

2.6 K-L 变换与图像压缩

KARHUNEN LOEVE (KL) TRANSFORM (HOTELLING TRANSFORM)

K-L 变换是建立在图像统计特性的基础上的一种变换方法。假如分批处理的图像的统计性质不同,就对应不同的变换核矩阵但以前介绍各种变换的变换核是固定不变的。

K-L 变换优点是*相关性好*, 应用在数据压缩和图像旋转等方面。

2.6.1 正交变换和消除相关性^[2,6]

设 L 个如下形式表示的随机向量:

$$X^k = \begin{bmatrix} x_1^k & x_2^k & \cdots & x_N^k \end{bmatrix}^T \quad k=1, 2, \dots, L。$$

已知如下 4 个样本向量:

$$X^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$X^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$X^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

其均值向量可以写为:

$$M_X = E\{X\} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L X_k = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

其中 $E\{\cdot\}$ 表示“求期望”, 下标 x 表示 M_X 所对应的一组随机向量。

与该组随机向量对应的协方差矩阵为

$$\begin{aligned}\Sigma_X &= E\left\{(X - M_X)(X - M_X)^T\right\} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L X_k X_k^T - M_X M_X^T \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

元素 σ_{ii} ： 各向量的第 i 个分量组成的向量 x_i 的方差；

元素 σ_{ij} ： 第 i 个分量组成的向量 x_i 和第 j 个分量组成的向量 x_j 之间的协方差；如果 x_i 和 x_j 不相关，他们的协方差为零，对应 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = 0$ 。

X 是 N 阶的，所以 Σ_X 是 $N \times N$ 阶的。这个矩阵是实对称矩阵。

对本例的 5 个元素：

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{1}{4} (x_1^1 x_1^1 + x_1^2 x_1^2 + x_1^3 x_1^3 + x_1^4 x_1^4) - m_1 m_1 \\ &= \frac{1}{4} [0*0 + 1*1 + 1*1 + 1*1] - \frac{3*3}{16} = \frac{3}{16} \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{4} (x_1^1 x_2^1 + x_1^2 x_2^2 + x_1^3 x_2^3 + x_1^4 x_2^4) - m_1 m_2 \\ &= \frac{1}{4} [0*0 + 1*0 + 1*1 + 1*0] - \frac{3*1}{16} = \frac{1}{16} \\ \sigma_{32} &= \frac{1}{4} (x_3^1 x_2^1 + x_3^2 x_2^2 + x_3^3 x_2^3 + x_3^4 x_2^4) - m_3 m_2 \\ &= \frac{1}{4} [0*0 + 0*0 + 1*0 + 0*1] - \frac{1*1}{16} = -\frac{1}{16} \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{4} [0*0 + 0*0 + 0*0 + 1*1] - \frac{1*1}{16} = \frac{3}{16} \\ \sigma_{23} &= \frac{1}{4} [0*0 + 0*0 + 1*0 + 0*1] - \frac{1*1}{16} = -\frac{1}{16}\end{aligned}$$

故有：

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

可见：

- ♥ 由各随机向量对应 3 个分量组成的 3 个新向量具有相同的方差；
- ♥ 新向量 x_1 和 x_2 ， x_1 和 x_3 是正相关；
- ♥ x_2 和 x_3 是负相关。

■ 协方差矩阵对角化

用统计学方法描述图像，各分量之间的相关性将会大大增加图像生成和图像处理过程中的误差。有效消除这些相关性是一个基本的任务。也就是说，我们应该设法将协方差矩阵的非对称元素化为零元素，就是设法将协方差矩阵对角化。

如何做？？？

线性代数证明，对于一个实对称矩阵 Σ （即 $\Sigma = \Sigma^T$ ）的矩阵，必存在一个正交矩阵 Q ，使得

$$Q\Sigma Q^{-1} = Q\Sigma Q^T = \text{diag}[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_N] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix} = \Lambda$$

其中对角矩阵 Λ 中的 $\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_N$ 是实对角矩阵 Σ 的 N 个特征根。这给我们一个重要启示：

通过正交变换能够将协方差矩阵（实对称矩阵） Σ 对角化，从而

消除图像的相关性!!

通过正交矩阵 T 对向量 X 作正交变换

$$Y = TX$$

那么，根据协方差矩阵的定义， Y 的协方差矩阵为：

$$\Sigma_Y = E\left\{(Y - E(Y))(Y - E(Y))^T\right\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix},$$

也就是

$$\begin{aligned} \Sigma_Y &= E\left\{(Y - E(Y))(Y - E(Y))^T\right\} \\ &= E\left\{(TX - E(TX))(TX - E(TX))^T\right\} \\ &= TE\left\{(X - E(X))(X - E(X))^T\right\}T^T \\ &= T\Sigma_X T^T = \text{diag}[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_N] = \Lambda \end{aligned}$$

其中 T 为正交矩阵； Σ_X 为实对称矩阵。

表明：

向量 X 通过正交变换后的向量 Y 的协方差矩阵为 λ 的对角矩阵，说明向量 X 的分量间的相关性已被消除，即正交变换能消除存在相关性的冗余度，这是采用正交变换消除图像相关性的一个数学依据。

例、二维坐标系统中的一个向量旋转——最简单的线性变换。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{即 } Y = TX, \text{ 将向量旋转了 } \theta \text{ 角。}$$

取 $\theta = 45^\circ$ ，则变换为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

若 X 的协方差矩阵为 $\Sigma_X = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$, 那么变换后 Y 的协方差矩阵为

$$\Sigma_Y = T \Sigma_X T^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$$

可见, y_1 和 y_2 完全不相关了; 但协方差 Σ_X 不同, 则变换后 Y 的协方差也就不一样。

本问题的逆变换为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 即 $X = T^{-1}Y$ 。

2.6.2 K-L 变换^[2]

一种基于特征向量(Eigenvectors)的变换。

■ 特征分析(Eigenanalysis)复习

△ 特征值 (Eigenvalues)

