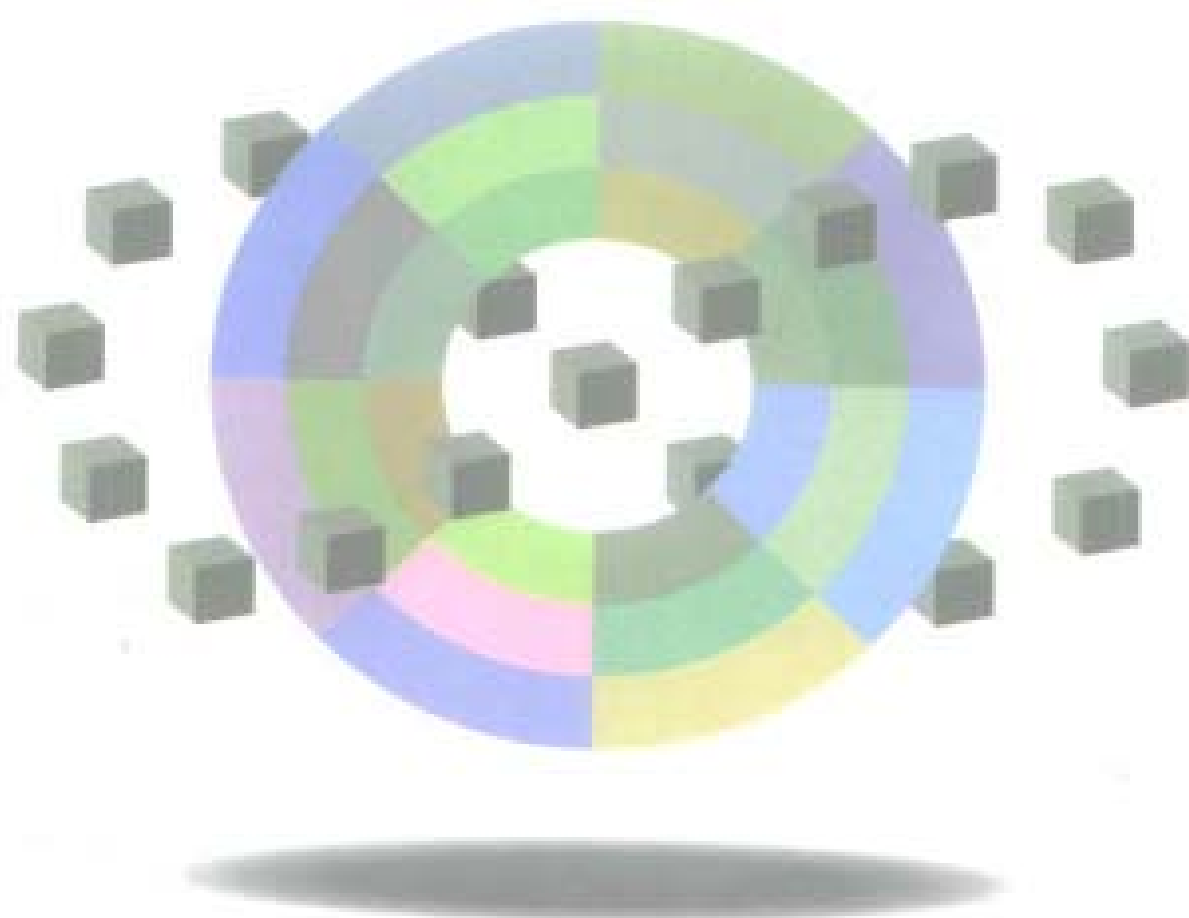


信号处理入门

(日) 雨宫好文 主编 佐藤幸男 著



科学出版社 OHM社

图字: 01 - 1999 - 2500 号

Original Japanese edition

Zukai Mekatoronikusu Nyuumon Shirizu: Shingo Shori Nyuumon (Kattei 2-han)

Supervised by Yoshifumi Amemiya

Written by Yukio Sato

Copyright © 1999 by Yukio Sato

published by Ohmsha, Ltd.

This Chinese language edition is co-published by Ohmsha, Ltd. and science press.

Copyright © 1999

All rights reserved.

本书中文版版权为科学出版社和 OHM 社所共有

圖解メカトロニクス入門シリーズ

信号處理入門(改訂2版)

佐藤幸男 オーム社 1999 改訂2版 第1刷

图书在版编目(CIP)数据

信号处理入门: 第2版/(日) 佐藤幸男著; 宋伟刚译.

北京: 科学出版社, 2000

ISBN 7-03-007998-1

I. 信… II. ①佐… ②宋… III. 信号处理 - 基本知识

IV. TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 65154 号

科学出版社 OHM 社 出版

北京东黄城根北街 16 号 邮政编码: 100717

北京东方科龙电脑图文制作有限公司 制作

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

2000 年 1 月第 一 版 开本: 889 × 1194 1/32

2000 年 1 月第一次印刷 印张: 5 1/8

印数: 1—5 000 字数: 132 000

定价: 16.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈北燕〉)

TN911.7

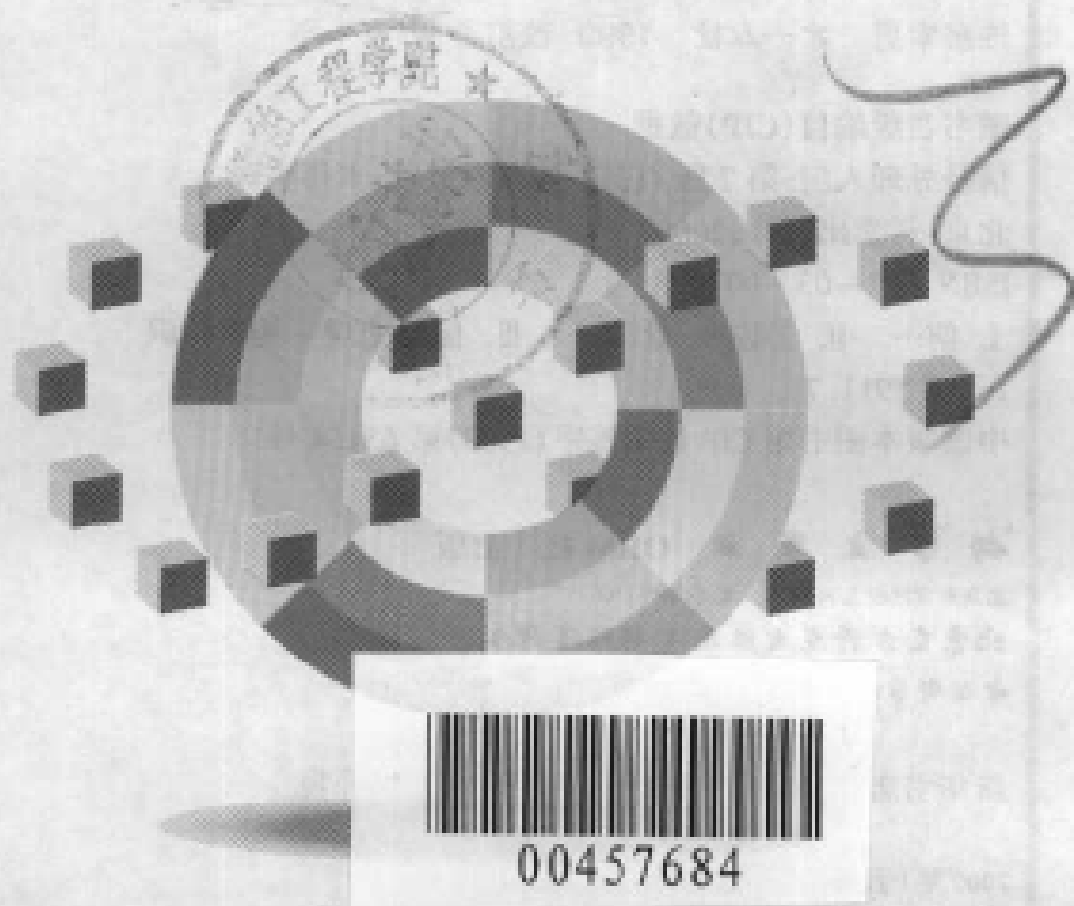
Z99

0022-0992 457684

图解 机电一体化入门系列

信号处理入门

〔日〕雨宫好文 主编 佐藤幸男 著
宋伟刚 译 于忠升 校



科学出版社 OHM社

2000 北京

图字: 01 - 1999 - 2500 号

Original Japanese edition

Zukai Mekatronikusu Nyuumon Shirizu: Shingo Shori Nyuumon (Kattei 2-han)

Supervised by Yoshifumi Amemiya

Written by Yukio Sato

Copyright © 1999 by Yukio Sato

published by Ohmsha, Ltd.

This Chinese language edition is co-published by Ohmsha, Ltd. and science press.

Copyright © 1999

All rights reserved.

本书中文版版权为科学出版社和 OHM 社所共有

圖解メカトロニクス入門シリーズ

信号處理入門(改訂2版)

佐藤幸男 オーム社 1999 改訂2版 第1刷

图书在版编目(CIP)数据

信号处理入门: 第2版/(日) 佐藤幸男著; 宋伟刚译.

北京: 科学出版社, 2000

ISBN 7-03-007998-1

I. 信… II. ①佐… ②宋… III. 信号处理 - 基本知识

IV. TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 65154 号

科学出版社 OHM 社 出版

北京东黄城根北街 16 号 邮政编码: 100717

北京东方科龙电脑图文制作有限公司 制作

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

2000 年 1 月第 一 版 开本: 889 × 1194 1/32

2000 年 1 月第一次印刷 印张: 5 1/8

印数: 1—5 000 字数: 132 000

定价: 16.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈北燕〉)

主 编 的 话

图解机电一体化入门系列是从 1983 年开始出版的。

当时,机电一体化一词刚刚被社会认可。机械工程技术人员都有一种“不学习电子技术,就会落后于时代……”的危机感。每次举办讲座都是座无虚席。

“对于初学者来说,学习哪些内容能最有效?”,针对这一问题,我们进行了研究。在确定了以此为本套丛书的编写方针后,我们进行了相应的选题。事实证明,我们的预见是正确的。从那时起至今十几年,这套丛书还继续受到读者的喜爱,读者至今已超过 10 万。

这次,我们根据读者提出的各种建议,对本套丛书进行了修订,改版后奉献给大家。这次改版,除了对上版中的内容进行了详细地修订外,为方便读者的学习,还在各章结尾处添加了本章要点和练习题等内容。

在这次改版的过程中,我们还讨论了在本套丛书中应融入多少机电一体化领域最新进展的问题。其结果是我们认为本套丛书还应继续保持“面向初学者”这一有特色的编写方针,将那些属于机电一体化“后续课程”的内容,让位于市面上正在推出的其它参考书。

本次改版的有以下 8 本书,希望能满足您的学习要求。

- | | |
|-------------------|------------|
| (1)传感器入门 | (2)控制用微机入门 |
| (3)控制用电机入门 | (4)机器人控制入门 |
| (5)数字控制入门 | (6)信号处理入门 |
| (7)CAD/CAM/CAE 入门 | (8)接口电路入门 |

雨宫好文

前 言

初涉一门新学科,一般都希望首先得到一本“入门书”。但是,虽说是入门书有的也非常难于理解,或者是像杂志的解说和报道那样,虽然可以顺利地阅读,但结果在脑中什么也没有留下,这样的经验大家都曾有过。特别是在肉眼看不见的“信号”作为研究对象的领域中,常见的书都要求读者必须具备较好的数学基础,并以此展开书中内容。即使是回避复杂的理论,仅罗列能够很快用于实际的技术,但在进步迅速的本领域中,内容也很快就会变得陈旧了。为此,在本书中以学习信号处理所必要的,即以最基本的和最普遍的内容为重点,努力把本书写成易于理解的信号处理入门书。

应该注意到,即使从技术应用上看有所区别,但从深层的角度看,它们的理论基础却有很多共同点。因此,只要我们最初多付出些努力,牢固地掌握基础知识,就可以做到触类旁通,即使对象发生了一些变化,也不会感到束手无策。

由此观点出发,本书集中讨论的问题是进行信号处理所必须掌握的最低限度的知识,采用易于理解的表述方式和思路,说明其关键问题。虽说是入门书,并不进行过于概括的表述,也不追求数学上的严密性。力争使物理上的直感和理论上的系统在头脑中很好地联系起来。

随着计算机的高性能化和普及,在信号处理中数字信号处理越来越重要。即使对将来要学习数字信号处理的读者,首先通读本书,也将有助于更深入理解数字信号处理的内容。

本书是1987年出版的《图解机电一体化入门丛书 信号处理入门》的修订版。与初版最大的不同是在各章后面新增加了“本章要点”和“练习题”,并在书末给出了“练习题答案”。因此,可使

6 前 言

读者比第一版更容易学习和掌握。

在本书的编写过程中,从书的构成到内容的细微部分都受到了主编雨宫好文先生的指教。另外,在修订过程中,千叶工业大学的佐波孝彦博士、名古屋工业大学的盐川茂树博士都提出了很好的建议和帮助。在这里衷心向他们表示感谢。

佐藤幸男

目 录

第 1 章 信号处理

1.1 什么时候需要信号处理	11
1.2 信号的种类	12
1.2.1 随机信号	12
1.2.2 各种确定信号	15
1.3 模拟信号和数字信号	17
1.4 采样问题	20
本章要点	25
练习题	26

第 2 章 信号处理的例子

2.1 波形的平滑	27
2.2 噪声的降低	30
本章要点	33
练习题	33

第 3 章 数学基础知识的准备

3.1 为学习信号处理	35
3.2 信号的表达	35
3.3 2 维向量的距离和内积	38
3.4 标准正交基底	43
3.5 从多维向量空间到函数空间	46
3.6 标准正交函数系	50

本章要点	55
练习题	56

第 4 章 相关函数

4.1 计算函数的类似性	57
4.2 互相关函数	60
4.3 自相关函数	64
本章要点	66
练习题	67

第 5 章 傅里叶级数展开

5.1 何谓傅里叶级数展开	69
5.2 偶函数和奇函数	76
5.3 周期不是 2π 的情况	78
5.4 复傅里叶级数展开	79
5.4.1 复数的运算	80
5.4.2 推导复傅里叶级数的展开	84
5.4.3 复傅里叶级数展开的例子	89
5.5 帕斯瓦尔定理	91
5.6 傅里叶级数展开的实例	92
5.7 傅里叶级数展开的重要性质	95
5.7.1 近似的误差	95
5.7.2 间断点	98
5.7.3 信号大小变化	99
5.7.4 两个信号的相加	100
5.7.5 信号的移动	100
本章要点	102
练习题	103

第 6 章 DFT 和 FFT

6.1 数字信号的傅里叶分析	105
6.2 离散傅里叶变换(DFT)	106
6.3 DFT 的性质	110
6.3.1 频谱的周期性	110
6.3.2 频谱的对称性	110
6.4 快速傅里叶变换(FFT)	112
6.4.1 DFT 的分析	113
6.4.2 4 个数据的 FFT 算法	116
6.4.3 FFT 算法的一般化	120
6.4.4 位变换和混合技术	123
本章要点	126
练习题	127

第 7 章 傅里叶变换

7.1 从傅里叶级数展开到傅里叶变换	129
7.2 傅里叶变换的性质	132
7.2.1 线性性质	132
7.2.2 波形的移动	132
7.2.3 相似性质	133
7.2.4 帕斯瓦尔定理	134
7.3 δ 函数和白噪声	135
本章要点	138
练习题	139

第 8 章 线性系统的分析

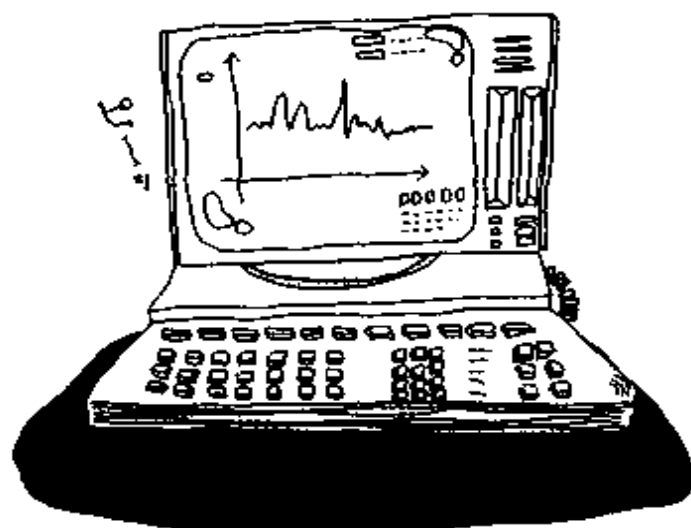
8.1 线性系统分析的探讨	141
8.2 输入和输出信号的关系	143
8.3 脉冲响应	147
8.4 频率域上的系统表达	148

10 目 录

本章要点	152
练习题	152
练习题答案	155

第 1 章

信号处理



1.1 什么时候需要信号处理

每天使用的机械的声调有点不正常,发出了奇怪的声音。如果你是一个熟练的技术人员,此时,从这异常的声音也许你能够发现机械的不正常所在。若是呜呜的低音,可能是轴承的振动,或螺栓松动所引起的。若是咯吱咯吱的高音,也许是没有油了,或者是旋转处的磨擦所致。如果在声音的信号中包含反映机械状态的信息,计算机也许能像熟练技术人员那样诊断出机械的故障。实际上,目前已经提出使用信号处理技术,根据车床切削时的声音信号,用计算机自动判断切削工具的更换时刻。使用信号判断对象的状态——此时就要用到信号处理技术。

在现实中经常会出现一些困扰,如:传送声音信号时,由于较大的杂音使想听到的声音不能很好地收听,传真的图像不清晰等。尽量抑制多余的噪声,提取出需要的信号,或者使信号变得更清楚——此时要用到信号处理技术。

信号是包含信息的物理量,它也许是声音、振动或者是温度和光的强度等。这些物理量都必须是能够观测的,一般是由相应

的传感器将其变换为电信号。因此,目前对味觉和气味的信号处理还比较困难,当然超自然现象的信号处理更是不可能的。

同样是处理,说起污水处理之类好像与信号处理风马牛不相及。但是,从将包含多种成分的对象物中把需要保留的成分和不需要保留的成分分离出来这一点上,信号处理和污水处理都是同样的处理。预先知道作为对象的信号具有什么样的性质,或者包含什么样的成分时,将它们提取出来进行处理也许是信号处理的最终目标。但是,当不很了解对象物的性质时,首先必须很好地研究其信号具有的特性,以及对象的物理性质和信号的对应关系,这就是信号的分析,换句话说必须对信号的来源进行分析。这需要信号处理的理论。通过对信号的分析,也许会发现至此还没有注意到的对象物的特征。

信号处理技术也应用于信号合成。常见的“发声机”就使用了声音合成技术。只要了解了声音的组成,就可以利用声音的各个成分进行合成。这时就利用了信号处理的方法。

关于这本书的使用者,作者认为,本书对于“想学习信号处理,而又没有预备知识,看哪本书都觉得难以理解”——的人有所帮助。

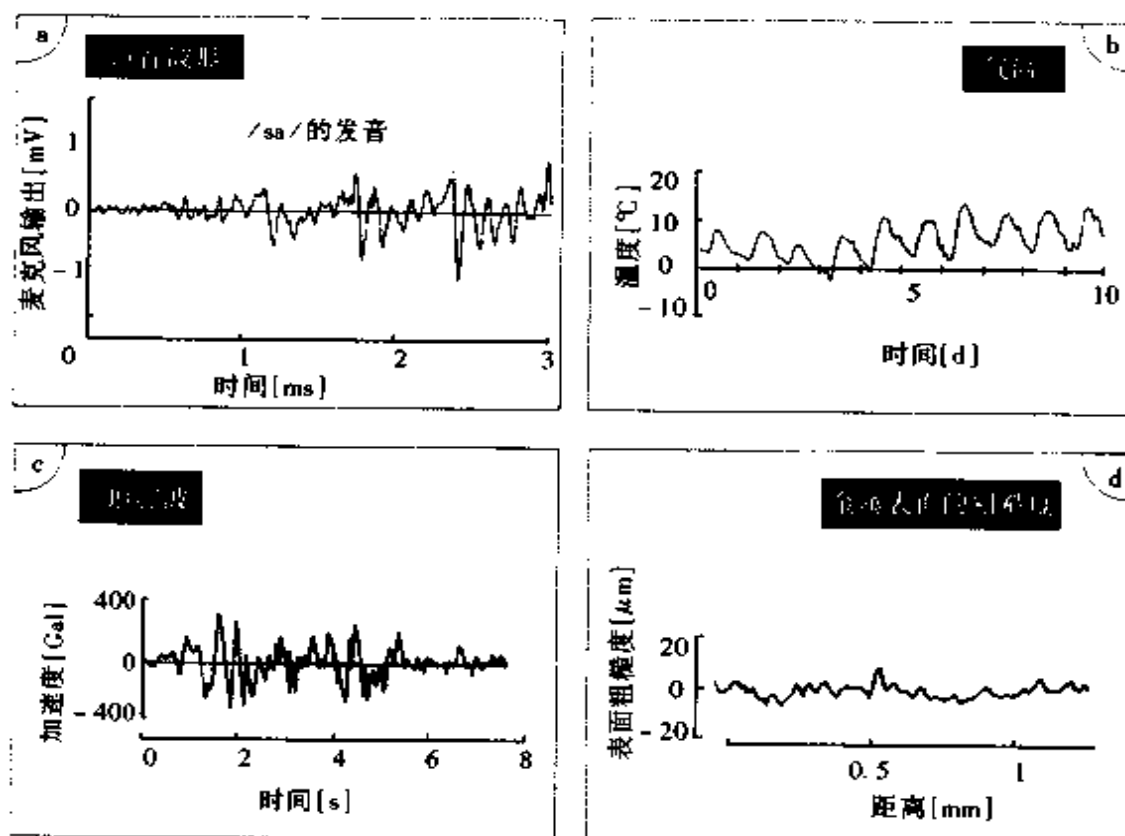
1.2 信号的种类

1.2.1 随机信号

图 1.1 给出了各种信号的波形。各信号依次为(a)声音波形,(b)气温,(c)地震波,(d)金属表面的粗糙度。它们所表示的是完全不同的物理量。而且既有如(a)~(c)那样以时间为变量的信号,也有如(d)是以物体表面的某一方向的位置为变量的信号。而且,即使都是时间函数的信号,其纵轴的刻度也都是完全不同的。物理量的单位是什么,函数的刻度是怎样的,这在实际做信号处理时是不可忽视的、非常重要的问题。今后不会再去特意地强调,但希望读者要充分注意这一问题。

现在给出的信号都是仅有时间或者位置之类一个变量的信号。但也有具有两个以上变量的信号,其代表是图像信号。图 1.2

信号,有各种各样的



物理量不同
单位不同
变量的刻度不同

注意! 注意!



图 1.1 各种各样的信号

(a)所示的是电视的画面,在画面上取正交的两个坐标轴 $x-y$ 构成的平面坐标系,若将点 (x, y) 的画面的辉度(亮度)用 $g(x, y)$ 表示,它仍然也可以看作一种信号。实际上,若把图(a)的图像信号 $g(x, y)$ 表示为立体图便成为图(b)。有一个变量的信号称为一维信号,当然如同图像信号那样具有两个变量的信号就称为二维信号。

然而,上述的信号都是知道了某一时刻(地点)的测定值,却不能确定其后的信号变化趋势。例如气温信号,即使知道了今天中午的气温,虽然也能够某种程度上预测明天中午的气温,但却不能确切地知道。这样的信号称为**随机信号**(random signal)。相反,也有任何时刻(地点)的数值能够被其前某一时刻(地点)的数值所确定的信号。比如音叉的声音,不论如何地摇动,总能发出准确的单一频率的声波。由于此波可以由三角函数表示,当观测点确定后,其声波的强度可以准确地表示为时间的函数。这样的信

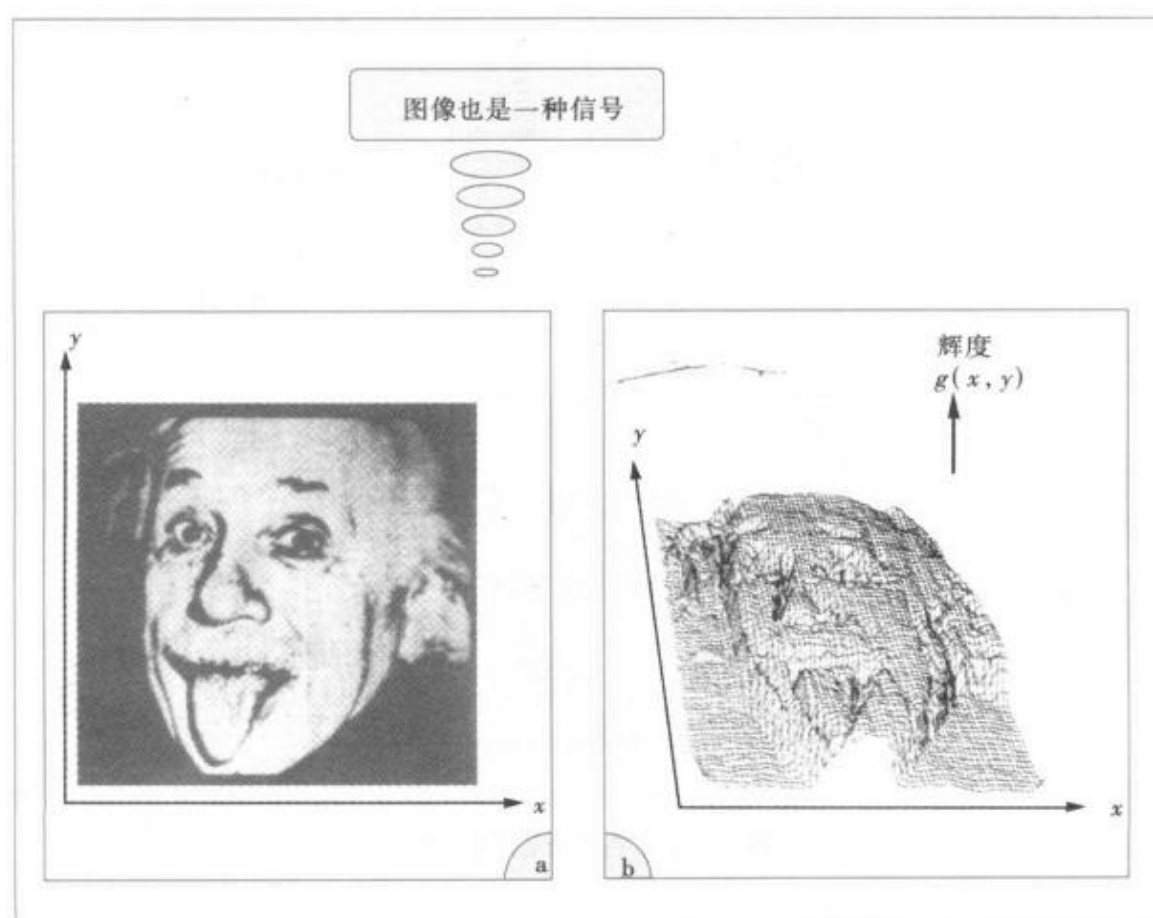


图 1.2 图像信号的表达

号称为**确定信号**(deterministic signal)。

1.2.2 各种确定信号

确定信号之中最具代表性的是**正弦波**。随时间 t 变化的正弦波 $f(t)$ 可写成

$$f(t) = A \sin(\omega t + \theta)$$

A 表示信号的大小,称为**振幅**(amplitude), ω 称为**角频率**(angular frequency), θ 称为**相位**(phase)。

如同正弦波,在某个一定的时间间隔后重现相同波形的信号称为**周期信号**(periodic signal)。当周期信号的周期为 T 时,此信号在时间轴方向错开 T ,或者 $2T, 3T, \dots$ 出现相同波形的信号。如果写成一般的形式,周期信号对于整数 n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 下式成立

$$f(t + nT) = f(t)$$

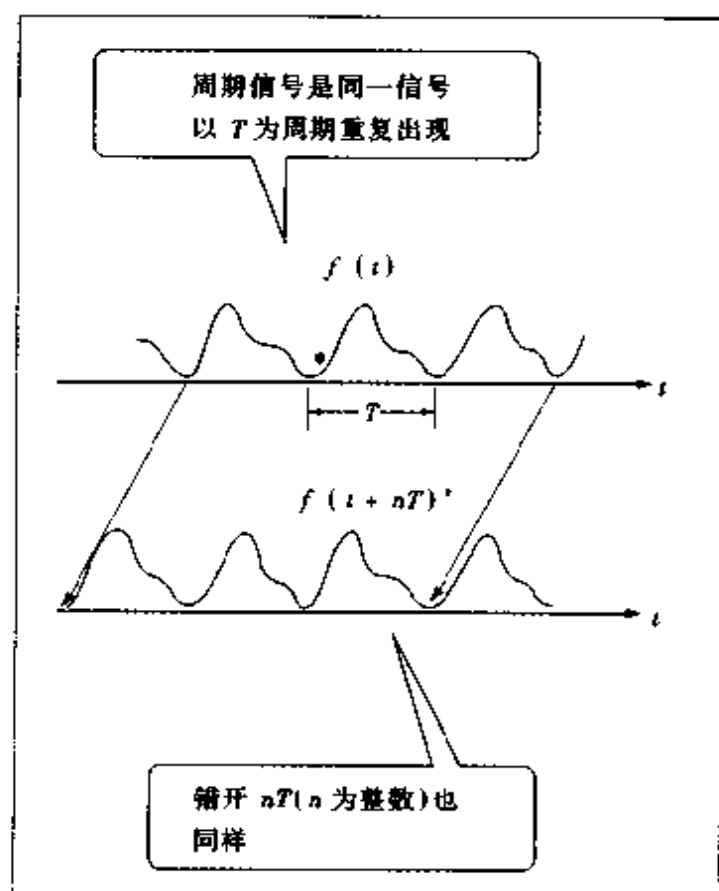


图 1.3 周期信号

* 原书误印成“ T ”。——译者注

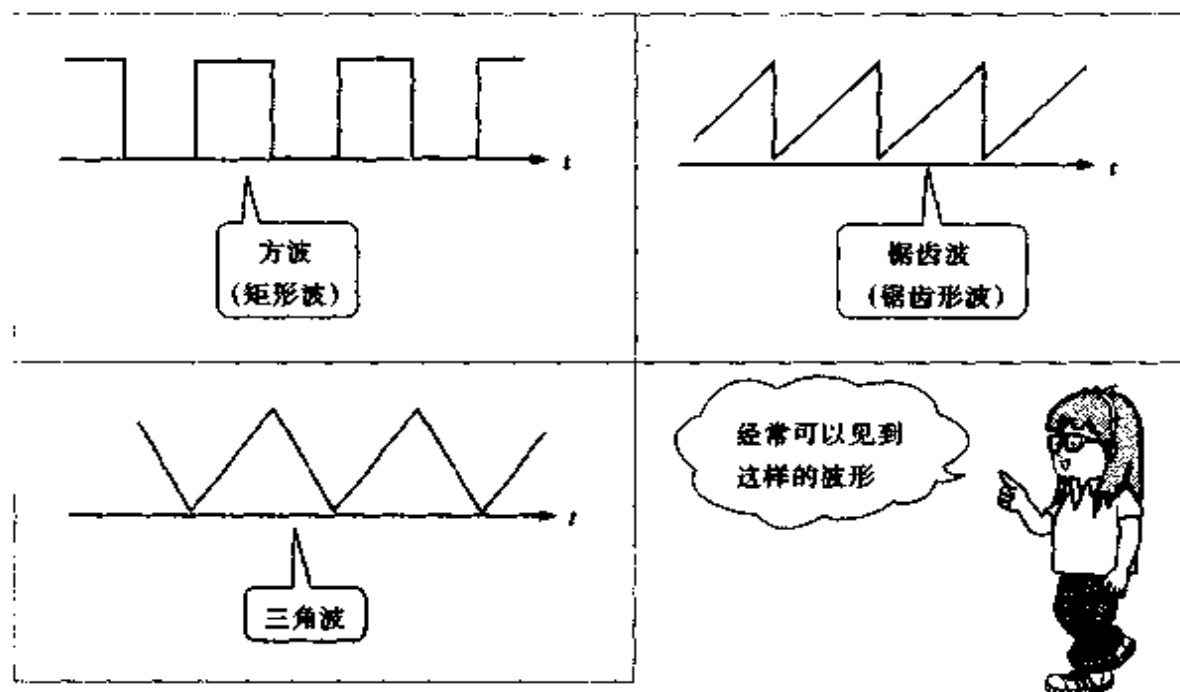


图 1.4 典型的周期信号

例如函数 $\sin t$ 在具有周期 $T=2\pi$ 的同时, $4\pi, 6\pi, \dots$ 也是周期。由此可知, 周期信号是以整数倍为间隔呈周期出现。最短的周期称之为基本周期。

除正弦波以外常见的周期信号有方波 (矩形波), 锯齿波 (锯齿形波), 三角波等 (图 1.4)。

在某一短时间内能量集中的信号, 例如图 1.5 所示的单个信号称为脉冲信号。在稍微广泛的意义上, 把能量是有限的, 经历足够短的时间后完全消失的信号称为孤立波。由于周期信号在无限区间上具有能量, 当然它不是孤立波。

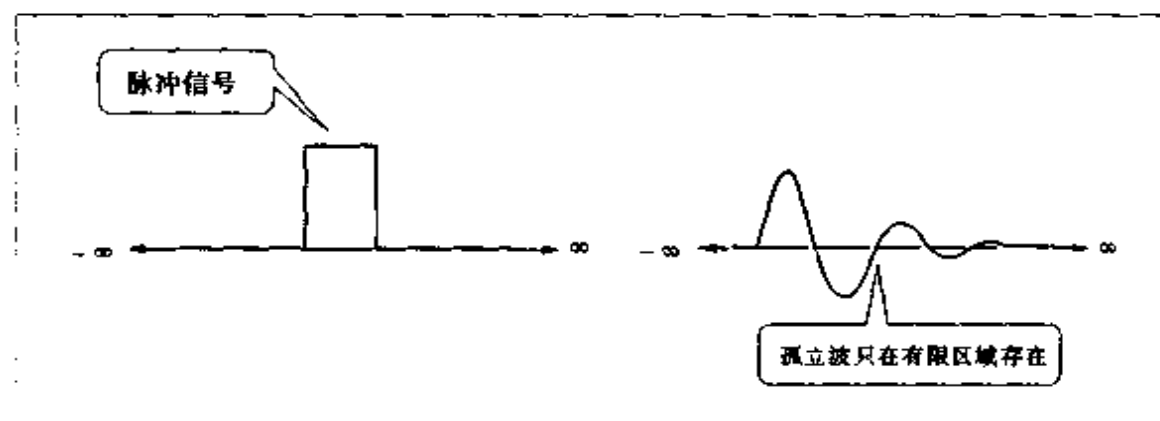
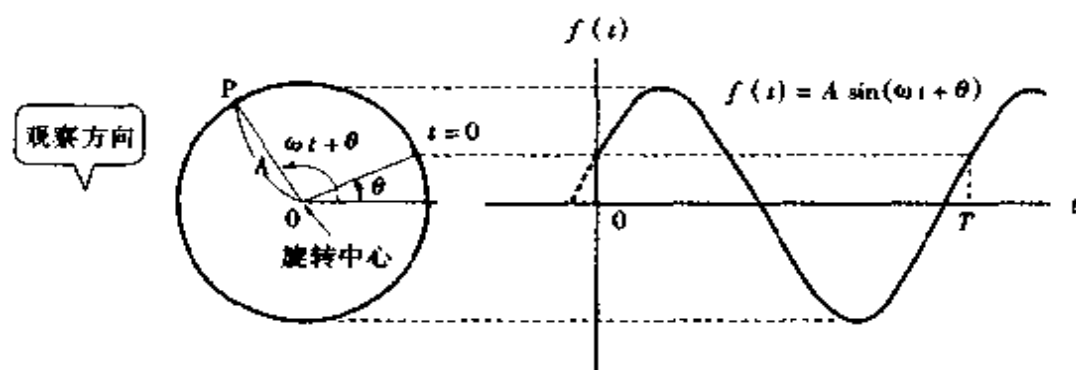


图 1.5 孤立波



在上图的直角坐标系中, 设点 P 为以原点为圆心、 R 为半径的圆周上的点, 并以匀速在圆周上作逆时针运动。表示此圆运动速度的量是角频率(角速度)。角频率 ω 定义为每秒转过的弧度。例如, 如果点 P 在 1 秒内转过一圈, 角度的变化为 $2\pi[\text{rad}]$, 其角速度为

$$\omega = 2\pi[\text{rad/s}]$$

若 1 秒转 2 圈, $\omega = 4\pi[\text{rad/s}]$, 若 1 秒转 $1/2$ 圈, $\omega = \pi[\text{rad/s}]$ 。一般情况下, 点 P 在 1 秒内转 f_c 圈时, 其角频率可表示为

$$\omega = 2\pi f_c[\text{rad/s}]$$

每 1 秒转过的圈数(振动次数) f_c 称为频率, 单位用赫兹[Hz]表示。点 P 旋转一圈所需要的时间称为周期。例如, 如果角频率为 $4\pi[\text{rad/s}]$, 点 P 转一圈需要的时间为 0.5 秒, 其周期为 0.5 秒, 如果角频率为 $\pi[\text{rad/s}]$, 点 P 转一圈需要的时间为 2 秒, 其周期为 2 秒。周期 $T[\text{s}]$ 和频率 $f_c[\text{Hz}]$, 角频率 $\omega[\text{rad/s}]$ 有下列关系。

$$f_c = \frac{1}{T}, \omega = \frac{2\pi}{T}$$

若从左边看作等速圆周运动的点 P , 其位置是时间 t 的函数 $f(t)$, 可以写成

$$f(t) = A\sin(\omega t + \theta)$$

在这里, θ 为在 $t=0$ 时转过的角度, 称为相位, A 称为振幅。

1.3 模拟信号和数字信号

我们在处理信号时, 作为对象的物理量一般都是连续变化的。例如, 我们来考察记录到的气温随时间变化的信号。由于气温

是连续变化的,其值没有时间的间隔。因此,理论上可以用无限小的时间间隔进行测定。但是,若考虑到保存和处理这些测定的数据,对此测定值到底细致划分到什么程度才是必要的呢?并不是越细越好。例如,气温并不会一分一秒地急剧变化。在情况允许的条件下,最好是尽量减少数据量。如果数据量少,在使用计算机进行数据处理时,可缩短计算时间,同时也可以减少数据的存储空间。另外,测定的精度也如此,如今天的气温是 25.27854 度之类,给出这种测定精度完全没有必要。充其量是 25.3 度,以 $1/10$ 度的精度测定就足够了。实际上气象局所给出的全国各地气温的数据是每小时的测定值,其精度是 $1/10$ 度。这样的精度就已足够了。

将表示连续变化的物理量的信号叫做模拟信号 (analog signal)。将模拟信号变换为离散值称为离散化。离散化包括对变量的离散化和对数值的离散化(图 1.6)。将变量在某一区间的值用一个数值来表示的离散化称为标本化或者采样 (sampling)。将对测定值的离散化称为量化 (quantization)。变量和测定值被离散化了的信号统称为数字信号 (digital signal)。从模拟信号转换成数字信号叫做 AD 转换。由特定的传感器得到的电信号(模拟信号)经过 AD 转换器 (AD converter) 转换为由“0”和“1”构成的 2 进制数值。CD(压缩盘)是将音响信号进行 AD 转换,利用光将转换成数字信号的声音记录下来。CD 音响信号的采样频率为 44.1kHz,量化数为 16 位,用称为位的小孔的有无来表现信号。众所周知,由于进行了数字化,与按照模拟信号记录的录音磁带、唱片相比,可以得到良好的 SN 比(信号与噪声的比)和动态范围(对应最小信号与不失真的最大信号之比)等。当需要将此数字信号转换为可听到的声音时,必须再次转换为模拟信号。这叫做 DA 转换。

由于计算机具有通用性强的运算和处理能力,目前,与使用电路对模拟信号进行处理的方式相比,利用计算机的数字信号处理技术变得越来越重要。进行 AD 转换时,必须根据量化水平分析并确定所需的位数及采样频率(每秒的采样次数)。

2 进制数

在计算机中,为表达数值使用 2 进制数。其原因是在电气中可以最简单地表示两个状态,电压的高与低,或者电流的通与断。例如若电压低的状态对应为“0”,电压高的状态对应为“1”,数值和文字都可以用电压的“0”和“1”组合表示。

将 10 进制数 0 和 1 表示为二进制数当然是“0”和“1”,表示 2 时二进制的位数就不够了。因而需增加一位表示为“10”,3 表示为“11”。到 4 的时候位数又不够了,需再增加一位,为“100”。这样进行下去,无论多大的数都可以表示成二进制数。二进制数的位的单位叫做比特(bit: binary digit 的缩写)。1 位只能表示 0 和 1,若有 2 位可以表示 0~3,有 3 位可以表示 0~7。即用 n 位可以表示 $0 \sim 2^n - 1$ 范围的数值。

那么,2 进制数 $(110101)_2$ 在 10 进制中是多少呢?在考虑此问题之前,我们首先来考虑用 10 进制表示的数比如 $(123)_{10}$ 的意义。其最高位的 1 意味着有一个 100($100 = 10^2$),而后面的 2 意味着有两个 10($10 = 10^1$),最后的 3 表示有三个 1($1 = 10^0$)。即各位分别有 100,10,1 的加权。从而,对于 10 进制数 123,是

$$\begin{aligned}(123)_{10} &= 1 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \times 1 \\ &= 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0\end{aligned}$$

与此相同 2 进制数也可以在各位上分别加权。第 n 位的权重为 2^{n-1} 。因此前面的 2 进制数 $(110101)_2$ 若用 10 进制表示,可表示成

$$\begin{aligned}(110101)_2 &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 1 \times 32 + 1 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 \\ &= (53)_{10}\end{aligned}$$

将 2 进制最高位叫做 **MSB**(Most Significant Bit, 最重要位),最低位叫做 **LSB**(Least Significant Bit, 最不重要位)。

由于 2 的幂乘 1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024,...在许多场合经常出现,记住它们会很方便的。

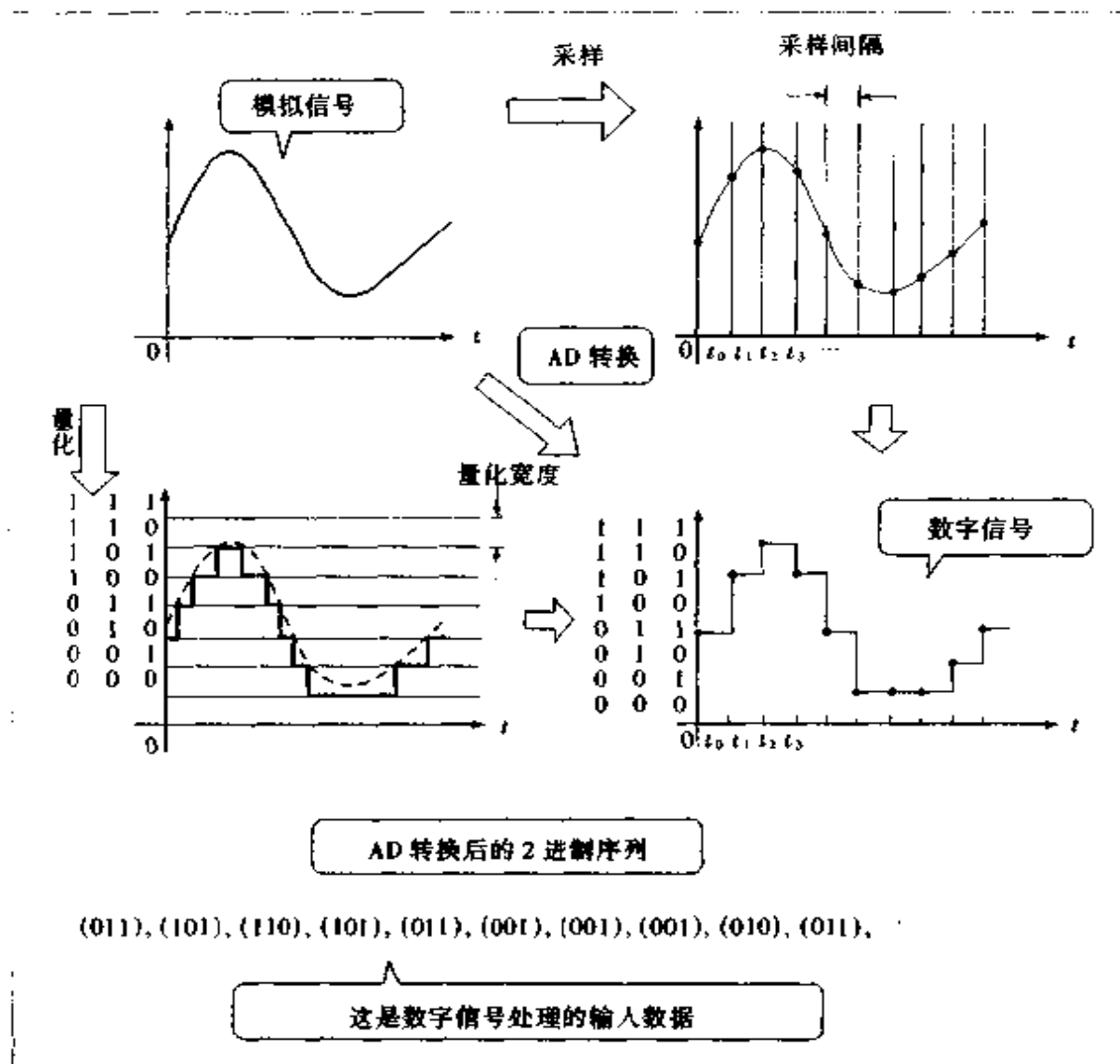


图 1.6 从模拟信号到数字信号

1.4 采样问题

模拟信号转换为数字信号时,采样的间隔越宽,量化越粗,表示信号数据的量就越少,数据越容易处理。但是,如果数据量过少,恐怕会损失掉信号所具有的重要信息。另外,若采样方法不当,也许会陷入致力于处理不必要的信号成分的境地。从而,如何进行采样是我们开始进行信号处理时最基本的问题之一。为此,我们以温度数据为例,来考察关于采样的最基本问题。

