复化梯形公式($h=(b-a)/n$)：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = T_n + R_n[f] = \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+ih)+f(b)\right]-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta)$$

复化辛普森公式($h=(b-a)/n$)：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = S_n + R_n[f] = \frac{h}{6}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+4\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(b)\right]-\frac{b-a}{2\,880}h^4f^{(4)}(\eta)$$

3. 数值积分的龙贝格(Romberg)方法见参考文献 1,2.

4. 求积公式的代数精确度概念

定义 3.1 一个求积公式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$对于次数$\leqslant m$的多项式均能准确地成立，但对于$m+1$次多项式$x^{m+1}$不能精确成立，则称该求积公式具有$m$次代数精确度.

定理 3.1 形如$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$的求积公式至少有$n$次代数精确度的充要条件是，它是插值型的，从而$n+1$个节点的牛顿-柯特斯求积公式至少具有$n$次代数精确度.

定理 3.2 当n为偶数时，$n+1$个节点的牛顿-柯特斯求积公式的代数精确至少是$n+1$次的.

5. 高斯(Gauss)型求积公式

以$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式$\varphi_{n+1}(x)$的零点$a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$为节点作插值多项式所得到的插值型求积公式，可使该求积公式的代数精确度提高到$2n+1$次. 这样的节点

$\{x_i\}_{i=0}^{n}$称为高斯点，相应的求积公式称为高斯型求积公式，其一般表达式为

$$I(f)=\int_a^b\rho(x)f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)+R_n[f]$$

其中系数A_k、节点x_k可查表，余项

$$R_n[f]=\frac{1}{(2n+2)!}f^{(2n+1)}(\xi)\int_a^b\rho(x)\omega_{n+1}^2(x)\mathrm{d}x,\xi\in(a,b)$$

定理 3.3 (i) 高斯型求积公式中的求积系数$A_k>0,k=0,1,2,\cdots,n$，因此该求积公式是数值稳定的；

(ii) 对于$[a,b]$上的连续函数$f(x)$，高斯型求积公式是收敛的，即$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)=\int_a^b\rho(x)f(x)\mathrm{d}x$.

常用的高斯型求积公式有，高斯-勒让德求积公式、高斯-切比雪夫求积公式、高斯-拉盖尔求积公式及高斯-埃尔米特求积公式等.

6. 数值微分

数值微分的求法，总的来说有两大类方法：泰勒展开方法和用插值函数求微分方法. 常见的公式见参考献 1,4.

二、典型题分析

例 3-1 运用梯形公式、辛普森公式、柯特斯公式分别计算积分$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$，并估计各种方法的误差(要求小数点后至少保留 5 位).

分析 只需按公式套用即可.

解答 运用梯形公式：

$$\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\approx\frac{1}{2}[\mathrm{e}^0+\mathrm{e}^1]=1.859\,140\,9$$

其误差 $|R[f]|=\left|-\frac{1}{12}\mathrm{e}^{\xi}(1-0)^3\right|\leqslant\frac{1}{12}\mathrm{e}=0.226\,523\,5$

（实际误差为 $\left|\int_0^1 e^x dx - 1.859\,140\,9\right| = 0.140\,859\,1$）.

运用辛普森公式

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1}{6}[e^0 + 4e^{\frac{1}{2}} + e^1] = 1.718\,861\,2$$

其误差 $|R[f]| = \left|-\frac{1}{2\,880}e^{\xi}\right| \leqslant \frac{e}{2\,880} = 0.000\,943\,85$.

运用柯特斯公式，

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1}{90}[7e^0 + 32e^{\frac{1}{4}} + 12e^{\frac{1}{2}} + 32e^{\frac{3}{4}} + 7e^1] = 1.718\,282\,688$$

其误差

$$|R[f]| = \left|-\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta)\right| = \frac{2e}{945 \times 4^6} = 0.000\,001\,404$$

例 3-2 取 7 个点的函数值，分别用复化梯形公式、复化辛普森公式计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4 - \sin^2\varphi}\,d\varphi$.

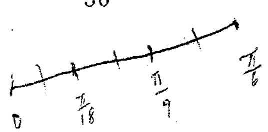
分析 求解这类题目时，必须搞清楚各种方法的公式表达以及各公式中相应的步长 h 的大小．本题中有七个节点，故复化梯形公式中小区间数为 6，步长 $h = \frac{1}{6} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{36}$，而复化辛普森公式中，小区间数为 3，步长为 $\frac{1}{3} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{18}$.

