{T}}H_2^{\mathrm{T}}R = QR$$

$$Q = H_1^{\mathrm{T}}H_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0.707 & -0.707 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$$

例 7-14 设方阵 A 的特征值都是实数,满足条件

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$$

试证:为求 λ_1 而进行原点平移,取 $p = \frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_n)$ 时,乘幂法收敛最快.

证明 方阵 $B = A - pI$ 的特征值为

$$\lambda_1 - p, \lambda_2 - p, \cdots, \lambda_n - p$$

为求 λ_1,必须选择 p,满足

$$|\lambda_1 - p| > |\lambda_j - p|, \quad j = 2,3,\cdots,n$$

根据已知条件,要使乘幂法收敛最快,应取满足关系式

$$\max\left\{\frac{|\lambda_2 - p|}{|\lambda_1 - p|}, \frac{|\lambda_n - p|}{|\lambda_1 - p|}\right\} = \min$$

的 p 才行. 要让 p 满足上式,必有

$$|\lambda_2 - p| = |\lambda_n - p|$$

解得
$$p = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_n).$$

此时

$$\left|\frac{\lambda_2 - p}{\lambda_1 - p}\right| = \frac{\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_n)}{|\lambda_1 - \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_n)|} = \frac{\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_n)}{\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_n)} < 1$$

$$\left|\frac{\lambda_n - p}{\lambda_1 - p}\right| = \frac{\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_n)}{|\lambda_1 - \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_n)|} = \frac{\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_n)}{\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_n)} < 1$$

故当 p 取 $\frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_n)$ 时乘幂法求 λ_1 收敛最快.

例 7-15 设 A_{n-1} 是由 Householder 方法得到的矩阵,y 是 A_{n-1} 的一个特征向量. 证明矩阵 A 对应特征向量是 $x = H_1H_2\cdots H_ny$.

证明 因 A_{n-1} 是 Householder 方法得到的矩阵,所以

$$A_{n-1} = H_{n-2}H_{n-1}\cdots H_1AH_1H_2\cdots H_{n-2}$$

又由题设,y 是 A_{n-1} 的特征向量,可设 y 是 A_{n-1} 的特征值 λ 对应的特征向量,则 $A_{n-1}y = \lambda y$.

由 A_{n-1} 的表达式,有

$$H_{n-2}H_{n-3}\cdots H_2H_1AH_1H_2\cdots H_{n-2}y=\lambda y$$

所以

$$A(H_1H_2\cdots H_{n-2}y)=\lambda(H_1^{-1}H_2^{-1}\cdots H_{n-2}^{-1})y=\lambda(H_1H_2\cdots H_{n-2}y)$$

故 $x=H_1H_2\cdots H_{n-2}y$ 是 A 的特征向量.

例 7-16 在雅可比法中,设 A 的特征值为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$, A_k 的对角元按大小次序排列为

$$a_{\sigma_1\sigma_1}^{(k)}\geqslant a_{\sigma_2\sigma_2}^{(k)}\geqslant\cdots\geqslant a_{\sigma_n\sigma_n}^{(k)}$$

记 $\varepsilon=\max\limits_{i\neq j}|a_{ij}^{(k)}|$, 则 $|a_{\sigma_i\sigma_i}^{(k)}-\lambda_i|\leqslant(n-1)\varepsilon$.

证明 因 A 与 A_k 相似,故 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 也是 A_k 的特征值. 根据圆盘定理,有

$$|a_{\sigma_i\sigma_i}^{(k)}-\lambda_i|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq\sigma_i}}^{n}|a_{\sigma_{ij}}^{(k)}|\leqslant(n-1)\max_{\sigma_i\neq j}|a_{\sigma_{i,j}}^{(k)}|\leqslant(n-1)\varepsilon$$

例 7-17 设 A 是一实对称矩阵,x 是任一实向量或复向量, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值,且满足

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$$

证明: $\lambda_1=\max\limits_{x\neq0}\dfrac{x^HAx}{x^Hx}$, $\lambda_n=\min\limits_{x\neq0}\dfrac{x^HAx}{x^Hx}$.

证一 仅就 $\lambda_1=\max\limits_{x\neq0}\dfrac{x^HAx}{x^Hx}$ 的情形证明,$\lambda_n=\min\limits_{x\neq0}\dfrac{x^HAx}{x^Hx}$ 可用类似的方法证明.

根据内积的定义,$x^Hx=(x,x)$,$x^HAx=(Ax,x)$,再根据 Rayleigh 商的定义知,$\dfrac{x^HAx}{x^Hx}=R(x)$,即 $R(x)=(Ax,x)/\|x\|_2^2=(A\dfrac{x}{\|x\|_2},\dfrac{x}{\|x\|_2})$. 因此问题转化为求 $R(y)$ 的最大值(Ay,y),其中 $\|y\|_2=1$. 由于 $\|y\|_2=1$ 是 R^n 中的 Euclid 空间的圆,且是一个有界闭集,$R(y)$ 是 y 的连续函数,故存在向量 $x_1\in R^n$, $\|x_1\|_2=1$,使得

$$R(x_1)=(Ax_1,x_1)=\max_{\|y\|_2=1}(Ay,y)=\max_{x\neq0}\frac{(Ax,x)}{(x,x)}$$

令其为 λ_1',即 $\lambda_1'=R(x_1)$.

由于$(Ax_1,x_1)=\lambda_1'=\lambda_1'(x_1,x_1)$,所以

$$(Ax_1-\lambda_1'x_1,x_1)=0$$

说明 $Ax_1-\lambda_1'x_1$ 与 x_1 正交. 下面只需证明

$$y=Ax_1-\lambda_1'x_1=0 \text{ 即可}.$$

事实上,令 $x=x_1+\varepsilon y$,ε 为正数,则

$$(A(x_1+\varepsilon y),x_1+\varepsilon y)\leqslant\lambda_1'(x_1+\varepsilon y_1,x_1+\varepsilon y)$$

利用$(Ax_1,x_1)=\lambda_1'$,$(x_1,x_1)=1$,$(x_1,y)=0$,得

$$2\varepsilon(Ax_1,y)+\varepsilon^2(Ay,y)\leqslant\varepsilon^2\lambda_1'(y,y)$$

消去 ε,得

$$2(Ax_1,y)+\varepsilon(Ay,y)\leqslant\varepsilon\lambda_1'(y,y)$$

令 $\varepsilon\to0$,则有

$$(Ax_1,y)=(Ax_1,Ax_1-\lambda_1'x_1)\leqslant0$$

所以

$$(y,y)=(Ax_1-\lambda_1'x_1,y)=(Ax_1,y)-\lambda_1'(x_1,y)=(Ax_1,y)\leqslant0$$

根据内积(y,y)的非负性,得 $y=0$,即

$$Ax_1=\lambda_1'x_1$$

说明 λ_1' 是 A 的特征值,由 λ_1' 的定义知,$\lambda_1'=\lambda_1$.

证二 $\max\limits_{x\neq0}\dfrac{x^HAx}{x^Hx}$ 的存在性用证法一.