图 1.7(a)是每隔 1 小时测定的某年东京的气温图,数据的点数总共有 $24(\text{点/天}) \times 365(\text{天}) = 8760(\text{点})$ 。如果只想知道在一

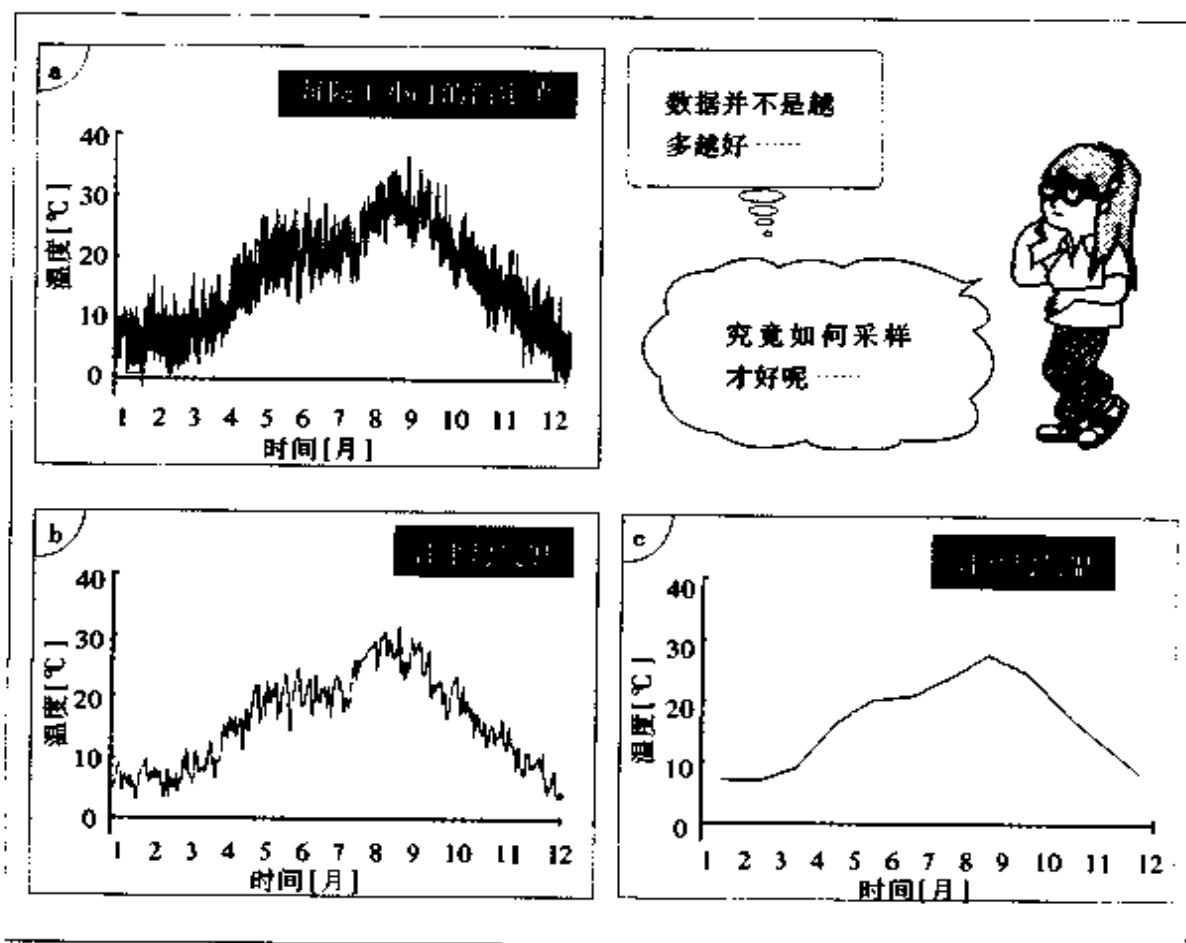


图 1.7 气温的采样

一天中气温是如何变化的,可以直接使用每一小时测定的数据。但是,如果我们要考察气温以天为单位的变化状况时必须确定一个合适的气温来代表一天的气温。其中的一种考虑方法是,用一天中某一时刻的温度来代表这一天的气温。但是,用白天的气温,或者用晚上的气温,其结果会有很大的差异,结果都不太理想。因此,取一天气温的平均值,用它来代表一天的气温比较合适。图 1.7(b)就是这样处理的结果,即分别求出 365 天每一天的平均气温所得到的曲线。再看,图 1.7(c)是每个月的气温变化曲线。这也是同样用每个月的气温平均值来表示这个月的气温。由此可见,随着时间单位的改变,采样的方法也有所不同。即,一般情况下,必须充分考虑要得到什么样的信号信息,依此进行采样。

图像信号那样的 2 维信号又怎么样呢? AD 转换后的图像表现为纵横交错像棋盘格那样很多点的集合。将其每一个点称为像素。像素越多越能够表现细致的图像,即清晰度越高。将辉度的量

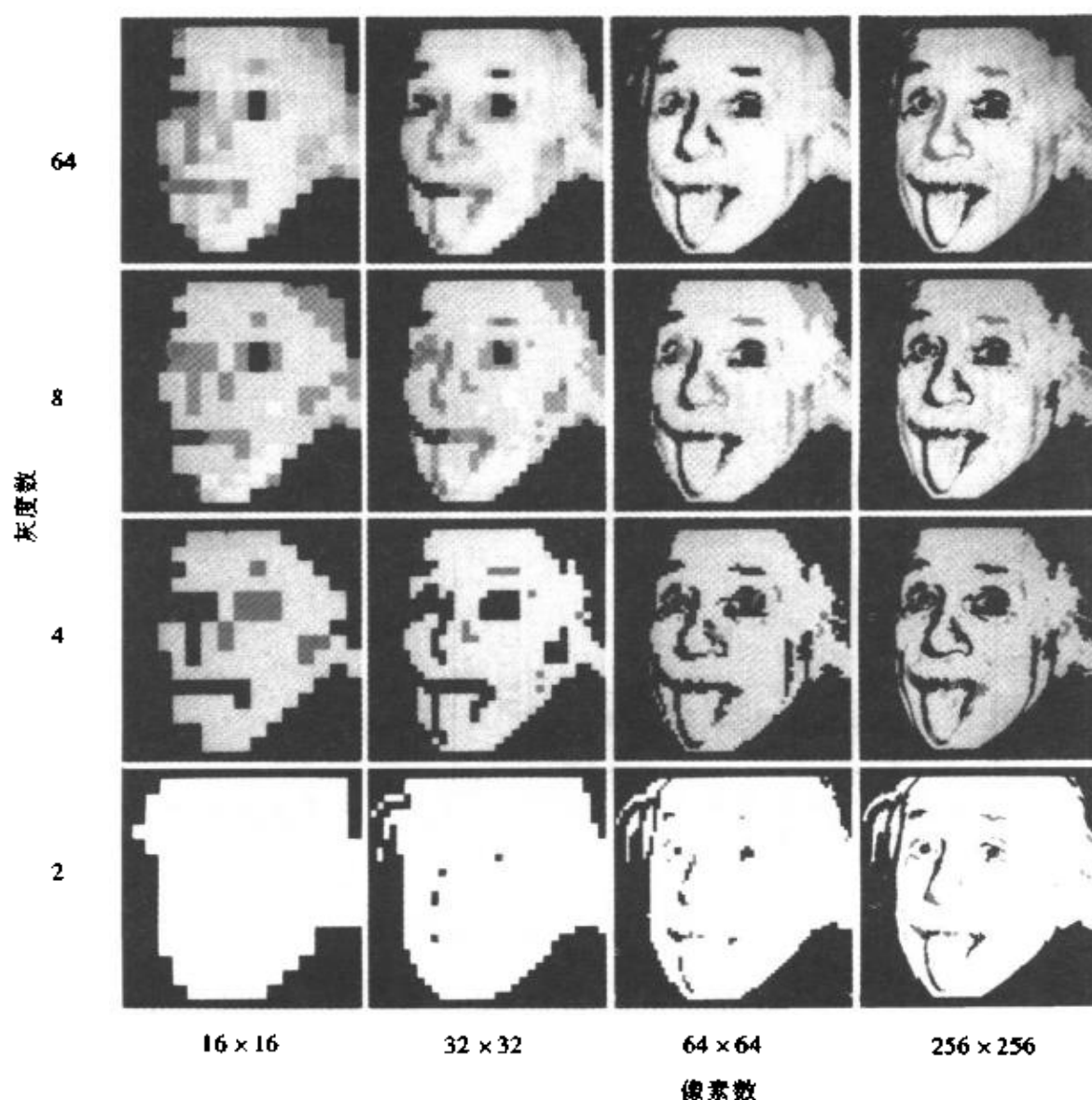
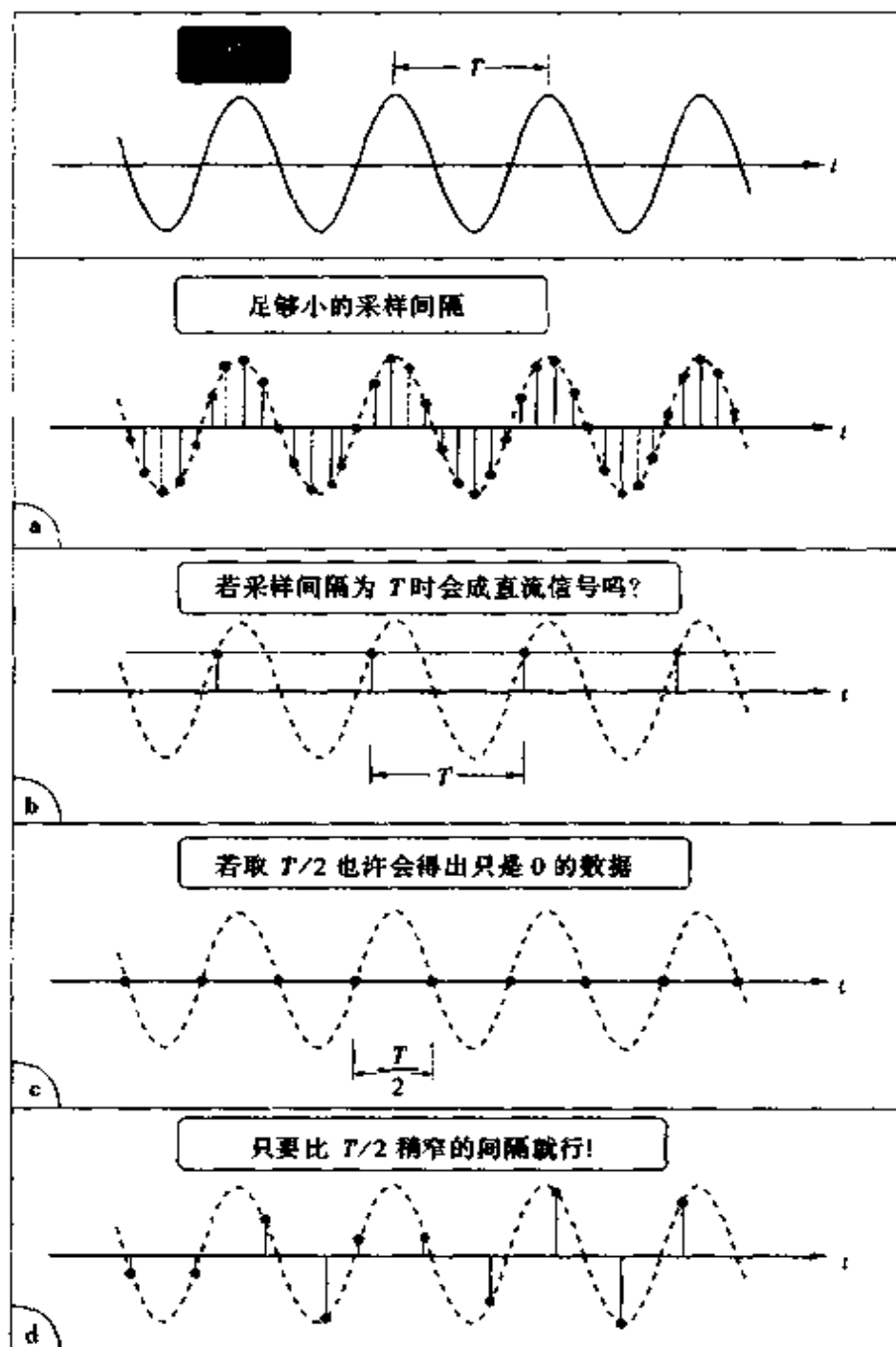


图 1.8 图像的像素数和灰度数(将爱因斯坦的脸作 AD 转换)

化单位称为灰度。灰度数越多对比度的表现越好。图 1.8 表示了随像素数和灰度数不同图像表现的变化情况，从图中可以明显地看出，图中越靠近右上方图像的对比度和清晰度越好，图像的品质也就越高。

然而，最下面一行的图像的灰度数是 2。即，表示辉度的值只有明和暗两个，为表示这样的图像各像素只需要 1 比特的信息就够了。这样的图像称为 **2 值图像**。

以上仅是凭经验讨论采样问题，让我们再具体地考虑这一问题。在这里来考虑选用多大的信号采样间隔为好。首先来考察图 1.9 所示的正弦波的采样。在图(a)中，直接连接用黑点表示的采



正弦波是在
 $\frac{T}{2}$ 以下采样



图 1.9 正弦波的采样

样点就可以充分地表现出正弦波的波形，可以看到此采样是在很细的间隔下进行的。那么，进一步扩大采样间隔会是怎么样呢？图(b)所示的是取采样的间隔与信号周期相同的情形。从图中可以清楚的看出，采样的结果变成了直线，完全看不出原来的正弦波形。因此，无论如何，这样的采样间隔是过宽了。

下面，取比此稍小的采样间隔，如图(c)所示，当采样间隔为

周期的 $1/2$ 时, 可以看到, 此时的采样全是 0, 仍然不合适。进一步缩小采样间隔 (d), 此时, 将采样点连接起来可以近似地得到正弦波的波形。

但是, 读者也许会想到, 是否还有其它的正弦波也通过所有的样本点呢? 如果那样的话, 就不能从样本点序列正确地再现原来的正弦波。请不必担心。虽然确实存在着比我们现在考察的正弦波频率高的正弦波通过所有的采样点, 但没有较此频率低正弦波, 这一点在理论上可以证明。这样, 若给出样本值的点序列, 由此正确地再现某一个正弦波 (当然其周期为采样间隔的 2 倍以上) 是可能的。

由以上结果可知, 对某一正弦波采样时, 选定采样间隔必须小于其周期的 $1/2$ 。若将其用频率表示, 对于频率为 f_c 的正弦波, 其采样频率必须在 $2f_c$ 以上。将此采样频率 $2f_c$ 称为奈奎斯特频率 (Nyquist frequency)。在后面的章节中将会说明信号可以表示为频率不同的正弦波的和。从而

在信号中包含的有效信号成分中, 当最高的频率为 f_c 时, 必须取高于奈奎斯特频率 $2f_c$ 的采样频率。

然而, 若用低于奈奎斯特频率的频率对信号采样, 会出现什么问题呢? 我们来看一下图 1.10 表示的这种情况, 从图中可以看到, 本来在此信号中肯定不包括的低频率成分像幽灵似地显现出来。如同荧光灯下按动电风扇的开关, 随着转速的加快, 会看到与扇叶的旋转相反的方向或者是相同方向慢慢转动的样子。这是因为由电源频率引起的荧光灯的闪烁和电风扇转动速度之间的关系而发生的现象 (译者注: 电源的频率低于风扇的转动频率, 荧光灯闪烁相当于采样频率, 风扇的转动相当于采样对象, 人眼看到的是采样结果)。在信号采样时出现的幽灵信号现象与此道理是相同的。这种现象称为假频 (aliasing)。

当产生假频时, 观测到的是在信号中不存在的波形, 造成无

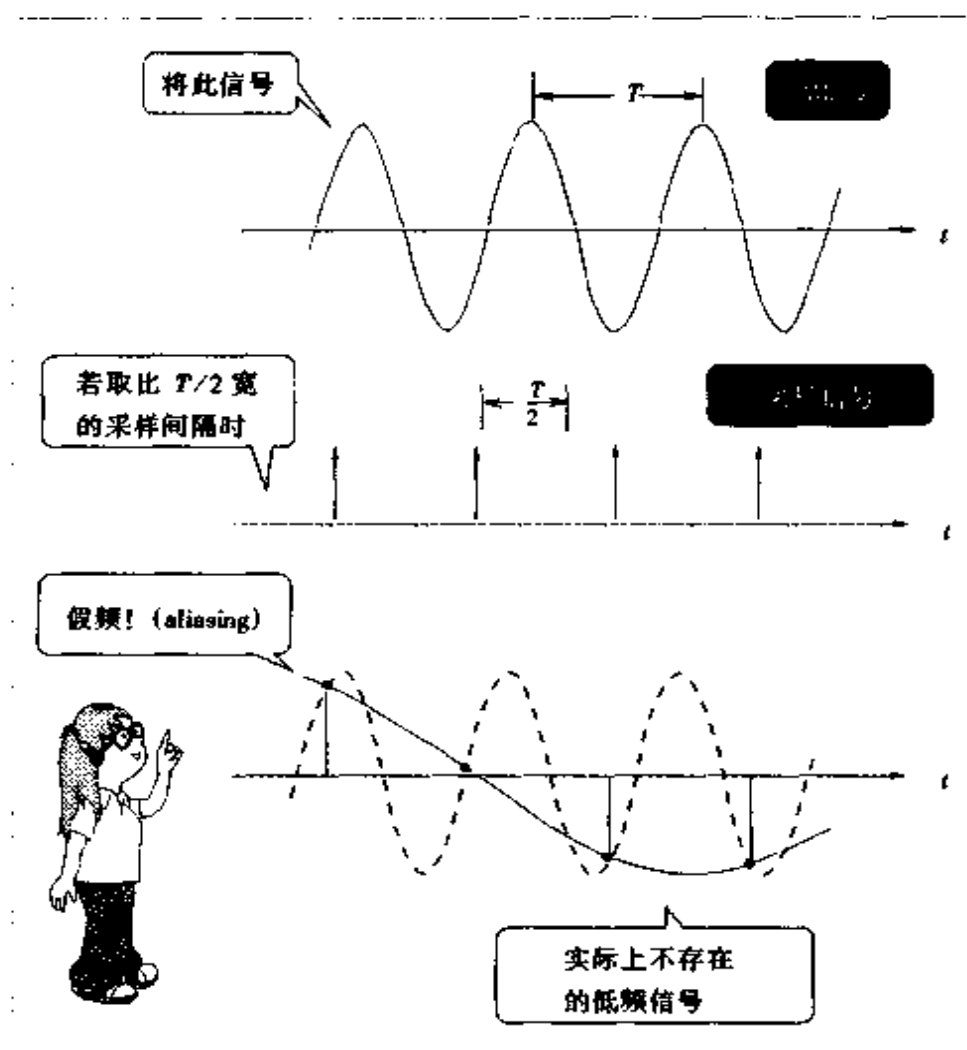


图 1.10 假频

法判断采样的结果是否真正表示信号成分,给处理带来困难。由于假频在采样后不能去除,为了回避它,在进行采样之前,必须从信号中除去不必要的高频成分。即通过将原来的信号进行低通滤波(low pass filter),预先将不必要的高频成分截取掉,然后进行采样。

本章要点

- (1) 信号是包含信息的物理量,为分析信号,首先必须确定将信号表示成什么样的量,哪一个为变量,单位是什么。
- (2) 在已知现时点以后,不能正确地确定其变化的信号称为随机信号,反之,能确定的信号称为确定信号,正弦波

作为确定信号的典型,用频率、振幅、相位表示。其频率和周期具有互为倒数的关系。

(3) 周期信号其周期的整数倍仍然是它的周期,在时间方向上相错周期的整数倍后信号波形不变。除正弦波之外还有方波、锯齿波、三角波等典型信号。单发信号称为脉冲信号或孤立波。

(4) 数字信号是由模拟信号离散化(向离散值的转换)后得到的。对时间的离散化称为采样(标本化),对信号大小的离散化称为量化,从模拟信号到数字信号的转换称为 AD 转换。

(5) 信号 AD 转换时,必须用包含在信号中最高频率成分的 2 倍(奈奎斯特频率)以上的频率采样,这是采样定理。若用低于奈奎斯特频率采样,会出现本来不包括的低频成分,这种现象称为假频。从数字信号到模拟信号的变换称为 DA 转换。

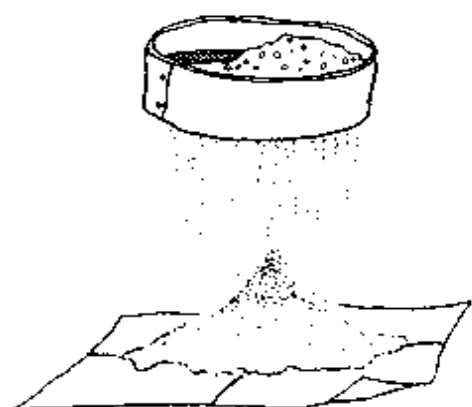
◆ ◇ 练习题 ◇ ◆

[1] 有一图像,其像素数是 512×512 ,灰度为 256 的黑白图像。为保存此图像需要多大的容量?

[2] 声音的频率只要达到了 5kHz 就会取得良好的收听效果。AD 转换麦克风收集的声音信号,需要怎么做?

[3] CD(compact disc) 和 MD(mini disc) 都是用数字信号记录声音,但是 MD 比 CD 更小,而录音的时间却相同,试分析其中的原因。

信号处理的例子



2.1 波形的平滑

在本章中，我们将通过信号处理的具体实例来说明信号处理的方法。

为得到平稳与概略的变化，需平滑波形，以除去包含在信号中的少量的噪声，消除信号细微处的波形变动等。这种处理称为**波形的平滑**。以前文所示的气温曲线(图 1.7(c))为例，由于求出了每个月的平均气温，可以得到一年中气温变化的平缓曲线。此做法相当于以各月的中间为中心，取其前后各半个月范围测定值的平均值，由于在一年中最多选出 12 个代表点，因此得到的曲线呈较为生硬的折线。然而，如果并不仅限于每个月的中间，而对所有的点采用同样的做法，得到的就不再是折线，而是一条平滑的曲线图。将这种做法称为**移动平均(moving average)**。即取测定点前后某一范围的测定值的平均值，作为该点的值(图 2.1)。

数字信号给出 N 个测定点的序列 $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ ，即

$$\{f_i, i=1, 2, 3, \dots, N\}$$

此时， i 点的值取为包括其前后各 K 个点的平均值。即， i 点的新值 g_i 用包括这个点在外的 $2K+1$ 点的平均值所替代，称为平滑值：

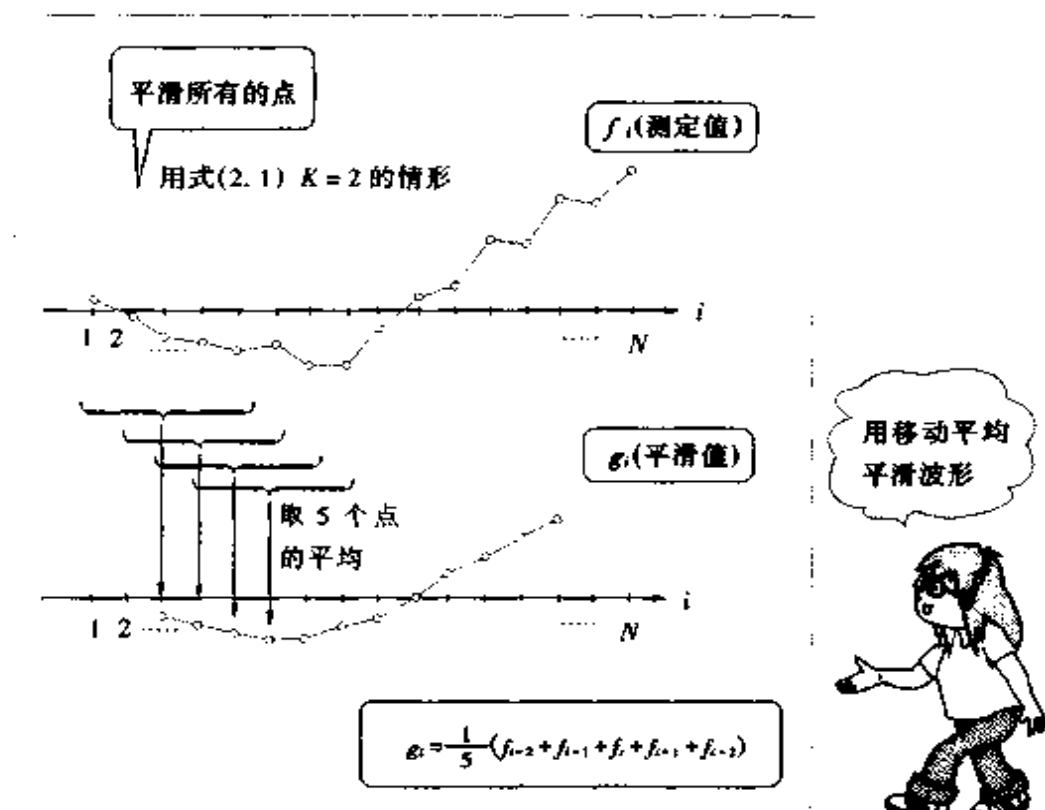


图 2.1 移动平均的做法

$$g_i = \frac{1}{2K+1} (f_{i-K} + f_{i-K+1} + \cdots + f_i + \cdots + f_{i+K})$$

此式用和的记号可表示成

$$g_i = \frac{1}{2K+1} \sum_{j=-K}^K f_{i+j} \quad (2.1)$$

但是,由于在 i 轴的两端产生不能计算平滑值的部分,要注意 i 的取值范围为 $i = 1+K, 2+K, \cdots, N-K$ 。

图 2.2 是用每一天的平均气温表示的一年 365 天的曲线。我们来对它进行移动平均处理。从图中可知,若给出的参考点的范围,即 K 值取的越大,波形就变得越平滑。 K 值取的过小平滑效果较差,若取的过大变成了平坦的波形。由这一事实可知,取移动平均也可从信号波形中去除激烈振动的信号成分,即高频成分。因而,除去频率的范围依 K 值而变化。

取平均值点的范围并不局限于关注点的前和后,只取前点也

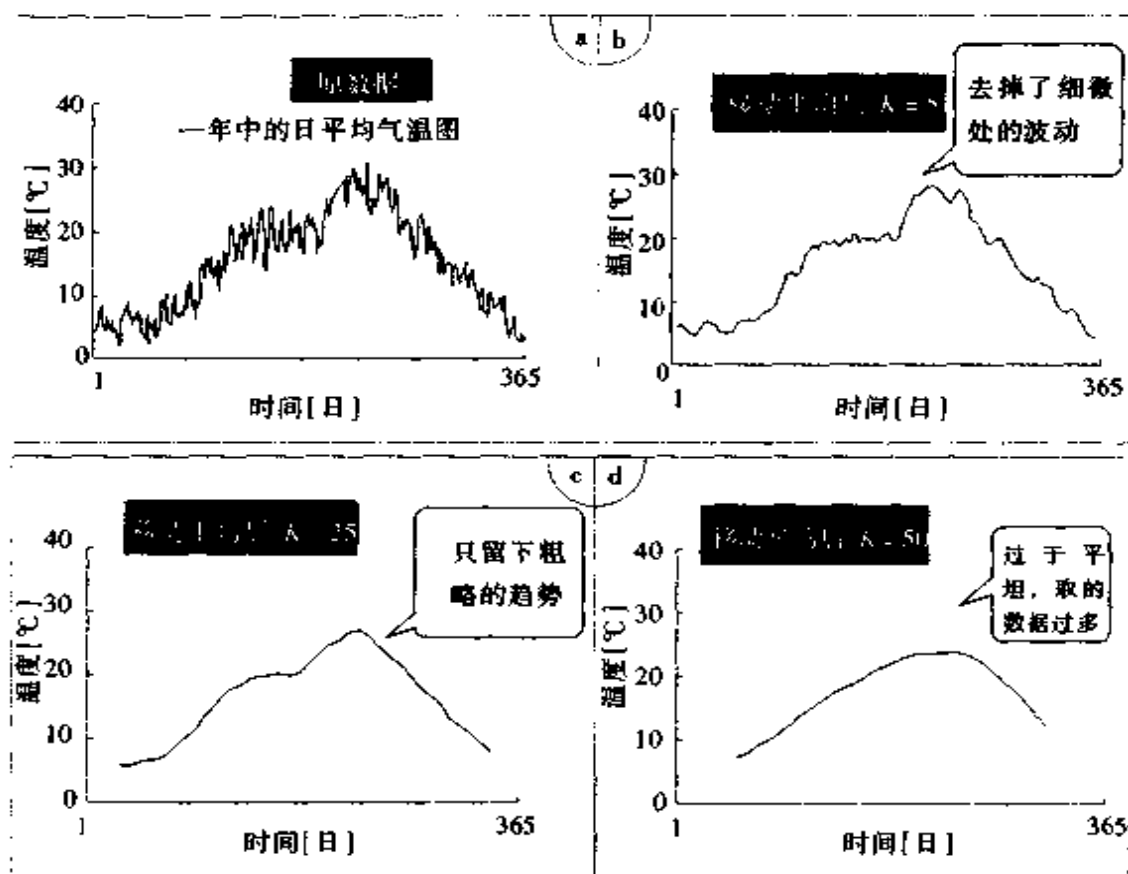


图 2.2 将气温曲线用移动平均平滑

可以同样达到平滑的目的。将此定义为

$$g_i = \frac{1}{K+1} (f_{i-K} + f_{i-K+1} + \cdots + f_i)$$

即

$$g_i = \frac{1}{K+1} \sum_{j=-K}^0 f_{i+j} \quad (i = 1+K, 2+K, \cdots, N) \quad (2.2)$$

上面看到的移动平均方法,是把 i 点前后各点都看成同样重要。然而,在很多情况下,距离关注点越近,这个点的重要程度就越高,反之距离越远其重要程度就越低。在这种情况下,取移动平均时,可以对应各点的重要程度对其加权,即可以写成下式:

$$g_i = \sum_{j=-K}^K w_j f_{i+j} \quad (i = 1+K, 2+K, 3+K, \cdots, N-K) \quad (2.3)$$

为了保证测定值的单位不变,一般加权函数 w_j 应满足

$$\sum_{j=-K}^K w_j = 1$$

加权函数 w_j 可以取成各种形式, 经常使用的是如图 2.3 所示的高斯型加权函数。

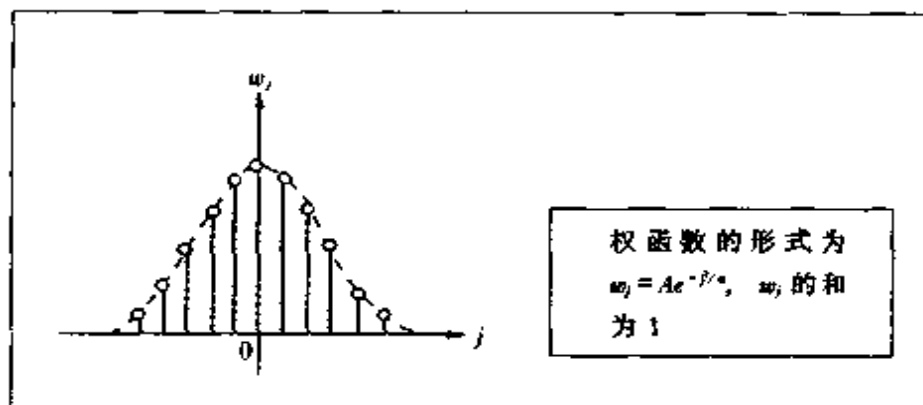


图 2.3 加权函数的例子

2.2 噪声的降低

当信号由于混入噪声而失真时, 如何降低噪声成分的影响, 并将有用的信号提取出来呢? 面对这样的情况, 首先要做的并不是应用信号处理技术对信号进行处理, 而是要找出噪声产生的原因, 努力从根本上消除噪声。例如, 使用长导线输送电信号时, 首先要考察电压, 阻抗, 导线的种类等, 需要应用有关的电学知识除去混入噪声的根源。如果还不能顺利解决, 有时需要考虑是否用光纤替换导线。但是, 尽管进行了上述努力, 还不能除去噪声时, 就需要用信号处理方法来解决问题了。

如果噪声的频率较高, 其量值也不大, 用平滑方法可在一定程度上降低噪声。但是当噪声成分较多, 其频率又不太高时, 平滑方法就没有效果了。在本节中, 让我们来考虑造成信号失真的噪声呈周期性反复出现的情况下, 如何有效地降低噪声的方法。我们将这种方法称之为同期叠加或平均响应法。

设目前接收的信号为 $f(t)$, 在 $f(t)$ 中包含原来的信号部分 $s(t)$ 和噪声部分 $n(t)$ 。即

$$f(t) = s(t) + n(t) \quad (2.4)$$

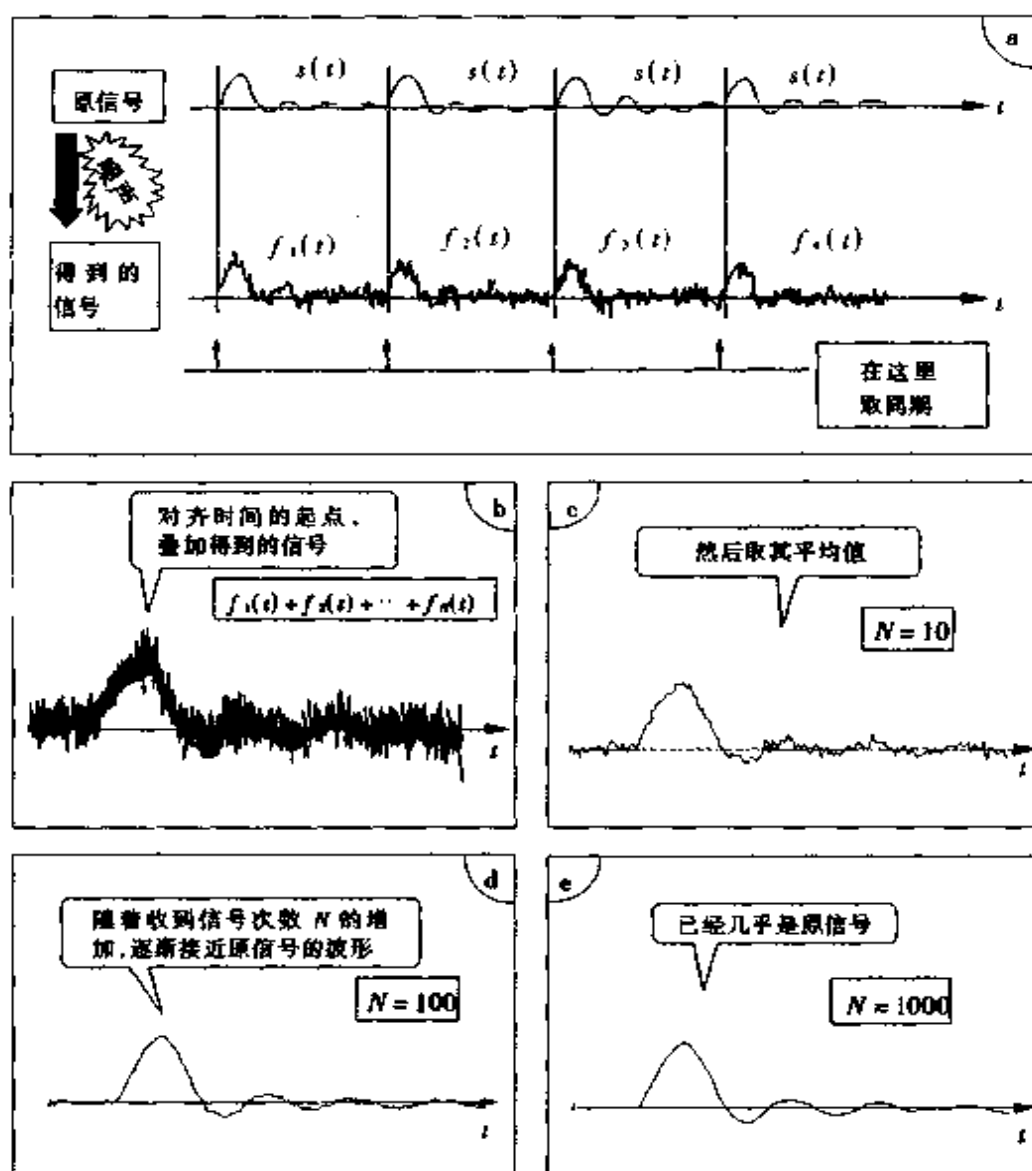


图 2.4 用同期叠加降低噪声(取平均后噪声部分消去)

此信号被反复送来,而且信号的位置(时间的起点)经常集中在一定的位置,将波形的时间起点集中称为取同期。将第 k 次收到的信号写成 $f_k(t)$,混入的噪声信号在每个周期中都是不同的,将它记为 $n_k(t)$ 。但是,原来的信号部分 $s(t)$ 若取信号同期,必然在 $f_k(t)$ 中处于相同的位置。因此接收信号 $f_k(t)$ 可表示为:

$$f_k(t) = s(t) + n_k(t) \quad (2.5)$$

设此信号 $f_k(t)$ 多次被接收到,我们来取其平均值。所谓取平均值就是当得到信号次数为 N 时,可求出其平均值为

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k(t) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \{s(t) + n_k(t)\} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N s(t) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N n_k(t)
 \end{aligned}
 \quad (2.6)$$

实际上这种情形如图 2.4 所示, 随着收到信号次数的增多, 噪声部分在减少, 原来的信号部分变得越来越突出。这是为什么呢? 式 (2.6) 中右边的第一项是将同样的函数 $s(t)$ 加 N 次后再除以 N , 当然成为 $s(t)$, 而第二项是什么样呢?

在这里我们首先来看看掷骰子的问题。现在取多次掷骰子的得数的平均值, 当掷的次数较少的时候此值是不确定的, 而掷的次数足够多时, 必然要归于某一定值。这是因为骰子的各面上数字出现的次数的概率是相同的, 因而, 当试掷的次数足够多时, 因为各个数字出现的频率基本相同, 其平均值接近

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

与此相似, 噪声大多数情况下, 可以假设为呈高斯分布。图 2.5 右边的曲线称为**概率密度函数**, 它表示了噪声值出现的概率。即 0 附近的值出现的概率高, 离 0 值越远, 出现的概率平滑地减小。此概率分布就是大家熟知的正则分布(高斯分布)。

由于骰子的各个数字出现的概率相等, 此概率分布是大家熟知的, 称为均匀分布。正则分布与均匀分布都是当多次取值时其平均值为某一定值。即趋近于平均值。在噪声的情况下, 一般它的

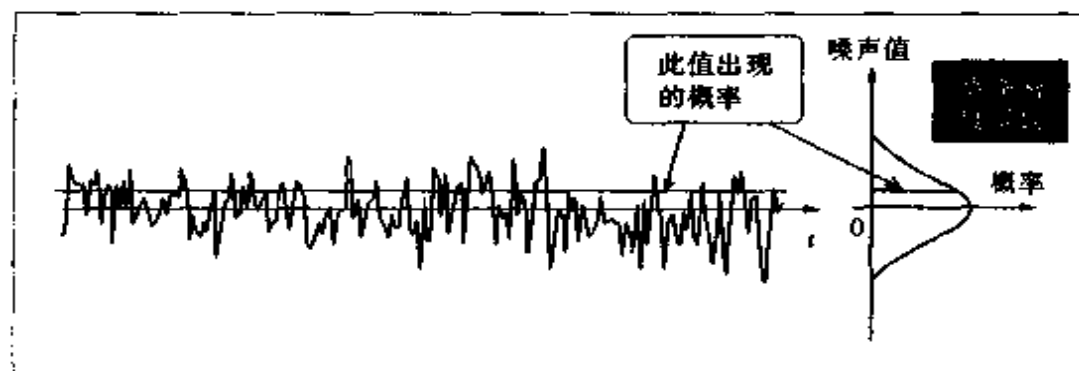


图 2.5 高斯型噪声

平均值是 0。噪声值与掷骰子相似,其发生的方式是不相关的。即前面出现的值与后面出现的值无关。因此,其值以 0 为中心分布。也就是说,将多次的测定值相加并取其平均后,其值最后趋近于 0。

根据上述分析,我们讨论的式 (2.6) 的第二个和,即噪声部分在所有的时间上求和后一定是逐渐趋近于 0 的。从而,即使有由噪声产生的失真,只要将包含相同信号成分的信号波形取同期信号,并将其叠加,然后取其平均值,结果为

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} s(t)$$

噪声部分减少,原来信号部分显现出来。

本章要点

(1) 移动平均法是将信号细微的变动和噪声降低的平滑处理方法。取每一个样本点周围值的平均值时,要注意选取平均范围的大小,若范围过窄平滑的效果不明显,范围太宽波形会变得过于平坦。

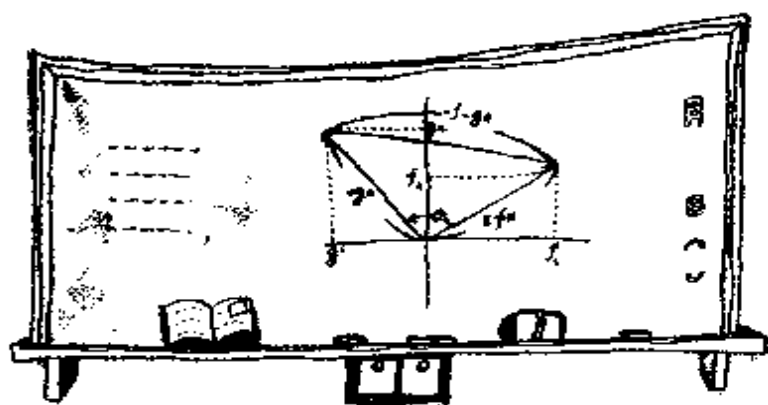
(2) 尽管噪声夹在信号中,若信号周期性地反复传送,取各信号同期并取其平均可以降低噪声。此方法称为同期叠加或平均响应法。

◆ ◆ 练习题 ◆ ◆

- [1] 试考察将图像移动平均的平滑化方法
- [2] 用 2 值图像给出文字的图像,试考察提取文字图形轮廓的处理方法。

第 3 章

数学基础知识的准备



3.1 为学习信号处理

在前一章中,用在直觉上容易理解的例子,叙述了信号处理的几个比较简单的方法。但是,若要稍微广泛、深入地学习信号处理知识,就要有数学基础的支持。这在某种意义上也是必须的,尽管信号原本表示的是物理量,但当它一旦变换成函数或数值的序列,信号处理问题就变为如何处理这些函数或数值的数学问题。

至此我们需要采用在其他的书上可以经常见到的叙述方法,即采用“将……定义为……”的形式,这对于不太喜欢数学的人确实比较为难。那为什么又必须采用这样的定义呢?这是因为,若没有这些数学上的定义,就无法理解信号处理过程。所以,在本章中读者可以得到数学基础训练。只要通读本章内容,就会使后面各章中出现的内容,各种各样的数学表达式的基础分析方法,在某种程度上变得易于理解。与发现魔术的秘密所在相同,只要掌握了它的数学基础,即使对较为复杂的数学公式,也会感觉到“啊,原来是这么回事”。

3.2 信号的表达

在第一章中,给出了随时间变化的模拟信号 $f(t)$,及在时间

t 适当的区间采样并变换为数字信号的方法。用适当长短的时间间隔采样后,可以用此数字信号再现原来的模拟信号。将时间区间 $[a, b]$ 等分后的采样数字信号 f , 用 N 个点的样本值的序列表示, 记为

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$$

f 表示 N 维向量(将顺序排列的 N 个数的数组称为 N 维向量)。 f 与 $f(t)$ 近似程度的好坏, 取决于样本数 N 的变化, 若增加 N , 其近似程度逐渐变好。若将此增加到极限, 即 N 无穷大时, $f(t)$ 中所有的信息都包含在 f 中(图 3.1)。这样, 即使原来的目的是要对随时间变化的信号 $f(t)$ 进行分析, 只要 $f(t)$ 不是特殊的信号, 就可以用向量 f 来代替 $f(t)$ 进行分析, 这在本质上是相同的。

2 维向量在 2 维空间即平面上对应一个点(图 3.2)。而 3 维向量在 3 维空间上对应的也是一个点, 遗憾的是 3 维以上的 N 维向

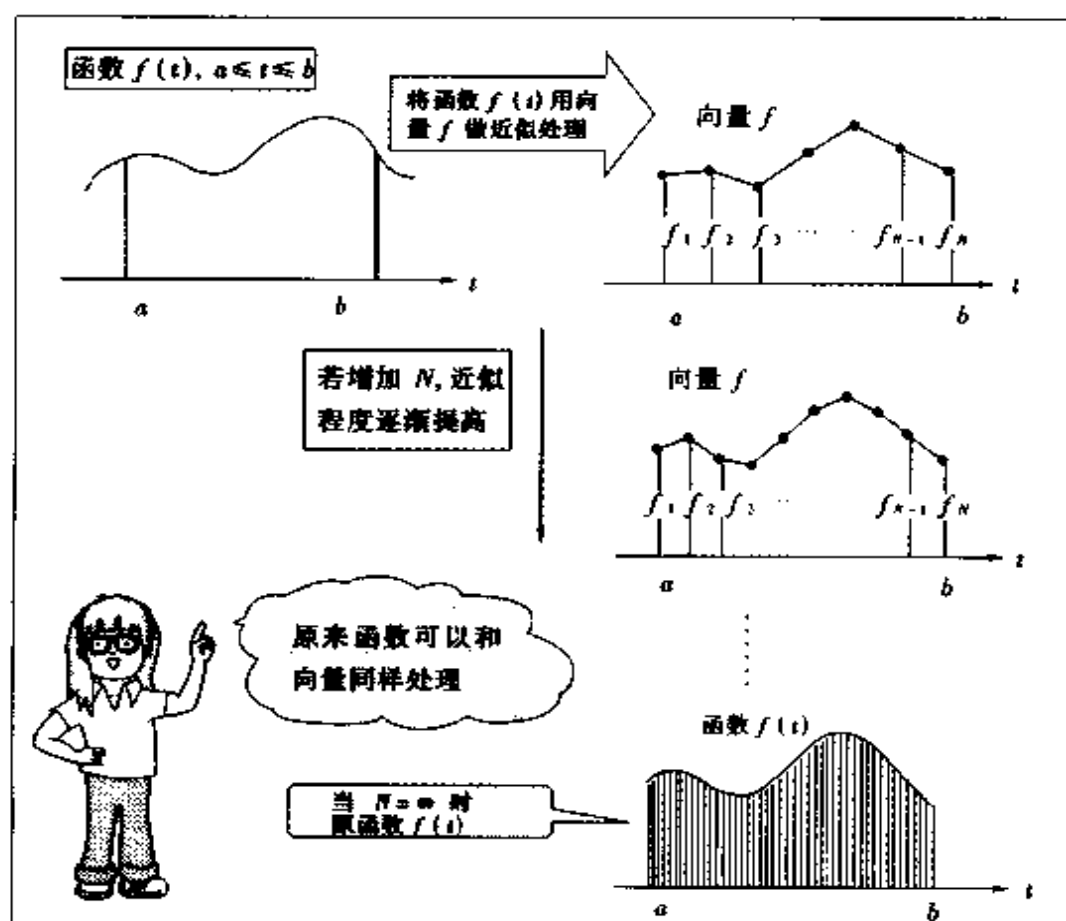


图 3.1 将函数用向量近似地表示

量不能用图表示,但它对应的仍然是 N 维空间中的一个点。这样,随着维数 N 的不断增大,最后可以假想成一个无限大维数的空间,连续函数 $f(t)$ 就可以认为是对应于此空间的 1 点。眼睛看不见,无限维的抽象空间称为函数空间。

2 维空间,即关于平面上的向量,我想读者们已经学过用距离和内积表示向量的大小和角度。若将我们要处理的信号表示成向量的形式,也许可以用向量的大小和角度来说明信号的性质。向量的距离和内积的定义也可以扩展到 2 维向量以上的多维向量空间,进而,也可以在函数空间中应用这一概念。即,对函数空间定义距离和内积,从而使讨论函数的大小和角度成为可能。从中引出函数正交的概念,这也是从向量的正交概念扩展得出的,尽管其表达式比较复杂,但其概念是非常简单的。

各位读者也许会怀疑这些概念是否与信号处理有关系。作为信号处理的重要内容的相关函数和傅里叶分析,就是应用了比较

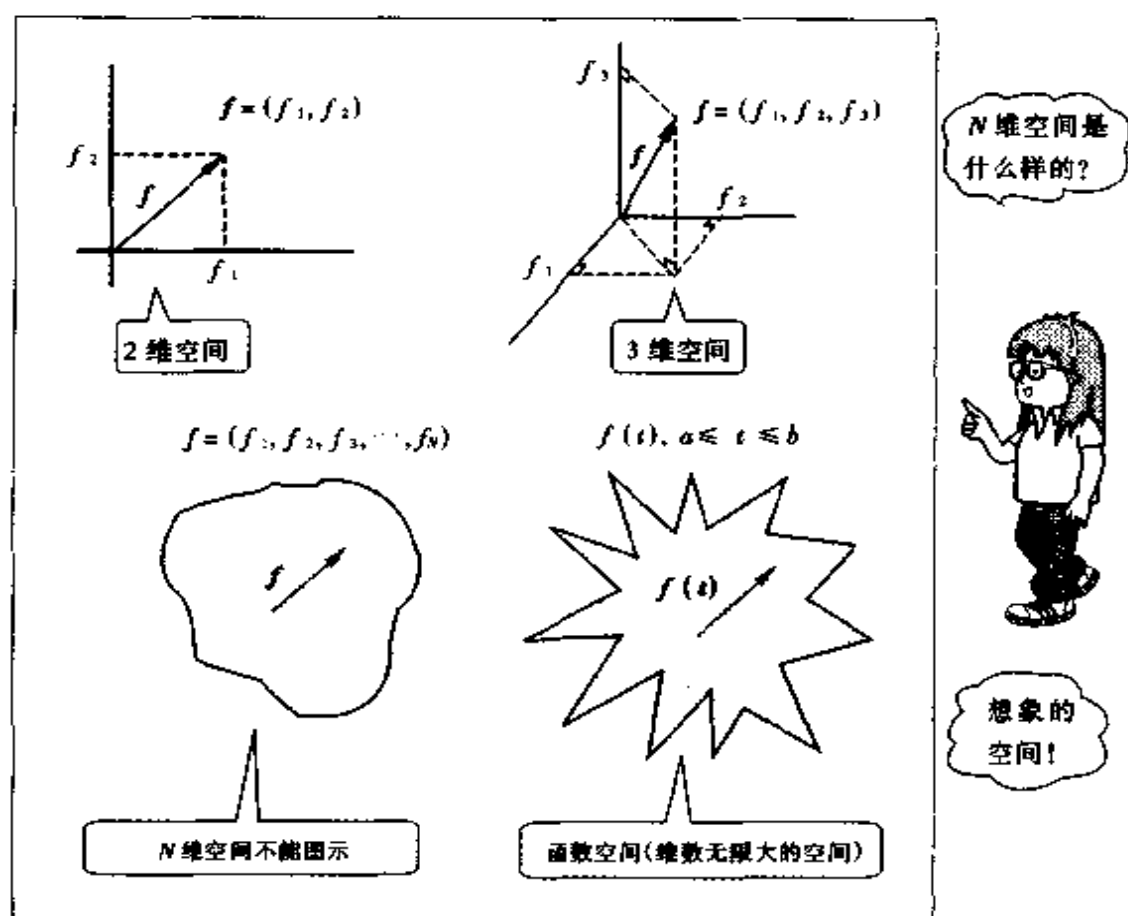


图 3.2 向量空间和函数空间

多的在函数空间定义的距离和内积的性质。若要将有关的数学知识完整地叙述,也许会影响我们的注意力。而且,对于想学习信号处理的读者,所有的理论也不都是必要的。我们不能被几棵树木的美所吸引而停下脚来,而是应该首先登上山顶。只有从山上向下看,才能很好地看到整体的美景。

作为最初的数学基础准备,首先复习一下已经学过的2维向量空间的性质,进而是多维空间,再将它向函数空间扩展。

3.3 2维向量的距离和内积

设对某信号 $f(t)$ 采样,得到两个值 f_1, f_2 。同样也对某信号 $g(t)$ 采样,得到两个值 g_1, g_2 (图 3.3)。若想知道信号 $f(t)$ 和 $g(t)$ 之间关系的强弱,我们该怎么做呢?