解答 取 $h = \frac{1}{6} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{36}$，计算 7 个点处的函数值：

$f(0) = 2$，$f(\frac{\pi}{36}) = 1.998\,100\,1$，$f(\frac{2\pi}{36}) = 1.992\,447\,3$

$f(\frac{3\pi}{36}) = 1.983\,182\,5$，$f(\frac{4\pi}{36}) = 1.970\,538\,6$

$f(\frac{5\pi}{36}) = 1.954\,838\,6$，$f(\frac{6\pi}{36}) = 1.936\,491\,7$



故 $T_6 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{36}[2 + 2 \times (1.998\,100\,1 + 1.992\,447\,3 + 1.983\,182\,5 + 1.970\,538\,6 + 1.954\,838\,6) + 1.936\,491\,7] = 1.035\,621\,912$

而 $S_3 = \frac{1}{6} \times \frac{\pi}{18}[2 + 4 \times (1.998\,100\,1 + 1.983\,182\,5 + 1.954\,838\,6) + 2 \times (1.992\,447\,3 + 1.970\,538\,6) + 1.936\,491\,7] = 1.035\,764\,141$

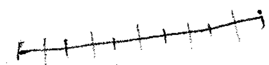
例 3-3 利用 $n = 5$ 的复化辛普森公式计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

并估计截断误差．

分析 按照本章内容体系，$n = 5$，需要 $2 \times 5 + 1$ 个点的函数值，$h = \frac{1}{5}(1-0) = \frac{1}{5}$，然后按公式计算．

解答 区间长度为 $b - a = 1$，$n = 5$，故 $h = \frac{1}{5} = 0.2$，所需节点为 $x_i = 0 + ih\ (i = 0,1,2,3,4,5)$，在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中还需计算 $x_{i-\frac{1}{2}} = x_{i-1} + \frac{1}{2}h$，$i = 1,2,3,4,5$.



故有

$$S_5 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5}\left[\frac{1}{1+0} + 2 \times \left(\frac{1}{1+0.2} + \frac{1}{1+0.4} + \frac{1}{1+0.6} + \frac{1}{1+0.8}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{1+0.1} + \frac{1}{1+0.3} + \frac{1}{1+0.5} + \frac{1}{1+0.7} + \frac{1}{1+0.9}\right) + \frac{1}{1+1}\right] = 0.693\,15$$

其截断误差可估计如下

$$|R_n[f]| = \left|-\frac{1}{2\,880}h^4 f^{(4)}(\xi)\right| \leqslant \frac{h^4}{2\,880} \cdot \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(4)}(x)|$$

由于 $f^{(4)}(x) = 24/(1+x)^5$，$\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(4)}(x)| = 24$，故

$$|R_n[f]| \leqslant \frac{h^4}{2\,880} \cdot 24 = 1.333\,3 \times 10^{-5}$$

例 3-4 用复化梯形公式和复化辛普森公式的事后误差估计计算定积分 $I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x$，要求精确到 10^{-3}.

分析 梯形公式的事后误差估计公式为

$$I \approx T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

只需 $\frac{1}{3}|T_{2n}-T_n| < 10^{-3}$ 即可．类似地，辛普森公式的事后误差估计公式为

$$I \approx S_{2n} + \frac{1}{15}(S_{2n} - S_n)$$

只需 $\frac{1}{15}|S_{2n}-S_n| < 10^{-3}$ 即可．

解答 按照事后误差估计公式

$$I \approx T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n}-T_n),\ T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h_n}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

和 $$I \approx S_{2n} + \frac{1}{15}(S_{2n}-S_n),\ S_n = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

计算列表如下：

k	等分 2^k	T_{2^k}	$\frac{1}{3}\lvert T_{2^k} - T_{2^{n-1}}\rvert$	$S_{2^{k-1}}$	$\frac{1}{15}\lvert S^{2^{n-1}} - S^{2^{k-2}}\rvert$
0	1	3			
1	2	3.1		3.133 333	
2	4	3.131 176 471		3.141 568 627	
3	8	3.138 988 495		3.141 592 503	$0.000\ 001\ 59 < 10^{-3}$
4	16	3.140 941 612	$0.000\ 651 < 10^{-3}$	3.141 592 651	0.000 000 009

因此，由梯形公式得 $I \approx T_{16} = 3.140\ 941\ 612$，精确到 10^{-3}；由辛普森公式得到 $I \approx S_4 = 3.141\ 592\ 503$，精确到 10^{-5}. 若取 $I \approx S_8 = 3.141\ 592\ 651$，则精确到 10^{-8}.

