第 1 章作业参考答案(2)

P24/5：用凸集分离定理证明

（I） $A\boldsymbol{x}\le 0, B\boldsymbol{x}=0, \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}>0, \boldsymbol{x}\in R^n$

（II） $A^T\boldsymbol{y}+B^T\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}\ge 0, \boldsymbol{y}\in R^m, \boldsymbol{z}\in R^l$

证明：若(I)有解 $\overline{\boldsymbol{x}}$，即 $A\overline{\boldsymbol{x}}\le 0, B\overline{\boldsymbol{x}}=0, \boldsymbol{c}^T\overline{\boldsymbol{x}}>0$，(II)有解$\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{y}}\\ \overline{\boldsymbol{z}}\end{pmatrix}$，即 $A^T\overline{\boldsymbol{y}}+B^T\overline{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{c}, \overline{\boldsymbol{y}}\ge 0$，

则

$$0=\overline{\boldsymbol{x}}^T(A^T\overline{\boldsymbol{y}}+B^T\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{c})=(A\overline{\boldsymbol{x}})^T\overline{\boldsymbol{y}}+(B\overline{\boldsymbol{x}})^T\overline{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{c}^T\overline{\boldsymbol{x}}<0$$

矛盾，所以(I)和(II)不同时有解。

设(II)无解。记 $S=\{A^T\boldsymbol{y}+B^T\boldsymbol{z}\mid \boldsymbol{y}\ge 0,, \boldsymbol{y}\in R^m, \boldsymbol{z}\in R^l\}$，则 $\boldsymbol{c}\notin S$，并且 S 是闭凸集。由凸集分离定理，存在 $\boldsymbol{p}\in R^n\setminus\{0\}$，使

$$(A\boldsymbol{p})^T\boldsymbol{y}+(B\boldsymbol{p})^T\boldsymbol{z}=\boldsymbol{p}^T(A^T\boldsymbol{y}+B^T\boldsymbol{z})<\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p}, \forall \boldsymbol{y}\ge 0,\ \boldsymbol{y}\in R^m, \boldsymbol{z}\in R^l \quad (1)$$

将 $\boldsymbol{y}=0, \boldsymbol{z}=0$ 代入（1）得 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p}>0$。

将 $\boldsymbol{z}=0$ 代入（1）得

$$(A\boldsymbol{p})^T\boldsymbol{y}<\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p}, \forall \boldsymbol{y}\ge 0,\quad \boldsymbol{y}\in R^m$$

由 $\boldsymbol{y}\ge 0$ 的分量可任意大，得到 $A\boldsymbol{p}\le 0$（否则，假若 $A\boldsymbol{p}$ 的第 i 个分量 $(A\boldsymbol{p})_i>0$，则取 $\boldsymbol{y}$ 的第 i 个分量 $y_i>0$ 充分大，那么由上式 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p}>(A\boldsymbol{p})^T\boldsymbol{y}=(A\boldsymbol{p})_i y_i$=充分大，矛盾）。

将 $\boldsymbol{y}=0$ 代入（1）得

$$(B\boldsymbol{p})^T\boldsymbol{z}<\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p}, \forall\ \boldsymbol{z}\in R^l$$

由 $\boldsymbol{z}$ 的分量任意性，得到 $B\boldsymbol{p}=0$（否则，假若 $B\boldsymbol{p}$ 的第 i 个分量 $(B\boldsymbol{p})_i\ne 0$，不妨设 $(B\boldsymbol{p})_i>0$，则取 $\boldsymbol{z}$ 的第 i 个分量 $z_i>0$ 充分大，那么由上式 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p}>(B\boldsymbol{p})^T\boldsymbol{z}=(B\boldsymbol{p})_i z_i$=充分大，矛盾）。

由此知 $\boldsymbol{p}$ 是(I)的解，即(I)存在解。

证毕。

P24/6：用 Farkas 定理证明

（I） $A\boldsymbol{x}\le 0, \boldsymbol{x}\ge 0, \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}>0, \boldsymbol{x}\in R^n$