仅有两个采样值,也许不能接近原来的信号,如前所述,只要信号的采样数不断的增加,这个问题就可以得到解决。为了不失一般性,我们来考察有2个采样点的情况。

现在,每个信号序列是有两个元素的向量,即信号由2维向量确定,将向量分别记为 f, g ,可表示为

$$f = (f_1, f_2) \quad g = (g_1, g_2)$$

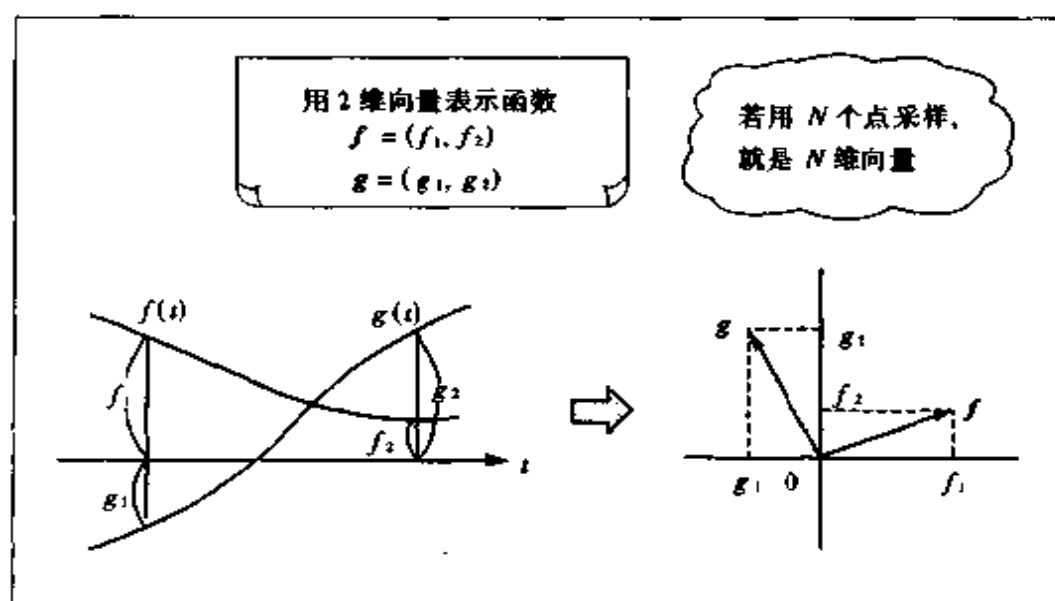


图 3.3 用向量表示函数

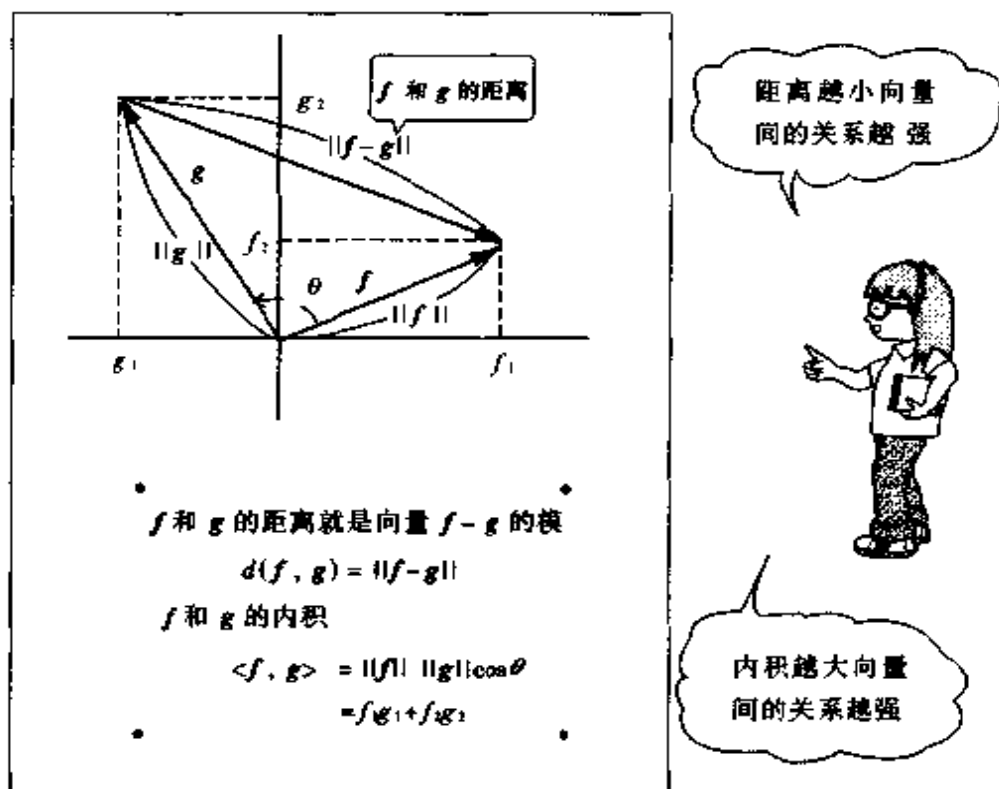


图 3.4 2 维向量的距离和内积

信号用这样的向量表示后，我们要考察两个信号之间的关系，只要考察两个向量之间的关系就可以。在这里都有什么问题呢？首先是 f 和 g 之间有多大的距离，即计算向量之间的距离（图 3.4）。将 f 和 g 的距离设为 $d(f, g)$ ，此值越小 f 和 g 距离越近，可以说它们的关系越强。若将向量 f 的大小（绝对值）记为 $\|f\|$ ，它可用 f 的元素表示为：

$$\|f\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \quad (3.1)$$

将 $\|f\|$ 称为向量的模。从图中可以清楚地看出，向量 f 和 g 的距离是向量 $f-g$ 的模，若将它用向量的元素表示，可写成

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \|f-g\| \\ &= \sqrt{(f_1-g_1)^2 + (f_2-g_2)^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

距离是衡量向量间关系强弱的一个尺度。我们来看一下图 3.5，在此图中，向量 f 到向量 g 和 h 的距离相等。但是，由于 g

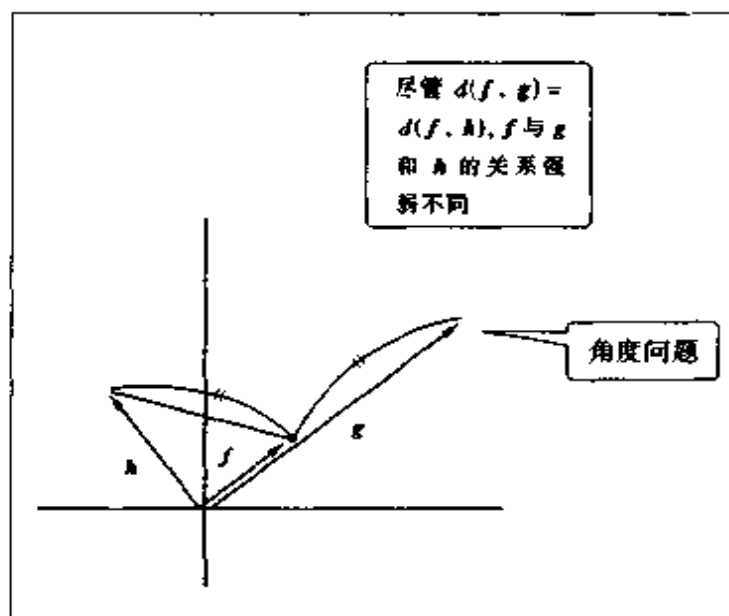


图 3.5 若只用距离

和 f 的方向相同,而 h 处于和 f 正交的方向。因而,如果取 f 的某一倍数,可以得到 g ,而同样取 f 的某一倍数,却得不到 h 。从向量 f 的观点来看,尽管到向量 g 和 h 的距离相等,但是, g 与 f 比 h 与 f 的关系更强。由此可知,仅将距离作为向量间关系强弱的尺度过于简单了。这件事告诉我们,不仅向量间的距离,其角度也是讨论向量间关系的重要尺度。

可以用向量的内积来表示向量的角度关系,向量 f 和 g 的内积定义为

$$\langle f, g \rangle = \|f\| \|g\| \cos \theta$$

从而

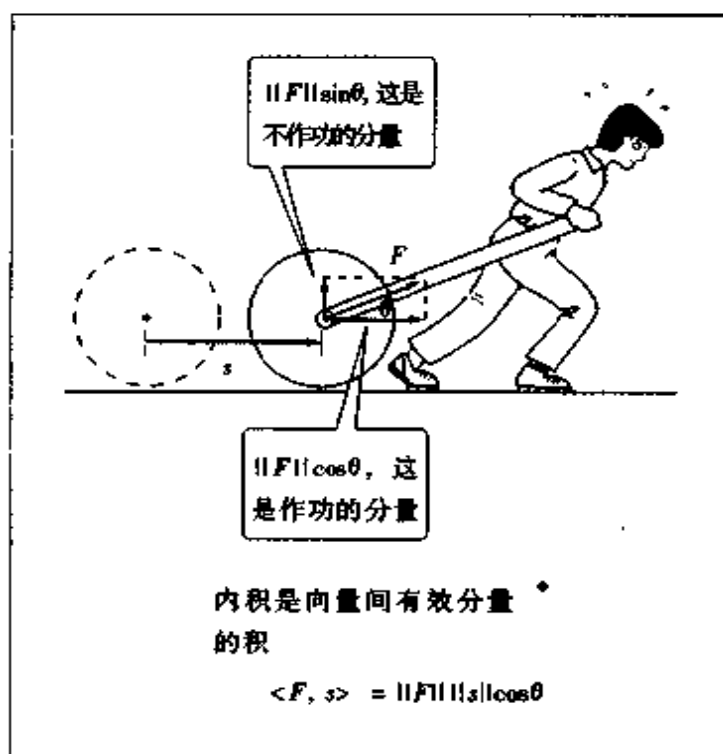
$$\cos \theta = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \|g\|} \quad (3.3)$$

将它记为

$$r = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \|g\|} \quad (3.4)$$

因为 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, 所以 $-1 \leq r \leq 1$ 。 r 的大小表示向量 f 和 g 关于角度关系的强弱(图 3.6)。当向量 f 和 g 的方向相同,即 $\theta = 0$

向量的内积



如同 距离 = 速度 \times 时间, 很多情况下用两个不同量的积表示另一个量。此时, 仅将两个量简单地相乘就行吗? 例如, 力学上的“功”可表示为作用在物体上的力 F [N] 和物体移动距离的积

$$W = F \cdot s \text{ [J]}$$

但是, 当力的方向和物体的移动方向不同时, 此定义就不合适了。这时移动方向与力的方向成一角度 θ , 物体移动的有效力的分量仅是 $F\cos\theta$, 而另一分量 $F\sin\theta$ 不做功。因此, 功可以表示为

$$W = F\cos\theta \cdot s$$

其原因是, 力 F 和位移 s 都是具有大小和方向的量, 作为向量分别表示为 F 和 s , 将他们的功定义为它们的内积最合适。

$$\begin{aligned}
 W &= \langle F, s \rangle \\
 &= \|F\| \|s\| \cos\theta
 \end{aligned}$$

由此例可知, 向量的积表示各个向量有效分量的积。所以将它定义为向量的内积最合适。

时, r 为最大值 1。随着角度 θ 的增大, r 值减少。当 $r=0$ 时, 即 $\langle f, g \rangle = 0$ 时, f 和 g 正交。将 r 命名为相关系数。由式中可见, r 是仅与两个向量间的角度有关的量, 而与模没有关系。

内积用向量的元素可以表示为

$$\langle f, g \rangle = f_1 g_1 + f_2 g_2 \quad (3.5)$$

推导如下, 把图 3.4 的向量之间的关系用余弦定理表示

$$\begin{aligned} \|f-g\|^2 &= \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\|f\|\|g\|\cos\theta \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\langle f, g \rangle \end{aligned}$$

从而, 有

$$\begin{aligned} 2\langle f, g \rangle &= \|f\|^2 + \|g\|^2 - \|f-g\|^2 \\ &= (f_1^2 + f_2^2) + (g_1^2 + g_2^2) - \{(f_1 - g_1)^2 + (f_2 - g_2)^2\} \\ &= 2(f_1 g_1 + f_2 g_2) \end{aligned}$$

进而, 向量 f 与其本身的内积为

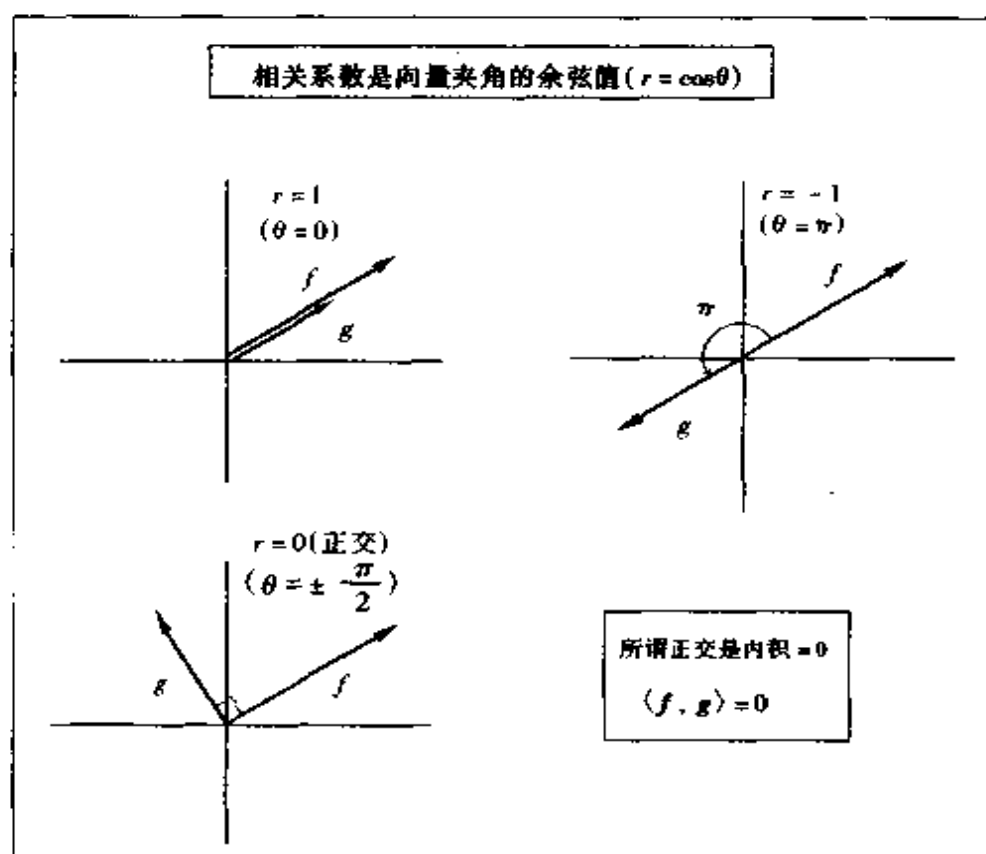


图 3.6 相关系数

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &= f_1^2 + f_2^2 \\ &= \|f\|^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

此式清楚地表明内积和模的关系。将上面的结果带入式(3.4), 相关系数 r 可用向量的分量表示为

$$r = \frac{f_1 g_1 + f_2 g_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2} \sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (3.7)$$

3.4 标准正交基底

度量长度时, 一般使用厘米或毫米作为度量单位。例如, 设 1cm 为一个单位, 5cm 是 1cm 的 5 倍, 表示 5 个单位。同样在向量空间中, 也需要首先确定基准单位。当然, 在 2 维向量空间中, 度量大小的尺度不能是一个, 必须是两个。

将相互正交的向量组 $\{v_1, v_2\}$ 称为正交基底。且当 $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ 时, 称为标准正交基底(图 3.7)。模为 1 的向量称为单位向量。即, 所谓单位向量是表示 1 个单位大小的向量。因此, 标准正交基底是一组相互正交的单位向量, 衡量向量的大小可以通过两个尺度的组合。在这里, 考虑分别在 v_1, v_2 前乘以系数 C_1, C_2 的线性组合式(图 3.7)。

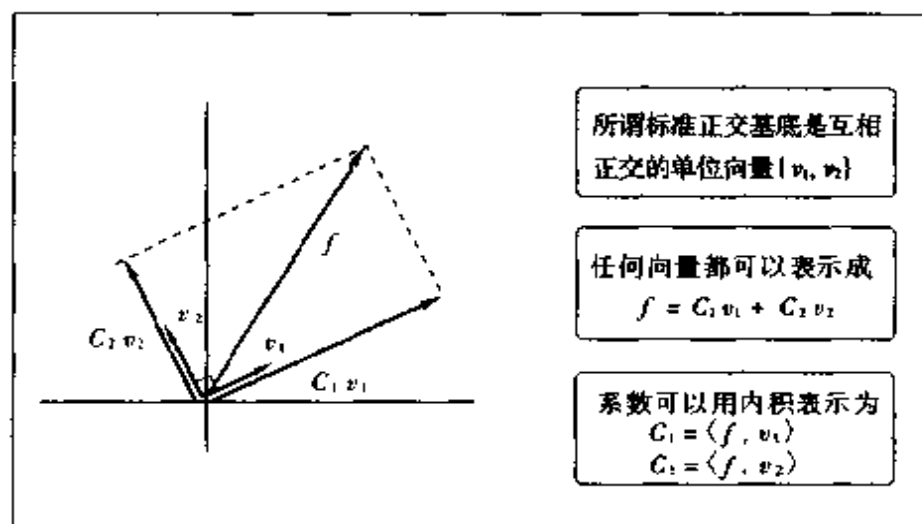


图 3.7 用标准正交基底表示向量

$$\boxed{f = C_1 v_1 + C_2 v_2} \quad (3.8)$$

(C_1, C_2) 表示向量 f 分别在 v_1 方向和 v_2 方向分量的大小, 即包含多少个单位。这样, 平面上的任意点都可以用上式表示, 这一点非常重要。向量 $C_1 v_1, C_2 v_2$ 称为对应于 v_1, v_2 的 f 的映射。

给出任何一个向量 f 时, 需依据预先准备好的标准正交基底 (v_1, v_2) , 为将向量表达为式 (3.8) 的形式, 必须求出系数值 (C_1, C_2) 。其结果分别由 f 和 v_1, v_2 的内积给出:

$$\boxed{C_1 = \langle f, v_1 \rangle, \quad C_2 = \langle f, v_2 \rangle} \quad (3.9)$$

证明如下, 首先将式 (3.8) 的两边取与 v_1 的内积

$$\begin{aligned} \langle f, v_1 \rangle &= \langle C_1 v_1 + C_2 v_2, v_1 \rangle \\ &= \langle C_1 v_1, v_1 \rangle + \langle C_2 v_2, v_1 \rangle \\ &= C_1 \langle v_1, v_1 \rangle + C_2 \langle v_2, v_1 \rangle \end{aligned}$$

在这里, 根据标准正交基底的性质

$$\langle v_1, v_1 \rangle = \|v_1\|^2 = 1 \quad \langle v_2, v_1 \rangle = 0$$

结果前式的右边变为只剩下 C_1 , 从而得到

$$\boxed{C_1 = \langle f, v_1 \rangle}$$

采用同样的方法可以得到

$$\boxed{C_2 = \langle f, v_2 \rangle}$$

这样, 一个向量在标准正交基底各个向量方向上的分量可以用原向量和基底各向量的内积表示。

[例题]

问题 1 当两个向量 v_1, v_2 分别为 $v_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), v_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 时, $\{v_1, v_2\}$ 是标准正交基底吗?

答

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_2 \rangle &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0\end{aligned}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

$$\|v_2\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

从而可知 $\{v_1, v_2\}$ 是标准正交基底。

问题 2 试用问题 1 的标准正交基底 $\{v_1, v_2\}$ 将 $f = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 展开。

答

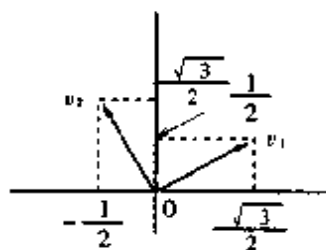
将 f 展开为 $f = C_1 v_1 + C_2 v_2$ 时

$$\begin{aligned}C_1 = \langle f, v_1 \rangle &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= 2\end{aligned}$$

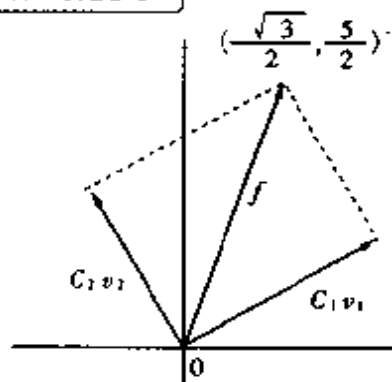
$$\begin{aligned}C_2 = \langle f, v_2 \rangle &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

从而, f 由 $\{v_1, v_2\}$ 表示为 $f = 2v_1 + \sqrt{3}v_2$

$\{v_1, v_2\}$ 是否构成标准正交基底?



C_1, C_2 是多少?



在 f 中, v_1 部分为 2 个单位, v_2 部分为 $\sqrt{3}$ 个单位。



3.5 从多维向量空间到函数空间

对2维向量空间定义的向量间的距离和内积也可以表示多维向量。例如3维空间的向量

$$f = (f_1, f_2, f_3) \quad (3.10)$$

其模仍然是从原点到点 (f_1, f_2, f_3) 的距离,可用下式表示:

$$\|f\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$$

从而可以将其推广到在现实中不存在的4维以上的空间,对于 N 维空间中的向量

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$$

其模可以从2维 \rightarrow 3维 $\rightarrow N$ 维的角度推广其定义:

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_N^2} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^N f_k^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

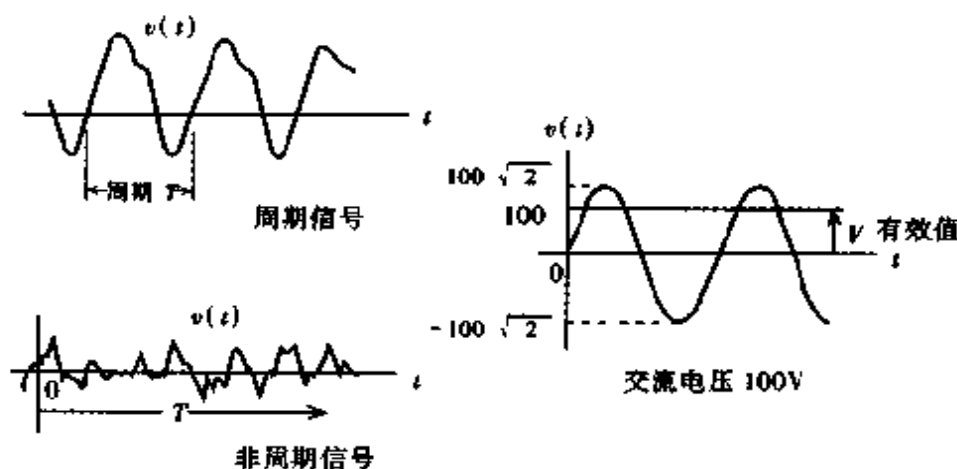
那么,如何将这种关系推广到无限维空间即函数空间呢?这种情况下函数 $f(t)$ 的模表示为函数的大小,对此与其在数学上讨论,不如通过实际的物理现象中经常使用的表达式更容易理解(见MEMO)。

从 N 维向量模的定义,很容易推想到将函数 $f(t)$ ($a \leq t \leq b$)的模定义为

$$\|f(t)\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}$$

毫无疑问,这一定义是可行的。在式中区间取的越长数值也就越大。所以,作为定义在区间的长度上规格化就可以了。即在这里将函数 $f(t)$ 的模定义为

$$\|f(t)\| = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt} \quad (3.12)$$



将交流电压在时刻 t 的瞬时值记为 $v(t)$, 为表示整体电压的大小, 一般用被称为有效值的数值来表示。当电压的波形呈周期出现时, 设 T 为周期, 有效值用瞬时值的均方根值表示

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}$$

例如我们使用的商用电源的 100V 就是用有效值表示的电压值, 瞬时的电压最高可以达到约 140V (读者自己想一想为什么瞬时电压最高为 140V。提示电压 $v(t)$ 可表示为正弦波, 且 $140 \approx 100 \sqrt{2}$ 。

尽管非周期性电压不能使用此定义, 但可以在较长的时间段取电压值的均方根值。可以用下式表示

$$V = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}$$

将 T 取无限大实际上是不可能的, 但若 T 很长, 一般 V 可接近于某一定值。

同样, 对多维向量来说, 为使模不随维数 N 变化而变化, 通常将其定义为

$$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k^2} \quad (3.13)$$

如果将函数的模的表达式与多维向量的模的表达式进行比较, 不

难得出下面的对应关系:

向量→函数

和→积分

即所谓从多维向量空间到函数空间的拓展,简单地说,就是通过这样的对应关系实现的。具体表示如下。对 N 维向量空间的距离,参考 2 维向量空间距离,定义为

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \|f - g\| \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^N (f_k - g_k)^2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

依此,两个函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上的距离,对应上式分别将向量换为函数,和换为积分,就可以得到

$$d(f(t), g(t)) = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b \{f(t) - g(t)\}^2 dt} \quad (3.15)$$

实际上,上式作为误差的均方值,在以物理量为对象的很多领域中是经常可以见到的形式。与向量的距离相同,函数的距离在衡量它所表示的物理量的相似性(差异性)方面起了有效的作用。

下面来考察内积,在 2 维向量空间中,设 f 和 g 的夹角为 θ , f 和 g 的内积定义为

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \|f\| \|g\| \cos \theta \\ &= f_1 g_1 + f_2 g_2 \end{aligned}$$

内积包含表达向量间夹角的概念,这应用于多维空间也是同样的。 N 维向量空间的两个向量 f 和 g ,在 N 维空间上的夹角为 θ ,其内积同样可以定义为

$$\langle f, g \rangle = \|f\| \|g\| \cos \theta \quad (3.16)$$

若将它用向量的元素表示,可写成下面的形式:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_N g_N \\ &= \sum_{k=1}^N f_k g_k \end{aligned} \quad (3.17)$$

进而,由此式还可以导出在 N 维向量空间上的相关系数。参照在 2 维空间上的相关系数式(3.7),可将相关系数定义为

$$r = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \|g\|} = \frac{\sum_{k=1}^N f_k g_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^N f_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^N g_k^2}} \quad (3.18)$$

将式(3.17)扩展,可以简单地导出函数的内积。也就是在区间 $[a, b]$ 上的函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的内积,使用向量 \rightarrow 函数,和 \rightarrow 积分的对应关系

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) g(t) dt \quad (3.19)$$

$f(t)$ 与它本身的内积在向量空间上的性质是相同的。

$$\begin{aligned} \langle f(t), f(t) \rangle &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt \\ &= \|f(t)\|^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

在函数间引入了角度的概念,使函数空间也能够定义内积。在函数空间中,当两个函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的夹角为 θ 时,其相关函数与向量情况相同,可以用模和内积定义如下

$$r = \cos \theta = \frac{\langle f(t), g(t) \rangle}{\|f(t)\| \|g(t)\|} \quad (3.21)$$

写成具体的算式为

$$r = \frac{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) g(t) dt}{\sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b g^2(t) dt}} \quad (3.22)$$

尽管很复杂,但在思路上与向量的情况相同。此相关函数是衡量函数和函数间有多大程度相似的尺度。 r 的范围为 $-1 \leq r \leq 1$, r 值越大,函数之间的相关性越强,即越相似。

我们已经知道了向量间角度的概念。从而与向量正交相同,



图 3.8 相关函数的含义

函数的正交也当然可以通过内积来定义。

当 $\langle f(t), g(t) \rangle = 0$ 时, 称 $f(t)$ 和 $g(t)$ 正交

例如, 两个函数 $f(t) = t$, $g(t) = 1$, 在 t 的区间 $[-1, 1]$ 正交。这是因为

$$\langle t, 1 \rangle = \int_{-1}^1 t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0$$

3.6 标准正交函数系

我们已经学过了 2 维向量空间的任意向量 f , 可以用标准正交基底 $\{v_1, v_2\}$ 的线性组合的形式表示。

$$f = C_1 v_1 + C_2 v_2$$

在 N 维向量空间中, 也可以用同样的方式来定义标准正交基底。用它的线性组合可以表示任意的向量。所谓标准正交基底是相互正交的单位向量的集合。在 N 维向量空间中, 当向量的集合 $\{v_k, k = 1, 2, \dots, N\}$ 满足下式时, 将它称为 N 维向量空间的标准正交基底。

$$\langle v_m, v_n \rangle = \begin{cases} 0 & ; m \neq n & (v_m \text{ 和 } v_n \text{ 正交}) \\ 1 & ; m = n & (\text{单位向量的性质}) \end{cases}$$

此式用克罗内克的 δ 符号:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 1; & m = n \end{cases}$$

也可以简单地表示成

$$\langle v_m, v_n \rangle = \delta_{mn}$$

若所有的向量相互正交, 其中的任何一个向量都不能用其他的向量表示, 即相互间是独立的。

若用标准正交基底, 可以用线性组合的形式表示任意的向量。即任意的 N 维向量 f 都可以写成(图 3.9)

$$f = C_1 v_1 + C_2 v_2 + \cdots + C_N v_N \quad (3.23)$$

此式的第 k 项的系数 C_k 是:

$$C_k = \langle f, v_k \rangle \quad (k = 1, 2, \cdots, N) \quad (3.24)$$

与 2 维的情况同样, 对式(3.23)的两边与 v_k 取内积, 得出

$$\begin{aligned} \langle f, v_k \rangle &= \langle C_1 v_1 + C_2 v_2 + \cdots + C_k v_k + C_N v_N, v_k \rangle \\ &= C_1 \langle v_1, v_k \rangle + C_2 \langle v_2, v_k \rangle + \cdots \\ &\quad + C_k \langle v_k, v_k \rangle + \cdots + C_N \langle v_N, v_k \rangle \end{aligned}$$

由标准正交基底的性质

$$\langle v_k, v_k \rangle = \|v_k\|^2 = 1 \quad \langle v_m, v_k \rangle = 0 \quad (m \neq k)$$

所以, 在式的右边只剩下 C_k , 也就得到

$$C_k = \langle f, v_k \rangle$$

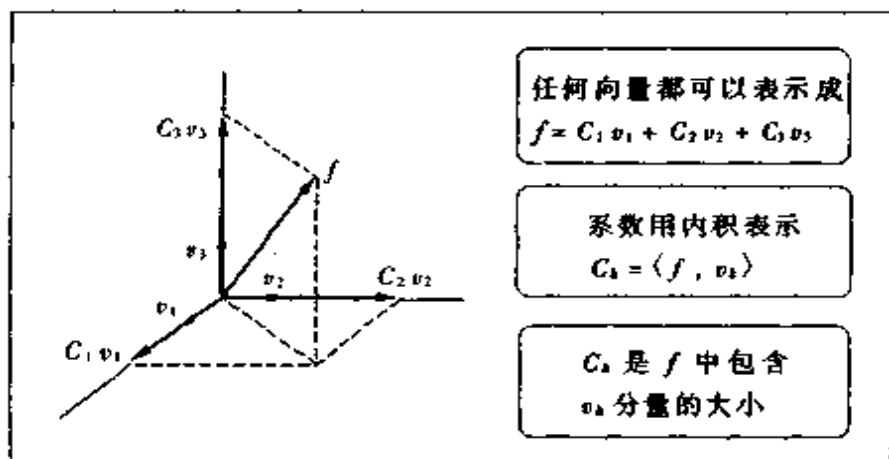


图 3.9 用标准正交基底表示向量

系数 C_k 表示了 f 在 v_k 方向分量的大小, 它可以简单地通过 f 和 v_k 的内积表示出来。

能否将相当于在向量空间中的标准正交基底引入到函数空间去呢? 即大小为 1、互相正交的函数集合。如果真是这样, 任意的函数都可以用这些函数的线性组合表示。这也就意味着可将任意函数分解为性质已知的多个函数的分量。

我们来考察由多个函数组成的集合(函数族)。此集合的函数较少时, 我们还可以将一个个函数用字母表示, 比如: $\{f(t), g(t), h(t), \dots\}$, 而要表示包含无穷多个函数的集合就要在函数上加下标, 必须写成

$$\{\phi_k(t), k=0, 1, 2, \dots\}$$

并且, 假设此函数族中任何两个函数在区间 $[a, b]$ 正交, 用内积表示时

$$\langle \phi_m(t), \phi_n(t) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi_m(t) \phi_n(t) dt = 0$$

$$(m, n=0, 1, 2, \dots, m \neq n)$$

将此函数族称为正交函数系。当各个函数的模为 1 时, 即

$$\langle \phi_m(t), \phi_m(t) \rangle = \|\phi_m(t)\|^2$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi_m^2(t) dt = 1$$

叫做标准正交函数系。所谓标准正交函数系 $\{\phi_k(t), k=0, 1, 2, \dots\}$, 用克罗内克的 δ 符号(见 p. 50)可写为

$$\langle \phi_m(t), \phi_n(t) \rangle = \delta_{mn} \quad (3.25)$$

用标准正交函数系可将任意的函数表示为

$$f(t) = C_0 \phi_0(t) + C_1 \phi_1(t) + C_2 \phi_2(t) + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} C_k \phi_k(t)$$

所谓标准正交函数系是衡量函数的尺度的集合

(3.26)

由此式可以清楚看出, 系数 C_k 是表示函数 $f(t)$ 中包含 $\phi_k(t)$ 分量的大小。读者也许已经发现了求 C_k 的方法。对! 只要取 $f(t)$ 和

$\phi_k(t)$ 的内积就可以。由式(3.26),可写成

$$\begin{aligned}\langle f(t), \phi_k(t) \rangle &= C_0 \langle \phi_0(t), \phi_k(t) \rangle + C_1 \langle \phi_1(t), \phi_k(t) \rangle \\ &\quad + C_2 \langle \phi_2(t), \phi_k(t) \rangle + \cdots + C_k \langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle + \cdots \\ &= C_k \langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{\infty} C_m \langle \phi_m(t), \phi_k(t) \rangle\end{aligned}$$

根据标准正交函数系的定义, $m \neq k$ 项的内积都为 0, 上式右边最后只剩下 C_k 。从而有

$$\begin{aligned}C_k &= \langle f(t), \phi_k(t) \rangle \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \phi_k(t) dt \quad (k=0, 1, 2, \cdots)\end{aligned} \quad (3.27)$$

那么, 读者一定会问, 什么样的函数系是标准正交函数系呢? 比如, 下列函数系在区间 $[-\pi, \pi]$ 是否构成标准正交函数系呢(图 3.10)?

$$\{1, \sin t, \sin 2t, \cdots\}$$

为讨论这个问题, 我们需进行下面的计算:

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \quad \langle 1, \sin nt \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt dt^* = -\frac{1}{2n\pi} [\cos nt]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \quad (n=1, 2, 3, \cdots)\end{aligned}$$

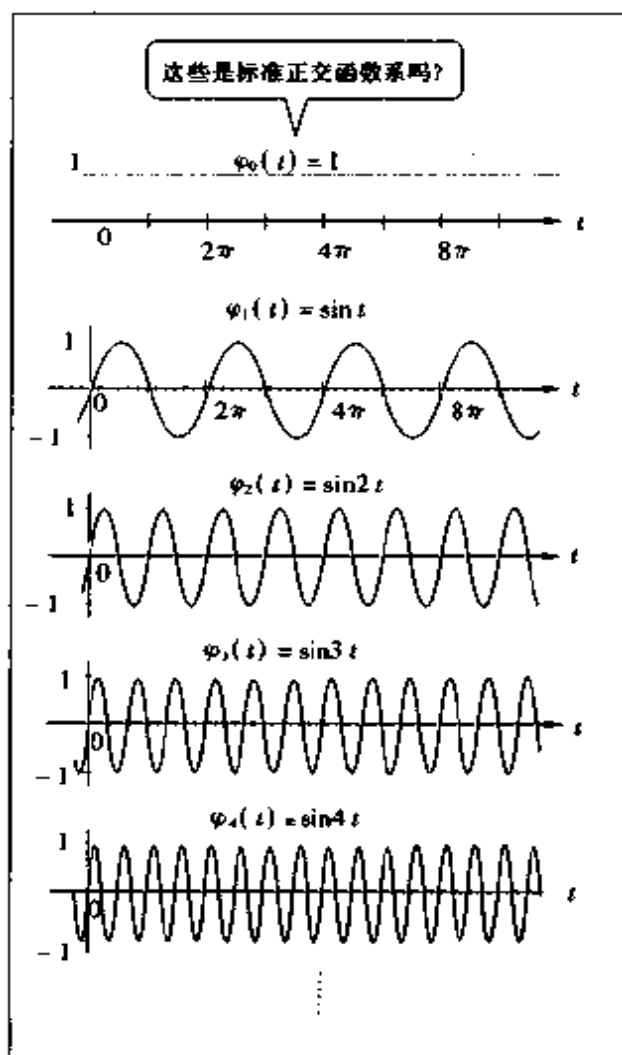
从而, 1 和 $\sin nt$ 正交。

$$\textcircled{2} \quad m \neq n \text{ 时}$$

* 提示

$$\begin{aligned}\langle \sin mt, \sin nt \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin nt dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \{ \cos(m+n)t - \cos(m-n)t \} dt \\ &= -\frac{1}{4\pi(m+n)} [\sin(m+n)t]_{-\pi}^{\pi} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi(m-n)} [\sin(m-n)t]_{-\pi}^{\pi} = 0\end{aligned}$$

* 原书漏排了“ dt ”。——译者注



函数的正交仅
从图中是看不
出来的。



图 3.10 正交函数系的判别

提示板

三角函数的积化和差公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$



因此, $\sin mt$ 和 $\sin nt$ ($m \neq n$) 也正交。

从以上的结果可知, $\{1, \sin t, \sin 2t, \dots\}$ 构成正交函数系。各函数的模为

$$\begin{aligned}
 \|\sin nt\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nt \, dt && * \text{参见提示板} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2nt) \, dt \\
 &= \frac{1}{4\pi} [t]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4\pi \cdot 2n} [\sin 2nt]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned}$$

由于不等于 1, 所以不是标准的。

当函数 $f(t)$ 的模是 $\|f(t)\|$ 时, 将 $f(t)$ 用 $\|f(t)\|$ 除, 构造一个新函数

$$f^*(t) = \frac{f(t)}{\|f(t)\|}$$

很明显 $f^*(t)$ 的模为 1。将这一过程称为正交函数系的标准化。由于此例中 $\|f(t)\| = 1/\sqrt{2}$, 将原来的函数系变换为

$$\{1, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin 2t, \dots\}$$

它构成了标准正交函数系。

提示板

半角公式

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2}$$

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}$$



本章要点

(1) 若用 N 点对连续信号采样, 信号可表示为 N 维向量。它在 N 维空间中对应一个点。

(2) 信号的大小是向量的模,两个信号的差异表示为向量间的距离。向量的内积表示向量间有效分量的积。相关函数表示向量间的角度,它表示信号的相似程度。相关系数越大信号越相似,当相关函数为0时,向量正交。

(3) 将模为1,互相正交的向量的集合称为标准正交基底。任意的向量可以用标准正交基底展开。其分量可用内积确定。

(4) 函数可表示为维数无限大的向量空间(函数空间)的一个点,和向量空间相同,可定义模、距离、内积、相关函数。对应于向量空间的标准正交基底的是标准正交函数系。任意的函数可用它展开。其分量可用内积确定。

◆ ◇ 练习题 ◇ ◆

[1] 有两个3维向量 $f = (4, -4, 7)$, $g = (3, -2, 6)$, 试求出它们的距离、内积、相关函数。进一步求出 f 在 g 方向的分量。

