第一讲

数学基础知识

彭志科

Email: z.peng@sjtu.edu.cn

上海交通大学

机械系统与振动国家重点实验室

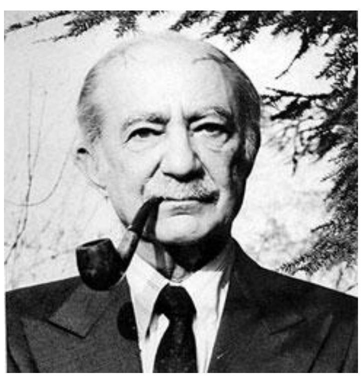
上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

数学

“数学是一切关于自然现象的严格知识之基础”

—— 大卫.希尔伯特，（1900年国际数学大会)

David Hilbert (January 23, 1862 – February 14, 1943) German mathematician.



“事实上，一些科学学分支只是由一套数学理论组成，并饰以几个物理事实”。

——莫里斯.克莱因，《数学与知识的探求》

Morris Kline (May 1, 1908 – June 10, 1992)

SKL 国家重点实验室 STATE KEY LABORATORY

信号处理的数学基础

Linear Algebra / Matrix theory

Functional Theory

Stochastic process

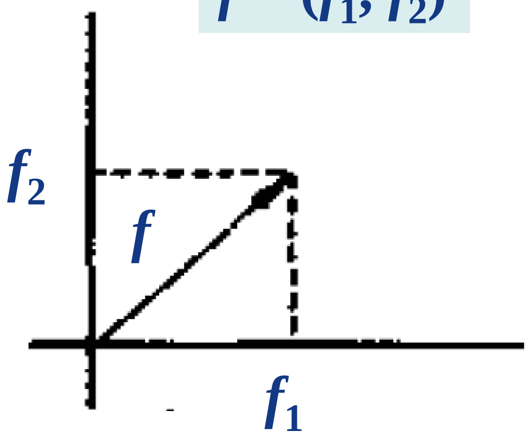
…

空间

- 空间-数学中的基本概念

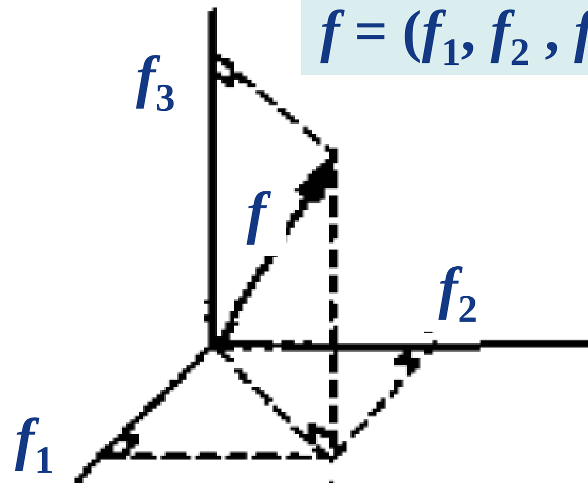
  实际的物理空间或欧几里德三维空间的推广和抽象化。

$f = (f_1, f_2)$



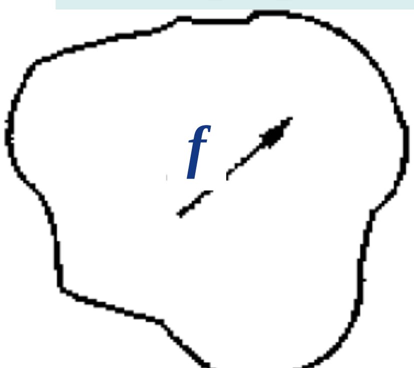
二维

$f = (f_1, f_2, f_3)$



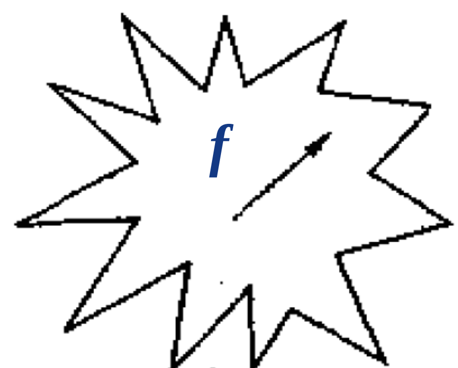
三维

$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$



n维

$f(t), a < t < b$



无限维

空间

- 空间-数学中的基本概念

用公理确定了元素与元素之间关系的集合

元素： 向量- $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$； 函数- $f(t)$

- 线性空间:定义了元素间代数运算(向量加法、数与向量乘法)的集合
- 距离空间/度量空间:定义了元素间距离的集合
- 赋范线性空间： 定义了元素范数(向量长度的推广)的线性空间
- 内积空间： 定义了元素间内积(积分运算)的线性空间
- Hilbert空间： 完备的内积空间 (引入极限概念)

线性空间

- 定义 (亦称向量空间)

