第一章 代数插值

一、内容提要

定义 1.1 设 $y=f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，已知它在 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个互异点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 上取值 $\{y\}_{i=0}^n$，若代数多项式 $P(x)$ 在点 x_i 处满足 $P(x_i)=y_i, i=0,1,2,\cdots,n$（称为插值条件），则称 $P(x)$ 为函数 $f(x)$ 的插值多项式，$\{x_i\}_{i=0}^n$ 称为插值节点.

定理 1.1 在互异的 $n+1$ 个点处满足插值条件 $P(x_i)=y_i$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$ 的次数不高于 n 的多项式 $P(x)$ 是存在惟一的. 通常记该惟一多项式为 $P_n(x)$.

以下列出几种常见的代数插值公式.

1. 代数插值的牛顿(Newton)形式

$$P_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

其中 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$ 是函数 $f(x)$ 在点 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 处的 k 阶差商(均差). 插值余项为

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

或

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

$$f[x_0,x_1\cdots x_n,x]=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$\min_{0\leqslant i\leqslant n}\{x_i\} \leqslant \xi \leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$$

各阶差商可用构造差商表的办法来得到．关于等距节点时的牛顿向前、向后插值公式见参考文献 1,4 等．

2. 代数插值的拉格朗日(Lagrange)形式

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} l_j(x) f(x_j) = \sum_{j=0}^{n} \Big(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}\Big) f(x_j)$$

其中 $l_j(x) = \prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \dfrac{x - x_i}{x_j - x_i}$ $(j = 0,1,2,\cdots,n)$ 为插值基函数．若记 $\omega_{n+1}(x) = \prod\limits_{i=0}^{n}(x - x_i)$，则 $l_j(x) = \omega_{n+1}(x)/[(x - x_j)\omega_{n+1}'(x_j)]$.

插值余项同前面牛顿形式的余项．

3. 埃尔米特(Hermite)插值公式

定义 1.2 已知曲线 $y = f(x)$ 上的点 (x_i, y_i) 及该点的切线斜率 y_i'，$i = 0,1,2,\cdots,n$，求一个次数不超过 $2n+1$ 次的代数多项式 $P_{2n+1}(x)$，使其满足插值条件

$$P_{2n+1}(x_i) = y_i,\ P_{2n+1}'(x_i) = y_i',\ i = 0,1,2,\cdots,n$$

的插值问题称为埃尔米特插值，$P_{2n+1}(x)$ 称为埃尔米特插值多项式．当节点互异时，$P_{2n+1}(x)$ 存在惟一，其表达式为

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(x) y_j + \sum_{j=0}^{n} \beta_j(x) y_j'$$

其中

$$\alpha_j(x) = \Big[1 - 2(x - x_j)\sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{1}{x_j - x_i}\Big] l_j^2(x) =$$

$$[1 - 2(x - x_j) l_j'(x_j)] l_j^2(x)$$

$$\beta_j(x) = (x - x_j) l_j^2(x), \quad j = 0,1,2,\cdots,n$$

插值余项为

$$R_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi)\omega_{n+1}^2(x)$$

4. 三次样条函数插值

如分段埃尔米特插值

定义 1.3 设有 $[a,b]$ 上一个分划 Δ：$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，如果函数 $S(x)$ 满足条件：

(i) $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数；

(ii) $S(x)$ 在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ 上是三次多项式，则称 $S(x)$ 是关于分划 Δ 的三次样条函数．若给定连续函数 $y = f(x)$ 在节点 x_i 上的值 $y_i = f(x_i)$，并使

(iii) $S(x_i) = y_i$, $i = 0,1,2,\cdots,n$.

则称 $S(x)$ 是 $y = f(x)$ 的三次样条插值函数．

由于三次样条插值函数 $S(x)$ 的定义中只给出了 $4n - 2$ 个条件，要确定 $S(x)$ 要用 $4n$ 个条件，故需补充 2 个边界条件．常见的有：

(Ⅰ) 转角条件，即 $S'(x_0) = y_0'$, $S'(x_n) = y_n'$

(Ⅱ) 弯矩条件，即 $S''(x_0) = y_0''$, $S''(x_n) = y_n''$

还有所谓的周期性边界条件见参考文献 1,2.

满足上述边界条件之一的三次样条插值函数是存在且惟一的，而且 $S(x)$ 逼近 $f(x)$ 是收敛的，也是数值稳定的，其误差估计与收敛性定理如下：

定理 1.2 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上具有四阶连续导数的函数，$S(x)$ 是 $f(x)$ 满足边界条件(Ⅰ)或(Ⅱ)的三次样条插值函数，则有估计式

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x)| \leqslant C_k \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(k)}(x)| \cdot h^{4-k},$$

$$k = 0,1,2$$

其中 $h = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} h_i = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1})$，$C_i(i = 0,1,2)$ 为常数．

目前有多种求 $S(x)$ 的办法，可参考文献 1,5 等．

二、典型题分析

例 1－1　已知 sin0.32 = 0.314 567，sin0.34 = 0.333 487，sin0.36 = 0.352 274，用线性插值及抛物插值计算 sin0.336 7 的值并估计截断误差．

