第一讲

基本概念

《数字信号处理》第一部分

提 纲

- 信号
- 信号处理
- 典型信号及运算
- 信号的分解与重构

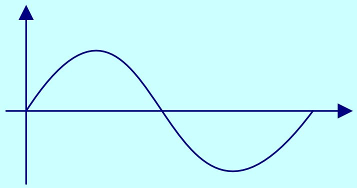
信 号

- 信号
- 信号处理
- 典型信号及运算
- 信号的分解与重构

信号(Signal)

- 信号可以是一个实际物理信号，也可以是一个数学函数或序列

$$x(t) = A\sin(2\pi ft)$$



正弦信号　　正弦函数　　波形

- 信号处理中

信号 = 函数（序列）

信号(Signal)

- 信号有两类
  - 自然和物理信号：语音、图像、地震信号、生理信号
  - 人工产生经自然作用或影响形成的信号：雷达信号、通讯信号、医用超声信号、机械振动和噪声
- 信号蕴含一定的信息，如：
  - 图像信号包含物体、颜色、明暗等信息
  - 利用地震信号可以推断出震源、震级等信息
- 信号与信息的关系
  - 信号是信息的表现形式，信息则是信号的具体内容

信号(Signal)

- 工程信号处理中
  - 信号是指利用传感器进行测量所获得的位移、速度、加速度、温度、应力、应变、压力等数据
- 信号通常是一个自变量或几个自变量的函数
  - 如果仅有一个自变量，则称为一维信号
  - 如果有两个以上的自变量，则称为多维信号
- 自变量可以是时间、距离或者空间位置等
  - 一般来说，可以将信号看作为时间的函数

信号(Signal)

- 离散时间信号(Discrete Time Signal)
  - 若 t 仅在时间轴的离散点上取值，则称 $x(t)$ 为离散时间信号
  - 对模拟信号 $x(t)$ 进行等间隔采样，采样间隔(抽样周期)为 T，得到离散时间信号：

$$x(t)\big|_{t=nT} = x(nT), \quad n = -N_1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, N_2$$

  - 若采样间隔 T 归一化为1，离散时间信号 $x(nT)$ 可简记为 $x(n)$，称为离散时间序列(Discrete Time Series)
  - $x(n)$ 的幅值可以在一定范围连续取值
- 数字信号(Digital Signal)
  - 当 $x(n)$ 在时间和幅值上均取离散值时，就称为数字信号(离散信号)

信号：信号分类

- 动态信号
  - 确定性信号
    - 周期信号
      - 简谐信号
      - 复杂周期信号
    - 非周期信号
      - 准周期信号
      - 瞬态信号(脉冲)
  - 随机信号
    - 平稳信号
      - 各态历经信号
      - 非各态历经信号
    - 非平稳信
      - 调制型非平稳信号
      - 一般非平稳随机信号

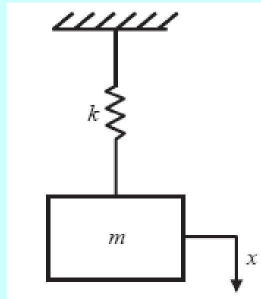
信号：确定性信号

- 确定性信号
  - 周期信号
    - 简谐信号
    - 复杂周期信号
  - 非周期信号
    - 准周期信号
    - 瞬态信号(脉冲)

- 对于确定性的物理过程，如果描述系统性态的状态变量可以用确定的时间函数来表述，那么，经过测量所获得的数据就是确定性信号
- 确定性信号 => 周期性信号、非周期性信号
- 周期性信号 => 简谐信号、复杂周期信号
  - *描述简谐信号的基本参数是频率、振幅和初始相位*
  - *复杂周期信号可由傅里叶级数展开成一系列离散的简谐分量，其中任意两个分量的频率之比为有理数*
- 非周期信号 => 准周期信号、瞬态信号

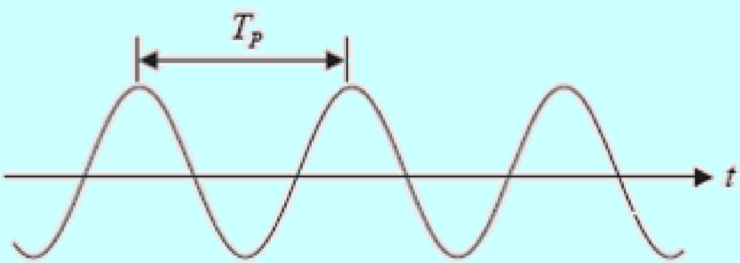
信号：确定性信号示例

- 周期信号

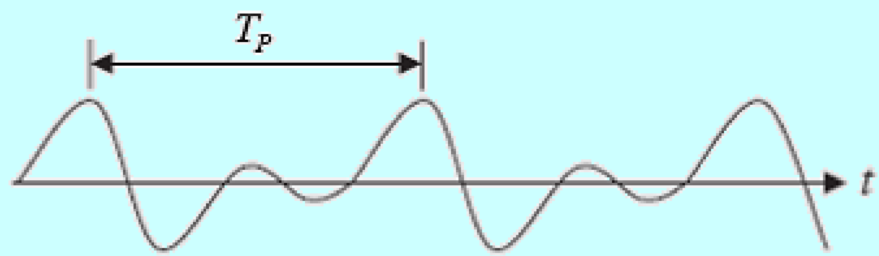


$$m\ddot{x}+kx=0$$

$$x(t)=A\cos(\sqrt{k/m}\cdot t)\quad t\geq 0$$



简谐信号

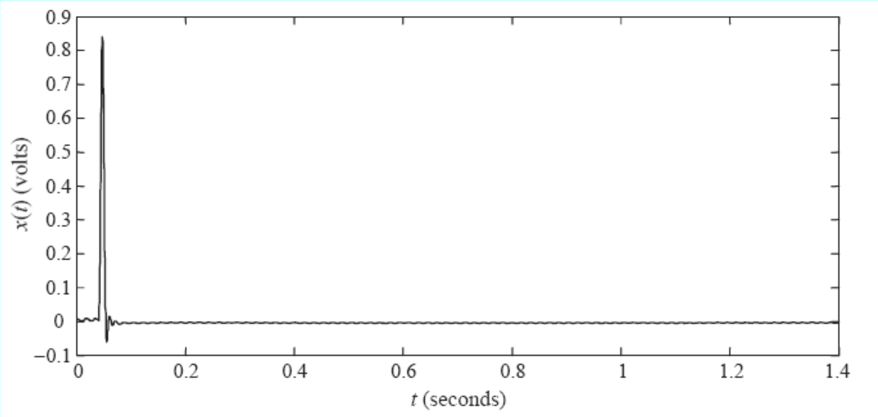


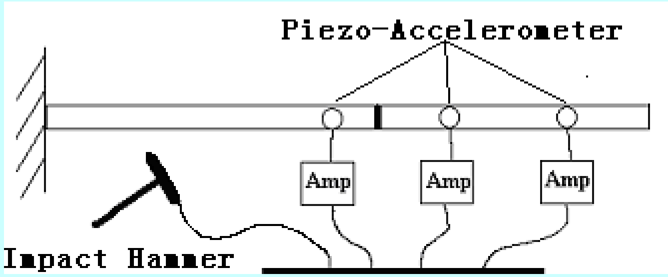
复杂周期信号

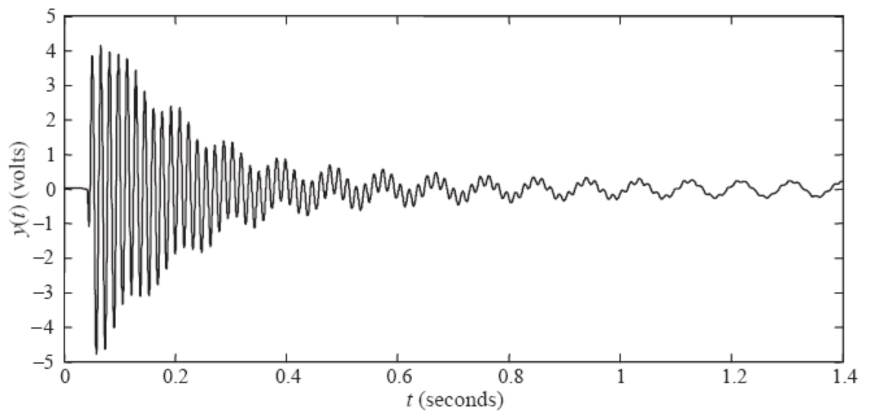
周期信号示例

信号：确定性信号示例

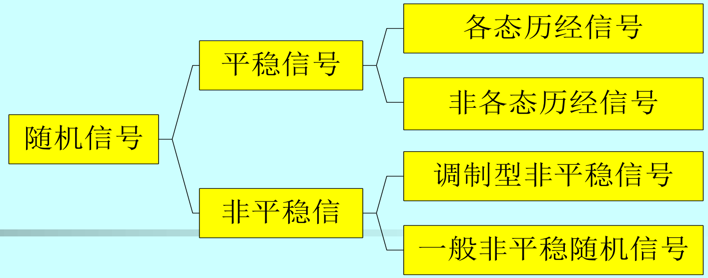
- 瞬态信号







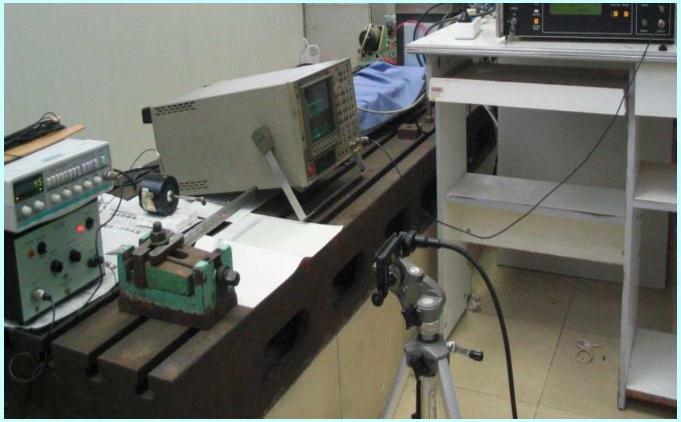
信号：随机信号

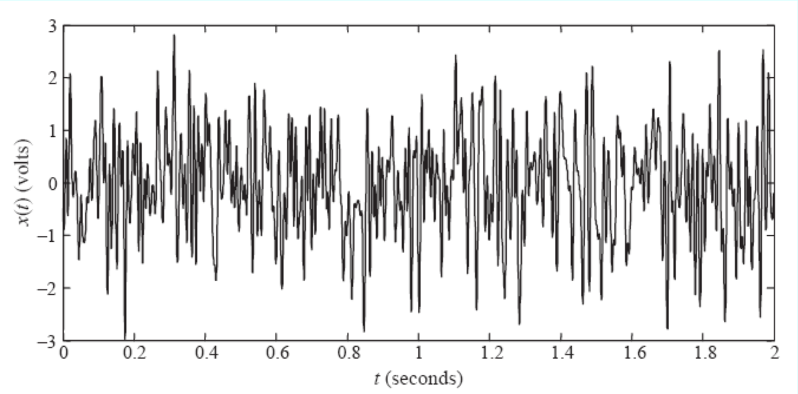


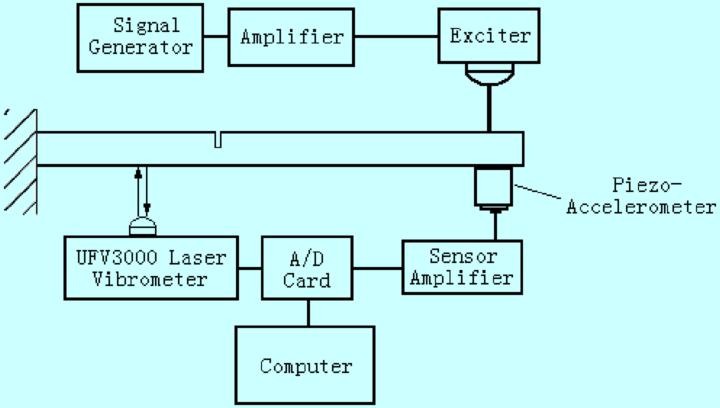
- 当描述系统性态的状态变量不能用确切的时间函数来表述，无法确定状态变量在某瞬时的确切数值，其物理过程具有不可重复性和不可预知性时，则称这样的物理过程是随机的。描述它们的测量数据就是随机信号，在数学上也称为随机过程
- 随机信号 => 平稳随机信号、非平稳随机信号
  - 如果一个随机信号的概率分布规律与统计特性不随时间的推移而变化，就称为平稳随机信号，反之即为非平稳随机信号
  - 随机信号处理主要研究其概率分布以及统计特性规律