对 $N \times N$ 的矩阵 A , 有 N 个标量 $\lambda_i, i=1,2,\dots,N$, 能写出如下的特征方程

$$|A - \lambda_i I| = 0,$$

则 λ_i 称为矩阵 A 的特征值 (Eigenvalues); 而 $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$: 单位矩阵

(Unitary Matrix)。

Eigenvalues (characteristical values): 当矩阵的每个对角元素都减

去它时，将变成奇异阵（不存在逆的矩阵）。如果给定矩阵是奇异的，那么 N 个特征值中至少有一个是 0。

矩阵的秩 rank = 非零的特征值个数

△ 特征向量 (Eigenvectors)

设每个 e_i 是 $N \times 1$ 维的 (N by one vectors)，通过满足

$$Ae_i = \lambda_i e_i$$

对应一个特征值 λ_i ，则称 e_i 为 A 的特征向量。 N 个这样的特征向量构成一个正交基集。

如果 A 是实对称矩阵，那么 λ_k 也是实数。

例 3、因 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 为对称矩阵，这时

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Ae_1 = 3e_1$$

故，3 是 A 的特征值，特征向量为 $e_1 = [1, 1]^T$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Ae_2 = -e_2$$

so, -1 是 A 的特征值，特征向量 $e_2 = [1, -1]^T$

■ One Dimension K-L Transform

定义一个线性变换 A ，它可由任何 X 向量产生一个新向量 Y ：

$$Y = A(X - M_X),$$

这里 M_X 为由 L 个样本向量估计的均值向量，这就是 K-L 变换的变换

式，其意义是：变换后的图像是由中心化图像向量 $X - M_x$ 与变换矩阵 A 相乘的结果，

变换矩阵 A 的构成法：由 $\Sigma_x = E\{(X - M_x)(X - M_x)^T\}$ 的特征向量 e_i $i=1,2,\dots,N$ 构成 A 的行向量，按相应特征值 λ_i $i=1,2,\dots,N$ 幅值大小递减的顺序排列各行：即取 A 的第一行为对应最大特征值的特征向量， A 的最后一行为对应最小特征值的特征向量。

■ K-L 变换的性质

△ Y 的均值 $M_y = 0$ ，

证：

$$\begin{aligned} M_y &= E\{Y\} = E\{A(X - M_x)\} \\ &= AE\{X\} - AM_x (= AM_x - AM_x) = 0 \end{aligned}$$

变换后的图像向量是期望值为零的随机向量。

△ Y 向量的协方差矩阵为 $\Sigma_y = A\Sigma_x A^T$

证：

$$\begin{aligned} \Sigma_y &= E\{(Y - M_y)(Y - M_y)^T\} \quad (M_y = 0) \\ &= E\{YY^T\} \\ &= E\{(AX - AM_x)(AX - AM_x)^T\} \\ &= E\{A(X - M_x)(X - M_x)^T A^T\} \\ &= AE\{(X - M_x)(X - M_x)^T\} A^T = A\Sigma_x A^T \end{aligned}$$

因为构成 A 的各行向量是 $\Sigma_x = E\{(X - M_x)(X - M_x)^T\}$ 的特征向量，所以 $\Sigma_y = A\Sigma_x A^T$ 是一个对角阵。

△ 协方差矩阵 Σ_y 是对角型矩阵

$$\Sigma_Y = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ \vdots & & & \lambda_i & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & & \lambda_{N^2} \end{bmatrix}$$

Σ_Y 为对角矩阵, 特征值即沿着特征向量 \bar{e}_i 方向上 Y 的第 i 个元素的方差。

上式主对角线上以外的元素为 0, 即 y 向量的各元素是不相关的。也就是说, 随机向量 Y 是由互不相关的随机变量组成的, 因此, 线性变换 A 起到了消除变量间相关性的作用。即每个 λ_i 都是变换后第 i 个变量 y_i 的方差。

2.6.3 K-L 变换计算举例

■ 构造正交矩阵 A 的步骤:

- ① 求随机向量 X 的协方差矩阵 Σ_X ;
- ② 求协方差矩阵 Σ_X 的特征值 λ_i ;
- ③ 求 λ_i 对应的 Σ_X 的特征向量 e_i ;
- ④ 用 Σ_X 的特征向量构成正交矩阵 A 。

Example 1 to KL Transform:

若已知随机向量 X 的协方差矩阵为 $\Sigma_X = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 求正交矩阵?

(1) 由 $|\lambda I - \Sigma_X| = 0$, 求 Σ_X 的特征值 λ_i

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-6 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= 6.854 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= 0.146 \end{aligned}$$

(2) 求 λ_i 的特征向量, 即按 $\Sigma_X e_i = \lambda_i e_i$ 求 e_i 。

例如

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &= 2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6a+2b \\ 2a+2b-c \\ -b+c \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ \Rightarrow e_2 &= \begin{bmatrix} 0.333 \\ -0.667 \\ 0.667 \end{bmatrix}, e_1 = \begin{bmatrix} 0.918 \\ 0.392 \\ -0.067 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} -0.217 \\ 0.634 \\ 0.742 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

用 e_1, e_2, e_3 的转置向量作为正交矩阵 A 的行向量, 那么对任一向量 $X=(2 \ 1 \ -0.1)^T$ 的 K-L 变换为

$$Y = AX = \begin{bmatrix} 0.918 & 0.392 & -0.067 \\ 0.333 & -0.667 & 0.667 \\ -0.217 & 0.634 & 0.742 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.234 \\ -0.067 \\ 0.127 \end{bmatrix}$$

则 Y 的协方差矩阵为

$$\Sigma_Y = A \Sigma_X A^T = \begin{bmatrix} 6.854 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.146 \end{bmatrix}$$

