第 2 章作业参考答案

P35/1(1)：略

P35/1(2)：略

P35/1(4)（max,min）：略

P36/2(2)：

$A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

a) $B=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$，$\begin{cases}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ x_3=x_4=0\end{cases}$，得关于 B 的基本可行解 $\boldsymbol{x}^0=(30,50,0,0)^T$，目标值是-10

b) $B=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3)$，$\begin{cases}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ x_2=x_4=0\end{cases}$，得关于 B 的基本解 $\boldsymbol{x}^0=(-5,0,15,0)^T$，不可行

c) $B=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_4)$，$\begin{cases}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ x_2=x_3=0\end{cases}$，得关于 B 的基本可行解 $\boldsymbol{x}^0=(25/2,0,0,15/2)^T$，不可行

d) $B=(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$，$\begin{cases}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ x_1=x_4=0\end{cases}$，得关于 B 的基本可行解 $\boldsymbol{x}^0=(0,-10,30,0)^T$，不可行

e) $B=(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4)$，$\begin{cases}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ x_1=x_3=0\end{cases}$，得关于 B 的基本可行解 $\boldsymbol{x}^0=(0,10,0,10)^T$，目标值是 110

f) $B=(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$，$\begin{cases}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ x_1=x_2=0\end{cases}$，得关于 B 的基本可行解 $\boldsymbol{x}^0=(0,0,15,5)^T$，目标值是 65

因此最优解 $\boldsymbol{x}^*=(30,50,0,0)^T$。

P36/4：

分析：题目要求 A_1 满足：$A_1\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{b}_1$，$r(A_1)=n$ 即 A_1 的 n 个行向量线性无关，因此先对 A 和 b 进行行分块：$A=\begin{pmatrix}A'\\A''\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}'\\\boldsymbol{b}''\end{pmatrix}: A'\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{b}', A''\boldsymbol{x}^0>\boldsymbol{b}''$。只要 $r(A')=n$（即列满秩），那么 A' 中就可以找到 n 个线性无关的行向量，这些行向量组成的矩阵就可以作为 A_1。

可以反证 $r(A')=n$，即设 $r(A')<n$，则 $A'y=0$ 有非零解，由此来构造 S 上两个不同点，并且 $\boldsymbol{x}^0$ 表示成这两个点的严格凸组成，那么就与 $\boldsymbol{x}^0$ 是极点矛盾了。

（必要性）令 $A=\begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}' \\ \boldsymbol{b}'' \end{pmatrix}: A'\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{b}', A''\boldsymbol{x}^0>\boldsymbol{b}''$。下证 $r(A')=n$。

否则 $r(A')<n$，则存在 $\boldsymbol{y}\neq 0$，使 $A'\boldsymbol{y}=0$，则当 $|\theta|>0$ 充分小时，

$$A'(\boldsymbol{x}^0\pm\theta\boldsymbol{y})=\boldsymbol{b}', A''(\boldsymbol{x}^0\pm\theta\boldsymbol{y})>\boldsymbol{b}''$$

即当 $|\theta|>0$ 充分小时 $\boldsymbol{x}^0\pm\theta\boldsymbol{y}\in S$，$\boldsymbol{x}^0+\theta\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}^0-\theta\boldsymbol{y}$ 并且

$$\boldsymbol{x}^0=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{x}^0+\theta\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}^0-\theta\boldsymbol{y})]$$

与 $\boldsymbol{x}^0$ 是 S 的极点矛盾，故 $r(A')<n$。取 A' 中 n 个线性无关的行向量组成 A_1，则 A_1 的秩为 n, A 中除 A_1 外余下部分记作 A_2，即记 $A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$，对应记，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}$，则 $A_1\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{b}_1, A_2\boldsymbol{x}^0\geq\boldsymbol{b}_2$。

（充分性）假设 $\boldsymbol{x}^0$ 不是 S 的极点，则存在 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2\in S,\boldsymbol{x}^1\neq\boldsymbol{x}^2,\lambda\in(0,1)$，使 $\boldsymbol{x}^0=\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2$，则 $A_1\boldsymbol{x}^0=\lambda A_1\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)A_1\boldsymbol{x}^2$，即

$$A_1\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{b}_1=\lambda(A_1\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{b}_1)+(1-\lambda)(A_1\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{b}_1)$$

因为 $A_1\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{b}_1=0,\lambda>0,A_1\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{b}_1\geq 0,1-\lambda>0,A_1\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{b}_1\geq 0$，因此

$$A_1\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{b}_1=0, A_1\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{b}_1=0$$

即 $\boldsymbol{x}^1=\boldsymbol{x}^2=A_1^{-1}\boldsymbol{b}_1$，与 $\boldsymbol{x}^1\neq\boldsymbol{x}^2$ 矛盾。