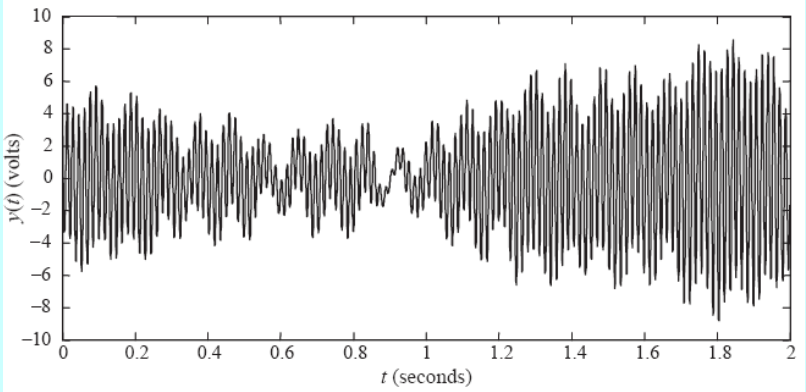
信号：随机信号示例

- 随机激励下的梁的响应





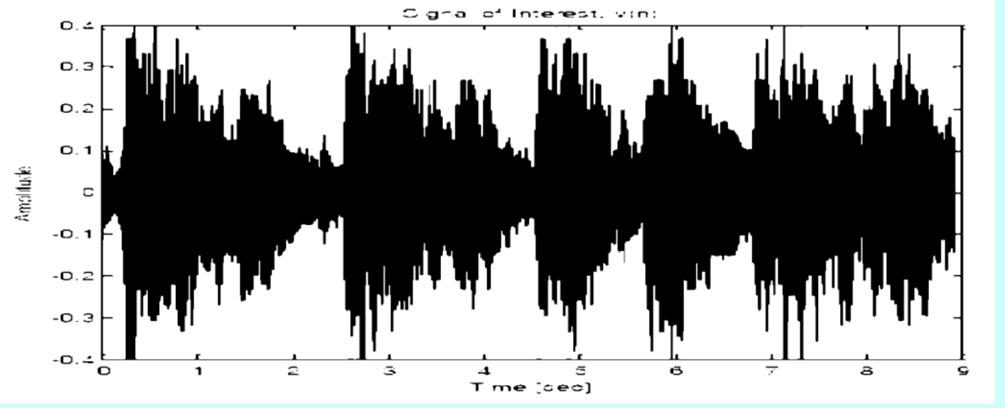




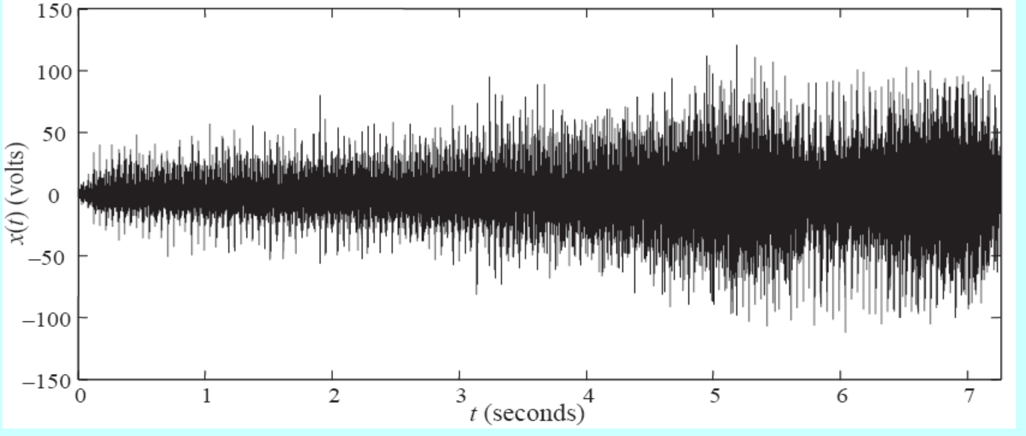
信号：随机信号示例

- 声音信号

Hallelujah



helicopter flyover noise

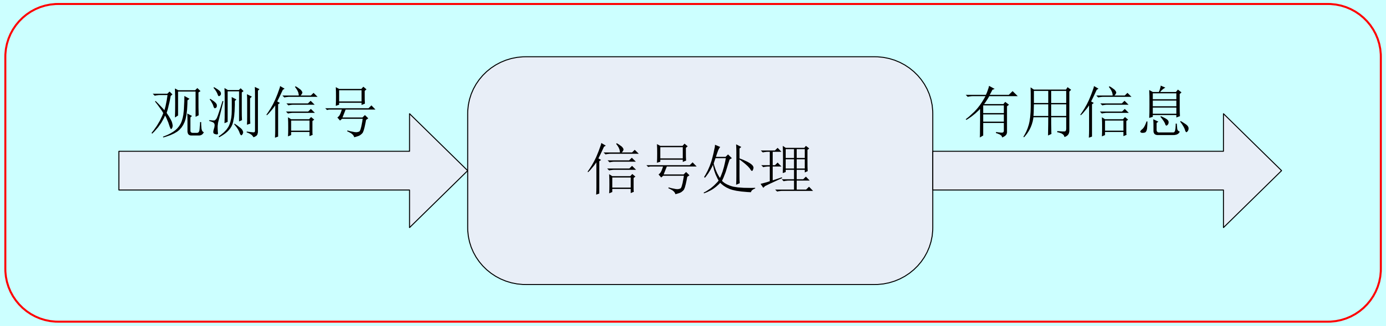


信号处理

- 信号
- 信号处理
- 典型信号及运算
- 信号的分解与重构

信号处理

- 原始信号往往只能提供十分有限的信息
- 因此，信号必须经过适当的加工处理才能够表现出我们所感兴趣的特征信息
- 信号处理
  - 对观测信号进行加工处理以便抽取出有用信息的过程
  - 用来对观测信号进行适当的转换，从而形成特征更加明显和易于分析的新“信号”的一种技术



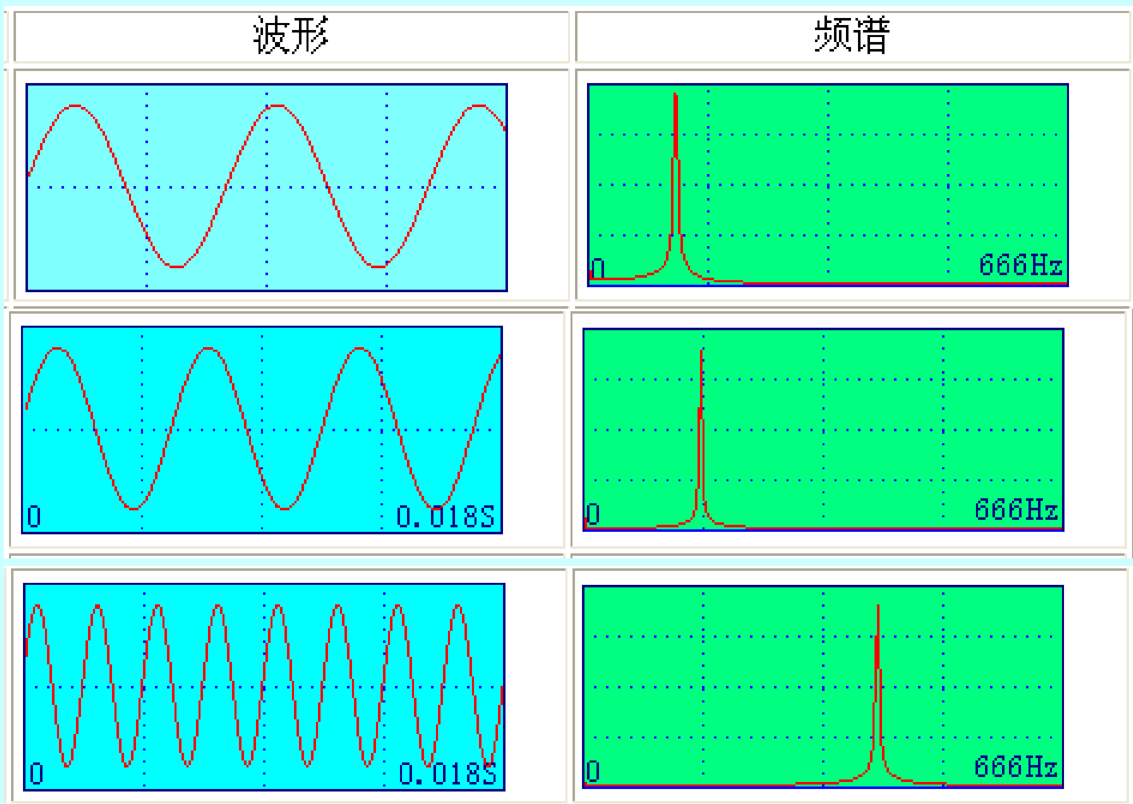
信号处理

- 信号处理的目的
  - 特征抽取：将信号转换成易于分析和识别的形式
  - 去伪存真：去除信号中冗余和次要成分，如噪声
  - 信号编码：把信号变成易于传输、交换和存储的形式
  - 信号解码：从编码信号中恢复出原始信号
- 本课程主要内容
  - 频谱分析 -- 特征抽取
  - 信号滤波 --去伪存真

