Ch5. Jordan 标准形

$\forall A \in M_n(F)$, $A \not\sim$ 对角阵

问题: $A \overset{?}{\sim}$ 类似于对角阵的矩阵

Def. 形如 $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{m_i \times m_i}$ 的方阵 记为 $J_{m_i}(\lambda_i)$

称为 m_i 阶 $\boxed{\text{Jordan 块}}$, 如 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{pmatrix}$, (-5), …

Def. 由若干个 Jordan 块组成的准对角阵 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$

称为 $\boxed{\text{Jordan 标准形}}$. 如 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & & & \\ & & 2i & & \\ & & & 4 & 1 \\ & & & & 4 \end{pmatrix}$

Th (Jordan 标准形定理)

每个 n 阶复矩阵 A 都与一个 Jordan 标准形相似. 这个 Jordan 标准形除了其中 Jordan 块之排列次序外被 A 唯一确定. 称为 A 之 Jordan 标准形.

$$\forall A, \quad A \sim J_A = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

除排列次序外唯一

其中 $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i}$, $i=1,\cdots,s$.

一、幂零矩阵之 Jordan 标准形 求法

Def. A 称为**幂零矩阵**，如果 ∃ 正整数 m，

使 $A^m = 0$ 且 $A^{m-1} \neq 0$.

称 m 为**幂零指数**

性质. ① A 之最小多项式为 λ^m.

② A 之特征值全为 0.

③ $A \sim N = \begin{pmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_s \end{pmatrix}$，其中 $N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n_i}$

$i = 1 \sim s$

Th. 设n阶幂零阵A的Jordan标准形为

$$N=\begin{pmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_s \end{pmatrix}, \quad 其中 \quad N_i=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n_i}, \quad i=1\sim s,$$

幂零指数为m. 则

① $\boxed{m=\max\{n_i : 1\le i\le s\}}$

② A的零度 $\eta_1 = \boxed{N中Jordan块的个数\ s}$

③ 记N中k阶Jordan块的个数为l_k, A^k的零度为η_k,

则
$$\boxed{\begin{aligned} l_1 &= 2\eta_1-\eta_2 = 2s-\eta_2 \\ l_k &= 2\eta_k-\eta_{k-1}-\eta_{k+1}, \end{aligned}}\quad 2\le k\le m.$$

证 ①. $A\sim N$, $A^k=0 \Leftrightarrow N^k=0 \Longleftrightarrow N_i^k=0$, $i=1\sim s$

其中 $N^k=\begin{pmatrix} N_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & N_s^k \end{pmatrix}$, $N_i^k=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & 1 \\ & & \ddots & & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{n_i}$ (k个)

从而 $N_i^{n_i}=0$, $N_i^{n_i-1}\neq 0$.

所以 N的幂零指数为$m \Leftrightarrow n_i\le m$, $i=1\sim s$,

且 $\exists i$, 使 $n_i=m$

故 $m=\max\limits_{1\le i\le s} n_i$

② 设A的零度为η_1, 则

$\eta_1=n-r(A)=n-r(N)=\sum\limits_{i=1}^{s} n_i-\sum\limits_{i=1}^{s}(n_i-1)=s.$

③. A^k 之零度 $= N^k$ 之零度 $= \sum_{i=1}^{s} N_i^k$ 之零度

而 N_i^k 之零度 $= \begin{cases} k, & k \le n_i \\ n_i, & k \ge n_i. \end{cases}$

从而 $n_1 = A$ 之零度 $= N$ 之零度 $= \sum_{i=1}^{s} N_i$ 之零度 $= \sum_{i=1}^{s} 1 = s$

$= \sum_{k \ge 1} l_k$

$n_2 = A^2$ 之零度 $= N^2$ 之零度 $= \sum_{i=1}^{s} N_i^2$ 之零度

$= \sum_{i:n_i<2} (N_i^2$ 之零度$) + \sum_{i:n_i \ge 2} N_i^2$ 之零度

$= l_1 + 2\sum_{k \ge 2} l_k$

$$\eta_j \text{之零度} = A^j \text{之零度} = N^j \text{之零度} = \sum_{i=1}^{s} N_i^j \text{之零度}$$

$$= \sum_{i:\, n_i < j} N_i^j \text{之零度} + \sum_{i:\, n_i \geq j} N_i^j \text{之零度}$$

$$= \sum_{k<j} k\, l_k + j \sum_{k \geq j} l_k$$

故

$$\eta_j = l_1 + \cdots + (j-1)\, l_{j-1} + j\, l_j + j\, l_{j+1} + j\, l_{j+2} + \cdots$$

$$\eta_{j-1} = l_1 + \cdots + (j-1)\, l_{j-1} + (j-1)\, l_j + (j-1)\, l_{j+1} + (j-1)\, l_{j+2} + \cdots$$

$$\eta_{j+1} = l_1 + \cdots + (j-1)\, l_{j-1} + j\, l_j + (j+1)\, l_{j+1} + (j+1)\, l_{j+2}$$

$$\Longrightarrow \quad 2\eta_j - \eta_{j-1} - \eta_{j+1} = l_j$$

例. 求幂零阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准形 N,

并求变换阵 P, 使 $P^{-1}AP=N$.