分析　题目中相当于告诉了插值条件．考虑到 0.336 7 位于 0.32 与 0.34 之间，根据插值法的特点，线性插值时，应取 0.32 和 0.34 作为插值节点；抛物插值时，三个点全取．由于一次、二次插值函数表达式较简单，可采用牛顿型公式，误差估计用拉格朗日型余项表达式．

解答　用线性插值计算，取 $x_0 = 0.32$，$x_1 = 0.34$，则

$$\sin 0.336\,7 \approx P_1(0.336\,7) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(0.336\,7 - x_0) = 0.314\,567 + \frac{0.333\,487 - 0.314\,567}{0.34 - 0.32} \times (0.336\,7 - 0.32) = 0.330\,365$$

其截断误差限为

$$|R_1(x)| = \left|\frac{1}{2}(\sin x)''|_{x=\xi}(x - x_0)(x - x_1)\right| \leqslant \frac{1}{2}M_2|(x - x_0)(x - x_1)|$$

其中 $M_2 = \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |(\sin x)''| = \sin x_1 \leqslant 0.333\,5$，于是

$$|R_1(0.336\,7)| = |\sin 0.336\,7 - P_1(0.336\,7)| \leqslant \frac{1}{2} \times 0.333\,5 \times |(0.336\,7 - 0.32) \times (0.336\,7 - 0.34)| \leqslant 0.92 \times 10^{-5}$$

用抛物插值计算，有

$$P_2(0.336\,7) = P_1(0.336\,7) + \left[\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)/(x_2 - x_0)\right] \times (0.336\,7 - x_0)(0.336\,7 - x_1) = 0.330\,365 + \frac{0.939\,35 - 0.946}{0.04} \times 0.016\,7 \times (-0.003\,3) = 0.330\,374$$

其截断误差限为

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{1}{3!}M_3|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|$$

其中 $M_3 = \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_2} |f'''(x)| = \cos x_0 < 0.828$，于是

$$|R_2(0.336\,7)| = |\sin 0.336\,7 - P_2(0.336\,7)| \leqslant \frac{1}{6} \times 0.828 \times 0.016\,7 \times 0.003\,3 \times 0.023\,3 < 0.178 \times 10^{-6}$$

注记　$P_2(0.336\,7) = 0.330\,374$ 与具有六位有效数字的正弦函数表完全一样，说明用二次插值精度已相当高了．

例 1－2　已知函数 $f(x)$ 的函数表如下：

x_i	0.40	0.55	0.65	0.80	0.90	1.05
y_i	0.410 75	0.578 15	0.696 75	0.888 11	1.026 52	1.253 82

求四次牛顿插值多项式，并由此求 $f(0.596)$ 的近似值，然后估计误差．

分析　表中给出六对数据，故最高可构造五次多项式．但由于 0.596 接近于 $x_0 = 0.40$，因此可取前五对数据来做差商表．

解答　构造差商表如下：

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0.40	0.410 75				
0.55	0.578 15	1.116 00			
0.65	0.696 75	1.186 00	0.280 00		
0.80	0.888 11	1.275 73	0.358 93	0.197 33	
0.90	1.026 52	1.384 10	0.433 48	0.213 00	0.031 34

故四次牛顿插值多项式为

$$P_4(x) = 0.410\,75 + 1.116\,00(x-0.4) + 0.280\,00(x-0.4)(x-0.55) + 0.197\,33(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65) + 0.031\,34(x-0.4)(x-0.55)\times(x-0.65)(x-0.80)$$

于是 $f(0.596) \approx P_4(0.596) = 0.631\,95$

由于本题没有给出 $f(x)$ 的具体表达式，估计误差时只能用牛顿型余项 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]\omega_{n+1}(x)$ 来做，但由于 $f(0.596)\approx 0.631\,95$，故只能得到近似误差：

$$|R_4(0.596)| \approx |f[x_0,x_1,\cdots,x_4,0.596](0.596-x_0)(0.596-x_1)\cdots(0.596-x_4)| \leqslant 1.1\times 0.196\times 0.046\times 0.054\times 0.204\times 0.304 \leqslant 0.332\,15\times 10^{-4}$$

例 1-3　已知 $\sin x$ 的函数表如下：

x_k	1.566	1.567	1.568	1.569	1.570
$\sin x_k$	0.999 988 5	0.999 992 8	0.999 996 1	0.999 998 4	0.999 999 7

求满足 $\sin x = 0.999\,995\,0$ 的 x 值(真解为 $x = 1.567\,634\,0$)．

分析　一般情况下，已知 $(x_i, f(x_i))$，求某一 x 处 $f(x)$ 的近似值，这是所谓的插值问题．本题是求满足 $f(x) = \sin x = 0.999\,995\,0$ 的 x 值，与原插值问题刚好相反．如果求出 $P_n(x)$，令 $P_n(x)$ 等于某一函数值，需通过解方程求 x. 若将 x_k 作为函数值，把 $\sin x_k$ 作为自变量，求出插值多项式 $P_n(y)$，求 $P_n(y)$ 的函数值 x 比解方程要容易得多．这类问题称为"反插值". 用反插值时必须注意反插条件，即函数 $y = f(x)$ 有反函数，也就是要求 $y = f(x)$ 单调．本题中数表单调，故可用反插值求 x.