由此可见, 该矩阵的对角元素就是特征值 λ_i 。

Example 2 to KL Transform:

Suppose that following matrix is an 2x6 image,

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Its vertical mean vector is,

$$m = (1/N) \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i$$

$$m = (1/6) \begin{bmatrix} 2+4+5+5+3+2 \\ 2+3+4+5+4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 3.5 \end{bmatrix}$$

its covariance matrix is,

$$R_u = \frac{1}{(N-1)} \sum_{i=0}^{N-1} (\rho_i - \bar{\rho})(\rho_i - \bar{\rho})^T = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & c_{01} & c_{02} & . \\ c_{01} & \sigma_1^2 & . & . \\ c_{02} & . & \sigma_2^2 & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$R_u = \frac{1}{5} \left\{ \begin{bmatrix} 2.25 & 2.25 \\ 2.25 & 2.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.25 & 0.75 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.25 & 2.25 \\ 2.25 & 2.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.25 & 0.75 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix} \right\}$$

$$R_u = \begin{bmatrix} 1.9 & 1.1 \\ 1.1 & 1.1 \end{bmatrix}$$

$$R_v = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

In order to make R_v diagonal as $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, orthogonal set of the eigen vectors of R_u must be calculated.

$$\begin{vmatrix} 1.9 - \lambda & 1.1 \\ 1.1 & 1.1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 3\lambda + 0.88 = 0$$

$$\lambda_1 = 2.67 \quad \lambda_2 = 0.33$$

$$[R_V - \lambda I] \phi = 0$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \right\}$$

Equations of eigen vector 1

$$\begin{aligned} -0.77 \phi_1 + 1.1 \phi_2 &= 0 \\ 1.1 \phi_1 - 1.57 \phi_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Eq-1: } \phi_1 = 1.43 \phi_2$$

Equations of eigen vector 2

$$\begin{aligned} 1.57 \phi_2 + 1.1 \phi_1 &= 0 \\ 1.1 \phi_2 + 0.77 \phi_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Eq-2: } \phi_2 = -0.7 \phi_1$$

if ϕ_1 and ϕ_2 are orthonormal vectors, then following equations can be written,

$$\text{Eq-3: } \phi_1^2 + \phi_2^2 = 1$$

$$\text{Eq-4: } \phi_1^2 + \phi_2^2 = 1$$

The solution of these four equations is,

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_3 & \rho_4 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_3 \\ \rho_4 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0.82 \\ 0.57 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.57 \\ 0.82 \end{bmatrix} \right\}$$

Using ρ^T , original matrix 'U' is transformed as follows,

$$v_n = \rho^T u_n, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.82 & 0.57 \\ -0.57 & 0.82 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 2.78 & 4.99 & 6.38 & 6.95 & 4.74 & 3.35 \\ 0.5 & 0.18 & 0.43 & 1.25 & 1.57 & 1.32 \end{bmatrix}$$

Covariance matrix of the transformed image is,

$$R_v = \begin{bmatrix} 2.67 & 0 \\ 0 & 0.33 \end{bmatrix}$$

As seen from R_v , 'V' is an uncorrelated matrix.

Energy distribution in 'V' is seen from diagonal elements (variances).

$2.67/(2.67+0.33)=89\%$ of the total energy is packed in the first row vector of V and the rest is in the second row vector.

If we ignore the second row vector and take the inverse transform of 'V', we find the following image U",

---Ref: <http://utopia.poly.edu/~ademir02/science/9/9x.html>

2.6.4 图像的 K-L 变换

假定一幅图像 $N \times N$ 的数字图像通过某一信号通道传输了 M 次，由于受随机噪声干扰和环境条件影响，接受到的图像实际上是一个受噪声干扰的数字图像集合

$$\{f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_M(x, y)\}$$

对第 i 次获得的图像 $f_i(x, y)$ ，可用一个含 N^2 个元素的向量 X_i 表示，即

$$X_i = \begin{bmatrix} X_{i1} & X_{i2} & \dots & X_{iN} & X_{i(N+1)} & \dots & X_{ij} & \dots & X_{iN^2} \end{bmatrix}^T$$

该向量的第一组分量 (N 个元素) 由图像 $f_i(x, y)$ 的第一行像素 (N 个) 组成，接下来是第二行像素组成向量的第二组分量，余类推。

同样，对于 M 幅数字图像，平均值 M_f 和协方差矩阵 Σ_f 可由下面方法求得：

$$M_f = E\{X\} \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i, \quad M_f \text{ 是 } N^2 \text{ 个元素的向量}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_f &= E\left\{(X - M_f)(X - M_f)^T\right\} \\ &\cong \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (X - M_f)(X - M_f)^T, \\ &\cong \frac{1}{M} \left[\sum_{i=1}^M X_i X_i^T \right] - M_f M_f^T \end{aligned}$$

$\Sigma_f : N^2 \times N^2$ 的方阵。

假定 λ_i ($i = 1, 2, \dots, N^2$) 是按递减顺序排列的特征值，即

$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_{N^2}$ ，对应特征向量为

$$e_i = [e_{i1} \ e_{i2} \ e_{i3} \ \cdots \ e_{iN^2}]^T \quad (i = 1, 2, \dots, N^2)$$

则定义 K-L 变换矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{1N^2} \\ e_{21} & e_{22} & e_{2N^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{i1} & e_{i2} & e_{iN^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{N^2 1} & e_{N^2 2} & e_{N^2 N^2} \end{bmatrix}$$

