第 1 章补充作业 2 答案

1. 设 $S=\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\geq 0\}\neq\varnothing$，其中 $A\in R^{m\times n}, \boldsymbol{b}\in R^m$，则 S 的所有方向组成的集合

$$D(S)=\{\boldsymbol{d}\neq 0 \mid A\boldsymbol{d}=0, \boldsymbol{d}\geq 0\}$$

证明：设 $\boldsymbol{d}\in D(S)$，即 $\boldsymbol{d}\neq 0$ 是 S 的方向，则由方向定义知，对任意的 $\boldsymbol{x}\in S$，有

$$\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{d}\in S, \quad \forall\lambda\geq 0$$

即 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\geq 0$ 时，

$$A(\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{d})=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{d}\geq 0,\ \ \forall\lambda\geq 0$$

即

$$\lambda A\boldsymbol{d}=0,\ \boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{d}\geq 0,\ \ \forall\lambda\geq 0$$

因此 $A\boldsymbol{d}=0,\ \boldsymbol{d}\geq 0$。

反之，设 $\boldsymbol{d}\neq 0, A\boldsymbol{d}=0,\ \boldsymbol{d}\geq 0$，则对任意的 $\boldsymbol{x}\in S$，即 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\geq 0$，有

$$A(\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{d})=A\boldsymbol{x}+\lambda A\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{d}\geq 0,\ \ \forall\lambda\geq 0$$

即

$$\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{d}\in S, \quad \forall\lambda\geq 0$$

因此 $\boldsymbol{d}\neq 0$ 是 S 的方向，即 $\boldsymbol{d}\in D(S)$。

2. （数学规划）设 $S\subset R^n$ 非空，则 S 的凸包

$$convS=\left\{\overline{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}^i \mid \boldsymbol{x}^i\in S, \lambda_i\geq 0, i=1,\cdots,k, \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1, k\text{正整数}\right\}$$

证明：记 $\tilde{S}=\left\{\overline{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}^i \mid \boldsymbol{x}^i\in S, \lambda_i\geq 0, i=1,\cdots,k, \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1, k\text{正整数}\right\}$，则要证 $convS=\tilde{S}$。

显然 $S\subset\tilde{S}$ 并易证 $\tilde{S}$ 是凸集，即 $\tilde{S}$ 是包含 S 的凸集，而 $convS$ 是包含 S 的最小凸集，因此 $convS\subset\tilde{S}$。

反之，设 $\overline{\boldsymbol{x}}\in\tilde{S}$，即存在正整数 k 和 $\boldsymbol{x}^i\in S, \lambda_i\geq 0, i=1,\cdots,k, \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$，使 $\overline{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}^i$。因为 $\boldsymbol{x}^i\in S\subset convS, i=1,\cdots,k$，并且 $convS$ 是凸集，因此 $\boldsymbol{x}^i, i=1,\cdots,k$ 的凸组合 $\overline{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}^i\in convS$。因此 $\tilde{S}\subset convS$。

由此得知 $convS=\tilde{S}$。