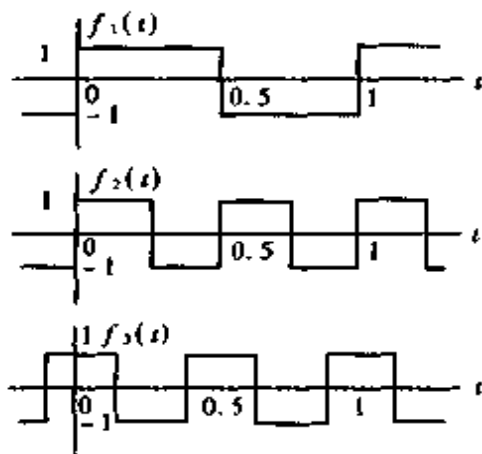


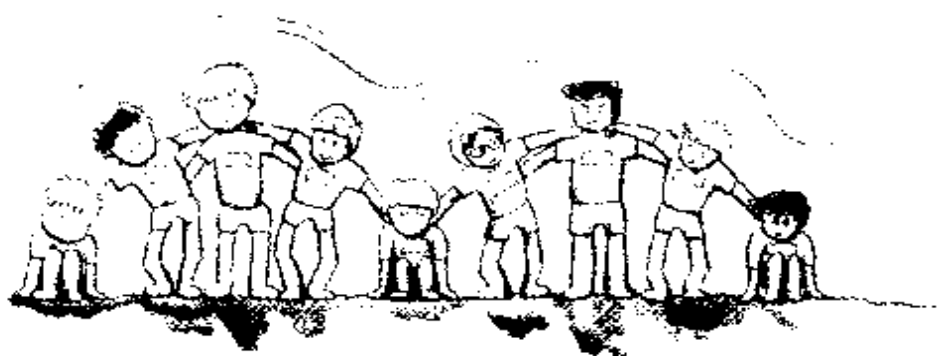
图 3.11

[2] 试证明图示周期信号在区间 $[0, 1]$ 上相互间正交。

[3] 试证明函数族 $\{1, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos 2t, \sqrt{2}\sin 2t, \dots\}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上构成标准正交函数系。

第 4 章

相 关 函 数



4.1 计算函数的类似性

在前一章中，我们进行了数学基础知识的准备，从本章开始终于要进入正题了。首先，作为入手点，我们继续进行关于相关函数的学习。

首先来看看表示世界各地气温的曲线(图 4.1)。印度首都新德里的气温高，原苏联首都莫斯科是寒冷地区。由于阿根廷的首都布宜诺斯艾利斯处于南半球的位置，夏天和冬天与北半球相反。这些特征从气温曲线上可以看出。那么，用这些曲线来求各城市间气温的相关函数会得出怎样的结果呢？

气温变化本来可以看作连续的信号，为简单起见，将它用每个月的平均气温表示的离散信号来表示并分析如下。当某城市的月 i 的气温是 f_i 时，将 1 年内的气温用 12 维的向量 $f = (f_1, f_2, \dots, f_{12})$ 表示，同样将另一个城市的气温用 $g = (g_1, g_2, \dots, g_{12})$ 表示。此时，气温曲线的相关系数 r 用式(3.18)定义，表示为

$$r = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \|g\|}$$

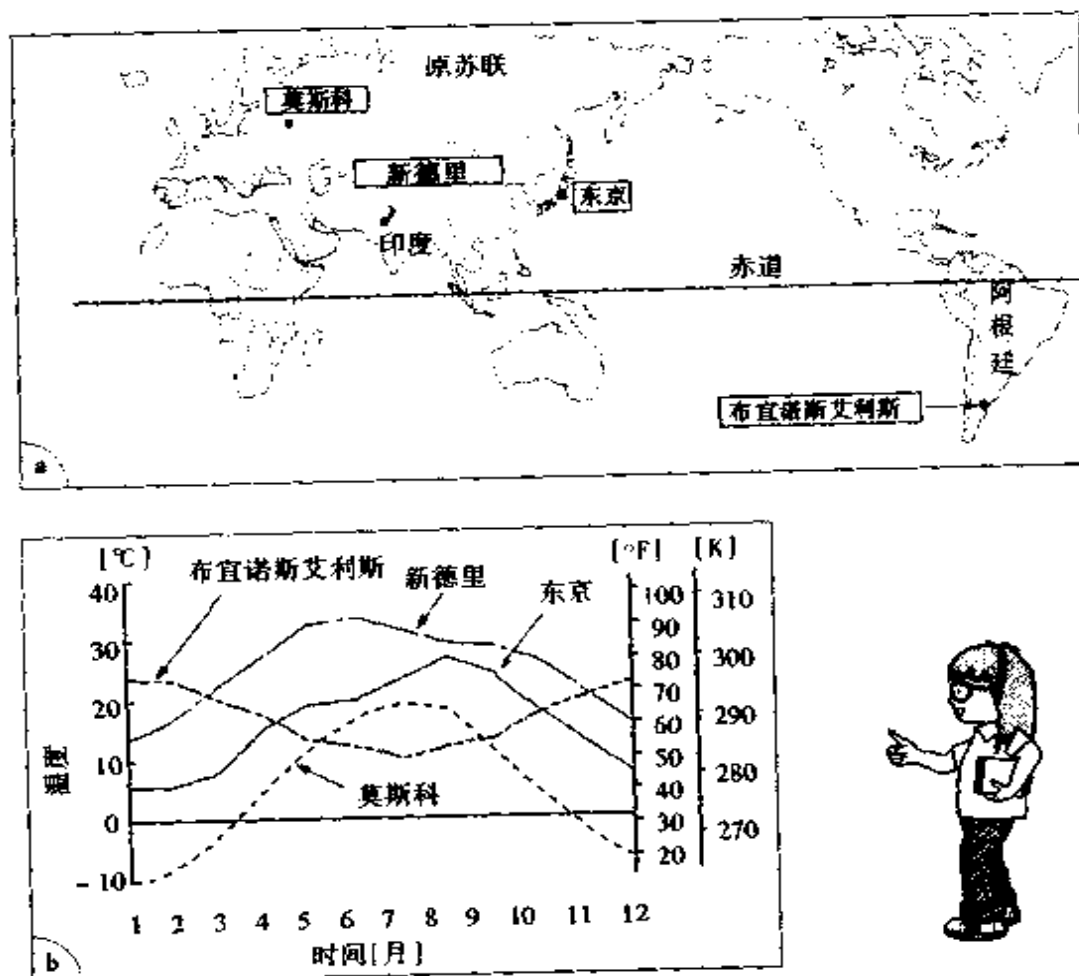


图 4.1 世界各城市的气温图

$$= \frac{\sum_{i=1}^{12} f_i g_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{12} f_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{12} g_i^2}} \quad (4.1)$$

用上式计算各城市之间的相关函数，其结果如表 4.1 所示，这里的第一列温度的单位为摄氏温度。因为值越大表示温度曲线的类似性越高，所以其中东京和新德里最相似（相关系数为 0.97），而莫斯科与布宜诺斯艾利斯的类似性最低（相关系数为 0.16）。

但是，上述相关系数是在摄氏温度 [°C] 下的计算结果，表示温度还有其它的单位。华氏温度 [°F] 是在美国和英国等国家日常生活中使用的温度单位。它是将通常人们感到最寒冷的温度定为 0 °F (相当于 -17.8 °C)，感到最热的温度定为 100 °F (相当于 37.8 °C)，这样即使同样的温度，用华氏温度和用摄氏温度表示的数值

表 4.1 世界各地气温的相关系数

城市	相关系数		
	摄氏[°C]	华氏[°F]	绝对温度[K]
东京—莫斯科	0.73	0.97	1.00
东京—新德里	0.97	0.99	1.00
东京—布宜诺斯艾利斯	0.78	0.94	1.00
莫斯科—新德里	0.62	0.96	1.00
莫斯科—布宜诺斯艾利斯	0.16	0.85	1.00
新德里—布宜诺斯艾利斯	0.87	0.96	1.00

温度的单位
变化后相关
系数也变化

差异也较大。若用华氏温度来计算相关系数,如表 4.1 所示,得到的是与用摄氏温度不同的计算结果。进而,若用在物理上使用的绝对温度计算,所有的相关系数几乎都变成 1 了。即若用绝对温度作为基准,几乎所有的温度值都是相似的。

读者会感到温度单位的变化使相关系数也发生变化,这不利于相关系数的计算。用华氏温度和用摄氏温度计算的日本和美洲的相关系数结果是不同的,这确实有些不当。那么,我们是否可以找到不受单位取法影响的相关系数的计算方法呢?实际上,只要减去平均温度后,再来求相关系数就可以。首先求出 f, g 的平均值记为 \bar{f}, \bar{g}

$$\bar{f} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} f_i \quad \bar{g} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} g_i$$

从各测定值中减去此值,得到新的向量,

$$\begin{aligned} f' &= (f_1 - \bar{f}, f_2 - \bar{f}, \dots, f_{12} - \bar{f}) \\ g' &= (g_1 - \bar{g}, g_2 - \bar{g}, \dots, g_{12} - \bar{g}) \end{aligned}$$

用该向量计算相关系数。这样得到的相关系数如表 4.2 所示。从这些值可以看出,即使所使用的温度单位不同,计算的相关系数的结果却完全相同。从此表可见,曲线相似的东京和莫斯科的相关性最高,温度变化趋势和其他城市相反的布宜诺斯艾利斯,这一次和其他城市具有较高的负相关系数。这在直觉上也是能够认

表 4.2 从中减去平均值计算相关函数

城市	相关系数		
	摄氏[°C]	华氏[°F]	绝对温度[K]
东京—莫斯科	0.95	0.95	0.95
东京—新德里	0.87	0.87	0.87
东京—布宜诺斯艾利斯	-0.95	-0.95	-0.95
莫斯科—新德里	0.95	0.95	0.95
莫斯科—布宜诺斯艾利斯	-0.99	-0.99	-0.99
新德里—布宜诺斯艾利斯	-0.95	-0.95	-0.95

若减去平均值
结果都相同

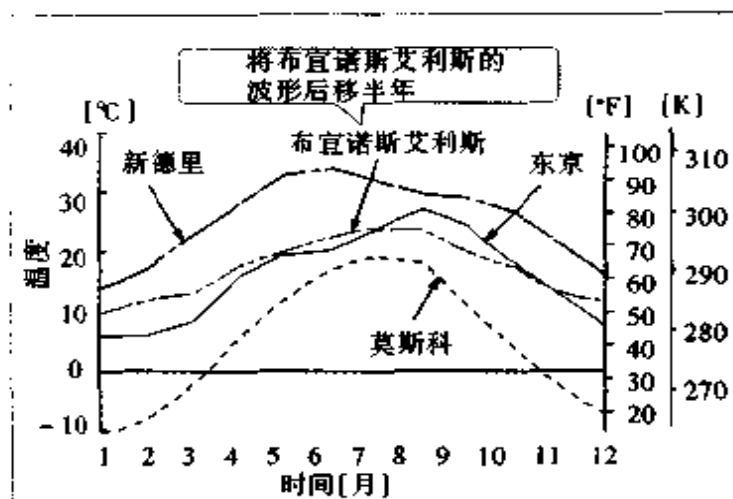
布宜诺斯艾利斯与
其他城市呈负相关

同的。但是,我们要注意到,由于减去了平均值,这种分析忽略了新德里的气温高,莫斯科的气温低之类的整体气温高低的性质。因此,若要保留气温整体高低特征,减去平均值是不合适的。这就告诉我们,在定义相关系数时,要事先根据我们的目的,明确哪些相关重要,哪些不重要。

如果关注信号变化的相关系数,必要时可减去信号的平均值。但这样做信号的物理单位和刻度会不会对相关系数有影响。请不必担心,因为相关系数是取决于原来函数(向量)角度的量,与大小没有关系。实际上,由式(4.1)可见,由于将内积分别用模除,可知函数(向量)的刻度被自动地标准化了。由此可见,在求物理量不同的信号的相关系数时,所求出的相关系数与物理量及刻度无关,无论一个是电压信号而另一个是温度信号,或者电压的单位一个是[V]而另一个是[mV]都无关紧要。

4.2 互相关函数

求出世界各地的气温曲线的相关后可知,处在南半球的布宜诺斯艾利斯相对其他城市表现出很强的负相关。我们再来讨论图4.1的气温曲线。从图中可见,确实布宜诺斯艾利斯与其他城市有不同形式的气温变化。但是如果将布宜诺斯艾利斯的气温在时间轴上错动半年又会如何呢?将其示于图4.2,这样,由图可知,此时布宜诺斯艾利斯的气温曲线形式与东京的形式非常相似。即时



原来东京和布宜诺斯艾利斯的气候是相似的



图 4.2 计算错开时间轴的相关

间轴相错半年两者很相似。这也是可以解释的。就是在忽视时间相错关系下判断两个信号的类似性，或者是想知道两个信号在时间上有多大程度的相错，这个时候可用互相关函数 (cross-correlation function)。

现在，作为对象的函数 $f(t)$, $g(t)$ 为周期函数，其周期为 T ，定义它们的互相关函数为

$$R_{fg}(\tau) = \langle f(t), g(t+\tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t+\tau)dt \quad (4.2)$$

此式是函数 $f(t)$ 在时间轴上不变，将函数 $g(t)$ 在时间轴上后移时间 τ ，然后取两者的内积。因为内积表示函数间相关的强弱，在这里是将此相关值表示为后移时间 τ 的函数。当然，若此式用各函数的模除，即

$$R_{fg}(\tau) = \frac{\langle f(t), g(t+\tau) \rangle}{\|f(t)\| \|g(t)\|} \quad (4.3)$$

其值为从 -1 到 1 的值，从而得到标准化了的相关值。而且，必要时还可以预先减去函数的平均值。

我们实际计算一下东京和布宜诺斯艾利斯的气温曲线的互相关函数。对于数字信号 $f_i, g_i (i=1, 2, \dots, N)$ 互相关函数定义为

下式

$$R_{fg}(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i g_{i+j} \quad (4.4)$$

气温可以看成是以1年为周期的周期函数，这几乎没有问题。因此，当在时间轴上后移时间 τ 时，虽然在一侧出现数据不足的部分，但可以用另一侧的数据作循环补充(图4.3)。

将东京和布宜诺斯艾利斯的互相关函数的计算结果示于图4.4。从图中可见，最大值出现的位置正好相错6个月。因此，可以这样理解这种现象，即东京和布宜诺斯艾利斯的气温曲线形式是非常相似的，但有6个月的偏移。

信号处理的对象并不仅限于周期信号。对非周期信号如何来定义互相关函数呢？例如，能否用下式定义呢？

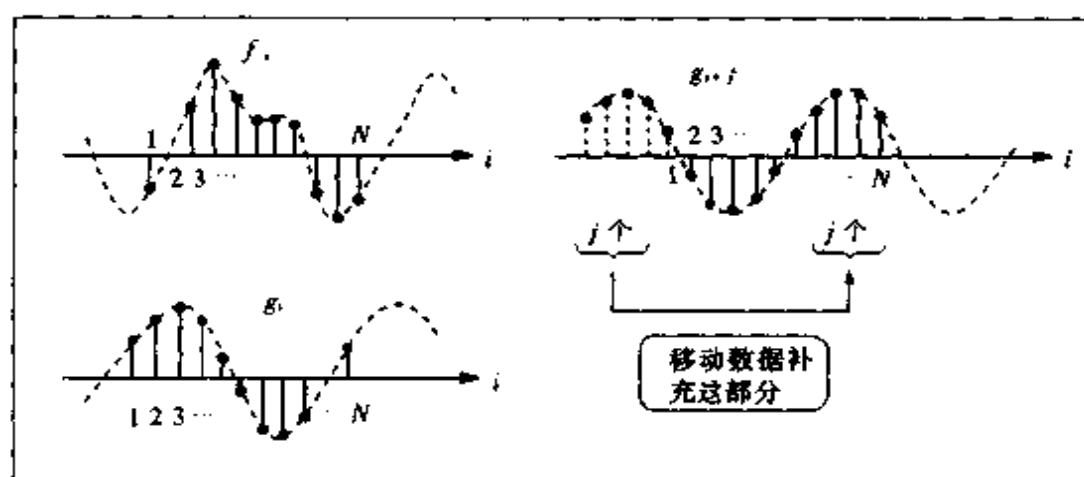


图4.3 数据的补充

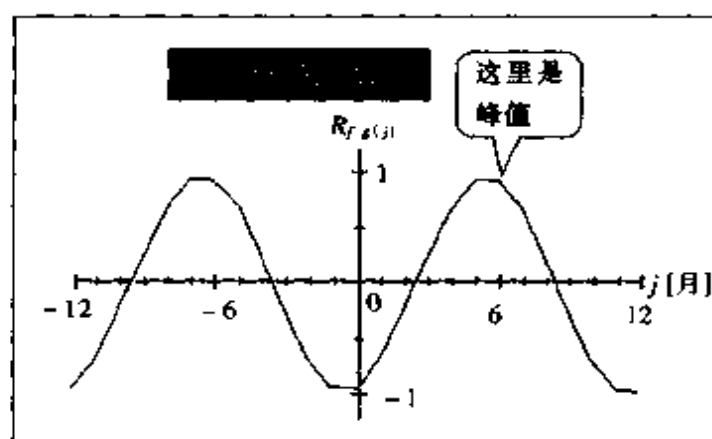


图4.4 东京和布宜诺斯艾利斯的互相关函数

$$R_{fg}(j) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)g(t+\tau)dt$$

即在某一区间 $[a, b]$ 上定义的内积。若区间的长度取的过短,此值有可能混入噪声等偶然的影响。因此,此区间必须取得足够长,在理论上必须将此取为无穷大。即可定义为

$$R_{fg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t+\tau)dt \quad (4.5)$$

但是,即使在理论上是正确的,但无限大时间长度在物理上也是不可能实现的,所以只要所取长度能够充分反映信号具有的统计上的性质就可以。

使用互相关函数可以测定相关两个信号的时间错动,它可以

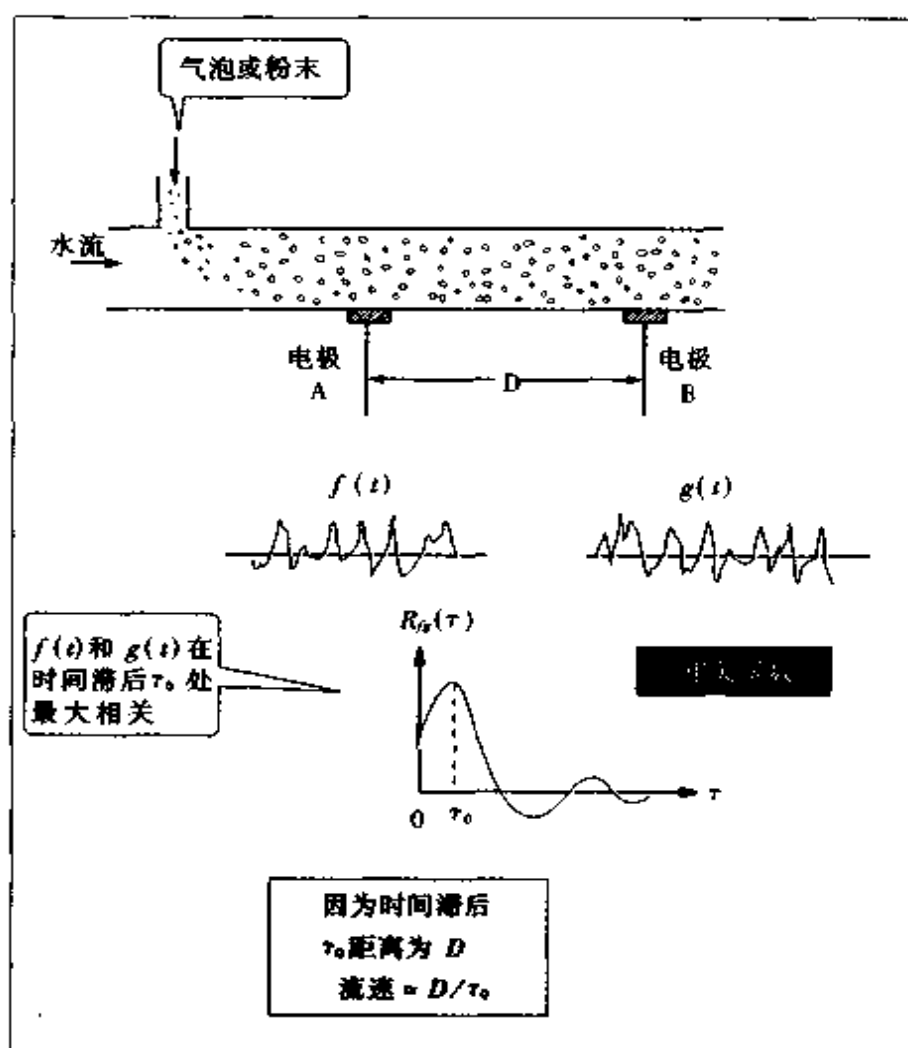


图 4.5 使用互相关函数测流速

在各种信号处理中应用。例如,水流速度的测定。如图 4.5 所示,首先在管道前后设置电极,并在水流的前端注入气泡或粉体,用来干扰水的阻力,从两个电极上测得随机信号。但是,两个随机信号并不是完全没有关系。与在前端电极 A 观测的信号非常相似的信号,必然在经过某一时间后,在后端的 B 出现。即观测的两个信号具有某一时间的滞后,且相关性很高。因而,若求两者的互相关函数,就可知道信号间滞后时间的多少,并由此时间的滞后最后可以求出流速。

4.3 自相关函数

在物理现象中,实际上有很多信号中隐藏着周期性。要想知道在给出的信号中是否具有周期性,它的周期是多少,我们该怎么做呢? 若函数 $f(t)$ 明显是周期函数时,如前面所示,对于整数 ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) 必然存在周期 T 使下式成立

$$f(t) = f(t + nT)$$

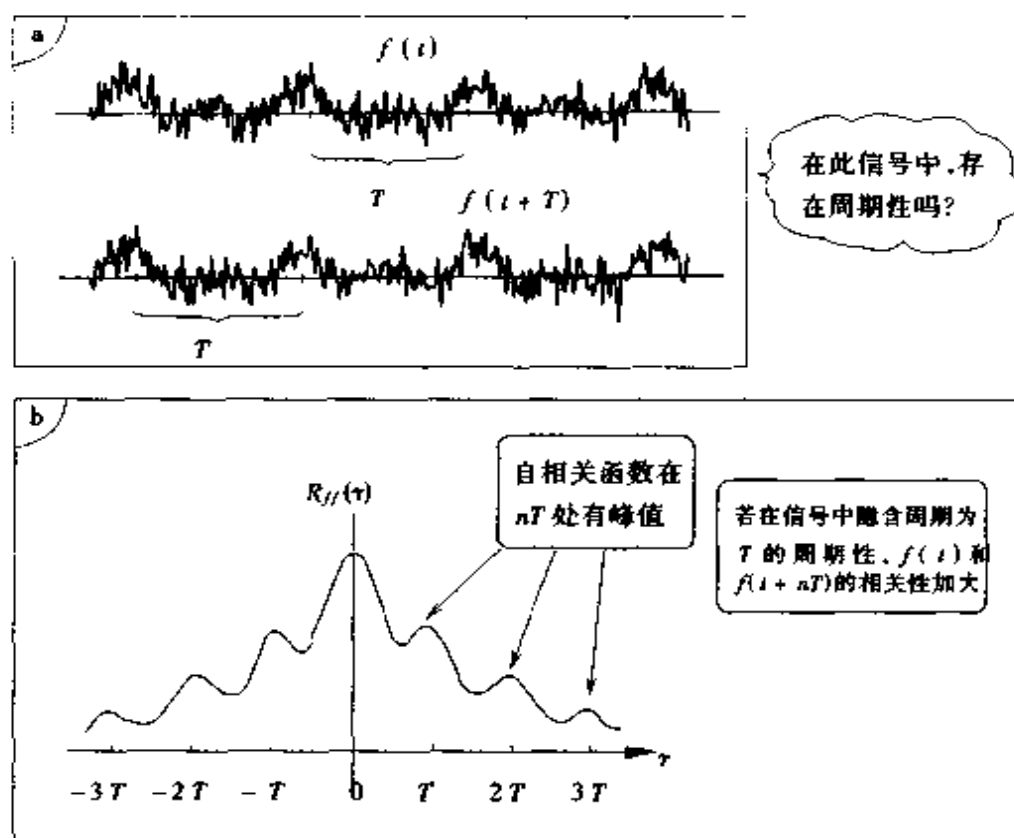


图 4.6 自相关函数

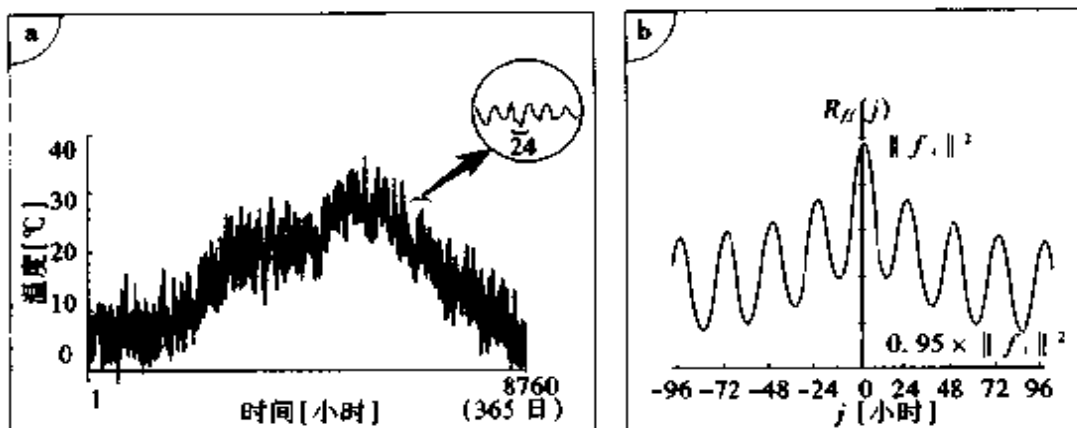


图 4.7 气温曲线的自相关函数

但是,我们处理的随机信号不能正好用上式表示。然而,当求取信号 $f(t)$ 在时间轴上 $\pm T, \pm 2T, \pm 3T, \dots$ 等错开的函数与函数 $f(t)$ 的相关时,若出现大的相关值意味着什么呢? 此时是否可以说在函数 $f(t)$ 中隐含了周期为 T 的周期性(图 4.6)。换一种说法,求取 $f(t)$ 和将 $f(t)$ 在时间轴上错开的函数的相关,在错开整

REVIEW

给出自相关函数的主要性质如下,证明略。

(1) 自相关函数以 $\tau=0$ 为中心左右对称。即

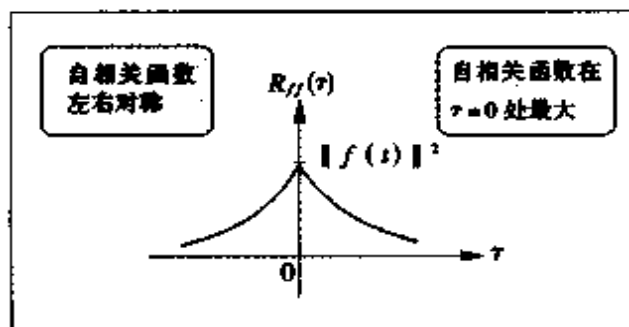
$$R_{ff}(\tau) = R_{ff}(-\tau)$$

(互相关函数一般左右不对称)。

(2) 自相关函数在 $\tau=0$ 处为最大值。且其值为

$$R_{ff}(0) = \|f(t)\|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

(互相关函数一般在 $\tau=0$ 处不是最大值)。



数倍处的相关值是否出现峰值,可判定是否具有周期性。

读者也许注意到了,为取将 $f(t)$ 的时间轴错动了的函数和 $f(t)$ 的相关,使用上文的互相关函数的考虑方法就可以。但是,在这里不是求两个不同函数的相关函数,而是求函数和函数本身的互相关函数。由式(4.5),信号和它本身的互相关函数可以表示成

$$R_{ff}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)f(t+\tau)dt \quad (4.6)$$

将以时间滞后 τ 为变量的此函数 $R_{ff}(\tau)$ 称为自相关函数 (auto-correlation function)。

我们还是以气温曲线为例。图 4.7(a) 是东京每隔 1 小时所测得的气温曲线。在此气温变化中是否隐含周期性呢? 由于 1 年有 8760 小时 (24 小时 \times 365 天), 将气温用 $f_i (i=1, 2, \dots, 8760)$ 表示, 可以用下式计算自相关函数

$$R_{ff}(j) = \frac{1}{8760} \sum_{i=1}^{8760} f_i f_{i+j}$$

结果见图 4.7(b)。在这里, 由于时间轴的错动, 数据不足时, 可用前面的数据循环补充。

由图 4.7(b) 可见, $R_{ff}(j)$ 在 24 的倍数处明显地出现峰值。即在此信号中隐含了以 24 小时为周期的周期性。反过来想一想也确实是这样。气温一个昼夜有一个峰值和谷值, 这就是这里出现 24 小时的周期性的真正含义。

本章要点

(1) 周期为 T 的模拟信号 $f(t)$, $g(t)$ 的互相关函数以 $g(t)$ 在变量轴 (t 轴) 上的移动量 τ 为变量, 定义如下

$$R_{fg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t+\tau)dt$$

而数字信号 $f_i, g_i (i=1, 2, \dots, N)$ 的互相关函数定义如下

$$R_{fg}(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i g_{i+j}$$

用互相关函数可求出函数间的相关强度和時間上的錯动程度。

(2) 模拟信号 $f(t)$ 的自相关函数定义为函数与其自身的互相关函数

$$R_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)f(t+\tau)dt$$

用自相关函数可以分析信号是否具有周期性。自相关函数在 $\tau=0$ 处为最大 $\|f(t)\|^2$, 且左右对称。

对数字信号定义为

$$R_f(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i f_{i+j}$$

◆ ◇ 练习题 ◇ ◆

[1] 试考虑利用互相关函数求声速的方法。

[2] 下表是两个城市每隔一个月的平均气温。试图示两城市气温的互相关函数。说明从结果中看出了什么。

这里, 相关函数定义为

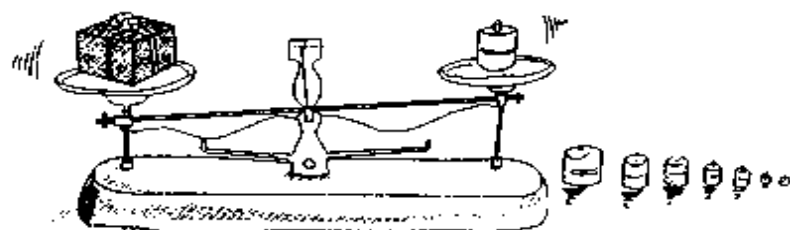
$$R_{fg}(j) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (f_i - \bar{f})(g_{i+j} - \bar{g})$$

其中 \bar{f}, \bar{g} 分别为 f_i, g_i 的平均值。

		温度 [$^{\circ}\text{C}$]					
I		1	2	3	4	5	6
月		1	3	5	7	9	11
F 市 (f_i)		4	10	20	25	20	5
G 市 (g_i)		20	18	15	10	17	22

[3] 试证明自相关函数以 $\tau=0$ 为中心左右对称。

傅里叶级数展开



5.1 何谓傅里叶级数展开

拿破仑时代的法国数学家傅里叶 (J. B. J. Fourier, 1768 ~ 1830) 提出了在当时可以说是大胆的设置。他认为“不存在不能用三角级数表达的函数”。遗憾的是,这一学说却不能被当时的大数学家们轻易接受。这也是当然的,因为连傅里叶本人也没能给出完整的证明。仅用类似三角函数的平滑的简单的多个函数相加,生成任意的复杂的函数,这从直觉上很难使人相信。但是,如果傅里叶的学说是正确的,这的确很有用,无论是什么样的信号波形都可以分解为不同频率的正弦波,相反,将不同频率正弦波以适当方式叠加组合,可以合成任意的波形。如果此理论是正确的,一定会对信号处理起很大的作用。因此,在本章中首先来考察这一理论的正确性。

首先来看图 5.1。图(a)表示的函数为:

$$f(t) = 2 \sin t - \sin 2t$$

这是三角函数的和,即三角级数的形式。若在其上再加上一项,构成函数

$$f(t) = 2 \sin t - \sin 2t + \frac{2}{3} \sin 3t$$

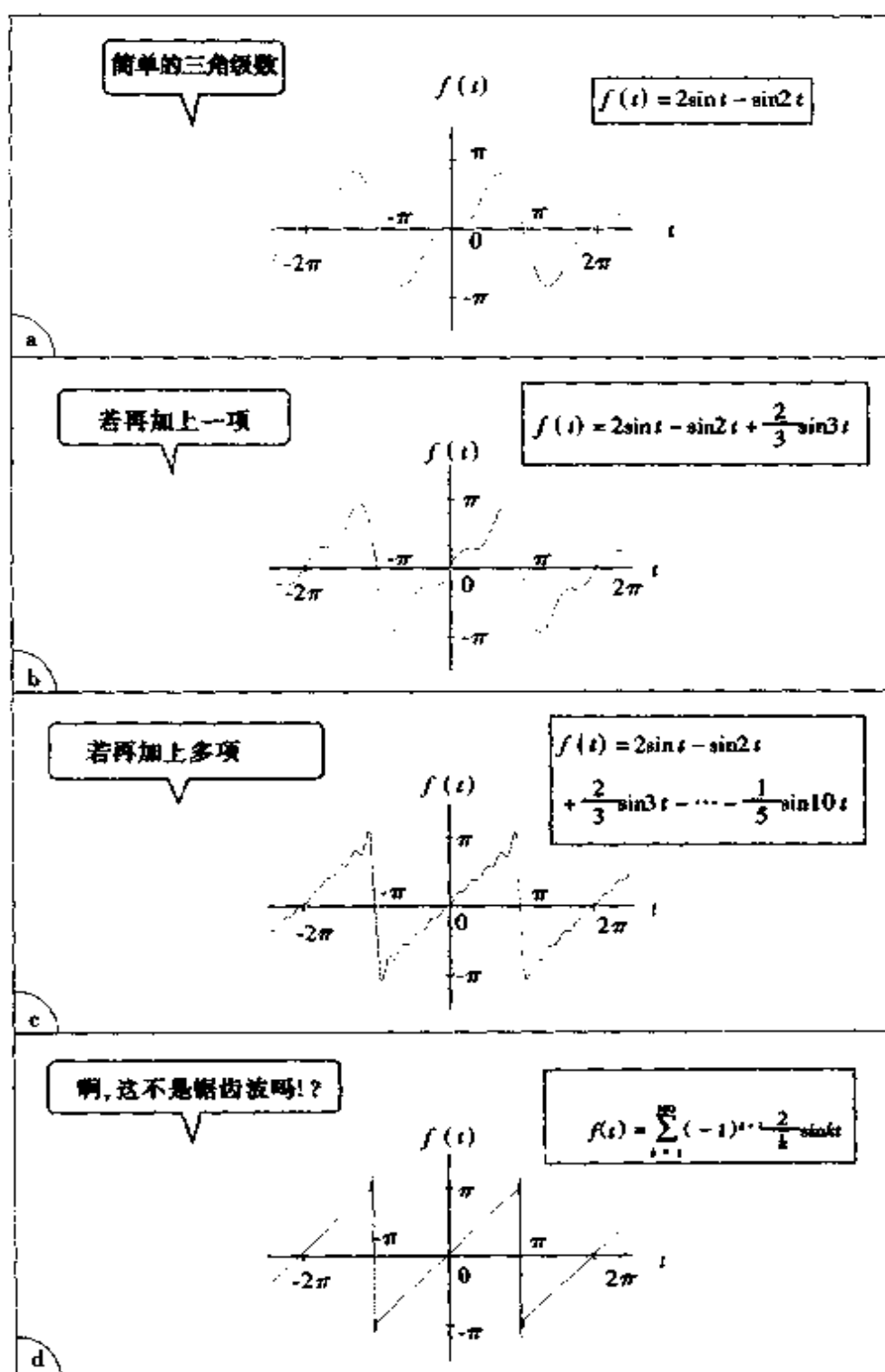


图 5.1 某一三角级数

它的曲线示于图(b)。继续增加更多项,构成函数

$$f(t) = 2 \sin t - \sin 2t + \frac{2}{3} \sin 3t - \frac{1}{2} \sin 4t + \frac{2}{5} \sin 5t \\ - \frac{1}{3} \sin 6t + \frac{2}{7} \sin 7t - \frac{1}{4} \sin 8t + \frac{2}{9} \sin 9t - \frac{1}{5} \sin 10t$$

将其示于图(c)。观察此三角级数表达式可知,若用整数 k 确定其系数 b_k 时,此函数可以表示为

$$b_k = (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \\ f(t) = \sum_{k=1}^M b_k \sin kt$$

此 b_k 是角频率为 k 的正弦波的振幅,即给出其相应频率分量的大小。

图(c)的函数 $f(t)$ 是 $M=10$ 的情形,进一步增大 k 值,若 $M=100$,函数 $f(t)$ 如图(d)所示。尽管此函数是三角级数,但已经变成了与锯齿波非常近似的波形。事实胜于雄辩,傅里叶的理论对我们处理的物理信号波形应该说是正确的。尽管例中的信号波形不平滑,包含间断点也没有关系,在实际上是可靠的。尽管在不连续点附近残留着细微的振动,而感到不够理想。

事实上,在物理界中有很多物理现象的波形是由各种不同频率的分量合成。以光为例,它是由从波长约为 800 \AA (埃) 的红光,到波长约 4000 \AA 的紫光的电磁波合成。大家都知道,当白色光通过棱镜时,由于波长的不同,折射率也不同,而得出七种美丽的色彩(光谱)。这恰恰证明了白色光是由不同波长的光合成的。如同使用棱镜将光分解为光谱,以讨论色的配合和光的分析那样。我们也将信号分解为不同频率的分量,从而可以得到原来的信号是如何产生的,经过什么样的环节,在过程中从外部受到什么样的影响等,以明确信号的来历和经历等有用的信息。这种分析方法称为谱分析(spectral analysis)或傅里叶分析(Fourier analysis)。

傅里叶理论的正确性,事实上我们已经在第3章的数学基础

知识中看到了。我们来考察在第3章最后出现的下列标准正交函数系

$$\{1, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos 2t, \sqrt{2} \cos 3t, \dots, \\ \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin 2t, \sqrt{2} \sin 3t, \dots\}$$

函数 $f(t)$ 可用此函数系在 $[-\pi, \pi]$ 上展开为

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{2} \cos t + \alpha_2 \sqrt{2} \cos 2t + \alpha_3 \sqrt{2} \cos 3t + \dots \\ + \beta_1 \sqrt{2} \sin t + \beta_2 \sqrt{2} \sin 2t + \beta_3 \sqrt{2} \sin 3t + \dots$$

系数 α_k, β_k 可以使用已经学过的内积表示

$$\alpha_0 = \langle f(t), 1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

$$\alpha_k = \langle f(t), \sqrt{2} \cos kt \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt$$

$$\beta_k = \langle f(t), \sqrt{2} \sin kt \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt$$

这是傅里叶级数展开

$f(t)$ 式一般地可展开为下式

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + a_3 \cos 3t + \dots \\ + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + b_3 \sin 3t + \dots \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

(5.1)

在这里, 将 a_0, a_k, b_k 称为傅里叶系数 (Fourier coefficient)。用这样形式展开的函数称为傅里叶级数展开 (Fourier series expansion)。为了与后面出现的复数形式的傅里叶级数展开相区别, 也称其为实傅里叶系数, 实傅里叶级数展开。如同在第3章学过的, 即使不是三角函数也可以构成完备的正交函数系, 并可以用此将任意的函数展开, 但是, 因为由各种不同频率的正弦波构成的三角级数是最有用的, 所以所谓的傅里叶级数展开一般指三角级数展开。

与 $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k$ 比较, 傅里叶系数可表示为



$$a_0 = 2\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

$$a_k = \sqrt{2} \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt$$

$$b_k = \sqrt{2} \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt$$

在式(5.1)中,将常数项定义为 $a_0/2$,特意用2来除是为用 a_k 的一般表示形式, $\cos kt$ 当 $k=0$ 时为1, a_0 是 $k=0$ 的 a_k 。因此,傅里叶系数最后可以表示成

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt & (k=0, 1, 2, \dots) \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt & (k=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (5.2)$$

在式(5.1)中,将波长最长的波,即 $\sin t$ 、 $\cos t$ 叫做基波或基本谐波,将其一半周期的波称为二次谐波, $1/3$ 周期的波称为三次谐波等等。由式中可知, a_0 是表示 $f(t)$ 的平均值的常数项,若 $f(t)$ 是电信号, a_0 表示其直流部分。而 a_0 以外的傅里叶系数则表示交流部分。

图 5.2 是表示将某一信号用傅里叶级数展开,分解为直流部分和各高次谐波部分的图形。信号既可以在以时间作为变量区域(时间域)用函数 $f(t)$ 表示,也可以在以频率为变量的区域(频率域)用傅里叶系数(a_k, b_k)的大小表示。

周期最长的基波是周期为 2π 的周期函数,因为其它高次谐波也以 2π 为周期,若由傅里叶系数将波形合成,当然也成为周期为 2π 的周期函数。如果是这样,所谓傅里叶级数展开就可以视为是表示周期函数的展开方法。

在实际上,我们来看看典型波形的傅里叶级数展开。例如,前面看到的锯齿波(图 5.3)。此波形为周期函数,在 $-\pi \leq t \leq \pi$ 区间可表示为

$$f(t) = t$$

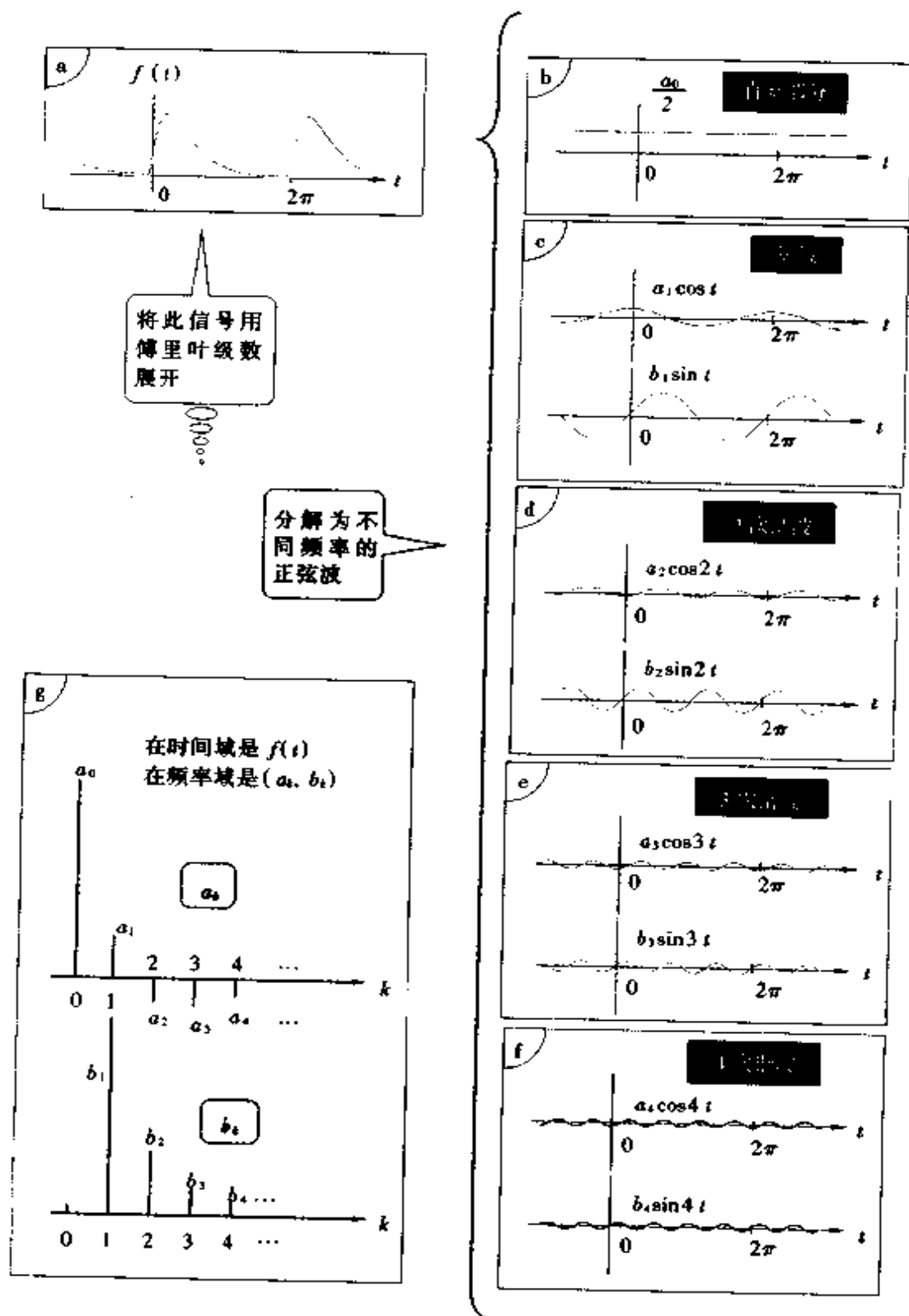


图 5.2 信号的分解

其傅里叶系数为

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos kt \, dt & * \text{参见提示板} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t \sin kt}{k} + \frac{\cos kt}{k^2} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots) \\
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin kt \, dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{t \cos kt}{k} + \frac{\sin kt}{k^2} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= -\frac{2}{k} \cos k\pi \\
 &= (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \quad (k=1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

从而, $f(t)$ 可展开为

$$f(t) = 2 \left(\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t - \frac{1}{4} \sin 4t + \dots \right)$$

我们已经在本章的前面(图 5.1)看到了只取此式有限项的波形。在这种情况下可以视为把锯齿波表示的周期函数展开为傅里叶级数。

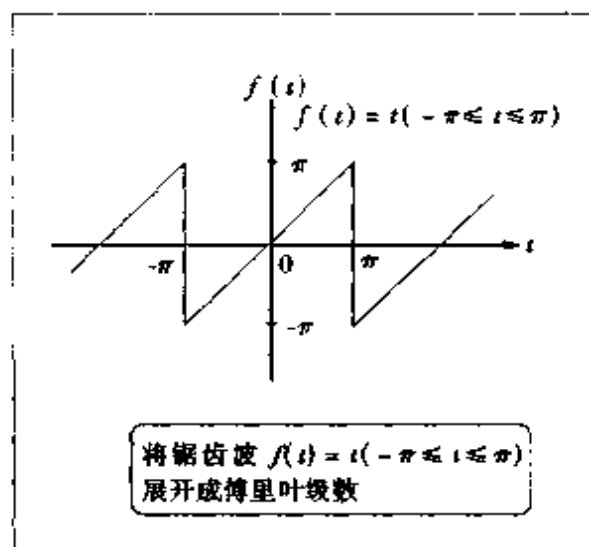


图 5.3 典型波形的傅里叶级数展开

提示板

分部积分公式

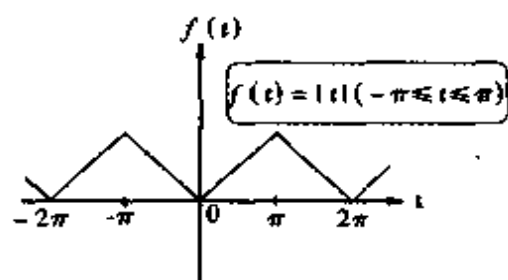
$$\int u'(t)v(t)dt = u(t)v(t) - \int u(t)v'(t)dt$$

[例题]

问题 试将 $f(t) = |t|$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上展开成傅立叶级数。

答:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{9} \cos 3t + \frac{1}{25} \cos 5t + \cdots \right)$$



5.2 偶函数和奇函数

前面作为例子给出的锯齿波的傅里叶级数展开, 所有的 \cos 项都消掉了, 只剩下 \sin 项。另一方面, 在例题中将函数

$$f(t) = |t|$$

用傅里叶级数展开, \sin 项被消去, 只剩下 \cos 项。这是为什么呢?