信号处理

■ 频谱分析

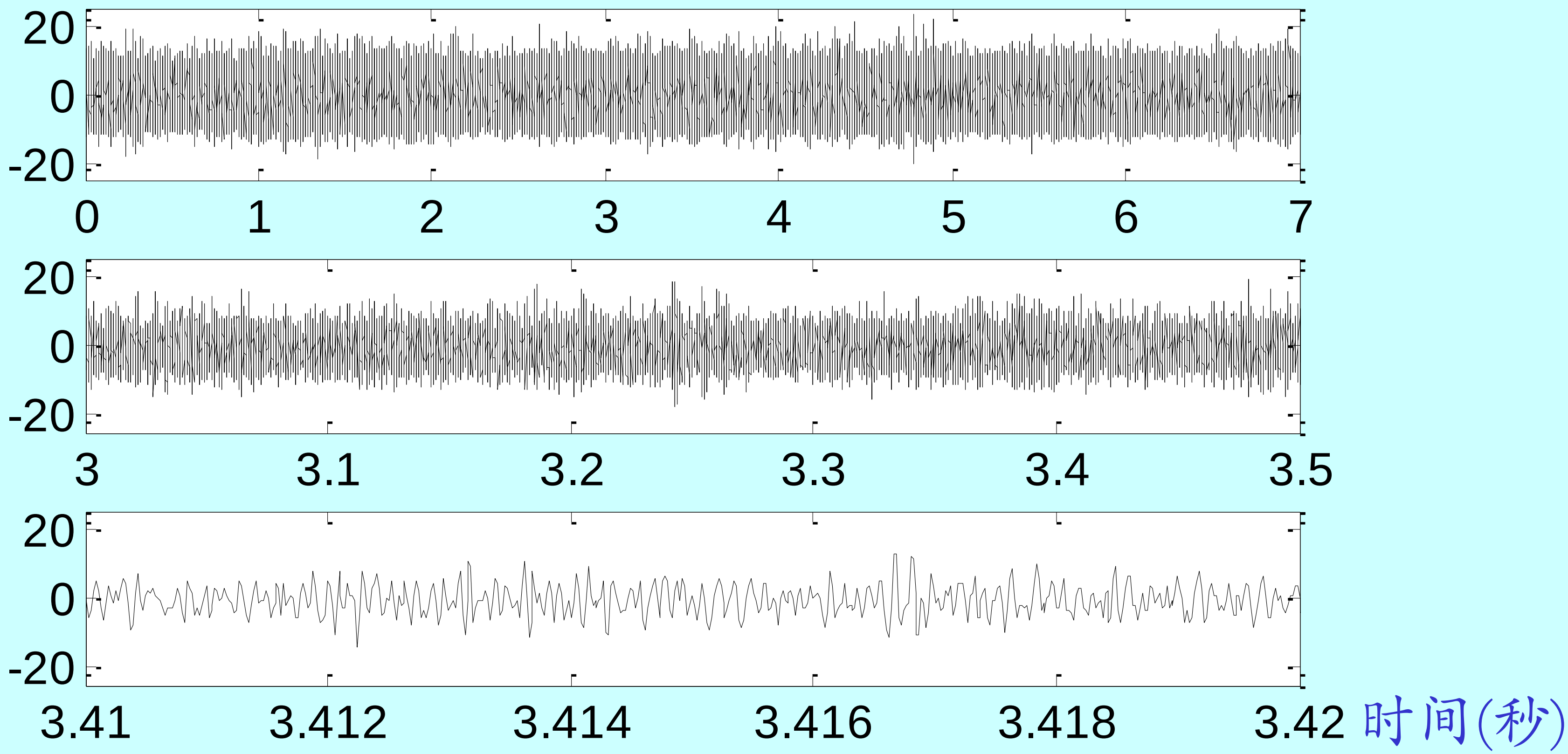
■ 时域和频域的对应关系



频域参数对应于设备转速、固有频率等参数，物理意义更明确。

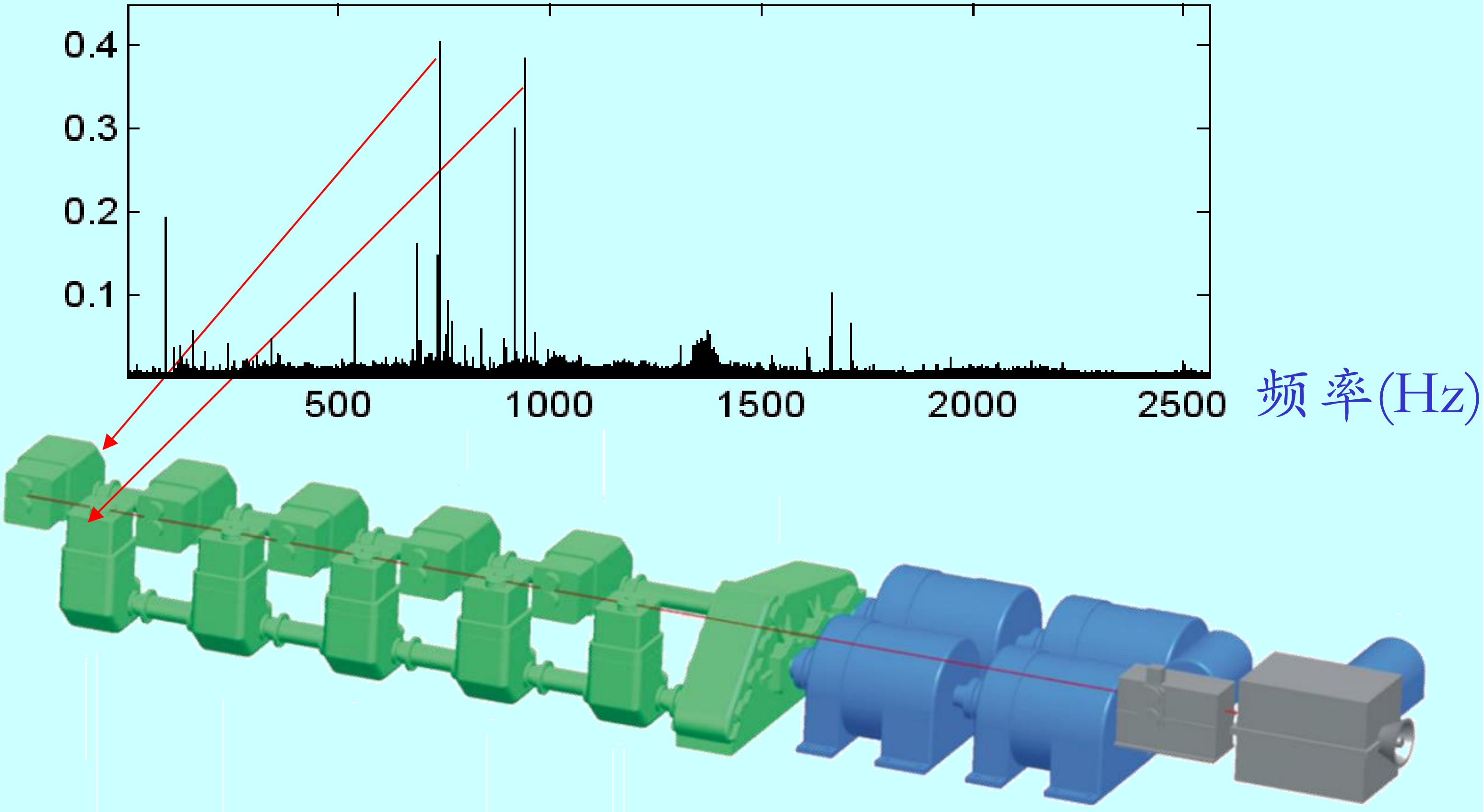
信号处理

- 频谱分析
  - 齿轮箱的振动时域数据



信号处理

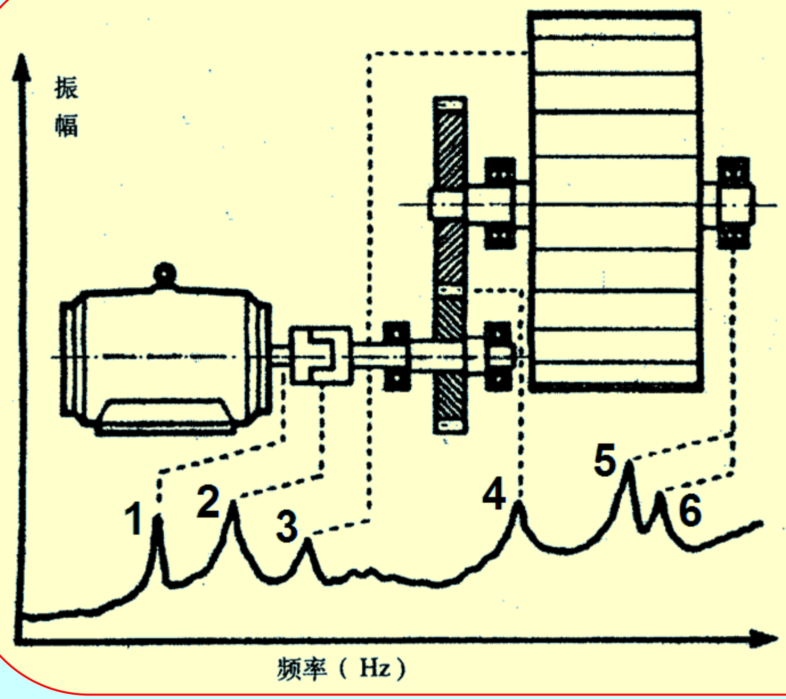
- 频谱分析
  - 齿轮箱的振动频域数据



信号处理

频谱分析

鼓风机组的频率与机组故障的对应关系



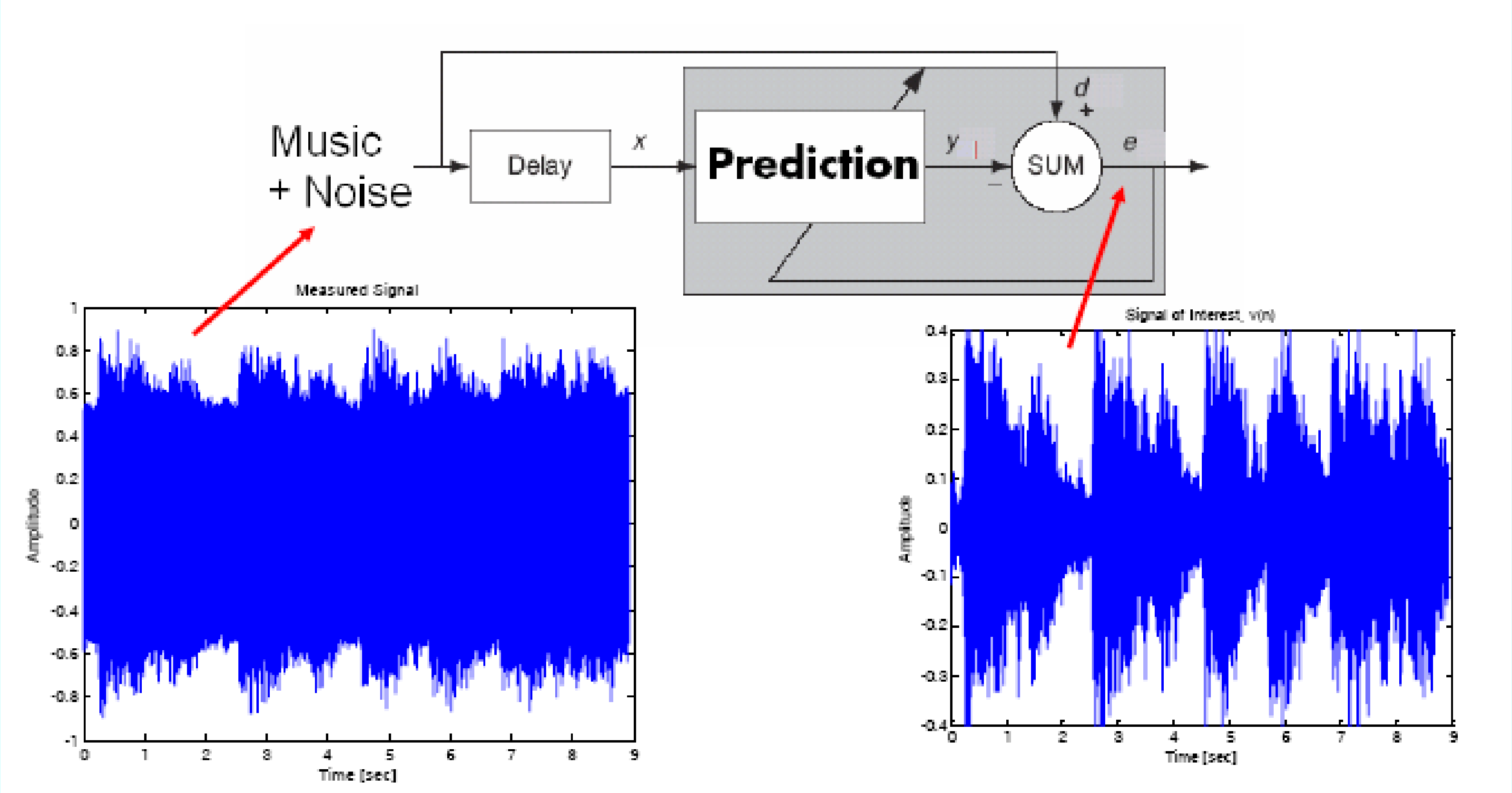
1 基频-不平衡
2 倍频-不对中
3 扇叶通过频率
4 齿轮啮合频率
5 轴承内圈特征频率
6 轴承外圈特征频率

信号处理

信号处理

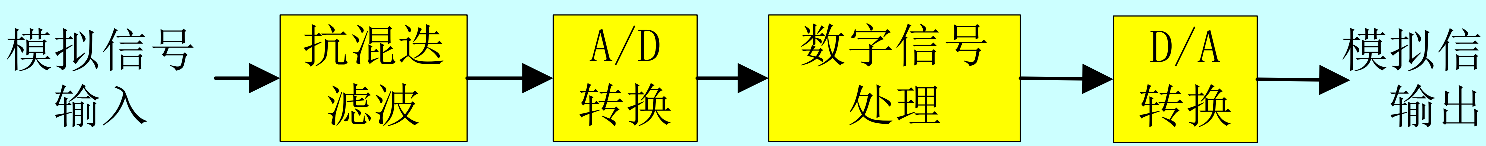
■ 信号滤波

■ 自适应滤除噪声



数字信号处理的基本流程

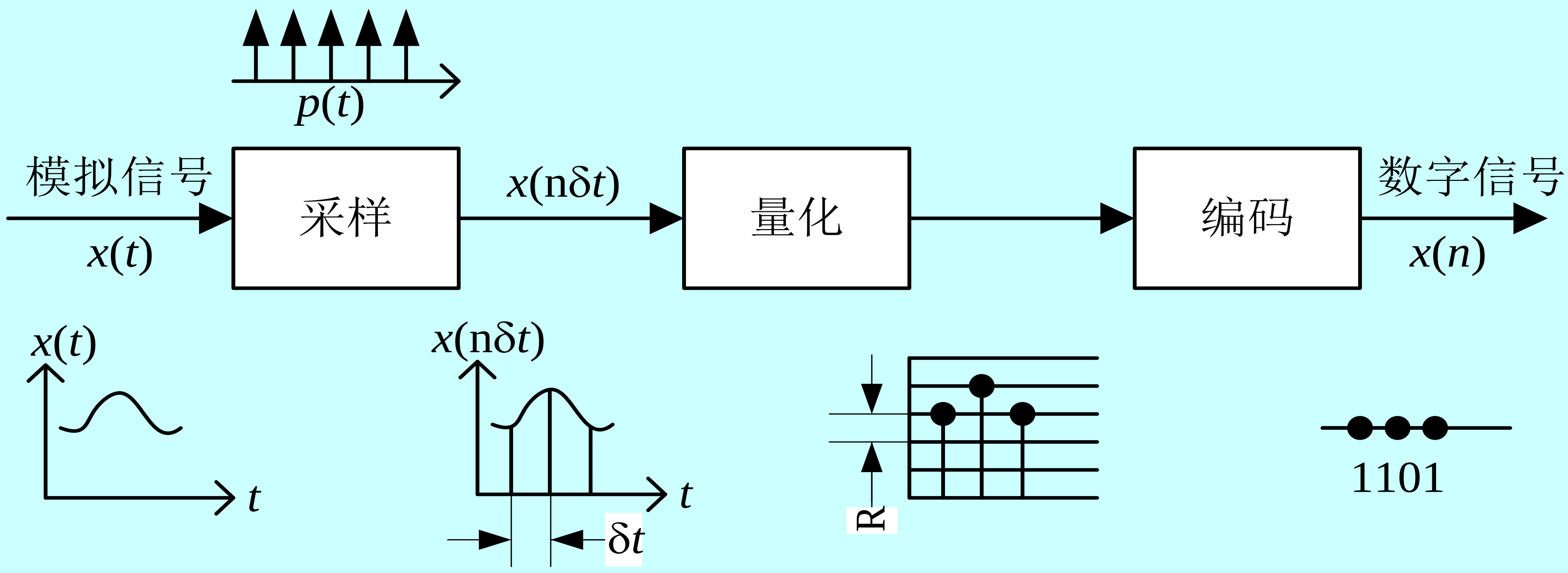
- 测量或观测得到的实际信号一般都是模拟信号，为了实现数字化处理，必须进行从模拟到数字的转换
- 数字信号处理（DSP）涉及三个步骤
  - **模数转换(A/D转换)**：自变量和函数值同时离散化的过程
  - **数字信号处理**：分析、数字滤波、识别、合成、...等
  - **数模转换(D/A转换)**：处理后的数字信号还原成模拟信号



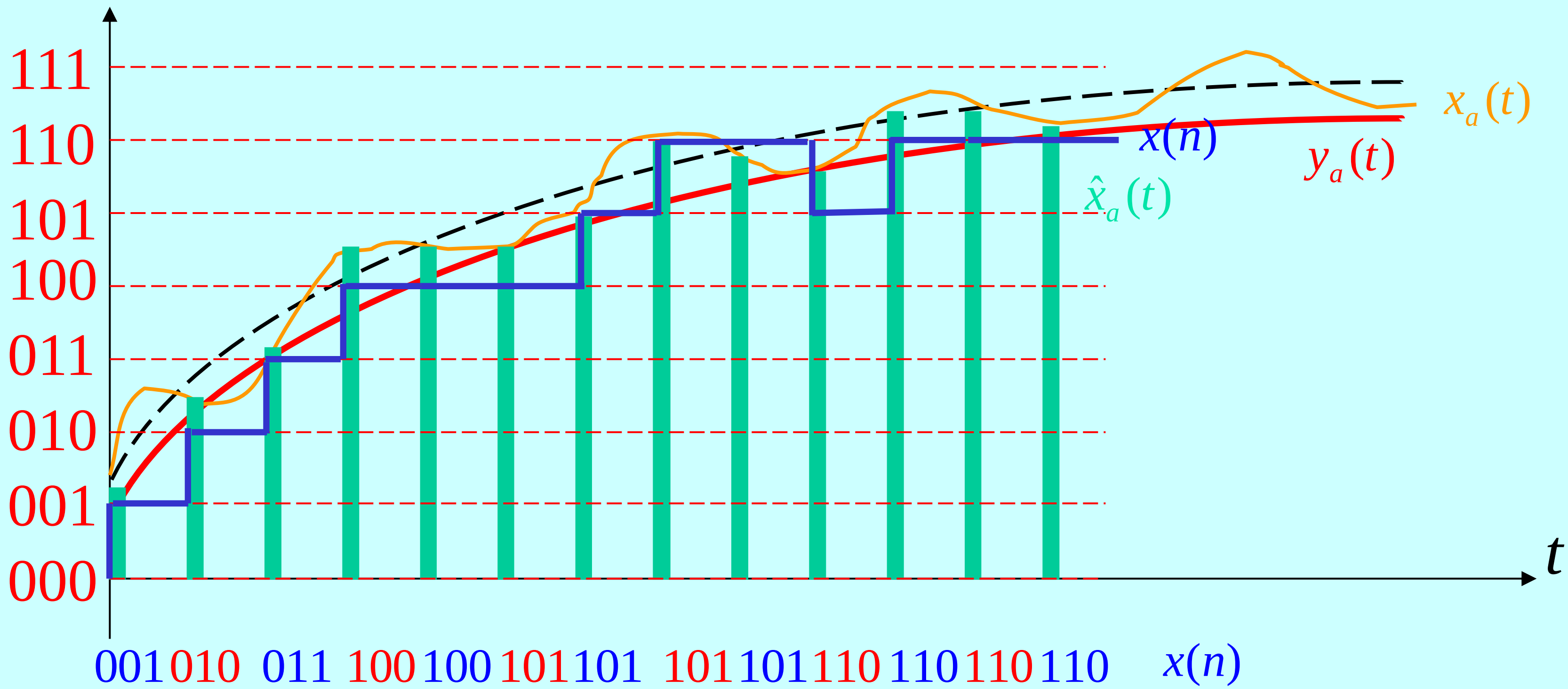
数字信号处理流程框图

A/D转换

- A/D转换包括三个过程
  - 采样：在等时间、等角度、...(间隔)离散化点对信号取值
  - 量化：对信号的幅值离散化
  - 编码：转换成便于计算机记忆存储的数字