令V为一集合且定义两个运算（向量加法与标量乘法）。若对對每个V上的向量**f, g, w**及每个标量c, d都符合下列公理時，則称V为一个向量空间。

1） $\mathbf{f} + \mathbf{g} \in V$ （加法封闭性）

2） $\mathbf{g} + \mathbf{f} = \mathbf{f} + \mathbf{g}$ （加法交换性）

3） $\mathbf{f} + (\mathbf{g} + \mathbf{w}) = (\mathbf{f} + \mathbf{g}) + \mathbf{w}$ （加法结合性）

4） $\mathbf{f} + \mathbf{0} = \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in V$

5） $\exists -\mathbf{f} \in V$ 使得 $\mathbf{f} + (-\mathbf{f}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{f} \in V$

线性空间

定义 (亦称向量空间)

令V为一集合且定义两个运算（向量加法与标量乘法）。若对對每个V上的向量$\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{w}$及每个标量$c, d$都符合下列公理時，則称$V$为一个向量空间。

6） $c\mathbf{f} \in V$ （标量乘法的封闭性）

7） $c(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = c\mathbf{f} + c\mathbf{g}$ （分配性）

8） $(c + d)\mathbf{f} = c\mathbf{f} + d\mathbf{f}$ （分配性）

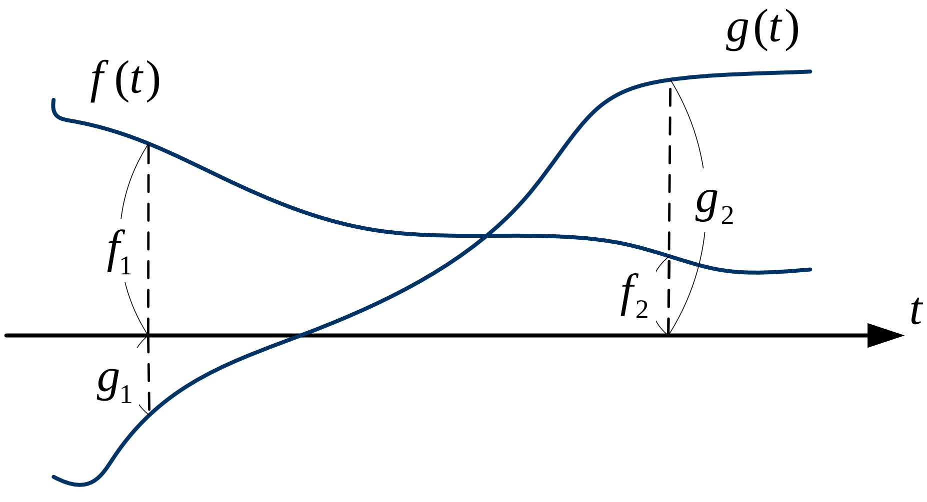
9） $c(d\mathbf{f}) = (cd)\mathbf{f}$ （结合性）

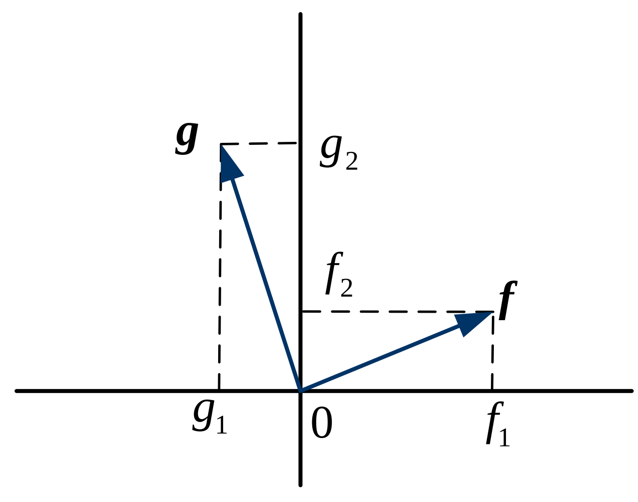
10） $1\mathbf{f} = \mathbf{f}$ （标量单位元素）

模与距离

2维向量

- 设对某信号$f(t)$采样，得到两个值f_1和f_2。同样也对某信号$g(t)$采样，得到两个值g_1和g_2。现在，每个信号序列是两个元素的向量，即信号由2维向量确定，将向量分别记为**f**, **g**，可表示为$\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$。