解答　用牛顿插值公式，先构造差商表如下：

k	y_k	x_k	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0	0.999 988 5	1.566				
1	0.999 992 8	1.567	232.558 14			
2	0.999 996 1	1.568	303.030 30	9 272 652.6		
3	0.999 998 4	1.569	434.782 61	23 527 198.2	$1.439\,853\,1\times10^{12}$	
4	0.999 999 7	1.570	769.230 77	92 902 266.7	$1.005\,435\,8\times10^{13}$	$7.691\,522\,3\times10^{17}$

故

$$x \approx 1.566 + 232.558\,14\times(0.999\,995\,0-y_0) + 9\,272\,652.6\times(0.999\,995\,0-y_0)\times(0.999\,995\,0-y_1) + 1.439\,853\,1\times10^{12}\times(0.999\,995\,0-y_0)(0.999\,995\,0-y_1)\times(0.999\,995\,0-y_2) + 7.691\,522\,3\times10^{17}\times(0.999\,995\,0-y_0)(0.999\,995\,0-y_1)\times(0.999\,995\,0-y_2)(0.999\,995\,0-y_3)\approx 1.567\,624\,1$$

注记　本题也可不用所有已知插值条件来求解．若取 $x_0 = 1.567, x_1 = 1.568$ 用线性插值，可得满足 $\sin x = 0.999\,995\,0$ 的 x 的近似值 $x\approx 1.567\,666\,7$；若取 $x_0 = 1.567, x_1 = 1.568, x_2 = 1.569$，也可得二次方程 $-0.5x^2 + 1.570\,8x - 0.233\,706\,3 = 0.999\,995\,0$，解得 $x' \approx 1.567\,63$，$x'' \approx 1.573\,97$，因待取之 x 应满足 $1.567 < x < 1.568$，故取 $x' \approx 1.567\,63$ 即

可．可以看出，正插时不仅要解方程，而且还要考虑根的范围而进行取舍．

例 1－4 给出 $f(x)=\ln x$ 的数值表

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\ln x$	－0.916 291	－0.693 147	－0.510 826	－0.356 675	－0.223 144	－0.105 361

(1) 用线性插值及二次插值计算 ln0.54 的近似值；

(2) 用牛顿后插公式求 ln0.78 的近似值，并估计误差．

分析 本题第(1)小题属常规题，可用拉格朗日公式去做；第(2)小题属等距节点的牛顿向后插值问题．

解答 (1) 线性插值，取 $x_0=0.5, x_1=0.6$，则

$$\ln 0.54 \approx \frac{0.54-0.60}{0.5-0.60}(-0.693\,147)+\frac{0.54-0.5}{0.60-0.5}(-0.510\,826)=-0.620\,219$$

二次插值，取 $x_0=0.5$，$x_1=0.6$，$x_2=0.7$，得

$$\ln 0.54=\frac{(0.54-0.6)(0.54-0.7)}{(0.5-0.6)(0.5-0.7)}\times(-0.693\,147)+\frac{0.54-0.5)(0.54-0.7)}{(0.6-0.5)(0.6-0.7)}\times(-0.510\,826)+\frac{(0.54-0.5)(0.54-0.6)}{(0.7-0.5)(0.7-0.6)}\times(-0.356\,675)=-0.616\,838\,2$$

注记 若取 $x_0=0.4$，$x_1=0.5$，$x_2=0.6$，则 $\ln 0.54\approx-0.615\,319\,8$.

(2) 列向后差分表如下：

x_i	y_i	∇	∇^2	∇^3	∇^4	∇^5
0.4	－0.916 291					
0.5	－0.693 147	0.223 144				
0.6	－0.510 826	0.182 321	－0.040 823			
0.7	－0.356 675	0.154 151	－0.028 170	0.012 653		
0.8	－0.223 144	0.133 531	－0.020 620	0.007 550	－0.005 103	
0.9	－0.105 361	0.117 783	－0.015 748	0.004 872	－0.002 678	0.002 425

由牛顿后插公式

$$P_n(x_n+th)=f_n+t\nabla f_n+\frac{1}{2!}t(t+1)\nabla^2 f_n+\cdots+\frac{1}{n!}t(t+1)\cdots(t+n-1)\nabla^n f_n$$

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}t(t+1)\cdots(t+n)h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi),\quad x_0<\xi<x_n$$

取 $x_0=0.4$，$x_1=0.5$，$x_2=0.6$，$x_3=0.7$，$x_4=0.8$. 由于 $x=x_n+th$，所以 $t=(0.78-0.8)/0.1=-0.2$，故

$$\ln 0.78\approx P_4(0.78)=-0.223\,144+0.133\,531\times(-0.2)+\frac{1}{2!}(-0.2)(-0.2+1)(-0.020\,620)+\frac{1}{3!}(-0.2)(-0.2+1)(-0.2+2)(0.007\,550)+\frac{1}{4!}(-0.2)(-0.2+1)(-0.2+2)\times(-0.2+3)\times(-0.005\,103)\approx-0.248\,391\,54$$