（II） $A^T\boldsymbol{y}\ge\boldsymbol{c},\boldsymbol{y}\ge 0,\boldsymbol{y}\in R^m$

证明：若(I)有解 $\overline{\boldsymbol{x}}\in R^n$，即 $A\overline{\boldsymbol{x}}\le 0,\overline{\boldsymbol{x}}\ge 0,\boldsymbol{c}^T\overline{\boldsymbol{x}}>0$，(II)有解 $\overline{\boldsymbol{y}}\in R^m$，即 $A^T\overline{\boldsymbol{y}}\ge\boldsymbol{c},\overline{\boldsymbol{y}}\ge 0$，则

$$0\le\overline{\boldsymbol{x}}^T(A^T\overline{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{c})=(A\overline{\boldsymbol{x}})^T\overline{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{c}^T\overline{\boldsymbol{x}}<0$$

矛盾，所以(I)和(II)不同时有解。

设(II)无解，则不存在 $\boldsymbol{x}\in R^n$，使 $\begin{pmatrix}A\\-I\end{pmatrix}\boldsymbol{x}\le 0$。根据 Farkas 定理，系统

$$\begin{pmatrix}A^T,-I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\\boldsymbol{z}\end{pmatrix}=\boldsymbol{c},\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\\boldsymbol{z}\end{pmatrix}\ge 0$$

有解，即存在 $\overline{\boldsymbol{y}}\ge 0,\overline{\boldsymbol{z}}\ge 0$，使 $A^T\overline{\boldsymbol{y}}-\overline{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{c}$，即存在 $\overline{\boldsymbol{y}}\ge 0$，使 $A^T\overline{\boldsymbol{y}}\ge\boldsymbol{c}$，因此 $\overline{\boldsymbol{y}}$ 是系统(II)的解，即系统(II)存在解。

证毕。

P24/7：

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$A^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{y}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}y_1-y_2=2\\-2y_1+y_2=1\\y_1+y_2=0\\y_1,y_2\ge 0\end{cases}$$，由第三、四式得 $y_1=y_2=0$，不满足第一、二式，

因此该方程无解，由根据 Farkas 定理，系统 $A\boldsymbol{x}\le 0,\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}>0$ 有解。

P24/8：

$$\begin{cases}x_1+3x_2<0\\3x_1-x_2<0\\17x_1+11x_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+3x_2<0\\3x_1-x_2<0\\-17x_1-11x_2<0\end{cases}\Leftrightarrow A\boldsymbol{x}<0\qquad（1）$$

其中 $A=\begin{pmatrix}1&3\\3&-1\\-17&-11\end{pmatrix}$。因为

$$\begin{cases} A^T\boldsymbol{y}=0 \\ \boldsymbol{y}\ge 0, \boldsymbol{y}\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1+3y_2-17y_3=0 \\ 3y_1-y_2-11y_3=0 \\ y_1,y_2,y_3\ge 0,\text{不全为零} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=5y_3 \\ y_2=4y_3 \\ y_3>0 \end{cases}$$

有解，因此（1）无解。

P24/9：

(1) $f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+x_1+x_2$

$\nabla f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} 2x_1-2x_2+1 \\ -2x_1+2x_2+1 \end{pmatrix}$，$\nabla^2 f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$正定，因此 f 严格凸函数。

(3) $f(x_1,x_2)=(x_1-x_2)^2+4x_1x_2+e^{x_1+x_2}$

$\nabla f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} 2(x_1-x_2)+4x_2+e^{x_1+x_2} \\ 2(x_2-x_1)+4x_1+e^{x_1+x_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2(x_1+x_2)+e^{x_1+x_2} \\ 2(x_1+x_2)+e^{x_1+x_2} \end{pmatrix}$,

$\nabla^2 f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} 2+e^{x_1+x_2} & 2+e^{x_1+x_2} \\ 2+e^{x_1+x_2} & 2+e^{x_1+x_2} \end{pmatrix}=(2+e^{x_1+x_2})\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$半正定，$f$ 凸函数。