T_n $T_1 = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}H_1 = 1.5 + \frac{1}{2}\times\frac{16}{5} = 3.1$

$T_4 = \frac{1}{2}\times 3.1 + \frac{1}{4}(f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4}))$

$S_1 = \frac{4}{3}T_2 - \frac{1}{3}T_1$

$S_2 = \frac{4}{3}T_4 - \frac{1}{3}T_2$

例 3-5 用龙贝格方法求 $I=\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$，使其具有六位有效数字.

分析 本题解法直接套用龙贝格公式，需要注意的是结果要有 6 位有效数字，即绝对误差限应不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-5}$.

解答 使用 T 数表计算如下：

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k-1)}$	$T_2^{(k-2)}$	$T_3^{(k-3)}$
0	1.859 140 9			
1	1.753 931 1	1.718 861 2		
2	1.727 221 9	1.718 318 8	1.718 282 6	
3	1.720 518 6	1.718 284 2	1.718 281 9	1.718 281 9

由于 $|T_3^{(0)} - T_2^{(0)}| = 7\times 10^{-7} < \frac{1}{2}\times 10^{-5}$，而 $1 < \int_0^1 e^x \mathrm{d}x < e$，故得 $I^* = 1.718\ 28$，它具有 6 位有效数字．

事实上，$I = \int_0^1 e^x \mathrm{d}x = 1.718\ 281\ 828\cdots$，且 $|I - I^*| = 0.182\ 8\times 10^{-5} < \frac{1}{2}\times 10^{-5}$，即 $I^* = 1.718\ 28$ 为 I 的具有 6 位有效数字的近似值．

例 3-6 使用两个及三个求积节点，运用牛顿-柯特斯求积公式和高斯-勒让德求积公式计算积分 $\int_{-1}^1 \sqrt{x+1.5}\,\mathrm{d}x$.

解答 (1) 使用两个求积节点时

梯形公式

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x+1.5}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1+1}{2}[\sqrt{-1+1.5} + \sqrt{1+1.5}] = 2.288\ 245\ 6$$

高斯-勒让德公式

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x+1.5}\,\mathrm{d}x \approx \sqrt{1.5 - 0.577\ 350} +$$

$$\sqrt{1.5+0.577\ 350}=2.401\ 848$$

(2) 使用三个求积节点时

辛普森公式

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1.5}\mathrm{d}x\approx\frac{2}{6}[\sqrt{1.5-1}+4\sqrt{1.5+0}+\sqrt{1.5+1}]=2.395\ 742$$

高斯-勒让德求积公式

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1.5}\mathrm{d}x\approx 0.555\ 556(\sqrt{1.5-0.774\ 596}+\sqrt{1.5+0.774\ 596})+0.888\ 889\sqrt{1.5+0}=2.399\ 709$$

上述积分的准确值为$\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1.5}\mathrm{d}x=2.399\ 529$,说明在求积节点数相同时,高斯型求积公式精确度高.

例 3-7 用下列方法计算积分$\int_{1}^{3}\frac{\mathrm{d}y}{y}$.

(1) 三点及五点高斯-勒让德求积公式;

(2) 将区间四等分,在每一小段上用两点高斯-勒让德公式,然后累加(即复化两点高斯公式).

分析 本题积分区间不在[-1,1]上,需先进行变换才能用高斯-勒让德公式计算.

解答 (1) 先对求积区间[1,3]作如下变换:

$$y=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b-a)t=t+2$$

则当$y\in[1,3]$时,$t\in[-1,1]$,且$\mathrm{d}y=\mathrm{d}t$,$\int_{1}^{3}\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{t+2}$.

(a) 三点高斯公式:

$$\int_{1}^{3}\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{t+2}\approx 0.555\ 555\ 6(\frac{1}{2+0.774\ 596\ 7}+\frac{1}{2-0.774\ 596\ 7})+0.888\ 888\ 9\times\frac{1}{2.0+0}=1.098\ 039\ 283$$

(b) 五点高斯公式:

$$\int_{1}^{3}\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{t+2}\approx 0.236\ 926\ 9(\frac{1}{2-0.906\ 179\ 8}+\frac{1}{2+0.906\ 179\ 8})+0.478\ 628\ 9\times(\frac{1}{2-0.538\ 469\ 3}+\frac{1}{2+0.538\ 469\ 3})+0.568\ 888\ 9\times\frac{1}{2}=1.098\ 609\ 289$$