令 $B=A-\lambda_1I$,则 B 也对称,且 B 的特征值等于 A 的特征值减去 λ_1. 因 λ_1 最大,故 B 的所有特征值均小于或等于零. 因此,对 $\forall\ x\neq0$,$x^HBx\leqslant0$.

$$\frac{x^HAx}{x^Hx}-\lambda_1=\frac{x^H(A-\lambda_1I)x}{x^Hx}=\frac{x^HBx}{x^Hx}\leqslant0$$

故 $x^H Ax/(x^H x) \leqslant \lambda_1$. 显然当 x 是对应于 λ_1 的特征向量时，等号成立，即

$$\max_{x\neq 0} \frac{x^H Ax}{x^H x} = \lambda_1$$

例 7-18 设 A 为实对称矩阵，$\{A_k\}$ 是按古典雅可比法计算时产生的矩阵序列，$S(A_k) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} (a_{ij}^{(k)})^2$，证明：

$$S(A_{k+1}) \leqslant S(A_k)(1 - \frac{2}{n(n-1)})$$

证明 根据雅可比方法知，
A_{k+1} 的元素 $a_{ij}^{(k+1)}$ 与 A_k 的元素 $a_{ij}^{(k)}$ 之间有关系式

$$S(A_{k+1}) = S(A_k) - 2(a_{pq}^{(k)})^2$$

由于 $|a_{pq}^{(k)}| = \max_{i\neq j} |a_{ij}^{(k)}|$，故

$$S(A_k) = \sum_{i\neq j} (a_{ij}^{(k)})^2 \leqslant \sum_{i\neq j} (a_{pq}^{(k)})^2 = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} (a_{pq}^{(k)})^2$$

故 $(a_{pq}^{(k)})^2 \geqslant \frac{1}{n(n-1)} S(A_k)$，因此

$$S(A_{k+1}) = S(A_k) - 2(a_{pq}^{(k)})^2 \leqslant$$
$$S(A_k) - 2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} S(A_k) =$$
$$S(A_k)[1 - \frac{2}{n(n-1)}]$$

上式表明，当 $k \to \infty$ 时，A_k 的非对角元素的平方和趋于零，亦即 A_k 趋于一个对角阵.

三、习题七

1. 用乘幂法求下列矩阵的按模最大的特征值和相应的特征向量.

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$，(2) $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

2. 用反幂法求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 的与 $\lambda = 1.2679$ 最接近的那个特征值所对应的特征向量.

3. 用 Jacobi 方法计算

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

的特征值.

4. 用对分法求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

的最大特征值(要求有两位准确数字).

5. 用 Householder 变换及对分法求下列矩阵的全部特征值：

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

6. 用 QR 算法已求得

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

的近似特征值为 3.90，0.95，0.95. 求相应于最大特征值的特征向量.

第八章　常微分方程数值解法

一、内容提要

本章讨论形如

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \qquad a \leqslant x \leqslant b \\ y(x_0) = \eta\end{cases}$$

的初值问题的数值解法，其中 $f(x,y)$ 为已知函数，η 为给定初值．假设该初值问题的解存在唯一．

（一）单步法

1. Euler（欧拉）方法及其改进形式

（1）向前 Euler 公式（Euler 折线法或 Euler 显格式）

$$\begin{cases}y_{n+1} = y_n + hf(x_n,y_n), \quad n = 0,1,2,\cdots \\ y_0 = \eta\end{cases}$$

其中 h 为步长．该方法的局部截断误差阶为 $O(h^2)$，是一阶方法．

（2）向后 Euler 公式（后退 Euler 公式）

$$\begin{cases}y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1},y_{n+1}), \quad n = 0,1,2,\cdots \\ y_0 = \eta\end{cases}$$

这是一个隐格式，也是一阶方法．

（3）梯形公式（~~改进的 Euler 公式~~）

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n,y_n) + f(x_{n+1},y_{n+1})], \quad n = 0,1,2,\cdots$$

这也是一个隐格式，是二阶方法．实用中常按下述迭代进行求解：

改进的 Euler 公式　$\bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n,y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})]$

$$\begin{cases}y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n,y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n,y_n) + f(x_{n+1},y_{n+1}^{(k)})], \\ \qquad k = 0,1,2,\cdots; \quad n = 0,1,2,\cdots\end{cases}$$

该方法是二阶方法．如果关于 k 仅迭代一步，并换 $y_{n+1}^{(k+1)}$ 为 y_{n+1}，则称该方法为 Euler 预估-校正格式．

2. 显式 Runge－Kutta（龙格-库塔）方法

一般形式为

$$\begin{cases}y_{n+1} = y_n + \sum\limits_{i=1}^{m} C_i K_i \\ K_i = hf(x_i + a_i h, y_n + \sum\limits_{j=1}^{i-1} b_{ij}K_j) \\ i = 1,2,\cdots,m\end{cases}$$

其中 C_i 为待定权因子，满足 $\sum\limits_{i=1}^{m} C_i = 1$，$m$ 为所使用的 f 值的个数，$a_1 = 0$. $a_i(i \neq 1)$，b_{ij} 均为待定参数．随着 m 取不同的正整数值，便可得到各阶显式 Runge－Kutta 格式．特别当 $m = 4$ 时可得四阶经典的 Runge－Kutta 格式：

$$\begin{cases}y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = hf(x_n,y_n) \\ K_2 = hf(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{1}{2}K_1) \qquad\qquad n = 0,1,2,\cdots \\ K_3 = hf(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{1}{2}K_2) \\ K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3)\end{cases}$$

3. 单步法的收敛性与稳定性

单步法的收敛性与稳定性概念非常重要，有关定义和结论可见文献 2,6,10.

（二）线性多步法

1. 一般公式

$\alpha_k y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 y_n = h[\beta_k f_{n+k} + \beta_{k-1} f_{n+k-1} + \cdots + \beta_0 f_n]$

其中 $\alpha_i, \beta_i (i = 0,1,2,\cdots,k)$ 为与 n 无关的常数，$f_i = f(x_i, y_i)$. 若 $\alpha_k \neq 0, |\alpha_0| + |\beta_0| > 0$，则称上式为 k 步方法；若局部截断误差为 $0(h^{s+1})$，则称上式为 s 阶方法 .

2. Adams（阿达姆斯）显式公式

当取 $r+1$ 个点 $x_{n-r}, x_{n-r+1}, \cdots, x_n$ 及已知值 $f_{n-r}, f_{n-r+1}, \cdots, f_n$ 时则可得 Adams 显式公式（也称 Adams - Rashforth 公式）：

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{k=0}^{r} \beta_{rk} f_{n-k}$$

系数 $\{\beta_{rk}\}$ 可由数表给出，见文献 1,2,10.

特别当 $r = 0$ 时　上式为 Euler 折线法，

$r = 3$ 时　上式为

$$y_{n+1} = y_n + h[55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-1}]/24$$

Adams 显式公式的局部截断误差为

$$R_{r,h}^{(1)} = h^{r+2}\alpha_{r+1} y^{(r+2)}(\zeta_n)$$

这里 $\alpha_{r+1} = (-1)^{r+1}\int_0^1 \begin{pmatrix} -s \\ r+1 \end{pmatrix} ds, x_{n-r} < \zeta_n < x_{n+1}$. 特别当 $r = 3$ 时 $R_{3,h}^{(1)} = \dfrac{251}{720} h^5 y^{(5)}(\zeta_n)$.