可得 K-L 变换的变换表达式

$$Y = A(X - M_f)$$

理解为：由中心化图像向量 $X - M_f$ 与变换矩阵 A 相乘，可得变换后的图像 Y 。

由于协方差矩阵 Σ_X 是实对称矩阵，由线性代数理论知，有 $A^{-1} = A^T$ ，故由 K-L 变换式 ($Y = A(X - M_X)$) 可得 K-L 反变换式

$$X = A^{-1}Y + M_X$$

2.6.5 图像数据编码和正交变换

数字化图像和语音信号的数据量是极其巨大的。没有数据压缩技术的进步，根本就无法实现这些海量数据在计算机及其网络上的数据存储、处理和传输等工作。

■ 图像数据压缩技术分类

图像数据压缩技术的**基本思想**：利用图像数据固有的冗余性和相

干性，将一个大的数据文件转换为较小的同性质的文件。

所谓冗余性是由于不管是图像的行与行之间、列与列之间均存在很大的相关性，而且人们的视觉对色彩的敏感程度具有局限性，可以把图像表达中的冗余信息去掉，并给予一定的失真度，对图像数据进行压缩。数据压缩的主要指标有：

压缩比：图像压缩前后所需的信息存储量之比。

压缩算法：常用的 LZ 编码，游程编码，Huffman 编码，算术编码，变换编码。

失真性：分有损压缩和无损压缩。

实际上，人们已经根据文本文件、图像、声音、视频、动画等开发了大量的不同压缩编码技术。

按照压缩技术所依据的的数学理论和计算方法可以分成 3 类：

△ 统计编码（Statistical Coding）

△ 预测编码（Predictive Coding）

△ 变换编码（Transform Coding）

△ 统计编码（Statistical Coding）

这是一类建立在图像的统计特性基础之上的压缩编码方法。

△ 预测编码（Predictive Coding）

数据压缩技术的一个主要分支。

基本思想：在一般的一副二维图像中，相邻像素间存在着相关性。

每个像素的值，可以根据与其临近的几个像素的值进行预测。这些相邻像素可以是同扫描行的，也可以是前几行的，甚至是前几帧的，这分别被称为一维、二维、三维预测。然后将像素点的实际值和预测值相减得到一个误差值，对该误差值进行编码。

重要的预测理论是线性预测理论，由此形成了著名的 DPCM（差值脉冲编码调制）方案，此方案抗干扰能力不太强。考虑行列之间的相关性，有二维预测；考虑不同帧之间的强相关性，可以考虑三维预测。

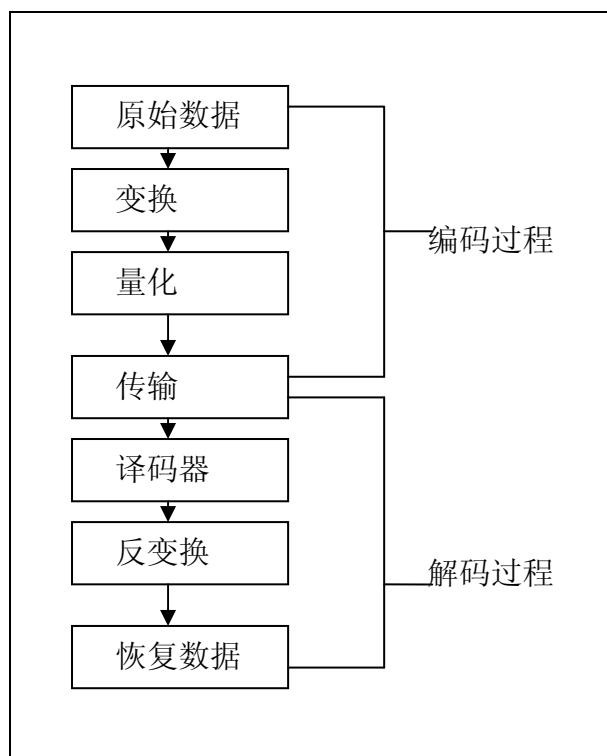
■ 变换编码（Transform Coding）

这里主要指正交变换编码法。基本思想：将空间域里表述的图像经过某种正交函数变换，转换为能量比较集中的变换域中，然后对所产生的变换系数进行编码，从而达到压缩图像数据目的。

△ 工作流程^[4]

变换编码之所以能够压缩信息的比特数，是因为经过正交变换得到的系数矩阵中，数值较大的方差总是集中在少数系数中。

多数图像的统计特性表明，*大幅度的系数往往集中在低频率区内*，这样，可以给那些较小的系数分配很少的比特数，甚至可以不予传送，从而压缩了传送数据的比特数。因此，*正交变换本身只是把分布在变换域中的信息变得集中起来，为合理少分配给某些数据比特数提供了可能。*



变换编码过程主要有两个阶段：变换和量化。经过变换处理，将原始数据从一个空间变换到另一个空间，使图像中相邻像素、相邻扫描行间的数据的相关性变小，同时使图像数据在变换域中相对较为集中，以有利于进行下一步的量化。在进行量化之后，便进一步达到了数据压缩的目的。

△ 变换编码的数理概念

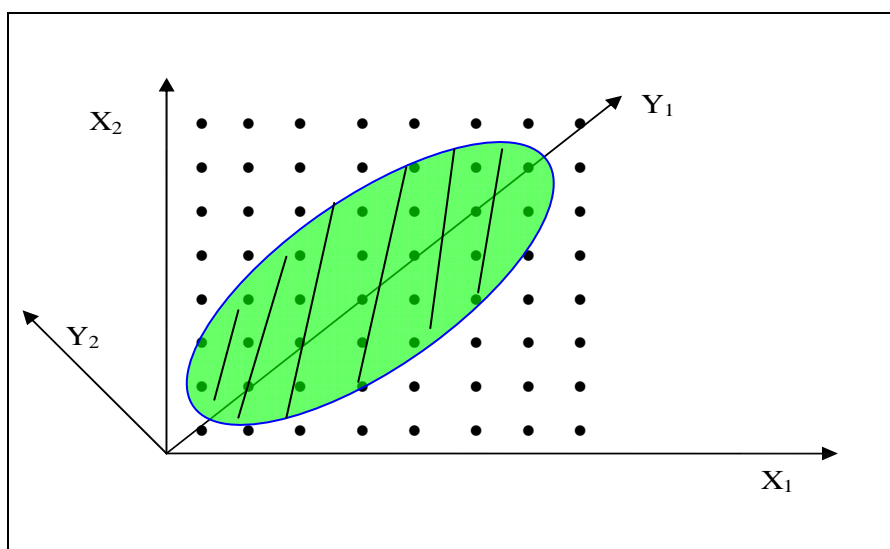
假如变换矩阵是归一化正交变换矩阵，经过变换之后，空间域中的总能量在变换域中得到保持，即满足：

