



## 第二讲

# **Z变换及离散时间系统分析**

## 《工程信号处理》



# 提 纲

---

## ■ z变换

- 定义、收敛域、反变换、性质

## ■ 离散时间系统分析

- 基本概念
- 线性时不变系统的输入、输出关系
- 离散时间系统分析



# z变换的定义

## ■ z变换的定义

- z变换的收敛域
- z反变换
- z变换的性质

# z变换的定义

## ■ 引入z变换的目的

- 利用差分方程可求离散时间系统的结构及瞬态解。为了分析系统的重要特性，如稳定性和频率响应等等，需要研究离散时间系统的z变换(类似于模拟系统的拉氏变换)，它是分析离散时间系统和信号的重要工具。



# z变换的定义

- 一个离散序列  $x(n)$  的  $z$  变换(双边)定义为

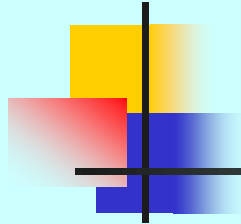
$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- 其中  $z$  为复变量，以其实部为横坐标，虚部为纵坐标构成的平面为  $z$  平面。常用  $ZT[x(n)]$  表示对序列  $x(n)$  的  $z$  变换。

- 单边  $z$  变换：

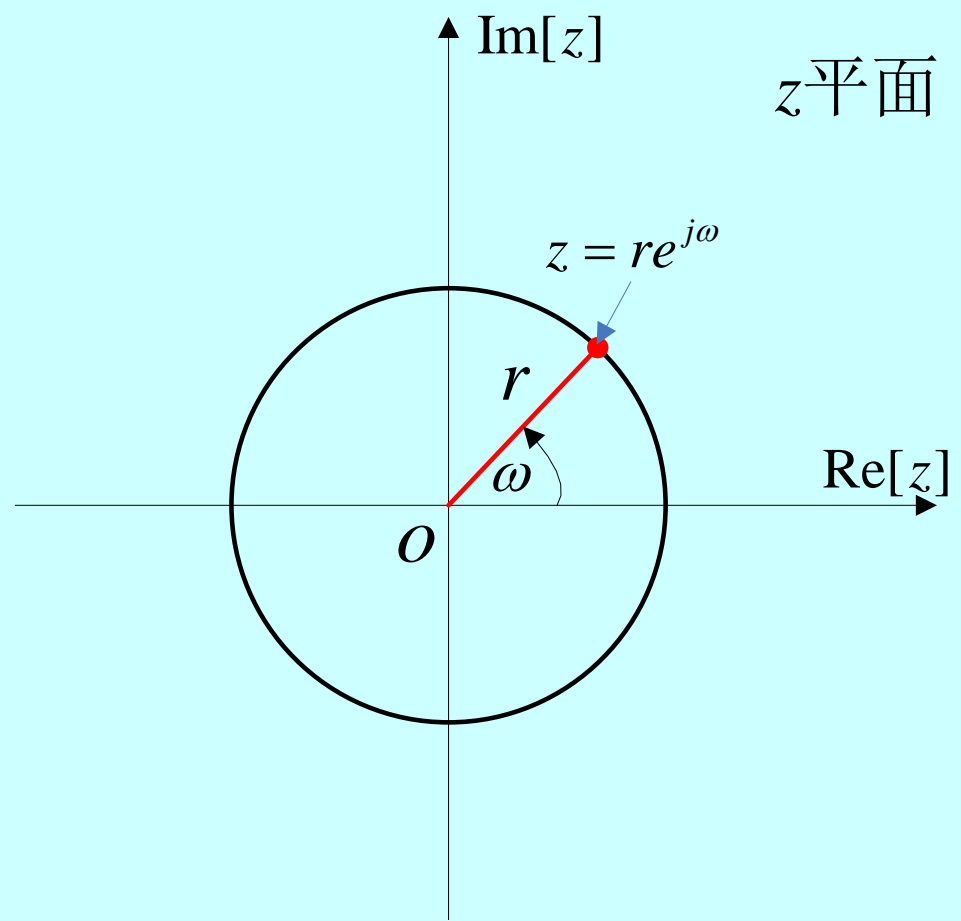
- 单边  $z$  变换只是对单边序列 ( $n \geq 0$  部分) 进行变换的  $z$  变换，其定义为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$



# z变换的定义

## ■ z平面



# z变换的定义

## ■ 典型序列的z变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

(1) 单位脉冲序列  $\delta(n)$   $\xrightarrow{z} 1$

(2) 单位阶跃序列  $u(n)$   $\xrightarrow{z} \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$

(3) 实指数序列  $a^n u(n)$   $\xrightarrow{z} \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$

# z变换的定义

## ■ 典型序列的z变换

(4) 单边正弦序列  $\sin(n\omega_0)u(n)$

$$\xrightarrow{z} \frac{1}{2j} \left( \frac{z}{z - e^{j\omega_0}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \right)$$

$$= \frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}, \quad |z| > 1$$

(5) 单边余弦序列  $\cos(n\omega_0)u(n)$

$$\xrightarrow{z} \frac{1}{2} \left( \frac{z}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \right)$$

$$= \frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}, \quad |z| > 1$$





# z变换的收敛域

- z变换的定义

- z变换的收敛域

- z反变换

- z变换的性质

# z变换的收敛域

- 收敛域(ROC: Region of Convergence)
- 对于任意给定序列 $x(n)$ ，若存在一个集合 $\in$ ，使 $X(z)$ 收敛，则称 $\in$ 为 $X(z)$ 的收敛域
  - 若给定 $X(z)$ ，必须同时给定收敛域才能唯一地确定 $x(n)$
- $X(z)$ 收敛的充要条件是满足绝对可和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| = M < \infty$$