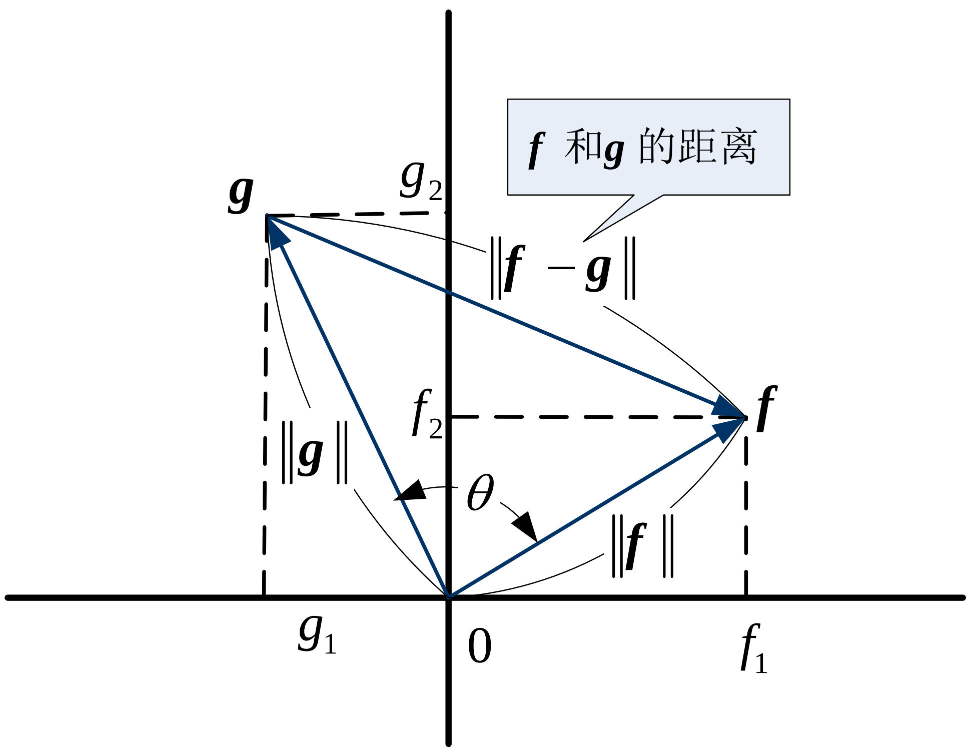


模与距离

2维向量的距离

- 向量f 和g向的距离是向量$\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}$的模

$$d(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) = \|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\| = \sqrt{(f_1-g_1)^2+(f_2-g_2)^2}$$



$$\|\boldsymbol{f}\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$

模与距离

N维向量的距离

向量*f*和*g*向的距离是向量*f*–*g*的模

$$d(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) = \|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N}(f_k-g_k)^2}$$

$$\|\boldsymbol{f}\| = \sqrt{f_1^2+f_2^2+\cdots+f_N^2}$$

$$\|\boldsymbol{f}\| = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_k^2}$$

函数间的距离

函数*f*和*g*向的距离是函数*f*–*g*的模

$$d\left(f(t),g(t)\right) = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(f(t)-g(t)\right)^2 dt}$$

$$\|f(t)\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$$

$$\|f(t)\| = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)dt}$$

范数

- 定义在赋范线性空间中函数，满足相应条件后的函数都可以被称为范数

1) 正值性 $p(f)\geq 0$

2) 正值齐次性 $p(af)=|a|\,p(f)$

3) 三角不等式 $p(f+g)\leq p(f)+p(g)$

4) 正定性 $p(f)=0\rightarrow f=0$

N维向量空间范数

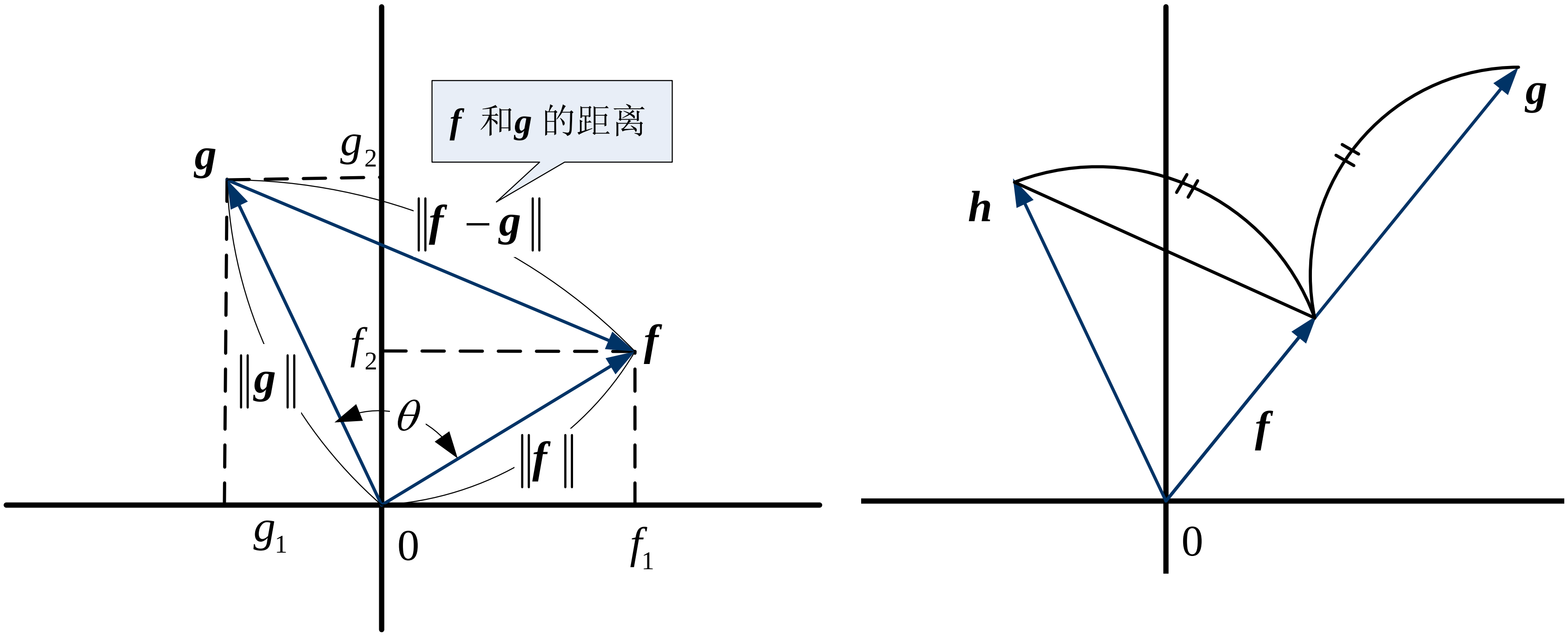
$$\|f\|_p=\left(\sum_{n=1}^{N}|f_n|^p\right)^{1/p}$$