利用插值余项 $R_4(x)=\frac{1}{5!}f^{(5)}(\xi)t(t+1)\cdots(t+4)h^5$，得

$$|R_4(0.78)|\leqslant\frac{1}{5!}|t(t+1)\cdots(t+4)|h^5\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_4}|f^{(4)}(x)|\leqslant\frac{1}{5!}0.1^5\cdot|(-0.2)(-0.2+1)(-0.2+2)\times(-0.2+3)(-0.2+4)|\times\frac{4!}{0.4^5}=5.985\times10^{-4}$$

例 1－5 给出自然对数 $\ln x$ 和它的导数 $\frac{1}{x}$ 的数表如下：

x	0.40	0.50	0.70	0.80
$\ln x$	－0.916 291	－0.693 147	－0.356 675	－0.223 144
$1/x$	2.50	2.00	1.43	1.25

(1) 利用拉格朗日插值公式求 ln0.60；

(2) 利用埃尔米特插值公式求 ln0.60.

分析　本题属常规题，可用有关插值公式来求 ln0.60. 由于埃尔米特公式中含有插值基函数 $l_j(x)$ 及 $l'_j(x)$，故可先列表计算有关量后，再代入公式求解.

解答　列表计算 $l_j(0.60)$、$l'_j(0.60)$，$j=0,1,2,3$，如下：

j	$l_j(x)$	$l_j(0.6)$	$l'_j(x_j)$
0	$\prod\limits_{i=1}^{3}\dfrac{x-x_i}{x_0-x_i}$	$-0.166\ 667$	$\sum\limits_{i\neq 1}^{3}\dfrac{1}{x_0-x_i}=-15.833\ 333$
1	$\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq 1}}^{3}\dfrac{x-x_i}{x_1-x_i}$	$0.666\ 667$	$\sum\limits_{\substack{i=0\\i\neq 1}}^{3}\dfrac{1}{x_1-x_i}=1.666\ 667$
2	$\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq 2}}^{3}\dfrac{x-x_i}{x_2-x_i}$	$0.666\ 667$	$\sum\limits_{\substack{i=0\\i\neq 2}}^{3}\dfrac{1}{x_2-x_i}=-1.666\ 667$
3	$\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq 3}}^{3}\dfrac{x-x_i}{x_3-x_i}$	$-0.166\ 667$	$\sum\limits_{\substack{i=0\\i\neq 3}}^{3}\dfrac{1}{x_3-x_i}=15.833\ 333$

(1) 利用拉格朗日插值公式，得

$$\ln 0.60\approx P_3(0.60)=\sum_{j=0}^{3}l_j(0.60)f(x_j)=$$
$$0.166\ 667\times(0.916\ 291+0.223\ 144)+$$
$$(-0.666\ 667)\times(0.693\ 147+0.356\ 675)=$$
$$-0.509\ 975$$

(2) 利用埃尔米特插值公式

$$H_7(x)=\sum_{j=0}^{3}\{[1-2(x-x_j)l'_j(x_j)]l_j^2(x)f(x_j)+$$
$$(x-x_j)l_j^2(x)f'(x_j)\}=$$

$$\sum_{j=0}^{3}\{f(x_j)-[2l'_j(x_j)f(x_j)-f'(x_j)]\times$$
$$(x-x_j)\}l_j^2(x)$$

得 $$\ln 0.60\approx H_7(0.60)=-0.510\ 889$$

注记　本题真解 ln0.60 = −0.510 825 623，可以看出埃尔米特插值公式所得之结果比拉格朗日公式之结果精确得多.

例 1-6　求满足条件

x_i	1	2
y_i	2	3
y'_i	1	−1

的埃尔米特插值多项式.

解答　令 $x_0=1$，$x_1=2$，代入埃尔米特插值公式

$$H_3(x)=\left[1-2(x-x_0)\frac{1}{x_0-x_1}\right]l_0^2(x)y_0+$$
$$(x-x_0)l_0^2(x)y'_0+$$
$$\left[1-2(x-x_1)\frac{1}{x_1-x_0}\right]l_1^2(x)y_1+$$
$$(x-x_1)l_1^2(x)y'_1$$

这里 $l_0(x)=\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}$，$l_1(x)=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$，得

$$H_3(x)=-2x^3+8x^2-9x+5$$

例 1-7　给定插值条件

x_i	0	1	2	3
y_i	0	0	0	0

端点条件为：(1) $m_0=1$，$m_3=0$；(2) $M_0=1$，$M_3=0$.
试分别求满足上述条件的三次样条插值函数的分段表达式.

分析　求三次样条插值函数的办法比较机械，但办法并不

(1) 利用拉格朗日插值公式求 ln0.60；

(2) 利用埃尔米特插值公式求 ln0.60.