A/D 与 D/A 转换过程示意

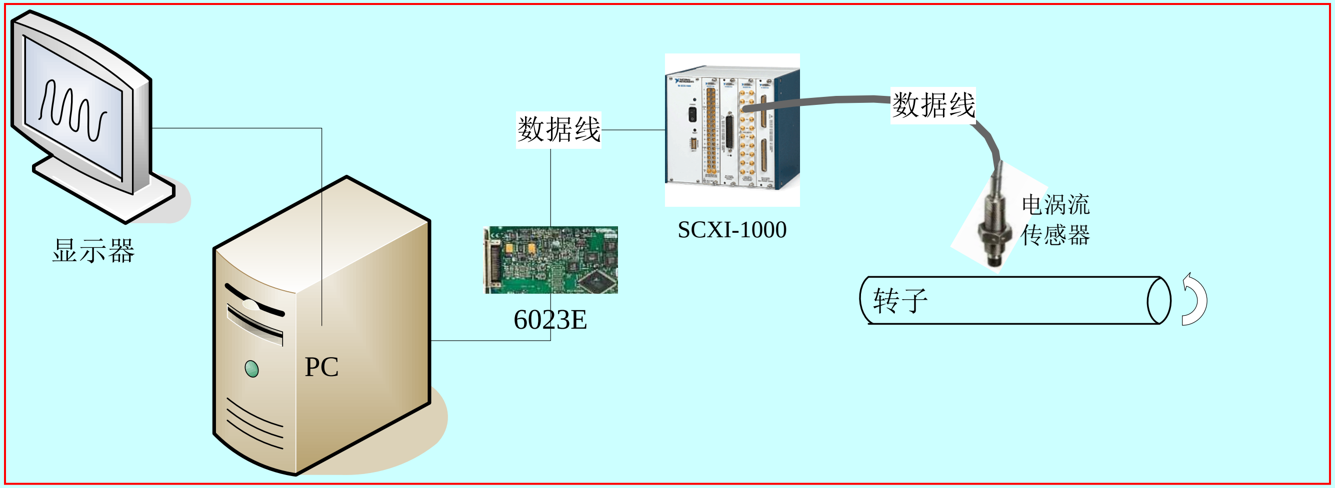


模拟输入 $x_a(t)$ $\xrightarrow{\text{采样}}$ $\hat{x}_a(t)$ $\xrightarrow[\text{编码}]{\text{量化}}$ 数字信号 $x(n)$ $\longrightarrow$ 模拟输出 $y_a(t)$

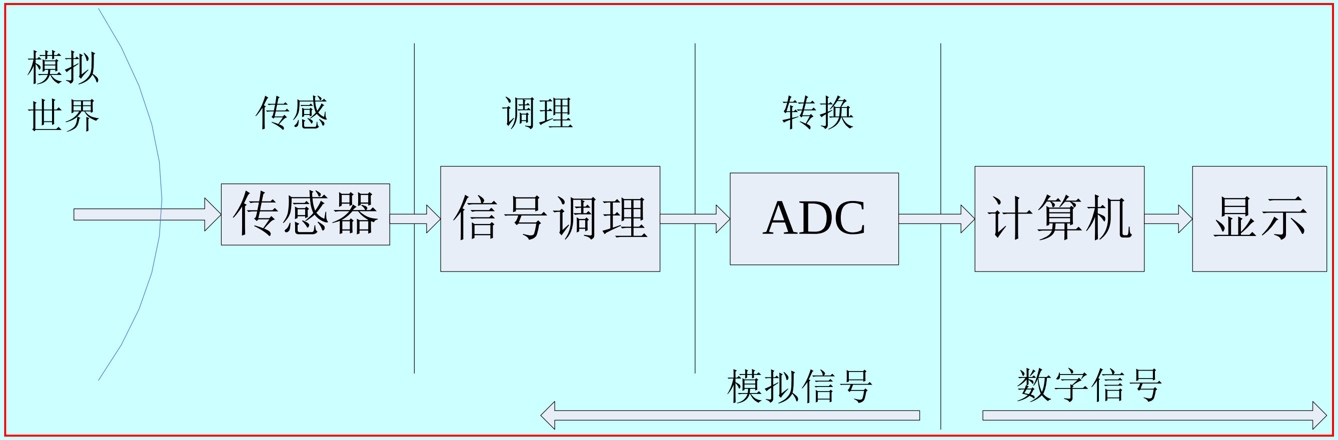
连续时间信号的采样

■ 数据采集系统的组成

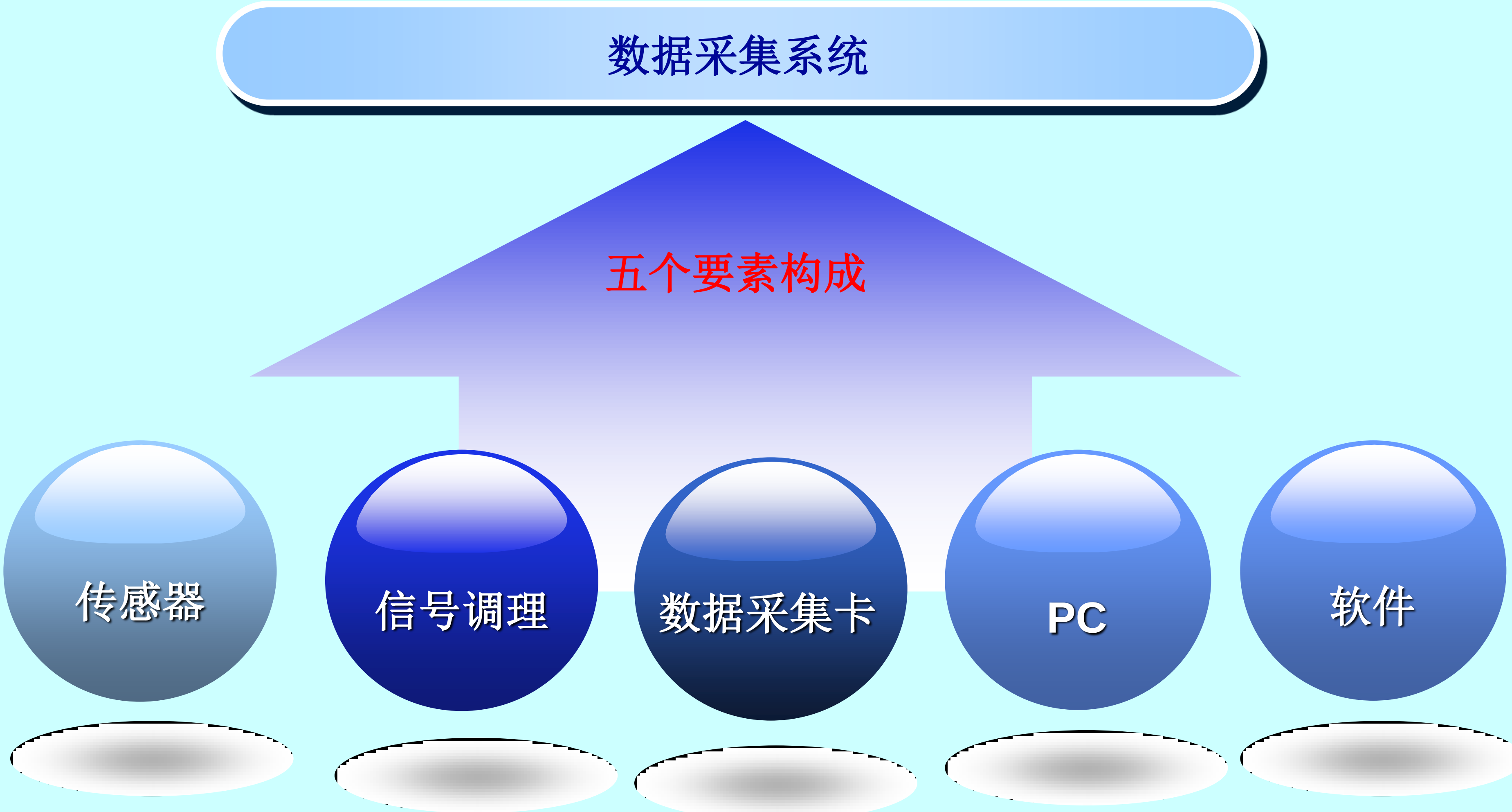
物理模型图



数据流图

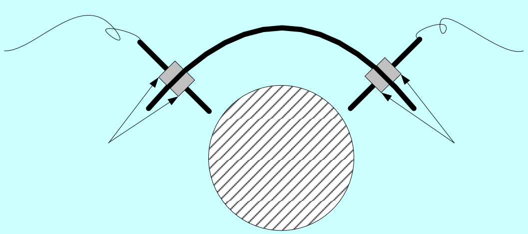


连续时间信号的采样



连续时间信号的采样

- 数据采集系统 -- 传感器
  - 传感器把现实世界中的各种类型的信号，如温度、压力、位移、速度、加速度等，转换为相应的电信号。
  - e.g. 热电偶、应力计、压力传感器、位移/加速度传感器、流速传感器
  - 显然，传感器获得的信号都是模拟信号(随时间连续变化)

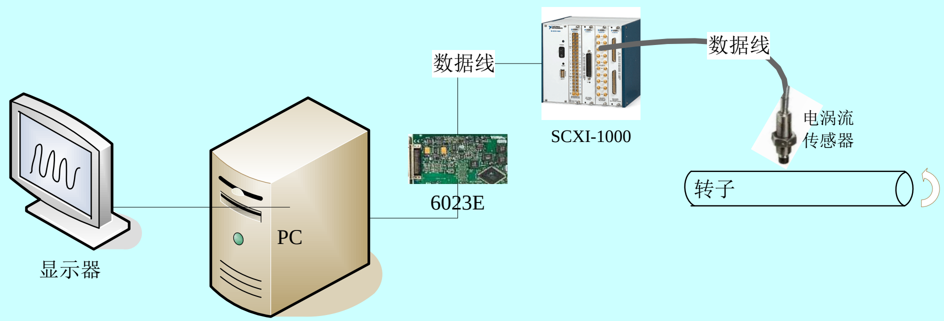


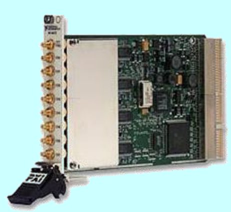
连续时间信号的采样

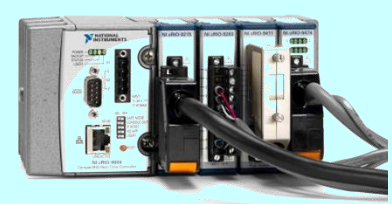
- 数据采集系统 -- 信号调理模块
  - 所谓信号调理也就是对信号进行隔离、滤波和放大、多路复用以及给传感/换能器提供激励(电压或电源)、桥路平衡和线性化等。
  - 重要概念：抗混叠滤波(低通滤波)
    - 在采样之前按照分析带宽进行低通滤波，以防止高频成分信号叠加到有用信号内而产生混叠

连续时间信号的采样

- 数据采集系统 -- 数据采集卡
  - 功能：实现数据采集。它是数据采集硬件系统中最基本的部分
  - 数据采集卡的最重要组成部分就是A/D转换器(模数转换器)







连续时间信号的采样

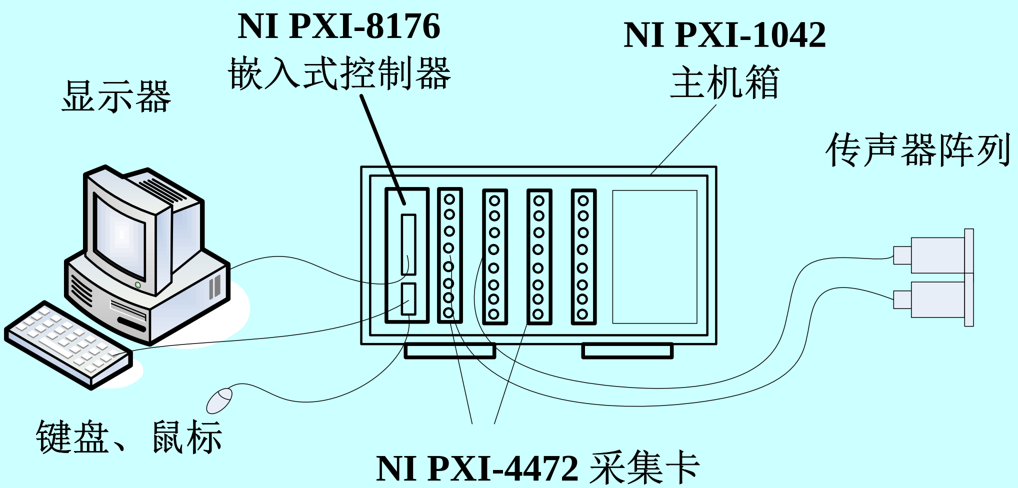
- 数据采集系统 -- 软件
  - 软件使PC和数据采集硬件形成了一个完整的数据采集、分析和显示系统
  - 在某种开发平台上，使用某种程序设计语言，调用数据采集卡(硬件)驱动程序库中的函数，来编写实现数据采集功能的代码
    - 与操作系统兼容性
    - 与编程语言的兼容性
    - 驱动程序的功能是否满足数据采集系统要求

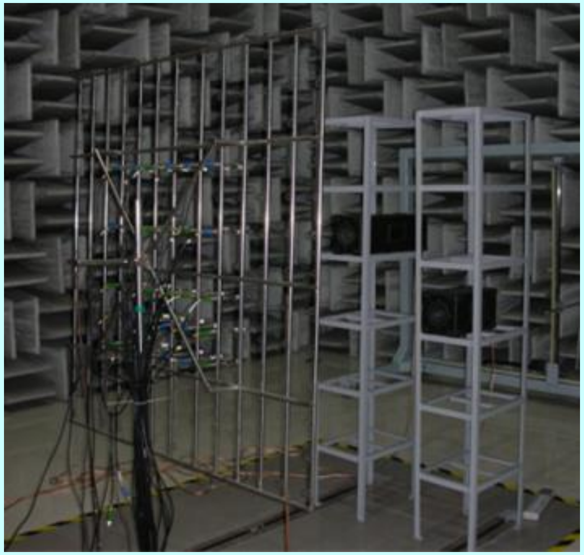
连续时间信号的采样

- 完成的数据采集系统的软件部分组成
  - 按照不同客户的需要，你的采集系统可以包含不同的功能：
    - 数据采集 (最根本的部分。调用驱动函数，实现数据采集)
    - 波形显示 (在数据采集的同时，可以显示实时波形，也就是示波器的作用)
    - 数据分析 (对实时的数据进行分析，如求其均值，P-P值，FFT等)
    - 数据保存 (将实时采集到的数据保存到数据库或文件)

