Modern Control Theory
Spring 2017

Weijun Zhang （张伟军）
Associate Professor, Robotics Institute
School of Mechanical Engineering
Office:319 Building B of ME school

zhangweijun@sjtu.edu.edu.cn
021-34205559

课程概要

- 稳定性定义与Lyapunov第一法（4.1-4.2）
- Lyapunov第二法（4.3)
- Lyapunov方法在线性系统应用（4.4）
- Lyapunov方法在非线性系统的应用（4.5）

Stability and Lyapunov method

有关基础：

1.线性系统的稳定性只决定于系统的结构和参数，而与系统的初始条件与外界扰动无关。

2.非线性系统的稳定性还与初始条件及外界扰动的大小有关。

3.本章主要介绍李雅普诺夫第一法和第二法关于稳定性的判别方法和校正方法。

4. 李雅普诺夫第一法是指利用特征根的分布来判断，因为要求解特征根，因此又称为直接法。

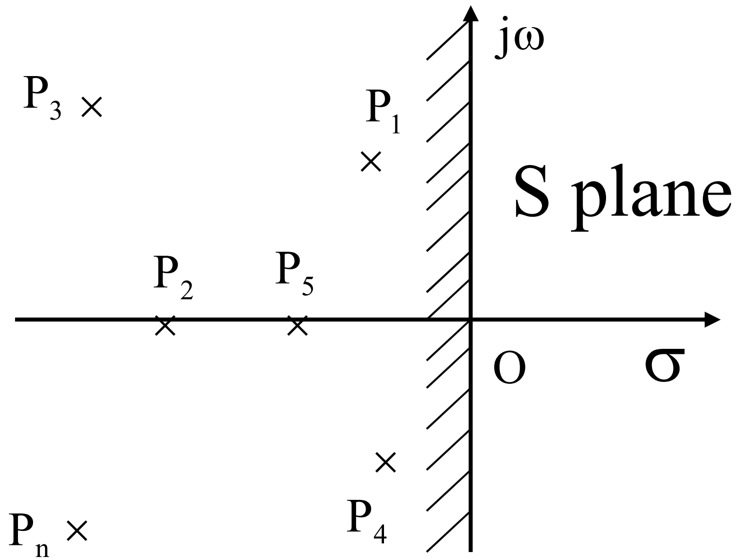
The sufficient and necessary conditions of stability:

All the roots of characteristic equation have negative real parts.

That is: all the poles locate on the left region of s plane.

$$D(s) = a_0 \prod_{i=1}^{K} (s - p_i) \prod_{j=1}^{k} [s - (\sigma_j + j\omega_j)][s - (\sigma_j - j\omega_j)] = 0$$

C-E of control system



Note: Stability has no relationship with zeros

Routh Array

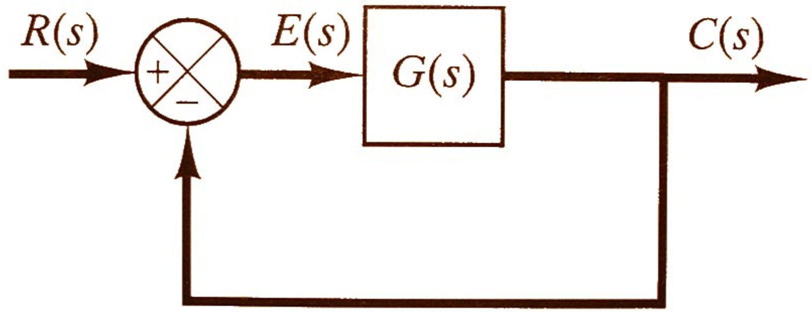
$$a(s)=a_6s^6+a_5s^5+\cdots+a_1s+a_0=0$$

$$\begin{array}{lllll}
s^6 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \\
s^5 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\
s^4 & \frac{a_5a_4-a_6a_3}{a_5}=A & \frac{a_5a_2-a_6a_1}{a_5}=B & \frac{a_5a_0-a_6 0}{a_5}=a_0 & 0 \\
s^3 & \frac{Aa_3-Ba_5}{A}=C & \frac{Aa_1-a_0a_5}{A}=D & \frac{A0-0a_5}{A}=0 & 0 \\
s^2 & \frac{CB-AD}{C}=E & \frac{Ca_0-A0}{C}=a_0 & 0 & 0 \\
s & \frac{ED-Ca_0}{E}=F & \frac{E0-C0}{F}=0 & 0 & 0 \\
s^0 & \frac{Fa_0-E0}{F}=a_0 & \frac{F0-E0}{F}=0 & 0 & 0
\end{array}$$

Algebraic Criterion

The number of sign changes of the first column elements of the Routh Array is equal to the number of unstable roots.