3. Adams 隐式公式

如果取 $r+1$ 个点 $x_{n+1}, x_n, \cdots, x_{n-r+1}$ 及对应的函数值 $f_{n+1}, f_n, \cdots, f_{n-r+1}$，则可得 Adams 隐式公式：

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{k=0}^{r} \beta_{rk}^{*} f_{n-k+1}$$

其中 β_{rk}^{*} 也可查表而得，当 $r = 0$ 时上式为 Enler 后退公式；$r = 1$ 时为梯形公式；$r = 3$ 时为

$$y_{n+1} = y_n + h[9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}]/24$$

其局部截断误差为 $R_{r,h}^{(2)} = h^{r+2}\alpha_{r+1}^{*} y^{(r+2)}(\eta_n)$. 当 $r = 3$ 时 $R_{3,h}^{(2)} = -\dfrac{19}{720} h^5 y^{(5)}(\eta_n)$.

4. 线性多步法的收敛性、稳定性及预估-校正方法等见 10.

有关一阶方程组与高阶方程的求解见文献 1,2,10.

二、典型题分析

例 8-1　用欧拉法计算初值问题

$$\begin{cases} y' = x^2 + 100y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

的解函数 $y(x)$ 在 $x = 0.3$ 时的近似值（取步长 $h = 0.1$，小数点后至少保留 4 位）.

解答　欧拉格式为

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n^2 + 100y_n^2) = y_n + 0.1(x_n^2 + 100y_n^2)$$

X = 0　y = 0
0.1
0.2
0.3

由 $y_0 = 0$ 计算得

$$y(0.1) \approx y_1 = 0.000\,0$$
$$y(0.2) \approx y_2 = 0.001\,0$$
$$y(0.3) \approx y_3 = 0.005\,0$$

例 8-2　取步长 $h = 0.2$，用欧拉法解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - xy^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant 0.6) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解答　欧拉格式为

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + 0.2(-y_n - x_n y_n^2) = 0.8y_n - 0.2x_n y_n^2$$

由 $y_0 = 1$ 计算得

$$y(0.2) \approx y_1 = 0.78$$

$$y(0.4) \approx y_2 = 0.599\ 664$$

$$y(0.6) \approx y_3 = 0.450\ 963$$

例 8-3 用改进的欧拉法(梯形公式)解初值问题

$$\begin{cases} y' = 8 - 3y \qquad (1 \leqslant x \leqslant 2) \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

取步长 $h = 0.2$,小数点后至少保留 5 位.

解答 梯形公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

于是 $$y_{n+1} = y_n + \frac{0.2}{2}[8 - 3y_n + 8 - 3y_{n+1}]$$

整理得显格式为

$$y_{n+1} = \frac{7}{13}y_n + \frac{16}{13}$$

故由 $y(1) = y_0 = 2$ 计算得

$$y(1.2) \approx y_1 = 2.307\ 69$$

$$y(1.4) \approx y_2 = 2.473\ 37$$

$$y(1.6) \approx y_3 = 2.562\ 58$$

$$y(1.8) \approx y_4 = 2.610\ 62$$

$$y(2.0) \approx y_5 = 2.636\ 49$$

例 8-4 用欧拉预-校方法求解初值问题

$$\begin{cases} y' + y + y^2\sin x = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

要求取步长 $h = 0.2$,计算 $y(1.2)$ 及 $y(1.4)$ 的近似值,小数点后至少保留 5 位.

解答 欧拉预-校格式为

$$\begin{cases} \tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})) \end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases} \tilde{y}_{n+1} = y_n - 0.2(y_n + y_n^2\sin x_n) \\ y_{n+1} = y_n - 0.1(y_n + y_n^2\sin x_n + \tilde{y}_{n+1} + \tilde{y}_{n+1}^2\sin x_{n+1}) \end{cases}$$

由 $y(1) = y_0 = 1$ 计算得

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 = 0.631\ 71 \\ y(1.2) \approx y_1 = 0.715\ 488 \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{y}_2 = 0.476\ 96 \\ y(1.4) \approx y_2 = 0.526\ 11 \end{cases}$$

例 8-5 写出用反复迭代的欧拉预-校法求解初值问题

梯形公式

$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的计算公式,并取步长 $h = 0.1$,求 $y(0.2)$ 的近似值,要求迭代误差不超过 10^{-5}.

解答 反复迭代的欧拉预-校格式为

$$\begin{cases} y_{n+1}^{[0]} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{[k+1]} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[k]})] \\ \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

于是取 $f(x, y) = -y$ 有

$$\begin{cases} y_{n+1}^{[0]} = 0.9y_n \\ y_{n+1}^{[k+1]} = 0.95y_n - 0.05y_{n+1}^{[k]} \end{cases}$$

由 $y(0) = y_0 = 1$ 计算有

$y_1^{[0]} = 0.9$, $y_1^{[1]} = 0.905$, $y_1^{[2]} = 0.904\ 75$, $y_1^{[3]} = 0.904\ 762\ 5$, $y_1^{[4]} = 0.904\ 761\ 875$

因 $|y_1^{[4]} - y_1^{[3]}| = 6.25 \times 10^{-7} < 10^{-5}$,于是取

$$y(0.1) \approx y_1 = y_1^{(4)} = 0.904\ 761\ 875$$

$0.2\left[8-3\left(y_n+\frac{1.6-0.6y_n}{2}\right)\right]$

$=0.2(8-2.1y_n-2.4)$

$=1.12-0.42y_n$

又 $y_2^{[0]}=0.814\ 286$，$y_2^{[1]}=0.818\ 809$，$y_2^{[3]}=0.818\ 583$，$y_2^{[4]}=0.818\ 595$，$y_2^{[5]}=0.818\ 594$

因 $|y_2^{[5]}-y_2^{[4]}|=10^{-6}<10^{-5}$，故取

$$y(0.2)\approx y_2=y_2^{[5]}=0.818\ 594$$

例 8-6 写出用 4 阶经典龙格-库塔法求解初值问题

$$\begin{cases} y'=8-3y \\ y(0)=2 \end{cases}$$

的计算公式，并取步长 $h=0.2$，计算 $y(0.4)$ 的近似值，小数点后至少保留 4 位．

解答 $f(x,y)=8-3y$，于是 $0.2(8-3(0.8-0.3y_n))$ $=1.6-0.48+0.18y_n$

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) \\ k_1=hf(x_n,y_n)=1.6-0.6y_n=0.2(8-3y) \\ k_2=hf\left(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{k_1}{2}\right)=1.12-0.42y_n=0.2[\\ k_3=hf\left(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{k_2}{2}\right)=1.264-0.474y_n \\ k_4=hf(x_n+h,y_n+k_3)=1.220\ 8-0.457\ 8y_n \end{cases}$$

$0.2(8-3\times(8-3y))$ $1.6-0.48+$

故 $y_{n+1}=1.264\ 8+0.525\ 7y_n$，由于 $y(0)=y_0=2$，

故 $$y(0.2)\approx y_1=2.316\ 2$$

$$y(0.4)\approx y_2=2.482\ 4$$

例 8-7 用如下 4 步四阶的阿达姆斯显格式

$$y_{n+1}=y_n+h(55f_n-59f_{n-1}+37f_{n-2}-9f_{n-3})/24$$

求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=3x-2y \quad 0\leqslant x\leqslant 0.5 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

取步长 $h=0.1$，小数点后至少保留六位．

分析 由于所给格式是 4 步格式，故需先用单步法求出 3 个

初值，然后再用 4 步法计算．又由于该 4 步格式是四阶的，故所选用的单步法也应是四阶的，以保证所用方法协调．

解答 可先用四阶单步法如四阶经典龙格-库塔法求 y_1,y_2,y_3.