仔细观察函数 $f(t) = |t|$, 可以发现此函数具有下列关系 (图 5.4)

$$f(t) = f(-t)$$

以 $t=0$ 为轴左右对称的波形可用这样的函数表示, 称为偶函数。另外, 锯齿波是下面形式的函数 (图 5.4)

$$f(t) = -f(-t)$$

以原点为中心点对称的波形可用这样的函数表示,称为奇函数。很明显 $\cos kt$ ($k=0,1,2,3,\dots$) 是偶函数, $\sin kt$ ($k=0,1,2,3,\dots$) 是奇函数(图 5.5)。

现在,当 $f(t)$ 为偶函数, $g(t)$ 为奇函数时,我们来求下面的定积分。

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(t)g(t)dt &= \int_{-a}^0 f(t)g(t)dt + \int_0^a f(t)g(t)dt \\ &= \int_{-a}^0 f(-t)\{-g(-t)\}dt + \int_0^a f(t)g(t)dt \\ &= -\int_0^a f(t)g(t)dt + \int_0^a f(t)g(t)dt \\ &= 0\end{aligned}$$

由此结果可知,若取偶函数和奇函数乘积构成的函数,在以原点为中心的对称区间上取定积分,其值为 0。因此,当信号 $f(t)$ 是偶函数时,由于 $\sin kt$ 是奇函数,有

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt = 0 \quad (k=1,2,\dots)$$

当信号 $f(t)$ 是奇函数时,由于 $\cos kt$ 是偶函数,当然有(图 5.5)

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt = 0 \quad (k=0,1,2,\dots)$$

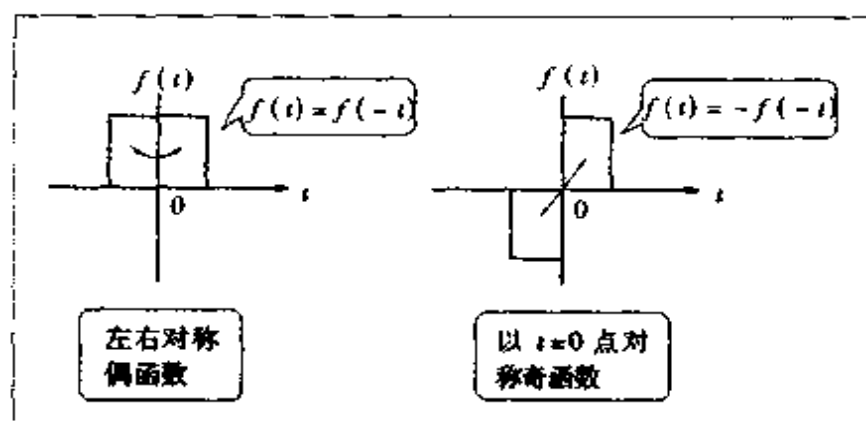


图 5.4 偶函数和奇函数

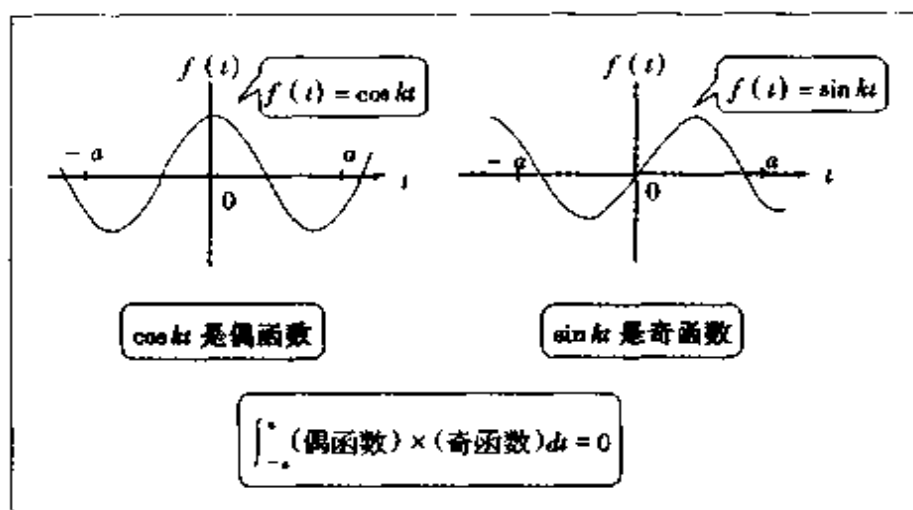


图 5.5 将偶函数和奇函数的积积分

从而,有下述结论

偶函数的傅里叶级数只能用 \cos 项表示,
奇函数的傅里叶级数只能用 \sin 项表示。

5.3 周期不是 2π 的情况

到现在为止我们谈到的变量 t 都是以 $[-\pi, \pi]$ 为基本区间的。当信号的周期是 2π 时,将此作为基本区间是可以的。但是,当我们要处理更一般的信号而将周期设为某一变量 T 时,若不将基本区间取为 $[-T/2, T/2]$,就无法表示函数的傅里叶级数的展开。如果将区间由 $[-\pi, \pi]$ 扩大或缩小为 $[-T/2, T/2]$,基波的周期也从 2π 扩大或缩小为 T 。由于此变换的比例是 $T/2\pi$,所以,基波为

$$\cos \frac{2\pi}{T}t \quad \sin \frac{2\pi}{T}t$$

k 次谐波为

$$\cos \frac{2\pi}{T}kt \quad \sin \frac{2\pi}{T}kt$$

因此,将函数 $f(t)$ 在区间 $[-T/2, T/2]$ 展开成傅里叶级数为

$$f(t) = \frac{a_0}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) \right\} \quad (5.3)$$

设基波的角频率为 ω_0 , 因为 $\omega_0 = 2\pi/T$, 所以此式可写成

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_0 k t + b_k \sin \omega_0 k t) \quad (5.4)$$

傅里叶系数由区间在 $[-\pi, \pi]$ 时的式(5.2)

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt$$

可见将变量和积分区间分别变换为

$$t \rightarrow \omega_0 t$$

$$[-\pi, \pi] \rightarrow [-T/2, T/2]$$

周期不是 2π 时
用此式

$f(t)$ 保持不变, 可表示为

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_0 k t \, dt \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (5.5)$$

同样地, 可导出下式

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_0 k t \, dt \quad (k=1, 2, \dots) \quad (5.6)$$

5.4 复傅里叶级数展开

一般我们作为处理对象的信号都是电压、声压、温度等具有实数值的物理量。因此, 有的读者也许会认为, 在这里谈论复数的处理是不是有点奇怪。但是, 若使用复数形式的傅里叶级数展开, 可以从繁琐的三角函数中解脱出来, 并且表达式的形式也非常规整。而且, 当信号以复数值序列给出时可直接应用, 在利用可进行复数运算的计算机语言时, 程序语言也可以写的相当简单。由于上述的理由, 我们必须习惯于复数形式的傅里叶级数, 这对将来也是非常有益的。

5.4.1 复数的运算

将复数 z 表示为

$$z = \alpha + j\beta$$

j 称虚单位 $j = \sqrt{-1}$ 。过去曾经学过的虚单位是 i ，但由于电学中使用记号 i 表示电流，因而虚单位使用了另外的记号 j ， α 是 z 的实部， β 是 z 的虚部，表示为

$$\alpha = \operatorname{Re}[z] \quad \beta = \operatorname{Im}[z]$$

取横轴为实部，纵轴为虚部，复数 z 可在复平面上(图 5.6)表示。

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

叫做 z 的绝对值

$$\angle z = \tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha}$$

称为 z 的幅角。

把实部相同而虚部正负号相反的两个复数称为共轭复数。与 z 共轭的复数记作 \bar{z}

$$\bar{z} = \alpha - j\beta$$

称为 z 的共轭复数(图 5.7)。

请自己证明

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

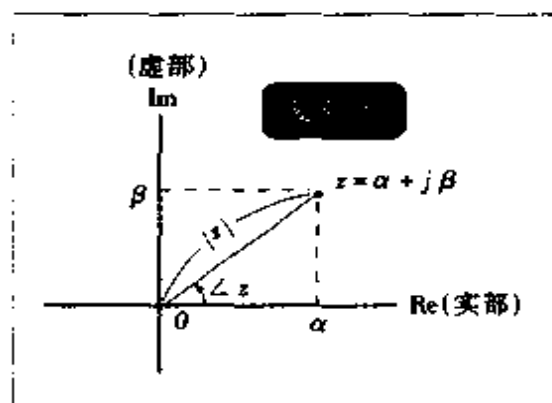


图 5.6 复平面

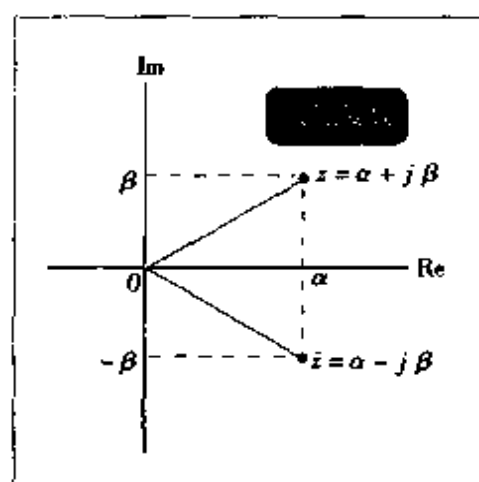


图 5.7 共轭复数

而且,很明显

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2\alpha = 2\operatorname{Re}[z] \\ z - \bar{z} &= 2j\beta = 2\operatorname{Im}[z]j \end{aligned}$$

进而,非常明显

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (\alpha + j\beta)(\alpha - j\beta) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

在这里要注意, z^2 与 $|z|^2$ 是不同的。例如当 $z = j$ 时, 即当 $\alpha = 0$, $\beta = 1$ 时, z^2 是 -1 , $|z|^2$ 是 1 。

如图 5.8 所示, 当复平面上的一个单位圆上的点, 与实轴夹角为 θ 时, 此点可表示为

$$\cos\theta + j\sin\theta$$

所以可以写成

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad (5.7)$$

e 是自然对数的底, 此式称为欧拉(Euler)公式。 e 可用复利计算方法定义为

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828 \dots$$

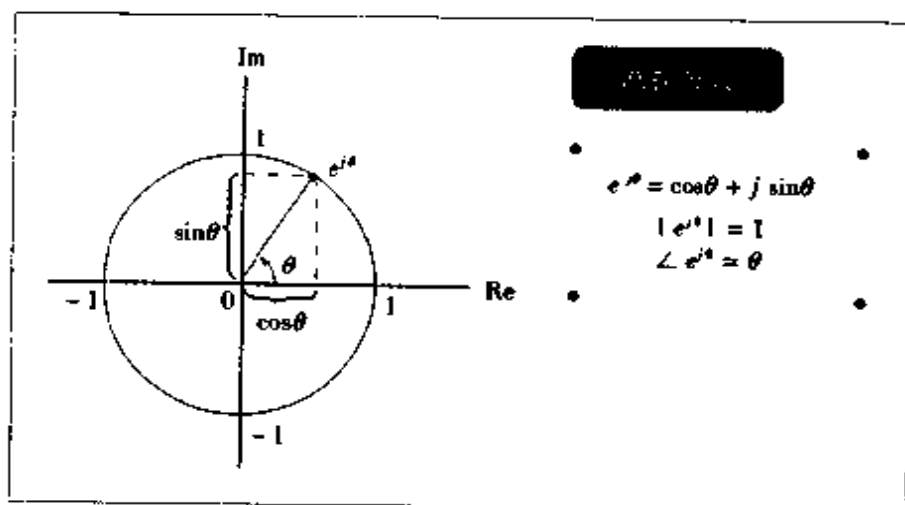


图 5.8 欧拉公式

* 原作漏排了“ j ”。——译者注

这是根据欧拉公式而定的。为什么欧拉公式与在几何中出现的三角函数有关系呢？这是否有点奇怪。让我们来详细地看一下，根据泰勒级数展开，可将 $\cos \theta, \sin \theta$ 分别展开为

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

同样若将 $e^{j\theta}$ 展开，可得到

$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= 1 + \frac{j\theta}{1!} + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots + j\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos \theta + j\sin \theta \end{aligned}$$

这足以说明欧拉公式的正确性。由定义清楚可知， $e^{j\theta}$ 的绝对值为

$$|e^{j\theta}| = 1$$

幅角为

$$\angle e^{j\theta} = \theta$$

所以，任意的复数 z 可用绝对值和幅角表示为(图 5.9)

$$z = |z| e^{j\angle z}$$

用此方法可以简单地表示复数的积和商。即

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| e^{j\angle z_1} \cdot |z_2| e^{j\angle z_2} \\ &= |z_1| |z_2| e^{j(\angle z_1 + \angle z_2)} \end{aligned}$$

绝对值是绝对值之间的积，幅角是幅角之间的和(图 5.10)。同样地，除法可写成(图 5.11)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\angle z_1 - \angle z_2)}$$



如果使用欧拉公式，三角函数可表示如下

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

积和商的计算用三角函数进行比较麻烦,若用复数则非常简单。

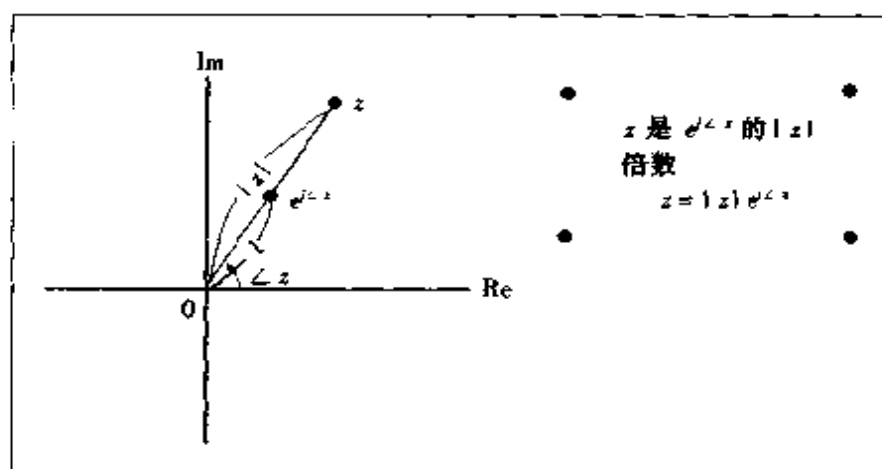


图 5.9 将任意的复数用绝对值和幅角表示

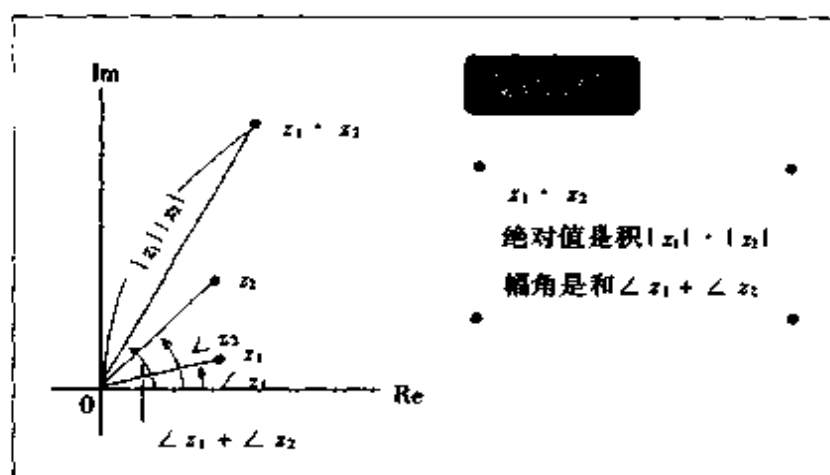


图 5.10 复数的乘法

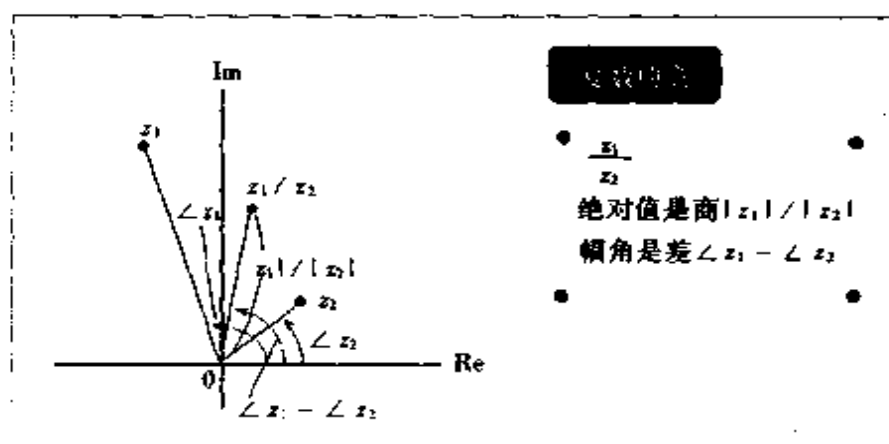


图 5.11 复数的除法

5.4.2 推导复傅里叶级数的展开

现在将话题回到傅里叶级数的展开。原来,傅里叶级数展开的基本方法是把给定的函数用事先性质已知的级数展开。为此首先我们来考虑下面的函数系

$$\{\cdots, e^{-j2t}, e^{-jt}, 1, e^{jt}, e^{j2t}, \cdots\} = \{e^{jkt}, k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

由于

$$e^{jt} = \cos t + j\sin t$$

e^{jt} 表示在复平面单位圆上以角速度 1rad/s 沿逆时针方向旋转的点, 同样 e^{jkt} 表示以角速度为 $k[\text{rad/s}]$ 旋转的点, 当在指数上加上负号时, 例如 e^{-jkt} 表示与 e^{jkt} 的速度相等, 旋转方向相反的点 (图 5.12)。又由于

$$\begin{aligned} e^{-j\theta} &= \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) \\ &= \cos\theta - j\sin\theta \\ &= \overline{e^{j\theta}} \end{aligned}$$

可知 e^{jkt} 与 e^{-jkt} 是共轭复数。

为考察给出的函数系在 $[-\pi, \pi]$ 区间是否构成正交函数系, 可用从函数系中选出任意两个函数的内积来进行判断。

可是, 一般定义具有复数值的函数 (复变函数) $f(t)$, $g(t)$ 的内积为

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$$

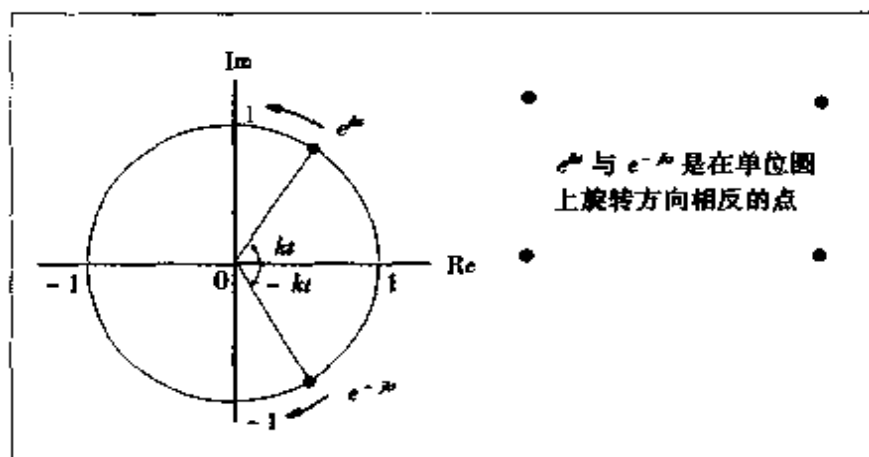


图 5.12 e^{jkt} 与 e^{-jkt}

右边的函数取为原函数的共轭函数是很自然的。若不这样做就不能将内积和模联系起来。如下所示

$$\begin{aligned}\langle f(t), f(t) \rangle &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \overline{f(t)} dt \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|^2 dt \\ &= \|f(t)\|^2\end{aligned}$$

因此,从函数系 $\{e^{jkt}, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 中任意选出的两个函数的内积可以表示为

$$\begin{aligned}\langle e^{jmt}, e^{jnt} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jmt} \overline{e^{jnt}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jmt} e^{-jnt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-n)t} dt\end{aligned}$$

对于

$$\langle e^{jmt}, e^{jnt} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-n)t} dt \quad * \text{ 参见提示板}$$

当 $m \neq n$ 时

$$\begin{aligned}\frac{1}{2j(m-n)\pi} [e^{j(m-n)t}]_{-\pi}^{\pi} &= \frac{1}{(m-n)\pi} \frac{\{e^{j(m-n)\pi} - e^{-j(m-n)\pi}\}}{2j} \\ &= \frac{1}{(m-n)\pi} \sin(m-n)\pi \\ &= 0\end{aligned}$$

这里出现了复变函数的积分,初学者只要把虚单位 j 看成实常数就可以放心地作积分。现在得到了

$$\langle e^{jmt}, e^{jnt} \rangle = 0 \quad (m \neq n)$$

当 $m = n$ 时,由于 $e^0 = 1$,

$$\begin{aligned}\langle e^{jnt}, e^{jnt} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt \\ &= 1\end{aligned}$$

重要的是要证明构成标准正交函数系



指数函数的积分

$$\int e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} \quad (a \neq 0)$$

因此下式成立

$$\langle e^{jmt}, e^{jnt} \rangle = \delta_{mn} \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

δ_{mn} 是在 3.6 中出现的克罗内克的 δ 符号。从而, 函数系

$$\{e^{jkt}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

在区间 $[-\pi, \pi]$ 上构成标准正交函数系。

由于已知函数系 $\{e^{jkt}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是标准正交函数系, 任意的函数 $f(t)$ 都由此函数系展开

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jkt} \quad (5.8)$$

将此称为复数傅里叶级数展开。 C_k 叫做复傅里叶系数。与实傅里叶级数展开时相同, C_k 由 $f(t)$ 和 e^{jkt} 的内积给出。即

$$C_k = \langle f(t), e^{jkt} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-jkt} dt \quad (5.9)$$

当将基本区间取为一般的 $[-T/2, T/2]$ 时, 可表示为

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 kt} \\ C_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_0 kt} dt \quad (\omega_0 = 2\pi/T) \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

这里需要注意的是, C_k 一般为复数值。

那么, 复傅里叶变换与实傅里叶变换又有什么样的关系呢? 将欧拉公式代入式(5.10)得出的复傅里叶系数

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) (\cos \omega_0 kt - j \sin \omega_0 kt) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_0 k t dt - j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_0 k t dt$$

与实傅里叶系数的式(5.5), (5.6)比较, 可知

$$C_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - jb_k) & (k = 1, 2, \dots) \\ \frac{1}{2}a_0 & \\ \frac{1}{2}(a_k + jb_k) & (k = -1, -2, \dots) \end{cases} \quad (5.11)$$

由此可以明显看出对于 k 的正项和负项, C_k 具有共轭的关系, 即

$$\boxed{C_{-k} = \overline{C_k}} \quad (5.12)$$

因此, 下式成立

$$\begin{aligned} |C_{-k}| &= |C_k| \\ \angle C_{-k} &= -\angle C_k \end{aligned}$$

将 C_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的绝对值称为振幅频谱,

$$\boxed{|C_k| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2}} \quad (5.13)$$

将 C_k 的幅角称为相位频谱。

$$\boxed{\angle C_k = \tan^{-1} \frac{b_k}{a_k}} \quad (5.14)$$

而将 $|C_k|^2$ 称为功率频谱。振幅频谱表示在作为对象的信号中包含各频率的成分的多少。在一般的信号分析中, 与相位频谱相比, 人们更关心振幅频谱和功率频谱。然而, 由于 C_k 和 C_{-k} 有共轭的关系, 要注意振幅频谱和功率频谱是以 $k = 0$ 为轴左右对称。在图 5.13, 列举了一种信号频谱的例子。

复傅里叶系数用其振幅和相位可写成

$$C_k = |C_k| e^{j\phi_k}$$

其中

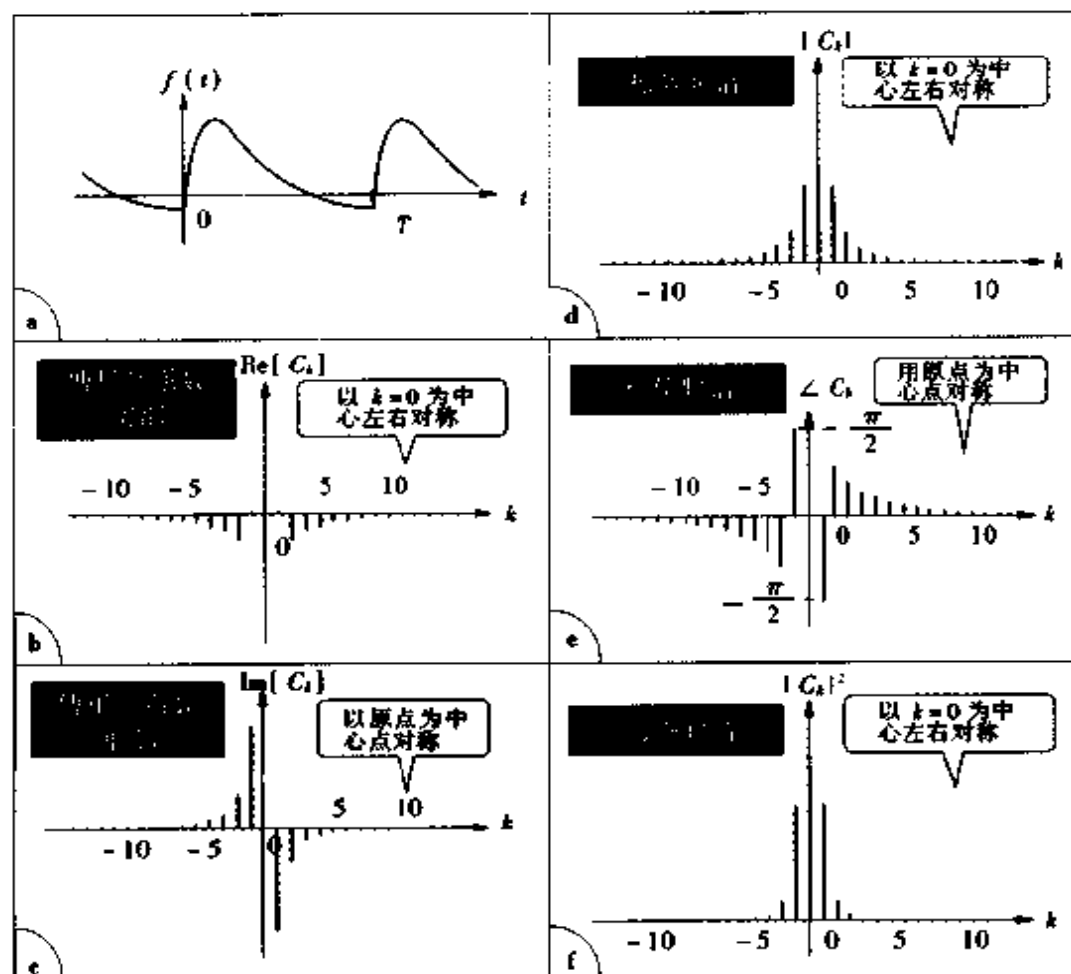


图 5.13 复傅里叶系数和频谱

$$\varphi_k = \angle C_k$$

因此, $f(t)$ 也可以用振幅频谱和相位频谱表示为

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_k t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k| e^{j(\omega_k t + \varphi_k)} \end{aligned} \quad (5.15)$$

REVIEW

当信号 $f(t)$ 是偶函数时, 其复傅立叶系数的虚部全部为 0, 当是奇函数时其实部全部为 0。

(注意) 复变函数 $e^{jk\omega t} = \cos k\omega t + j\sin k\omega t$ 的实部为偶函数, 虚部为奇函数。

尽管傅里叶系数是复数, 因为 $f(t)$ 是实函数, 所以上式的右侧必然是实数。其原因在于式(5.12)中的 C_k 和 C_{-k} 具有共轭复数关系。若 k 的值取为正整数, $f(t)$ 可写成

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k e^{j\omega_0 k t} + C_{-k} e^{-j\omega_0 k t})$$

由于 C_k 和 C_{-k} 具有共轭的关系, 故有

$$\begin{aligned} f(t) &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k e^{j\omega_0 k t} + \bar{C}_k e^{-j\omega_0 k t}) \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \{e^{j(\omega_0 k t + \varphi_k)} + e^{-j(\omega_0 k t + \varphi_k)}\} \\ &= \boxed{C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \cos(\omega_0 k t + \varphi_k)} \end{aligned} \quad (5.16)$$

由于表示 $f(t)$ 的直流部分的 C_0 是实数, 这样前式的右边必然是实数。

5.4.3 复傅里叶级数展开的例子

以图 5.14 所示的周期为 T 的方波为例, 将其展开成傅里叶级数。复傅里叶系数可以表示为

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_0 k t} dt \quad (\omega_0 = 2\pi/T)$$

函数 $f(t)$ 在区间 $-1 \leq t \leq 1$ 上为 1, 在此区间以外的区域为 0, 当 $k \neq 0$

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T} \int_{-1}^1 1 \cdot e^{-j\omega_0 k t} dt \\ &= \frac{1}{T} \frac{1}{-j\omega_0 k} [e^{-j\omega_0 k t}]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{T} \frac{1}{-j\omega_0 k} (e^{-j\omega_0 k} - e^{j\omega_0 k}) \end{aligned}$$

根据欧拉公式, 有

$$\sin \omega_0 k = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 k} - e^{-j\omega_0 k})$$

所以

$$C_k = \frac{2}{T} \frac{1}{\omega_0 k} \sin \omega_0 k \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

而当 $k=0$ 时

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 1 \cdot dt = \frac{2}{T}$$

显然 C_k 为实数, $f(t)$ 是偶函数。相位频谱在 C_k 的值为正时是 0, 为负时是 $\pm \pi$

在图 5.14(b) 中给出了下列函数的曲线

$$\frac{\sin x}{x}$$

此函数称为标本化函数。现在若取 $\omega_0 k = x$, C_k 变为

$$C_k = \frac{2}{T} \frac{\sin x}{x}$$

因此, 它与标本化函数具有同样的形式。

将傅里叶系数的实部用图表示, 以 k 为横轴, 将 $\text{Re}(C_k)$ 表示为线频谱。图 5.14(c) 是以 $T=8$ 时为例的频谱。

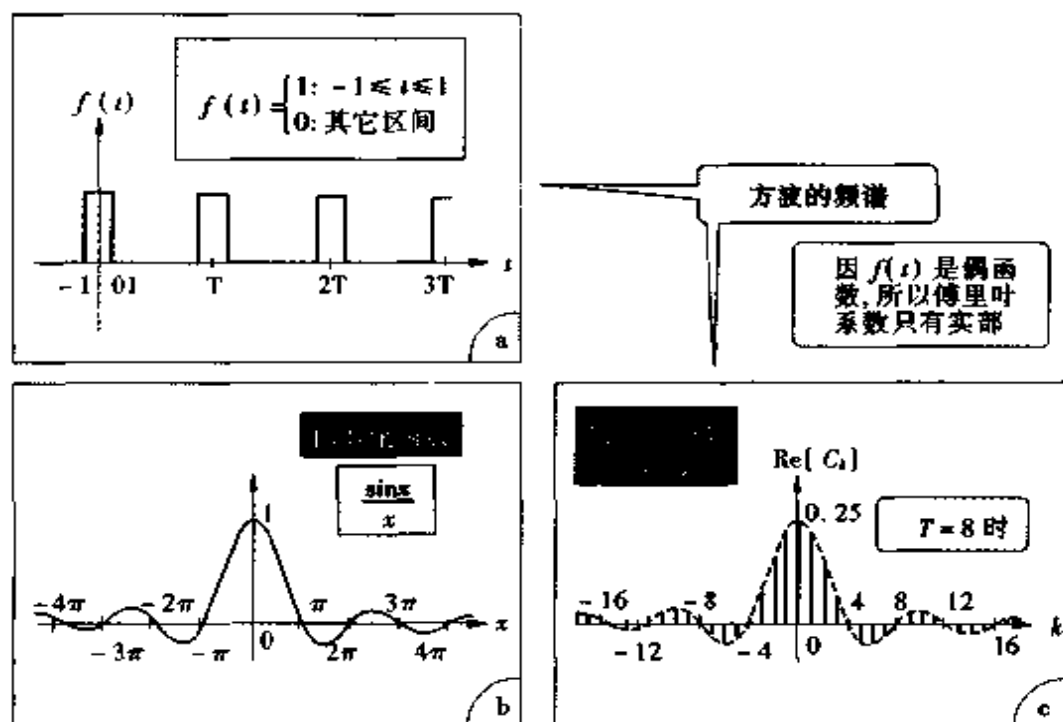


图 5.14 方波的频谱

5.5 帕斯瓦尔定理

在复傅里叶级数展开中, 我们已经学过了函数 $f(t)$ 在区间 $[-T/2, T/2]$ 上可展开为(式(5.10))。

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-j\omega_0 k t} \quad (5.17)$$

那么, 能不能用傅里叶系数 C_k 表示 $f(t)$ 的模呢? 其实, 做为结论可以归纳为

$$\|f(t)\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 \quad (5.18)$$

将此称为帕斯瓦尔定理。证明如下。

首先分别取式(5.17)两边与 $f(t)$ 的内积。左边与 $f(t)$ 的内积明显为

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \|f(t)\|^2$$

即, 式(5.18)的左边所表示的是函数 $f(t)$ 的模的平方。那么右边又是表示什么呢? 右边与函数 $f(t)$ 的内积为

$$\left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 k t}, f(t) \right\rangle = \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 k t}, \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_l e^{j\omega_0 l t} \right\rangle$$

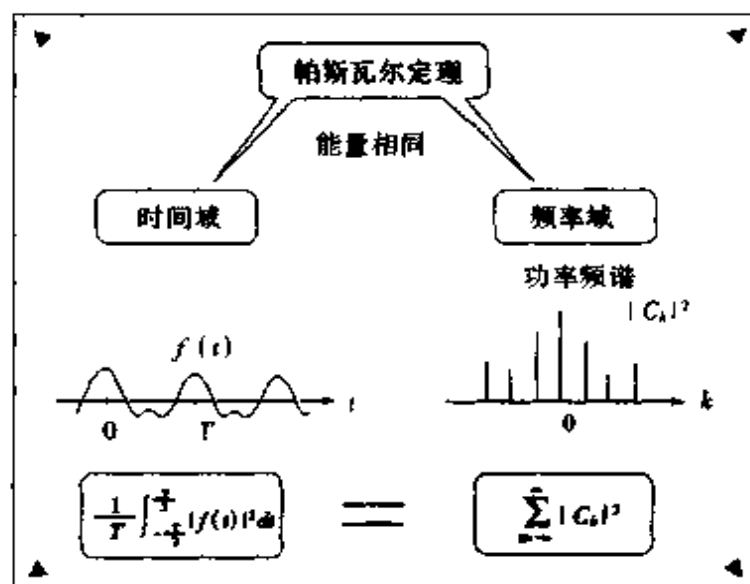


图 5.15 帕斯瓦尔定理

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \langle C_k e^{j\omega_k t}, C_l e^{j\omega_l t} \rangle \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_k \bar{C}_l \langle e^{j\omega_k t}, e^{j\omega_l t} \rangle
\end{aligned}$$

根据标准正交基底的性质

$$\langle e^{j\omega_k t}, e^{j\omega_l t} \rangle = \delta_{kl}$$

因为除了 $k = l$ 项外其它项都被消掉了, 结果上式变为

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_k \bar{C}_l \langle e^{j\omega_k t}, e^{j\omega_l t} \rangle &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \bar{C}_k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2
\end{aligned}$$

(5.18) 成立。

由于上面所述的推导过程较为复杂, 也许不利于问题的理解, 因此, 其结果可按下述方法理解。 $f(t)$ [$-T/2 \leq t \leq T/2$] 的模可定义为

$$\|f(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$$

例如 $f(t)$ 表示通过 1Ω 电阻的电流。这样 $\|f(t)\|^2$ 表示单位时间供给电阻的能量。根据帕斯瓦尔等式, 它等于功率频谱的总和, 即 $f(t)$ 被分解为各频率部分的总和, 它的能量必然包含了所有这些频率部分中的能量, 信号的能量除了被表示在功率频谱中以外, 不可能消失在任何其它地方(图 5.15)。

5.6 傅里叶级数展开的实例

我们通过实际数据来看看傅里叶级数展开是如何应用的。图 5.16(a) 是我们已经熟知的气温曲线。此曲线是用每一天的平均气温表示的, 一年中合计由 365 个数据构成。如何利用计算机求出这样的离散信号的傅里叶系数将在下一章叙述, 这里只给出得到的计算结果, 如表 5.1 所示。表中只给出了到 10 次的系数, 实

上可计算出更高次的系数。若用这些系数再现原来的信号会怎么样呢？将用于逼近 $f(t)$ 的 n 次谐波近似函数记为 $f_n(t)$ 。

表 5.1 傅里叶系数

次数 k	傅里叶系数			
	实部 $\text{Re}[C_k]$	虚部 $\text{Im}[C_k]$	振幅 $ C_k $	相位 $\angle C_k[\text{rad}]$
0	15.76	0	15.76	0
1	-4.59	2.18	5.08	2.70
2	-0.60	-0.26	0.65	-2.73
3	0.70	0.22	0.73	0.30
4	-0.54	-0.34	0.64	-2.58
5	0.03	-0.06	0.07	-1.12
6	-0.18	0.01	0.18	3.06
7	0.05	-0.12	0.13	-1.16
8	-0.18	0.01	0.18	3.10
9	0.11	-0.08	0.13	-0.65
10	-0.08	0.25	0.26	1.88

首先是 0 次，也就是只用常数项 C_0 近似此信号，其近似函数 $f_0(t)$ ，由傅里叶级数展开的基本公式 (5.10) 可得

$$f_0(t) = C_0 = 15.76$$

将此曲线表示于图 5.16(b)，成为不随时间 t 变化的一条直线。而且， C_0 必然是实数，它是信号的平均值部分，要注意，在此例中表示的是 1 年中的平均气温。

接着在其上加入基波。在 $f_0(t)$ 上加入基波后的近似函数是

$$f_1(t) = C_{-1}e^{-j\omega_0 t} + C_0 + C_1e^{j\omega_0 t} \quad (1 \leq t \leq 365)$$

ω_0 为基波的角频率，因为在此处基波的周期为 365 天，所以

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{365} = 0.0172 \text{ [rad/天]}$$

由于原函数 $f(t)$ 可用式 (5.16) 所给出的傅里叶级数的振幅和相位的形式表示

$$f(t) = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \cos(\omega_0 k t + \varphi_k)$$

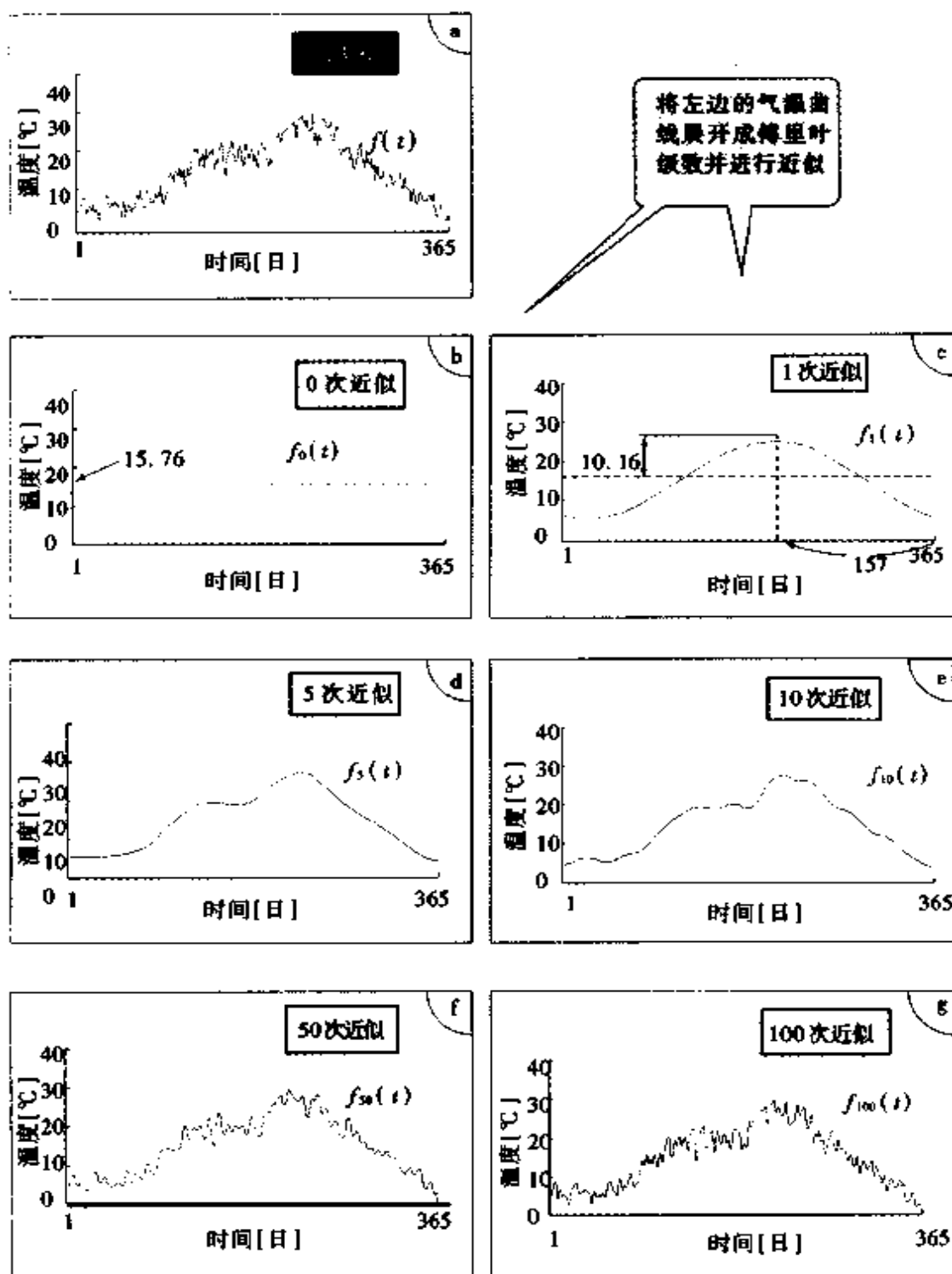


图 5.16 用傅里叶级数近似函数

因此, $f_1(t)$ 可以表示成

$$f_1(t) = C_0 + 2|C_1|\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

带人表 5.1 给出的傅里叶系数值, 得到

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 15.76 + 2 \times 5.08 \cos(0.0172t + 2.70) \\ &= 15.76 + 10.16 \cos\{0.0172(t + 157)\} \end{aligned}$$

由此可将 $f_1(t)$ 用图(c)那样的图来表示。由此图可以得到大致表现 1 年中气温变化的波形。

波形的大小信息由振幅频谱体现, 波形时间轴方向上的位置信息包含在相位频谱中。由于气温的变化以 1 年为周期, 因此与此频率对应的 C_1 具有较大的数值。请读者注意, 基波的波形恰好夏季是波峰冬季是波谷部分, 这与实际情况正好符合。

在近似函数上加入更高次的高次谐波后, 近似函数为

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{j\omega_0 k t} \quad (1 \leq t \leq 365)$$

并将表 5.1 的傅里叶系数带人并绘出各次的波形图(图 5.16)。这样, 随着次数 n 的增大, 高频率部分不断加入, 近似波形逐渐接近于原来的气温曲线。当 $n = 100$ 时, 已经到了几乎和原来的曲线不能区分的程度。

5.7 傅里叶级数展开的重要性质

通过实际数据的例子, 我们已经对傅里叶级数展开的概貌有了基本的了解。为了更进一步地理解傅里叶级数展开, 要涉及到有关傅里叶级数的重要性质。

5.7.1 近似的误差

在对气温数据的傅里叶级数的近似中, 随着次数增高, 与原来函数曲线的近似也变得越好。但是, 如何评价近似程度的好坏呢? 而且, 真是随着次数的增加误差就随之减少吗? 产生这样的疑问是很自然的。所以, 首先来考察误差的问题。