# z变换的收敛域

## ■ 级数收敛的判定方法

■ 可使用比值法和根植法来判定级数是否收敛，对于

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$$

■ 计算比值  $\longrightarrow \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

■ 计算根值  $\longrightarrow \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$

## ■ 判定条件

■  $\rho < 1$  级数收敛

■  $\rho > 1$  级数发散

# z变换的收敛域

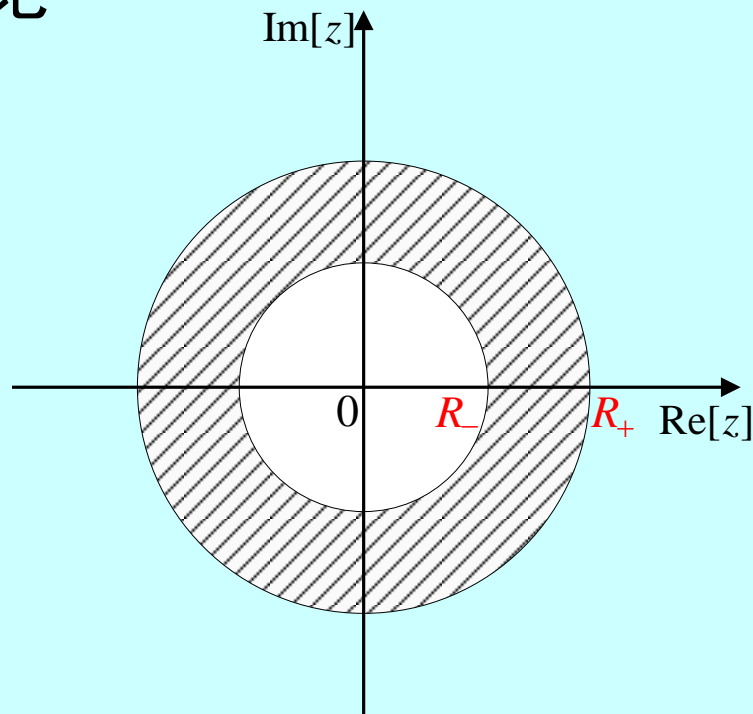
## ■ 4种典型序列的收敛域讨论

■ 有限长序列

■ 右边序列

■ 左边序列

■ 双边序列



收敛域分别是以  $R_-$ ,  $R_+$  为半径的两个圆组成的环状域,  $R_-$ ,  $R_+$  称收敛半径,  $R_+$  可以大到无穷大,  $R_-$  小到0

# z变换的收敛域

## ■ 有限长序列

- 此序列只在有限的区间( $n_1 \leq n \leq n_2$ )具有非零的有限值，此时，z变换为：

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

## ■ 分3种情况讨论

- 1)  $n_1 < 0, n_2 > 0$  时，除  $z = \infty$  及  $z = 0$  外， $X(z)$  在  $z$  平面上处处收敛。即收敛域为：

$$0 < |z| < \infty$$

# z变换的收敛域

## ■ 有限长序列

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

2)  $n_1 < 0, n_2 \leq 0$  时, 除  $z = \infty$  外,  $X(z)$  在  $z$  平面上处处收敛。  
即收敛域为:

$$|z| < \infty$$

3)  $n_1 \geq 0, n_2 > 0$  时, 除  $z = 0$  外,  $X(z)$  在  $z$  平面上处处收敛。  
即收敛域为:

$$|z| > 0$$

■ 所以, 有限长序列的  $z$  变换收敛域至少为:

$$0 < |z| < \infty \quad \text{且有可能包括 } z = \infty \text{ 或 } z = 0 \text{ 点}$$

# z变换的收敛域

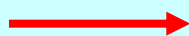
## ■ 右边序列

- 此序列是有始无终的序列，即当( $n < n_1$  时  $x(n)=0$ )，此序列的z变换为：

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

根据根值判别法：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(n)z^{-n}|} < 1$$



当  $|z| > R_{x1}$ ，则该级数收敛。

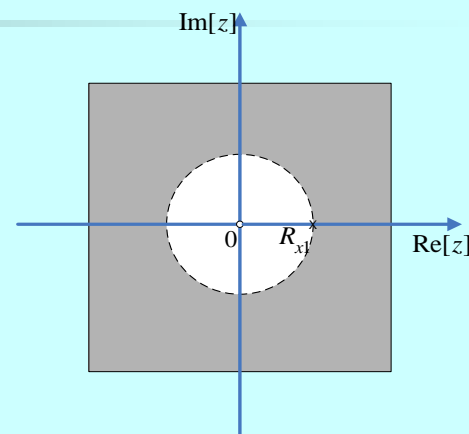
$$\text{即：}|z| > \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(n)|} = R_{x1}$$

其中  $R_{x1}$  是级数的收敛半径。

# z变换的收敛域

## ■ 右边序列

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}$$



■ 右边序列的收敛域是半径为 $R_{x1}$ 的圆外部分

1) 如果 $n_1 \geq 0$ ，则收敛域包括 $z = \infty$ 。即收敛域为

$$|z| > R_{x1}$$

2) 如果 $n_1 < 0$ ，则收敛域不包括 $z = \infty$ 。即收敛域为

$$R_{x1} < |z| < \infty$$



# z变换的收敛域

## ■ 左边序列

- 此序列是无始有终的序列，即当 $(n > n_2 \text{ 时}, x(n)=0)$ ，此序列的z变换为：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

令 $m=-n$ ，上式变为：
$$X(z) = \sum_{m=-n_2}^{\infty} x(-m)z^m$$

根据根值判别法：

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|x(-m)z^m|} < 1$$

$$\text{即: } |z| < \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|x(-m)|}} = R_{x2}$$

其收敛域为： $|z| < R_{x2}$

其中 $R_{x2}$ 是级数的收敛半径。

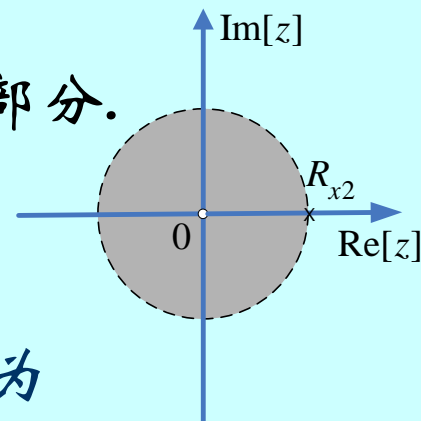
# z变换的收敛域

## ■ 左边序列

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

■ 可见,左边序列的收敛域是半径为 $R_{x2}$ 的圆内部分.

