上 海 交 通 大 学 研 究 生 试 卷（A）

（ 2015 至 2016 学年 第 1 学期 ）

学号__________ 姓名__________ 上课时间__________ 任课老师__________

课程名称 最优化理论基础 成绩__________

我承诺，我将严格遵守考试纪律。
签字人：
承诺人：__________

题号	一	二 1	二 2	二 3	二 4	三	四			
得分										
批阅人 卷教师签名处)										

一．填空题（7 题 15 个空格，每空格 2 分，共 30 分）：

1. 用最速下降法并采用最优步长求解(UQP): $\min f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2$，其中初始点为 $\boldsymbol{x}^1$，则当且仅当 $\boldsymbol{x}^1$ 满足条件____________________时，迭代一步得到(UQP)的最优解，当且仅当 $\boldsymbol{x}^1$ 满足条件______________时，迭代任意有限步均不会得到(UQP)的最优解。

2. 在求解无约束优化问题的最速下降法、牛顿法、共轭梯度法和拟牛顿法中，____具有二次终止性，__________只具有局部收敛性。

3. 在求解线性约束优化问题的 Zoutendijk 可行方向法、Rosen 梯度投影法和 Frank-Wolfe 线性逼近法中，____具有收敛性，__________可推广到非线性约束优化问题。

4. 设 $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - ax_1x_2 - bx_1x_3 - 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 6$，其中 a,b 是常数。若 $f(\boldsymbol{x})$ 是严格凸函数，则常数 a,b 满足条件_________________________，反之______成立。

5. 设 $f(\boldsymbol{x})$ 是可微函数，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(LNP): $\begin{cases} \min f(\boldsymbol{x}) \\ s.t. A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ \quad E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{cases}$ 可行解，并且 $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}^1 \\ \boldsymbol{b}^2 \end{pmatrix}$，使 $\begin{cases} A_1\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^1 \\ A_2\bar{\boldsymbol{x}} < \boldsymbol{b}^2 \end{cases}$。为得到(LNP)在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处可行下降方向，可求解线性规划问题____________________________，则其最优值_________时，其最优解 $\bar{\boldsymbol{d}}$ 是(LNP)在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处可行下降方向。

6. 设 $f(\boldsymbol{x})$ 是可微函数，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(LNP): $\begin{cases} \min f(\boldsymbol{x}) \\ s.t.\ \ A\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b} \end{cases}$ 的可行解，并且 $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}^1 \\ \boldsymbol{b}^2 \end{pmatrix}$，使 $A_1\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^1$，

$A_2\bar{\boldsymbol{x}} > \boldsymbol{b}^2$。则 $-\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})$ 在 A_1 的零空间上的投影 $\bar{\boldsymbol{d}}=$________________________________。若 $\bar{\boldsymbol{d}}$ ___________，则 $\bar{\boldsymbol{d}}$ 是(LNP)在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处的可行下降方向。

7. 设$(\mathrm{LP})_k$: $\min\{\nabla f(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x}\ge\boldsymbol{b}\}$ 是(LNP): $\min\{f(\boldsymbol{x}) \mid A\boldsymbol{x}\ge\boldsymbol{b}\}$ 在其可行解 $\boldsymbol{x}^k$ 处的线性化问题，$\boldsymbol{y}^k$ 是$(\mathrm{LP})_k$的最优解，$\Delta_k=\nabla f(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{x}^k-\nabla f(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{y}^k$，则 Δ_k _______。若 $\Delta_k=0$，则______是(LNP)的 K-T 点，否则 $\boldsymbol{d}^k=$_____________是(LNP)在 $\boldsymbol{x}^k$ 处的可行下降方向。

二．计算题（4 题，每题 13 分，共 52 分）：

1．用惩罚函数法求解约束优化问题：

$$\begin{aligned}&\min f(\boldsymbol{x})=2x_1+4x_2\\&s.t.\ \ x_1-4(x_2-4)^2\ge 4\end{aligned}$$

2. 对于无约束优化问题：

$$\min f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^4$$

（1） 用任一下降算法求解，取初始点为 $\boldsymbol{x}^1 = (1,1,0)^T$ ，若未一步迭代停止，则迭代二次；

（2） 用最优性条件证明（1）中得到的点是否为最优解。

3．对于线性规划问题：

$$\begin{aligned} &\min x_1+\alpha x_2+x_3 \\ &s.t.\quad x_1+2x_2-2x_3\le 0 \\ &\quad -x_1 \qquad\quad +x_3\le -1 \\ &\quad\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{aligned}$$

（1）当$\alpha=-1$时用单纯形法求该问题的最优解和最优值；

（2）α取何值时，该问题无界；

（3）α取何值时，该问题的对偶问题无界。

4. 设 $\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m$ 是 R^n 中的 m 个点，$\boldsymbol{p}$ 是 R^n 中非零向量，α 是实数。在半空间 $\{\boldsymbol{x}\in R^n \mid \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x}\le\alpha\}$ 上寻找 $\boldsymbol{x}^*$，使 $\boldsymbol{x}^*$ 与 m 个点的欧氏距离平方和最小。