分析　本题属常规题，可用有关插值公式来求 ln0.60. 由于埃尔米特公式中含有插值基函数 $l_j(x)$ 及 $l'_j(x)$，故可先列表计算有关量后，再代入公式求解.

解答　列表计算 $l_j(0.60)$、$l'_j(0.60)$，$j=0,1,2,3$，如下：

j	$l_j(x)$	$l_j(0.6)$	$l'_j(x_j)$
0	$\prod\limits_{i=1}^{3}\dfrac{x-x_i}{x_0-x_i}$	$-0.166\ 667$	$\sum\limits_{i\neq 1}^{3}\dfrac{1}{x_0-x_i}=-15.833\ 333$
1	$\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq 1}}^{3}\dfrac{x-x_i}{x_1-x_i}$	$0.666\ 667$	$\sum\limits_{\substack{i=0\\i\neq 1}}^{3}\dfrac{1}{x_1-x_i}=1.666\ 667$
2	$\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq 2}}^{3}\dfrac{x-x_i}{x_2-x_i}$	$0.666\ 667$	$\sum\limits_{\substack{i=0\\i\neq 2}}^{3}\dfrac{1}{x_2-x_i}=-1.666\ 667$
3	$\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq 3}}^{3}\dfrac{x-x_i}{x_3-x_i}$	$-0.166\ 667$	$\sum\limits_{\substack{i=0\\i\neq 3}}^{3}\dfrac{1}{x_3-x_i}=15.833\ 333$

(1) 利用拉格朗日插值公式，得

$$\begin{aligned}\ln 0.60 &\approx P_3(0.60)=\sum_{j=0}^{3}l_j(0.60)f(x_j)=\\&0.166\ 667\times(0.916\ 291+0.223\ 144)+\\&(-0.666\ 667)\times(0.693\ 147+0.356\ 675)=\\&-0.509\ 975\end{aligned}$$

(2) 利用埃尔米特插值公式

$$\begin{aligned}H_7(x)=&\sum_{j=0}^{3}\{[1-2(x-x_j)l'_j(x_j)]l_j^2(x)f(x_j)+\\&(x-x_j)l_j^2(x)f'(x_j)\}=\end{aligned}$$

附7

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{3}\{f(x_j)-[2l'_j(x_j)f(x_j)-f'(x_j)]\times\\&(x-x_j)\}l_j^2(x)\end{aligned}$$

得　　$\ln 0.60\approx H_7(0.60)=-0.510\ 889$

注记　本题真解 $\ln 0.60=-0.510\ 825\ 623$，可以看出埃尔米特插值公式所得之结果比拉格朗日公式之结果精确得多.

例 1-6　求满足条件　插值Hermite插值

x_i	1	2
y_i	2	3
y'_i	1	-1

的埃尔米特插值多项式.

解答　令 $x_0=1$，$x_1=2$，代入埃尔米特插值公式

$$\begin{aligned}H_3(x)=&\left[1-2(x-x_0)\frac{1}{x_0-x_1}\right]l_0^2(x)y_0+\\&(x-x_0)l_0^2(x)y'_0+\\&\left[1-2(x-x_1)\frac{1}{x_1-x_0}\right]l_1^2(x)y_1+\\&(x-x_1)l_1^2(x)y'_1\end{aligned}$$

这里 $l_0(x)=\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}$，$l_1(x)=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$，得

$$H_3(x)=-2x^3+8x^2-9x+5$$

例 1-7　给定插值条件

x_i	0	1	2	3
y_i	0	0	0	0

端点条件为：(1) $m_0=1$，$m_3=0$；(2) $M_0=1$，$M_3=0$.
试分别求满足上述条件的三次样条插值函数的分段表达式.

分析　求三次样条插值函数的办法比较机械，但办法并不惟

一．给定某种条件，一般的做法是系数用一阶导数表示的办法和系数用二阶导数表示的办法，我们在下文将给出两种做法．

解一 (1) 取 x_j 处的一阶导数 $m_j(j=1,2)$ 作为参数，有

$$\boxed{\begin{aligned}&\lambda_j=\frac{h_j}{h_{j-1}+h_j}=\frac{1}{2},\quad \mu_j=\frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j}=\frac{1}{2}\\&g_j=3\{\lambda_j f[x_{j-1},x_j]+\mu_j f[x_j,x_{j+1}]\}=0\end{aligned}}$$

j=1,2,… …n-1,

以及

$$\lambda_j m_{j-1}+2m_j+\mu_j m_{j+1}=g_j \quad (j=1,2)$$

2 u₁
λ₂ 2
0

得

$$\begin{cases}\frac{1}{2}m_0+2m_1+\frac{1}{2}m_2=0\\ \frac{1}{2}m_1+2m_2+\frac{1}{2}m_3=0\end{cases}$$

将 $m_0=1$，$m_3=0$ 代入上二方程，化简得

$$\begin{cases}4m_1+m_2=-1\\ m_1+4m_2=0\end{cases}$$

解得 $m_1=-\frac{4}{15}$，$m_2=\frac{1}{15}$.