$$|z| < R_{x2}$$



1) 如果 $n_2 \geq 0$ , 则收敛域不包括 $z=0$ 。即收敛域为

$$0 < |z| < R_{x2}$$

2) 如果 $n_2 \leq 0$ , 则收敛域包括 $z=0$ 。即收敛域为

$$|z| < R_{x2}$$

# z变换的收敛域

## ■ 双边序列

- 双边序列是从  $n = -\infty$  延伸到  $n = +\infty$  的序列，此序列的  $z$  变换为：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

- 双边序列看成左边序列和右边序列的  $z$  变换叠加。

其收敛域为：两级数收敛域的重叠部分。

$R_{x1} < |z| < R_{x2}$      $R_{x2} > R_{x1}$  则该级数收敛。其中  $R_{x1} > 0, R_{x2} < \infty$ 。

可见，

双边序列的收敛域是以半径为  $R_{x1}$  和  $R_{x2}$  之间的圆环部分。



# z反变换

- z变换的定义
- z变换的收敛域
- z反变换
- z变换的性质

# z反变换

## ■ z反变换定义

- 从 $X(z)$ 中还原出原序列 $x(n)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \longrightarrow x(n) = IZT[X(z)]$$

- 实质：求 $X(z)$ 幂级数展开式

## ■ z反变换的求解方法：

- 围线积分法（留数法）
- 部分分式法
- 长除法

# z反变换—部分分式展开法(1)

■  $X(z)$ 表示成 $z$ 的有理分式形式: 
$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

展开成部  
分分式形式

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-N} A_n z^{-n} + \sum_{k=1}^{N-r} \frac{B_k}{1 - z_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^r \frac{C_k}{(1 - z_i z^{-1})^k}$$

- 其中,  $M \geq N$ 时, 才存在 $A_n$ ;  $z_k$ 为 $X(z)$ 的各单极点,  $z_i$ 为 $X(z)$ 的一个 $r$ 阶极点。

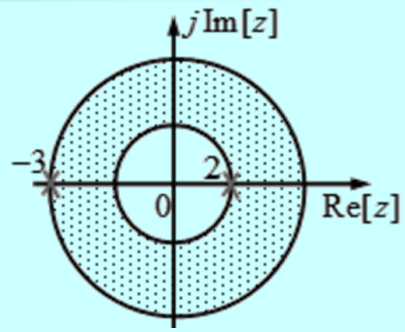
# z反变换—部分分式展开法(2)

## 部分z变换因式对应的时间序列

$X(z)$	<i>Corresponding Time Series <math>x(n)</math></i>	
	ROC: $ z  > R$	ROC: $ z  < R$
$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$a^n u(n)$	$-a^n u(-n - 1)$
$\frac{1}{(1 - az^{-1})^2}$	$(n + 1)a^n u(n)$	$-(n + 1)a^n u(-n - 1)$
$\frac{1}{(1 - az^{-1})^m}$	$\frac{1}{(m - 1)!} (n + 1) \cdots$ $(n + m - 1)a^n u(n)$	$\frac{-1}{(m - 1)!} (n + 1) \cdots$ $(n + m - 1)a^n u(-n - 1)$

# z反变换—部分分式展开法(3)

例：  $X(z) = \frac{5z^{-1}}{1 + z^{-1} - 6z^{-2}}$ ,  $2 < |z| < 3$ , 求z反变换



解：  $X(z) = \frac{5z^{-1}}{1 + z^{-1} - 6z^{-2}} = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} + \frac{-1}{1 + 3z^{-1}}$

$$\frac{1}{1 - 2z^{-1}} \xrightarrow{|z| > 2} 2^n u(n)$$

$$ZT[a^n u(n)] = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

$$\frac{-1}{1 + 3z^{-1}} \xrightarrow{|z| < 3} (-3)^n u(-n - 1)$$

$$ZT[a^n u(-n - 1)] = \frac{-1}{1 - az^{-1}} \quad |z| < |a|$$

$$\therefore x(n) = 2^n u(n) + (-3)^n u(-n - 1)$$





# z变换的性质

- z变换的定义
- z变换的收敛域
- z反变换
- z变换的性质

# z变换的性质

## ■ 线性性质

$$\text{若 } x(n) \xrightarrow{Z} X(z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$$

$$y(n) \xrightarrow{Z} Y(z) \quad (R_{y1} < |z| < R_{y2})$$

$$\text{则 } ax(n) + by(n) \xrightarrow{Z} aX(z) + bY(z) \\ (R_1 < |z| < R_2)$$

$$\text{其中: } R_1 = \max(R_{x1}, R_{y1}), R_2 = \min(R_{x2}, R_{y2})$$

## z变换的性质—线性(例)

已知双曲余弦序列  $x(n) = \cosh(n\omega_0)u(n)$ , 求其z变换

解:  $\because \cosh(n\omega_0)u(n) = \frac{1}{2}e^{n\omega_0}u(n) + \frac{1}{2}e^{-n\omega_0}u(n)$

$$e^{n\omega_0}u(n) \rightarrow \frac{z}{z - e^{\omega_0}}, \quad |z| > |e^{\omega_0}|; \quad e^{-n\omega_0}u(n) \rightarrow \frac{z}{z - e^{-\omega_0}}, \quad |z| > |e^{-\omega_0}|$$

$$\begin{aligned} \rightarrow X(z) &= \frac{1}{2} \frac{z}{z - e^{\omega_0}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z - e^{-\omega_0}} \\ &= \frac{z \sinh \omega_0}{z^2 - 2z \cosh \omega_0 + 1}; \quad |z| > \max(|e^{\omega_0}|, |e^{-\omega_0}|) \end{aligned}$$

# z变换的性质

## ■ 序列的时移

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

### ■ 双边z变换

$$x(n) \xrightarrow{Z} X(z); \quad x(n \pm m) \xrightarrow{Z} z^{\pm m} X(z) \quad \text{ROC不变}$$

### ■ 单边z变换

若  $x(n)u(n) \rightarrow X(z)$ ,  $x(n)$  为双边序列

$$\text{则 } x(n+m)u(n) \rightarrow z^m \left[ X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k} \right]$$

$$x(n-m)u(n) \rightarrow z^{-m} \left[ X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} \right]$$

$$\text{如 } x(n-2)u(n) \rightarrow z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)$$

# z变换的性质—序列的时移(例)

已知差分方程表示式

$$y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n)$$

边界条件 $y(-1)=0$ , 用z变换方法求系统响应 $y(n)$ .