Nyquist Stability Criterion



- Criterion to the unity feedback control systen

If the open-loop transfer function G(s) has ***k*** *poles in the right-half s plane, then for stability, the G(jω) locus, as ω varies from* ***-∞ to ∞****, must* ***encircle*** *the (-1+j0) point* ***k*** *times in the* ***counterclockwise*** *direction.*

Remark on the Nyquist Stability Criterion

- The expression of Nyquist Stability Criterion

$$Z = N + P$$

Z: number of Zeros of 1+G(s) in the right-half s-plane.

N: number of clockwise encirclements of the -1+j0 point.

P: number of Poles of G(s) in the right-half s-plane.

If Z=0, -N=P

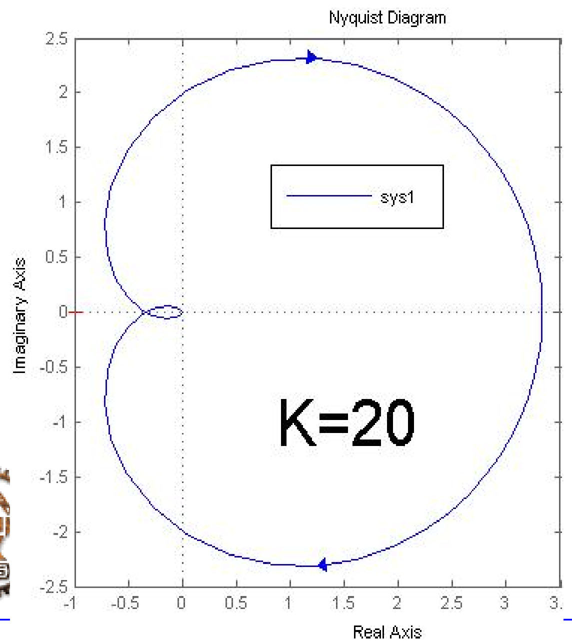
Otherwise, derive the number of right-poles the closed-system has.

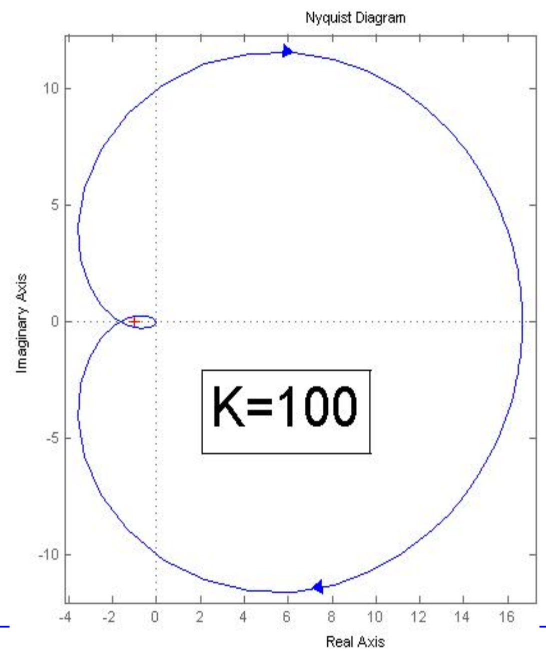
Nyquist Stability Criterion

- Example

Compare the stability for unity feedback system with open loop transfer function is