连续时间信号的采样

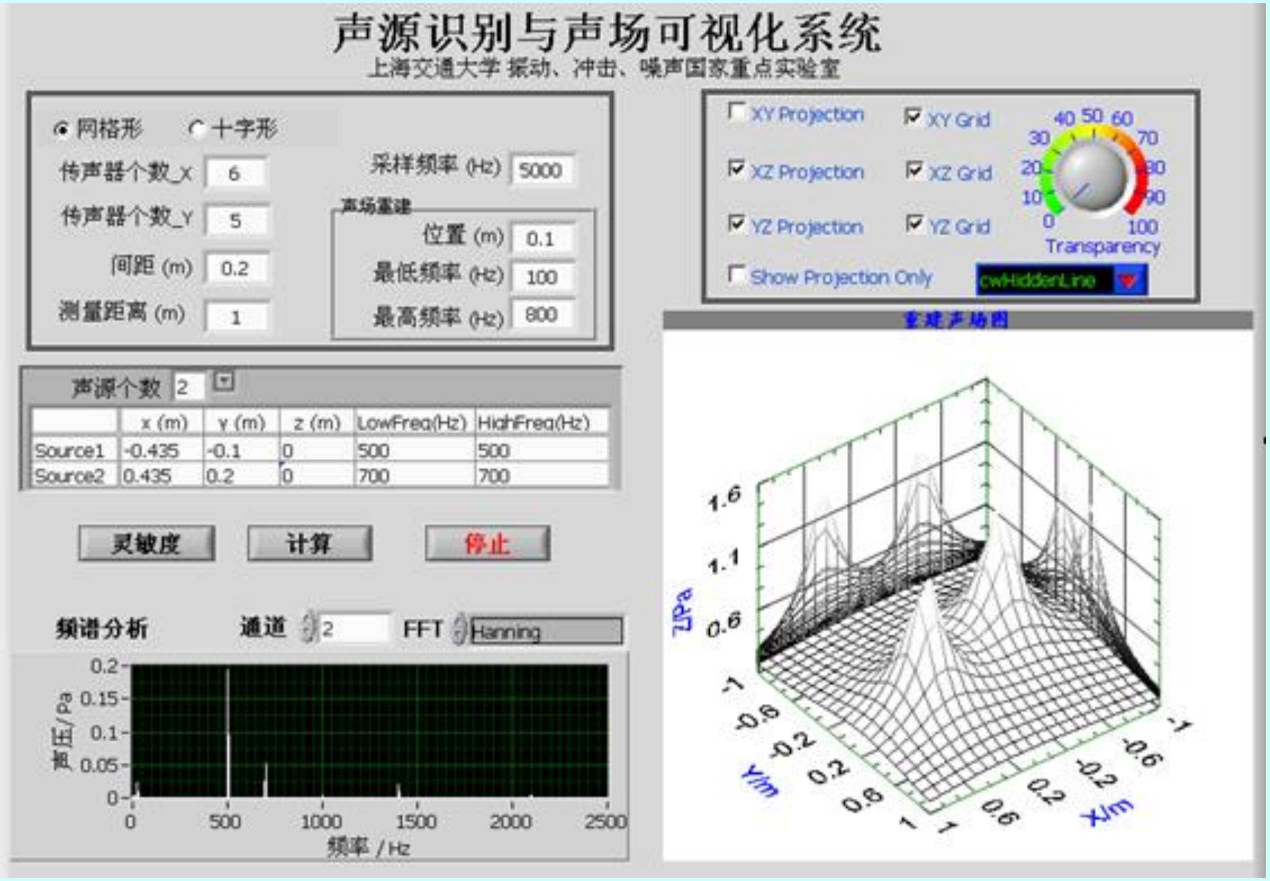
- 实例：基于传声器阵列的声场重建与可视化
  - **硬件配置**
    - 传声器阵列
    - PXI采集系统

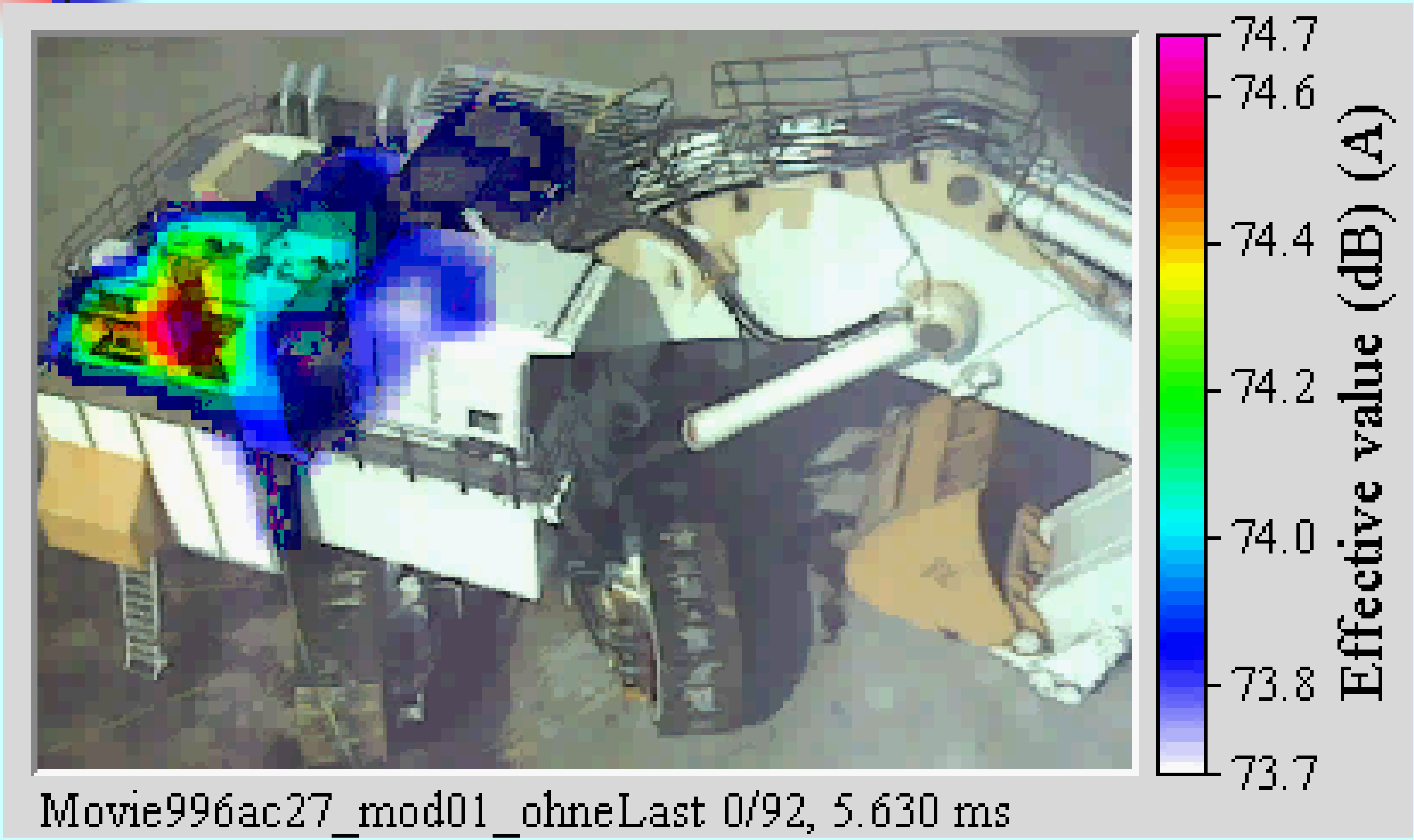




连续时间信号的采样

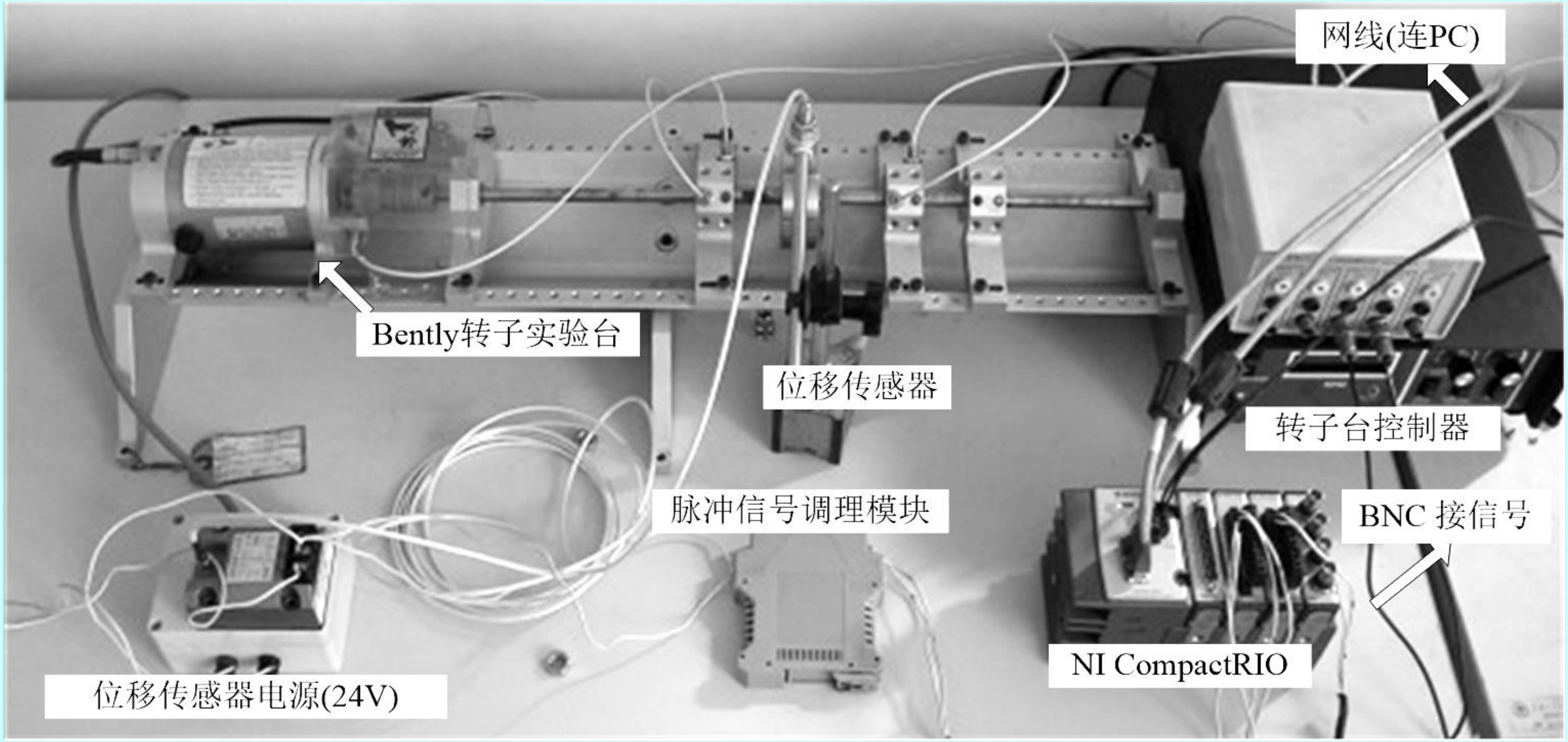
- 实例：基于传声器阵列的声场重建与可视化




74.7
74.6
74.4
74.2
74.0
73.8
73.7
Effective value (dB) (A)
Movie996ac27_mod01_ohneLast 0/92, 5.630 ms

连续时间信号的采样

- 实例：实验室在线监测系统测试硬件平台



数字信号处理的特点

- 相对于模拟信号处理具有6方面的优点
  - 高精度；高稳定性；高度灵活性；便于大规模集成；高性能；多维处理
- 高精度
  - 模拟系统(如模拟滤波器)是利用电阻、电容、电感等元器件实现的，精密元器件要达到10^{-3}以上的精度已很困难
  - 数字系统，若采用16位字长，计算精度可达10^{-5}量级；采用字长32位，精度可达10^{-10}量级

数字信号处理的特点

- 高稳定性
  - 模拟系统中，元器件值会随环境条件变化(如R、L、C随温度变化)，造成系统性能不稳定
  - 数字系统，只有“0”和“1”两种电平，一般不随环境条件(如温度、电磁感应等)变化，工作稳定
- 高度灵活性
  - 模拟系统，系统特性取决于其中的各个元件，要改变系统特性，必须改变其中的元件
  - 数字系统，只要改变系统存储器中的数据，即可改变系统参数，从而改变系统特性

数字信号处理的特点

- 便于大规模集成
  - 数字部件有高度的规范性，便于大规模集成和大批量生产，而且体积小、重量轻
- 高性能
  - 可获得很高的性能指标。例如，FIR可以实现严格的相位控制，这在模拟系统中是很难达到的
- 多维处理
  - 数字系统的一个主要特点——可具备庞大的存储单元，可存储数帧图象信号或多路阵列信号，实现二维或多维处理，如二维滤波或二维谱分析等

数字信号处理的研究范畴

- 数字信号处理(DSP)以经典理论体系(数学、系统)为理论基础，同时又是一系列新兴学科的理论基础
- DSP在理论上涉及广泛
  - 数学领域的基本工具：微积分、概率统计、随机过程、高等代数、数值分析、复变函数
  - 相关学科：与最优控制、通信理论、故障诊断紧密相连
  - 新兴学科的理论基础：人工智能、模式识别、神经网络
  - 算法实现：与计算机科学、微电子技术密不可分
- DSP已经形成一套较为完整的理论体系

数字信号处理的研究范畴

- DSP的主要研究内容包括（10个方面）：
  - 信号采样(A/D技术、采样定理、量化噪声分析)
  - 离散信号分析(时域和频域分析、各种变换技术、信号特征抽取)
  - 离散系统分析(系统描述、系统的单位采样响应、转移函数及频率特性)
  - 信号处理的快速算法(FFT、快速卷积与相关)
  - 信号估值(各种估值理论、相关函数与功率谱估计)
  - 滤波技术(各种数字滤波器的设计与实现)
  - 信号建模(常用模型有：AR、MA、ARMA、PRONY)
  - 特殊算法(抽取、插值、奇异值分解、反卷积、信号重建)
  - 信号处理技术和算法实现(软件与硬件技术)
  - 信号处理技术的应用

数字信号处的应用

- DSP自20世纪60年代中期问世以来，被公认为是：应用范围最广、发展速度最快、成效最为显著的新兴学科之一
- 应用领域覆盖
  - 工程技术、生物医学、农业技术、…
  - 经济、军事、航空航天、…
  - 日常生活…
- 作业：举例说明DSP在自己专业领域中的应用，如没有，可举一些生活中的应用