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} f^2(m, n) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} F^2(i, j)$$

式中 $f^2(m, n)$ 为空间域矩阵中元素， $F^2(i, j)$ 为变换域矩阵中元素。

上式是离散正交变换中的 Parseval 能量保持定理。其意义在于：空间域中能量全部转移到变换域中，而在反变换中，变换域中的能量又能

全部转换到空间域中。但是，在变换过程中，保持不变的能量会重新分布。在空间域中，能量的分布有一定的随机性，*对于相关图像来说，在大多数情况下，变换域中能量集中于零空间频率或低空间频率对应的变换系数上。*



例 1×2 像素构成的子区的能量重新分布情况。

这是由两个相邻的像素组成。设有 8 个亮度电平，每个像素都可以取 8 个亮度电平中的任意一个，因此，一个子区的亮度电平状态共有 $8 \times 8 = 64$ 种。在上图中， X_1 、 X_2 分别表示两个像素的亮度电平，图中阴影部分表示像素最可能出现的区域，这时 X_1 、 X_2 方向上的能量都较大，且方差 $\sigma_{X_1}^2 = \sigma_{X_2}^2$ ，假如经过坐标变换，坐标做 45° 变换，坐标变为 Y_1 、 Y_2 。这时阴影部分将集中于 Y_1 轴，在 Y_2 方向上能量较小，且方差 $\sigma_{Y_1}^2 \gg \sigma_{Y_2}^2$ 。这是因为，原来的能量分布集中于直线 $X_1 = X_2$ 附近，它们之间有较强的相关性，而变换后，能量分布集中于 Y_1 方向上，使得 Y_1 、 Y_2 之间的关联性小了。这样，经过变换之后，使图像的相关性减少，在新的变换域中，经过选择适当的量化方法，便可以达到压缩数据的目的。

△ K-L 变换用于图像数据压缩

如前所述，K-L 变换矩阵 A 是由特征向量组成的变换矩阵，而且这些特征向量的排列是按特征值递减顺序排列的。由于 **能量集中在特征值 λ 大的系数中**，因此我们丢掉特征值小的 Y 系数，不应影响图像质量。

设取 λ 最大的前 K 个特征向量组成的变换核矩阵，记做 A_k 有

$$Y' = A_k (X - M_X)$$

这相当于原 Y 的 K 维投影，记为 Y' 。在反变换重建图像向量 X 时，可采用补零方法。仍补成 $N \times N$ 维向量

$$Y_k = \begin{bmatrix} Y' \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

这显然会带来误差。所重建的图像只能叫原 X 的估计值 \hat{X} ：

$$\hat{X} = A_k^T Y_k + M_X。$$

总之，由于我们只丢掉较小的 Y 系数，故引入较小的误差。可以证明（见参考文献【1】pp101—102），引入的误差为：

$$\varepsilon = E \left\{ (X - \hat{X})(X - \hat{X})^T \right\} = \sum_{i=k+1}^{N^2} \lambda_i$$

其中 λ_i 为协方差 Σ_X 的特征值。因为 λ_i 是按大小顺序排列的，因而 $k+1$ 至 N^2 的 λ_i 是非常小的。

而且， λ_i 之间数值差异非常之大。例如，K-L 变换用于遥感图像时，多光谱有 6 幅图像，以此 6 幅图像作为统计量提取主分量时，其

特征量有 6 个，其 λ_i 之间差别很大：

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
3210	931	118	84	64	13

这样丢掉特征值小的基向量做变换，引起误差的比例较小，如丢掉 λ_6 相应的基向量 e_6 ，引起的误差为 $13/4420=3/1000$ 。

另外，因为对于实际图像集合而言，做 K-L 变换必须求得这个集合的 $N^2 \times N^2$ 的协方差矩阵的特征值与特征向量，计算量非常之大。但由于 K-L 变换矩阵是不可分离的，所以至今还没有找到一种成熟的快速算法。这就限制了使用。

2.6.6 各种变换编码的性能比较^[4]

△ 离散傅立叶变换（DFT）

离散傅立叶变换不对图像本身编码，只对变换系数进行编码和传输，具有蝶型快速算法，但其运算量大，实际使用有问题。

△ 沃尔什—哈达玛变换（WHT）

可取代 DFT，使运算量明显降低，这是因为 WHT 具有 DFT 的快速算法结构，且只有加减法运算而无乘法。但实践证明经 WHT 变换后，能量集中程度不如 DFT。

△ 哈尔变换（HRT）

具有 WHT 比 WHT 更快的运算速度,但其能量集中程度比 WHT 更差。

△ 离散余弦变换 (DCT)

运算速度较快 (有快速算法), 而且经 DCT 后能量集中性仅次于 KLT, 对于大多数相关性很强的图像数据, DCT 是 KLT 目前最好的替代。

△ K-L 变换

能量集中性最好。

△ 斜变换 (SLT)

能量集中性尚好。

△ 奇异值分解最佳坐标展开变换 (SVD)。

算法相对不太复杂。

■ 按变换后数据的可压缩性, 在变换域中信源能量集中程度排序 (从优至劣):

$KLT \Rightarrow DCT \Rightarrow SLT \Rightarrow DFT \Rightarrow WHT \Rightarrow HRT$

■ 按算法的简单复杂程度排序 (由简至繁):