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$





Stability and Lyapunov method

有关基础：

5.李雅普诺夫第二法主要采用“虚拟能量”衰减法来判别，是一种间接判别法。

6.第一法仅仅适用于线性系统，第二法还适用于非线性系统和时变系统，具有更广泛的适用性。

系统状态的运动和平衡状态

考虑系统 $\dot{x} = f[x,t]$

x-n维状态矢量

f-与x同维的矢量函数

$$x = \Phi(t; x_0, t_0)$$

系统的运动或状态轨线

Stability and Lyapunov method

若系统存在状态矢量x_e,对所有t，使：

$$f(x_e, t) \equiv 0$$

成立，则称x_e为系统的平衡状态。

问题1：如何从图形上理解平衡状态？

问题2： $\dot{x} = f[x,t] = Ax$ A为非奇异，平衡状态？

问题3：
$$\dot{x}_1 = -x_1$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2^3$$
平衡状态？

Stability and Lyapunov method

稳定性的几个定义

动态矢量x与平衡状态x_e的距离

$$\|x - x_e\| \le \varepsilon$$

在n维状态空间里，定义

$$\|x - x_e\| = \sqrt{(x - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \ldots + (x_n - x_{ne})^2}$$

如果

$$\|\Phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \le \varepsilon \quad t \ge t_0$$

称由初态x0引起的自由响应是有界的

Stability and Lyapunov method

1.李雅普诺夫意义下的稳定性定义

如果对任意选定的实数 $\varepsilon > 0$ 可找到对应的实数 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$

使当 $\|x - x_e\| \le \delta(\varepsilon, t_0)$ 时，满足

$$\|\Phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \le \varepsilon \quad t_0 \le t \le \infty$$

称 平衡状态x_e为李雅普诺夫意义下的稳定

2.李雅普诺夫意义下的渐进稳定性定义

若平衡状态x_e是稳定的，而且当t无限增长时，轨线最终收敛于x_e,称这种稳定状态x_e为渐进稳定。

Stability and Lyapunov method

3.大范围渐进稳定

若平衡状态x_e是稳定的，而且从状态空间所有初始状态出发的轨线都具有渐进稳定性，则称这种平衡状态当x_e为大范围渐进稳定。

4.不稳定

如果对于某个实数 $\varepsilon > 0$ 和任一实数 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ 从 δ 周围出发的状态轨线，至少有一条越过 ε 构成的球体则称这种平衡状态为不稳定。

Stability and Lyapunov method

李雅普诺夫第一法

基本思路：

1.线性系统通过判断状态方程的解来判断稳定性；

2.非线性和时变系统要通过平衡点附近的线性化处理，再根据A阵判断系统的稳定性。

一、线性系统的稳定性判据

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = Cx$$

状态稳定性：A阵的特征值具有负实部

Stability and Lyapunov method

输出稳定性：比状态稳定性要容易。可以按传递函数来判断，即

$$W(s)=C(sI-A)^{-1}b$$ 的极点都位于S平面的左半平面

例题：设系统的状态空间表达式为：

$$x=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

试分析系统的输出稳定性和状态稳定性

Stability and Lyapunov method

二、非线性系统的稳定性

$$\dot{x} = f\left[x,t\right]$$

Xe为其平衡状态，f[x,t]为与x同维的矢量函数，对x具有连续的偏导数。

线性化后，可得：

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x + R(\Delta x) \qquad A = \left.\frac{\partial f}{\partial x^T}\right|_{x=x_e}$$

R(x)为级数展开式中的高阶导数项。

1)如果上述A阵具有全部负实部的根，则平衡状态xe是渐进稳定的，与R(x)无关。

2)如果上述A阵具有至少一个正实部的根，则平衡状态xe是不稳定的。

Stability and Lyapunov method

3)如果上述A阵具有至少一个实部为零的根，系统处于临界状态，需要由R(x)决定

例题2:设系统的状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_1 x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_1 x_2$$

试分析系统在平衡状态处的稳定性

课程概要

- 稳定性定义与Lyapunov第一法（4.1-4.2）
- Lyapunov第二法（4.3)
- Lyapunov方法在线性系统应用（4.4）
- Lyapunov方法在非线性系统的应用（4.5）