P25/10：

$\nabla f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} 8x_1(x_2-x_1^2) \\ -4(x_2-x_1^2) \end{pmatrix}$，$\nabla^2 f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} 8(x_2-3x_1^2) & 8x_1 \\ 8x_1 & -4 \end{pmatrix}$在 S 上不是半正定的。因此 f 不是凸函数。

P25/13：

（反证）设 f 在 $\overline{\boldsymbol{x}}\in R^n$ 处具有全局极大值，假设存在 $\boldsymbol{x}^1\in R^n$，使 $f(\overline{\boldsymbol{x}})>f(\boldsymbol{x}^1)$。取 $\boldsymbol{x}^2=2\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}^1\in R^n$，则 $\overline{\boldsymbol{x}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^1+\boldsymbol{x}^2)$。

若 $f(\boldsymbol{x}^2)>f(\boldsymbol{x}^1)$，则 $f(\overline{\boldsymbol{x}})\le\frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}^1)+f(\boldsymbol{x}^2))<f(\boldsymbol{x}^2)$，矛盾。

若 $f(\boldsymbol{x}^2)\le f(\boldsymbol{x}^1)$，则 $f(\overline{\boldsymbol{x}})\le\frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}^1)+f(\boldsymbol{x}^2))<f(\boldsymbol{x}^1)$，矛盾。

因此，$f(\boldsymbol{x})=f(\overline{\boldsymbol{x}}),\forall\boldsymbol{x}\in R^n$，即 $f(\boldsymbol{x})$ 是常数。

P25/14:

必要性：设 f 是 R^n 上凸函数，则

$$f(\boldsymbol{x}^1+\boldsymbol{x}^2)=2f\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^1+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^2\right)\le 2\left(\frac{1}{2}f(\boldsymbol{x}^1)+\frac{1}{2}f(\boldsymbol{x}^2)\right)=f(\boldsymbol{x}^1)+f(\boldsymbol{x}^2)$$

充分性：设 $f(\boldsymbol{x}^1+\boldsymbol{x}^2)\le f(\boldsymbol{x}^1)+f(\boldsymbol{x}^2)$，则

$$f(\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2)\le f(\lambda\boldsymbol{x}^1)+f((1-\lambda)\boldsymbol{x}^2))=\lambda f(\boldsymbol{x}^1)+(1-\lambda)f(\boldsymbol{x}^2)$$

即 f 是 R^n 上凸函数。

P25/15：

（反证）设 $\overline{\boldsymbol{x}}\in R^n$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 S 上的严格局部极小点，即存在存在 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 的 δ -邻域 $N(\overline{\boldsymbol{x}},\delta)$，使

$$f(\overline{\boldsymbol{x}})\le f(\boldsymbol{x}),\forall\boldsymbol{x}\in S\bigcap N(\overline{\boldsymbol{x}},\delta) \qquad (1)$$

假设 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 不是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 S 上的严格全局极小点，则存在 $\tilde{\boldsymbol{x}}\in X$，使 $f(\tilde{\boldsymbol{x}})<f(\overline{\boldsymbol{x}})$。因为 f 是 S 上的严格准凸函数，所以对任意的 $\lambda\in(0,1)$，有

$$f(\lambda\tilde{\boldsymbol{x}}+(1-\lambda)\overline{\boldsymbol{x}})<\max\{f(\tilde{\boldsymbol{x}}),f(\overline{\boldsymbol{x}})\}=f(\overline{\boldsymbol{x}}) \qquad (2)$$

由于当 $\lambda>0$ 充分小时，$\lambda\tilde{\boldsymbol{x}}+(1-\lambda)\overline{\boldsymbol{x}}\in N(\overline{\boldsymbol{x}},\delta)$，由此知(2)与(1)矛盾。证毕。

P25/16：

设 $\nabla f(\overline{\boldsymbol{x}})=0$。任取 $\boldsymbol{x}\in S$，由知，$\nabla f(\overline{\boldsymbol{x}})^T(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})=0$，根据 f 是伪凸函数得

$$f(\boldsymbol{x})-f(\overline{\boldsymbol{x}})\ge 0$$

由此知 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 S 上的全局极小点。证毕。