解: 对方程式两端分别取z变换,

$$Y(z) - 0.9z^{-1}Y(z) = \frac{0.05z}{z-1} \quad |z| > 1$$

$$Y(z) = \frac{0.05z}{(z-1)(z-0.9)}$$

$$Y(z) = \frac{0.05z^2}{(z-1)(z-0.9)}$$


部分分式展开:

$$Y(z) = \frac{0.5z}{z-1} - \frac{0.45z}{z-0.9}$$

$$y(n) = [-0.45(0.9)^n + 0.5]u(n)$$

# z变换的性质

## ■ 序列的线性加权 (z域微分)

若  $x(n) \rightarrow X(z)$    $nx(n) \xrightarrow{Z} -z \frac{d}{dz} X(z); \quad n^m x(n) \xrightarrow{Z} \left[ -z \frac{d}{dz} \right]^m X(z)$

ROC不变

证明:  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

$$\begin{aligned} \frac{dX(z)}{dz} &= \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{d}{dz} (z^{-n}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-n)z^{-n-1} = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n} = -z^{-1} ZT[nx(n)] \end{aligned}$$

$$\therefore ZT[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz}$$

时域序列乘n等效于z域中求导且乘以(-z).

# z变换的性质—序列的线性加权(z域微分)(例)

例 已知:  $u(n) \rightarrow \frac{z}{z-1}$ ; 求斜变序列  $nu(n)$  的z变换.

解:  $nu(n) \rightarrow -z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2}$

例 求序列  $n^2u(n)$  的z变换

解:  $\because u(n) \rightarrow \frac{z}{z-1}$

$$\begin{aligned} \therefore n^2u(n) &\rightarrow \left[ -z \frac{d}{dz} \right]^2 \left( \frac{z}{z-1} \right) = -z \frac{d}{dz} \left[ -z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) \right] \\ &= \frac{z^2 + z}{(z-1)^3} \end{aligned}$$

# z变换的性质

## ■ 乘以指数序列 (z域尺度变换)

$$\text{若 } x(n) \xrightarrow{Z} X(z), \quad R_{x_1} < |z| < R_{x_2}$$

$$\text{则 } a^n x(n) \xrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{a}\right), \quad R_{x_1} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x_2}$$

■ 可见  $x(n)$  乘以指数序列等效于  $z$  平面尺度展缩。

$$\text{例: } a^{-n} x(n) \xrightarrow{Z} X(az), \quad R_{x_1} < |az| < R_{x_2}$$

$$(-1)^n x(n) \xrightarrow{Z} X(-z), \quad R_{x_1} < |z| < R_{x_2}$$



# z变换的性质

## ■ 序列的时域卷积

■ 设 $y(n)$ 为 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的卷积：

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

且  $X(z) = ZT[x(n)] \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

$$H(z) = ZT[h(n)] \quad R_{h^-} < |z| < R_{h^+}$$

则  $Y(z) = ZT[y(n)] = X(z) \cdot H(z)$

$$\max(R_{x^-}, R_{h^-}) < |z| < \min(R_{x^+}, R_{h^+})$$

当零点与极点  
相抵消时，收  
敛域扩大

# z变换的性质—序列的时域卷积(证明)

$$\begin{aligned}
 \text{证: } ZT[x(n) * h(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n) * h(n)] z^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m) z^{-n} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-m) z^{-n} \right] \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-m} H(z) \\
 &= H(z) X(z)
 \end{aligned}$$

$$\max(R_{x^-}, R_{h^-}) < |z| < \min(R_{x^+}, R_{h^+})$$

当零点与极点  
相抵消时，收  
敛域扩大

# z变换的性质

## ■ 共轭序列

若  $ZT[x(n)] = X(z) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

则  $ZT[x^*(n)] = X^*(z^*) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

证： 
$$\begin{aligned} ZT[x^*(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)(z^*)^{-n}]^* \\ &= X^*(z^*) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+} \end{aligned}$$

# z变换的性质

## ■ 序列翻转

若  $ZT[x(n)] = X(z)$   $R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

则  $ZT[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right)$   $\frac{1}{R_{x^+}} < |z| < \frac{1}{R_{x^-}}$

证: 
$$\begin{aligned} ZT[x(-n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^{-1})^{-n} = X\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

$$R_{x^-} < \left|\frac{1}{z}\right| < R_{x^+} \Rightarrow \frac{1}{R_{x^+}} < |z| < \frac{1}{R_{x^-}}$$



# 离散时间系统的基本概念

- 离散时间系统的概念
- 线性时不变系统的输入、输出关系
- 离散时间系统分析

# 离散时间系统的基本概念

## ■ 离散时间系统的定义

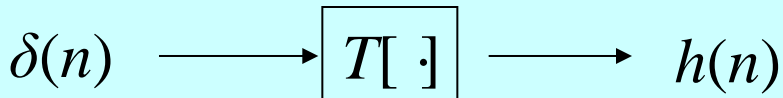
- 将输入序列 $x(n)$ 映射成输出序列 $y(n)$ 的变换或映射

$$y(n) = T[x(n)]$$


- 离散时间系统中最重要、最常用的是线性、时不变系统

## ■ 系统的单位脉冲响应

- 输入为单位冲激序列 $\delta(n)$ 时系统的输出称为单位脉冲响应，记为 $h(n)$

$$h(n) = T[\delta(n)]$$


# 离散时间系统的基本概念

## ■ 线性系统

■ 满足叠加原理的系统称为线性系统

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 分别作为系统的输入序列，其输出分别用 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 表示，即

