第 1 章作业参考答案

P23/1(1)：

$S=\{(x_1,x_2)^T \mid x_1+2x_2\ge 1, x_1-x_2\ge 1\}=\left\{\boldsymbol{x}\in R^2 \middle| A\boldsymbol{x}\ge \boldsymbol{b}\right\}, A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

设 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2\in S,\lambda\in[0,1]$，即 $A\boldsymbol{x}^1\ge\boldsymbol{b}, A\boldsymbol{x}^2\ge\boldsymbol{b}$，令 $\overline{\boldsymbol{x}}=\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2$，则

$$A\overline{\boldsymbol{x}}=\lambda A\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)A\boldsymbol{x}^2\ge\lambda\boldsymbol{b}+(1-\lambda)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$$

因此 $\overline{\boldsymbol{x}}=\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2\in S$。由此知，$S$ 是凸集。

P23/1(2)：

$S=\{(x_1,x_2)^T \mid x_2\ge |x_1|\}$

设 $\boldsymbol{x}^1=(x_1^1,x_2^1)^T,\boldsymbol{x}^2=(x_1^2,x_2^2)^T\in S,\lambda\in[0,1]$，即 $x_2^i\ge|x_1^i|, i=1,2$。令 $\overline{\boldsymbol{x}}=(\overline{x}_1,\overline{x}_2)^T=\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2$，

即 $\overline{x}_j=\lambda x_j^1+(1-\lambda)x_j^2, j=1,2$，则 $|\overline{x}_1|=|\lambda x_1^1+(1-\lambda)x_1^2|\le\lambda|x_1^1|+(1-\lambda)|x_1^2|\le\lambda x_2^1+(1-\lambda)x_2^2=\overline{x}_2$，

因此 $\overline{\boldsymbol{x}}=(\overline{x}_1,\overline{x}_2)^T\in S$。由此知，$S$ 是凸集。

P23/1(3)：

$S=\{(x_1,x_2)^T \mid x_1^2+x_2^2\le 10\}=\left\{\boldsymbol{x}\in R^2 \mid \|\boldsymbol{x}\|\le\sqrt{10}\right\}$

设 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2\in S,\lambda\in[0,1]$，即 $\|\boldsymbol{x}^1\|\le\sqrt{10},\|\boldsymbol{x}^2\|\le\sqrt{10},\lambda\in[0,1]$，则

$$\left\|\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2\right\|\le\lambda\left\|\boldsymbol{x}^1\right\|+(1-\lambda)\left\|\boldsymbol{x}^2\right\|\le\lambda\sqrt{10}+(1-\lambda)\sqrt{10}=\sqrt{10}$$

因此 $\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2\in S$。由此知，$S$ 是凸集。

P24/2：

$S=\left\{\boldsymbol{x}\in R^n \mid \boldsymbol{x}=A\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}\in C\right\}$，$C$ 是凸集。

设 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2\in S,\lambda\in[0,1]$，则存在 $\boldsymbol{\rho}^1,\boldsymbol{\rho}^2\in C:\boldsymbol{x}^1=A\boldsymbol{\rho}^1,\boldsymbol{x}^2=A\boldsymbol{\rho}^2$。因为 C 是凸集，因此 $\boldsymbol{\rho}\triangleq\lambda\boldsymbol{\rho}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{\rho}^2\in C$，得

$$\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2=\lambda A\boldsymbol{\rho}^1+(1-\lambda)A\boldsymbol{\rho}^2=A(\lambda\boldsymbol{\rho}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{\rho}^2)=A\boldsymbol{\rho}\in S$$

因此 S 是凸集。

P24/4：用归纳法。

若 k=1,2，则由 $\boldsymbol{x}^i \in S, \lambda_i \geq 0, i=1,\cdots k, \sum_{i=1}^{k}\lambda_i = 1$，有 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \boldsymbol{x}^i \in S$ 。

假设 k=m 时，由 $\boldsymbol{x}^i \in S, \lambda_i \geq 0, i=1,\cdots k, \sum_{i=1}^{k}\lambda_i = 1$，有 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \boldsymbol{x}^i \in S$ 。

现设 k=m+1。

当 $\lambda_{m+1}=1$，则 $\lambda_i = 0, i=1,\cdots m$， $\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i \boldsymbol{x}^i = \boldsymbol{x}^{m+1} \in S$；

当 $\lambda_{m+1}<1$，则

$$\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i \boldsymbol{x}^i = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i \boldsymbol{x}^i + \lambda_{m+1}\boldsymbol{x}^{m+1} = (1-\lambda_{m+1})\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{m+1}}\boldsymbol{x}^i + \lambda_{m+1}\boldsymbol{x}^{m+1} = (1-\lambda_{m+1})\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda_{m+1}\boldsymbol{x}^{m+1}$$

其中 $\overline{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{m+1}}\boldsymbol{x}^i$ 。因为

$$\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{m+1}} \geq 0, \sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{m+1}} = \frac{1}{1-\lambda_{m+1}}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i = \frac{1}{1-\lambda_{m+1}}(1-\lambda_{m+1}) = 1$$

因此由归纳假设知 $\overline{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{m+1}}\boldsymbol{x}^i \in S$，因此由 S 是凸集得

$$\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i \boldsymbol{x}^i = (1-\lambda_{m+1})\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda_{m+1}\boldsymbol{x}^{m+1} \in S$$

由归纳法得结论对任意 k 成立。