上海交通大学2009-2010学年第一学期《矩阵理论》试卷

姓名________　　学号_____________　　矩阵理论分班号_____　　成绩______

本试卷共五道大题, 总分100分. 其中 A^* 表示矩阵 A 的共轭转置.

一. 单项选择题(每题3分, 共15分)

1. 设有 $\mathbb{R}^3$ 上的两个子空间

$$U = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}, W = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = \frac{z}{-2}\}.$$

则 $\dim(U+W) - \dim U =$(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

2. 设 U, W 是欧氏空间 V 的两个子空间. 给出下列四个等式:

甲. $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$;

乙. $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$;

丙. $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$;

丁. $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

则上述等式成立的是(　　)

(A) 甲与丙　　(B) 甲与丁　　(C) 乙与丙　　(D) 乙与丁

3. 设两个4阶矩阵 A 与 B 的最小多项式分别为 $(x-1)^2(x-2)$ 与 $(x-1)(x-2)^2$, 则矩阵 $\begin{pmatrix} A & A-B \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的最小多项式为(　　)

(A) $(x-1)^2(x-2)$　　(B) $(x-1)(x-2)^2$　　(C) $(x-1)^2(x-2)^2$　　(D) $(x-1)^3(x-2)^3$

4. 设 A 为 n 阶可逆矩阵, $\rho(A)$ 是其谱半径, $\|\bullet\|$ 是一种矩阵范数, 则必有(　　)

(A) $\|A^{-1}\| = 1/\|A\|$　　(B) $\|A^5\| \le \|A\|^5$　　(C) $\|A^5\| \ge \|A\|^5$　　(D) $\|A\| \ge \rho(A^*A)$

5. 设 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 的特征值与奇异值分别为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 与 $s_1, \cdots, s_n$, 则必有(　　)

(A) $\sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} |s_i|$　　(B) $\sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |s_i|^2$

(C) $\sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$　　(D) $\sum\limits_{i=1}^{n} |s_i|^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$

二. 填空题(每题3分, 共15分)

6. 设 $(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$, $\sigma((x,y,z)^T) = (2x-y, 2x)^T$, 则 σ 关于标准基-标准基的矩阵为__________.

7. 线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ 的最小范数的最小二乘解为__________.

8. 设 $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 则正交变换 $x \mapsto Ax$ 的旋转轴上的单位向量为__________.

9. 设 A 为3阶矩阵, $e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & te^t \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$, 则矩阵 $\lambda E - A$ 的初等因子为__________.

10. 设 A 是秩为 $r \ge 1$ 的 n 阶正交投影矩阵, $B = E - \cos A$, 则 B 的特征多项式为__________.

三. 计算题(每题 15 分, 共 60 分)

11. 设 $V=\mathbb{R}[x]_n$ 是次数小于 n 的全体实系数多项式构成的实线性空间. 定义 V 上的线性变换 σ 如下:

$$\sigma: f(x)\mapsto xf'(x)-f(x), \quad \forall\, f(x)\in V.$$

(1) 求 σ 的特征值与特征向量;
(2) 求 σ 的核空间 $\mathrm{Ker}(\sigma)$ 与像空间 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 的各一组基;
(3) 判断 $V=\mathrm{Ker}(\sigma)\oplus\mathrm{Im}(\sigma)$ 是否成立? 说明理由.

12. 设 $V=\mathbb{R}^2$ 是实线性空间, $(x,y)^T\in V$, $e_1=(1,0)^T, e_2=(0,1)^T$.
(1) 求 V 上的一个内积 $(\bullet,\bullet)$ 使得向量组 e_1, e_1+e_2 是一组标准正交基;
(2) 在该内积下, 计算 e_2 与 e_1-e_2 的长度;
(3) 设 σ 是 V 的一个等距变换, $\sigma(e_1)=e_1+e_2$. 求 $\sigma((x,y)^T)$? 这样的等距变换唯一吗?

13. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的 Jordan 标准形 J (不必计算变换矩阵 P);

(2) 设 $n \geq 3$, 计算 $A^n - A^{n-2}$ 与 $A^2 - E$;

(3) 求 $\int_0^t (E - A^{-2}) e^{As} ds$.

14. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的秩为 $r > 0$, A 的奇异值分解为 $A = U\text{diag}(s_1, ..., s_r, 0, ..., 0)V^*$, 其中 $s_1 > \cdots > s_r$, $U = (u_1, \cdots, u_n), V = (v_1, \cdots, v_n)$ 是两个酉矩阵, $u_i, v_i \in \mathbb{C}^n, 1 \leq i \leq n$. 设矩阵 $B = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$.

(1) 求 B 的奇异值分解;

(2) 求 B^*B 的谱分解;

(3) 求 B^*B 的 Moore-Penrose 广义逆.

四. 证明题(每题 10 分, 共 10 分)

15. 设 σ 是 $\mathbb{C}^6$ 上的线性变换, 其特征多项式为 $(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)^3$. 证明:
(1) 存在 σ 的三个不变子空间 U_i, 使得 $\dim U_i = i$, $i = 1, 2, 3$, 且 $\mathbb{C}^6 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$;
(2) 对任意有限维线性空间上的线性变换, 推广(1)中的结论.