$$y_1(n) = T[x_1(n)], \quad y_2(n) = T[x_2(n)]$$

那么线性系统一定满足下面公式：

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n)$$

$$T[ax_1(n)] = ay_1(n)$$

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$$

上式中， $a$ 和 $b$ 均是常数

# 离散时间系统的基本概念

## ■ 线性系统

■ 线性系统具有叠加性和齐次性，因此分析计算很方便。非线性系统不满足叠加性和齐次性。

■ 例：判断是否为线性系统

$$(a) \quad y(n) = \log(x(n))$$

$$(b) \quad y(n) = 6x(n+2) + 4x(n+1) + 2x(n) + 1$$

$$(c) \quad y(n) = x(n) \sin(n\pi / 2)$$

$$(d) \quad y(n) = \operatorname{Re}\{x(n)\}$$

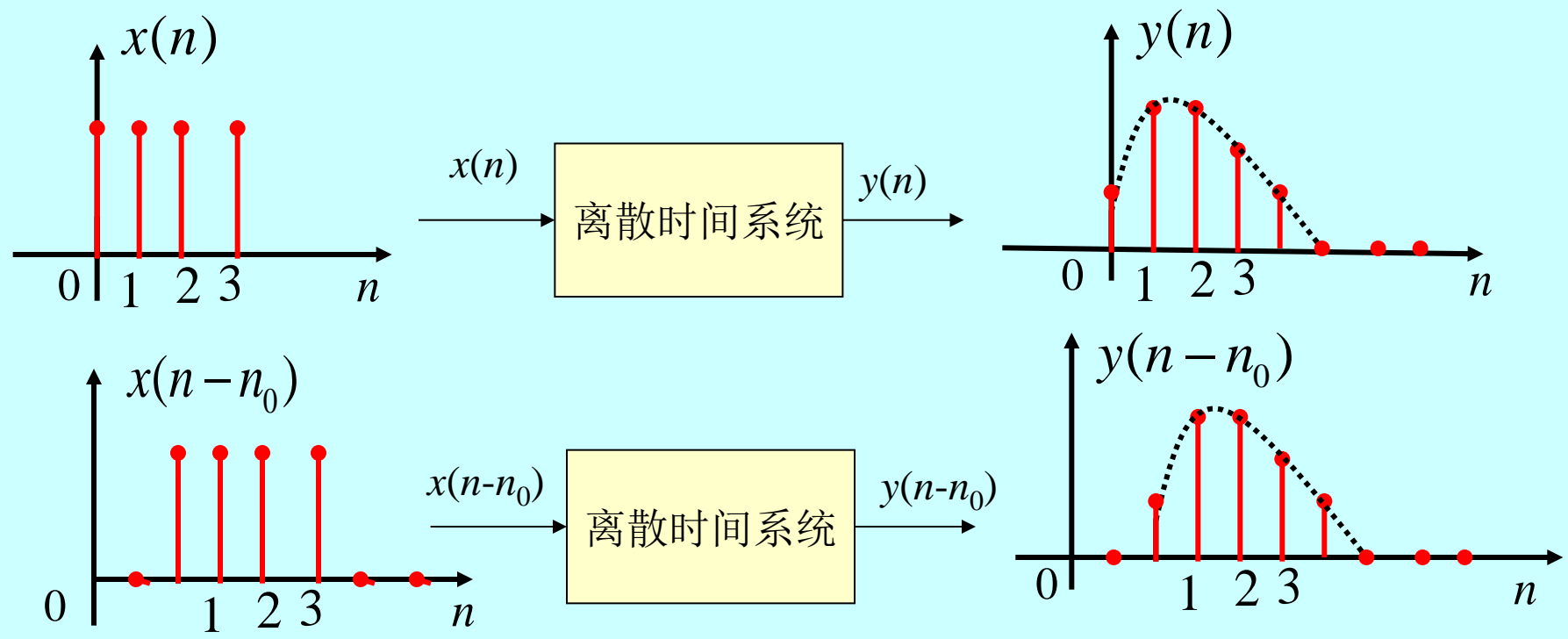


# 离散时间系统的基本概念

## ■ 时不变系统

■ 系统对于输入信号的响应与信号加于系统的时间无关

$$y(n) = T[x(n)] \longrightarrow y(n-n_0) = T[x(n-n_0)] \quad (n_0 \text{ 为任意整数})$$



# 离散时间系统的基本概念

## ■ 时不变系统

- 例1：检查  $y(n) = ax(n) + b$  代表的系统是否是时不变系统，式中  $a$  和  $b$  是常数

$$y(n) = ax(n) + b$$

$$y(n-n_0) = ax(n-n_0) + b$$

$$y(n-n_0) = T[x(n-n_0)]$$

- 因此该系统是时不变系统

# 离散时间系统的基本概念

## ■ 时不变系统

■ 例2：映射 $y(n) = nx(n)$ 所代表的系统是否具有时不变性

$$y(n) = nx(n)$$

$$y(n-n_0) = (n-n_0)x(n-n_0)$$

$$T[x(n-n_0)] = nx(n-n_0)$$

$$y(n-n_0) \neq T[x(n-n_0)]$$

■ 因此，该系统属于时变系统

# 离散时间系统的基本概念

## ■ 线性时不变系统

- 具有时不变特性的线性系统

## ■ 系统的稳定性

- **稳定系统**：对于每一个有界输入产生一个有界输出的系统

- **充要条件**：其单位脉冲响应绝对可求和  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| < \infty$

## ■ 系统的因果性

- **因果系统**：系统的输出 $y(n)$ 只取决于当前以及过去的输入，即 $x(n)$ ,  $x(n-1)$ ,  $x(n-2)$ ...