$HRT \Rightarrow WHT \Rightarrow SLT \Rightarrow DCT \Rightarrow DFT \Rightarrow SVD \Rightarrow KLT$

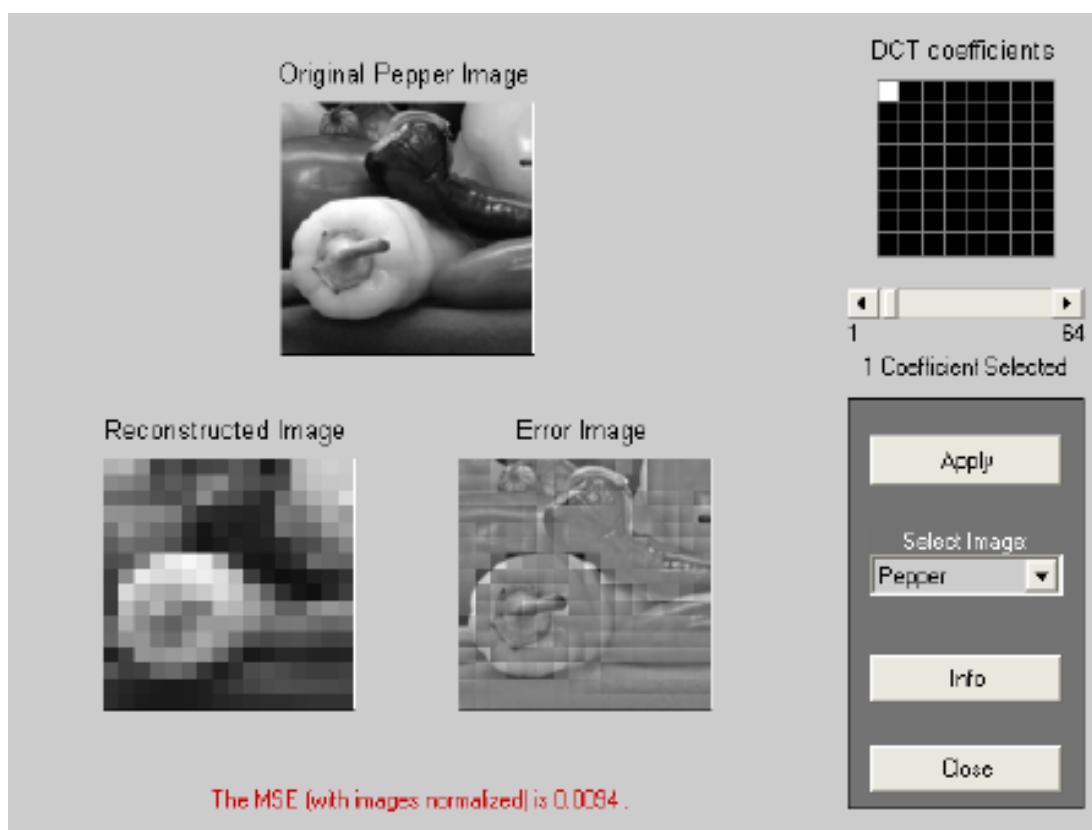
■ 按变换运算量大小排序（由小至大）：

HRT \Rightarrow WHT \Rightarrow SLT \Rightarrow DCT \Rightarrow DFT \Rightarrow KLT

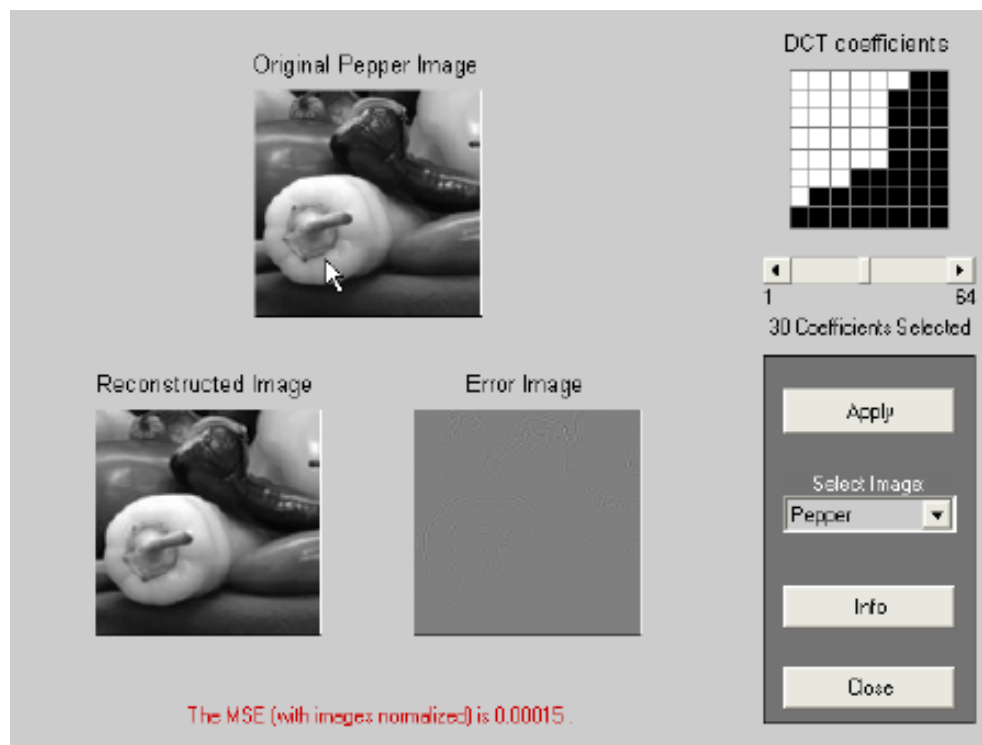
MatLab 软件对 Discrete Cosine Transform 的 DEMOs:

dctdemo 2-D DCT image compression demo.