(2) 将[1,3]四等分,每份分别为[1,1.5],[1.5,2],[2,2.5],[2.5,3].在每个小区间上用两点高斯公式,得

$$I_1=\int_{1}^{1.5}\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\frac{0.5\mathrm{d}t}{2.5+0.5t}\approx 0.5\{\frac{1}{2.5+0.5\times(-1/\sqrt{3})}+\frac{1}{2.5+0.5\times(1/\sqrt{3})}\}=0.405\ 405\ 405$$

$$I_2=\int_{1.5}^{2}\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\frac{0.5\mathrm{d}t}{3.5+0.5t}\approx 0.5\{\frac{1}{3.5-0.5/\sqrt{3}}+\frac{1}{3.5+0.5/\sqrt{3}}\}=0.287\ 671\ 232$$

$$I_3=\int_{2}^{2.5}\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\frac{0.5\mathrm{d}t}{4.5+0.5t}\approx 0.5\times\{\frac{1}{4.5-0.5/\sqrt{3}}+\frac{1}{4.5+0.5/\sqrt{3}}\}=0.223\ 140\ 495$$

$$I_4=\int_{2.5}^{3}\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\frac{0.5\mathrm{d}t}{5.5+0.5t}=0.5\times\{\frac{1}{5.5-0.5/\sqrt{3}}+\frac{1}{5.5+0.5/\sqrt{3}}\}=$$

0.182 320 441

故 $I=I_1+I_2+I_3+I_4\approx 1.098\ 537\ 573$. 积分真值为 $I=\ln 3=1.098\ 612\ 289$.

例 3-8 给定积分 $S_i(1)=\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$,

(1) 利用复化梯形公式计算上述积分值,使其截断误差不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-3}$;

(2) 取同样的求积节点,改用复化辛普森公式计算时,截断误差是多少?

(3) 要求截断误差不超过 10^{-6},如果用复化辛普森公式,应取多少个函数值?

分析 本题主要是熟悉各种复化求积公式及其截断误差估计.

解答 由于 $f(x)=\frac{\sin x}{x}=\int_0^1\cos(xt)\mathrm{d}t$,所以

$$f^{(k)}(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\cos(xt)\mathrm{d}t=\int_0^1 t^k\cos\left(xt+\frac{k\pi}{2}\right)\mathrm{d}t$$

故
$$|f^{(k)}(x)|\leqslant\int_0^1 t^k\left|\cos\left(xt+\frac{k\pi}{2}\right)\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^k\mathrm{d}t=\frac{1}{k+1}$$

(1) 为使复化梯形公式满足误差要求,只需 $|R_n[f]|=\left|-\frac{b-a}{12}h^2f''(\xi)\right|\leqslant\frac{1}{12}h^2\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-3}$ 即可. 这只需 $h\leqslant 0.134\ 2$, $n\geqslant\frac{b-a}{0.134\ 2}=\frac{1}{0.134\ 2}=7.451\ 6$,故只需 8 等份即可,此时 $h=0.125$. 按此步长使用复化梯形公式有:

$$S_i(1)\approx T_8=\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\{1+2(0.997\ 397\ 9+0.989\ 615\ 9+0.976\ 726\ 6+0.958\ 851\ 1+0.936\ 155\ 7+0.908\ 851\ 7+0.877\ 192\ 6)+0.841\ 471\ 0\}=0.945\ 691\ 1$$

(2) 对于同样点数用复化辛普森公式时,$h=\frac{1}{4}$,其截断误差为

$$|R_n[f]|=\left|-\frac{b-a}{2\ 880}h^4f^{(4)}(\xi)\right|\leqslant\frac{1}{2\ 880}\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\frac{1}{5}=0.000\ 000\ 271=0.271\times 10^{-6}$$

(3) 为使在使用复化辛普森求积公式时误差不超过 10^{-6},只需

$$|R_n[f]|=\left|-\frac{b-a}{2\ 880}h^4f^{(4)}(\xi)\right|\leqslant\frac{1}{2\ 880}h^4\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2\ 880\times 5}\left(\frac{1}{n}\right)^4\leqslant 10^{-6}$$

解得 $n^4\geqslant 69.444\ 444$, $n\geqslant 2.886\ 75$

故至少需将[0,1]三等份,即取 $2\times 3+1=7$ 个节点处的函数值

例 3-9 计算积分$\int_0^1 e^x\mathrm{d}x$,若用复化梯形公式,问区间应分多少等份,才能保证计算结果有五位有效数字?