- **非因果系统**：如果系统的输出 $y(n)$ 取决于 $x(n+1)$ ,  $x(n+2)$ , ... 等未来的输入（不现实的系统）

- **充要条件**：当 $n < 0$ 时， $h(n) \equiv 0$

# 离散时间系统的基本概念

## ■ 系统的因果性

### ■ 因果系统例子

$$y(n) = ay(n-1) + x(n), \quad a \text{ 为常数}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^2 b(k)x(n-k), \quad b(0), b(1), b(2) \text{ 为常数}$$

$$y(n) = nx(n)$$

### ■ 非因果系统例子

$$y(n) = x(n+1)$$

$$y(n) = x(n^2)$$



# 线性时不变系统的输入、输出关系

- 离散时间系统的基本概念
- 线性时不变系统的输入、输出关系
- 离散时间系统分析

# 线性时不变系统的输入输出关系

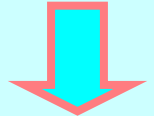
$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

输入信号 $x(n)$ 可表示为 $\delta(n)$ 及其移位的线性组合



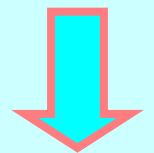
系统输出

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right]$$



线性性(叠加性)

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[\delta(n-m)]$$



时不变特性

$$h(n-m) = T[\delta(n-m)]$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n)$$

式中 $x(m)$ 与 $h(n-m)$ 的位置可以对调,  
 $h(n)*x(n)$



线性卷积  
或  
直接卷积



# 线性时不变系统的输入输出关系

## ■ 线性卷积

### ■ 计算公式

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n)$$

### ■ 计算步骤

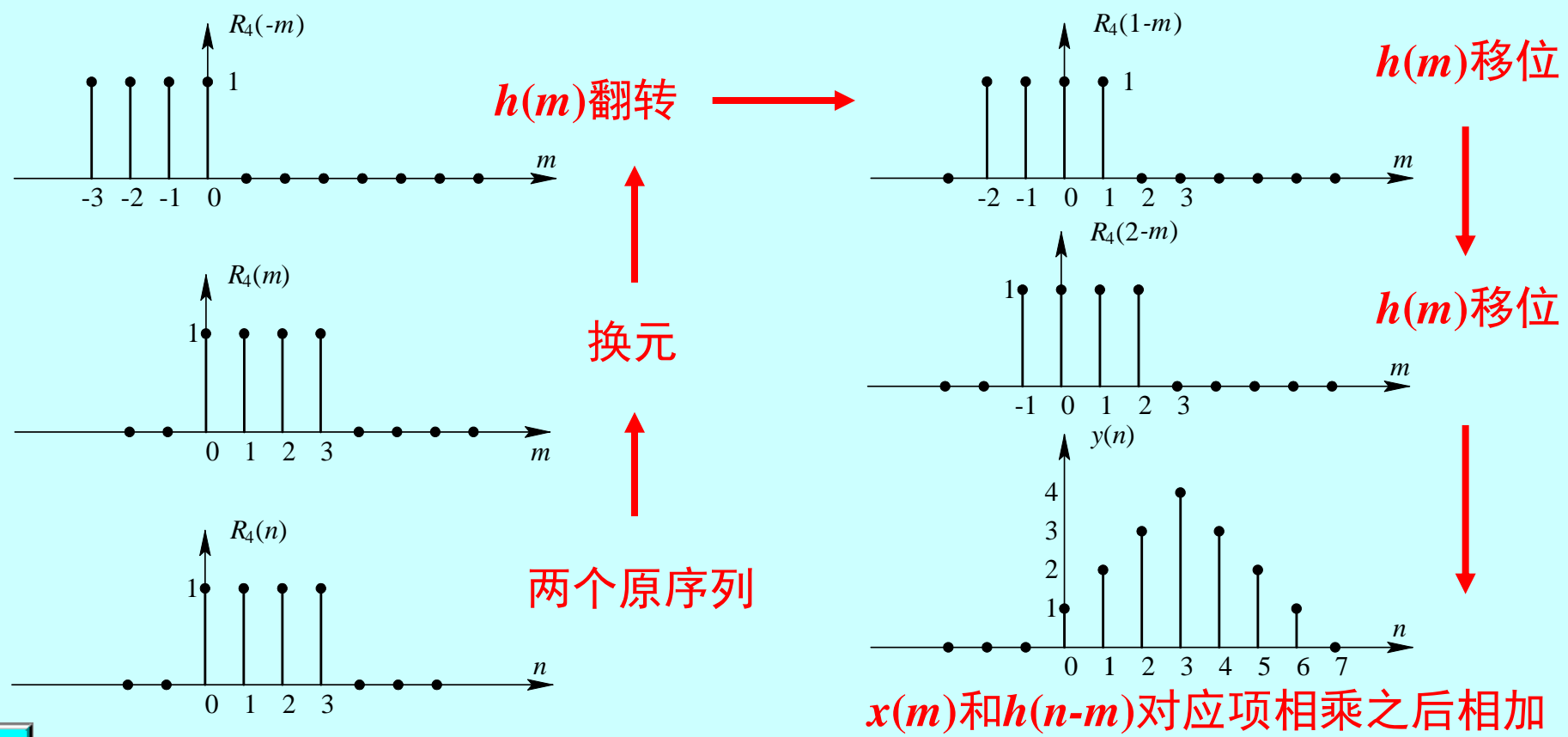
- ① 将 $x(n)$ 和 $h(n)$ 用 $x(m)$ 和 $h(m)$ 表示，并将 $h(m)$ 进行翻转，形成 $h(-m)$
- ② 将 $h(-m)$ 移位 $n$ ，得到 $h(n-m)$ 。当 $n>0$ 时，序列右移； $n<0$ 时，序列左移
- ③ 将 $x(m)$ 和 $h(n-m)$ 所有对应项相乘之后相加