如同在第 3 章数学基础知识中所学过的那样, 所谓函数空间是想象的维数无限大的抽象空间, 函数对应于此空间中的 1 个

点。因而两个函数有多大差异,可用它们分别对应的两个点的距离来衡量。所谓两个函数间的误差就是这个距离。即当原来的函数为 $f(t)$, 用高次谐波近似的函数为 $f_n(t)$ 时,两个函数的距离为

$$d(f_n(t), f(t)) = \|f(t) - f_n(t)\|$$

这是 $f_n(t)$ 对于 $f(t)$ 的近似误差。如果随着 n 的增加近似程度变好,在函数空间 $f_n(t)$ 将逐渐地接近于 $f(t)$, $d(f_n(t), f(t))$ 的值一定会越变越小。

我们实际上来计算一下这个距离。上式左边的 $d(f_n(t), f(t))$ 是次数 n 的函数,将其设为 ε_n , 并取其平方,可表示为

$$\varepsilon_n^2 = \|f(t) - f_n(t)\|^2$$

在这里,由于 $f_n(t)$ 和 $f(t)$ 分别是

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_k t} \quad f_n(t) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{j\omega_k t}$$

有

$$\varepsilon_n^2 = \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_k t} - \sum_{k=-n}^n C_k e^{j\omega_k t} \right\|^2 = \left\| \sum_{\substack{-\infty < k < -n \\ n < k < \infty}} C_k e^{j\omega_k t} \right\|^2$$

2.1.1
对于一般的信号,
若增大次数,平方
误差必减少

在这里,根据帕斯瓦尔定理,可将此表示为

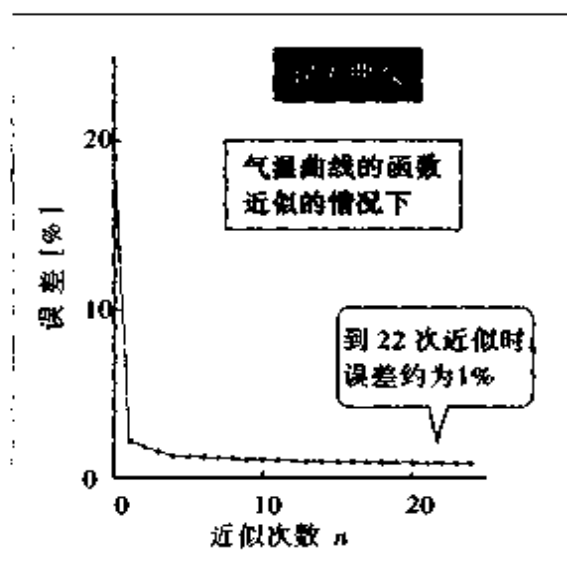


图 5.17 对于复杂信号的近似误差

$$\varepsilon_n^2 = \sum_{\substack{-\infty < k < -n \\ n < k < \infty}} |C_k|^2$$

因为 $|C_k|^2 \geq 0$, 所以此式的右边是将正值不断相加的形式, 所以, 随着近似次数 n 值的增大, $|C_k|^2$ 的和减小。因此, 相对 n 的增加 ε_n^2 只会减小, 不会增大。实际上, 对于前面有关气温的傅里叶展开的近似误差, 随 n 变化的曲线, 如图 5.17 所示, 在此图中采用误差占信号全部功率的百分数为纵坐标, 定义为

$$\frac{\varepsilon_n^2}{\|f(t)\|^2}$$

用%表示, 由此可以清楚地得知, 随着次数的增加, 误差将逐渐变小。

如果原信号的波形平滑, 近似误差减少的速度也快。将此称为收敛性好。若收敛性好, 可以用少量的傅里叶系数再现原信号, 所以可减少数据量。用数百点的数据或数千点的数据表示的信号, 至多用数个或数十个数据就可以了。例如如图 5.18 所示, 将

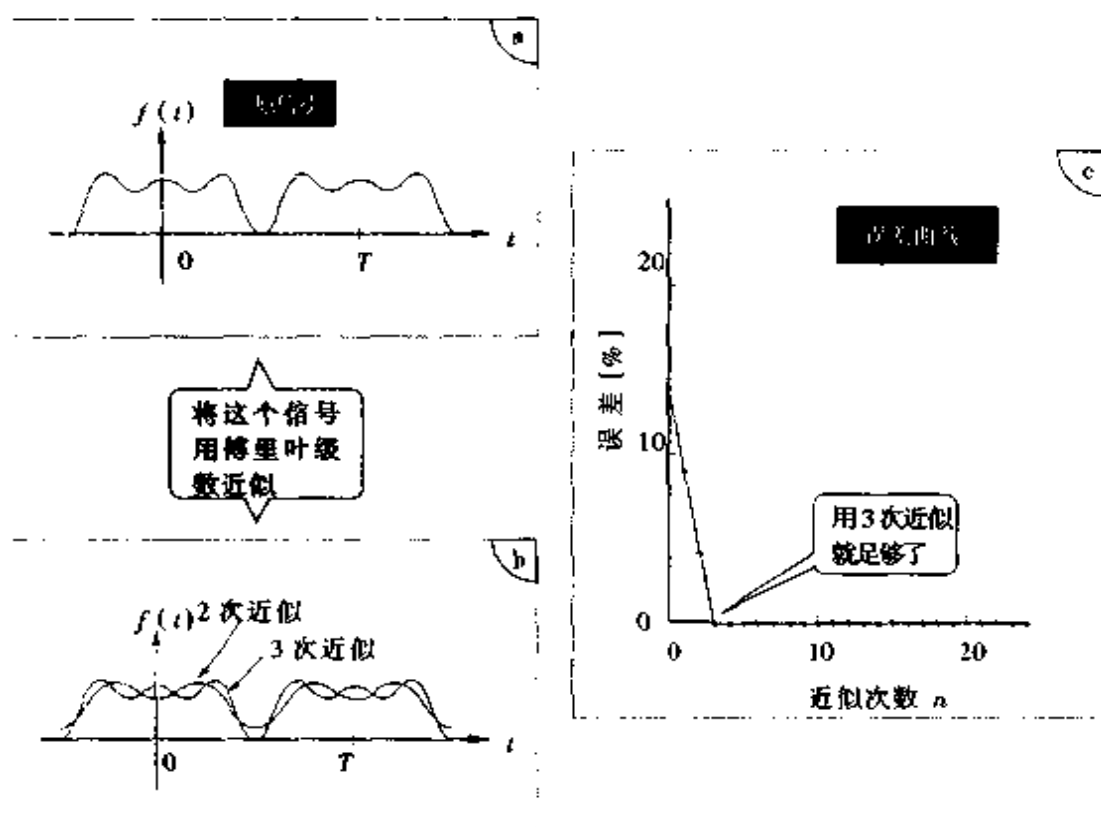


图 5.18 平滑函数的傅里叶级数展开

平滑信号的傅里叶级数展开的误差曲线与前面的气温情况下的误差曲线比较,可知气温的情况。若要达到 1% 的误差,必须要到 22 次的系数,而在这种信号的情况下,只要 3 次就可以了。

5.7.2 间断点

前面我们看到的都是随着傅里叶级数展开次数的增多与原函数更接近的近似函数。但是在这里还要说一些相反的情况,就是关于间断点附近的振动。图 5.19 是下列函数的近似结果。

$$f(t) = \text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & : t \geq 0 \\ -1 & : t < 0 \end{cases}$$

由此可见,增加次数虽然使其间断点附近的微小振动的周期变小,而振幅却不会变小。这种现象称为吉布斯 (Gibbs) 现象,此现象表现为超调量 ε_0 。不管次数取的多高总不能小于某一数值。本例中 $\varepsilon_0 = 0.089$

前面的定义是将函数间的距离 (这是一种平方误差) 作为尺度,即使函数具有间断点,随着次数的增大,其距离值确实收敛于 0。但是,若取 $f_n(t)$ 与 $f(t)$ 的最大误差作为衡量的尺度,遗憾的是误差并不一定收敛于 0。这就是这种现象所具有的意义。

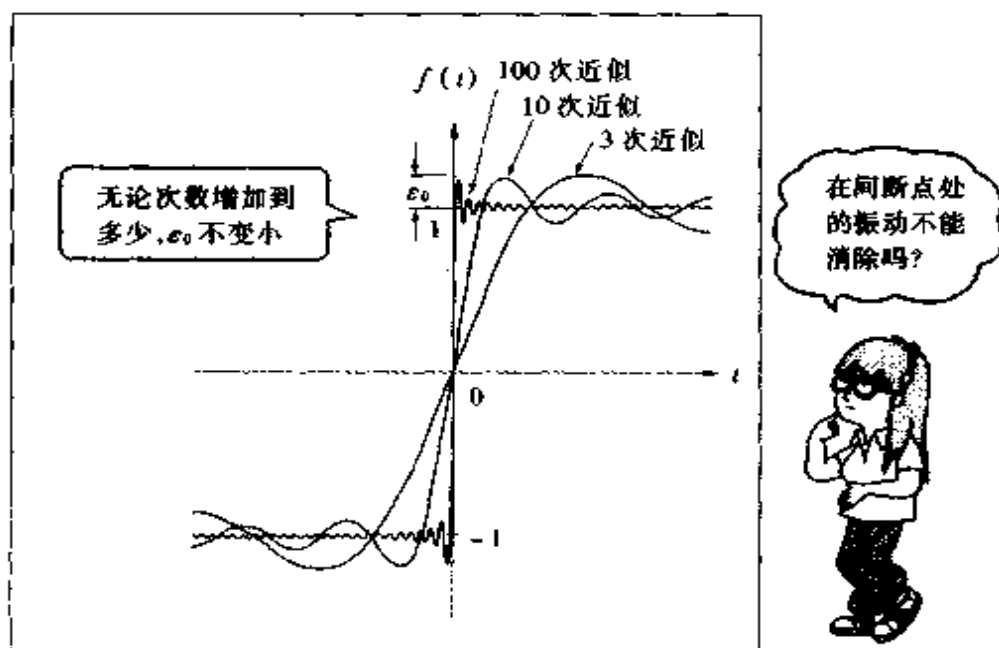


图 5.19 吉布斯现象

5.7.3 信号大小变化

若信号的大小发生变化, 频谱会发生什么样的变化呢? 在图 5.20 中, 若信号的振幅变小, 振幅频谱也变小, 设 a 为某一实常数, $f(t)$ 的傅里叶系数为 C_k , 可以将函数 $af(t)$ 的傅里叶系数 C_k' 写成

$$C_k' = aC_k \quad (5.19)$$

因为

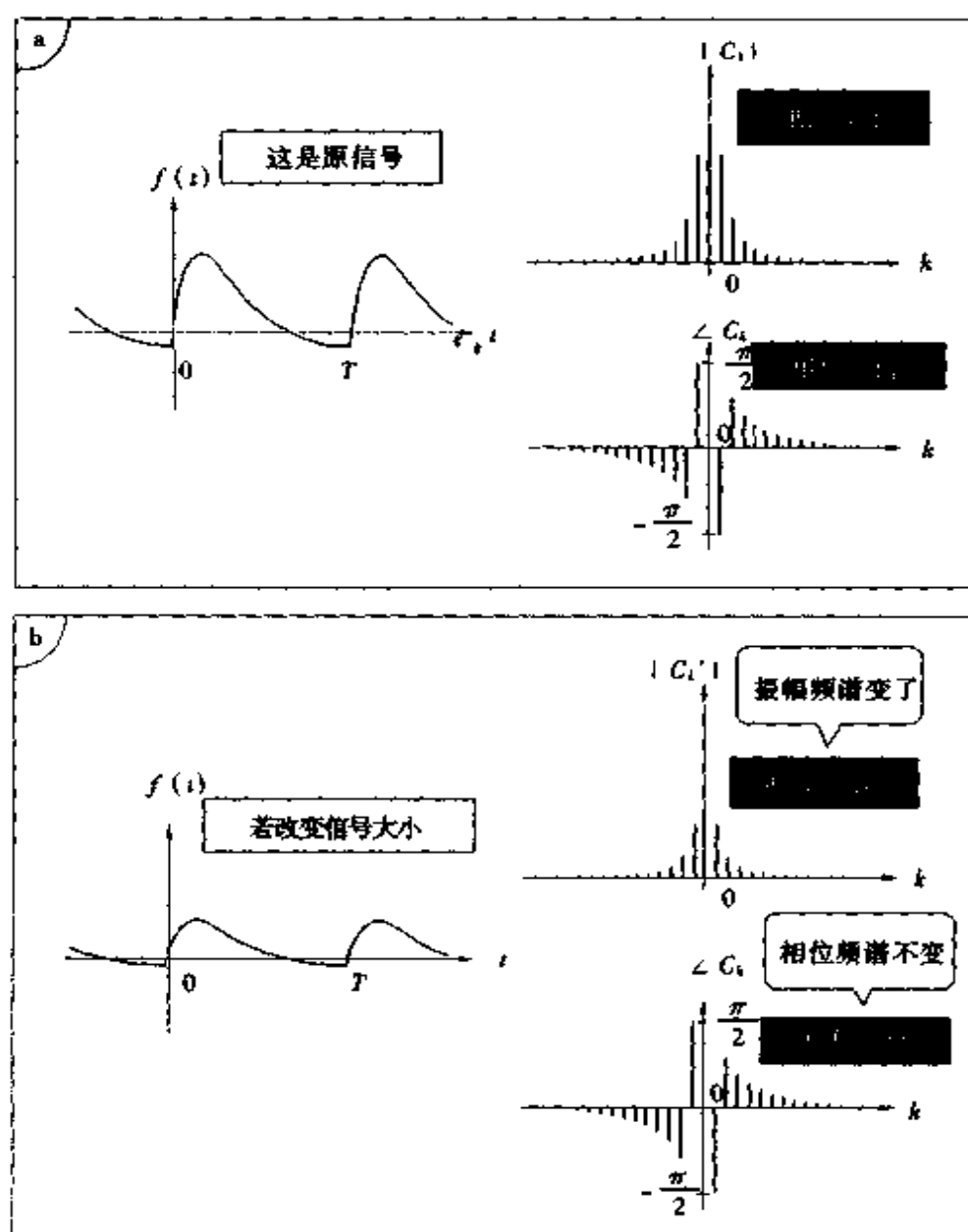


图 5.20 信号的大小和频谱的关系

$$\begin{aligned}
 C_k' &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} af(t) e^{-j\omega_k t} dt \\
 &= a \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_k t} dt \\
 &= a C_k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)
 \end{aligned}$$

所以,可知信号放大或缩小 a 倍后,傅里叶系数也放大或缩小相同的倍数。因此,尽管振幅谱发生了变化,但相位谱不变。

5.7.4 两个信号的相加

当两个不同的信号相加时,它的频谱会是什么样呢?现在,设信号 $f_1(t)$ 的傅里叶系数为 C_{1k} , 信号 $f_2(t)$ 的傅里叶系数为 C_{2k} 。设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 相加的傅里叶系数为 C_k' , 它们有下列关系

$$C_k' = C_{1k} + C_{2k} \quad (5.20)$$

即若将两个函数相加其傅里叶系数为两个函数的傅里叶系数的和。为什么是这样呢?其推导如下

$$\begin{aligned}
 C_k' &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{f_1(t) + f_2(t)\} e^{-j\omega_k t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) e^{-j\omega_k t} dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_2(t) e^{-j\omega_k t} dt \\
 &= C_{1k} + C_{2k}
 \end{aligned}$$

将前面的倍数关系和这种相加关系合在一起,可将其表示为傅里叶级数展开的线性组合关系

$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \xrightarrow{\text{傅里叶级数展开}} a_1 C_{1k} + a_2 C_{2k}$
--

5.7.5 信号的移动

在观测信号时,若开始测定的时刻发生变化傅里叶系数会怎么样呢?所谓测定开始点的变化是指信号在时间轴上的整体的移动。将函数 $f(t)$ 在时间轴上向右移动时间 τ , 可将移动后的函数表示为 $f(t - \tau)$, 其傅里叶系数可表示为(图 5.21)

$$C_k' = e^{-j\omega_k \tau} C_k \quad (5.21)$$

即

$$f(t - \tau) \xrightarrow{\text{傅里叶级数展开}} e^{-j\omega_k \tau} C_k$$

其振幅不变,只有相位发生变化。

下面给出这种关系的证明。 $f(t - \tau)$ 的傅里叶系数是

$$C_k' = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t - \tau) e^{-j\omega_k t} dt$$

在这里,若设 $t - \tau = u$, 有

$$dt = du \quad -\frac{T}{2} - \tau \leq u \leq \frac{T}{2} - \tau$$

因此,可以得出

$$\begin{aligned} C_k' &= \frac{1}{T} \int_{-T/2 - \tau}^{T/2 - \tau} f(u) e^{-j\omega_k(u + \tau)} du \\ &= e^{-j\omega_k \tau} \frac{1}{T} \int_{-T/2 - \tau}^{T/2 - \tau} f(u) e^{-j\omega_k u} du \\ &= e^{-j\omega_k \tau} C_k \end{aligned}$$

即式(5.21)成立。因此很明显

$$|C_k'| = |e^{-j\omega_k \tau} C_k| = |C_k|$$

所以,信号在时间轴方向上移动,振幅频谱不变,相位频谱改变。

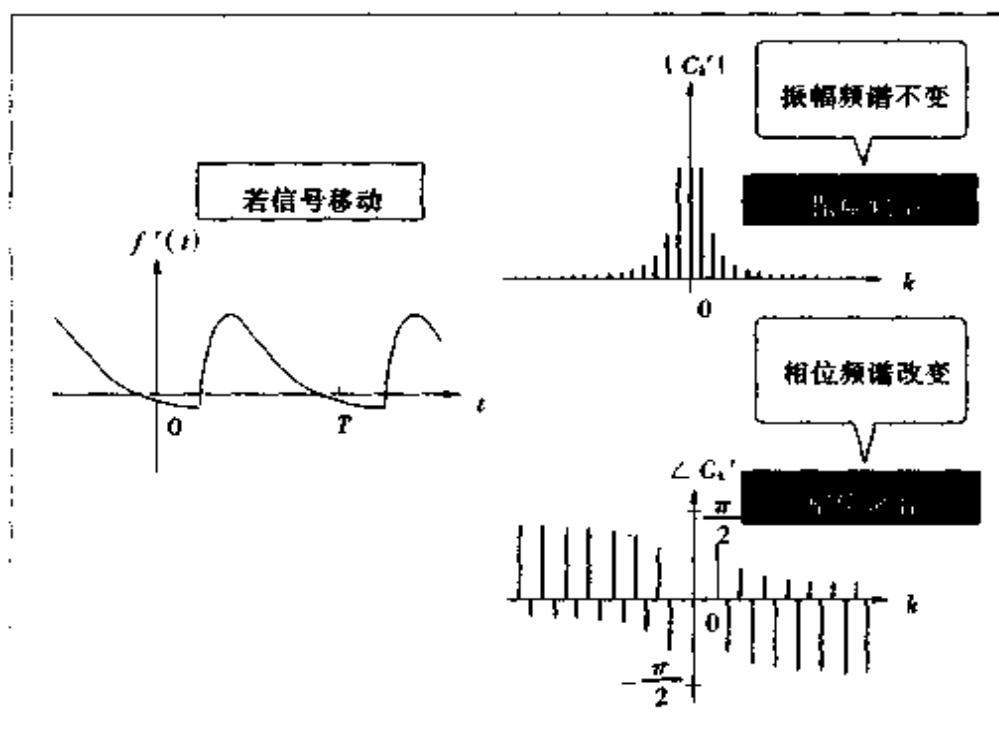


图 5.21 信号的移动和频谱的关系

本章要点

(1) 无论什么样的信号, 它们都可以分解成不同频率分量(高频是基频的整数倍)的正弦波。将其分量在频率域表示的是频谱。也可以从频谱反过来在时间域合成原信号。

(2) 傅里叶级数展开是将周期函数分解为各个频率的正弦波分量。当周期信号 $f(t)$ 的周期为 T , 基本角频率为 ω_0 ($\omega_0 = 2\pi/T$) 时, $f(t)$ 用傅里叶级数展开为

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_0 k t + b_k \sin \omega_0 k t)$$

其中 a_k, b_k 是由下式定义的函数 $f(t)$ 的实傅里叶系数。

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_0 k t dt \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_0 k t dt \quad (k=1, 2, \dots)$$

$f(t)$ 为偶函数时 $b_k=0$, 为奇函数时 $a_k=0$ 。

(3) 复傅里叶级数展开是比实傅里叶级数展开更常见, 且运算方便。基本角频率为 ω_0 ($\omega_0 = 2\pi/T$) 时, $f(t)$ 的复傅里叶级数展开为

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 k t}$$

其中 C_k 为 $f(t)$ 的复傅里叶系数

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_0 k t} dt \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$f(t)$ 为偶函数时 C_k 的虚部为 0, 为奇函数时 C_k 的实部为 0。

(4) 将 $|C_k|$ 称为振幅频谱, 将 $\angle C_k$ 称为相位频谱, 将 $|C_k|^2$ 称为功率频谱。振幅频谱表示包含相应频率部分的大小。

(5) 信号和频谱有线性关系。即使信号在变量方向上移动,

振幅频谱和功率频谱不变。

(6) 信号的时间域能量和频率域能量相等。即

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$$

将此称为帕斯瓦尔定理。

(7) 若增高傅里叶级数的次数, 信号的近似误差就会减少, 越来越接近于实际的测定值。

◆ ◇ 练习题 ◇ ◆

[1] 有两个复数为 $z_1 = \alpha_1 + j\beta_1, z_2 = \alpha_2 + j\beta_2$, 试证明下列各式成立。

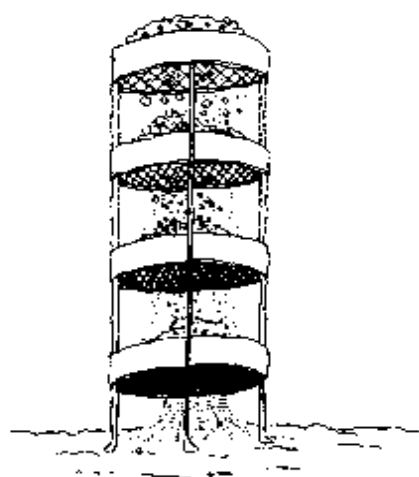
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\angle(z_1 \cdot z_2) = \angle z_1 + \angle z_2$$

[2] 将函数 $f(t) = |t|$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 展成复傅里叶级数, 并将其结果与(5.1)最后的例题比较。

[3] 将函数 $f(t) = |\cos t|$ 用复傅里叶级数展开。

DFT 和 FFT



6.1 数字信号的傅里叶分析

将信号展开成傅里叶级数，从频谱的角度来看，显现出了过去没有注意到的信号的各种特征。那么，实际上如何进行傅里叶级数展开呢？最简单的方法是使用叫做谱分析仪的测定仪器。谱分析仪由很多的滤波器构成。若只让某一特定频率的信号通过，看到滤波器的输出，就可以知道信号中包含该频率部分的大小。因此，只要排列各个频率的滤波器，就可以知道信号全部的频谱（图 6.1）。

近年来电子计算机的计算速度越来越快，利用计算机对信号进行处理已成为通用的方法。即将信号通过 AD 转换变成数字信号并输入计算机，然后通过数值计算来求傅里叶级数。用电子计算机软件对数字信号进行处理，与用电路硬件求频谱的方式相比，尽管速度较慢，但是具有计算精度高，处理方式通用性强等优点。只要信号作为数据一旦被输入计算机，就可以通过改变程序来进行平滑信号，观察频谱，或者求自相关函数。可以应用信号处理技术对实际上存在的各种变量进行信号处理。近年来，也出现了使用多种 IC（集成电路）模块，用硬件来实现信号处理的算法。

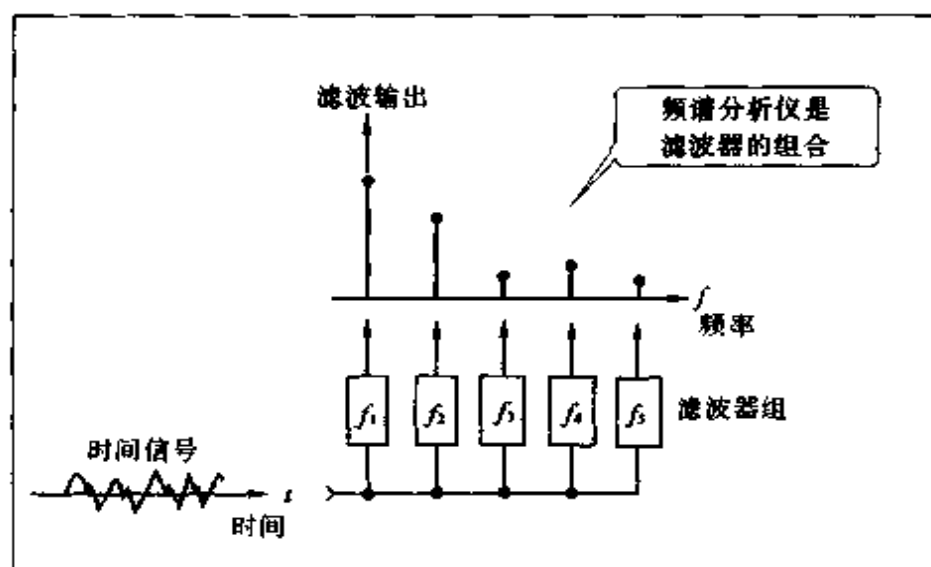


图 6.1 频谱分析仪的原理

用数字方式进行信号处理已成为通用的方法。所以在本章中，我们来学习数字信号的傅里叶分析方法，这是数字信号处理中的重要内容之一。

6.2 离散傅里叶变换(DFT)

若基本区间为 $[0, 2\pi]$ ，与周期为 2π 的函数 $f(t)$ 的傅里叶级数展开式的式(5.8)、式(5.9)相似，可表示为

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jkt} \quad (6.1)$$

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-jkt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-jkt} dt \quad (6.2)$$

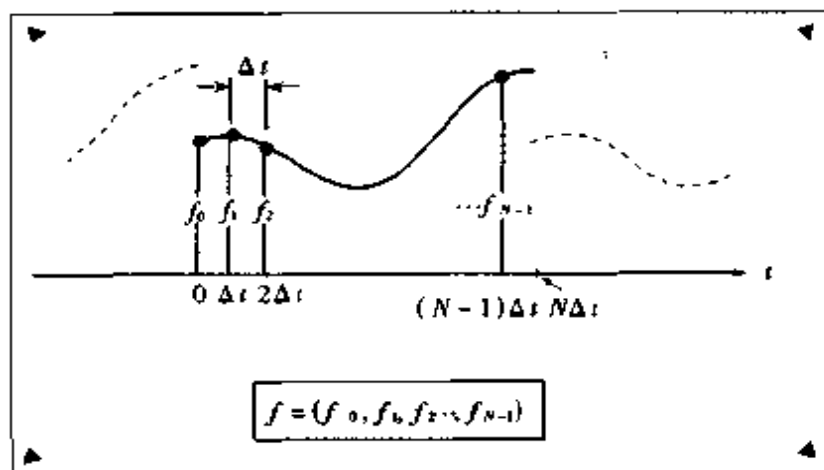
用等间隔采样的 N 个信号，构成一个序列，如图(6.2)可表示为

$$\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1}\}$$

设此数字信号的采样间隔为 Δt ， $N\Delta t$ 是此信号的基本周期，可将此信号看成是周期为 $N\Delta t$ 的周期函数，将其展开，成傅里叶级数。

我们已经学过，周期为 2π 的函数 $f(t)$ 的复傅里叶系数 C_k 可由函数 $f(t)$ 与 e^{jkt} 的内积给出。

$$C_k = \langle f(t), e^{jkt} \rangle$$

图 6.2 N 个信号的序列

现在, 在这里需要定义的是与此傅里叶系数相当的系数。设 N 个信号采样值序列构成 N 维向量 f

$$f = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1}\}$$

也就是用 N 维向量 f 来近似函数 $f(t)$, 此系数定义为 N 维向量 f 的傅里叶系数。为求出此傅里叶系数, 需要给出相当于 e^{jkt} 的向量, 最后取这个向量与 f 的内积, 从而可以得到对应于离散数据的傅里叶系数。复向量元素的 N 维向量相当于函数 e^{jkt} , 把它记为 e_k , 对于向量 f , 其傅里叶系数当然由 f 和 e_k 的内积给出

$$C_k = \langle f, e_k \rangle$$

那么, 究竟 e_k 是一个什么样的向量呢?

这可以从定义上很容易地推出。就是将下列复变函数以 $2\pi/N$ 为间隔采样, 采样后得到的复数序列构成 N 维向量

$$e^{jkt} = \cos kt + j \sin kt$$

即, 若设 $\Delta\omega = 2\pi/N$, N 维向量是(图 6.3)

$$e_k = (1, e^{jk\Delta\omega}, e^{j2k\Delta\omega}, \dots, e^{j(N-1)k\Delta\omega})$$

实际上, $e_k (k=0, 1, 2, \dots, N-1)$ 构成的向量集合 $\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_{N-1}\}$ 在 N 维向量空间构成标准正交基底, 见 (MEMO), 所以这种取法是合适的。

这样, 自然向量 f 可用标准正交基底 $\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_{N-1}\}$ 展

开为

$$f = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e_k \quad (6.3)$$

其系数 C_k 可表示为 f 和 e_k 的内积。

$$C_k = \langle f, e_k \rangle \quad (6.4)$$

即

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-j(2\pi/N)ki} \quad (k=0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (6.5)$$

称为信号数值序列 $\{f_0, f_1, \dots, f_{N-1}\}$ 的离散傅里叶变换(Dis -

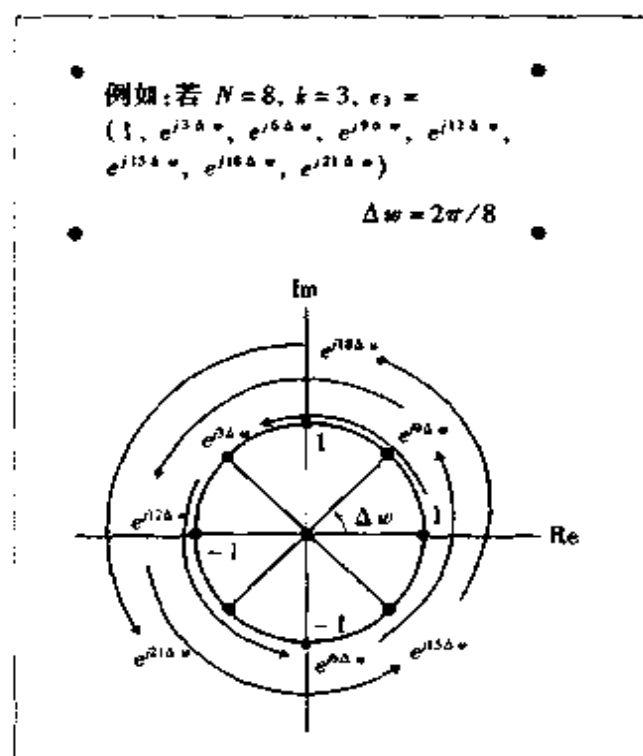


图 6.3 N 维向量

注意

要确定向量序列 $\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_{N-1}\}$ 构成标准正交基底, 只要计算下面的内积

$$\langle e_m, e_n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)mi} e^{j(2\pi/N)ni} = \delta_{mn}$$

crete Fourier Transform, 缩写为 **DFT**)。相应地(6.3)称为离散傅里叶逆变换(Inverse Discrete Fourier Transform, 缩写为 **IDFT**), 带入 e_k , 具体的表达式为

$$f_i = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{-j(2\pi/N)ki} \quad (i=0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (6.6)$$

应用这些表达式, 可在计算机上进行数字的傅里叶分析。让我们仔细比较上述的 **DFT** 和 **IDFT** 的表达式, 可以发现两者的不同点仅在于前面有无系数 $\frac{1}{N}$, e 的指数部分的符号是正还是负, 其它部分的形式都相同。因此, **DFT** 和 **IDFT** 都可以用相同的计算

应用

应用不能进行复数运算的程序语言时, 可用三角函数形式的表达式(6.5)和(6.6)。因此, 将三角函数形式的表达式表述如下。离散傅里叶变换的傅里叶系数的实部用 A_k 表示, 虚部用 B_k 表示, 将其写成

$$C_k = A_k + jB_k$$

可以得出

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i \cos \frac{2\pi}{N} ki$$

$$B_k = -\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i \sin \frac{2\pi}{N} ki \quad (i=0, 1, 2, \dots, N-1)$$

其离散傅里叶逆变换为

$$\begin{aligned} f_i &= \sum_{k=0}^{N-1} (A_k + jB_k) \left(\cos \frac{2\pi}{N} ki + j \sin \frac{2\pi}{N} ki \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(A_k \cos \frac{2\pi}{N} ki - B_k \sin \frac{2\pi}{N} ki \right) + j \sum_{k=0}^{N-1} \left(A_k \sin \frac{2\pi}{N} ki + B_k \cos \frac{2\pi}{N} ki \right) \end{aligned}$$

因为 f_i 为实数, 此式的虚部为 0。所以

$$f_i = \sum_{k=0}^{N-1} \left(A_k \cos \frac{2\pi}{N} ki - B_k \sin \frac{2\pi}{N} ki \right) \quad (i=0, 1, 2, \dots, N-1)$$

机程序来处理。即进行 **DFT** 时信号值序列是输入数据, 进行 **IDFT** 时傅里叶系数是输入数据, 对应于 **DFT** 或 **IDFT** 只要改变 e 的指数符号和计算结果用数据数 N 除或不除就可以。

6.3 DFT 的性质

参照图 6.4, 我们来考察 **DFT** 的下列性质。

6.3.1 频谱的周期性

离散傅里叶变换得到的傅里叶系数有下面的关系。

$$C_{k+N} = C_k \quad (6.7)$$

这意味着

傅里叶系数的频谱是周期性的, 其周期为 N

证明如下

$$\begin{aligned} C_{k+N} &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-j(2\pi/N)(k+N)i} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-j(2\pi/N)ki} e^{-j2\pi i} \end{aligned}$$

因为 i 是整数

$$e^{-j2\pi i} = 1$$

从而可得

$$C_{k+N} = C_k$$

根据这一性质, 由 N 个数据得到的有效傅里叶系数是 C_0, C_1, \dots, C_{N-1} , 其它的系数是这些系数周期性地重复。

6.3.2 频谱的对称性

我们来证明傅里叶系数的下列性质。

$$C_{N-k} = C_k^* \quad (6.8)$$

此式表示了离散变换中的下述事实。

负的次数的频谱出现在从 $k = N/2$ 到 $k = N-1$

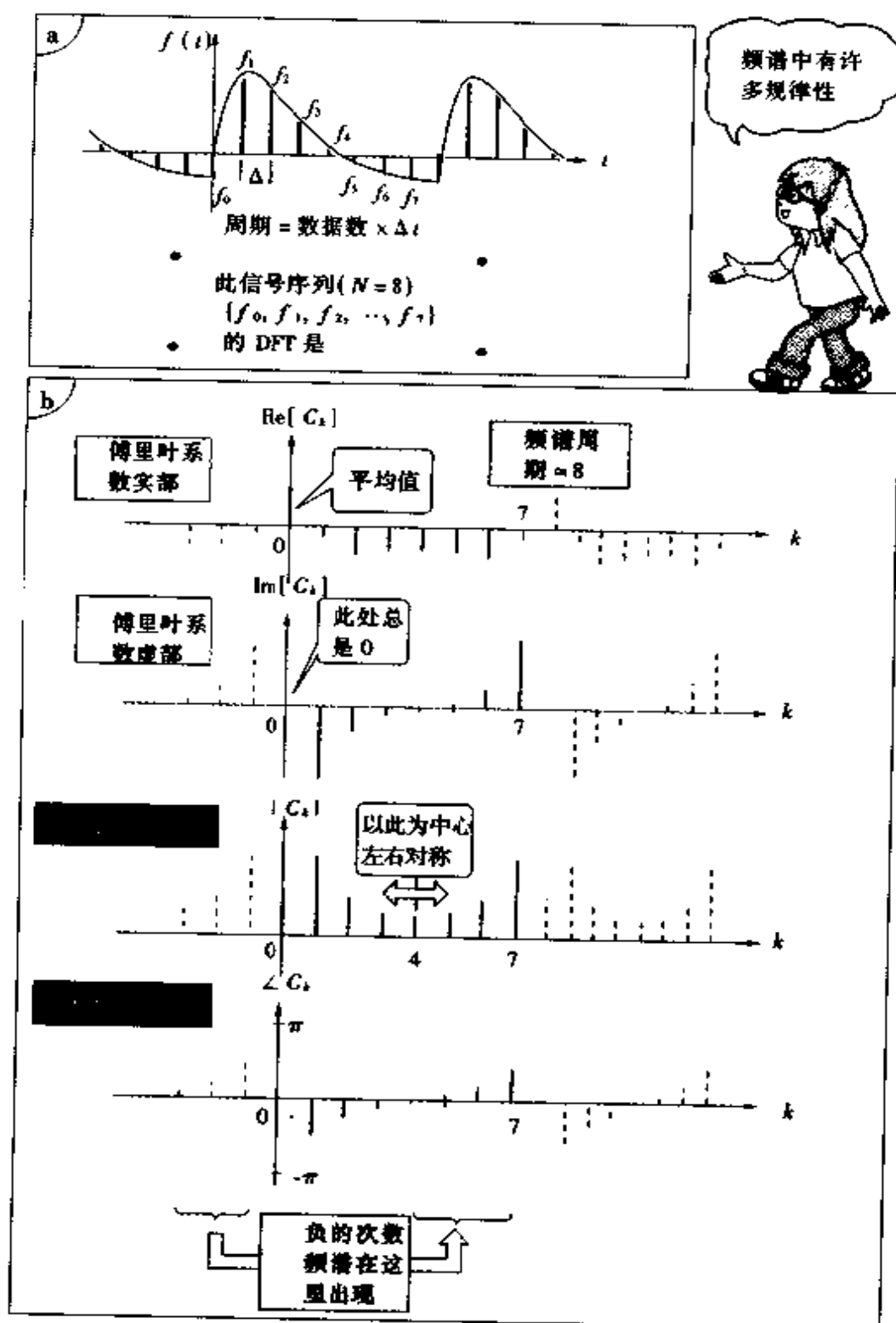


图 6.4 DFT 的频谱分析

推导如下

$$\begin{aligned}
 C_{N-k} &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-j(2\pi/N)(N-k)i} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-j(2\pi/N)(-k)i} e^{-j2\pi i} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-j(2\pi/N)(-k)i} \\
 &= C_{-k}
 \end{aligned}$$

当信号值序列为实数时,复傅里叶系数有下面的共轭关系

$$C_{-k} = \bar{C}_k \quad \text{因此} \quad |C_{-k}| = |C_k|$$

上面的关系同样地可以写成

$$\operatorname{Re}[C_{-k}] = \operatorname{Re}[C_k] \quad \operatorname{Im}[C_{-k}] = -\operatorname{Im}[C_k]$$

由这里和式(6.8)可知下式成立

$$C_{N-k} = \bar{C}_k \quad (6.9)$$

此式的意义在于振幅频谱是对称的。即对于离散傅里叶变换

振幅频谱以 $k = N/2$ 为中心左右对称

6.4 快速傅里叶变换(FFT)

DFT 是使用计算机进行信号分析时无论如何必须掌握的重要的技术。如果不能掌握 DFT 理论,就不能很好理解傅里叶频谱的计算结果。但是现在实际上除了为达到特殊要求以外,人们在信号处理时都不使用 DFT 算法进行傅里叶分析。其原因只有一个,就是计算时间过长而缺乏实用性。

实际上试一试就可以知道,若使用普通的微型计算机对数据数为 1000 个左右的信号进行 DFT 处理,到计算结束需要等待相当长的时间。若使用快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform,缩写为 FFT)算法,就可以很快地计算出结果。进而,若使用专用的处理器,可随时在显示器上显现信号的频谱。但是,FFT 通常受数据数

的限制,一般需要取 2 的幂乘数 (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...) 为数据数。尽管有这样的限制,由于实际上有计算速度快这一大优点,所以使用 FFT 是必然的。

为了节省 DFT 计算所浪费的时间,FFT 充分利用了三角函数的周期性计算技巧而成为信号进行处理时的一个重要工具。此算法稍微有些复杂,其关键与其说是信号处理的本质问题,不如说是数值计算的技巧问题。FFT 与 DFT 的计算结果没有差别(严格地说,实际上由于 FFT 的计算次数少,其计算精度更高一些)。只要掌握了 DFT,即使不知道 FFT 算法也不影响使用,没有兴趣的读者,可以略过本节的内容。

那么,下面让我们来对 DFT 中隐含的不必要的计算浪费进行分析。

6.4.1 DFT 的分析

现在,我们取数据数为 N 来考察某复数 w

$$w = e^{-j(2\pi/N)}$$

如前所述,DFT 可表示信号值序列 $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1}\}$ 的傅里叶系数

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} w^{ki} f_i$$

首先,取信号值序列为 8 个数,即考虑 $N=8$ 的情况。此信号向量为:

$$\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_7, \}$$

傅里叶系数 C_k 具体地写出如下

$$C_k = \frac{1}{8} (w^0 f_0 + w^k f_1 + w^{2k} f_2 + w^{3k} f_3 + w^{4k} f_4 + w^{5k} f_5 + w^{6k} f_6 + w^{7k} f_7)$$

由于全部的系数都写出来稍微有些麻烦,今后忽略系数 $1/8$,因此,今后实际上 C_k 可解释为 NC_k 。

将所有的傅里叶系数 $\{C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7\}$ 具体地写出时如何表示与信号值相乘的 w 的幂是重要的,在此表示为矩阵的形式,要仔细地确定矩阵的各元素。

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 & w^8 & w^{10} & w^{12} & w^{14} \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^9 & w^{12} & w^{15} & w^{18} & w^{21} \\ w^0 & w^4 & w^8 & w^{12} & w^{16} & w^{20} & w^{24} & w^{28} \\ w^0 & w^5 & w^{10} & w^{15} & w^{20} & w^{25} & w^{30} & w^{35} \\ w^0 & w^6 & w^{12} & w^{18} & w^{24} & w^{30} & w^{36} & w^{42} \\ w^0 & w^7 & w^{14} & w^{21} & w^{28} & w^{35} & w^{42} & w^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

注意 w 的指数

上式为矩阵形式表达的傅里叶系数。为进行矩阵计算，必须进行 $8 \times 8 = 64$ 次乘法运算和 $7 \times 8 = 56$ 次加法计算。一般对 N 个数的 DFT 计算，必须进行 N^2 次乘法运算和 $N \times (N - 1)$ 次加法计算。如此例所示，当 N 较小时，计算量还不大，若 N 为 1000，必须进行 100 万次乘法和加法计算。

然而，在 w 的幂乘中包含了某种规律。我们来看一下图 6.5。从图中可知，存在下列关系

$$w^8 = w^0$$

$$w^9 = w^1$$

$$w^{10} = w^2$$

$$w^{11} = w^3$$

$$\vdots$$

任何幂乘超过 8 的元素，都与从 w^0 到 w^7 的某一个元素相等。我们仔细想一下，若将 n 除 8 的余数，写成下面的形式

$$n \bmod 8$$

可以将幂乘间的关系表示为

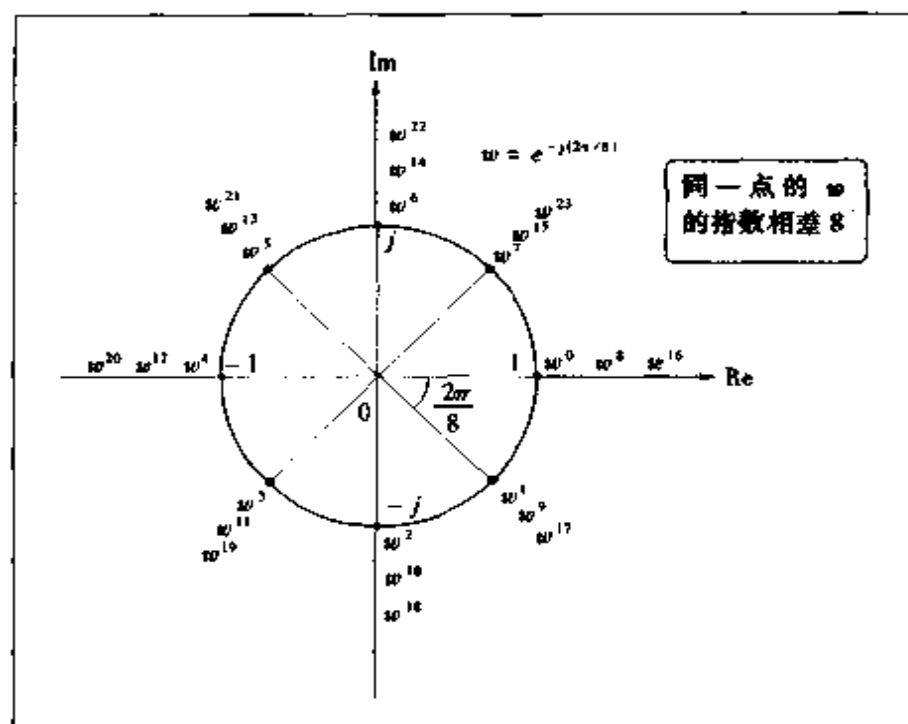
$$w^n = w^{n \bmod 8}$$

也就是

$$8 \bmod 8 = 0$$

$$9 \bmod 8 = 1$$

$$10 \bmod 8 = 2$$

图 6.5 w 的幂乘

$$11 \bmod 8 = 3$$

$$\vdots$$

使用此法则可将所有的 w 幂乘变换为 w^0 到 w^7 之间的某一个, 读者最好先自己改写一下。那么, 会变成什么样了呢?