（1）写出该问题的优化模型，判别是否为凸规划问题；

（2）利用最优性条件求出 $\boldsymbol{x}^*$；

（3）当 α 充分大时，利用（2）中结论得到 $\boldsymbol{x}^*$，并解释其几何意义。

三．推导题（1 题，每题 8 分，共 8 分）：

1．设 B_k 是 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^k)$ 的近似并且满足拟牛顿条件，试写出关于 B_k 的拟牛顿条件，并推导修正公式 $B_{k+1} = B_k + \Delta B_k$，其中修正矩阵 ΔB_k 秩为 2。

四、证明题（1 题，每题 10 分，共 10 分）：

1. 设 $S \subset R^n$ 是开凸集， $f: S \to R^1$ 是可微函数，则 f 是 S 上的一致凸函数的充要条件是，存在 η>0，使

$$f(\boldsymbol{y}) \ge f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + \eta \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$$

其中 f 是 S 上的一致凸函数定义为： $S \subset R^n$ 是凸集，并且存在 η>0，使

$$\lambda f(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{y}) \ge f(\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) + \eta\lambda(1-\lambda)\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \lambda \in (0,1)$$

其中$\| \ \|$为 2-范数即欧氏范数。

上海交通大学研究生课程

《最优化理论基础》试卷（ A 卷）

（ 2014 至 2015 学年第 1 学期）

学号______________ 姓名______________ 成绩______________

一、填空题（共27分）.

1. 设 S_1, S_2 是 R^n 中的两个凸集, 则在以下三个集合 $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$, $S_1 + S_2$ 中, ____________ 不一定是凸集; 设 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 是 R^n 上的两个凸函数, 则在以下三个函数 $f_1(x) + f_2(x)$, $\min\{(f_1(x), f_2(x)\}$, $\max\{(f_1(x), f_2(x)\}$ 中, __________________不一定是凸函数.

2. 设 LP 问题 $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ 的最优解为 x^*, 对应的最优值为 z^*, 则 LP 问题 $\min\{\lambda c^T x : \gamma Ax = b, x \geq 0\}$（其中 λ, γ 为正常数）的最优解为_____________，对应的最优值为_____________.

3. 设 $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1^2)^2 + \frac{1}{2}(1 - x_1)^2$, $\bar{x} = (1, 2)^T$, 则 f 在 $\bar{x}$ 的牛顿方向是_______________.

4. 设 $f : R^n \to R$ 二次连续可微. 记 $s^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}, y_k = \nabla f(x^{(k+1)}) - \nabla f(x^{(k)})$. 设 B_{k+1} 为 $\nabla^2 f(x^{(k+1)})$ 的近似，则其满足的拟牛顿方程为__________________.

5. 设 $A \in R^{n \times n}$ 为对称正定矩阵，$d^{(1)}, \ldots, d^{(n)}$ 为 A 共轭方向组. 若 $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d^{(i)}$, 则对 $i = 1, \ldots, n$, $\alpha_i =$ __________________.

6. 设 $A \in R^{m \times n}$ 为行满秩矩阵, Q 为 R^n 到 A 的零空间的投影矩阵，则 $Q =$ _______________.

7. 设 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, 0, \ldots, 0)^T \in R^n$ 是问题（CNP）: $\min\{f(x) = \frac{1}{2}x^T Hx - c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ 的可行解，其中 $\bar{x}_j > 0, j = 1, \ldots, k, 0 < k < n, H \in R^{n \times n}$ 为对称正定矩阵，$c \in R^n$, 则 $\bar{d} = (\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_n)^T$ 满足条件__________________ 时, $\bar{d}$ 是（CNP）在 $\bar{x}$ 处的可行下降方向.

二、计算题（共45分）.

8（12分）. 一个化工厂希望能够使得工厂的利润最大化. 这个工厂有能力生产四种产品, 记为产品 1, 产品 2, 产品 3 和产品 4; 这四种产品生产是主要使用两种原材料 A 和 B. 假设共有 100 吨的原材料 A 和 600 吨的原材料 B 可供使用. 下表给出了生产每吨产品需要消耗原材料的数量, 以及生产每吨产品能够产生的利润(单位:万元).

产品种类	原材料 A	原材料 B	利润
产品 1	4	12	4
产品 2	3	10	2
产品 3	2	18	4
产品 4	1	25	3

(1). 根据上面的表格建立线性模型, 使得化工厂的利润在给定的条件下最大化.

(2). 将（1）中得到的线性模型化为线性规划问题的标准形式, 并用单纯形法求解.

9（12分）. 对于无约束优化问题：

$$\min\ f(x) = x_1^3 + x_1 x_2 + (1 + x_2)^2,$$

(1). 用下降算法求解，取初始点为 $x^{(1)} = (0,0)^T$, 若未一步迭代停止，则迭代二次；

(2). (1)中得到的点是否为最优解，说明之。

10（9分）. 用罚函数法求解

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \frac{1}{12}(x_1+1)^3 + x_2 \\
s.t. \quad & x_1 - 1 \ge 0 \\
& x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

11（12分）. 用可行下降法求解

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + 4x_2^2 - 34x_1 - 32x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \le 6, \\ & x_2 \le 2, \\ & x_1, x_2 \ge 0, \end{aligned}$$

取初始点 $x^{(1)} = (1, 2)^T$.