利用公式

$$\begin{aligned}S_j(x)=&\frac{(x-x_{j+1})^2[h_j+2(x-x_j)]}{h_j^3}y_j+\\&\frac{(x-x_j)^2[h_j+2(x_{j+1}-x)]}{h_j^3}y_{j+1}+\\&\frac{(x-x_{j+1})^2(x-x_j)}{h_j^2}m_j+\\&\frac{(x-x_j)^2(x-x_{j+1})}{h_j^2}m_{j+1},\ j=0,1,2,\end{aligned}$$

求得三次样条函数如下：

$$S_0(x)=\frac{1}{15}x(x-1)(15-11x),\ x\in[0,1]$$

$$S_1(x)=\frac{1}{15}(x-1)(x-2)(7-3x),\ x\in[1,2]$$

$$S_2(x)=\frac{1}{15}(x-3)^2(x-2),\quad x\in[2,3]$$

解二 取二阶导数 $M_j(j=0,1,2,3)$ 作为参数，得

$$\mu_j=\frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j}=\frac{1}{2},\ \lambda_j=\frac{h_j}{h_{j-1}+h_j}=\frac{1}{2}$$

$$d_j=f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}]=0$$

以及

$$\mu_j M_{j-1}+2M_j+\lambda_j M_{j+1}=d_j,\quad (j=1,2)$$

和边界条件方程

$$\begin{cases}2M_0+M_1=\frac{6}{h_0}\{f[x_0,x_1]-f'(x_0)\}\\ M_{n-1}+2M_n=\frac{6}{h_{n-1}}\{f'(x_n)-f[x_{n-1},x_n]\}\end{cases}$$

代入有关数据，得所要求解的方程组为

$$\begin{cases}2M_0+\ M_1=-6\\ \frac{1}{2}M_0+2M_1+\frac{1}{2}M_2=0\\ \qquad\frac{1}{2}M_1+2M_2+\frac{1}{2}M_3=0\\ \qquad\qquad M_2+2M_3=0\end{cases}$$

解得 $M_0=-52/15$，$M_1=14/15$，$M_2=-4/15$，$M_3=2/15$，

利用公式

$$\begin{aligned}S_j(x)=&M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}+\\&(y_j-\frac{M_j}{6}h_j^2)\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+\\&(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}}{6}h_j^2)\frac{x-x_j}{h_j},\ j=0,1,2\end{aligned}$$

求得三次样条插值函数如下：

$$S_0(x) = \frac{1}{15}x(1-x)(15-11x),\ x \in [0,1]$$

$$S_1(x) = \frac{1}{15}(x-1)(x-2)(7-3x),\ x \in [1,2]$$

$$S_2(x) = \frac{1}{15}(x-2)(x-3)^2,\ x \in [2,3]$$

注记 从上述求解结果知,两种方法的结果完全一样.当给出的边界条件是一阶导数值时,用一阶导数作参数时解方程组较容易.同样,若边界条件为二阶导数值时,用二阶导数作参数求解较容易.

对于边界条件(2),仅给出一种解法.

取 $M_j(j=1,2)$ 作为参数,由

$$\mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j} = \frac{1}{2},\ \lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1}+h_j} = \frac{1}{2}$$

$$d_j = f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] = 0$$

及 $$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j,\ (j=1,2)$$

得 $$\begin{cases} \frac{1}{2}M_0 + 2M_1 + \frac{1}{2}M_2 = 0 \\ \frac{1}{2}M_1 + 2M_2 + \frac{1}{2}M_3 = 0 \end{cases}$$

将已知条件 $M_0 = 1, M_3 = 0$ 代入上方程组,得

$$\begin{cases} 4M_1 + M_2 = -1 \\ M_1 + 4M_2 = 0 \end{cases}$$

解得 $$M_1 = -4/15,\ M_2 = 1/15$$

利用公式

$$S_j(x) = M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j} + M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j} + (y_j - \frac{M_j}{6}h_j^2)\frac{x_{j+1}-x}{h_j} + (y_{j+1} - \frac{M_{j+1}}{6}h_j^2)\frac{x-x_j}{h_j},\quad j = 0,1,2$$

得三次样条插值函数如下:

$$S_0(x) = \frac{1}{90}x(1-x)(19x-26),\ x \in [0,1]$$

$$S_1(x) = \frac{1}{90}(x-1)(x-2)(5x-12),\ x \in [1,2]$$

$$S_2(x) = \frac{1}{90}(3-x)(x-2)(x-4),\ x \in [2,3]$$

例 1-8 设要将 $\sin x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 的值列成等距分布的一张数表,步长 h 最大不超过多少才能保证利用三点插值公式求非列表点处的 $\sin x$ 的值,其截断误差不超过 10^{-6}?这里假定所用的数表值是精确的,计算时也不考虑舍入误差.

分析 本题要求 h 应取多大才能保证截断误差不超过规定的界限,并不要求具体计算正弦函数值,因此只需对误差估计式进行分析计算即可.