函数空间范数

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b|f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

p-范数

内积

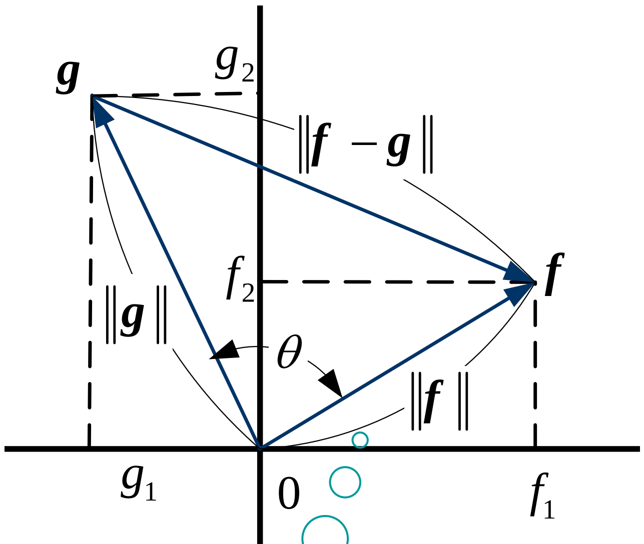


- 衡量向量间关系强弱，不仅需要向量间的距离，还需要讨论向量间的角度

内积

2维向量的内积

- 向量的内积可以用来表示向量的角度关系



$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \|\boldsymbol{f}\| \cdot \|\boldsymbol{g}\| \cos\theta$$

$$\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|^2 = \|\boldsymbol{f}\|^2 + \|\boldsymbol{g}\|^2 - 2\|\boldsymbol{f}\| \cdot \|\boldsymbol{g}\| \cos\theta$$
$$= \|\boldsymbol{f}\|^2 + \|\boldsymbol{g}\|^2 - 2\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle$$

$$2\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \|\boldsymbol{f}\|^2 + \|\boldsymbol{g}\|^2 - \|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|^2$$
$$= \left(f_1^2 + f_2^2\right) + \left(g_1^2 + g_2^2\right)$$
$$-\left\{(f_1 - g_1)^2 + (f_2 - g_2)^2\right\}$$
$$= 2\left(f_1 g_1 + f_2 g_2\right)$$

向量$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{g}$正交:
θ =90°，$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle$ =0

内积

2维向量的内积

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \|\boldsymbol{f}\| \cdot \|\boldsymbol{g}\| \cos\theta = f_1 g_1 + f_2 g_2$$

- 向量$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{g}$正交时(θ=90°)，内积 $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = 0$
- 向量$\boldsymbol{f}$与其本身的内积

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \rangle = f_1^2 + f_2^2 = \|\boldsymbol{f}\|^2$$

- 相关系数

$$r = \cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle}{\|\boldsymbol{f}\| \cdot \|\boldsymbol{g}\|} = \frac{f_1 g_1 + f_2 g_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2} \cdot \sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

内积

N维向量的内积

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \| \boldsymbol{f} \| \cdot \| \boldsymbol{g} \| \cos\theta$$
$$= f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_N g_N = \sum_{k=1}^{N} f_k g_k$$

- 向量***f***和***g***正交时(θ=90°），内积 $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = 0$
- 向量***f***与其本身的内积

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \rangle = \| \boldsymbol{f} \|^2$$

- 相关系数

$$r = \cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle}{\| \boldsymbol{f} \| \cdot \| \boldsymbol{g} \|} = \frac{\sum_{k=1}^{N} f_k g_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N} f_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{N} g_k^2}}$$

内积

函数内积

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt$$

- 函数**f** 和**g**正交时(**θ**=90°)，内积〈**f, g**〉= 0
- 函数**f** 与其本身的内积

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}\rangle = \|\boldsymbol{f}\|^2$$

- 相关系数

$$r = \cos\theta = \frac{\langle f(t), g(t)\rangle}{\|f(t)\|\cdot\|g(t)\|} = \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}}$$