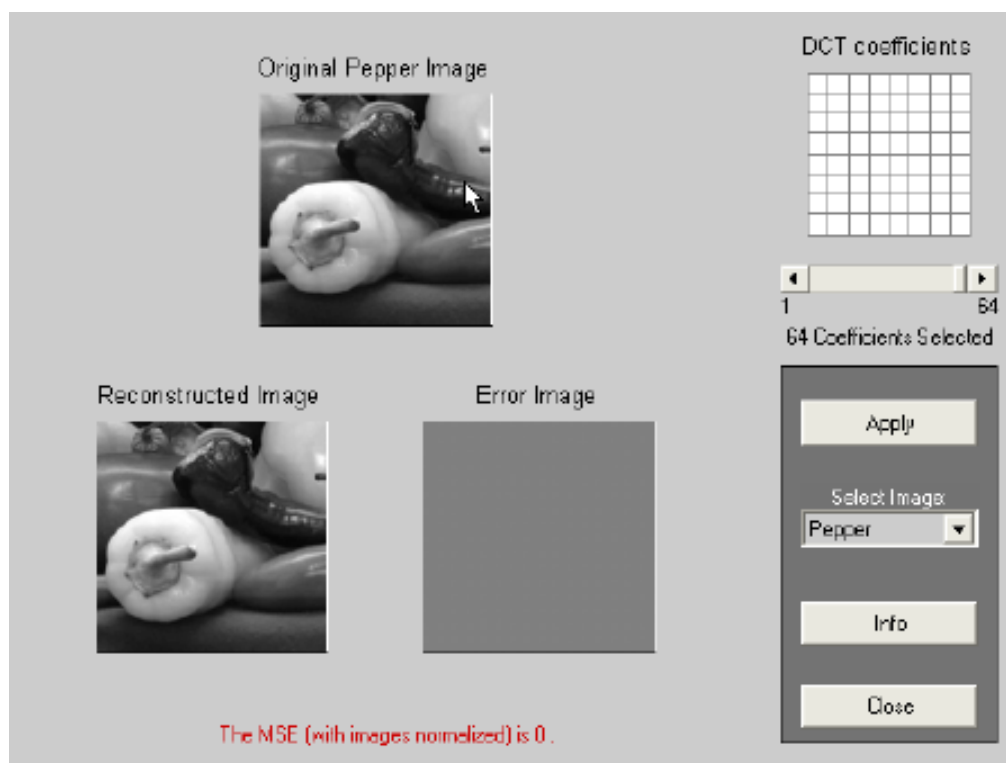
This demo lets you explore image compression using the 2-D discrete cosine transform (DCT). The original image is transformed in 8-by-8 blocks and then inverse transformed in 8-by-8 blocks to create the reconstructed image. The inverse DCT is performed using the subset of DCT coefficients that are shown in white. The error image (the difference between the original and reconstructed image) is also displayed.