按照以上三个步骤可得到卷积结果 $y(n)$ 。



# 线性时不变系统的输入输出关系

■ 例：设 $x(n]=R_4(n)$ ， $h(n)=R_4(n)$ ，求 $y(n)=x(n)*h(n)$ 。



# 线性时不变系统的输入输出关系

## ■ 线性卷积讨论

- 卷积中主要运算是翻转、移位、相乘和相加
- 设线性卷积前两序列分别是 $N$ 和 $M$ ，卷积后的新序列长度为  $N+M-1$

## ■ 线性卷积服从交换律、结合律和分配律

- $x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

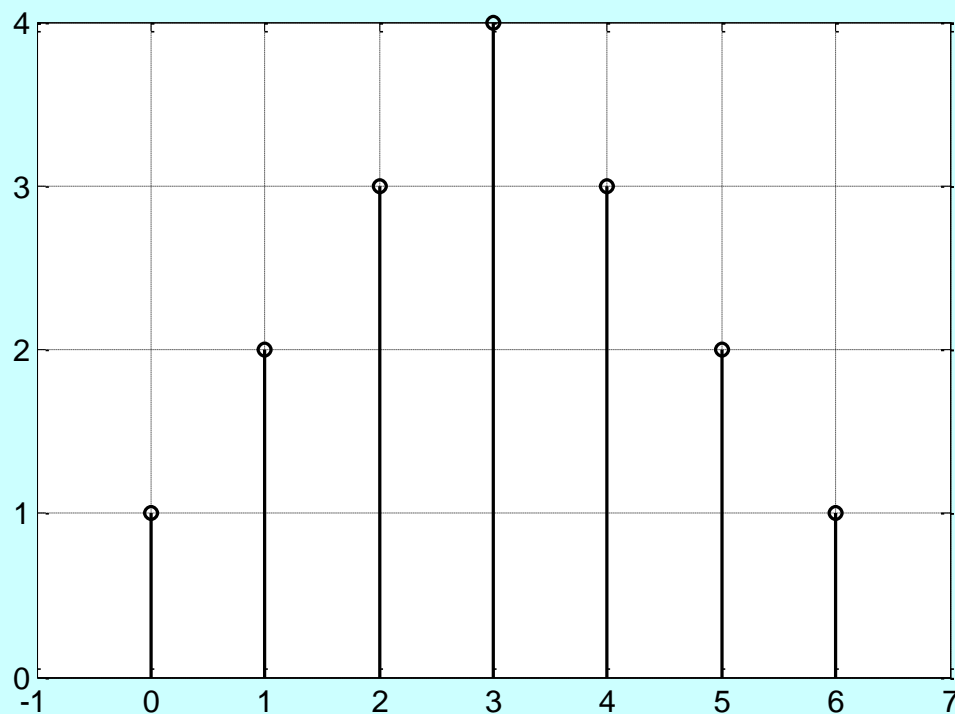
- $x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = (x(n) * h_1(n)) * h_2(n)$

- $x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$

# 线性时不变系统的输入输出关系

## ■ 线性卷积的Matlab示例

```
x=ones(4,1);  
h=ones(4,1);  
y=conv(x,h);  
stem([0:6],y)
```



# 线性时不变系统的输入输出关系

## ■ 输入输出关系的差分方程描述

- 连续时间系统(模拟系统)通常用微分方程来描述
- 离散时间系统则是用差分方程来表达输入输出之间的关系
- 线性时不变系统可以用线性常系数差分方程来表示
- $N$ 阶线性常系数差分方程的一般形式

$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N b_i y(n-i)$$

其中：  $a_i$ 、  $b_i$  均为常数

# 线性时不变系统的输入输出关系

## ■ 输入输出关系的差分方程描述

■ 例：给定一阶差分方程及其输入

$$y(n) = 1.5x(n) + \frac{1}{2}y(n-1) \quad x(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

■ 求给定初始条件下系统的瞬态解(用递推法)

初始条件为  $y(n) = 0, n < 0$

解：  $n = 0$  以前的输出已由初始条件给定，瞬态解从  $n=0$  求起，由差分方程、初始条件和输入，得：

$$y(0) = 1.5x(0) + \frac{1}{2}y(-1) = 1.5$$

$$y(1) = 1.5x(1) + \frac{1}{2}y(0) = 0.75$$

依次递推，得

$$y(n) = h(n) = 1.5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

稳定、因果系统

# 线性时不变系统的输入输出关系

## ■ 利用MatLab来求解差分方程

■ MatLab是一种面向科学和工程计算的工具软件

■ 特点：计算功能强大，数十个工具箱，结果可视化

■ 例：试用MatLab计算下列差分方程的输出 $y(n)$ ，假设输入序列  $x(n) = \delta(n)$ ， $0 \leq n \leq 40$

$$\begin{aligned} y(n) + 0.7y(n-1) - 0.45y(n-2) - 0.6y(n-3) \\ = 0.8x(n) - 0.44x(n-1) + 0.36x(n-2) + 0.02x(n-3) \end{aligned}$$

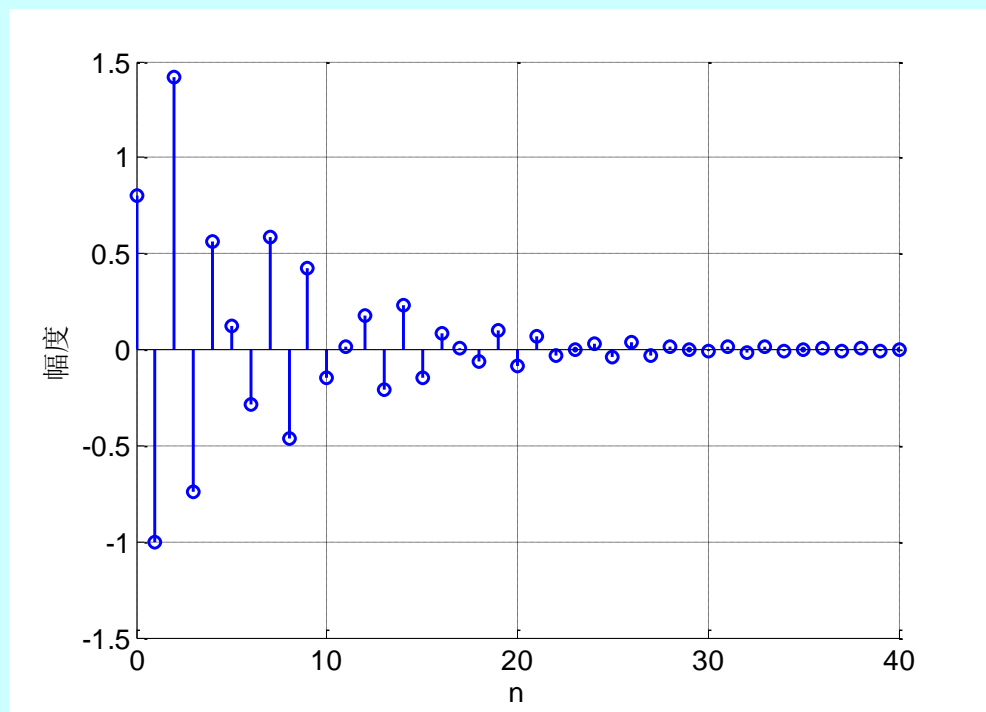
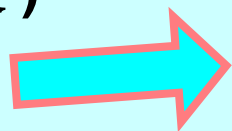
# 线性时不变系统的输入输出关系