由于 $f(x,y)=3x-2y$，于是

$$\begin{cases} K_1=hf(x_n,y_n)=0.3x_n-0.2y_n \\ K_2=hf\left(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{K_1}{2}\right)=0.27x_n-0.18y_n+0.015 \\ K_3=hf\left(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{K_2}{2}\right)=0.273x_n-0.182y_n+0.013\ 5 \\ K_4=hf(x_n+h,y_n+K_3)= \\ \quad 0.245\ 4x_n-0.163\ 6y_n+0.027\ 3 \\ y_{n+1}=y_n+\dfrac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4) \\ \quad =0.271\ 9x_n+0.818\ 733y_n+0.014\ 05 \end{cases}$$

由 $y(0)=y_0=1$ 计算得

$$y(0.1)\approx y_1=0.832\ 783$$
$$y(0.2)\approx y_2=0.723\ 067$$
$$y(0.3)\approx y_3=0.660\ 429$$

再由 4 步阿达姆斯显格式得

$$y_{n+1}=y_n+0.1[(165x_n-110y_n)+(-177x_{n-1}+118y_{n-1})+(111x_{n-2}-74y_{n-2})+(-27x_{n-3}+18y_{n-3})]/24$$

从而

$$y(0.4)\approx y_4=y_3+0.1[(165x_3-110y_3)+(-177x_2+118y_2)+(111x_1-74y_1)+(-27x_0+18y_0)]/24=0.636\ 466$$

$$y(0.5)\approx y_5=y_4+0.1[(165x_4-110y_4)+(-177x_3+$$

$$118y_3) + (111x_2 - 74y_2) +$$
$$(-27x_1 + 18y_1)]/24 = 0.643\ 976$$

例 8-8 对初值问题 $y' + y = 0, y(0) = 1$，证明用梯形公式求得的近似解为

$$y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$$

并证明当步长 $h \to 0$ 时 $y_n \to e^{-x}$.

解答 梯形公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

代入 $f(x,y) = -y$ 有

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(-y_n - y_{n+1})$$

整理成显式公式有

$$y_{n+1} = \left(\frac{2-h}{2+h}\right) y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^2 y_{n-1} = \cdots = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{n+1} y_0$$

因为 $y_0 = 1$，于是 $y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$.

分析 为证 $\lim\limits_{h\to 0} y_n = e^{-x}$，设任给 $x > 0$，我们理解成，为求 $y(x)$ 的近似值 y_n，用上述梯形公式以步长 h 经 n 步计算到 y_n，也就是说 n、h 与 x 有如下关系：$nh = x$. 于是有

$$\lim_{h\to 0} y_n = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{\frac{x}{h}} = e^{-x}.$$

例 8-9 用改进的欧后法计算积分

$$y = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

在 $x = 0.5, 0.75, 1$ 时的近似值（至少保留 6 位小数）.

分析 采用数值积分法无疑可以求近似值．另外，通过求导，可以把该积分问题化为微分问题，于是

$$\begin{cases} y' = e^{-x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

对此可采用数值求解常微分方程初值问题的方法求 $y(0.25), y(0.5), y(0.75)$ 和 $y(1)$ 的近似值．

解答 依本题特点，可采用步长 $h = 0.25$. 改进的欧拉公式（梯形公式）为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

代入 $f(x,y) = e^{-x^2}$ 有

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(e^{-x_n^2} + e^{-x_{n+1}^2})$$

当 $y(0) = y_0 = 0$ 时可计算得

$$y(0.25) \approx y_1 = 0.242\ 427$$
$$y(0.50) \approx y_2 = 0.457\ 204$$
$$y(0.75) \approx y_3 = 0.625\ 777$$
$$y(1.00) \approx y_4 = 0.742\ 985$$

例 8-10 用二阶泰勒(Taylor)展开法求初值问题

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

的解在 $x = 1.5$ 时的近似值（取步长 $h = 0.25$，小数点后至少保留 5 位）.

解答 二阶 Taylor 展开公式为

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + O(h^3)$$

因 $y' = x^2 + y^2, y'' = 2x + 2yy' = 2x + 2y(x^2 + y^2)$，代入上式并略去高阶项 $O(h^3)$ 则得求解公式

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n^2 + y_n^2) + \frac{h^2}{2}[2x_n + 2y_n(x_n^2 + y_n^2)]$$

由 $y(1)=y_0=1$ 计算得

$$y(1.25)\approx y_1=1.6875$$

$$y(1.50)\approx y_2=3.333298$$

例 8-11 讨论梯形公式求解初值问题 $y'=-\lambda y, y(0)=a$ 的稳定性(这里 $\lambda>0$ 为实数).

解答 所谓讨论稳定性,实际上就是讨论当对步长 h 作什么样的限制时梯形公式是稳定的.

因为 $f(x,y)=-\lambda y$,故梯形公式为

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}))$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(-\lambda y_n-\lambda y_{n+1})$$

整理成显格式为

$$y_{n+1}=\left(\frac{2-\lambda h}{2+\lambda h}\right)y_n=\left(\frac{2-\lambda h}{2+\lambda h}\right)^2 y_{n-1}=\cdots=\left(\frac{2-\lambda h}{2+\lambda h}\right)^{n+1}y_0$$

设初值 y_0 有小扰动 δ_0,于是有

$$y_{n+1}+\delta_{n+1}=\left(\frac{2-\lambda h}{2+\lambda h}\right)^{n+1}(y_0+\delta_0)$$

与上式相减,则

$$\delta_{n+1}=\left(\frac{2-\lambda h}{2+\lambda h}\right)^{n+1}\delta_0$$

显然,对任意步长 $h>0$,都有 $\left|\frac{2-\lambda h}{2+\lambda h}\right|\leqslant 1$,从而

$$|\delta_{n+1}|\leqslant|\delta_0|\quad(n=1,2,\cdots)$$

即梯形公式对任意步长 $h>0$ 是稳定的,也说梯形公式无条件稳定.

例 8-12 讨论求解初值问题 $y'=-\lambda y, y(0)=a$ 的二阶中点公式

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}f(x_n,y_n))$$

改进 Euler

的稳定性($\lambda>0$ 为实数).

$\overline{y_{n+1}}=$ ...