内积

内积

令g, f与w为向量空間*V*的向量且*c*是任何标量。*V*上的内积是一个函数<g, f>，其将每一向量g对f对应到一个实数并满足下列公理

1) $\langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$

2) $\langle \mathbf{g}, \mathbf{f}+\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle + \langle \mathbf{g}, \mathbf{w} \rangle$

3) $c\langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle = \langle c\mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle$

4) $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle \geq 0$ 且 $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = 0$ 当且仅当 $\mathbf{f} = 0$

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle = g_1 f_1 + g_2 f_2 + \cdots + g_n f_n$$

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle = c_1 g_1 f_1 + c_2 g_2 f_2 + \cdots + c_n g_n f_n, \qquad c_i > 0$$

内积

- 正交投影 (orthogonal-projection)

令$\mathbf{g}$与$\mathbf{f}$为内积空间V上的两个向量且$\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$,

则$\mathbf{g}$正交投影到$\mathbf{f}$可表示为

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{f}}\mathbf{g} = \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle}{\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle}\mathbf{f}$$

- 注意:

若 $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = \|\mathbf{f}\|^2 = 1$ (v为单位向量),

则$\mathbf{g}$正交投影到$\mathbf{f}$可简写成

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{f}}\mathbf{g} = \langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle \mathbf{f}$$

内积

- 示例： 求R^3上的正交投影

  用R^3上的内积求 $\mathbf{u}=(6,2,4)$ 到 $\mathbf{v}=(1,2,0)$ 的正交投影 $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$

解：

$$\because \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (6)(1)+(2)(2)+(4)(0)=10$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1^2+2^2+0^2=5$$

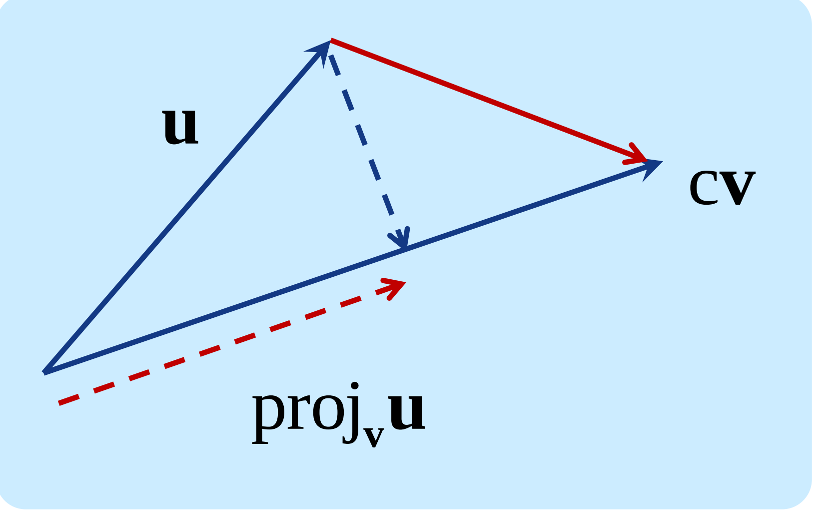
$$\therefore \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} = \tfrac{10}{5}(1,2,0)=(2,4,0)$$

内积

- 定理： 正交投影与距离

令u与v为内积空间上的两个向量且 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ，则

$$d(\mathbf{u}, \mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}) < d(\mathbf{u}, c\mathbf{v}), \qquad c \neq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$



分解与重构

线性组合

在向量空間V中的向量**v**称为在V中向量$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$的线性组合(linear combination)，如果可以写成以下形式，

$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$，其中$c_1, c_2, \ldots, c_n$为标量。

示例

令$\mathbf{v}_1=(1, 3, 1)$，$\mathbf{v}_2=(0, 1, 2)$，$\mathbf{v}_3=(1, 0, -5)$，则$\mathbf{v}_1$是$\mathbf{v}_2$与$\mathbf{v}_3$的线性组合。因为，$(1, 3, 1) = 3(0, 1, 2) + (1, 0, -5)$。也就是说，$\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$。

分解与重构

生成集合

令S = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$}为向量空间V的子集合。若在V中的每个向量均可写成S中向量的线性组合，則称S为V的生成集合。這种情况称为S生成V (*S* spans *V*.)。

示例

S = {(1, 0), (0, 1)}为平面空间的生成集合。因為所有平面中的向量$\mathbf{u} = (x_1, x_2)$都可写成$\mathbf{u} = x_1(1, 0) + x_2(0, 1)$。

同理， S = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}為三维空间的生成集合。

分解与重构

线性独立

在向量空间V中的向量集合$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$被成为线性独立(linear independent)，若下列向量方程式

$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, 只有一个平凡解(trivial solution)， $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$。若有非平凡解(nontrivial solution)，则S被成为线性相关 (linear dependent)。

示例

1. 在R^2中的集合$S = \{(1, 2), (2, 4)\}$为线性相关。因为，

   $-2(1, 2) + (2, 4) = (0, 0)$。

2. 在R^3中的集合$S = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-2, 0, 1)\}$为线性独立

分解与重构

- **底基：** 在向量空间V中的向量集合$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$被称为$V$的底基(basis)，若下列的情况成立：
  1. S生成V
  2. S为线性独立

