上海交通大学 2013-2014 学年第一学期《矩阵理论》试卷

姓名__________ 学号____________ 教师姓名__________ 成绩______

一. 单项选择题(每题 3 分, 共 15 分)

1. 设 V 是全体 3 阶实矩阵构成的实线性空间. 设

$$U=\{A=(a_{ij})\in V\mid a_{12}+a_{23}+a_{31}+a_{32}=0\}, W=\{A\in V\mid A^T-A=0\}.$$

则 $\dim(U\bigcap W)=$( ).

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6

2. 设 U,W,X 是线性空间 V 的任意三个子空间. 考虑下列等式:

甲. $(U+W)\bigcap X=(U+X)\bigcap(W+X)$; 乙. $(U+W)\bigcap X=(U\bigcap X)+(W\bigcap X)$;

丙. $X+(U\bigcap W)=(X+U)\bigcap(X+W)$; 丁. $X+(U\bigcap W)=(X\bigcap U)+(X\bigcap W)$.

则上述四个等式恒成立的个数为( ).

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

3. 设 α 是 $n\,(n\geq 2)$ 维单位向量, $A=\alpha\alpha^*$. 考虑下列命题:

甲. A 存在三角分解 乙. A 存在谱分解

丙. A 存在 QR 分解 丁. A 存在奇异值分解

则上述四个命题恒成立的个数为( ).

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

4. 设 A 为 n 阶正规矩阵, $\|\bullet\|_F$ 是矩阵的 F-范数, 则( ).

(A) $\|A^2\|_F=\|A\|_F^2$ **(B)** $\|A^2\|_F=\|A^*A\|_F$

(C) $\|A\|_F=\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{x^*Ax}{x^*x}$ **(D)** $\|A\|_F^2=\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{x^*A^*Ax}{x^*x}$

5. 设 n 阶矩阵 A 满足条件 $A^2=I$, 则 $e^A=$( ).

(A) eI **(B)** eA **(C)** $\frac{1}{2}[(e+e^{-1})I+(e-e^{-1})A]$ **(D)** $\frac{1}{2}[(e-e^{-1})I+(e+e^{-1})A]$

二. 填空题(每题 3 分, 共 15 分)

6. 设 $\sigma((x,y,z)^T)=(x+2y-z,y+z,x-3z)^T$ 是欧氏空间 R^3 上的线性变换, 则 σ 的伴随变换 σ^* 的像空间 $Im(\sigma^*)$ 的一个标准正交基为( ).

7. 设两个 3 阶矩阵 A 与 B 满足条件 $A\neq 0, A^2=0, B^2=I$. 如果 $I+B$ 的零空间 $N(A)$ 的维数为 2, 则 $\begin{pmatrix} A-B & A+B \\ A+B & A-B \end{pmatrix}$ 的极小多项式=( ).

8. 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 是两个 n 维向量, 其中$x_1=y_1=1$. 如果 $xy^T=LU$ 是矩阵 xy^T 的三角分解, 则 $UL=$( ).

9. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\cos(At)=$( ).

10. 设 α,β 是两个正交的 $n\,(n\geq 2)$ 维向量, 且 $\alpha^*\alpha=\beta^*\beta=4$, 则矩阵 $\alpha\beta^*+\beta\alpha^*$ 的 Moore-Penrose 逆为( ).

三. 计算题与证明题 (11-14 题每题 15 分, 15题 10 分, 共 70 分)

11. 设 $U=\{(x,y,z,w)\,|\,x+y+z+w=0\}$, $W=\{(x,y,z,w)\,|\,x-y+z-w=0\}$ 是通常欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 的两个子空间.

(1) 求 $U\cap W,\ U+W$ 的维数与各自的一组标准正交基;

(2) 求 U 的一个 2 维子空间 U_0 使得 其正交补空间 $U_0^{\perp}\subseteq W$;

(3) 设 σ 是 $\mathbb{R}^4$ 上的正交投影变换使得 $Ker(\sigma)=U$, 求 σ 在标准基下的矩阵.

12. **设有** $n\,(n \geq 2)$ **阶实对称矩阵**

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_n^2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \\ a_1 & 1+a_1^2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1+a_2^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 1+a_{n-2}^2 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 1+a_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

其中 $a_i\,(1 \leq i \leq n)$ **为实数. 记** $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T A x$.

(1) 判断集合 $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ **是否为** $\mathbb{R}^n$ **的子空间; 如果是, 求其维数; 如果否, 求其生成的子空间的维数;**

(2) 设存在 $\mathbb{R}^n$ **的内积** $(\bullet, \bullet)$ **使得对任意** $x \in \mathbb{R}^n$ **有** $(x, x) = f(x)$**, 求** $a_i\,(1 \leq i \leq n)$ **的值; 并求向量** $\alpha = (1, 0, \cdots, 0)^T$ **与** $\beta = (1, 1, \cdots, 1)^T$ **在该内积下的长度与夹角.**

13. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$**.**

(1) 求 A **的 Jordan 标准形** J**;**

(2) 计算 e^{At}**;**

(3) 设 $x(0) = (1,1,1)^T$**. 求定解问题** $x'(t) = Ax(t)$ **的解.**

14. 设两个 n 阶 Hermite 矩阵 A, B 的谱分解分别为 $A = UDU^*, B = V\Lambda V^*$，其中 U, V 均为酉矩阵，$D = \operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_s, 0, \cdots, 0), \Lambda = \operatorname{diag}(b_1, \cdots, b_t, 0, \cdots, 0)$ 是对角矩阵，$a_i \neq 0, 1 \leq i \leq s, b_j \neq 0, 1 \leq j \leq t$. 记 I 是 n 阶单位矩阵.

(1) 求 $C = A\, e^{iB}$ 的奇异值分解;

(2) 求 分块矩阵 $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的奇异值分解;

(3) 求 分块矩阵 $N = \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$ 的 Moore-Penrose 广义逆.

15. 设$V = M_n(\mathbb{C})$是全体n阶复矩阵构成的复线性空间，$A, B \in V$．对任意$X \in V$，定义$\sigma(X) = AX - XB$．证明：A与B没有公共特征值的充分必要条件是对任意n阶矩阵$C \in V$，存在唯一的n阶矩阵$X \in V$使得$\sigma(X) = C$．