典型信号及运算

- 信号
- 信号处理
- 典型信号及运算
- 信号的分解与重构

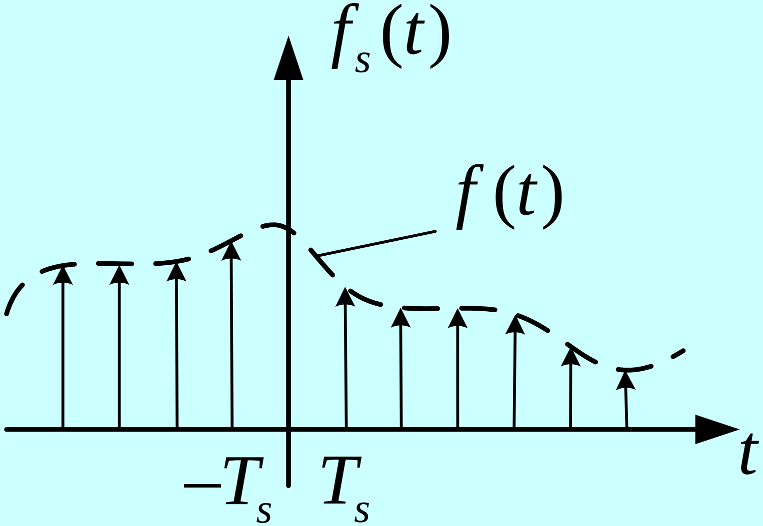
典型连续信号

- 单位冲激信号-δ函数
  - 定义

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad (t \neq 0) \end{cases}$$

  - δ函数的抽样筛选特性

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - nT_s)$$

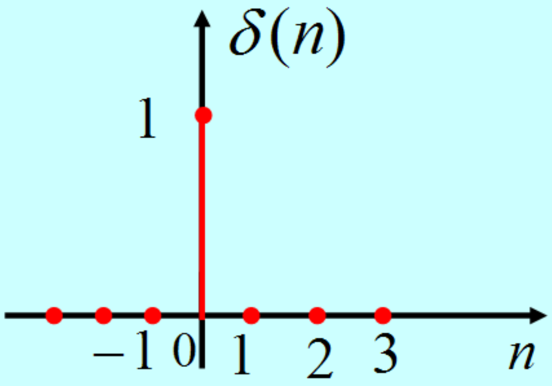


离散时间序列

单位冲激序列(单位脉冲序列)

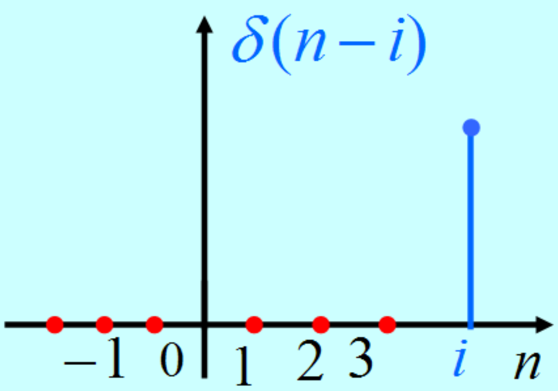
- 定义及图形

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$



- 单位冲激序列的移位

$$\delta(n-i)=\begin{cases}1 & n=i\\ 0 & n\neq i\end{cases}$$

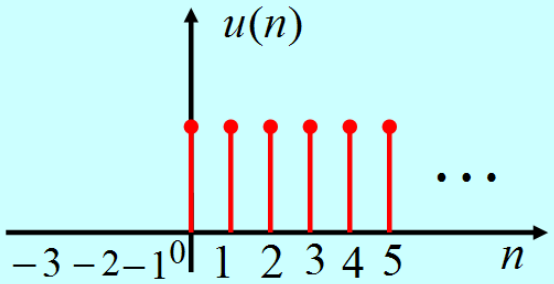


离散时间序列

单位阶跃序列

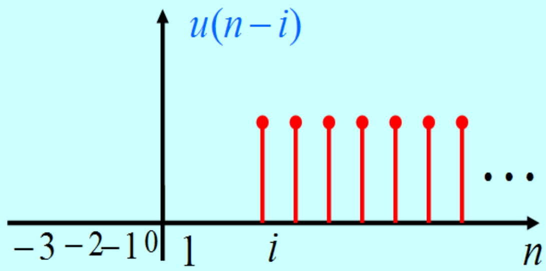
- 定义及图形

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$



- 移位

$$u(n-i)=\begin{cases}1 & n\geq i\\ 0 & n<i\end{cases}$$



- 与单位冲激序列的关系

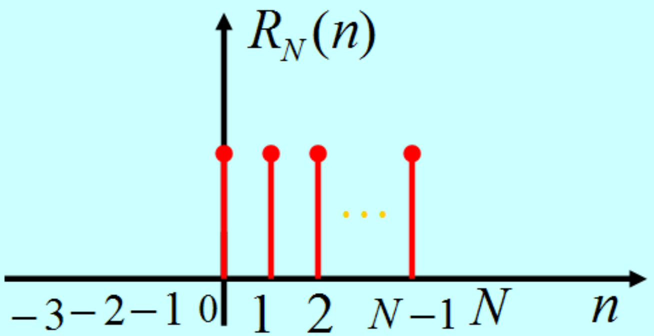
$$\begin{cases}u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)\\ \delta(n)=u(n)-u(n-1)\end{cases}$$

离散时间序列

矩形脉冲序列

定义及图形

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & n<0, n\ge N\end{cases}$$



与单位阶跃序列及单位冲激序列的关系

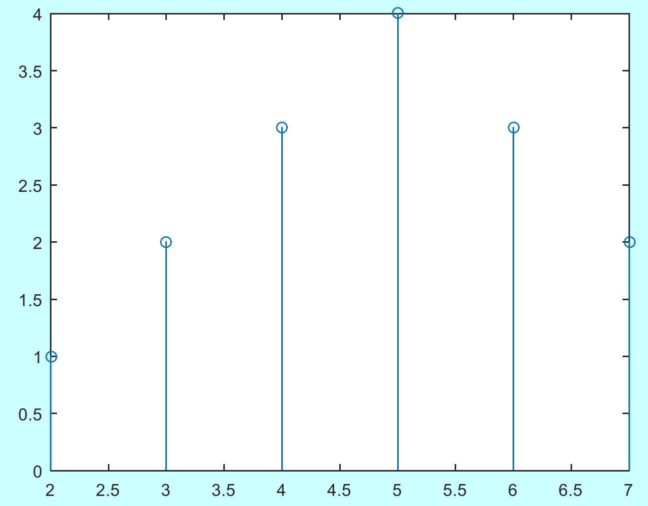
$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

$$R_N(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\delta(n-m)=\delta(n)+\delta(n-1)+\cdots+\delta[n-(N-1)]$$

离散时间序列

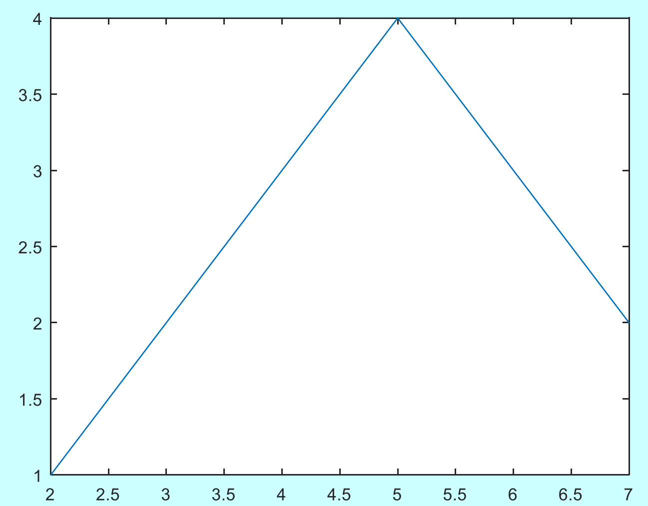
- 离散序列的作图
  - 直接表现离散序列

```
n=[2 3 4 5 6 7];
x=[1 2 3 4 3 2];
stem(n,x);
```



  - 将图形表现为连续曲线

```
n=[2 3 4 5 6 7];
x=[1 2 3 4 3 2];
plot(n,x);
```



离散时间序列

- 离散序列的作图
  - 单位冲激序列

```
n=7;
x=[1 zeros(1,n-1)];
stem(x)
```

  - 矩形脉冲序列

```
N=6;
x=ones(1,N);
stem(x)
```

离散时间序列

实指数序列

定义

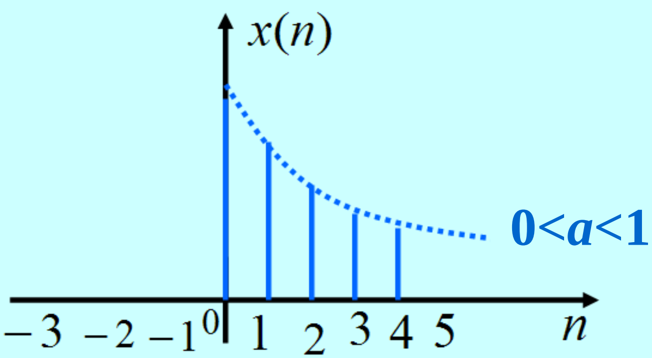
$$x(n)=a^n u(n)=\begin{cases} a^n & n\ge 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$$

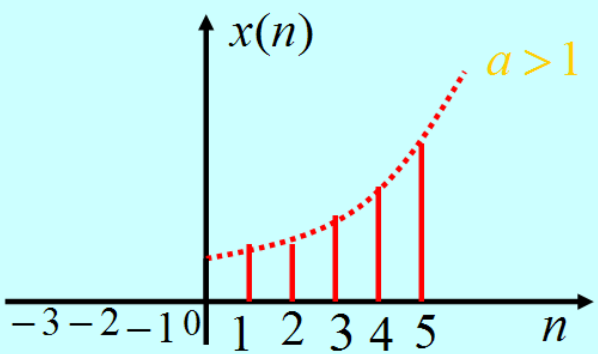
a为实数

当$|a|>1$时序列是发散的；

当$|a|<1$时序列是收敛的。

图形





离散时间序列

- 正弦序列

$$x(n) = A\sin(\omega n + \varphi)$$

- 复指数序列

$$x(n) = Ae^{j\omega n} = A\cos(\omega n) + jA\sin(\omega n)$$

- 周期序列
  - 如果对所有n存在一个最小的正整数N，使下面等式成立：

$$x(n) = x(n+N), \qquad -\infty < n < \infty$$

则称序列$x(n)$为周期序列，周期为N（整数）

离散时间序列运算

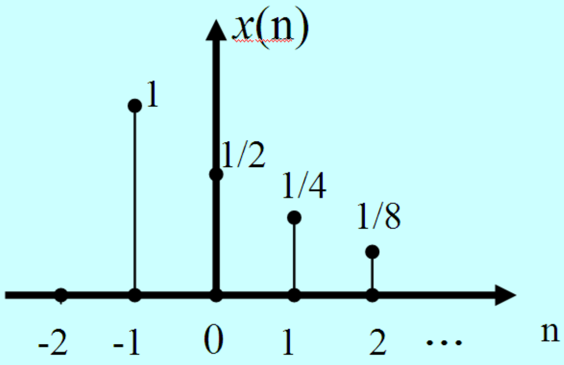
- 相加 $z(n)=x(n)+y(n)$
  - 新序列＝两序列样值逐项对应相加
- 相乘 $z(n)=x(n)\cdot y(n)$
  - 新序列＝两序列样值逐项对应相乘
- 移位(延时) $z(n)=x(n\pm m)$
  - 新序列＝原序列逐项依次左移或右移m位
- 翻转(折迭) $z(n)=x(-n)$
  - 新序列＝原序列相对纵轴反折波形
- 尺度变换 $z(n)=x(an)$
  - 新序列＝原序列的波形在n轴上压缩或扩展

离散时间序列运算

移位(延时)运算举例

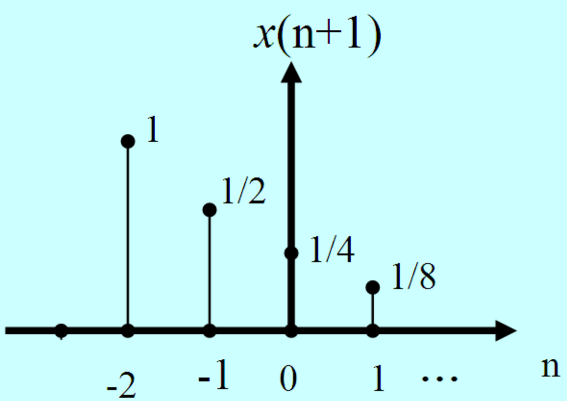
- 原序列

$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n, & n\geq -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$



- 序列左移一位

$$x(n+1)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n+1}, & n+1\geq -1\\ 0, & n+1<-1\end{cases}$$

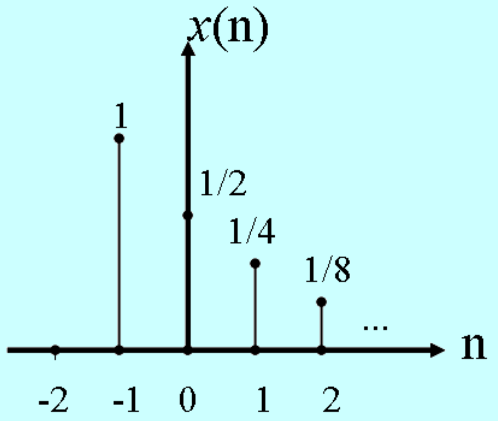


离散时间序列运算

翻转(折迭)运算举例

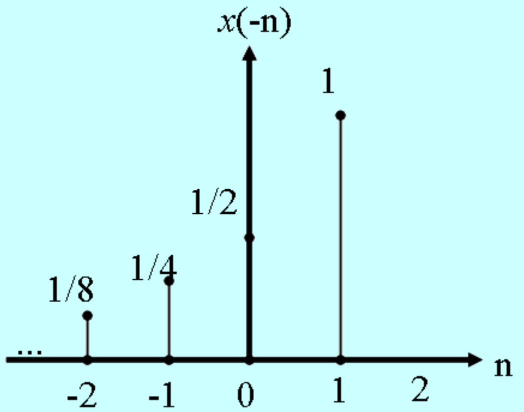
- 原序列

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2})^n, & n\geq -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$