- **示例**
  1. $S = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-2, 0, 1)\}$為$R^3$的底基
  2. 向量$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, …, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$称为R^n的标准底基

分解与重构

- 性质： 若$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$是向量空间$V$的底基，则$V$中的每一个向量都可唯一表示成$S$中向量的线性组合。

- 性质：令V为一個n维的向量空間， 若$S = S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 是一個在V中线性独立的集合，则S是V的底基。

- 示例

$S = \{\mathbf{v}_1=(1, 2, 3), \mathbf{v}_2=(0, 1, 2), \mathbf{v}_3=(-2, 0, 1)\}$为$R^3$的底基，
$\mathbf{u}=(2, 0, 0)$是向量空间R^3中的向量 。

$$\mathbf{u} = -2\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3$$

分解与重构

- 正交 (orthogonal)

在内积空间V上的集合S称为正交，若在S上每对向量均为正交

$$\mathbf{S}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}\subseteq\mathbf{V};\quad \langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle=0\quad i\neq j$$

- **单位正交 (orthonormal)**

若在S上每对向量均为正交且每个向量均为单位向量则称S为单位正交

$$\mathbf{S}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}\subseteq\mathbf{V};\quad \langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

- 注意：

若S为底基底，则分别称为正交底基 **(orthogonal basis)** 或单位正交底基 **(orthonormal basis)**

分解与重构

示例

$$S=\left\{\underset{\mathbf{v}_1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)},\ \underset{\mathbf{v}_2}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)},\ \underset{\mathbf{v}_3}{\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}\right\}$$

为R^3上的单位正交基

因为：

$$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}+0=0 \qquad \|\mathbf{v}_1\|=\sqrt{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}=\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+0}=1$$

$$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3=\frac{2}{3\sqrt{2}}-\frac{2}{3\sqrt{2}}+0=0 \qquad \|\mathbf{v}_2\|=\sqrt{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2}=\sqrt{\tfrac{2}{36}+\tfrac{2}{36}+\tfrac{8}{9}}=1$$

$$\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_3=-\frac{\sqrt{2}}{9}-\frac{\sqrt{2}}{9}+\frac{2\sqrt{2}}{9}=0 \qquad \|\mathbf{v}_3\|=\sqrt{\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_3}=\sqrt{\tfrac{4}{9}+\tfrac{4}{9}+\tfrac{1}{9}}=1$$

分解与重构

- **定理：** 正交集合为线性独立

  若 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ 为内积空间V上一些非零向量所构成的正交集合，则S为线性独立

- **推论**

  若V为n维的内积空间，则n个非零向量所构成的任意正交集合为V的底基。

- **问题?** 线性独立基是否是正交基?

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

$$\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

分解与重构

分解

若$B=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}$为内积空间V的单位正交基，则向量w相对于B的坐标表示为

$$\mathbf{w}=\langle\mathbf{w},\mathbf{v}_1\rangle\,\mathbf{v}_1+\langle\mathbf{w},\mathbf{v}_2\rangle\,\mathbf{v}_2+\cdots+\langle\mathbf{w},\mathbf{v}_n\rangle\,\mathbf{v}_n$$

证明:

因为 $B=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ 为V的底基

$$\mathbf{w}\in\mathbf{V}$$

$$\mathbf{w}=k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+\cdots+k_n\mathbf{v}_n$$ (唯一表示)

$\because B=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ 为单位正交基

$$\Rightarrow\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

分解与重构

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{w}\,,\mathbf{v}_i\rangle &= \langle (k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n)\,,\mathbf{v}_i\rangle \\ &= k_1\langle \mathbf{v}_1\,,\mathbf{v}_i\rangle + \cdots + k_i\langle \mathbf{v}_i\,,\mathbf{v}_i\rangle + \cdots + k_n\langle \mathbf{v}_n\,,\mathbf{v}_i\rangle \\ &= k_i \qquad\qquad \forall i\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{w} = \langle \mathbf{w},\mathbf{v}_1\rangle\mathbf{v_1} + \langle \mathbf{w},\mathbf{v_2}\rangle\mathbf{v_2} + \cdots + \langle \mathbf{w},\mathbf{v_n}\rangle\mathbf{v_n}$$

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{v}_i}\mathbf{w} = \langle \mathbf{w}\,,\mathbf{v}_i\rangle\mathbf{v}_i$$

- 注意

若 $B = \{\mathbf{v}_1\,,\mathbf{v}_2\,,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ 为**V**的单位正交基且 $\mathbf{w}\in\mathbf{V}$

则**w**相对于***B***的坐标矩阵为

$$[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix}\langle \mathbf{w},\mathbf{v}_1\rangle \\ \langle \mathbf{w},\mathbf{v}_2\rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{w},\mathbf{v}_n\rangle\end{bmatrix}$$