分析 本题需要计算结果有五位有效数字,实际上告诉了所允许的截断误差限. 故需要把误差限与有效数字的概念结合起来使用.

解答 由 $f(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, $b-a=1$,有

$\frac{1}{2}\times 10^{-4}$

$$|R_n[f]|=\left|-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta)\right|\leqslant\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 e$$

$\frac{b-a}{12}h$

又由于 $1<\int_0^1 e^x\mathrm{d}x<e$,故$\int_0^1 e^x\mathrm{d}x$ 只有一位整数,因此要使积分近似值有五位有效数字,其截断误差应满足

0. · · ·

$m=1$ $n=5$

$m=0$. $n=5$

$m-n+1=-4$.

$$\frac{e}{12n^2} \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

解得　$n^2 \geqslant \frac{1}{6}e \times 10^4 \approx 4\,530.469\,7$，$n \geqslant 67.308\,8$，因此取 $n = 68$，即将 $[0,1]$ 68 等份就可满足要求．

例 3-10　从地面发射一枚火箭，在最初 80 s 内，记录其加速度如下表．试求火箭在第 80 s 时的速度．

t(s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$a(\mathrm{m \cdot s^{-2}})$	30.00	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.69	50.67

分析　速度对时间 t 的导数等于加速度，因此已知加速度求速度，只需把速度看作是加速度的原函数即可．若设速度为 $v(t)$，则 $v(t) = v(0) + \int_0^t a(t)\mathrm{d}t$，$v(80) = v(0) + \int_0^{80} a(t)\mathrm{d}t$，这样就把问题转化为求积分的问题．

解答　应用复化辛普森公式计算．此题中 $b - a = 80$，9 个节点，故 $n = 4$，$h = 80/4 = 20$．由于火箭从地面向上发射，$v(0) = 0$，因此

$$\begin{aligned} v(80) &= v(0) + \int_0^{80} a(t)\mathrm{d}t = \int_0^{80} a(t)\mathrm{d}t \approx \frac{1}{6} \cdot 20[30.00 + \\ &4 \times (31.63 + 35.47 + 40.33 + 46.69) + \\ &2 \times (33.44 + 37.75 + 43.29) + 50.67] = \\ &3\,087.033\,33\ \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

故火箭在第 80 s 时的速度为 3 087.033 33 m/s.

例 3-11　计算椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的周长，使结果具有五位有效数字．

分析　这是一个求周长的问题，因此要用到线积分中弧长公式．在估计误差时，由于弧长公式中含有根式，高阶导数较复杂，故可用事后误差估计的办法来做，另外还必须把误差与有效数字

结合起来使用．

解答　由于考虑到直角坐标系下弧长表达式较复杂，采用极坐标来求解．

令 $x = 2\cos\theta$，$y = \sin\theta$，则椭圆弧长为

$$\begin{aligned} l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x_\theta'^2 + y_\theta'^2}\,\mathrm{d}\theta &= \\ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2\theta + \cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \\ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{1}{2}$

由于 $\frac{\pi}{2} < I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta < 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$，因此 I 有一位整数，故要求结果有五位有效数字，需截断误差 $\leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4}$．列表计算如下：

k	等分 2^k	T_{2^k}	$\frac{1}{3}\lvert T_{2^k} - T_{2^{k-1}}\rvert$
0	1	2.356 194 5	
1	2	2.419 920 78	0.021 242 1
2	4	2.422 103 10	0.000 727 44
3	8	2.422 112 06	$0.000\,002\,986 < \frac{1}{2} \times 10^{-4}$

故取 $I \approx T_8 = 2.422\,1$ 即可使 I 有五位有效数字，从而 $l = 4I \approx 9.688\,4$．

例 3-12　确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精确度尽量高，并指明求积公式所具有的代数精确度．

(1) $\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$

(2) $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx [f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3$

$0 = -1 + 2x_1 + 3x_2$

$3 \times \frac{2}{3} = 1 + 2x_1^2 + 3x_2^2$

(3) $\int_0^h f(x)\mathrm{d}x \approx h[f(0)+f(h)]/2+\alpha h^2[f'(0)-f'(h)]$

分析 求解这类题目，一般都应按照求积公式代数精确度的定义去做．即先列出参数满足的代数方程组，解出这些待定参数，然后用所确定的求积公式判断所具有的代数精确度．

解答 (1) 求积公式中含有三个待定参数，即 A_{-1},A_0,A_1. 将 $f(x)=1,x,x^2$ 分别代入求积公式，并令其左右相等，得

$$\begin{cases}A_{-1}+A_0+A_1=2h\\ -h(A_{-1}-A_1)=0\\ h^2(A_{-1}+A_1)=\dfrac{2}{3}h^2\end{cases}$$