解答 同上题一样,本题主要是要讨论当步长 h 在什么范围内时所给公式稳定. 因 $f(x,y)=-\lambda y$,所以中点公式为

$$y_{n+1}=y_n+h[-\lambda(y_n+\frac{h}{2}(-\lambda y_n))]$$

令 $\lambda h=\bar{h}$,则整理后有

$$y_{n+1}=(1-\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2)y_n=\cdots=(1-\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2)^{n+1}y_0$$

设初值有小扰动 δ_0,则

$$y_{n+1}+\delta_{n+1}=(1-\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2)^{n+1}(y_0+\delta_0)$$

与上式相减有

$$\delta_{n+1}=(1-\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2)^{n+1}\delta_0$$

显然当且仅当 $|1-\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2|\leqslant 1$ 时 $|\delta_{n+1}|\leqslant|\delta_0|$,即所给格式关于初值稳定. 解 $|1-\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2|\leqslant 1$ 有

$$\bar{h}\leqslant 2\quad 即\quad h\leqslant\frac{2}{\lambda}$$

所以当步长 $h\leqslant\frac{2}{\lambda}$ 时二阶中点公式关于初值稳定,它是条件稳定的.

例 8-13 试建立求解初值问题 $y'=f(x,y), y(x_0)=\eta$ 的如下数值算法

$$y_{n+1}=y_{n-1}+\frac{h}{3}(f_{n+1}+4f_n+f_{n-1})$$

其中 $f_i=f(x_i,y_i)\ (i=n-1,n,n+1)$.

解答 数值积分法是建立求解该初值问题计算格式的常用方法之一. 初值问题显然等价于如下积分问题(当 $y(x)$ 一阶连续可导时)

$$y(x)=y(x_{n-1})+\int_{x_{n-1}}^{x}f(x,y(x))\mathrm{d}x$$

固定 $x=x_{n+1}$ 有

$$y(x_{n+1})=y(x_{n-1})+\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}}f(x,y(x))\mathrm{d}x$$

采用辛普森(Simpson)求积公式则有 $x_{n+1}-x_{n-1}=2h$

$$y(x_{n+1})\approx y(x_{n-1})+\frac{2h}{6}[f(x_{n+1},y(x_{n+1}))+4f(x_n,y(x_n))+f(x_{n-1},y(x_{n-1}))]$$

也就是

$$y_{n+1}=y_{n-1}+\frac{h}{3}[f(x_{n+1},y_{n+1})+4f(x_n,y_n)+f(x_{n-1},y_{n-1})].$$

例 8-14 试建立求解初值问题 $y'=f(x,y),y(x_0)=c$ 的如下数值格式

$$y_{n+1}=y_n+h(3f_n-f_{n-1})/2$$

其中 $f_n=f(x_n,y_n),f_{n-1}=f(x_{n-1},y_{n-1})$,并说明这是几阶格式.

解答 除上题中的数值积分法外,Taylor 展开法是建立数值格式的最重要方法,也是最本质的方法. 由 Taylor 展开有

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+y'(x_n)h+\frac{y''(x_n)}{2!}h^2+\frac{y'''(\zeta_n)}{3!}h^3 \quad (1)$$

再把 $f(x_{n-1},y(x_{n-1}))=y'(x_{n-1})$ 在 x_n 点展开有

$$y'(x_{n-1})=y'(x_n)+y''(x_n)(-h)+\frac{y'''(\eta_n)}{2!}(-h)^2$$

于是有

$$y(x_n)+\frac{h}{2}[3y'(x_n)-y'(x_{n-1})]=$$
$$y(x_n)+\frac{h}{2}[3y'(x_n)-(y'(x_n)-hy''(x_n)+\frac{h^2}{2}y'''(\eta_n))]=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)-\frac{h^3}{4}y'''(\eta_n)$$

与(1)式比较有

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\frac{h}{2}[3y'(x_n)-y'(x_{n-1})]+O(h^3) \quad (2)$$

为考虑局部截断误差,设 $y(x_n)=y_n,y(x_{n-1})=y_{n-1}$,于是所给公式可写为

$$y_{n+1}=y(x_n)+\frac{h}{2}[3y'(x_n)-y'(x_{n-1}))\quad (3)$$

(2)—(3) 得局部截断误差阶

$$R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^3)$$

由(2)略去 $O(h^3)$,则得欲建立格式

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[3f(x_n,y_n)-f(x_{n-1},y_{n-1})]$$

它是二阶格式.

例 8-15 已知初值问题 $y'=ax+b,y(0)=0$ 有精确解 $y(x)=\frac{a}{2}x^2+bx$. 求证:用欧拉法以 h 为步长所得近似解 y_n 的整体截断误差为

$$\varepsilon_n=y(x_n)-y_n=\frac{1}{2}ahx_n$$

证明 欧拉公式为

$$y_n=y_{n-1}+hf(x_{n-1},y_{n-1})$$

代入 $f(x,y)=ax+b$,则

$$y_n=y_{n-1}+h(ax_{n-1}+b)$$

由 $y(0)=y_0=0$ 得

$$y_1=y_0+h(ax_0+b)=bh$$
$$y_2=y_1+h(ax_1+b)=2bh+ahx_1$$
$$y_3=y_2+h(ax_2+b)=3bh+ah(x_1+x_2)$$
$$\vdots$$
$$y_n=y_{n-1}+h(ax_{n-1}+bh)=nbh+ah(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})$$

因 $x_n=nh$,于是

$$y_n = bx_n + ah^2(1 + 2 + \cdots + (n-1)) = bx_n + ah^2\frac{(n-1)n}{2} = \frac{a}{2}x_n x_{n-1} + bx_n$$

所以其整体截断误差为

$$\varepsilon_n = y(x_n) - y_n = \frac{a}{2}(x_n - x_{n-1})x_n = \frac{a}{2}hx_n$$

例 8-16 证明如下龙格-库塔公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_2 + K_3) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + th, y_n + thK_1) \\ K_3 = f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hK_1) \end{cases}$$

对任意参数 t 是二阶公式．

分析 本题所求解的初值问题为 $y' = f(x,y), y(x_0) = \eta$. 为建立一个数值公式并指明其阶数，泰勒展开法是最常用的方法．观察本题特点，除了用到一元函数的泰勒展开外，还要将 K_2 和 K_3 中的 f 在 (x_n, y_n) 点进行二元函数的泰勒展开，以便于整理讨论．

证明 由一元函数的泰勒展开有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + \frac{y'''(\zeta_n)}{3!}h^3$$

因为 $y' = f(x,y), y'' = f'_x(x,y) + f'_y(x,y)f(x,y)$，所以

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}[f'_x(x_n, y(x_n)) + f'_y(x_n, y(x_n))f(x_n, y(x_n))] + \frac{y'''(\zeta_n)}{3!}h^3 \quad (1)$$

又由二元函数的泰勒展开有

$$K_2 = f(x_n, y_n) + f'_x(x_n, y_n)th + f'_y(x_n, y_n)thf(x_n, y_n) + O(h^2)$$

$$K_3 = f(x_n, y_n) + f'_x(x_n, y_n)(1-t)h + f'_y(x_n y_n)(1-t)hf(x_n, y_n) + O(h^2)$$

相加则有

$$K_2 + K_3 = 2f(x_n, y_n) + hf'_x(x_n, y_n) + hf'_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n) + O(h^2)$$