Stability and Lyapunov method

李雅普诺夫第二法

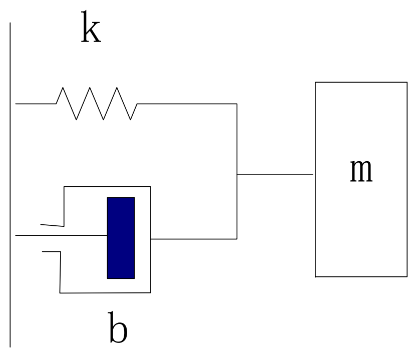
（1）如果一个系统被激励后，其储存的能量随时间的推移逐渐衰减，只到平衡状态时为最小，则称这个平衡状态是渐进稳定的。

（2）如果一个系统被激励后，其储存的能量随时间的推移越来越大，则称这个平衡状态是不稳定的。

（3）如果一个系统被激励后，其储存的能量随时间的推移维持不变，则称这个平衡状态是临界稳定的，在李雅普诺夫意义下也认为是稳定的。

Stability and Lyapunov method

一个实例：



$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2$$

系统储存的能量：

弹簧的势能：？

质量块的动能？

$$V(x) = ?$$

$$\dot{V}(x) = ?$$

Stability and Lyapunov method

李雅普诺夫函数：

1.预备知识

A.标量函数的符号性质

设 $V(x)$ 为n维矢量x所定义的标量函数，且在x＝0处，恒有V(x)=0,则对于任何非零矢量x，如果成立

（1） $V(x)>0$ 则称V(x)是正定的。如…

（2） $V(x)\geq 0$ 则称V(x)是半正定（非负定）的。如…

（3） $V(x)<0$ 则称V(x)是负定的。如…

李雅普诺夫函数：

（4）$V(x) \leq 0$ 则称V(x)是半负定的。如…

（5）$V(x) > 0$ 或 $V(x) < 0$ 则称V(x)是不定的。如…

例题:判断下列个函数的符号性质

$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ 标量函数为

（1） $V(x) = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2$ （2） $V(x) = x_1^{\ 2} + x_2^2$

Stability and Lyapunov method

B.二次型标量函数

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为n个变量，定义二次型标量函数为

$$V(x) = x^T P x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Stability and Lyapunov method

设 $p_{ij} = p_{ji}$ 则称p为实对称阵。

$$V(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2$$

同样，可定义矩阵P的符号

希尔维斯特判据：

设实对称矩阵

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, p_{ij} = p_{ji}$$

Stability and Lyapunov method

$\Delta_i (i=1,2,\cdots,n)$ 为其各阶主子行列式。

$$\Delta_1 = p_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}, \cdots \Delta_n = |P|$$

矩阵P（或V(x))符号确定如下：

（1） $\Delta_i > 0$ $\Longleftrightarrow$ P正定

（2） $\Delta_i \begin{cases} > 0 & \text{i为偶数} \\ < 0 & \text{i为奇数} \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ P负定

Stability and Lyapunov method

（3） $\Delta_i \begin{cases} \geq 0 & i=1, 2\ldots,n \\ =0 & i=n \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ P半正定

（4） $\Delta_i \begin{cases} \geq 0 & i\text{为偶数} \\ \leq 0 & i\text{为奇数} \\ =0 & i=n \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ P半负定