请不要看答案, 自己先做一做..., 结果如下所示。

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 & w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^1 & w^4 & w^7 & w^2 & w^5 \\ w^0 & w^4 & w^0 & w^4 & w^0 & w^4 & w^0 & w^4 \\ w^0 & w^5 & w^2 & w^7 & w^4 & w^1 & w^6 & w^3 \\ w^0 & w^6 & w^4 & w^2 & w^0 & w^6 & w^4 & w^2 \\ w^0 & w^7 & w^6 & w^5 & w^4 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

问题是如何表示 w 的指数的规律

希望读者仔细看一下这个矩阵, 一定会发现许多规律。问题是如何利用这些规律来寻求高效率的计算方法。

FFT 是将包含在表达 DFT 的矩阵中的某些规律巧妙地利用,

高效率地进行计算的一种方法。其原则是将矩阵中的元素巧妙地排列替换,以减少乘法计算的次数。因为乘法运算与加减法运算相比需要花费更多的计算时间,若能将几乎是全部计算量的乘法计算的运算次数减少,可以大幅度地缩短计算时间。那么,到底 FFT 减少了多少乘法运算次数呢?

6.4.2 4 个数据的 FFT 算法

首先,我们来考虑信号数值序列只有 4 个数据的情况。设输入信号为

$$\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$$

其 DFT 可表示为

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

根据图 6.6,可将 w 的幂乘转换为具体的数值为

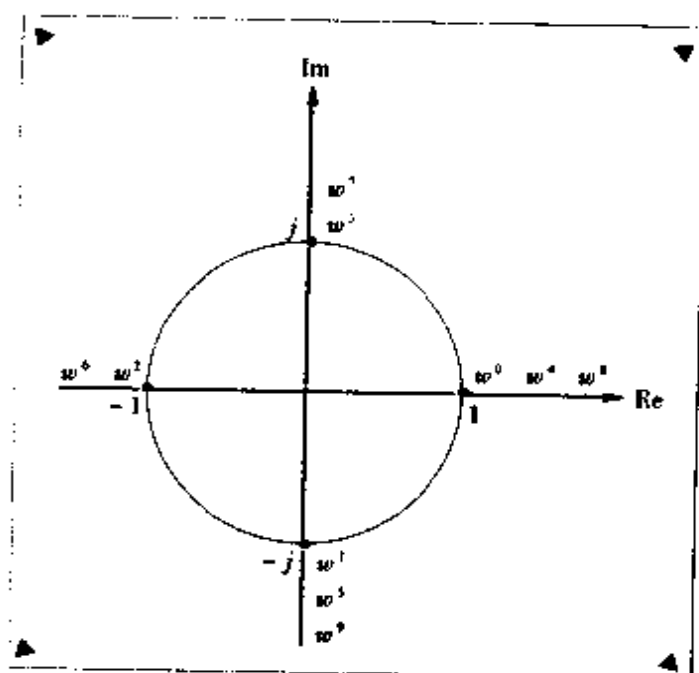
$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

下面将对此矩阵的元素进行频繁地替换,但是困难在于采用通常的矩阵表示方法不容易看出元素的替换关系。因此,为了使读者便于理解,本书定义一种特殊的表示方法,需要注意的是这种方法只适用于本书。首先,将前面的式(6.12)表示为

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

因此,可以得出下式

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ aw^0 & aw^0 & aw^0 & aw^0 \\ bw^0 & bw^1 & bw^2 & bw^3 \\ cw^0 & cw^2 & cw^4 & cw^6 \\ dw^0 & dw^3 & dw^6 & dw^9 \end{bmatrix}$$

图 6.6 w 的幂乘的例

在这里注意到系数的共同性,将其表示如下

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix}$$

这样的矩阵表达式从来没有见过

当然此式真正的表示形式为

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw^0f_0 + aw^0f_1 + aw^0f_2 + aw^0f_3 \\ bw^0f_0 + bw^1f_1 + bw^2f_2 + bw^3f_3 \\ cw^0f_0 + cw^2f_1 + cw^4f_2 + cw^6f_3 \\ dw^0f_0 + dw^3f_1 + dw^6f_2 + dw^9f_3 \end{bmatrix}$$

这里要请读者不要忘记这种表示方法只适用于本书。



我们重新回到正题上来。首先,对式(6.14)进行重新排列。做法是变换其列的排列,将表达式分成两组,每组分别对应 f_0, f_2 的偶数序号的数据和对应 f_1, f_3 的奇数序号的数据。即

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 & f_2 \\ w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 \\ w^0 & w^4 \\ w^0 & w^6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 & f_3 \\ w^0 & w^0 \\ w^1 & w^3 \\ w^2 & w^6 \\ w^3 & w^9 \end{bmatrix}$$

然后,我们来观察此式的右半部分,并且注意到 $w^{k+l} = w^k w^l$,可将上式整理为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_0 & f_2 \\ w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 \\ w^0 & w^4 \\ w^0 & w^6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 & f_3 \\ w^0 w^0 & w^0 w^0 \\ w^1 w^0 & w^1 w^2 \\ w^2 w^0 & w^2 w^4 \\ w^3 w^0 & w^3 w^6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_0 & f_2 \\ w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 \\ w^0 & w^4 \\ w^0 & w^6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_3 \\ w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 \\ w^0 & w^4 \\ w^0 & w^6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.15)$$

分成两组后,相同形式的行列式...

由图 6.6,明显看出

$$w^4 = w^0 = 1 \quad w^6 = w^2 = -1$$

而且

$$w^2 = -w^0 \quad w^3 = -w^1$$

若将此带入式(6.15),得出

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 & f_2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w^0 \\ w^1 \\ -w^0 \\ -w^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_3 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

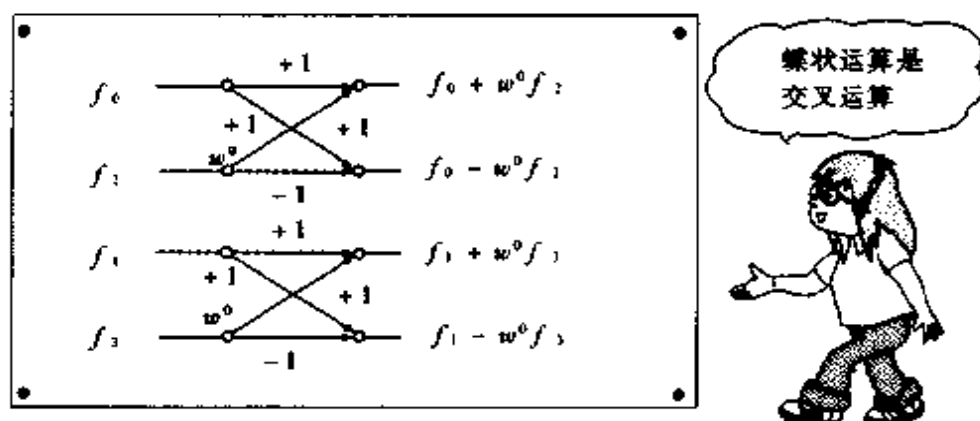


图 6.7 蝶形运算

观察此式, 可知每个方框中的部分都是相同的, 其元素只包含 1 和 -1。从而, 这部分的计算可只进行加减法计算, 而且是重复相同的计算。总之, 若进行这样的计算, 计算量当然会减少。

为了便于理解上式 (6.16) 的计算过程用图来表示。首先将 f_0, f_1, f_2, f_3 分成对应于奇数数据组和偶数数据的两组, 在每组中取加法和减法。若将此计算流程用图表示则如图 6.7 所示。其计算规则是, 在同一分支上前面点的数值等于后面点的数值与经过线路上数值的积, 两个分支相交点的数值等于两个分支的数值的和。因为经过 +1 线段的值保持不变, 所以后面的流程图将省略 +1。由于这种交叉运算像蝴蝶展开的翅膀, 所以称它为蝶形运算。要注意的是用一次蝶形运算进行一次乘法。读者也许会感到奇怪为什么图 6.7 中 f_2 和 f_3 分别乘了 w^0 ($w^0 = 1$)。这是为了一般地表达蝶形算法而特地写成这样的形式。

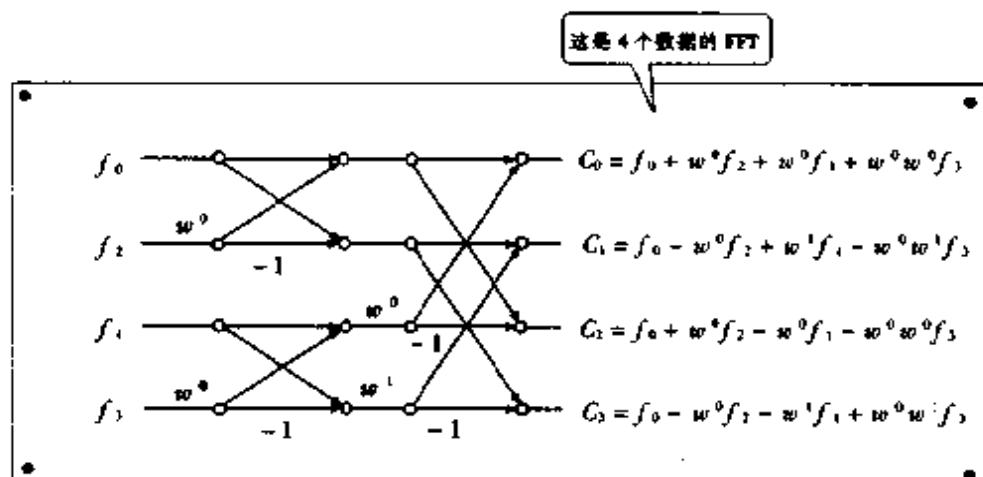


图 6.8 4 个数据的 FFT

下面继续进行蝶形运算,并将下面的运算过程用图 6.8 来表示。在此图中蝶形运算进行了 4 次。而在 DFT 中必须进行 16 次乘法运算,此矩阵计算只不过需要 4 次乘法。

6.4.3 FFT 算法的一般化

4 个数据的 FFT 方法如何扩展到更多的数据呢?在 4 个数据的 FFT 中,其关键在于把数据分成偶数序号的部分和奇数序号的部分,因而对于多个数据的 FFT,也许我们也需要这样做。在这里我们先来考虑 8 个数据的情况。

首先,将 8 点的 DFT 表达式(6.11)的列分成偶数序号和奇数序号的两组。

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 & f_2 & f_4 & f_6 \\ f_1 & f_3 & f_5 & f_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^4 & w^8 & w^{12} \\ w^0 & w^6 & w^{12} & w^{18} \\ w^0 & w^8 & w^{16} & w^{24} \\ w^0 & w^{10} & w^{20} & w^{30} \\ w^0 & w^{12} & w^{24} & w^{36} \\ w^0 & w^{14} & w^{28} & w^{42} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^1 & w^3 & w^5 & w^7 \\ w^2 & w^6 & w^{10} & w^{14} \\ w^3 & w^9 & w^{15} & w^{21} \\ w^4 & w^{12} & w^{20} & w^{28} \\ w^5 & w^{15} & w^{25} & w^{35} \\ w^6 & w^{18} & w^{30} & w^{42} \\ w^7 & w^{21} & w^{35} & w^{49} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

在这里,我们将奇数组中的通用项提出来,成为

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 & f_2 & f_4 & f_6 \\ f_1 & f_3 & f_5 & f_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^4 & w^8 & w^{12} \\ w^0 & w^6 & w^{12} & w^{18} \\ w^0 & w^8 & w^{16} & w^{24} \\ w^0 & w^{10} & w^{20} & w^{30} \\ w^0 & w^{12} & w^{24} & w^{36} \\ w^0 & w^{14} & w^{28} & w^{42} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \\ w^4 \\ w^5 \\ w^6 \\ w^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^4 & w^8 & w^{12} \\ w^0 & w^6 & w^{12} & w^{18} \\ w^0 & w^8 & w^{16} & w^{24} \\ w^0 & w^{10} & w^{20} & w^{30} \\ w^0 & w^{12} & w^{24} & w^{36} \\ w^0 & w^{14} & w^{28} & w^{42} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

进一步应用 w 的幂乘超过 8 的元素分别和 w^0 到 w^7 的值相等的

规则,可写成

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 & f_2 & f_4 & f_6 \\ f_1 & f_3 & f_5 & f_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^4 & w^0 & w^4 \\ w^0 & w^6 & w^4 & w^2 \\ w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^4 & w^0 & w^4 \\ w^0 & w^6 & w^4 & w^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \\ w^4 \\ w^5 \\ w^6 \\ w^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^4 & w^0 & w^4 \\ w^0 & w^6 & w^4 & w^2 \\ w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^4 & w^0 & w^4 \\ w^0 & w^6 & w^4 & w^2 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

我们再来看图 6.5,明显看出存在以下关系。

$$\begin{aligned} w^0 &= 1 & w^2 &= -j & w^4 &= -1 & w^6 &= j \\ w^4 &= -w^0 & w^5 &= -w^1 & w^6 &= -w^2 & w^7 &= -w^3 \end{aligned}$$

将它们带入(6.19),得

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 & f_2 & f_4 & f_6 \\ f_1 & f_3 & f_5 & f_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \\ -w^0 \\ -w^1 \\ -w^2 \\ -w^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

仔细观察此矩阵可知各方框内都是完全相同的。进而我们会注意到矩阵的上半部分和 4 个数据的 FFT 的 w 的排列形式(6.13)相同。此结果意味着若对偶数序号的信号组和奇数序号的信号组分别进行 4 个数的 FFT,使用此结果可以表示 8 个数据的 FFT。图 6.9 给出了信号流程。参照 4 个数的流程图画出此图的全部,可以进一步理解蝶形运算(图 6.10)。

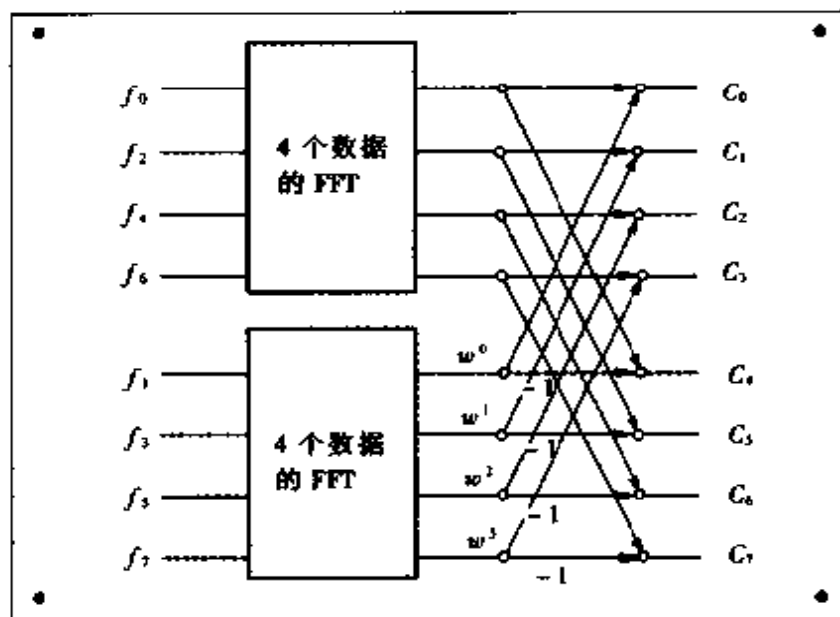


图 6.9 使用 4 个数据 FFT 求 8 个数据的 FFT

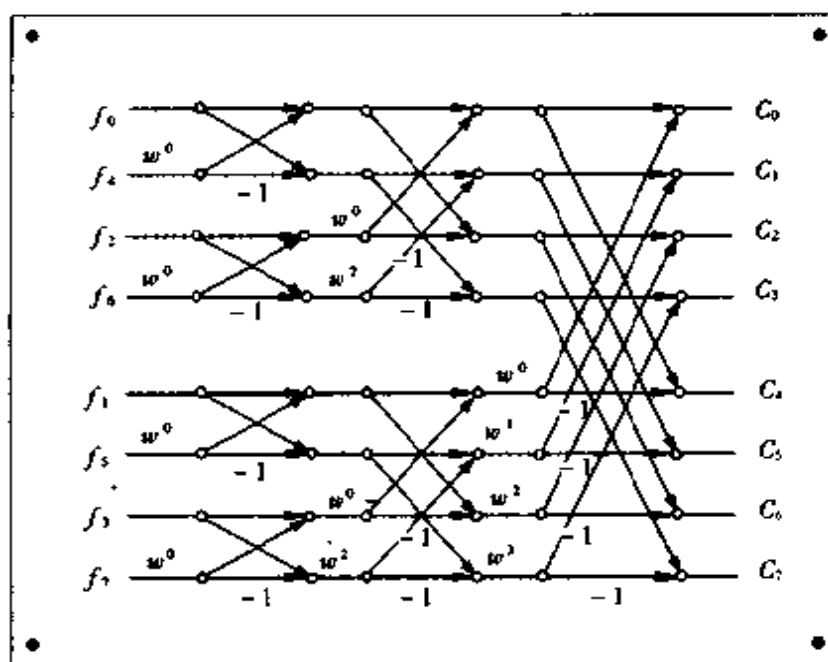


图 6.10 8 个数据的 FFT

使用 4 个数据的 FFT 可得到 8 个数据的 FFT, 那么 16 个数据的 FFT 呢?



从前面的过程我们可以得出推论, 从 4 个数据的 FFT 可得出 8 个数据的 FFT, 从 8 个数据的 FFT 可得出 16 个数据的 FFT, 若对信号数值序列适当的排列变换, 重复进行蝶形运算, 结果可进行 2 的幂乘数的数据处理。

由于 8 个数据的流程图出现蝶形运算次数为 12, 所以乘法运算的次数也是 12 次。这与 DFT 的 64 次相比只不过是它的

3/16。一般地说,当数据个数 N 是 2 的幂乘 $N=2^p$ 时,其乘法运算在 DFT 中的次数为 N^2 ,而 FFT 只要 $NP/2$ 次乘法运算。当数据数少时其差别并不大,但数据量大时,其差别则非常大。例如,当数据数为 $2^{10}=1024$ 时,DFT 必需要进行 105 万次的乘法运算,而用 FFT 只需要 5000 次的乘法运算。即,计算量约为 DFT 的 1/200,如果用 DFT 在计算机上计算需要 1 分钟的时间,用 FFT 只需用 0.03 秒。数据量越多,此差别越大,越能发挥出 FFT 的优势。

6.4.4 位变换和混合技术

FFT 算法的关键问题之一是蝶状运算,另一个是将信号数值序列不断地分解为两组,最终归结为每两个数据的蝶状运算,并将信号值变换排列。将此变换排列的方法称为混合技巧(shuffling technique)。所谓混合在英语中是表示混杂或洗牌的意思。变换排列后的信号数值的顺序关系称为位变换(bit reversal)。本书不对此进行理论上的说明,只希望读者通过下面的例子能产生一些感性认识。

4 个数据和 8 个数据的信号数值序列的顺序排列分别为

$$f_0, f_1, f_2, f_3$$

$$f_0, f_4, f_2, f_6, f_1, f_5, f_3, f_7$$

若将下标表示为 2 进制,可发现下面有意思的事情。

(4 个数据的 FFT 时)

原序号		位变换后的序号	
10 进制数	2 进制数	10 进制数	2 进制数
0	00	0	00
1	01	2	10
2	10	1	01
3	11	3	11

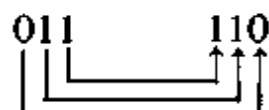
(8 个数据的 FFT 时)

原序号		位变换后的序号	
10 进制数	2 进制数	10 进制数	2 进制数
0	000	0	000
1	001	4	100
2	010	2	010
3	011	6	110
4	100	1	001
5	101	5	101
6	110	3	011
7	111	7	111

有什么意思呢?



10 进制时的排列是杂乱无章的, 将其变换成 2 进制的排列, 可知其遵从着明确的规律。即位变换后的序号是将原信号的 2 进制数值的最低位换到最高位, 而把最高位换到最低位, 将所有位的排列按完全相反顺序的排列。例如, 我们看方框内的情况, 确实是如此。



对于其它的序号, 请读者自己验证结果的正确性。

此规律不仅适合于 4 个数据和 8 个数据, 它还是对于更多数据也成立的普遍规律。为什么会这样呢? 其理论根据作为课外作业留给有兴趣的读者。

【FFT 的计算机程序】

作为参考给出用 BASIC 语言编写的 FFT 程序。

(使用方法)

1. 离散傅里叶变换时

<输入数据>

N: 数据个数(必须是 2 的幂乘)

X(I): 1 维数组, 表示输入信号, 用此数组记录要进行傅里叶变换的信号值序列。

($I = 1, 2, \dots, N$)

Y(I): 1 维数组,其所有值赋 0。

INV: 标志量,此处取 1。

<输出数据>

X(I): 傅里叶系数的实部, X(1) 为常数项, n 次谐波的值 $X(n+1)$ (参见图 6.4)。

Y(I): 傅里叶系数的虚部,其输出存储顺序同上。

2. 离散傅里叶逆变化时

<输入数据>

N: 数据个数(必须是 2 的幂乘)。

X(I): 1 维数组,输入傅里叶系数的实部。数据的形式与傅里叶变换时的输出结果相同。

Y(I): 1 维数组。输入傅里叶系数的虚部。

INV: 标志量,这里取 -1。

<输出数据>

X(I): 逆傅里叶变换的结果。

Y(I): 几乎都是接近于 0 的值。没有意义。

程序清单

```

100 * FFT
110 ' * * * * *
120 '      Fast Fourier Transform
130 '
140 '      N: Number or data points
150 '      X: Data sequence. In the end Real part of DFT
160 '      coefficients are returned.
170 '      Y: All must be 0 when real forward FFT. In the end
180 '      imaginary part of DFT coefficients are returned.
190 '      INV: Flag for IFFT
200 '      1: Forward FFT    - 1: Inverse FFT
210 ' * * * * *
220 '      Bit Reversal
230 J = 1
240 FOR I = 1 TO N - 1
250     IF I >= J THEN 280
260     XA = X(I): X(I) = X(J): X(J) = XA

```

```

270      YA = Y(I): Y(I) = Y(J): Y(J) = YA
280      N2 = N/2
290      IF N2 >= J THEN 310
300      J = J - N2: N2 = N2/2: GOTO 290
310      J = J + N2
320 NEXT I
330      FFT begins here
340 M = 1: N2 = N
350 N2 = N2/2: IF N2 <> 1 THEN M = M + 1: GOTO 350
360 FOR L = 1 TO M
370      LP = 2^L
380      LP2 = LP/2
390      DARG = - INV * 3.14159/LP2
400      ARG = 0
410      FOR J = 1 TO LP2
420          C = COS(ARG): S = SIN(ARG): ARG = ARG + DARG
430          FOR I = J TO N STEP LP
440              IW = I + LP2
450              WR = X(IW) * C - Y(IW) * S: WI = X(IW) * S + Y(IW) * C
460                  X(IW) = X(I) - WR: Y(IW) = Y(I) - WI
470                  X(I) = X(I) + WR: Y(I) = Y(I) + WI
480          NEXT I
490      NEXT J
500 NEXT L
510 IF INV = 1 THEN: FOR I = 1 TO N: X(I) = X(I)/N: Y(I) = Y(I)/N:
    NEXT I
520 RETURN

```

这里有各种技巧



本章要点

(1) 将 N 个信号值序列 $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ 的离散傅里叶变换(DFT)定义为

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-j(2\pi/N)ki} \quad (k=0,1,2,\dots,N-1)$$

离散傅里叶逆变换(IDFT)定义为

$$f_i = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j(2\pi/N)ki} \quad (i=0,1,2,\dots,N-1)$$

(2) DFT 的频谱呈周期出现,其周期为 N 。负的频谱出现在 $k = N/2$ 到 $k = N-1$ 。且振幅频谱和功率频谱以 $N/2$ 为中心左右对称。

(3) DFT 因计算量非常庞大而不实用。FFT 与 DFT 相比是一种效率非常高的算法,可减少相当多的计算量。只是数据个数必须是 2 的幂乘。

◆ ◇ 练习题 ◇ ◆

[1] 试求 $f_i = \cos(3\pi i/4)$, ($i=0,1,2,\dots,7$) 的 DFT。

[2] 对用采样周期为 1kHz 采样的 512 个数据 (f_i , $i=1,2,\dots,512$) 进行了 FFT(参照 p126 的 MEMO 的程序)。

(1) 基波的频率是多少 Hz,可分析的信号的最高频率是多少 Hz?

(2) 试说明有效傅里叶系数 C_k ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K$) 与输出结果 $X(I)$, $Y(I)$ 间的关系。 K 是多少?

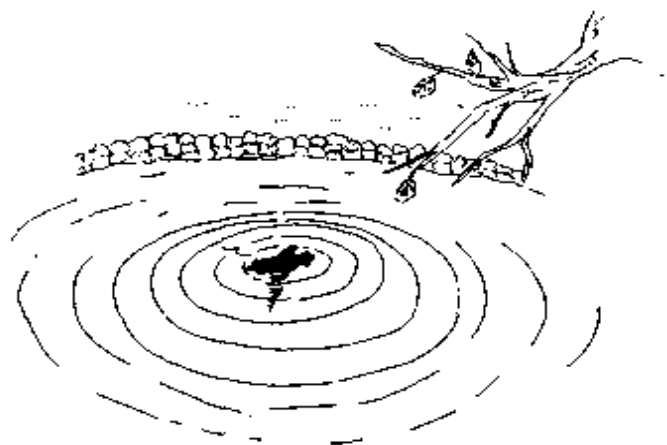
[3] 当信号值序列 $\{f_0, f_1, \dots, f_{N-1}\}$ 的 DFT 表示为式(6.5)时,试证明在离散傅里叶变换中帕斯瓦尔定理也成立。

$$\sum_{k=0}^{N-1} |C_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |f_i|^2$$

[4] 试求数据个数为 16 时的位变换。

第 7 章

傅里叶变换



7.1 从傅里叶级数展开到傅里叶变换

我们学过了将周期信号分解成各个频率的正弦波分量，并利用正交函数将函数展开成傅里叶级数的分析方法。若作为对象的信号是周期信号就可利用傅里叶级数展开，但是对于非周期的信号和孤立波，究竟用什么样的方法进行频谱分析呢？由于作为对象的信号不是周期信号，因此在有限区间的傅里叶级数的展开不用说实际上，就是在理论上也是错误的。所以，在本章中进一步推广傅里叶级数展开的概念，使其也包含非周期信号和孤立波等信号，让我们能够考察更为一般情况下的傅里叶分析的理论。

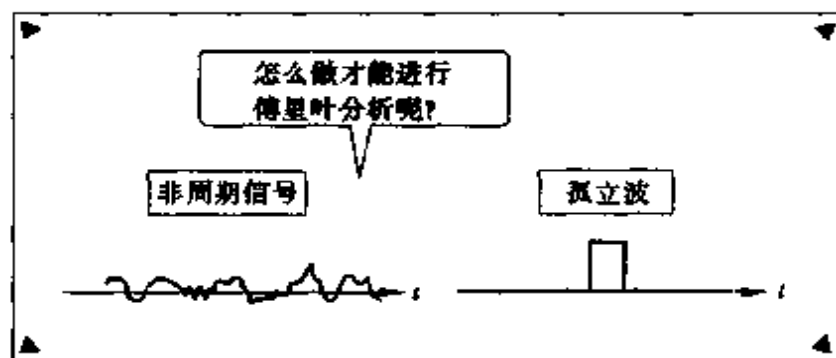


图 7.1 将各种信号进行傅里叶分析

非周期信号和孤立波与到现在为止所讨论的周期信号当然是不同的,但是,如果考虑的角度不同也可以说它们是一种周期信号。把不是周期的信号看作是周期信号,这多少有点像佛教上的“有既是无,无既是有”的感觉。即将所谓周期信号看成在某一有限长度上周期重复出现的信号,而将所谓不是周期的信号看成具有无限长周期的周期信号。若周期为无限大无论是否具有周期性,结果是所有信号都可以看做是周期信号。仅用上述的说明还不易理解,所以给出下面的实例。

在图 7.2(b)中描述了以周期 $T=4$ 反复再现的周期性方波信号的频谱。若保持此信号的波形不变,只加大周期,其频谱会变成图 7.2(d)。从图中可见将频谱平滑连接起来的线(包络线)的形状没有变化。需要注意的是这里为了在信号基本周期发生变化时能够对频谱的形状进行比较,横轴的刻度取的不是 k 而是 $2\pi k/T$ 。

我们来看进一步加长周期的后情形(图 7.2(f))。频谱线的密度增加了,但频谱的包络线仍然没有变化。不断地加长周期 T ,当 $T \rightarrow \infty$ 时的频谱就是此包络线,即方形脉冲的频谱(图 7.2(h))。这里要提请注意的是此时频谱线的密度变为无限大。即用离散值表示的频谱变成了没有间隙的连续频谱。

在时间域表示的函数 $f(t)$,在频率域表达为以角频率 ω 为变量的函数 $F(\omega)$ 时,可知 $f(t)$ 与 $F(\omega)$ 可用下面的表达式联系起来。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7.1)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (7.2)$$

$F(\omega)$ 相当于在复傅里叶展开中的复傅里叶系数,一般是复函数。将 $F(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的傅里叶积分或傅里叶变换 (Fourier transform)。将从 $F(\omega)$ 得到 $f(t)$ 称为傅里叶逆变换 (inverse Fourier transform)。相应的傅里叶级数展开的线频谱,在傅里叶变

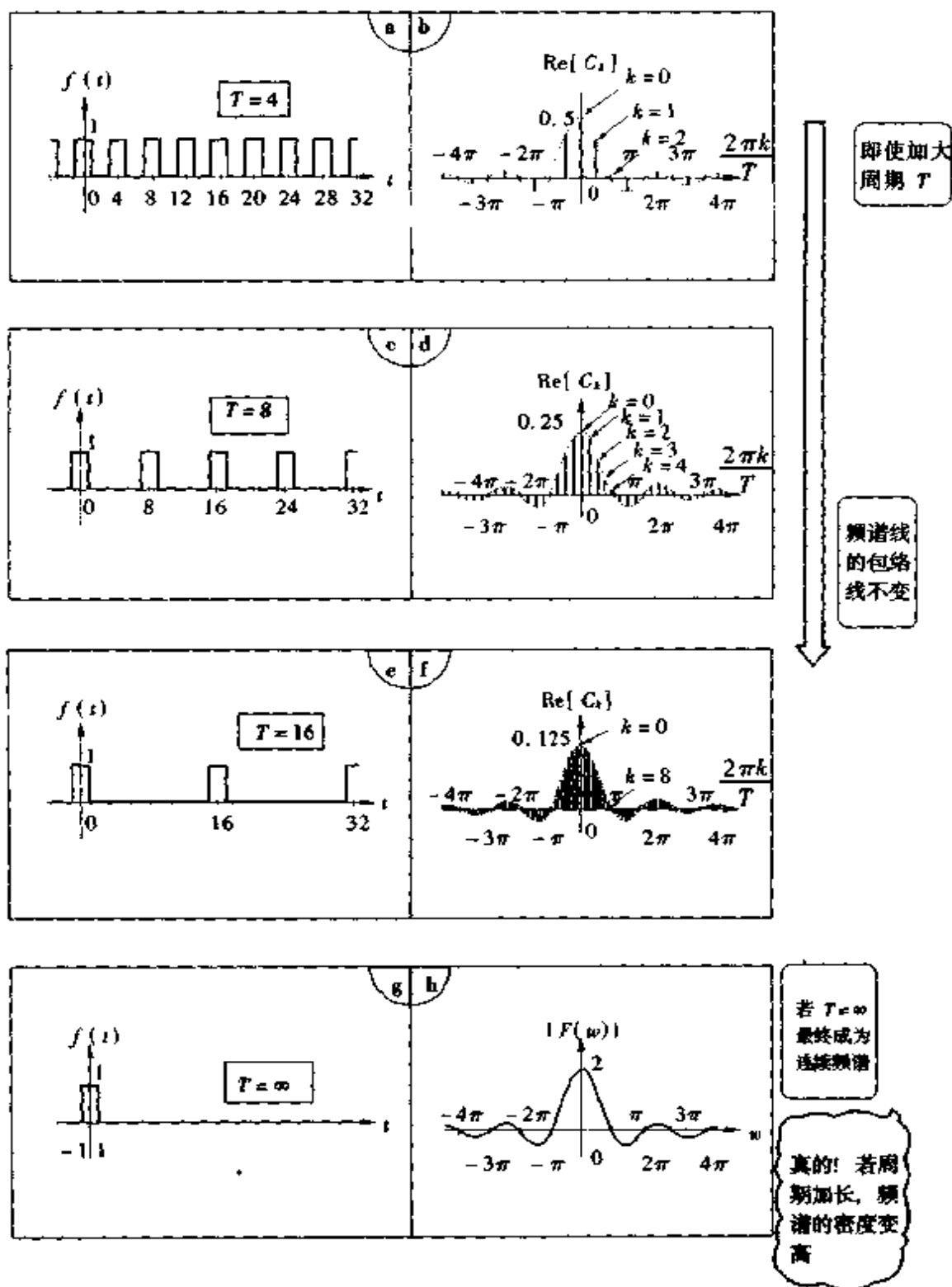


图 7.2 方波的频谱

换中描述为对于 ω 的连续频谱。将傅里叶变换及逆变换用符号表示为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}\{f(t)\} \\ f(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} \end{aligned}$$

7.2 傅里叶变换的性质

如同对傅里叶级数那样,我们现在再来考察一下傅里叶变换的性质。

7.2.1 线性性质

将 $f_1(t), f_2(t)$ 的傅里叶变换写成

$$F_1(\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\} \quad F_2(\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\}$$

当 a_1, a_2 为常数时,下面的关系成立。

$$\boxed{\mathcal{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)} \quad (7.3)$$

即将各信号 $a_1 f_1(t), a_2 f_2(t), \dots$ 相加后的信号的傅里叶频谱是它们频谱的和 $a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) + \dots$ 证明如下

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} e^{-j\omega t} dt \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) \end{aligned}$$

7.2.2 波形的移动

函数 $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

将函数向右移动 τ , 成为函数 $f(t - \tau)$, 其傅里叶频谱可表示为

$$\boxed{\mathcal{F}\{f(t - \tau)\} = e^{-j\omega\tau} F(\omega)} \quad (7.4)$$

即使波形移动了, 但振幅频谱不变, 只在相位频谱上表现出波形移动的影响(图 7.3)。

$$|e^{-j\omega\tau}F(\omega)| = |F(\omega)|$$

尽管信号移动了,由于包含在信号中的各频率分量的大小不会改变,得此结果是必然的。

下面来证明式(7.4)。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega(u+\tau)}du \\ &= e^{-j\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega u}du \\ &= e^{-j\omega\tau}F(\omega)\end{aligned}$$

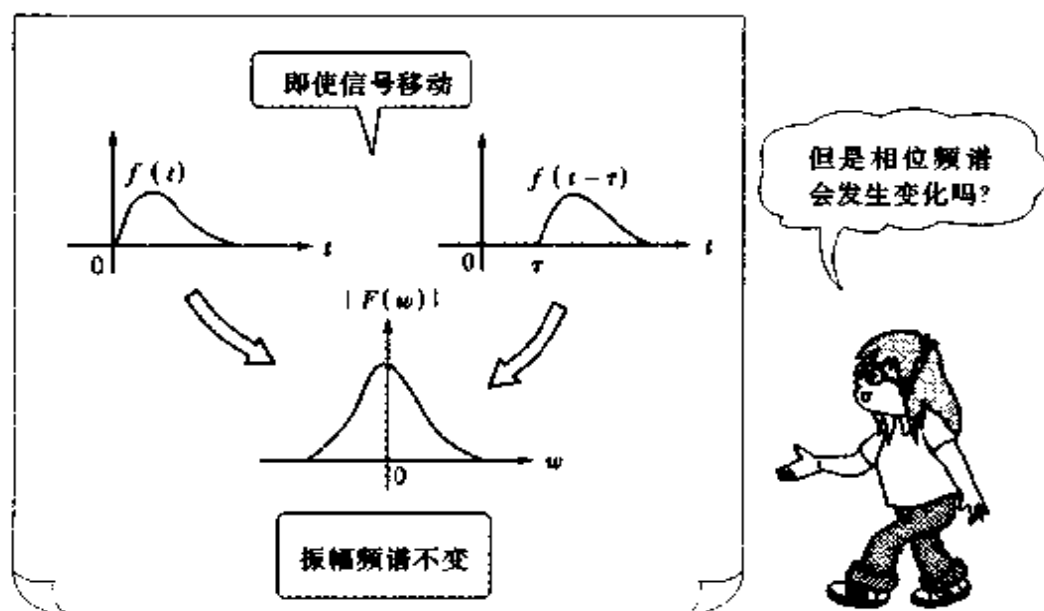


图 7.3 若波形移动会如何

7.2.3 相似性质

我们来求波形的形状相同而在时间轴上发生伸缩情况下的傅里叶频谱。如图 7.4 所示,实常数 a 使函数 $f(t)$ 变成了信号 $f(at)$,其傅里叶频谱可表示为

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (7.5)$$

当 $|a| < 1$ 时,因为 $f(t)$ 在时间轴上扩大了 a 倍,导致信号的频

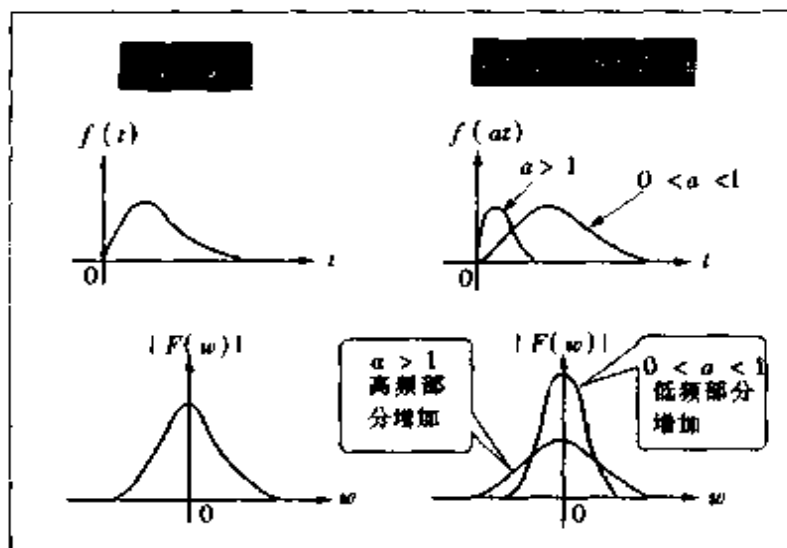


图 7.4 在时间轴上伸缩其频谱会如何变化

率向低频集中。因此, 频谱在频率轴上缩小的同时在频谱方向扩大 $1/|a|$ 倍。反过来, 当 $|a| > 1$ 时, 由于信号的频率增高导致频谱在横向范围扩大, 在纵向数值缩小。上面所述的现象可以从相似关系的表达式式(7.5)得出。

式(7.5)可如下导出。首先 $f(at)$ 的傅里叶变换可表示为

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$$

在这里, 若设 $at = u$, 则 $dt = 1/adu$, 当 $a > 0$ 时, 则

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(at)\} &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j(\omega/a)u} du \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

而, 当 $a < 0$ 时, 则

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(at)\} &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j(\omega/a)u} du \\ &= -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

综合上面的二式, 可表示为式(7.5)。

7.2.4 帕斯瓦尔定理

在傅里叶级数展开中的帕斯瓦尔定理, 在傅里叶变换中也成

立。即在时间域上的能量与在频率域上的能量相等，这可表示为下式。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (7.6)$$

7.3 δ 函数和白噪声

下面定义一个函数，它在物理上虽然不存在，但却在数据和信号处理时非常方便且有用的函数。这个函数就是 δ 函数。对 δ 函数有各种各样的定义，我们采用容易理解的方式定义如下。

设有一方波，其宽度为 ε ，高度为 $1/\varepsilon$ (图 7.5)，其面积为 1，当我们取 $\varepsilon \rightarrow 0$ 而保持面积不变时，它变成高度为 ∞ 的方波。将此函数记为 $\delta(t)$ ，显然 $\delta(t)$ 可表示为

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

即在 $t=0$ 处的值为无限大，面积是 1 的脉冲。称为 δ 函数或者单位脉冲函数。 δ 函数在物理上是不可能实现的，在实际应用时用短时间的强度高的脉冲来代替。

在这里考虑在时间轴上右移后的 δ 函数 $\delta(t-t_0)$ 与连续函数 $f(t)$ 相乘，在区间 $[-\infty, \infty]$ 上积分

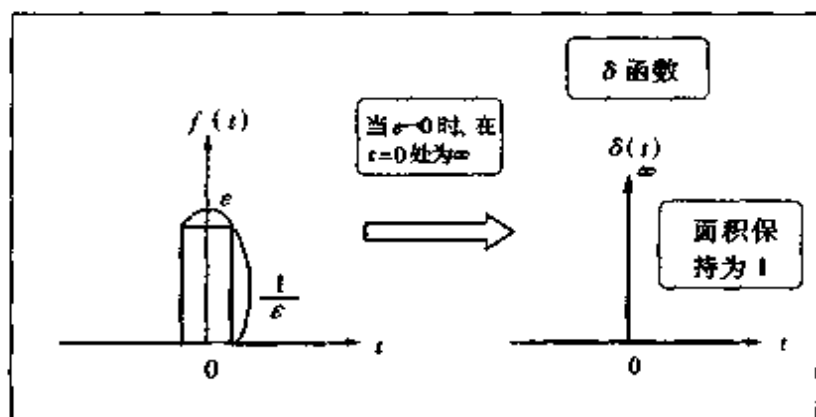


图 7.5 δ 函数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)dt$$

因为 $\delta(t-t_0)$ 在 $t=t_0$ 以外为 0, 所以 $\delta(t-t_0)f(t)$ 在 $t=t_0$ 以外也为 0。从而可导出下列关系(图 7.6)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t_0)dt \\ &= f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt \\ &= f(t_0)\end{aligned}\quad (7.7)$$

由此式可知, 若 δ 函数在时间上移位 t_0 后与 $f(t)$ 相乘并积分, 得到的结果是在 t_0 处的 $f(t)$ 值。即此运算相当于在 $t=t_0$ 处对函数 $f(t)$ 的采样。

我们若取函数 $f(t)$ 为 $e^{-j\omega t}$, $t_0=0$ 。即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt$$

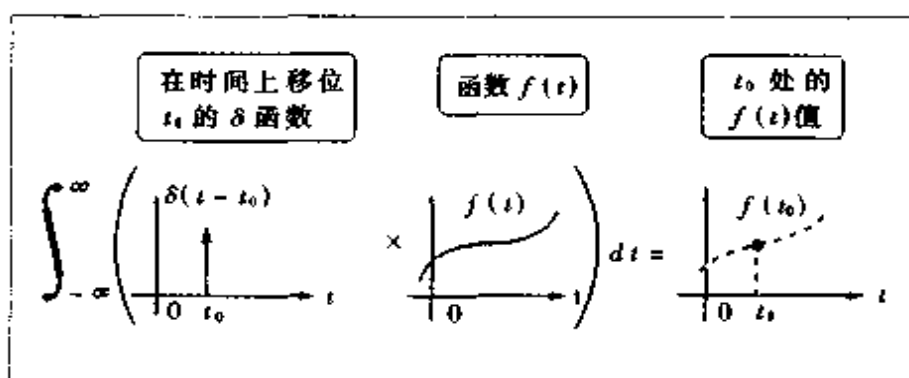


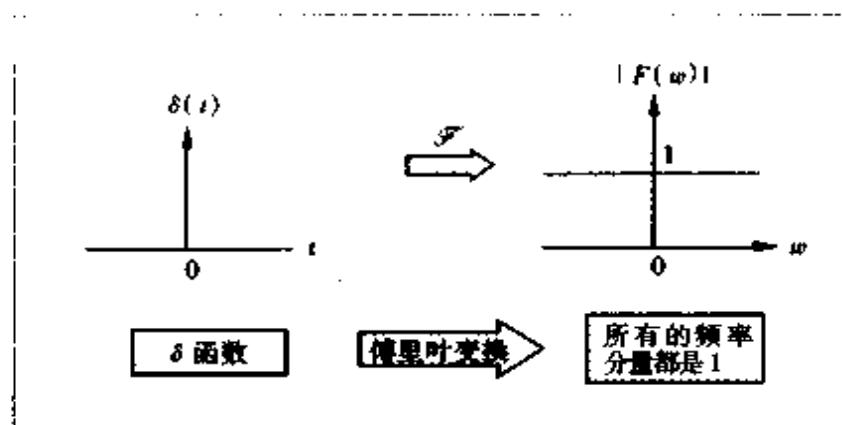
图 7.6 用表达式表示采样

这明显地是求 δ 函数的傅里叶变换的表达式。由式(7.7)可知, 上式的结果为 $f(0)e^{-j\omega 0} = e^0 = 1$, 从而, 可得

$$\boxed{\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1} \quad (7.8)$$

由此结果可知 δ 函数的振幅频谱和角频率没有关系, 是常数, 即对所有的频率都相等(图 7.7)。要注意相位频谱在全部的频率上均为 0。

若将 δ 函数在 t 轴方向移动 τ , 根据波形移动的性质有

图 7.7 δ 函数的采样

$$\mathcal{F}\{\delta(t - \tau)\} = e^{-j\omega\tau}$$

尽管相位频谱发生了变化,但振幅频谱在全部的频率区域上仍然为 1。

图 7.8 的波形也与 δ 函数同样,在全部频率区域上都呈相同的振幅频谱,这也许会觉得有些奇怪(当然,要描述包含无限大的频率的波形在实际上是不可能的,因此,准确的说此图的波形是