代入所给公式有

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_2 + K_3) = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}[f'_x(x_n, y_n) + f'_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n)] + O(h^3)$$

为考虑局部截断误差，设 $y_n = y(x_n)$，于是上式成为

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2}[f'_x(x_n, y(x_n)) + f'_y(x_n, y(x_n))f(x_n, y(x-n)))] + O(h^3) \quad (2)$$

比较(1)与(2)式则知局部截断误差为

$$R_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$$

所以本题所给龙格-库塔公式对任意参数 t 是二阶公式．

例 8-17 设有求解常微分方程初值问题 $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = \eta$ 的如下线性二步显格式

$$y_{n+1} = \alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n-1} + h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1})$$

其中 $f_n = f(x_n, y_n), f_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})$. 试确定参数 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ 和 β_1，使该格式成为 3 阶格式．

分析 确定参数以使所讨论格式具有一定的阶数，通常主要是通过泰勒展开有关函数，经整理后比较同类项系数以列出求参数的等式．

解答 由泰勒展开有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_n)}{3!}h^3 + \frac{y^{(4)}(\zeta_n)}{4!}h \quad (1)$$

为考虑局部截断误差，设 $y_n = y(x_n), y_{n-1} = y(x_{n-1})$，于是所

给格式可写为

$$y_{n+1}=\alpha_0 y(x_n)+\alpha_1 y(x_{n-1})+h(\beta_0 f(x_n,y(x_n))+\beta_1 f(x_{n-1})y(x_{n-1}))=\alpha_0 y(x_n)+\alpha_1 y(x_{n-1})+h(\beta_0 y'(x_n)+\beta_1 y'(x_{n-1})) \qquad (2)$$

分别将 $y(x_{n-1}),y'(x_{n-1})$ 在 x_n 泰勒展开有

$$y(x_{n-1})=y(x_n)-y'(x_n)h+\frac{y''(x_n)}{2!}h^2-\frac{y'''(x_n)}{3!}h^3+\frac{y^{(4)}(\eta_n)}{4!}h^4$$

$$y'(x_{n-1})=y'(x_n)-y''(x_n)h+\frac{y'''(x_n)}{2!}h^2-\frac{y^{(4)}(\zeta_n)}{3!}h^3$$

代入(2)式整理后有

$$y_{n+1}=(\alpha_0+\alpha_1)y(x_n)+(-\alpha_1+\beta_0+\beta_1)hy'(x_n)+(\frac{\alpha_1}{2}-\beta_1)h^2y''(x_n)+(-\alpha_1+3\beta_1)\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+\frac{\alpha_1 h^4}{4!}y^{(4)}(\eta_n)-\frac{\beta_1 h^4}{3!}y'''(\zeta_n) \qquad (3)$$

比较(1)与(3)右端同类项,令其系数相等有

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0+\alpha_1&=1\\-\alpha_1+\beta_0+\beta_1&=1\\\alpha_1-2\beta_1&=1\\-\alpha_1+3\beta_1&=1\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

解方程组(4)有 $\alpha_0=-4,\alpha_1=5,\beta_0=4,\beta_1=2$,此时(1)与(3)相减有

$$R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}=\frac{5h^4}{4!}y^{(4)}(\eta_n)-\frac{2h^4}{3!}y'''(\zeta_n)=O(h^4)$$

即所给格式一定是三阶格式,具体为

$$y_{n+1}=-4y_n+5y_{n-1}+h(4f_n+2f_{n-1})$$

例 8-18 考虑求解初值问题 $y'=f(x,y),y(x_0)=\eta$ 的如下欧拉预-校格式(反复校正或迭代形式)

$$\begin{cases}y_{n+1}^{(0)}=y_n+hf(x_n,y_n)\\y_{n+1}^{(k+1)}=y_n+\dfrac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^{(k)})]\\\qquad(k=0,1,2,\cdots)\quad n=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

如果 $|f'_y(x,y)|\leqslant L$,且$\dfrac{hL}{2}<1$,则对任意 $n\geqslant 1$,上述格式关于 k 的迭代是收敛的,试证明之.

证明 设 y_{n+1} 满足如下方程

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

由所给格式与其相减有

$$|y_{n+1}^{(k+1)}-y_{n+1}|=\left|\frac{h}{2}f(x_{n+1},y_{n+1}^{(k)})-\frac{h}{2}f(x_{n+1},y_{n+1})\right|=\left|\frac{h}{2}f'_y(x_{n+1},\xi_n^{(k)})(y_{n+1}^{(k)}-y_{n+1})\right|\leqslant\frac{hL}{2}|y_{n+1}^{(k)}-y_{n+1}|$$

反复递推有

$$|y_{n+1}^{(k+1)}-y_{n+1}|\leqslant\left(\frac{hL}{2}\right)^{k+1}|y_{n+1}^{(0)}-y_{n+1}|$$

由于非负数$\dfrac{hL}{2}<1$,故当 $k\to\infty$ 时 $y_{n+1}^{(k+1)}\to y_{n+1}$.

例 8-19 用如下欧拉预-校格式

$$\begin{cases}y_{n+1}^{(0)}=y_n+hf(x_n,y_n)\\y_{n+1}^{(k+1)}=y_n+\dfrac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^{(k)})]\\\qquad(k=0,1,2,\cdots)\quad(n=0,1,2,\cdots,N)\end{cases}$$

求解初值问题

$$\begin{cases} y' = e^x \sin(xy) & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

时，如何选取步长 h，使上述格式关于 k 的迭代收敛．

解答 本题中 $f(x,y) = e^x \sin(xy)$，故 $|f'_y(x,y)| = |e^x \cos(xy) x| \leqslant |e^x x| \leqslant e \ (0 \leqslant x \leqslant 1)$，于是由例 8-18 可知，当 $\frac{he}{2} < 1$，即 $h < \frac{2}{e}$ 时，上述格式关于 k 的迭代是收敛的．

例 8-20 试推导求解初值问题 $y' = f(xy), y(x_0) = y_0$ 的如下数值格式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n y_n) + \frac{h^2}{2} f'(x_n y_n)[y_n + x_n f(x_n y_n)] \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

并说明它是多少阶格式．

解答 泰勒展开是建立数值格式并推导其局部截断误差的重要方法．由泰勒展开有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + \frac{y'''(\zeta_n)}{3!}h^3$$

因为 $y' = f(xy), y'' = f'(xy)(y + xy') = f'(xy)(y + xf(xy))$ 于是上式成为

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n y(x_n)) + \frac{h^2}{2} f'(x_n y(x_n))(y(x_n) + x_n f(x_n y(x_n))) + \frac{y'''(\zeta_n)}{3!}h^3$$

为考虑局部截断误差，设 $y_n = y(x_n)$，于是

$$R_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{y'''(\zeta_n)}{3!}h^3 = O(h^3)$$