解得 $A_{-1}=A_1=\dfrac{1}{3}h, A_0=4h/3$. 所求公式至少具有两次代数精确度．又由于 代入 $f(x)=x^3$

$(h^3)'$ $3h^2$

$$\int_{-h}^{h}x^3\mathrm{d}x=\frac{h}{3}(-h)^3+\frac{h}{3}(h^3)$$

$$\int_{-h}^{h}x^4\mathrm{d}x\neq\frac{h}{3}(-h)^4+\frac{h}{3}h^4$$

故 $\int_{-h}^{4}f(x)\mathrm{d}x\approx\dfrac{h}{3}f(-h)+\dfrac{4}{3}f(0)+\dfrac{h}{3}f(h)$ 具有三次代数精确度．

(2) 求积公式中含两个待定参数 x_1,x_2，当 $f(x)=1$ 时，易知有

$$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]$$

故令求积公式对 $f(x)=x,x^2$ 精确成立，即

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=1\\ 2x_1^2+3x_2^2=1\end{cases}$$

由第一式解得 $x_1=(1-3x_2)/2$，代入第二式，得

$$15x_2^2-6x_2-1=0$$

最后解出

$$\begin{cases}x_2=-0.126\ 60\\ x_1=0.689\ 90\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}x_2=0.526\ 60\\ x_1=-0.289\ 90\end{cases}$$

将 $f(x)=x^3$ 代入已确定之求积公式，则

$$\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x\neq\frac{1}{3}[-1+2x_1^3+3x_2^3]$$

故求积公式具有二次代数精确度，所求节点为 $x_1=0.689\ 90$，$x_2=-0.126\ 60$ 或 $x_1=-0.289\ 90, x_2=0.526\ 60$ 两组．

(3) 求积公式中只含有一个待定参数 α. 当 $f(x)=1,x$ 时，有

$$\int_0^h 1\mathrm{d}x=\frac{h}{2}[1+1]+0$$

$$\int_0^h x\mathrm{d}x=\frac{h}{2}[0+h]+\alpha h^2(1-1)$$

故令 $f(x)=x^2$ 时求积公式精确成立，即

$$\int_0^h x^2\mathrm{d}x=\frac{h}{2}[0+h^2]+\alpha h^2[2\times0+2h]$$

解得 $\alpha=1/2$. $\frac{h^3}{3}=\frac{h^3}{2}+\alpha 2h$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$

将 $f(x)=x^3$ 代入上述确定的求积公式，有

$$\int_0^h x^3\mathrm{d}x=\frac{h}{2}[0+h^3]+\frac{h^2}{12}[0-3h^2]$$

说明求积公式至少具有三次代数精确度．再令 $f(x)=x^4$，代入求积公式时有

$$\int_0^h f(x)\mathrm{d}x\neq\frac{h}{2}[0+h^4]+\frac{h^2}{12}[0-4h^3]$$

因此所求求积公式具有三次代数精确度．

例 3-13 确定求积公式

$$\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x=h^2[Af(x_0)+Bf(x_1)]+h^3[Cf'(x_0)+Df'(x_1)]+R[f]$$

中的系数 A,B,C,D,使代数精度尽量高,并给出 $R[f]$ 的表达式. 公式中 $h = x_1 - x_0$.

分析 本题是一个带权 $\rho(x) = x - x_0$ 且带导数值的求积公式. 关于代数精确度尽量高来确定 A,B,C,D 可按上题中方法来做;一旦确定了求积系数后,可根据代数精确度进行多项式插值来求 $R[f]$.