解一 由题意知,所采用的是三点等距插值,故可设插值节点为 x_{k-1}, x_k, x_{k+1}. 由于步长为 h,故 $x_{k-1} = x_k - h, x_{k+1} = x_k + h$. 由误差公式

$$|R_2(x)| = \frac{1}{3!}|f^{(3)}(\xi)| \cdot |(x-x_k+h)\times(x-x_k)(x-x_k-h)| = \frac{1}{3!}|\cos\xi| \cdot |(x-x_k+h)(x-x_k)(x-x_k-h)| \leqslant \frac{1}{6}|(x-x_k+h)(x-x_k)(x-x_k-h)|$$

令 $g(x) = (x-x_k+h)(x-x_k)(x-x_k-h)$,由 $g'(x) = 0$ 即 $3(x-x_k)^2 - h^2 = 0$ 得 $g(x)$ 的驻点为

$$\tilde{x} = x_k \pm \frac{\sqrt{3}}{3}h$$

故 $$\max_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_{k+1}} |g(x)| = \max\{|g(x_{k-1})|, |g(x_k)|, |g(x_{k+1})|, |g(\tilde{x})|\} = |g(\tilde{x})| = \frac{2}{9}\sqrt{3}h^3$$

所以 $|R_2(x)| \leqslant \frac{1}{6} \times \frac{2}{9}\sqrt{3}h^3 = \frac{1}{27}\sqrt{3}h^3$

令 $$\frac{1}{27}\sqrt{3}h^3 \leqslant 10^{-6}$$

解得 $$h \leqslant \left(\frac{27}{\sqrt{3}} \times 10^{-6}\right)^{1/3} \approx 2.498 \times 10^{-2}$$

故当 $h \leqslant 2.498 \times 10^{-2}$ 时就能保证 $|R_2(x)| \leqslant 10^{-6}$.

注记 估计误差界有两个关键，一个是 $|f^{(k)}(\xi)|$ 的估计，一个是 $|g(x)|$ 上界的估计．在 $|g(x)|$ 上界的估计时可能有许多别的粗糙的办法，例如，当 $x_k < x < x_{k+1}$ 时

$$|x - x_{k-1}| \leqslant 2h,\ |(x - x_k)(x - x_{k+1})| \leqslant \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

当 $x_{k-1} < x < x_k$ 时 $|x - x_{k+1}| < 2h,\ |(x - x_{k-1})(x - x_k)| \leqslant \left(\frac{h}{2}\right)^2$.

故 $|R_2(x)| \leqslant \frac{1}{6}\left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot 2h = \frac{1}{12}h^3$

令 $\frac{1}{12}h^3 \leqslant 10^{-6}$，则有 $h \leqslant (12 \times 10^{-6})^{1/3} \approx 2.289 \times 10^{-2}$.

不同的估计办法自然有不同的 h 的取值范围．用求 $|g(x)|$ 的驻点的办法所得结果最好．

解二 由于是等距节点，故可用等距节点插值的余项公式来估计步长 h. 取 $x_0 = x_{k-1} = x_k - h, x_1 = x_k,\ x_2 = x_{k+1} = x_k + h$，则 $x = x_0 + th,\ 0 \leqslant t \leqslant 2$，且

$$R_2(x) = R_2(x_0 + th) = \frac{1}{3!}h^3 t(t-1)(t-2)f^{(3)}(\zeta)$$

所以
$$|R_2(x)| \leqslant \frac{1}{6}h^3 \max_{0\leqslant t\leqslant 2}|t(t-1)(t-2)| \cdot \max|\cos x| \leqslant \frac{1}{6}h^3 \max_{1\leqslant t\leqslant 2}|t(t-1)(t-2)|$$

令 $g(t) = t(t-1)(t-2)$，则

$$g'(t) = (t-1)(t-2) + t(t-2) + t(t-1) = 3(t-1)^2 - 1.$$

由 $g'(t) = 0$ 解得驻点 $\tilde{t} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$，故

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 2}|g(t)| = \max\{|g(0)|, |g(1)|, |g(2)|, |g(\tilde{t})|\} = |g(\tilde{t})| = \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

再由 $|R_2(x)| \leqslant \frac{1}{6}h^3 \cdot \frac{2}{9}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{27}h^3 \leqslant 10^{-6}$

得 $$h \leqslant 2.498 \times 10^{-2}.$$

注记 有时候还可能问应取多少个等距节点时才能保证插值误差不超过 10^{-6}（也可能其它误差限），此时做法完全同上，得到 h 值，然后根据 $h = (b-a)/n = (x_n - x_0)/n$，解得 $[a,b]$ 区间的等分数 n，最后得节点数 $n+1$ 即可.