所以所给数值格式是二阶格式，它由上述式子中舍掉局部截断误差 $\frac{y'''(\zeta_n)}{3!}h^3$ 而得．

例 8-21 给定一阶方程组的初值问题

$$\begin{cases} y' = 2z + 3x \\ z' = 2y + z \\ y(0) = z(0) = 1 \end{cases}$$

写出用欧拉预-校格式求解此初值问题的计算公式，并以 $h = 0.1$ 为步长，计算 $y(0.1)$ 和 $z(0.1)$ 的近似值．

分析 采用矩阵和向量的记号，所给初值问题可以写为通常形式，然后对此向量方程采用欧拉预-校方法．

解答 原方程组可写为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x \\ 0 \end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}(x) = \begin{pmatrix} 3x \\ 0 \end{pmatrix}$

则方程为

$$\boldsymbol{\varphi}' = \boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi})，其中\ \boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{A\varphi} + \boldsymbol{b}(x)$$

初始条件为 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\varphi}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

于是欧拉预-校格式为

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{n+1} = \boldsymbol{\varphi}_n + h\boldsymbol{f}(x_n,\boldsymbol{\varphi}_n) \\ \boldsymbol{\varphi}_{n+1} = \boldsymbol{\varphi}_n + \frac{h}{2}[\boldsymbol{f}(x_n,\boldsymbol{\varphi}_n) + \boldsymbol{f}(x_{n+1},\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{n+1})] \end{cases}$$

也就是

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{n+1} = \boldsymbol{\varphi}_n + h(\boldsymbol{A\varphi}_n + \boldsymbol{b}(x_n)) \\ \boldsymbol{\varphi}_{n+1} = \boldsymbol{\varphi}_n + \frac{h}{2}[(\boldsymbol{A\varphi}_n + \boldsymbol{b}(x_n)) + (\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{n+1} + \boldsymbol{b}(x_{n+1}))] \end{cases}$$

由 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\varphi}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 计算得

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1 = \boldsymbol{\varphi}_0 + 0.1(\boldsymbol{A\varphi}_0 + \boldsymbol{b}(x_0)) = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.3 \end{pmatrix}$$

从而

$$\varphi(0.1) \approx \varphi_1 = \varphi_0 + \frac{0.1}{2}[A\varphi_0 + b(x_0) + A\widetilde{\varphi}_1 + b(x_1)] = \begin{pmatrix} 1.245 \\ 1.335 \end{pmatrix}$$

也就是

$$y(0.1) \approx y_1 = 1.245$$
$$z(0.1) \approx z_1 = 1.335$$

例 8－22 用龙格-库塔方法中的如下二阶中点公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + K_2 \\ K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right) \end{cases}$$

求二阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^{2x} \\ y(0) = -0.1, y'(0) = -0.2 \end{cases}$$

的解函数在 $x = 0.1$ 和 $x = 0.2$ 时的近似值(取 $h = 0.1$).

分析 通过变量代换,可把高阶方程化为一阶方程组,从而用类似例8-21的方法去解;也可以直接用数值求导公式将方程中的各阶导数离散化,从而得到数值求解公式.

解一 设 $s = y, t = y'$,则所给初值问题可写为

$$\begin{cases} s' = t \\ t' = -2s + 2t + e^{2x} \\ s(0) = -0.1, t(0) = -0.2 \end{cases}$$

采用矩阵记号,又可写为

$$\begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s(0) \\ t(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.2 \end{pmatrix}$$

记 $\varphi = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}$,则

二阶中点公式为

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n + K_2 \\ K_1 = hf(x_n, \varphi_n) = 0.1(A\varphi_n + b(x_n)) \\ K_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, \varphi_n + \frac{K_1}{2}) = \\ \quad 0.1[A(\varphi_n + \frac{K_1}{2}) + b(x_n + 0.05)] \end{cases}$$

由初始条件 $\varphi(0) = \varphi_0 = \begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.2 \end{pmatrix}$ 计算得

$$\begin{cases} K_1 = 0.1(A\varphi_0 + b(x_0)) = \begin{pmatrix} -0.02 \\ 0.08 \end{pmatrix} \\ K_2 = 0.1[A(\varphi_0 + \frac{K_1}{2}) + b(x_0 + 0.05)] \doteq \begin{pmatrix} -0.016 \\ 0.100517 \end{pmatrix} \\ \varphi_1 = \varphi_0 + K_2 = \begin{pmatrix} -0.116 \\ -0.099483 \end{pmatrix} \end{cases}$$

由此再算一步,有

$$K_1 = 0.1(A\varphi_1 + b(x_1)) = \begin{pmatrix} -0.009\,948\,3 \\ 0.125\,443\,7 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = 0.1[A(\varphi_1 + \frac{K_1}{2}) + b(x_1 + 0.05)] = \begin{pmatrix} -0.003\,676\,115 \\ 0.133\,026\,024\,3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + K_2 = \begin{pmatrix} -0.119\,676\,115 \\ 0.033\,543\,024 \end{pmatrix}$$

所以 $y(0.1) \approx y_1 = s_1 = -0.116$

$y(0.2) \approx y_2 = s_2 = -0.119\,676\,115$

解二 抛开本题所指定的方法,也可直接用数值求导公式离散化. 在所给方程中固定 $x = x_n$,则

$$y''(x_n) - 2y'(x_n) + 2y(x_n) = e^{2x_n}$$

把数值求导公式

$$y''(x_n)=\frac{1}{h^2}[y(x_{n+1})-2y(x_n)+y(x_{n-1})]+O(h^2) \quad (1)$$

$$y'(x_n)=\frac{1}{2h}[y(x_{n+1})-y(x_{n-1})]+O(h^2) \quad (2)$$

代入上述方程并略去 $O(h^2)$ 有

$$\frac{1}{h^2}(y_{n+1}-2y_n+y_{n-1})-2\cdot\frac{1}{2h}(y_{n+1}-y_{n-1})+2y_n=e^{2x_n}$$

整理后有

$$y_{n+1}=2(1+h)y_n-\frac{1+h}{1-h}y_{n-1}+\frac{h^2}{1-h}e^{2x_n} \quad (3)$$

令 $n=1$ 有

$$y_2=2(1+h)y_1-\frac{1+h}{1-h}y_0+\frac{h^2}{1-h}e^{2x_1} \quad (4)$$

分析 因为数值导数公式(1)和(2)的误差均为 $O(h^2)$，为了使数值导数公式的误差都达到 $O(h^2)$，故对初始条件 $y'(0)=-0.2$ 的处理不宜采用误差为 $O(h)$ 的数值导数公式

$$y'(0)=\frac{y(x_1)-y(0)}{h}+O(h)$$

而应采用如下公式

$$y'(0)=\frac{1}{2h}[-3y(0)+4y(x_1)-y(x_2)]+O(h^2)$$

代入初始条件 $y'(0)=-0.2$ 并略去 $O(h^2)$ 则有

$$\frac{1}{2h}(-3y_0+4y_1-y_2)=-0.2 \quad (5)$$

联合(4)、(5)，并代 $h=0.1, y_0=-0.1$，于是解得

$$y_1=-0.113\,448$$

再由初始条件 $y(0)=y_0=-0.1$，联合(3)则得如下计算公式

$$\begin{cases} y_{n+1}=2(1+h)y_n-\dfrac{1+h}{1-h}y_{n-1}+\dfrac{h^2}{1-h}e^{2x_n} \\ y_0=-0.1, y_1=-0.113\,448 \end{cases}$$

由此易算得 $y(0.2)\approx y_2=-0.113\,792\,6$.