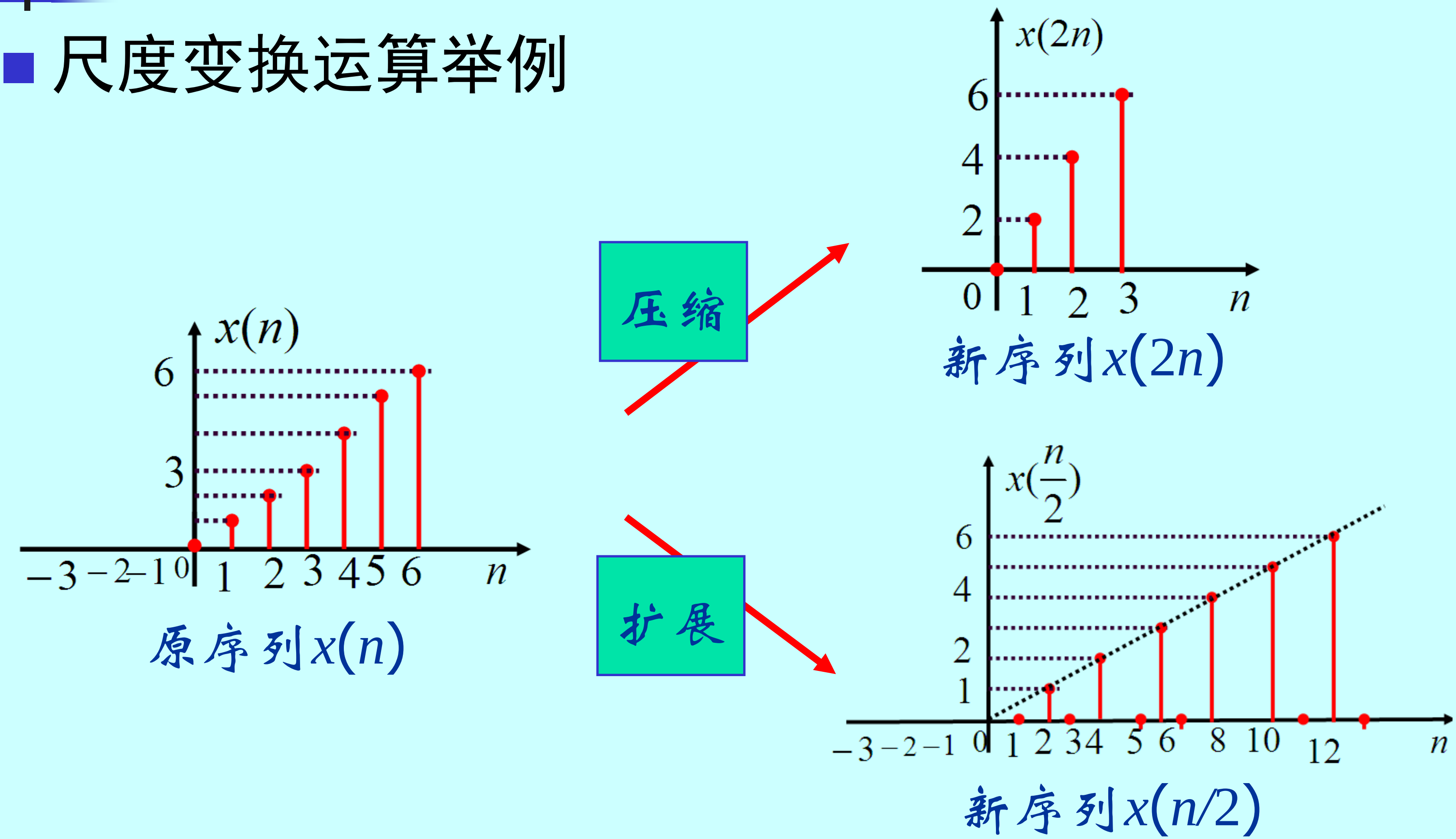
- 序列翻转

$$x(-n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2})^{-n}, & n\leq 1\\ 0, & n>1\end{cases}$$



离散时间序列运算

- 尺度变换运算举例



离散时间序列运算

- 累加 $$z(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$$
  - 新序列 = 原序列中的所有样值累加至第n样点
- 能量 $$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|^2$$ → 能量(有限)信号
  - 能量 = 序列中所有样值的绝对值平方和
- 功率 $$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\left|x(n)\right|^2$$ → 功率(有限)信号
  - 功率 = 能量/信号长度(时间)
- 奇偶分解 $$x(n)=x_o(n)+x_e(n)$$

$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)] \qquad x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$$

线性卷积(convolution)

连续信号卷积

- 函数 $x(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积定义为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau=x(t)*h(t)=\left(x*h\right)(t)$$

- 性质

$$\boxed{x*h=h*x}\qquad \boxed{x*\left(h_1+h_2\right)=x*h_1+x*h_2}\qquad \boxed{\left(x*h_1\right)*h_2=x*\left(h_1*h_2\right)}$$

$$\begin{aligned}\left(\left(x*h_1\right)*h_2\right)(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(\lambda)h_1(\tau-\lambda)\mathrm{d}\lambda\right]h_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}x(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty}h_1(\tau)h_2(t-\lambda-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\lambda\\&=\int_{-\infty}^{\infty}x(\lambda)\left[\left(h_1*h_2\right)(t-\lambda)\right]\mathrm{d}\lambda=\left(x*\left(h_1*h_2\right)\right)(t)\end{aligned}$$

相关运算(correlation)

连续信号相关运算

- 函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的互相关函数定义为

$$r_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y^{*}(t-\tau)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)y^{*}(t)\mathrm{d}t$$

$$r_{yx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)x^{*}(t-\tau)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}y(t+\tau)x^{*}(t)\mathrm{d}t$$

$$r_{xy}(\tau)=r_{yx}^{*}(-\tau)$$

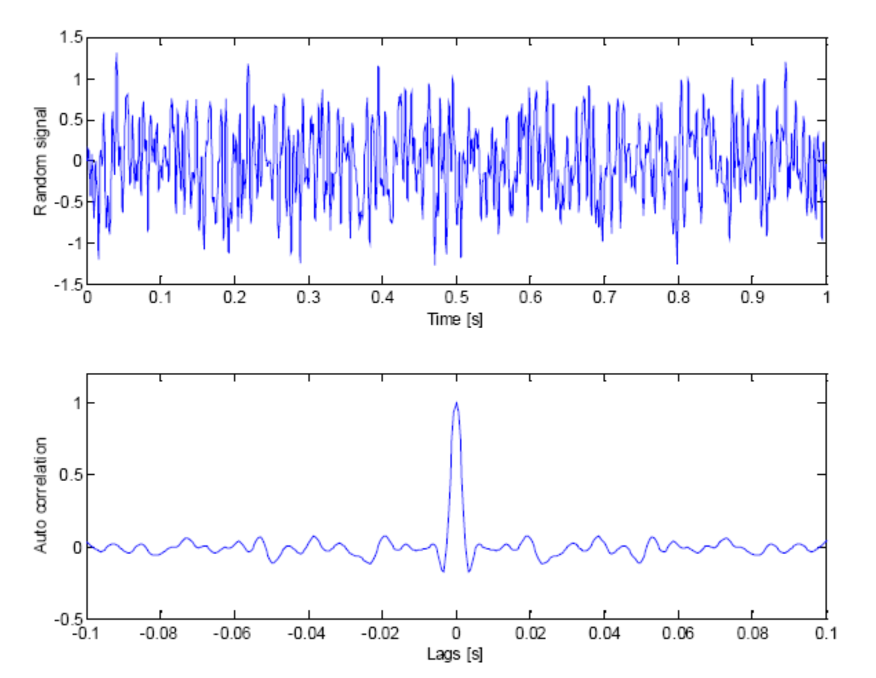
- 函数 $x(t)$ 的自相关函数定义为

$$r_{x}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)x^{*}(t-\tau)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)x^{*}(t)\mathrm{d}t$$

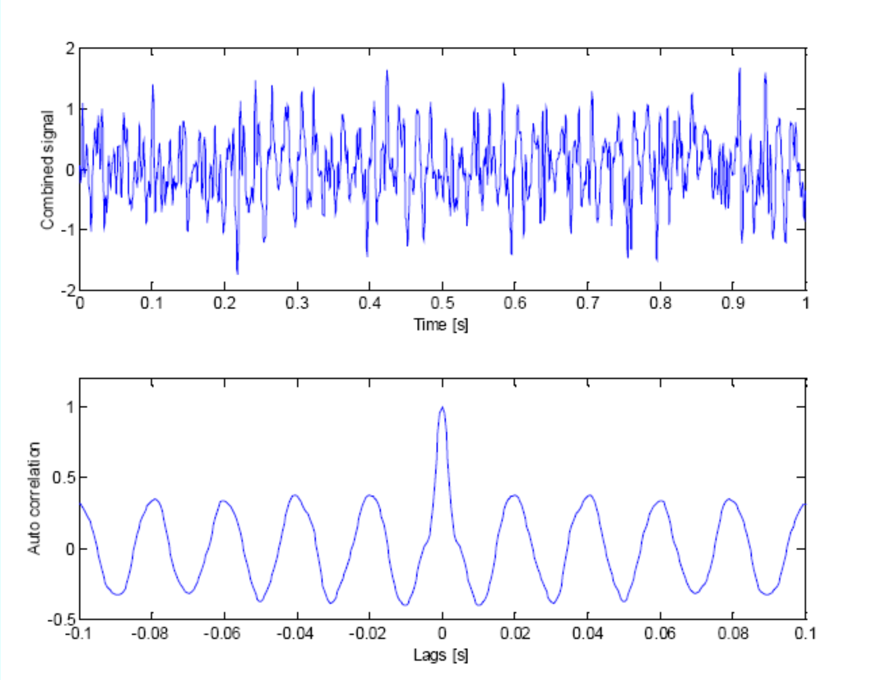
相关运算

■ 自相关函数应用

- 自相关函数有助于检测混淆在随机过程中确定性周期信号



宽带随机信号及其自相关函数



宽带随机信号+周期信号及其自相关函数

信号的分解与重构

- 信号
- 信号处理
- 典型信号及运算
- 信号的分解与重构

信号的分解与重构

- 信号的分解是将一个信号$f(x)$与一系列函数$\{e_n(x)\}$做内积运算所得到的值

$$c_n = \langle f, e_n \rangle, \quad n \in Z$$

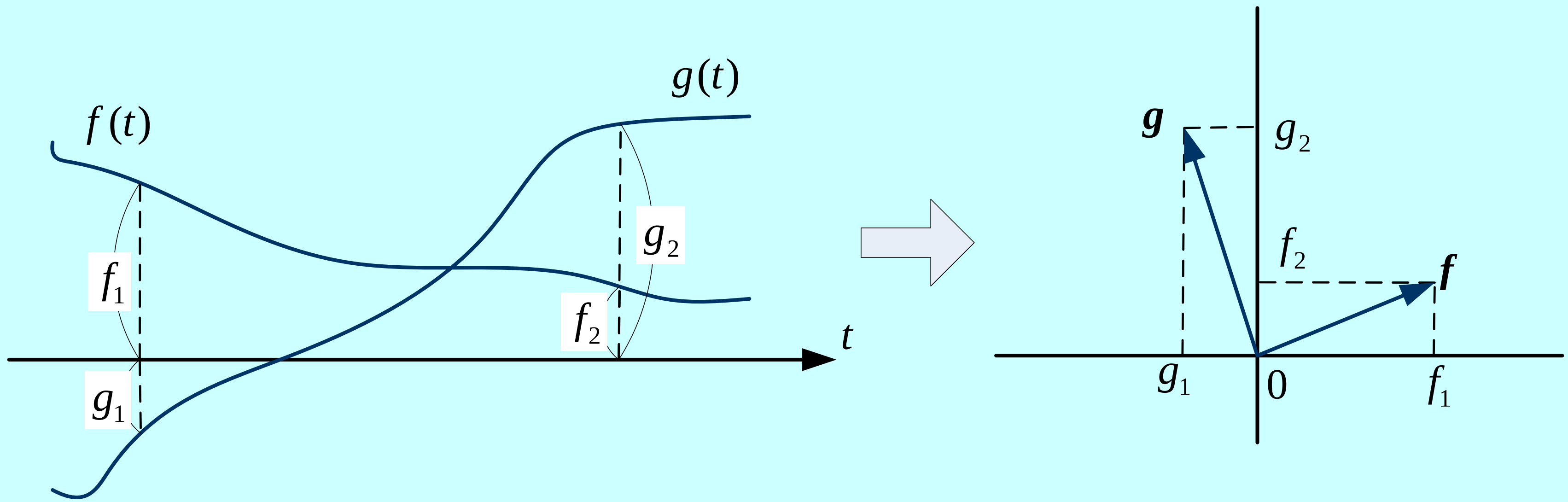
  - C_n称之为分解系数；它是$f(x)$在基函数上的投影，因而能给出$f(x)$中含有的与$e_n(x)$相关联的信息

- 信号的重构是在不对分解系数做任何加工的条件下，根据分解系数得到原信号

$$f(x) = \sum_n c_n \tilde{e}_n(x) = \sum_n \langle f, e_n \rangle \tilde{e}_n(x)$$

2维向量的距离和内积

- 2维向量
  - 设对某信号$f(t)$采样，得到两个值f_1和f_2。同样也对某信号$g(t)$采样，得到两个值g_1和g_2。现在，每个信号序列是两个元素的向量，即信号由2维向量确定，将向量分别记为$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$，可表示为$\boldsymbol{f}=(f_1, f_2), \boldsymbol{g}=(g_1, g_2)$。

