

第 1 章补充作业 1 答案

1.假设在某段时间内可以用于投资的资金为 10 万元，有 5 个适合投资的项目，它们所需要的投资额和将产生的利润如下表：

投资项目	所需最小投资额（元）	利润（元）
1	25000	1000
2	10000	800
3	30000	1200
4	20000	1000
5	35000	1800

若每个项目最多投资一次，试分别以利润和投资回报率作为目标，写出确定最优投资的数学模型。

解：设 $x_i = \begin{cases} 1, & \text{投资第 } i \text{ 个项目} \\ 0, & \text{不投资第 } i \text{ 个项目} \end{cases}$ ， $i = 1, \dots, 5$ ，则（以万元为单位）

利润作为目标：

$$\begin{aligned} \max & 0.1x_1 + 0.08x_2 + 0.12x_3 + 0.1x_4 + 0.18x_5 \\ \text{s.t.} & 2.5x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3.5x_5 \leq 10 \\ & x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

投资回报率作为目标：

$$\begin{aligned} \max & \frac{0.1x_1 + 0.08x_2 + 0.12x_3 + 0.1x_4 + 0.18x_5}{2.5x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3.5x_5} \\ \text{s.t.} & 2.5x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3.5x_5 \leq 10 \\ & x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

2.某制造企业向客户提供一种机器，根据合同规定，第 i 季度末需交货 c_i 台 ($i=1,2,3,4$)。现在该企业第 i 季度的最大生产能力为 b_i 台，若用 x 表示该企业在第 i 季度的生产机器台数，则第 i 季度的生产费用为 $f_i(x)$ 元。当企业在某季度生产量超过交货量时，需将超过的机器存储起来等到下季度才交货，第 i 季度的存储费为每台 p_i 元，并且不允许缺货。那么如何制定年生产计划，才能既履行交货合同，又使总费用最少？

解：设 x_i ：第 i 个季度的生产量， z_i ：第 i 个季度末的库存量， $i=1,\dots,4$ ，则

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^4 (f_i(x_i) + p_i z_i) \\ \text{s.t. } & z_i = z_{i-1} + x_i - c_i, i=1, \dots, 4 \\ & z_0 = 0 \\ & 0 \leq x_i \leq b_i, z_i \geq 0, i=1, \dots, 4 \end{aligned}$$

3.一家酒店利用网络系统为常客户开设标准间和商务间两类客房的预定服务，酒店以一周（从周一到周日，记作第 1 天到第 7 天）为一个时段处理此项业务。现在酒店收到旅行社提出的一个一周的预定需求单，分别用 d_{1ij} 和 d_{2ij} 表示旅行社提出的标准间和商务间从第 i 天住到第 j 天的需求数量($1 \leq i \leq j \leq 7$)。酒店对旅行社给出两类客房的报价单，分别用 R_{1ij} 和 R_{2ij} 表示酒店给出的标准间和商务间从第 i 天住到第 j 天的报价($1 \leq i \leq j \leq 7$)。酒店根据房源剩余情况，明确两类客房的可供应量，分别用 c_{1l} 和 c_{2l} 表示标准间和商务间第 l 天的可供应量。如果完全按照客户提出的不同价位预订要求，那么应如何制定分配方案，使酒店收入最大？

设 x_{lij} ：酒店提供从第 i 天入住到第 j 天的 k 类房间数， $1 \leq i \leq j \leq 7$ ， $k = \begin{cases} 1, & \text{标准间} \\ 2, & \text{商务间} \end{cases}$ ，

则

$$\begin{aligned} \max & \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^7 \sum_{j=i}^7 R_{kij} x_{kij} \\ \text{s.t. } & 0 \leq x_{kij} \leq d_{kij}, k=1, 2, 1 \leq i \leq j \leq 7 \\ & \sum_{i, j: i \leq l \leq j} x_{kij} \leq c_{kl}, k=1, 2, l=1, \dots, 7 \end{aligned}$$