三、习题八

1. 用 Euler 法及 Euler 预-校方法求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=y-\dfrac{2x}{y} \quad (0<x\leqslant 0.5) \\ y(0)=1 \end{cases}$$

(取步长 $h=0.1$)

2. 取步长 $h=0.2$，用经典 4 阶龙格-库塔方法求解初值问题

$$\begin{cases} y'=y-\dfrac{2x}{y} \quad (0<x\leqslant 1) \\ y(0)=1 \end{cases}$$

3. 试推证求解初值问题 $y'=f(x,y), y(x_0)=y_0$ 的下列格式

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{4}[y_n'+3f(x_n+\dfrac{2}{3}h, y_n+\dfrac{2}{3}hf(x_n,y_n))], \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

是二阶精度的，这里 $y_n'=f(x_n,y_n)$.

4. 对初值问题 $y'=-10y, y(x_0)=y_0$，试讨论用欧拉-预校方法求解时稳定性对步长 h 的限制.

5. 对下述一阶常微分方程组初值问题

$$\begin{cases} y'=a_{11}y+a_{12}z \quad y(0)=y_0 \\ z'=a_{21}y+a_{22}z \quad z(0)=z_0 \end{cases}$$

写出标准的(即经典的)4 阶龙格-库塔格式.

6. 将二阶方程初值问题 $y''=3y'-2y, y(0)=y'(0)=1$ 化为一阶方程组初值问题，并写出用欧拉预-校方法求解的计算格式.

习题答案

习　题　一

1. $f(0.23)\approx 2.164\ 33$
2. 三次，$P_3(x)=2x^3+x^2-3x$
3. $x=0.657\ 12$
4. $h\leqslant 0.002$
5. $f(\lambda)=-\lambda^3+6\lambda^2-10\lambda+4$
6. $H(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\dfrac{y_1'-f[x_0,x_2]}{2x_1-x_0-x_2}(x-x_0)(x-x_2)$
7. $s(x)=\begin{cases}\dfrac{9}{2}x^3-17x^2+\dfrac{43}{2}x-7, & x\in[1,2]\\ -\dfrac{19}{2}x^3+67x^2-\dfrac{293}{2}x+105, & x\in(2,3]\end{cases}$

10. $P_3(x)=1-\dfrac{2}{\pi}(\dfrac{6}{\pi}-1)x^2+\dfrac{4}{\pi^2}(\dfrac{4}{\pi}-1)x^3, R_3(x)=\dfrac{1}{4!}\cos\xi x^2(x-\dfrac{\pi}{2})^2$.

习　题　二

1. $a=1.718\ 28, b=0.894\ 07$
2. $0.426x+0.934$
3. $\dfrac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}f(x_i)$
4. $\overline{P}_2(x)=0.996\ 3+0.536\ 6x^2$

5. $a = 84.85212$, $b = -0.45643$

6. $a = -2$, $b = 0$.

习 题 三

1. $T = 1.39148$, $s = 1.45471$

2. 多于 671 个结点即可

3. 1.098 039

4. 是,代数精确度为 1

5. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}[4f(a) + 2f(b) + (b-a)f'(a))$

习 题 四

1. (1) $x \approx 1.5185$ (2) $x \approx 4.2748$ (3) $x \approx 1.8955$

2. $x \approx 1.32$

3. $x \approx 1.8794$

4. $x \approx 7.439760$

6. 用埃特金方法.

7. (1) $x_{n+1} = 2x_n - bx_n^2$; (2) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{b}{x_n})$;

   (3) $x_{n+1} = 1.5x_n - 0.5bx_n^3$.

习 题 五

1. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

2. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

3. $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1$.

5. $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\boldsymbol{H}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$, $\mathrm{cond}_\infty(\boldsymbol{H}_3) = 748$.

12. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 必对称正定,从而有 $\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}$ 分解

习 题 六

2. 精确解为 $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

3. 精确解为 $\boldsymbol{x} = (\frac{1}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$

7. 按如下性质找 $\boldsymbol{A}$:$\boldsymbol{A}$ 不是零矩阵,但 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值都是零.

习 题 七

1. (1) 11, $t(0.6667 \quad 1.3333 \quad 1)^{\mathrm{T}}$, $t \neq 0$

   (2) 9.005, $t(1 \quad 0.6056 \quad -0.3945)^{\mathrm{T}}$, $t \neq 0$.

2. $t(1 \quad -0.73206 \quad 0.26796)^{\mathrm{T}}$, $t \neq 0$.

3. $\lambda_1 \approx 3.414013$, $\lambda_2 \approx 2.000198$, $\lambda_3 \approx 0.5857879$

5. $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & -3.742 & 0 & 0 \\ -3.742 & 6.572 & 2.718 & 0 \\ 0 & 2.718 & 3.050 & 1.238 \\ 0 & 0 & 1.238 & 2.374 \end{pmatrix}$

   $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 3.996$, $\lambda_3 = 2.00$, $\lambda_4 = -0.0003293$.

精确解为 $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2.0$, $\lambda_4 = 0$.

6. $(1 \quad 1 \quad 1)^{\mathrm{T}}$.

习　题　八

1. $y(0.1) \approx 1.1000$, $y(0.2) \approx 1.1918$, $y(0.3) \approx 1.2774$, $y(0.4) \approx 1.3582$, $y(0.5) \approx 1.4351$ (Euler 法)

$y(0.1) \approx 1.0959$, $y(0.2) \approx 1.1841$, $y(0.3) \approx 1.2662$, $y(0.4) \approx 1.3434$, $y(0.5) \approx 1.4164$ (Euler 预-校方法)

2. $y(0.2) \approx 1.1832$, $y(0.4) \approx 1.3417$, $y(0.6) \approx 1.4833$, $y(0.8) \approx 1.6125$,

$y(0.2) = 1.1832$, $y(0.4) = 1.3416$, $y(0.6) = 1.4832$, $y(0.8) = 1.6125$

$y(1.0) \approx 1.7321$

$y(1.0) = 1.7321$

4. $0 < h \leqslant 0.2$

参考文献

1　聂铁军,侯谊,郑介庸．数值计算方法．西安:西北工业大学出版社,1990

2　李庆扬,王能超,易大义．数值分析(第三版)．武汉:华中工学院出版社,1986

3　武汉大学,山东大学计算数学教研室编．计算方法．北京:人民教育出版社,1979

4　聂铁军．计算方法(修订版)．北京:国防工业出版社,1988

5　李岳生,黄友谦．数值逼近．北京:人民教育出版社,1979

6　朱国桢等编．计算方法习题集．沈阳:辽宁教育出版社,1986

7　K.E. 阿特金森著．数值分析引论．匡蛟勋．王国荣等译．上海:上海科学技术出版社,1986

8　王韶华,黄瑞霖编著．应用数值分析．成都:西南交通大学出版社,1987

9　曹志浩,张玉德,李瑞遐编．矩阵计算与方程求根．北京:人民教育出版社,1980

10　李荣华,冯果忱．微分方程数值解．北京:人民教育出版社,1981