例 1-9 给出下列函数表．已知函数 $f(x)$ 是一个多项式，试求其次数及 x 的最高幂的系数．

x_i	0	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	−7	−4	5	26	65	128

分析 本题明确告诉 $f(x)$ 是一个多项式．要求一个多项式的次数，可根据多项式与差商（或差分）的关系，只要某阶差商（或差分）均为同一常数，则该多项式的次数必为该阶差商（或差分）的阶数．再通过牛顿插值多项式，可求得 $f(x)$，自然可得 x 的最高幂的系数．另外由于导数与差商也有关系，通过积分也可得到 x 的最高幂的系数．

解答 先构造差商表如下：

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶
0	−7				
1	−4	3			
2	5	9	$3 = \frac{9-3}{2-0}$		
3	26	21	$6 = \frac{21-9}{3-1}$	$1 = \frac{6-3}{3-0}$	
4	65	39	$9 = \frac{39-21}{4-2}$	$1 = \frac{9-6}{4-1}$	
5	128	63	$12 = \frac{63-39}{5-3}$	$1 = \frac{12-9}{5-2}$	

四阶差商 $=0$

$f[x_0, x_1 \cdots x_n] = \frac{f^{n}(\xi)}{n!}$ $\xi \in (a,b)$ $\Rightarrow f^{4}(\xi) = 0$ 最高幂为3次

由表知，$f[0,1,2,3]=f[1,2,3,4]=f[2,3,4,5]=1$，所以多项式为三次的．

由牛顿插值公式，得

$$f(x)=\overset{f(0)}{-7}+3(x-0)+3(x-0)(x-1)+$$
$$1(x-0)(x-1)(x-2)=x^3+2x-7$$

所以 x 的最高幂的系数为 1.

注记 本题后一部分也可按下法而得：

由于 $$f^{(3)}(x)=f[0,1,2,3]\times 3!=6$$

积分三次得 $$f(x)=x^3+C_1x^2+C_2x+C_3$$

即 x^3 的系数为 1，至于 C_1,C_2,C_3 可由表中函数值来确定．

例 1－10 求一个次数不高于 3 的多项式 $P_3(x)$，满足下列插值条件：

x_i	1	2	3
y_i	2	4	12
y_i'		3	

并估计插值误差．

分析 这是一个带导数的插值问题，但又不是埃尔米特插值问题．解决这类问题的办法较多，但基本的思想是灵活应用插值法来求解．下面给出三种常见的做法．

解一 用插值法加待定系数法来做．

设 $P_2(x)$ 满足 $P_2(1)=2$，$P_2(2)=4$，$P_2(3)=12$，则 $P_2(x)=3x^2-7x+6$. 为求得 $P_3(x)$，根据插值条件知，$P_3(x)$ 应具有形式：

$$P_3(x)=P_2(x)+K(x-1)(x-2)(x-3)$$

这样的 $P_3(x)$ 自然满足 $P_3(x_i)=y_i(i=0,1,2)$. 为确定待定系数 K，可用条件 $P_3'(2)=3$.

$$P_3'(2)=P_2'(2)+K[(2-2)(2-3)+(2-1)(2-3)+(2-1)(2-2)]=P_2'(2)-K=3$$

因 $$P_2'(2)=5，故有 \quad K=2$$

最后得 $$P_3(x)=P_2(x)+2(x-1)(x-2)(x-3)=2x^3-9x^2+15x-6$$

解二 用插值基函数的~~办法来~~做．

设节点编号为 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3$，则 $P_3(x)$ 可写成

$$P_3(x)=l_1(x)y_1+l_2(x)y_2+l_3(x)y_3+\bar{l}_2(x)y_2'$$

其中 $l_i(x)$ $(i=1,2,3)$ 及 $\bar{l}_2(x)$ 均为次数不超过 3 的多项式，且满足：

$$l_1(x_1)=1,\ l_2(x_1)=0,\ l_3(x_1)=0,\ \bar{l}_2(x_1)=0$$
$$l_1(x_2)=0,\ l_2(x_2)=1,\ l_3(x_2)=0,\ \bar{l}_2(x_2)=0$$
$$l_1(x_3)=0,\ l_2(x_3)=0,\ l_3(x_3)=1,\ \bar{l}_2(x_3)=0$$
$$l_1'(x_2)=0,\ l_2'(x_2)=0,\ l_3'(x_2)=0,\ \bar{l}_2'(x_2)=1$$

由 $l_1(x)$ 所满足的条件知，$l_1(x)=A(x-x_2)^2(x-x_3)$，根据 $l_1(x_1)=1$，得 $A=\dfrac{1}{(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)}$，故有

$$l_1(x)=\frac{(x-x_2)^2(x-x_3)}{(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)}=-\frac{1}{2}(x-2)^2(x-3)$$

似常做法

同理可得

$$l_3(x)=\frac{(x-x_2)^2(x-x_1)}{(x_3-x_2)^2(x_3-x_1)}=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)^2$$

$$\bar{l}_2(x)=-(x-1)(x-2)(x-3)$$

最后求 $l_2(x)$. 根据 $l_2(x)$ 应满足的条件，知

$$l_2(x)=(ax+b)(x-x_1)(x-x_3)$$

利用 $l_2(x_2)=1$，$l_2'(x_2)=0$，得

$$\begin{cases}(ax_2+b)(x_2-x_1)(x_2-x_3)=1\\ a(x_2-x_1)(x_2-x_3)+(ax_2+b)[2x_2-x_1-x_3]=0\end{cases}$$