Stability and Lyapunov method

李雅普诺夫函数：

设系统的状态方程为：

$\dot{x} = f(x,t)$　X_e=0是其平衡状态。

如果存在一个有连续的一阶偏导数的标量函数V(x),并且满足下列条件：

（1）V(x)是正定的；

$\dot{V}(x)$ 是半负定的

⇒ 平衡状态X_e=0是李雅普诺夫意义下的稳定。

Stability and Lyapunov method

（2）V(x)是正定的；

$\dot{V}(x)$ 是负定的 ⇒ 平衡状态X_e=0是渐进稳定的。

（3）V(x)是正定的；

$\dot{V}(x)$ 是半负定的，对 $x \neq 0$ $\dot{V}(x)$ 不恒为零

⇒ 平衡状态X_e=0是渐进稳定的。

（4）V(x)是正定的；

$\dot{V}(x)$ 是正定的 ⇒ 平衡状态X_e=0是不稳定的。

Stability and Lyapunov method

例题4:已知系统方程如下，试分析其系统的稳定性

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

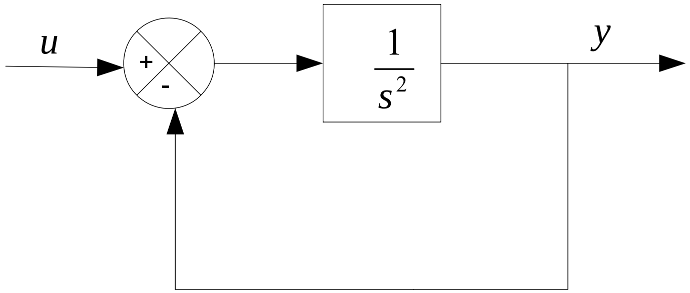
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

例题5:已知系统方程如下，试分析其平衡状态的稳定性

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x$$

Stability and Lyapunov method

例题6:已知闭环系统如图所示，试分析其系统的稳定性



例题7:已知系统方程如下，试分析其平衡状态的稳定性

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -(1-|x_1|)x_2 - x_1$$

Stability and Lyapunov method

几个推论：

1. V(x)的非唯一性。

2. $$V(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$ 几何意义？

3. V(x）只反映平衡状态附近的信息。

4. V(x）适用性广泛，技巧较多。

课程概要

- 稳定性定义与Lyapunov第一法（4.1-4.2）
- Lyapunov第二法（4.3)
- Lyapunov方法在线性系统应用（4.4）
- Lyapunov方法在非线性系统的应用（4.5）