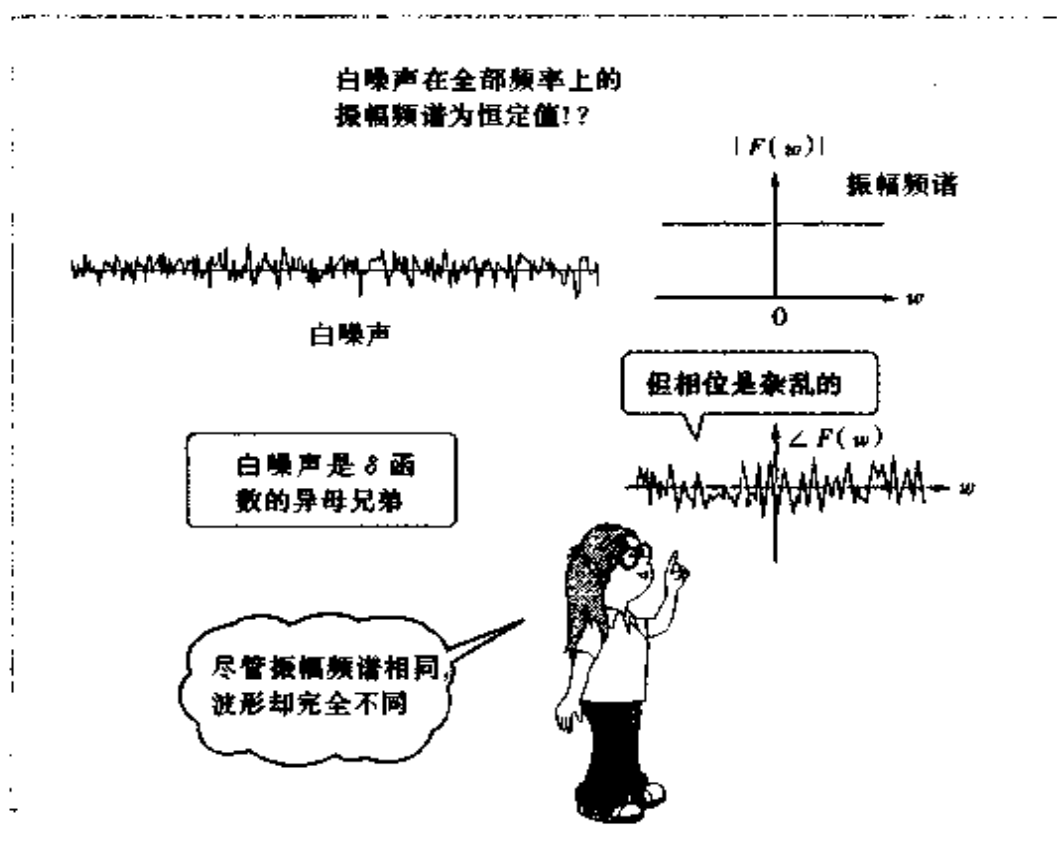


图 7.8 白噪声的频谱

在某一有限的频率区域具有相同的振幅频谱的信号)。实际上这种信号的振幅频谱确实是相同的,而相位频谱却是毫无规则的。 δ 函数的相位频谱在全部频率区域上是0,而图7.8中的相位频谱却是在全部的频率区域上杂乱无章的。我们知道白色光是由相位杂乱的各种颜色的光组合而成,所以将这种杂乱无章的信号称为白噪声。

上述即有相同点也有不同点的信号 δ 函数和白噪声都是在信号分析中有重要作用的信号。

本章要点

(1) 傅里叶变换是对非周期的信号、孤立波等一般的信号的频谱分析方法,可将其定义如下

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

傅里叶变换 $F(\omega)$ 对应于在周期信号傅里叶级数展开中的复傅里叶系数 C_k 。 C_k 在 $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 处具有线频谱, $F(\omega)$ 是关于 ω 的连续频谱。

(2) 信号在时间域的功率与在频率域的功率相等。即在傅里叶变换中帕斯瓦尔定理也成立。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

(3) δ 函数和白噪声都包含所有的频谱分量,但相位却完全不同。即两者都是振幅频谱在全部的频率区域上相同,但 δ 函数的相位频谱为0,而白噪声的相位频谱是随机的。

(4) 模拟信号 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 处的采样 $f(t_0)$,可用 δ 函数得到 $f(t_0)$,表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

◆ ◇ 练习题 ◇ ◆

[1] 试用图表示 $\cos \omega_0 t$ 的频谱。并表示 $\cos\{\omega_0(t - \tau)\}$ 的傅里叶变换。

[2] $f(t)$ 的傅里叶变换用 $F(\omega)$ 表示, 试证明 $f(t)$ 的微分的傅里叶变换为 $j\omega F(\omega)$ 。

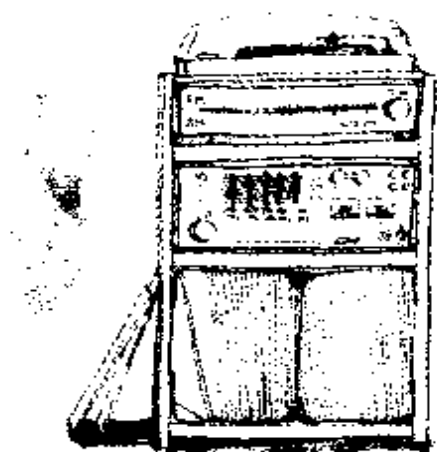
[3] 实函数 $f(t)$ 可以用偶函数 $f_1(t)$ 和奇函数 $f_2(t)$ 的和来表示

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

试用 $f(t)$ 分别表示 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 。若将 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的傅里叶变换分别表示为 $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$, 试求 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$ 的实部, 虚部和 $F_1(\omega)$ 及 $F_2(\omega)$ 的关系。

第 8 章

线性系统的分析



8.1 线性系统分析的探讨

我们在利用信号处理技术分析某物理系统时,经常将信号流表示成如图 8.1 形式的框图。即将信号 $x(t)$ 输入可以看作是黑匣子的某系统时,输入信号与输出信号的关系。一般,我们分析的目标是黑匣子,即分析清楚系统的特性。在本章中将考察分析这种系统的方法。

首先,我们处理的系统是以线性作为前提的。所谓线性是指当输入信号为 $x_1(t)$ 时,输出信号为 $y_1(t)$; 当输入信号为 $x_2(t)$ 时,输出信号为 $y_2(t)$ 。相应输入信号

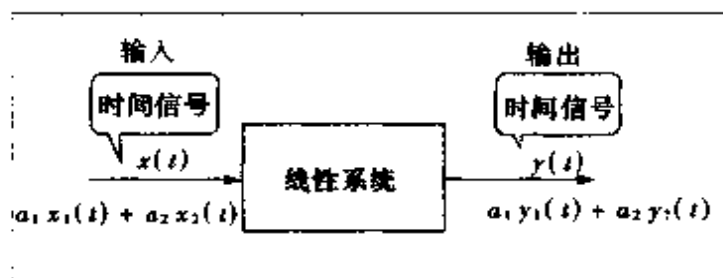


图 8.1 线性系统

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$$

输出信号为

$$a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

线性系统遵从叠加原理(图 8.1)。

音频放大器是将音响信号增幅、变换的装置,可以认为它是线性系统。用音量旋钮改变增幅度,用音质(音色?)旋钮改变频率特性。“当能够测定出输入信号和输出信号时,如何来表达放大器的特性”是线性系统分析的一个问题。为解决此问题,我们必须知道输入和输出信号与线性系统是如何联系起来的。

上面的例也许有点过于简单。我们以语音辨识为例来看一个稍微复杂的例子。所谓语音辨识就是以计算机来代替人,用计算机来识别发出的声音的含义。发声时,作为音源声带的振动是恒定的。那么,究竟人怎样使声音发生变化的呢?这是由发音结构即从喉部到唇部的声道的形状及形状的改变所引起的。以恒定周期振动的空气波根据声道断面的变化,通过在声道中复杂地反射后从口中以声音的形式发出(图 8.3)。因此,只要知道声带的振动频率和声道的形状,就可以辨识出所发的声音,这是线性问题讨论的一种例子,而且是相当高级的模式识别问题。虽然如此,要解决这样的问题,实际上也是将系统的全部画成如图 8.1 的框图,由此开始对系统进行分析。不仅对声音问题,对机械的振动的分析、电信号的分析、以及各种物理系统的分析,只要可用像图 8.1 那样的表达系统,就可能用同样的分析方法来求解问题。

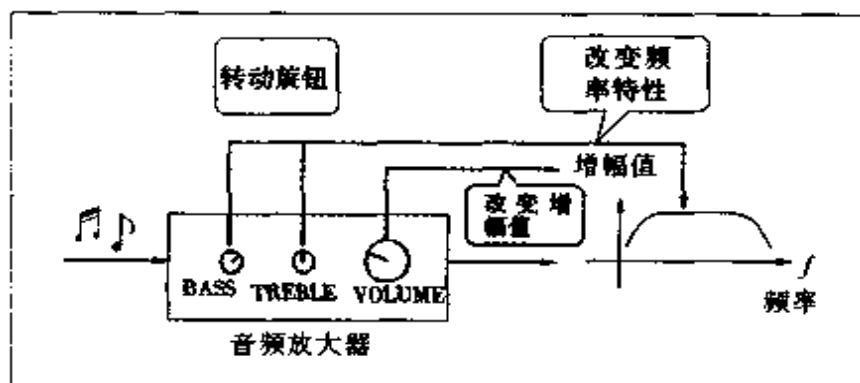


图 8.2 音频放大器也是线性系统

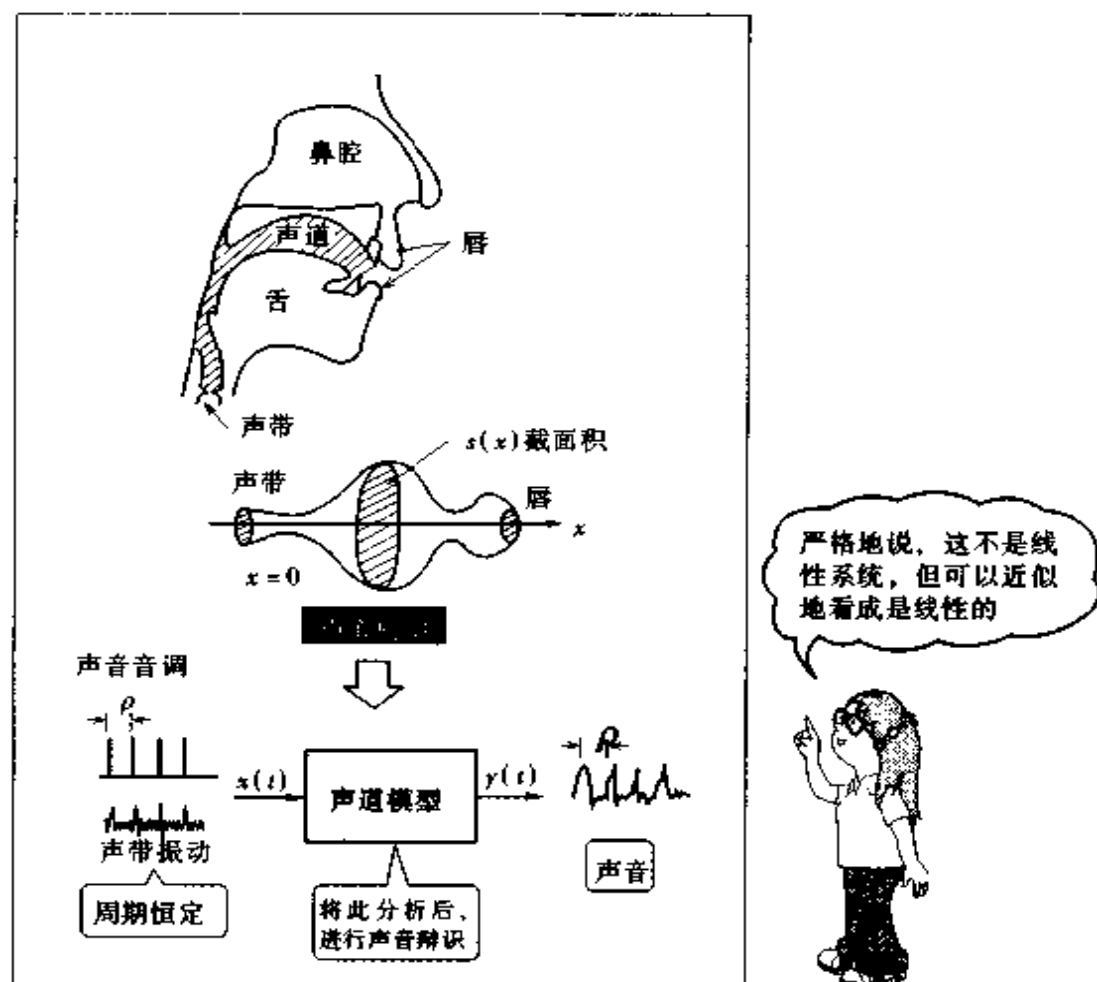


图 8.3 声音发生的模型

8.2 输入和输出信号的关系

那么，线性系统的输入信号和输出信号间的关系究竟如何表示呢？至少用简单的加法和乘法是不行的。解复杂的问题时首先要将对象分解到能够理解的详细程度，这是科学的讨论的原则。在这里首先将输入信号分解，然后分别对分解后的各个部分的响应进行考察。

输入信号如图 8.4 所示，可分解为多个细长的长方形脉冲信号。在此系统上加上高度为 1 宽度为 Δt 的方形脉冲。将此信号表示为

$$\tilde{s}(t) = \begin{cases} 1: & 0 \leq t \leq \Delta t \\ 0: & \text{其以外的区间} \end{cases}$$

设对应的响应为(图 8.5)

$$\tilde{h}(t) \quad (t \geq 0)$$

在时刻 $t = t_0$ 处将高度为 $x(t_0)$ 、宽度为 Δt 的方形脉冲加入此系统(图 8.6)。由于输入信号是 $\tilde{s}(t - t_0)$ 的 $x(t_0)$ 倍, 根据线性系统的性质, 其输出也必然是 $\tilde{h}(t - t_0)$ 的 $x(t_0)$ 倍, 输出信号可表示成 $x(t_0)\tilde{h}(t - t_0)$ 。接下来, 若在 $t = t_1$ 处加上高度为 $x(t_1)$ 的方形脉冲信号后输出信号如何表示呢? 由于输入信号只延迟了时间 t_1 , 因此, 输入可表示为

$$x(t_1)\tilde{s}(t - t_1)$$

而输出也延迟了时间 t_1 , 其大小是 $\tilde{h}(t - t_1)$ 的 $x(t_1)$ 倍, 可表示为

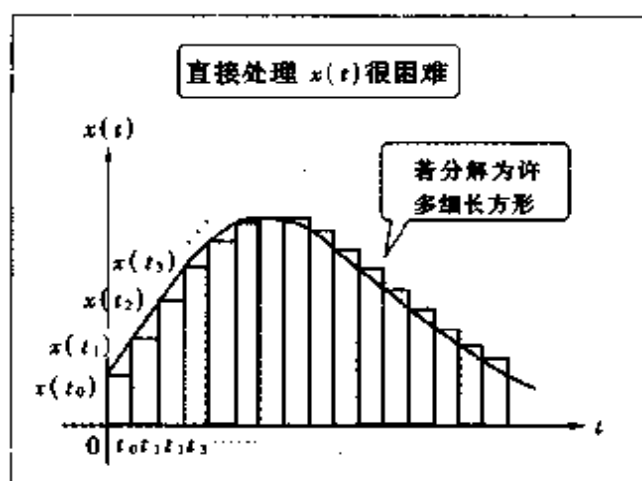


图 8.4 分解到能够清楚表示系统的程度

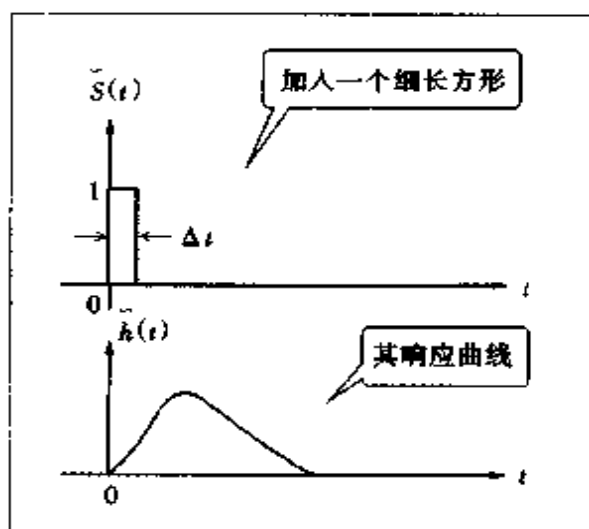


图 8.5 若考虑为细长矩形

$$x(t_1)\bar{h}(t-t_1)$$

以此类推, 对 t_1 以后的 $t = t_2, t_3, \dots$ 也同样, 若将它们归纳起来, 能写成下表(图 8.6)

t	输入	输出
t_0	$x(t_0)\bar{s}(t-t_0)$	$x(t_0)\bar{h}(t-t_0)$
t_1	$x(t_1)\bar{s}(t-t_1)$	$x(t_1)\bar{h}(t-t_1)$
t_2	$x(t_2)\bar{s}(t-t_2)$	$x(t_2)\bar{h}(t-t_2)$
t_3	$x(t_3)\bar{s}(t-t_3)$	$x(t_3)\bar{h}(t-t_3)$
\vdots	\vdots	\vdots

输入信号可近似表示为各个细长方形的和。

$$x(t) \approx \sum_{i=0}^{\infty} x(t_i)\bar{s}(t-t_i) \quad (8.1)$$

根据线性系统的定义, 此系统必然满足叠加原理。因此, 将每个细长方形的输入脉冲所得到的响应加到一起, 结果可得到对应输入信号全部的响应曲线。即响应曲线可以近似地表示为

$$y(t) \approx \sum_{i=0}^{\infty} x(t_i)\bar{h}(t-t_i) \quad (8.2)$$

在这里由于得到的响应曲线的表达式是将输入信号分解为细长长方形得到的, 因此对于连续信号的表达式可由将细长方形的宽度取无限小而得到。这可用积分的形式表示。用积分变量 τ 代替 t_i 进行下面的对应替换

$$x(t_i) \rightarrow x(\tau) \quad \bar{h}(t-t_i) \rightarrow h(t-\tau)$$

可知, 输入为 $x(t)$ 系统的输出 $y(t)$ 可表达为

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (8.3)$$

这是将线性系统的输入和输出联系起来的重要关系式。

称上式为 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的卷积(convolution), 或摺叠积分。卷积经常用记号简写为

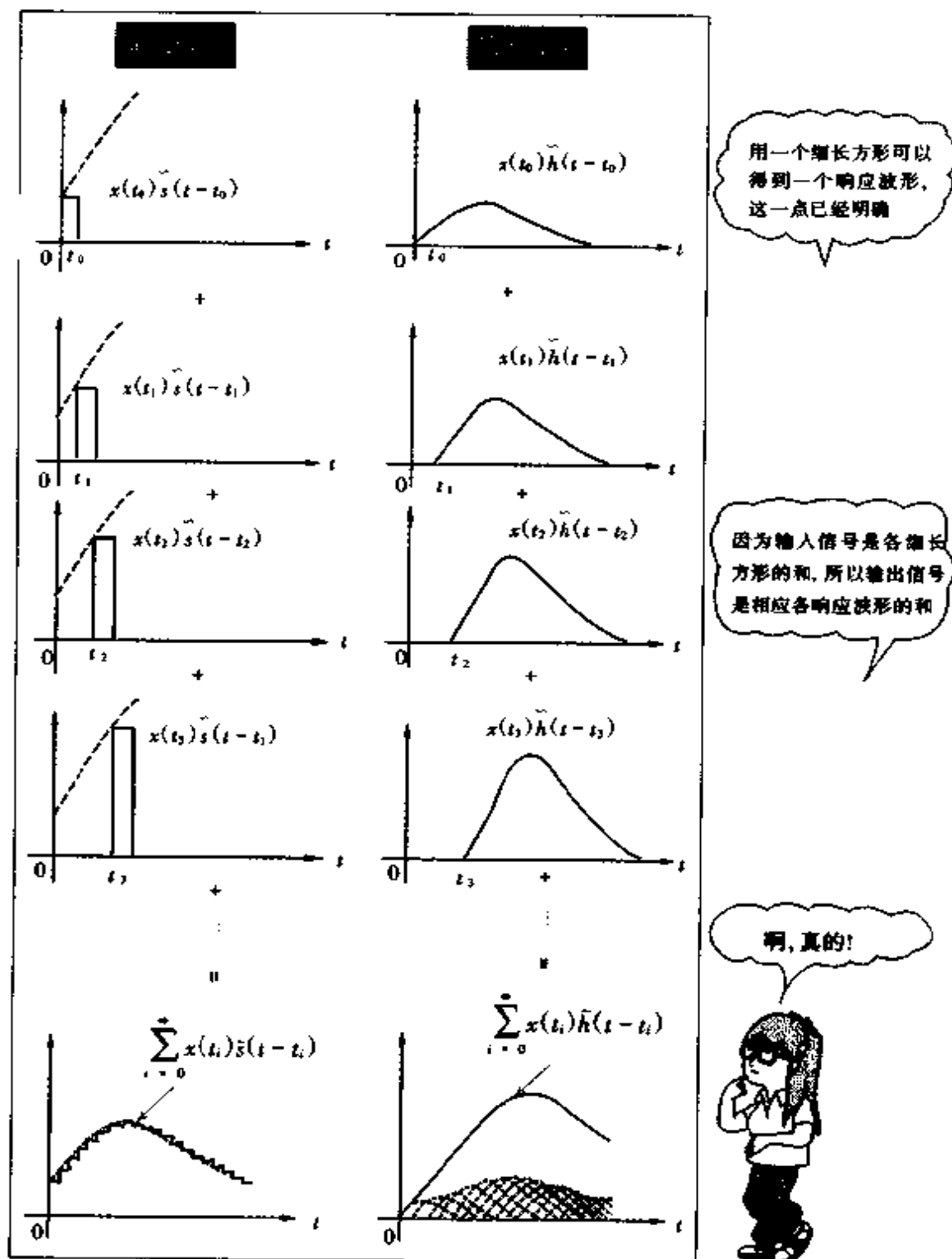


图 8.6 输入信号的和与输出信号的和

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)} \quad (8.4)$$

无须证明也可知 $x(t)$ 和 $h(t)$ 符合交换律, 可表示为

$$\boxed{y(t) = h(t) * x(t)} \quad (8.5)$$

这里需要注意的是卷积的表达式 (8.3) 与互相关函数的表达式 (4.5) 除变量和符号不同外是很相似的, 但表达式的含义是完全不同的。

8.3 脉冲响应

我们已经知道了线性系统的输入 $x(t)$ 与输出 $f(t)$ 可用卷积的形式表示, 但还没有讨论式中出现的 $h(t)$ 。实际上, 此 $h(t)$ 才是我们想要分析的表达线性系统特征的函数。所以下面来讨论这个问题。

在导出卷积时, 将高度为 1、宽度为 Δt 的信号 $\tilde{s}(t)$ 的响应用 $\tilde{h}(t)$ 表示。由于 $\tilde{s}(t)$ 是面积为 Δt 的方形脉冲, 则 $\tilde{s}(t)/\Delta t$ 是面积为 1 的方形脉冲。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 明显地变成了 δ 函数的定义 (图 8.7)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\tilde{s}(t)}{\Delta t} = \delta(t)$$

因为对于 $\tilde{s}(t)$ 系统的响应是 $\tilde{h}(t)$, 所以系统对 $s(t)$ 的响应可写成

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\tilde{h}(t)}{\Delta t}$$

即在系统上加上单位脉冲时的响应是表示此系统的函数 $h(t)$ 。因此, 将 $h(t)$ 称为脉冲响应。

通过加入脉冲来对系统进行分析, 这是我们经常采用的分析方法。例如敲击茶碗来判断有无裂缝、敲击西瓜通过声音来判断西瓜是否成熟都是应用脉冲响应的例子。医生咚咚地敲击患者胸部进行诊断也是利用了胸的脉冲响应。

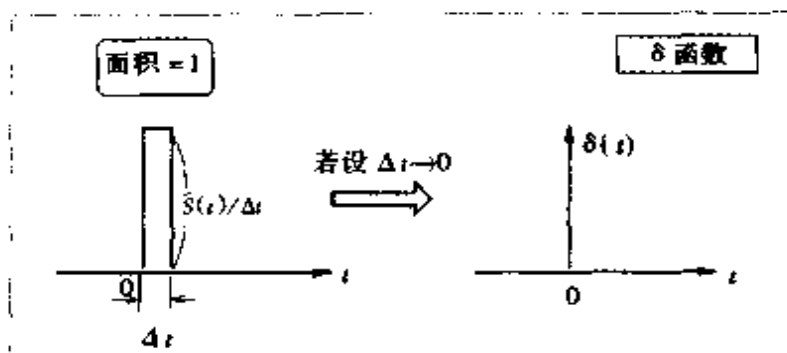
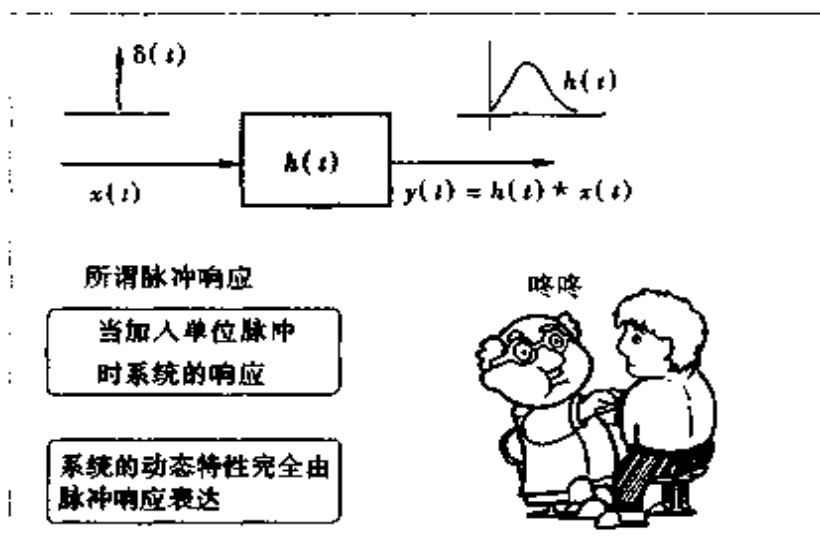
图 8.7 δ 函数

图 8.8 脉冲响应

8.4 频率域上的系统表达

卷积是将线性系统的响应在时间域上的表达。那么在频率域如何表达输入与输出之间的关系呢？分别将输入 $x(t)$ 和输出信号 $y(t)$ 的傅里叶变换表示为

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$$

而且将脉冲响应的傅里叶变换表示为

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$$

$H(\omega)$ 表示系统的频率特性, 称为传递函数。这些函数到底有什么样的关系呢？首先给出结论, 其表达式为

$$\boxed{Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)} \quad (8.6)$$

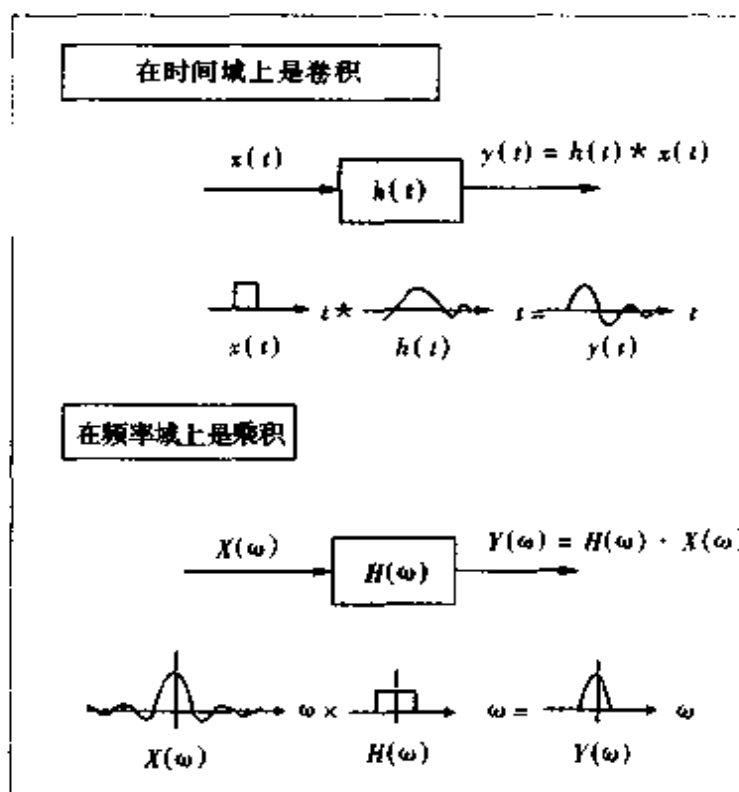


图 8.9 线性系统的表达

即在时间域用卷积表达的线性系统的输入和输出间的关系在频率域用积的形式表达(图 8.9)。这个关系非常重要,请将其作为傅里叶变换的一个重要的性质记住。

下面我们来证明式 (8.6)。首先对卷积的表达式两边取傅里叶变换,卷积的表达式为

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

取傅里叶变换后可表示为

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \mathcal{F}\{h(t) * x(t)\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right] e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

在此改变积分的次序,同时将 τ 的积分区间改写成一般的 $[-\infty, \infty]$ 。得出

$$\begin{aligned}
 Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau
 \end{aligned}$$

在这里, 设 $t - \tau = u$, 由 $dt = du$, 可得

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\omega u} du \right] e^{-j\omega\tau} d\tau$$

由于上式括号中的部分正好是 $X(\omega)$, 所以

$$\begin{aligned}
 Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= X(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = X(\omega) \cdot H(\omega)
 \end{aligned}$$

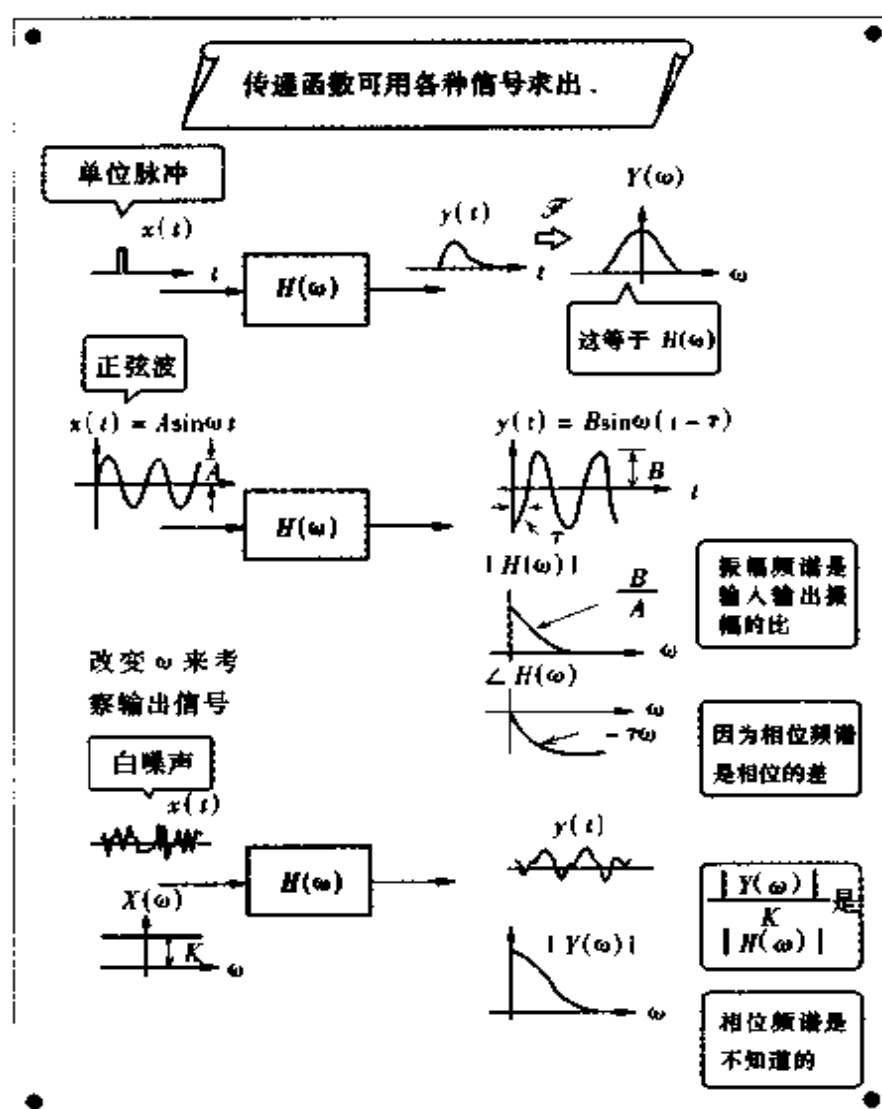


图 8.10 传递函数的求法(使用什么方法要根据对象)

$X(\omega)$ 和 $H(\omega)$ 的顺序也是可以交换的, 即

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

因此, 卷积的傅里叶变换可以表示为

$$\mathcal{F}\{h(t) * x(t)\} = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

由于 δ 函数的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$$

所以当输入为单位脉冲时, 响应的傅里叶变换可表达为

$$Y(\omega) = H(\omega)$$

即系统的响应为传递函数, 这种关系也可以从脉冲响应的性质中得到。

考察线性系统的频率特性, 即传递函数时, 可以用将脉冲响应 $h(t)$ 进行傅里叶变换的方法, 也可以使用将正弦波作为输入信号进行傅里叶变换的方法。即在改变输入信号频率的同时测量输入信号和输出信号的振幅的比, 可以得到系统的振幅频谱, 而考察相对输入信号的输出信号的相位差可知相位频谱。

而且使用白噪声也可以测定系统的振幅频谱 (功率频谱) 的特性。其原因说明如下。系统函数的频谱可以表示成

$$|H(\omega)| = \frac{|Y(\omega)|}{|X(\omega)|}$$

我们在前面已经看到了白噪声, 因为其振幅频谱在所有频率上均为常数, 所以, 白噪声作为输入信号时, 输入的振幅是与 ω 无关的常数, 即

$$|X(\omega)| = K$$

因此, 对白噪声的输出信号的频率频谱 $|Y(\omega)|$ 可直接用下式测定, 就得到了振幅频谱。

$$|H(\omega)| = \frac{|Y(\omega)|}{K}$$

好了,到此信号处理的
基础已经掌握了



以后该向应用
问题挑战了

本章要点

(1) 将输入和输出具有线性关系的系统称为线性系统,对应于系统的单位脉冲输入的输出称为脉冲响应。

(2) 输出 $y(t)$ 是输入 $x(t)$ 和脉冲响应 $h(t)$ 的卷积,可表示为下式*

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_0^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

(3) 在时间域用卷积表达的输出和输入的关系,在频率域可用积的形式表示。即若将输入信号,输出信号,系统的脉冲响应的傅里叶变换分别表示为 $X(\omega)$, $Y(\omega)$, $H(\omega)$, 则

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

◆ ◇ 练习题 ◇ ◆

[1] 用下式表示的函数称为单位方形脉冲

$$p(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leq 1) \\ 0 & (|t| > 1) \end{cases}$$

若线性系统的脉冲响应为 $h(t)$, 且 $h(t) = p(t)$

(1) 试求系统的传递函数 $H(\omega)$ 。

(2) 若在此线性系统上输入单位方形脉冲, 输出为 $y(t)$, 试求输出的傅里叶变换。

* 原书下式中误将“ h ”排成了“ y ”。——译者注

[2] 试证明两个信号 $f(t)$, $g(t)$ 的积 $f(t)g(t)$ 的傅里叶变换是分别对两个函数进行傅里叶变换的卷积。

[3] 有一系统是由两个脉冲响应表示为 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 的线性系统的串联。当在其上输入 $x(t)$, 试将其输出 $y(t)$ 在时间域和频率域表示出来。

练习题答案

第 1 章

[1] 因为像素的总数是 512×512 , 每 1 像素 8 位 ($256 = 2^8$), 总位数为 $262144 \times 8 = 2097152$, 而 8 位为 1 个单位, 称为字节, 故为 262144 (约 262k) 字节。

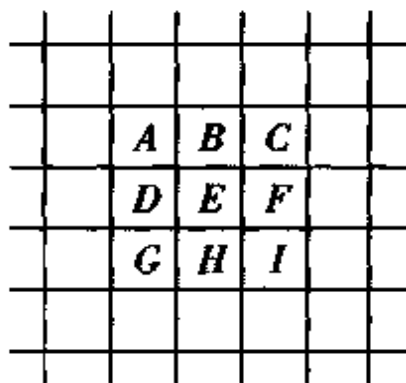
[2] 用低通滤波器从声音信号中将 5kHz 以上的频率分量过滤掉, 用 10kHz 的频率进行采样。

[3] MD 是用被称为 ATRAC 的数字信号处理技术将信息压缩。所以尽管它的记录面积是 CD 的 $1/4$, 但播放时间和 CD 相同, 是 75 分钟。

第 2 章

[1] 取以要处理的像素为中心的正方形窗口, 再取窗口内的像素的灰度的平均值作为像素的值。并对整个画面的像素如法炮制。如答案图 1 所示, 这是以要处理的像素为中心取 3×3 像素的窗口的情况, 将中心像素的移动平均定义为

$$\frac{1}{9}(A+B+C+D+E+F+G+H+I)$$



答案图 1

[2] 在文字的轮廓区域上灰度的变化剧烈。即微分值(梯度)

大。因此将图像微分,并抽出微分绝对值大的地方。例如:微分的方法可以同样的取窗口,取出相对中心的前后和左右的像素的灰度差。在 3×3 像素的窗口可以将中心像素的微分值定义为

$$|C+F+I-(A+D+G)| + |A+B+C-(G+H+I)|$$

第 3 章

[1] 距离是 $\sqrt{6}$, 内积为 62, 相关函数为 0.98, g 方向的单位向量是 $g' = g / \|g\| = (3/7, -2/7, 6/7)$, f 在 g 方向的分量是 $\langle f, g' \rangle$ 。结果为 8.86。

[2] 略。

[3] 说明各个函数的模为 1, 函数的所有组合的内积是 0。

第 4 章

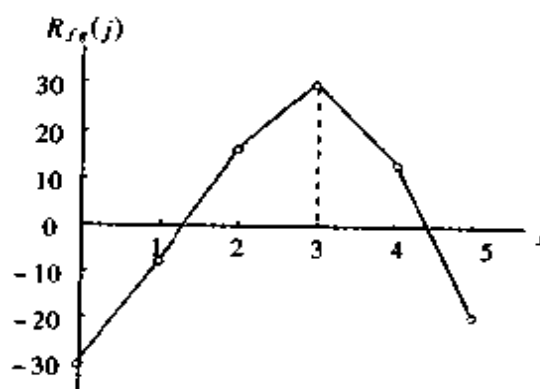
[1] 例如,从扬声器发出声音,用位置不同 2 点的麦克风输入声音。计算出输入信号间的互相关函数,求出波峰。从而可知声音传递的时间差 τ ,可计算出声速(参照图 4.5)。

[2] 互相关函数如答案图 2 所示。当 $j=3$ 时,即相差 6 个月时相关最大。由此可知, F 市为北半球型, G 市为南半球型的气候变化。

[3]

$$\begin{aligned} R_f(-\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)f(t-\tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t-\tau)f(t)dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{0-\tau}^{T-\tau} f(t)f(t+\tau)dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)f(t+\tau)dt \end{aligned}$$

从而自相关函数是偶函数,并在 $\tau=0$ 处左右对称。



答案图 2

第 5 章

[1] 对于绝对值,有

$$\begin{aligned}
 |z_1 \cdot z_2|^2 &= |(\alpha_1 + j\beta_1)(\alpha_2 + j\beta_2)|^2 \\
 &= |\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 + j(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)|^2 \\
 &= (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)^2 + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)^2 \\
 &= \alpha_1^2\alpha_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \beta_1^2\alpha_2^2 \\
 &= (\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2
 \end{aligned}$$

所以

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

对于幅角,有

$$\begin{aligned}
 \tan\{\angle(z_1 \cdot z_2)\} &= \tan[\angle\{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 + j(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)\}] \\
 &= \frac{\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}
 \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}
 \tan(\angle z_1 + \angle z_2) &= \frac{\tan \angle z_1 + \tan \angle z_2}{1 - \tan \angle z_1 \tan \angle z_2} = \frac{\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2}}{1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{\beta_2}{\alpha_2}} \\
 &= \frac{\frac{\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}}{\frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}} = \frac{\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}
 \end{aligned}$$

所以

$$\angle(z_1 \cdot z_2) = \angle z_1 + \angle z_2$$

[2] 由于函数 $f(t) = |t|$ 是偶函数, 复傅里叶系数的虚部全部为 0 (参见 5.4.2 的 MEMO)。傅里叶系数是

$$C_0 = \frac{\pi}{2}, \quad C_k = -\frac{(-1)^{k+1} + 1}{\pi k^2}$$

$f(t)$ 可与例题同样展开。

[3] 因为 $f(t)|\cos t|$ 的周期为 π

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t) e^{-j2kt} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^t + e^{-t}}{2} e^{-j2kt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{j(1-2k)t} + e^{-j(1+2k)t}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{e^{j(1-2k)t}}{j(1-2k)} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[\frac{e^{-j(1+2k)t}}{-j(1+2k)} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) \\ &= (-1)^{k+1} \frac{2}{(4k^2 - 1)\pi} \end{aligned}$$

因为 $f(t)$ 是偶函数, C_k 的虚部为 0。所以

$$|\cos t| = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} e^{j2kt}$$

第 6 章

[1] 设 $\Delta\omega = 2\pi/8$, $f_i = \cos(3\Delta\omega i)$, ($i=0, 1, 2, \dots, 7$) 的 DFT, 由式(6.5)得出

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{8} \sum_{i=0}^7 \cos(3\Delta\omega i) e^{-j\Delta\omega ki} = \frac{1}{8 \times 2} \sum_{i=0}^7 (e^{j3\Delta\omega i} + e^{-j3\Delta\omega i}) e^{-j\Delta\omega ki} \\ &= \frac{1}{16} \sum_{i=0}^7 (e^{j(3-k)\Delta\omega i} + e^{-j(3+k)\Delta\omega i}) = \begin{cases} 1 & (k=3) \\ 0 & (k \neq 3) \end{cases} \end{aligned}$$

[2] (1) 可分析信号的最高频率是采样频率的 $1/2$, 即 500Hz。采样间隔是 1ms, 由于采样点为 512 个, 所以基波周期为 0.512 秒。频率为 1.95Hz。

(2) 有效的傅里叶系数是 C_0, C_1, \dots, C_{511} , 而其中 C_{257} ,

C_{258}, \dots, C_{511} 表示负的阶数的频谱。所以

$$C_k = \begin{cases} X(k+1) + jY(k+1) & (k=0, 1, \dots, K) \\ X(N+1+k) + jY(N+1+k) & (k=-1, -2, \dots, -(K-1)) \end{cases}$$

这里 $K=256$ 。

[3] 若取式(6.3)的左边与 f 的内积时

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |f_i|^2$$

若取右边与 f 的内积

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} C_k e_k, \sum_{l=0}^{N-1} C_l e_l \right\rangle &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \langle C_k e_k, C_l e_l \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} C_k \bar{C}_l \langle e_k, e_l \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} C_k \bar{C}_l \delta_{kl} = \sum_{k=0}^{N-1} |C_k|^2 \end{aligned}$$

所以,在 DFT 中帕斯瓦尔定理也成立。

[4]

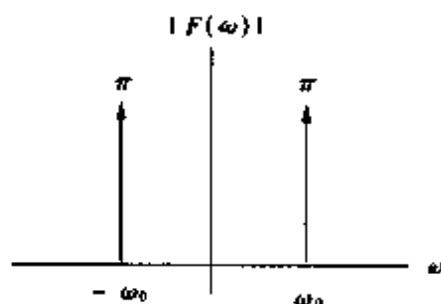
原序号		位变换后序号	
10 进制数	2 进制数	2 进制数	10 进制数
0	0000	0000	0
1	0001	1000	8
2	0010	0100	4
3	0011	1100	12
4	0100	0010	2
5	0101	1010	10
6	0110	0110	6
7	0111	1110	14
8	1000	0001	1
9	1001	1001	9
10	1010	0101	5
11	1011	1101	13
12	1100	0011	3
13	1101	1011	11
14	1110	0111	7
15	1111	1111	15

第 7 章

[1] $\cos \omega_0 t$ 仅在 $\omega = \pm \omega_0$ 处具有频谱, 而且是偶函数, 傅里叶变换是实数。若用算式表示,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ 2\pi \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi \delta(\omega + \omega_0) \} \\ &= \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]\end{aligned}$$

振幅频谱如答案图 3 所示。相位频谱在所有的 ω 上均为 0。而且依式(7.4)有 $\mathcal{F}\{\cos \omega_0(t + \tau)\} = e^{j\omega\tau} [\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)]$, 其振幅频谱不变, 相位频谱为 $\omega\tau$ ($\omega = \pm \omega_0$)。



答案图 3

[2]

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

两边对 t 微分, 有

$$\begin{aligned}\frac{df(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \frac{de^{j\omega t}}{dt} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{j\omega F(\omega)\} e^{j\omega t} d\omega\end{aligned}$$

即, $j\omega F(\omega)$ 的傅里叶变换是 $df(t)/dt$ 。这样在时间域的微分与在频率域乘上 $j\omega$ 相同。同样, 在时间域的积分与在频率域除以 $j\omega$

相同。

[3] 因为奇函数,偶函数的定义

$$\begin{aligned} f(-t) &= f_1(-t) + f_2(-t) \\ &= f_1(t) - f_2(t) \\ f_1(t) &= \frac{1}{2} \{f(t) + f(-t)\}, \quad f_2(t) = \frac{1}{2} \{f(t) - f(-t)\} \end{aligned}$$

偶函数的傅里叶变换为实数,奇函数的傅里叶变换为复数(参见 5.4.2 的 MEMO)。因此

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \mathcal{F}\{f_1(t)\} + \mathcal{F}\{f_2(t)\} \\ &= F_1(\omega) + F_2(\omega) \end{aligned}$$

所以

$$F_1(\omega) = \operatorname{Re}\{F(\omega)\}, F_2(\omega) = j\operatorname{Im}\{F(\omega)\}$$

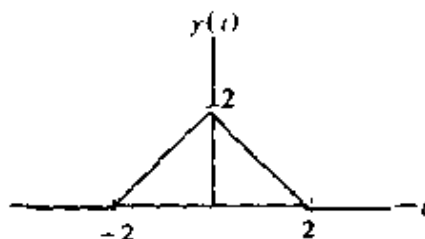
第 8 章

[1] (1)

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \mathcal{F}\{p(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 1 \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{\sin \omega}{2\pi\omega} \end{aligned}$$

(2) $y(t)$ 如答案图 4 所示。求傅里叶变换, 设 $p(t)$ 的傅里叶变换为 $P(\omega)$

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot P(\omega) = P^2(\omega) = \left(\frac{\sin \omega}{2\pi\omega}\right)^2$$



答案图 4

[2] 由傅里叶变换的定义得出