## ■ 利用MatLab来求解差分方程

■ 解：MatLab程序如下

```
■ N=41;  
■ b=[0.8 -0.44 0.36 0.22];  
■ a=[1 0.7 -0.45 -0.6];  
■ x=[1 zeros(1,N-1)];  
■ k=0:1:N-1;  
■ y=filter(b,a,x);  
■ stem(k,y);  
■ xlabel('n');  
■ ylabel('幅度')
```

■ 结果绘图





# 离散时间系统分析

- 离散时间系统的基本概念
- 线性时不变系统的输入、输出关系
- 离散时间系统分析



# 离散时间系统分析

## ■ 系统函数 $H(z)$ 的定义

- 前面曾讨论过用单位脉冲响应 $h(n)$ 来表示一个线性时不变离散系统的输入输出关系：

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

两边取 $z$ 变换：

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

则：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

定义为系统函数

- $H(z)$ 是单位脉冲响应 $h(n)$ 的 $z$ 变换

# 离散时间系统分析

## ■ 差分方程与系统函数(1)

- 线性时不变离散系统也可用差分方程表示，考虑 $N$ 阶差分方程：

$$\sum_{i=0}^N b_i y(n-i) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i)$$

- 两边取 $z$ 变换：

$$\sum_{i=0}^N b_i z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^M a_i z^{-i} X(z)$$

# 离散时间系统分析

## ■ 差分方程与系统函数(2)

于是

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}$$

上式也可用因子的形式来表示:

$$H(z) = A \frac{\prod_{i=1}^M (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - d_i z^{-1})}$$

式中 $\{c_i\}$ 、 $\{d_i\}$ 是 $H(z)$ 在 $z$ 平面上的零点和极点， $A$ 为比例常数。

整个系统函数可以由它的全部零、极点来唯一确定。

# 离散时间系统分析

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

## ■ 利用系统函数的极点分布分析因果性和稳定性

■ **因果系统** 其单位脉冲响应一定满足： $n < 0, h(n) = 0$

则其系统函数 $H(z)$ 的收敛域一定包含 $\infty$ ，即 $\infty$ 不是极点

■ **稳定系统** 要求 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ ，要求其收敛域包含单位圆，

即 $H(z)$ 的极点应该集中在单位圆内

$$h(n) = \sum_{k=1}^N C_k p_k^n$$

■ **因果稳定系统** 收敛域包含 $\infty$ 和单位圆，收敛域可表示为： $r < |z| \leq \infty, 0 < r < 1$ ，极点应该集中在单位圆内

# 离散时间系统分析--(例1)(1)

例：已知离散LSI系统的差分方程：

(设系统初始状态为零)

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

其中： $x(n)$ 为输入， $y(n)$ 为输出。

- 1) 求系统函数，指出系统的零极点；
- 2) 若该系统是因果稳定的，指出系统的收敛域；
- 3) 求该因果稳定系统的单位抽样响应。

# 离散时间系统分析--(例1)(2)

解：1) 对差分方程两边取Z变换：

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1]$$

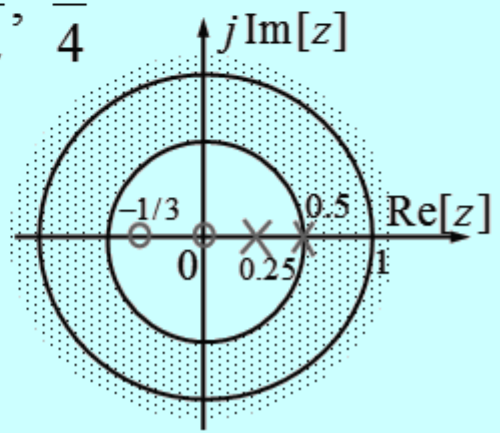
系统函数：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

零点： $z = -\frac{1}{3}, 0$     极点： $z = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

2) 由于系统为因果稳定系统，

故收敛域： $|z| > \frac{1}{2}$



# 离散时间系统分析--(例1)(3)

3) 对 $H(z)$ 求 $z$ 反变换即得单位抽样响应 $h(n)$ ,  
用部分分式法

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$$H(z) = \frac{\frac{10}{3}z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{-\frac{7}{3}z}{z - \frac{1}{4}}$$

$$h(n) = \left[ \frac{10}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^n - \frac{7}{3} \left( \frac{1}{4} \right)^n \right] u(n)$$

## 离散时间系统分析--(例2)

例：已知系统函数  $H(z) = \frac{0.95}{(1-0.5z^{-1})(1-0.1z)}$ ;  $10 < |z| \leq \infty$

求系统的单位脉冲响应及系统性质

解：系统函数  $H(z)$  有两个极点， $z_1=0.5$ ， $z_2=10$ 。收敛域包含 $\infty$ 点，因此系统一定是因果系统，但单位圆不在收敛域内，因此可判定系统是不稳定的。

$$\begin{aligned} h(n) &= IZT[H(z)] \\ &= \begin{cases} \operatorname{Re} s[H(z)z^{n-1}]_{z=0.5} + \operatorname{Re} s[H(z)z^{n-1}]_{z=10} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \\ &= (0.5^n - 10^n)u(n) \end{aligned}$$



# 离散时间系统分析--(例 3)

例：系统函数不变，但收敛域不同

$$H(z) = \frac{0.95}{(1-0.5z^{-1})(1-0.1z)}; \quad 0.5 < |z| \leq 10$$

求系统的单位脉冲响应及系统性质

解：收敛域是包括单位圆而不包括 $\infty$ 点的有限环域，判定系统是稳定的，但是非因果的。用留数定理求 $H(z)$ 的反变换：

$$\begin{aligned} h(n) &= IZT[H(z)] \\ &= \begin{cases} \operatorname{Res}[H(z)z^{n-1}]_{z=0.5} & n \geq 0 \\ -\operatorname{Res}[H(z)z^{n-1}]_{z=10} & n < 0 \end{cases} \\ &= 0.5^n u(n) + 10^n u(-n-1) \end{aligned}$$

# The End

# 谢谢!

## 请批评指正