Lyapunov method for Linear System

线性定常系统的渐进稳定性判据

设线性定常连续系统为： $\dot{x} = Ax$

平衡状态xe＝0为大范围渐进稳定的充要条件是：

对任意给定的正实对称矩阵Q，必存在正定的实对称矩阵P，满足李雅普诺夫方程

$$A^T P + PA = -Q$$

并且：

$V(x) = x^T Px$ 是系统的李雅普诺夫函数

Lyapunov method for Linear System

证明：

选择 $V(x)=x^T Px$ 为系统的李雅普诺夫函数，设P为n×n维正定实对称矩阵，则V(x)是正定的

$$\dot{V}(x)=x^T P\dot{x}+\dot{x}^T Px$$

$$=x^T PAx+(Ax)^T Px$$

$$=x^T (PA+A^T P)x$$

设 $Q=-(A^T P+PA)$

Q正定则V(x)导数为负定 ⇒ 系统渐进稳定

Lyapunov method for Linear System

1.应用时正定矩阵Q是任意的，若P也是正定的，则系统稳定。

2.通常设Q＝I，这时P应满足：

$$I = -(A^T P + PA)$$

3.若可判断出 $\dot{V}(x)$ 不恒为零，也可选Q为半正定的。

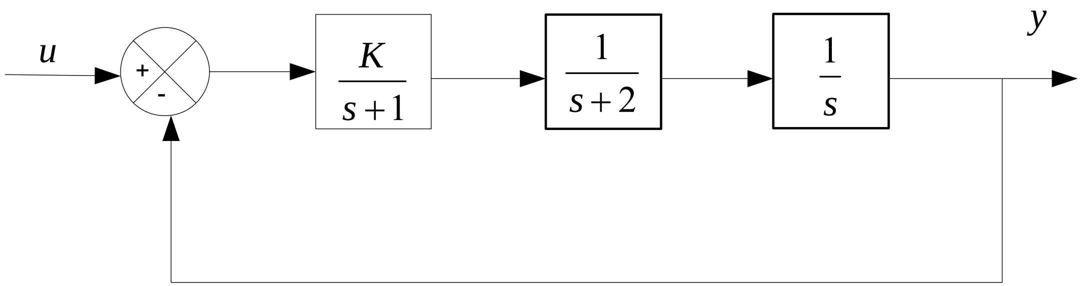
4.上述判据所确定的条件与矩阵A的特征值为负实部等价。

Lyapunov method for Linear System

例题1:已知系统方程如下，试分析其平衡状态的稳定性

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x$$

例题2:已知闭环系统如图所示，若要系统稳定，试确定K的范围。



Lyapunov method for Linear System

线性定常离散系统的渐进稳定性判据

设线性定常离散系统为： $x(k+1) = Gx(k)$

平衡状态xe＝0为大范围渐进稳定的充要条件是：

对任意给定的正实对称矩阵Q，必存在正定的实对称矩阵P，满足李雅普诺夫方程

$$G^T PG - P = -Q$$

并且：

$V[x(k)] = x(k)^T Px(k)$ 是系统的李雅普诺夫函数

Lyapunov method for Linear System

证明：

$\Delta V[(x(k)] \Longrightarrow \dot{V}(x)$

$$\Delta V[(x(k)] = V[x(k+1)] - V[x(k)]$$

选取 $V[(x(k)] = x^T(k)Px(k)$ P正定

$$\Delta V[(x(k)] = V[x(k+1)] - V[x(k)]$$
$$= x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k)$$
$$= [Gx(k)]^T P[Gx(k)] - x^T(k)Px(k)$$
$$= x^T(k)[G^T PG - P]x(k)$$

$\Longrightarrow$ $Q = -[G^T PG - P]$

正定意味着系统渐进稳定

Lyapunov method for Linear System

1.应用时正定矩阵Q是任意的，若P也是正定的，则系统稳定。

2.通常设Q＝I，这时P应满足：

$$G^T PG - P = -I$$

3.若可判断出 $\dot{V}(x)$ 不恒为零，也可选Q为半正定的。

Lyapunov method for Linear System

例题3:已知系统方程如下，试分析其平衡状态的稳定性

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}x(k)$$

例题4:已知系统方程如下，欲使其在平衡状态稳定，问K的取值范围。

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & K/2 & 0\end{bmatrix}x(k), K>0$$

Lyapunov method for Linear System

Matlab方法的稳定性判别

Lyap():用于求解李雅普诺夫方程。 $\dot{x} = Ax$

X＝lyap（A，C）

C——正实对称矩阵Q，

X——求解出的实对称矩阵P

dLyap():用于求解李雅普诺夫方程。 $x(k+1) = Gx(k)$

$x = dlyap(A,C)$

$$G^T XG - X = -C$$

Lyapunov method for Linear System

C——正实对称矩阵Q，

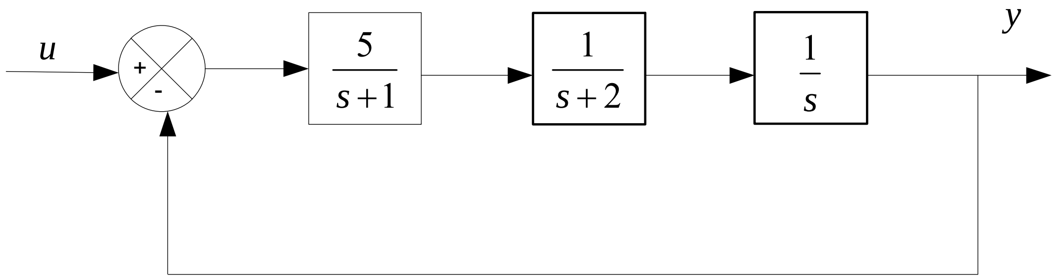
X——求解出的实对称矩阵P

$$Q = -[G^T PG - P] \quad \Rightarrow \quad G^T XG - X = -C$$

X=lyap2():也用于求解李雅普诺夫方程，但利用特征值分解技术。

Lyapunov method for Linear System

例题5:已知闭环系统如图所示，采用李雅普诺夫第二法判断系统的稳定。



选择正实对称矩阵Q ⇒ 求解P ⇒ 判断P是否正定

$$Q=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x(k), K>0$$

Lyapunov method for Linear System

```
>> n1=5;d1=[1 1];s1=tf(n1,d1);
>> n2=1;d2=[1 2];s2=tf(n2,d2);
>> n3=1;d3=[1 0];s3=tf(n3,d3);
>> s123=s1*s2*s3

 Transfer function:
        5
-----------------
s^3 + 3 s^2 + 2 s
```

```
sb=feedback(s123,1)
 Transfer function:
        5
---------------------
s^3 + 3 s^2 + 2 s + 5
```

```
>> [a,b,c,d]=tf2ss(sb.num{1},sb.den{1})
```

