上海交通大学 2012-2013 学年第一学期《矩阵理论》试卷 (2013.1.3,14:00-16:00)

姓名__________　学号____________　矩阵理论分班号或任课教师__________　成绩______

本试卷共 4 页, 15 道题, 满分 100 分. 其中 diag 表示对角矩阵, A^* 表示 A 的共轭转置.

一. 单项选择题 (每题 3 分, 共 15 分)

1. 设 $V=\mathbb{C}^{3\times 3}$ 是全体 3 阶复方阵构成的复线性空间, U,W 是 V 的两个子空间, 其中

$$U=\{A\in V\,|\,trA^*=0\}, W=\{A\in V\,|\,A^T+A=0\}.$$

则 $\dim(U+W)-\dim U=($　　$)$

(A) 0　　(B) 1　　(C) 7　　(D) 8

2. 设 U,W 是内积空间 V 的两个子空间. 则

(A) $(U+W)^\perp=U^\perp+W^\perp$　　(B) $(U+W)^\perp=U^\perp\cap W^\perp$

(C) $(U\cap W)^\perp=U^\perp\cap W^\perp$　　(D) $(U\cap W)^\perp=U+W$

3. 设两个 4 阶复矩阵 A 与 B 的最小多项式分别为 $x^2(x-1)$ 与 $x(x-1)$, 则矩阵 $\begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准形所含 Jordan 块的个数为 (　　)

(A) 5　　(B) 6　　(C) 7　　(D) 8

4. 设 $\|\bullet\|_a$ 分别表示复线性空间 $\mathbb{C}^n$ 的 a- 范数, $a=1,2,\infty$. 设 $x\in\mathbb{C}^n$. 则必有 (　　)

(A) $\|x\|_1\le\|x\|_2\le\|x\|_\infty$　　(B) $\|x\|_2\le\|x\|_1\le\|x\|_\infty$

(C) $\|x\|_\infty\le\|x\|_1\le\|x\|_2$　　(D) $\|x\|_\infty\le\|x\|_1\le n\|x\|_\infty$

5. 设 2 阶复矩阵 $A,B,A-B$ 均为投影矩阵, 则 (　　)

(A) $AB=BA=0$　　(B) $AB=BA=I$　　(C) $AB=BA=A$　　(D) $AB=BA=B$

二. 填空题 (每题 3 分, 共 15 分)

6. 设 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, $\sigma\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, 则 σ 关于基 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 的矩阵为 (　　　　).

7. 线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的最优解为 (　　　　).

8. 设 σ 是通常欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 上的正交变换, 且 $\sigma\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, 则 $\sigma\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$=(　　　　).

9. 矩阵 A 的三角分解为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 的正交三角分解为 (　　　　).

10. 设 A 是秩为 2 的 3 阶正交投影矩阵, 则矩阵 $I-\sin A$ 的 Jordan 标准形为 (　　　　).

三. 计算题 (每题 15 分, 共 60 分)

11. 设 $V=\mathbb{R}^3$ 是实线性空间. 定义 V 上的线性变换 σ 如下:

$$\sigma:(x_1,x_2,x_3)^T\mapsto(x_2,-2x_2+2x_3,x_2-x_3)^T,\quad \forall\,(x_1,x_2,x_3)^T\in V.$$

(1) 求 σ 的核空间 $\mathrm{Ker}(\sigma)$ 与像空间 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 的各一组基;
(2) 证明或否定 $V=\mathrm{Ker}(\sigma)\oplus\mathrm{Im}(\sigma)$.

12. 设 $V=\mathbb{R}^{n\times n}$ 是全体 n 阶实矩阵构成的实线性空间. 对任意 $A,B\in V$, 定义

$$(A,B)=tr(A^TB).$$

(1) 证明上面定义的函数 $(\bullet,\bullet)$ 是 V 上的一个内积;

(2) 证明或否定：全体基本矩阵 $E_{ij},1\le i,j\le n$ 构成 V 的一个标准正交基;

(3) 设 $U=\{A\in V\mid A=aI,a\in\mathbb{R}\}$, 求 U 的正交补 $U^{\perp}$ 的一个标准正交基.

13. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 写出 A 的 Jordan 标准形 J (请将 Jordan 块按阶数从大到小排列);

(2) 求 $\int_0^t e^{Js}ds$;

(3) 求定解问题 $x'(t)=Jx(t)+(0,0,1)^T, x(0)=(1\ 0\ 0)^T$ 的解.

14. 设矩阵 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ $(m\geq n)$ 的秩为 $r>0$, A 的奇异值分解为 $A=U\mathrm{diag}(\sigma_1,...,\sigma_r,0,...,0)V^*$, $U=(u_1,\cdots,u_m), V=(v_1,\cdots,v_n)$ 分别是 m 阶与 n 阶酉矩阵. 设矩阵 $B=\begin{pmatrix} A & A \end{pmatrix}$.

(1) 求 BB^* 的谱分解;

(2) 求 B 的奇异值分解;

(3) 求 B^*B 的 Moore-Penrose 广义逆.

四. 证明题 (每题 10 分, 共 10 分)

15. 设 A, B 均为 $m \times n$ 阶复矩阵. 记 σ_A 是 A 的最大奇异值. 证明:

(1) $\sigma_A = \max\limits_{x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max\limits_{x^* x = 1} \|Ax\|_2$.

(2) $\sigma_{A+B} \leq \sigma_A + \sigma_B$.