分解与重构

性质

若$B=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}$为内积空间V的单位正交基，则

$\mathbf{w}\in\mathbf{V},\ \mathbf{u}\in\mathbf{V}$

若 $\mathbf{w}=\mathbf{u}$ 则 $[\mathbf{w}]_B=[\mathbf{u}]_B$

若 $\mathbf{w}\neq\mathbf{u}$ 则 $[\mathbf{w}]_B\neq[\mathbf{u}]_B$

分解与重构

- 示例

求$\mathbf{w}=(5,-5,2)$ 相对于下列 R^3单位正交基的坐标

$$B=\quad\{(\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5},0),\quad(-\tfrac{4}{5},\tfrac{3}{5},0),\quad(0,0,1)\}$$

解：

$$\langle\mathbf{w},\mathbf{v}_1\rangle=\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}_1=(5,-5,2)\cdot(\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5},0)=-1$$

$$\langle\mathbf{w},\mathbf{v}_2\rangle=\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}_2=(5,-5,2)\cdot(-\tfrac{4}{5},\tfrac{3}{5},0)=-7$$

$$\langle\mathbf{w},\mathbf{v}_3\rangle=\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}_3=(5,-5,2)\cdot(0,0,1)=2$$

$$\Rightarrow[\mathbf{w}]_B=\begin{bmatrix}-1\\-7\\2\end{bmatrix}$$

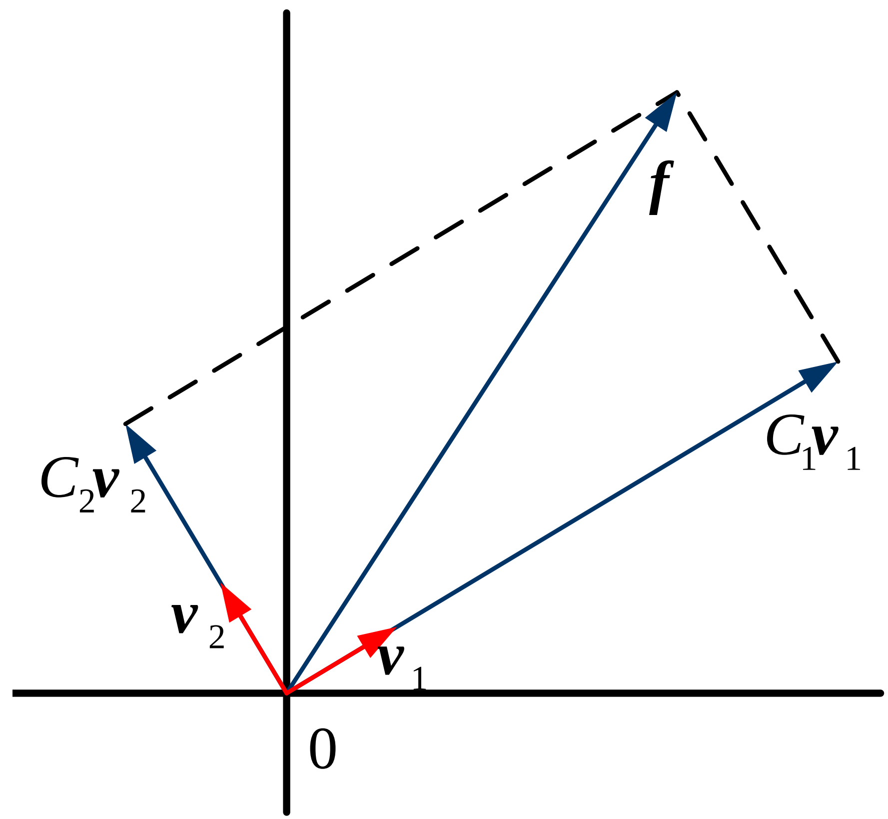
分解与重构

- 示例

对于任何一个向量f，依据给定的标准正交基底$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$，其系数$(C_1, C_2)$可由f 和$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$的内积给出：

$C_1 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_1 \rangle$

$C_2 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_2 \rangle$



分解与重构

问题

若向量空间V有一个由有限个向量所形成的底基，则称V是有限维数的(finite dimensional)。反之，则称为V为无线维数的(infinite dimensional)。

$$\mathbf{w} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v_1} + \cdots + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v_n} \rangle \mathbf{v_n} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$$

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle|^2$$

Hilbert空间

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=m}^{\infty} |\mathbf{w} - \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i|^2 = 0$$

$$\mathbf{w} \approx \sum_{i=1}^{m} \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$$

分解与重构

标准正交函数集

考察包含无穷多函数的正交函数集$\{\phi_k(t), k = 0,1,2, \dots\}$，满足此函数族中的任何两个函数在区间$[a, b]$正交：

$$\langle \phi_m(t), \phi_n(t) \rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi_m(t)\phi_n(t)dt = K_n\delta(m-n), \quad K_n \neq 0$$

当$K_n = 1$时，称为标准正交函数集

任意的函数近似表示为正交函数的线性组合

$$f(t) \approx \sum_{n=0}^{N} C_n\phi_n(t)$$

要使其均方误差最小，正交函数分量的系数C_n应为

$$C_n = \frac{\langle f(t), \phi_n(t) \rangle}{\langle \phi_n(t), \phi_n(t) \rangle} = \frac{1}{K_n}\int_a^b f(t)\phi_n(t)dt$$