The pepper image

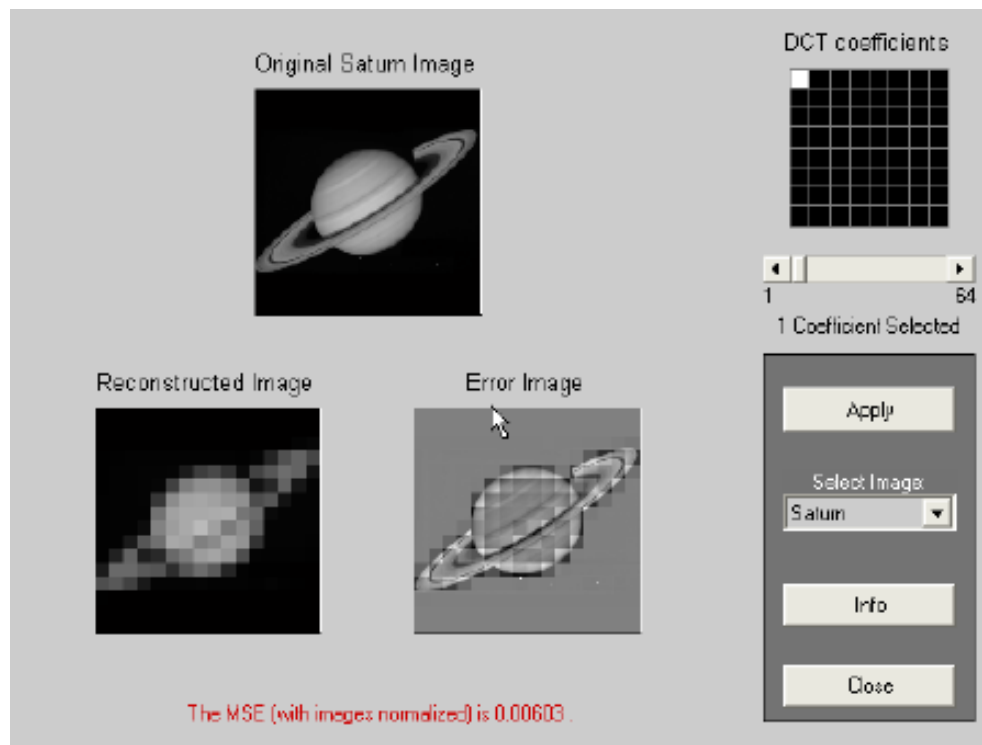


The pepper image

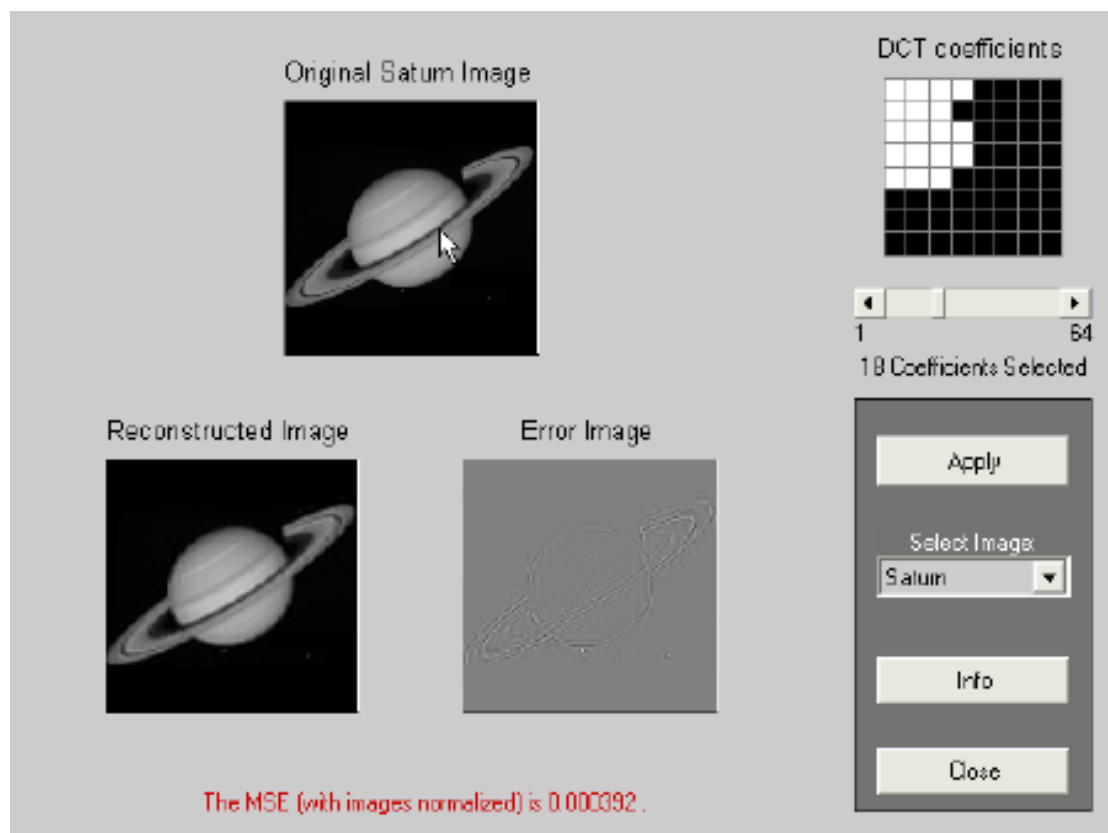


The pepper image

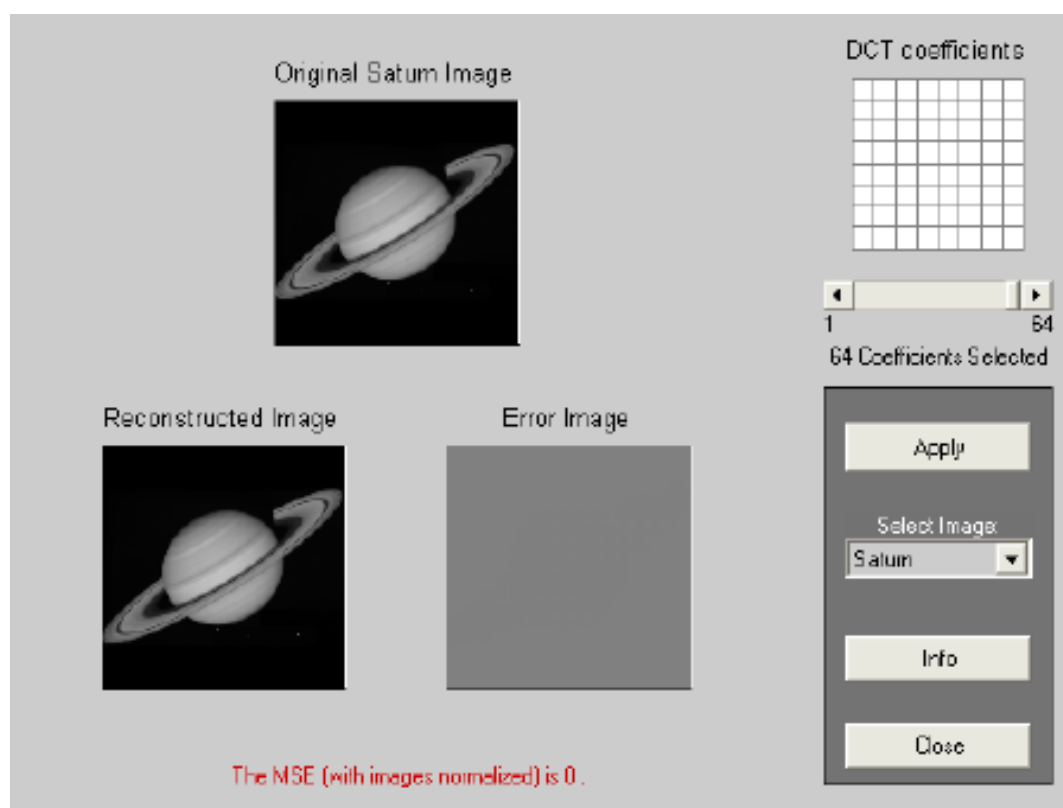
The Saturn image is courtesy of NASA.



The Saturn image



The Saturn image



The Saturn image

本章参考文献

- 1 容观澳，计算机图像处理，清华大学版，2000， pp56-100
- 2 黄贤武等，数字图像处理与压缩编码技术，电子科大版，2000，
pp30 - 66
- 3 阮秋琦，数字图像处理学，电子工业版，2001， pp63 - 179
- 4 刘榴娣，刘明奇，党长民，实用数字图像处理，北京理工大版，
pp62 - 86
- 5 朱秀昌等，数字图像处理与图像通讯，北京邮大版， pp43 - 66
- 6 章毓晋，图像工程（上），清华版，1999， pp43 - 70