Lyapunov method for Linear System

```
a =

    -3    -2    -5
     1     0     0
     0     1     0

b =

     1
     0
     0
```

```
c =


     0     0     5

d =

     0
```

Lyapunov method for Linear System

```
>> q=[0 0 0;0 0 0; 0 0 1];
>> det(a)
ans =
   -5
>> P=lyap(a,q)
```

```
P =


  12.5000   -0.0000   -7.5000
  -0.0000    7.5000   -0.5000
  -7.5000   -0.5000    4.7000
```

```
>> det1=det(P(1,1))
det1 =
  12.5000
```

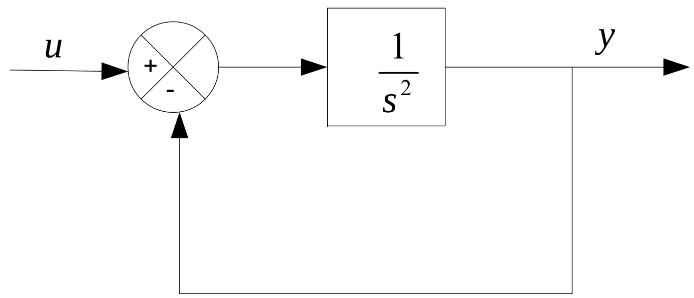
```
>> det1=det(P(2,2))
det1 =
   7.5000
```

```
>> det1=det(P)
det1 =
  15.6250
```

Lyapunov method for Linear System

稳定性判据在系统设计中的应用

系统方块图如图所示，不考虑输入的情况下，系统的响应是等幅正弦振荡。试问，若考虑u(t)为系统的一部分，则u(t)如何时，系统稳定？



课程概要

- 稳定性定义与Lyapunov第一法（4.1-4.2）
- Lyapunov第二法（4.3)
- Lyapunov方法在线性系统应用（4.4）
- Lyapunov方法在非线性系统的应用（4.5）

Lyapunov method for Nonlinear System

非线性系统的渐进稳定性判据－克拉索夫斯基法

设非线性系统的状态方程为：

$$\dot{x} = f(x)$$

x:n维状态矢量；

f：与x同维的非线性矢量函数

设原点x_e＝0是平衡状态，f(x)对x_i（i＝1，2…,n）可微

$$J(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Lyapunov method for Nonlinear System

则系统在原点渐进稳定的充分条件是：给定任意的正实对称阵P，下列矩阵Q是正定的：

$$Q(x) = -[J^T(x)P + PJ(x)]$$

而且：下列函数是李雅普诺夫函数：

$$V(x) = \dot{x}^T P\dot{x} = f^T(x)Pf(x)$$

证明： 选取二次型函数 $V(x) = \dot{x}^T P\dot{x} = f^T(x)Pf(x)$

为李雅普诺夫函数，P正定－>V正定

Lyapunov method for Nonlinear System

$$\frac{df(x)}{dt} = \dot{f}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^T}\dot{x} = J(x)f(x)$$

$$V(x) = \dot{x}^T P\dot{x} = f^T(x)Pf(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{V}(x) = f^T(x)P\dot{f}(x) + \dot{f}^T(x)Pf(x)$$

$$= f^T(x)PJ(x)f(x) + [J(x)f(x)]^T Pf(x)$$

$$= f^T(x)[J^T(x)P + PJ(x)]f(x)$$

Lyapunov method for Nonlinear System

$Q(x) = -[J^T(x)P + PJ(x)]$ 正定，则系统渐进稳定

补充：

1.若 $\|x\| \to \infty$ 有 $V(x) \to \infty$ ⇒

系统在原点大范围渐进稳定

2.取P＝I $Q(x) = -[J^T(x) + J(x)]$

3.该方法是充分条件。

Lyapunov method for Nonlinear System

例题：

已知系统方程如下，用克拉索夫斯基法分析在xe处的稳定性。

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3$$