解答 由于被积函数中含有 $x - x_0$,因此,为了积分方便(不失一般性),设该求积公式对 $f(x) = 1,(x - x_0),(x - x_0)^2,(x - x_0)^3$ 精确成立,得

$$\frac{1}{2}(x - x_0)^2\Big|_{x_0}^{x_1} = h^2(A + B)$$

$$\frac{1}{3}(x - x_0)^3\Big|_{x_0}^{x_1} = h^2[0 + Bh] + h^3[C + D]$$

$$\frac{1}{4}(x - x_0)^4\Big|_{x_2}^{x_1} = h^2[0 + Bh^2] + h^3[0 + 2hD]$$

$$\frac{1}{5}(x - x_0)^5\Big|_{x_0}^{x_1} = h^2[0 + Bh^3] + h^3[0 + 3h^2D]$$

化简得

$$\begin{cases} A + B = \dfrac{1}{2} \\ B + C + D = \dfrac{1}{3} \\ B + 2D = \dfrac{1}{4} \\ B + 3D = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

解得 $A = \dfrac{3}{20}$, $B = \dfrac{7}{20}$, $C = \dfrac{1}{30}$, $D = -\dfrac{1}{20}$

又因 $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)(x - x_0)^4\mathrm{d}x \neq h^2[0 + Bh^4] +$

$$h^3[0 + 4h^3D]$$

故

$$\int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)f(x)\mathrm{d}x \approx h^2[\frac{3}{20}f(x_0) + \frac{7}{20}f(x_1)] + h^3[\frac{1}{30}f'(x_0) - \frac{1}{20}f'(x_1)]$$

具有三次代数精确度.

下面估计求积公式的余项 $R[f]$:

设在 x_0,x_1 上的三次埃尔米特插值多项式为 $H_3(x)$,$H_3(x)$ 满足 $H_3(x_i) = f(x_i), H_3'(x_i) = f'(x_i), i = 0,1$. 因前述求积公式具有三次代数精确度,它对于 $H_3(x)$ 是准确成立的,且

$$f(x) = H_3(x) + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x - x_0)^2(x - x_1)^2,$$

$$x_0 < \xi < x_1$$

因此有

$$\int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1}H_3(x)(x - x_0)\mathrm{d}x +$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x - x_0)^3(x - x_1)^2\mathrm{d}x$$

$$h^2[AH_3(x_0) + BH_3(x_1)] +$$

$$h^3[CH_3'(x_0) + DH_3'(x_1)] + R[f]$$

$$h^2[Af(x_0) + Bf(x_1)] +$$

$$h^3[Cf'(x_0) + Df'(x_1)] + R[f]$$

注意到 $(x - x_0)^3(x - x_1)^2$ 在 $[x_0,x_1]$ 上不变号,故余项

$$R[f] = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\eta)\int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)^3(x - x_1)^2\mathrm{d}x = \frac{h^6}{1\,440}f^{(4)}(\eta),\ \eta \in [x_0,x_1]$$

例 3 - 14 求高斯型求积公式

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

的系数 A_1, A_1 及节点 x_0, x_1.

分析 这类题目做法同前例 3—12,例 3-13,所遇到的困难是求解 x_0, x_1, A_0, A_1 所满足的非线性方程组. 另外,也可直接构造带权 $\rho(x) = \sqrt{x}, x \in [0,1]$ 上的二次正交多项式,求出其零点并构造插值型求积公式.

解一 因为求积公式是高斯型的,故其代数精确度为 3,即对 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 是准确成立的,于是有:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3} \\ x_0 A_0 + x_1 A_1 = \int_0^1 \sqrt{x}\,x\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{5} \\ x_0^2 A_0 + x_1^2 A_1 = \int_0^1 \sqrt{x}\,x^2\mathrm{d}x = \dfrac{2}{7} \\ x_0^3 A_0 + x_1^3 A_1 = \int_0^1 \sqrt{x}\,x^3\mathrm{d}x = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

对前二式,有

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}$$

对后两式,有

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_1^2 \\ x_0^3 & x_1^3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{7} \\ \dfrac{2}{9} \end{pmatrix}$$

故有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_1^2 \\ x_0^3 & x_1^3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{7} \\ \dfrac{2}{9} \end{pmatrix}$$

化简有

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}(x_0 x_1)^2 = \dfrac{2}{7}(x_0^2 + x_0 x_1 + x_1^2) - \dfrac{2}{9}(x_0 + x_1) \\ \dfrac{2}{5} x_0 x_1 = \dfrac{2}{7}(x_0 + x_1) - \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

令 $x_0 x_1 = u$, $x_0 + x_1 = v$, 则上二式可写成

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}u^2 - \dfrac{1}{7}v^2 + \dfrac{1}{7}u + \dfrac{1}{9}v = 0 \\ \dfrac{1}{5}u - \dfrac{1}{7}v + \dfrac{1}{9} = 0 \end{cases}$$