解一: A 零度 $\eta_1 = n-\mathrm{rank}(A) = 4-2 = 2$

故 Jordan 块个数 $s=2$

$A^2=0 \Rightarrow A^2$ 零度 $\eta_2=4$.

$\Rightarrow l_1 = 2\eta_1-\eta_2=0$

$\Rightarrow l_2 = 2\eta_2-\eta_1-\eta_3 = 8-2-4=2$

$m=\max\limits_{1\le i\le s} n_i$

$N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$; 或 4阶方阵无1阶 Jordan块, 又有2个 Jordan块

故中有 2个 2阶 Jordan块

法二. 直接计算 $A\neq 0$, $A^2=0$, A之幂零指数 $m=2$

幂零阵之Jordan标准形之主对角元都为0,

次对角元为0 or 1.

故 $N=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & & \\ & 0 & a_2 & \\ & & 0 & a_3 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, 其中 a_1, a_2, a_3 为 0 or 1

由 $A\neq 0$, 不妨设 $a_1\neq 0$. $a_1=1$

又 $m=2$, 故无大于2阶之Jordan块, 即 $a_2=0$

$a_3=0$ or 1, 又 $\mathrm{rank}(A)>1$, 故 $a_3=1$

$$A \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{array}\right)$$

证 $P^{-1}AP=N \iff AP=PN$

令 $P=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$,

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (0, \alpha_1, 0, \alpha_3)$$

即 $A\alpha_1=0$, $A\alpha_2=\alpha_1$, $A\alpha_3=0$, $A\alpha_4=\alpha_3$

考虑 $Ax=b$. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & b_1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & b_4 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & b_1+b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_2+b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1+b_2+b_4 \end{pmatrix}$

故 $Ax=b$ 有解 $\Longrightarrow \begin{cases} b_2=b_3, \\ b_1+b_2+b_4=0 \end{cases}$ (*)

因此 α_1, α_3 必须满足 (*)

求解 $\begin{cases} x_1+x_3+x_4=0 \\ x_2-x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

满足 $*$

再解 $A x=\alpha_1 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_3+x_4=1 \\ x_2-x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A x=\alpha_3 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_3+x_4=1 \\ x_2-x_3=-1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_4=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

取 $P=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 不唯一.

二. 一般矩阵之 Jordan 标准形之求法

Th. 设 μ 为 A 之特征值，记 $(A-\mu E)^k$ 之零度为 η_k，

J_A 中对角线元素为 μ 之 k 阶 Jordan 块之个数为 l_k.

则 ① $\eta_1 =$ J_A 中对角线元素为 μ 之 Jordan 块之个数

② $l_1 = 2\eta_1 - \eta_2$

$l_k = 2\eta_k - \eta_{k-1} - \eta_{k+1}$，$k \geq 2$

对每个特征值，计算 l_k.

例. 求 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 之 Jordan 标准形 J_A.

并求 P, 使 $P^{-1}AP = J_A$

解: $|\lambda E - A| = (\lambda-1)^4$. 故 J_A 中只含对角元为 1 的 Jordan 块.

$(E-A)$ 之秩 $r_1 = 2$, $\Longrightarrow$ 有 2 个 Jordan 块.

$(E-A)^2 = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. 秩 $r_2 = 3$.

$l_1 = 2r_1 - r_2 = 4-3 = 1$. 有 1 个 1 阶 Jordan 块

所以 $A \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 0 \\ \hline & & & 1 \end{array}\right)$

设 $P^{-1}AP=J$, 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&0\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_4)$$

即 $(E-A)\alpha_1=0$, $(E-A)\alpha_2=-\alpha_1$, $(E-A)\alpha_3=-\alpha_2$, $(E-A)\alpha_4=0$

$$\begin{pmatrix}-2&-1&0&0&b_1\\4&2&0&0&b_2\\-3&-1&-1&-1&b_3\\3&1&1&1&b_4\end{pmatrix}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}-2&-1&0&0&b_1\\0&0&0&0&2b_1+b_2\\-3&-1&-1&-1&b_3\\0&0&0&0&b_3+b_4\end{pmatrix}$$

要使 $(E-A)x=b$ 有解：则 $\begin{cases}2b_1+b_2=0\\ b_3+b_4=0\end{cases}$

解 $(E-A)x=0$ 得 $\alpha_1=(0,0,1,-1)^T$, $\alpha_4=(-1,2,1,0)^T$

$(E-A)x=-\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2=(1,-2,0,0)^T$

$(E-A)x=-\alpha_2 \Rightarrow \alpha_3=(-1,3,0,0)^T$

书上习题 P118, 34.

设 $V=\{e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x}\}$.

定义: $T(f)=f'$, 求 T 之 Jordan 标准形及 Jordan 基.

思路:

$$T(\underbrace{e^x}_{\alpha_1}, \underbrace{xe^x}_{\alpha_2}, \underbrace{x^2e^x}_{\alpha_3}, \underbrace{e^{2x}}_{\alpha_4}) = (e^x, e^x+xe^x, 2xe^x+x^2e^x, 2e^{2x}) = (e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x})\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A}$$

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)A$$

$P^{-1}AP = J_A$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) P J_A P^{-1}$$

$$\Rightarrow T\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)P}_{\text{Jordan基}} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) P J_A$$