三、分析题（共28分）.

12（12分）. 设集合 $S \subset R^n$ 是非空凸集, 函数 $f : S \to R$. 则 f 是凸函数当且仅当 f 的上像图：

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x, y) : x \in S, y \geq f(x)\} \subset R^{n+1}$$

是凸集。

13（16分）. 考虑约束优化问题

$$\begin{aligned} \min_{x\in R^n} \quad & \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x \\ \text{s.t.} \quad & x^\top x \leqslant 1, \end{aligned}$$

其中A 是 n 阶对称正定矩阵, $b \neq 0$.

(1). 写出问题的一阶最优性条件, 即KKT条件.

(2). 设 $\mu \geqslant 0$, 证明 $\|(A+\mu I)^{-1}b\|_2$ 是关于 μ 的严格单调减函数, 其中 I 是 n 阶单位阵.

(3). 证明若 $\|A^{-1}b\| > 1$, 则存在唯一的 $\mu^* > 0$, 使得 $\|(A+\mu^* I)^{-1}b\|_2 = 1$, 且 $x^* = (A+\mu^* I)^{-1}b$ 是原问题的最优解.

上海交通大学研究生课程

《最优化理论基础》试卷（ A 卷）

（ 2013 至 2014 学年第 1 学期）

学号______________ 姓名______________ 成绩______________

一、填空题（共24分）.

1. 线性规划问题$\{\min c^T x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$ 的对偶问题为：______________.

2. 设函数$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + ax_1x_2 - 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 6$ 为严格凸函数，则常数a 的取值范围是______________.

3. 设$f : R^n \to R$ 为连续可微的严格凸函数. 用牛顿法求解$\min\limits_{x \in R^n} f(x)$, 则算法的迭代格式为________________. 牛顿法对于二次凸函数具有______________性.

4. 设$f : R^n \to R$ 二次连续可微. 记 $s_k = x_{k+1} - x_k, y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$.
设B_{k+1} 为$\nabla^2 f(x^{(k+1)})$ 的近似，则其满足的拟牛顿条件为______________.

5. 设A 为n 阶对称正定阵, $p_i(i = 1, \cdots, n)$ 关于A 两两共轭. 若$x \in R^n$ 可表示为$x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$, 则$\alpha_i =$ ______________.

6. 已知约束优化问题$\begin{cases} \min\limits_{x \in R^3} f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1 - 3x_2 \\ s.t. \quad -x_1 - x_2 \geq -2 \\ \qquad -x_1 - 5x_2 \geq -5, \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$, 则在点$\tilde{x} = (\frac{5}{6}, \frac{5}{6})^T$处的可行方向集为________________，下降方向集为______________.

三、计算题（共50分）.

7（10分）. 利用罚函数法求解 $\begin{cases} \min \ f(x) = x_1^2 + 2x_2 \\ s.t. \ 1 - x_1 \leq 0 \\ \qquad 2 - x_2 \leq 0. \end{cases}$

8（10分）. 利用共轭梯度法求解 $\min\ f(x)=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2-x_1+x_2$, 其中初始点为 $x_0=(0,0)^T$.

9（10分）. 求解线性规划问题$\begin{cases} \min\ \ z = x_1 + x_2 + x_3 \\ s.t.\quad x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 0 \\ \qquad\quad -x_1 + x_3 \le -1 \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$

10（10分）. 求解 $\begin{cases} \min\ f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 5 \\ s.t.\quad x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ \qquad\quad x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$ 取初始点 $x = (2, 0)^T$.

11（10分）．利用约束优化问题的最优性条件求解 $\begin{cases} \min\ f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^p \\ s.t.\quad \sum\limits_{i=1}^{n} x_i-\beta=0, \end{cases}$ 其中$p>1,\alpha_i>0(i=1,\cdots,n),\beta>0$ 为常数.

四、分析题（共26分）.

12（12分）．设 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^TAx+b^Tx$, 其中 A 为对称正定矩阵. 又设 $x_1(\neq x^*)$ 可表示为 $x_1=x^*+\alpha p$, 其中 x^* 是 $f(x)$ 的极小点, p 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量. 证明：

(i) $\nabla f(x_1)=\alpha\lambda p$.

(ii) 如果从 x_1 出发，沿最速下降方向作精确一维搜索，则一步达到极小点 x^*.

13（14分）. 考虑最优化问题 $\min_{x\in S} f(x)$, 其中 f 连续可微, $S \subseteq R^n$ 为非空闭凸集。证明:

(i) 若x^* 是问题的局部极小点，则

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in S. \tag{1}$$

(ii) 设 f 为 S 上的凸函数，则 x^* 为问题的全局极小点当且仅当 (1) 成立.