解得 $u = \dfrac{5}{21}$, $v = \dfrac{10}{9}$, 从而有

$$x_0 = 0.821\,162,\ x_1 = 0.289\,949$$
$$A_0 = 0.389\,111,\ A_1 = 0.277\,556$$

于是所求高斯型求积公式为

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\mathrm{d}x \approx 0.389\,111\,f(0.821\,162) + 0.277\,556 f(0.289\,949)$$

解二 令 $\varphi_0(x) = 1$, $x \in [0,1]$,构造以 $\rho(x) = \sqrt{x}$ 为权的二次正交多项式(公式见例 2-1 中注记):

$$\varphi_1(x) = (x - \alpha_1)\varphi_0(x)$$
$$\varphi_2(x) = (x - \alpha_2)\varphi_1(x) - \beta_1\varphi_0(x)$$

由

$$\alpha_1 = \frac{(x\varphi_0, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \frac{\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} \cdot x\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x} = \frac{3}{5}$$

得

$$\varphi_1(x) = x - \frac{3}{5}$$

例 ?

$$\frac{x(x-\frac{3}{5})^2\mathrm{d}x}{\frac{1}{2}(x-\frac{3}{5})^2\mathrm{d}x}=\frac{23}{45}\approx 0.511\ 111\ 1$$

$$\beta_1=\frac{(\varphi_1,\cdots)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\frac{\cdots(x-\frac{3}{5})^2\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x}=\frac{12}{175}\approx 0.068\ 57$$

得 $\varphi_2(x)=(x-\frac{23}{45})(x-\frac{3}{5})-0.068\ 57=$

$$x^2-1.111\ 11x+0.238\ 096\ 66$$

所以 $\varphi_2(x)=0$ 的根为.

$$x_0=0.289\ 951,\ x_1=0.821\ 159$$

$$A_0=\int_0^1\sqrt{x}\,l_0(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{x}\,\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\mathrm{d}x\approx 0.277\ 555$$

$$A_1=\int_0^1\sqrt{x}\,l_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{x}\,\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\mathrm{d}x\approx 0.389\ 112$$

注记 这里的 x_0,x_1,A_0,A_1 的值与解法一中的略有不同,其原因是两方法都有舍入误差.

例 3-15 建立高斯型求积公式

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)\mathrm{d}x\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$$

分析 本题也是求 x_0,x_1,A_0,A_1 使求积公式成为高斯型求积公式. 与上题的区别是权函数 $\rho(x)$ 现在是 $\frac{1}{\sqrt{x}}$. 因此,上题中两种方法都能在这里使用,下面给出解法一,主要想说明解非线性方程组的困难,解法二读者练习.

解答 所求高斯型求积公式应具有三次代数精确度,故有

$$A_0+A_1=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2 \qquad (1$$

$$x_0A_0+x_1A_1=\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3} \qquad (2$$

$$x_0^2A_0+x_1^2A_1=\int_0^1\sqrt{x}\,x\mathrm{d}x=\frac{2}{5} \qquad (3$$

$$x_0^3A+x_1^3A_1=\int_0^1\sqrt{x}\,x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{7} \qquad (4$$

(3) + (2) × α + (1) × β,得

$$A_0(x_0^2+\alpha x_0+\beta)+A_1(x_1^2+\alpha x_1+\beta)=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\alpha+2\beta$$

(4) + (3) × α + (2) × β,得

$$A_0x_0(x_0^2+\alpha x_0+\beta)+A_1x_1(x_1^2+\alpha x_1+\beta)=\frac{2}{7}+\frac{2}{5}\alpha+\frac{2}{3}\beta$$

取 x_0,x_1 为 $x^2+\alpha x+\beta=0$ 的根,有

$$\begin{cases}\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\alpha+\beta=0\\ \frac{1}{7}+\frac{1}{5}\alpha+\frac{1}{3}\beta=0\end{cases}$$

解得 $\alpha=-\frac{6}{7},\ \beta=\frac{3}{35}$,从而有

$$x^2-\frac{6}{7}x+\frac{3}{35}=0$$

解此方程,得

$$x_0=\frac{3}{7}-\frac{2\sqrt{6}}{7\sqrt{5}},\ x_1=\frac{3}{7}+\frac{2\sqrt{6}}{7\sqrt{5}}$$

再由(1)和(2)解得

$$A_0=1+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}},\ A_1=1-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$$

注记 构造高斯求积公式的题目很多,但基本做法就是上述两种,难点是解代数方程组.