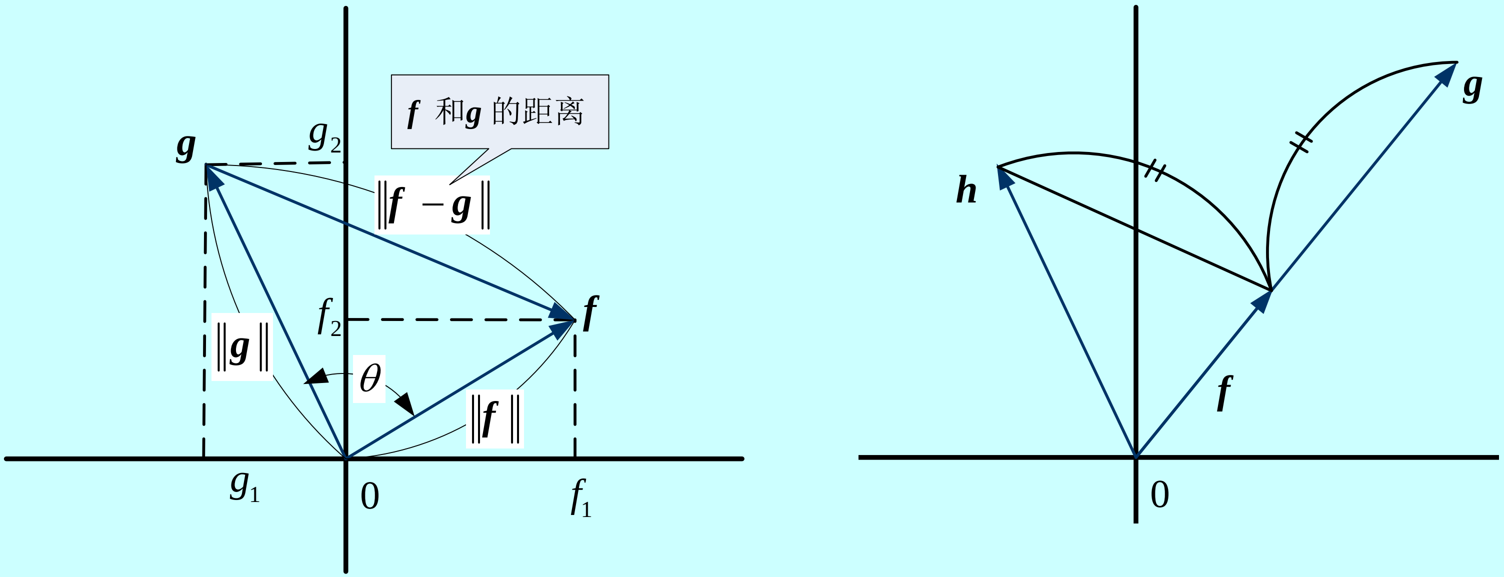


2维向量的距离和内积

2维向量的距离

- 向量$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{g}$向的距离是向量$\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}$的模

$$d(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})=\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|=\sqrt{(f_1-g_1)^2+(f_2-g_2)^2}$$

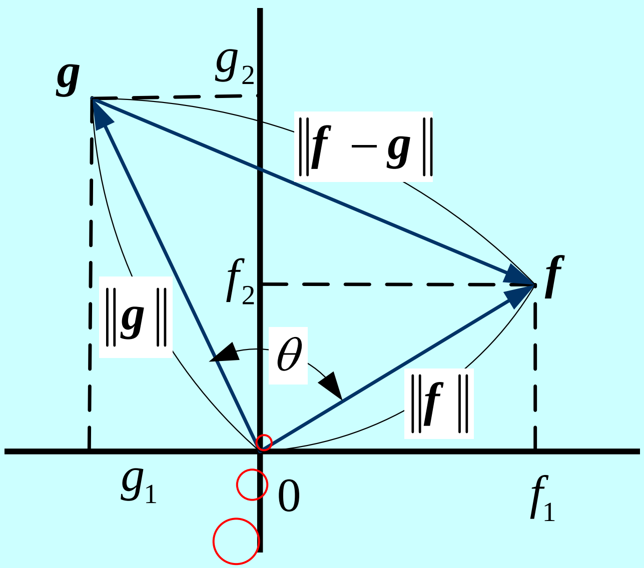


- 衡量向量间关系强弱，不仅需要向量间的距离，还需要讨论向量间的角度

2维向量的距离和内积

2维向量的内积

- 向量的内积可以用来表示向量的角度关系



$$\boxed{\langle f,g\rangle=\|f\|\cdot\|g\|\cos\theta}$$

$$\|f-g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2-2\|f\|\cdot\|g\|\cos\theta$$
$$=\|f\|^2+\|g\|^2-2\langle f,g\rangle$$

$$2\langle f,g\rangle=\|f\|^2+\|g\|^2-\|f-g\|^2$$
$$=\left(f_1^2+f_2^2\right)+\left(g_1^2+g_2^2\right)$$
$$-\left\{(f_1-g_1)^2+(f_2-g_2)^2\right\}$$
$$=2\left(f_1g_1+f_2g_2\right)$$

向量f和g正交：θ =90°，$\langle f,g\rangle$ =0

2维向量的距离和内积

- 2维向量的内积
  - 2维向量的内积

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \|\boldsymbol{f}\| \cdot \|\boldsymbol{g}\| \cos\theta = f_1 g_1 + f_2 g_2$$

  - 向量$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{g}$正交时(θ=90°)，内积 $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = 0$
  - 向量$\boldsymbol{f}$与其本身的内积

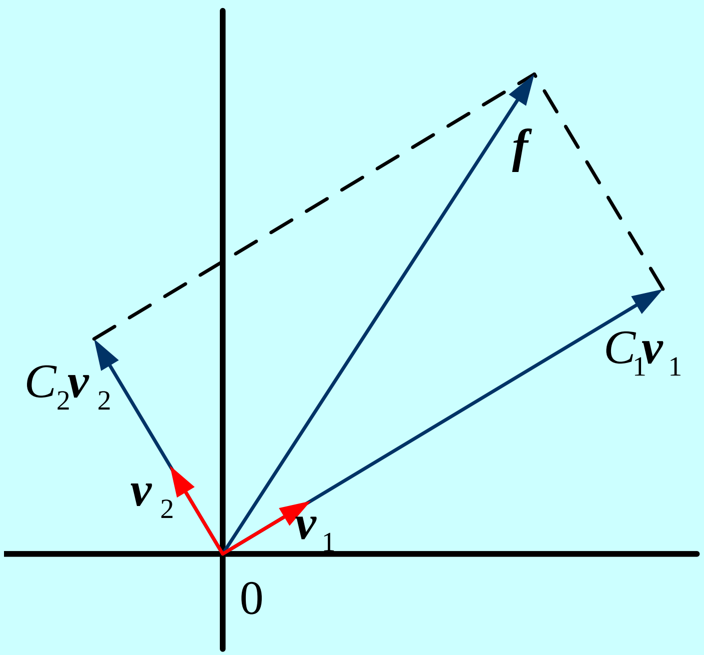
$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \rangle = f_1^2 + f_2^2 = \|\boldsymbol{f}\|^2$$

  - 相关系数

$$r = \cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle}{\|\boldsymbol{f}\| \cdot \|\boldsymbol{g}\|} = \frac{f_1 g_1 + f_2 g_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2} \cdot \sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

标准正交基底

- 在二维向量空间中，将相互正交的向量组$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$称为正交基底。且当$\|\boldsymbol{v}_1\| = \|\boldsymbol{v}_2\| = 1$时，称为标准正交基底
- 衡量向量的大小可以通过标准正交基底的组合，即通过分别在$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$前乘以系数$C_1, C_2$的线性组合式来实现：
  $\boldsymbol{f} = C_1\boldsymbol{v}_1 + C_2\boldsymbol{v}_2$
- 系数(C_1, C_2)表示向量$\boldsymbol{f}$分别在$\boldsymbol{v}_1$方向和$\boldsymbol{v}$2方向分量的大小，向量$C_1\boldsymbol{v}_1$, $C_2\boldsymbol{v}_2$称为对应于$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$的$\boldsymbol{f}$的映射。
- 对于任何一个向量$\boldsymbol{f}$，依据给定的标准正交基底$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$，其系数$(C_1, C_2)$可由$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$的内积给出：$C_1 = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_1 \rangle$，$C_2 = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_2 \rangle$



从多维向量空间到函数空间

- 模的定义
  - 3维空间的向量$\boldsymbol{f}=(f_1, f_2, f_3)$ $\quad \|\boldsymbol{f}\|=\sqrt{f_1^2+f_2^2+f_3^2}$
  - N维空间中的向量$\boldsymbol{f}=(f_1, f_2, \dots, f_N)$

$$\|\boldsymbol{f}\|=\sqrt{f_1^2+f_2^2+\dots+f_N^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{N} f_k^2} \qquad \|\boldsymbol{f}\|=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_k^2}$$

  - 函数空间：函数$f(t)$ $(a\le t\le b)$的模

$$\|f(t)\|=\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \qquad \|f(t)\|=\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)dt}$$

- 距离的定义

$$\boxed{d(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})=\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{N}(f_k-g_k)^2}} \qquad \boxed{d\big(f(t),g(t)\big)=\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b\big(f(t)-g(t)\big)^2 dt}}$$

从多维向量空间到函数空间

内积的定义

- N维向量空间的两个向量$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{g}$，在N维空间上的夹角为θ

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \|\boldsymbol{f}\| \cdot \|\boldsymbol{g}\| \cos\theta = f_1 g_1 + f_2 g_2$$

$$= f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_N g_N = \sum_{k=1}^{N} f_k g_k$$

- 函数$f(t)$和$g(t)$的内积可类似写为

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) g(t) dt$$

- 函数的内积与模

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt = \| f(t) \|^2$$

从多维向量空间到函数空间

相关系数的定义

N维向量空间上的相关系数

$$r=\cos\theta=\frac{\langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle}{\|\boldsymbol{f}\|\cdot\|\boldsymbol{g}\|}=\frac{\sum_{k=1}^{N} f_k g_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N} f_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{N} g_k^2}}$$

函数$f(t)$和$g(t)$的相关系数

$$r=\cos\theta=\frac{\langle f(t),g(t)\rangle}{\|f(t)\|\cdot\|g(t)\|}=\frac{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt}{\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)dt}\cdot\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b g^2(t)dt}}$$

标准正交函数集

- 2维向量空间
  - 其任意向量$\boldsymbol{f}$，可以用标准正交基底$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$的线性组合的形式表示：$\boldsymbol{f} = C_1\boldsymbol{v}_1 + C_2\boldsymbol{v}_2$
- N维向量空间
  - 以用同样的方式来定义标准正交基底$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_N\}$，其满足：

$$\langle \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_n \rangle = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 1; & m = n \end{cases} \qquad \langle \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_n \rangle = \delta(m-n)$$

  - 利用标准正交基底，任意N维的向量$\boldsymbol{f}$可以用其线性组合的形式表示

$$\boldsymbol{f} = C_1\boldsymbol{v}_1 + C_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + C_N\boldsymbol{v}_N = \sum_{k=1}^{N} C_k\boldsymbol{v}_k \Leftarrow C_k = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_k \rangle \quad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

标准正交函数集

函数空间

- 可考察包含无穷多函数的正交函数集$\{\phi_k(t), k=0,1,2, \ldots\}$，满足此函数族中的任何两个函数在区间$[a,b]$正交：

$$\langle \phi_m(t), \phi_n(t) \rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi_m(t)\phi_n(t)dt = K_n\delta(m-n), \quad K_n \neq 0$$

  - 当$K_n = 1$时，称为标准正交函数集

- 利用正交函数集可将任意的函数近似表示为各正交函数的线性组合

$$f(t) \approx \sum_{n=0}^{N} C_n\phi_n(t)$$

- 要使其均方误差最小，正交函数分量的系数C_n应为

$$C_n = \frac{\langle f(t), \phi_n(t) \rangle}{\langle \phi_n(t), \phi_n(t) \rangle} = \frac{1}{K_n}\int_a^b f(t)\phi_n(t)dt$$

标准正交函数集

- 对于复函数
  - 复函数在区间$[a, b]$正交的条件可写为：

$$\langle \phi_m(t), \phi_n(t) \rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi_m(t)\phi_n^*(t)dt = K_n\delta(m-n), \quad K_n \neq 0$$

  - 任意一个复函数$f(t)$在区间$[a, b]$表示为正交函数集$\{\phi_k(t), k = 0,1,2, \ldots\}$内正交函数分量的线性组合

$$f(t) \approx \sum_{n=0}^{N} C_n \phi_n(t)$$

  - 要使其均方误差最小，正交函数分量的系数C_n应为

$$C_n = \frac{\langle f(t), \phi_n(t) \rangle}{\langle \phi_n(t), \phi_n(t) \rangle} = \frac{1}{K_n}\int_a^b f(t)\phi_n^*(t)dt$$

用完备正交函数集表示信号

完备的正交函数集

- 正交函数集$\{\phi_n(t), n=0,1,2,\ldots\}$在区间$[a,b]$近似表示函数$f(t)$

$$f(t) \approx \sum_{n=0}^{N} C_n \phi_n(t)$$

- 其均方误差

$$\varepsilon = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[f(t) - \sum_{n=0}^{N} C_n \phi_n(t) \right]^2 dt$$

- 正交函数集$\{\phi_n(t), n=0,1,2,\ldots\}$为完备的正交函数集的条件

$$\lim_{N\to\infty} \varepsilon = 0$$

用完备正交函数集表示信号

- 帕斯瓦尔方程(Parseval equation) 或帕斯瓦尔定理

$$0=\int_a^b\left[f(t)-\sum_{n=0}^{\infty}C_n\phi_n(t)\right]^2dt \Leftarrow \boxed{\lim_{N\to\infty}\varepsilon=0}$$

$$=\int_a^b\left[f^2(t)-2f(t)\sum_{n=0}^{\infty}C_n\phi_n(t)+\left(\sum_{n=0}^{\infty}C_n\phi_n(t)\right)^2\right]dt$$

$$=\int_a^b f^2(t)dt-2\sum_{n=0}^{\infty}C_n\int_a^b f(t)\phi_n(t)dt+\left[\sum_{n=0}^{\infty}C_n^2\int_a^b\phi_n^2(t)dt+\sum_{m\neq n}^{\infty}C_mC_n\int_a^b\phi_m(t)\phi_n(t)dt\right]$$

$$=\int_a^b f^2(t)dt-2\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(C_nK_n\right)+\left[\sum_{n=0}^{\infty}C_n^2K_n+0\right]$$

$$=\int_a^b f^2(t)dt-\sum_{n=0}^{\infty}C_n^2K_n \Rightarrow \boxed{\int_a^b f^2(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^2K_n}$$

用完备正交函数集表示信号

- 完备正交函数集的例子
  - 三角函数集$\{\cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t, n\in Z\}$，和复指数函数集$\{e^{jn\omega_0 t}, n\in Z\}$在$(t_0, t_0+T_0)$区间内都是完备的正交函数集，其中$\omega_0=2\pi/T_0$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0}\cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt=\begin{cases}\frac{T_0}{2}\delta(m-n) & |m|+|n|\neq 0\\ T_0 & |m|+|n|=0\end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0}\sin(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt=\frac{T_0}{2}\delta(m-n)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0}\left(e^{jm\omega_0 t}\right)\left(e^{jn\omega_0 t}\right)^* dt=T_0\delta(m-n)$$

The End

谢谢！

请批评指正