分解与重构

复函数

复函数在区间[**a**, **b**]正交的条件可写为:

$$\langle \phi_m(t), \phi_n(t) \rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi_m(t)\phi_n^*(t)dt = K_n\delta(m-n), \quad K_n \neq 0$$

任意一个复函数 $f(t)$在区间[**a**, **b**]表示为正交函数集 $\{\phi_k(t),\ k = 0,1,2,\ \ldots\}$内正交函数分量的线性组合

$$f(t) \approx \sum_{n=0}^{N} C_n\phi_n(t)$$

要使其均方误差最小，正交函数分量的系数C_n应为

$$C_n = \frac{\langle f(t), \phi_n(t) \rangle}{\langle \phi_n(t), \phi_n(t) \rangle} = \frac{1}{K_n}\int_a^b f(t)\phi_n^*(t)dt$$

分解与重构

完备的正交函数集

- 正交函数集$\{\phi_n(t), n = 0,1,2, \ldots\}$在区间$[a, b]$近似表示函数$f(t)$

$$f(t) \approx \sum_{n=0}^{N} C_n \phi_n(t)$$

- 其均方误差

$$\varepsilon = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[f(t) - \sum_{n=0}^{N} C_n \phi_n(t) \right]^2 dt$$

- 正交函数集$\{\phi_n(t), n = 0,1,2, \ldots\}$为完备的正交函数集的条件

$$\lim_{N \to \infty} \varepsilon = 0$$

分解与重构

- 帕斯瓦尔(Parseval)定理

$$0=\int_a^b\left[f(t)-\sum_{n=0}^{\infty}C_n\phi_n(t)\right]^2dt$$

$$=\int_a^b\left[f^2(t)-2f(t)\sum_{n=0}^{\infty}C_n\phi_n(t)+\left(\sum_{n=0}^{\infty}C_n\phi_n(t)\right)^2\right]dt$$

$$=\int_a^b f^2(t)dt-2\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(C_nK_n\right)+\left[\sum_{n=0}^{\infty}C_n^2K_n+0\right]$$

$$=\int_a^b f^2(t)dt-\sum_{n=0}^{\infty}C_n^2K_n$$

$$\Rightarrow\int_a^b f^2(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^2K_n$$

分解与重构

示例 － Fourier变换

复函数集

$$\{e_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{jnt};n=0,\pm1,\pm2,\cdots\infty\}$$

构成$L^2(-\pi,\pi)$的 完备正交函数集

- 正交

$$\langle e_n(t),e_m(t)\rangle=\delta(n-m)$$

- 完备: 任何 $L^2(-\pi,\pi)$中的函数$f(t)$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}c_ne_n(t)\qquad c_n=\langle f(t),e_n(t)\rangle$$

分解与重构

示例 – Fourier变换

任何$L^2(a, b)$上的函数都可以对应为$L^2(-\pi, \pi)$上的函数

$$g(t)=f\left(\pi\left(1-2\frac{b-t}{b-a}\right)\right)$$

则

$$g(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\widehat{g}(n)e^{j2\pi nt/(b-a)}$$

$$\widehat{g}(n)=\tfrac{1}{b-a}\int_a^b g(t)e^{-j2\pi nt/(b-a)}dt$$

分解与重构

- 示例 – Fourier变换

$$g(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\hat{g}(n)e^{j2\pi nt/(b-a)}$$

$$\hat{g}(n)=\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)e^{-j2\pi nt/(b-a)}dt$$

记

$$T=b-a;\quad \omega=2\pi/T$$

$$g(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\hat{g}(n)e^{jn\omega t}$$

$$\hat{g}(n)=\frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{-jn\omega t}dt$$

Fourier级数

分解与重构

- 示例 － Fourier变换

$$g(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\widehat{g}(n)e^{j2\pi nt/(b-a)}$$

$$\widehat{g}(n)=\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)e^{-j2\pi nt/(b-a)}dt$$

如果

$$a=-\infty; b=+\infty$$

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\widehat{g}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{-j\omega t}dt$$

Fourier变换

分解与重构

- **信号分解**是将一个信号$f(x)$与一系列函数$\{e_n(x)\}$做内积运算所得到的值

$$c_n = \langle f, e_n \rangle, \quad n \in Z$$

C_n称之为分解系数；它是$f(x)$在基函数上的投影，因而能给出$f(x)$中含有的与$e_n(x)$相关联的信息

- **信号重构**是在不对分解系数做任何加工的条件下，根据分解系数得到原信号

$$f(x) = \sum_n c_n \tilde{e}_n(x) = \sum_n \langle f, e_n \rangle \tilde{e}_n(x)$$

分解与重构

- 信号分解与重构的应用

1) 方程求解

$$\frac{d^p f(t)}{dt^p} \approx \sum_{n=0}^{N} C_n \frac{d^p \phi_n(t)}{dt^p}$$

2) 信息提取(频谱分析、相似性)

3) 数据压缩(收敛性、集中性)

…

如何根据需求构造变换基?

上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

谢谢聆听
欢迎交流

SKL 国家重点实验室
STATE KEY LABORATORY