上海交通大学2012-2013学年第一学期《矩阵理论》参考答案

1.选择题与填空题不给中间分；

2. 客观题第11题第一小问8分，第二小问7分，其余各题每个小问均5分。可酌情给中间分。

一. 单项选择题：A,B,C,D,D

二. 填空题:

6. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 7.$(2-c,c)^T, c$ 为任意常数; 8. $(4 \quad \pm 3)^T$;

9. $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]\left[\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right]$ 10. $diag(1-\sin 1, 1-\sin 1, 1)$

三. 计算题(每题 15 分, 共 60 分)

11. 设 $V=\mathbb{R}^3$ 是实线性空间. 定义 V 上的线性变换 σ 如下:

$$\sigma:(x_1,x_2,x_3)^T \mapsto (x_2,-2x_2+2x_3,x_2-x_3)^T, \quad \forall (x_1,x_2,x_3)^T \in V.$$

(1) 求 σ 的核空间 $\mathrm{Ker}(\sigma)$ 与像空间 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 的各一组基;

(2) 证明或否定 $V=\mathrm{Ker}(\sigma)\oplus\mathrm{Im}(\sigma)$.

解：(1) 设$\sigma(x_1,x_2,x_3)^T=0$, 则 $x_2=x_3=0$, 故 $\mathrm{Ker}(\sigma)=\{(x,0,0)^T \mid x\in\mathbb{R}\}$, 其一组基为$(1,0,0)^T$.

$\mathrm{Im}(\sigma)=\{x_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$, 故 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 的一组基为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(2) 因为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, 故$\mathrm{Ker}(\sigma)=\mathrm{Ker}(\sigma)\cap\mathrm{Im}(\sigma)\neq 0$, 因此 $V=\mathrm{Ker}(\sigma)\oplus\mathrm{Im}(\sigma)$不成立.

12. 设 $V=\mathbb{R}^{n\times n}$ 是全体 n 阶实矩阵构成的实线性空间. 对任意$A,B\in V$, 定义

$$(A,B)=tr(A^TB).$$

(1) 证明上面定义的函数$(\bullet,\bullet)$是 V 上的一个内积;

(2) 证明或否定：全体基本矩阵$E_{ij},1\le i,j\le n$ 构成V的一个标准正交基;

(3) 设 $U=\{A\in V\,|\,A=aI,a\in\mathbb{R}\}$, 求 U 的正交补 $U^\perp$ 的一个标准正交基.

解: (1) 正定性：对任意$A\in V$, A^TA半正定，故$tr(A^TA)\ge 0$. 若$(A,A)=tr(A^TA)=0$, 故$A=0$.

对称性: $(A,B)=tr(A^TB)=tr((A^TB)^T)=tr(B^TA)=(B,A)$.

双线线性: $(xA+yA',B)=tr((xA+yA')^TB)=tr(xA^T+yA'^T)B=xtr(A^TB)+ytr(A'^TB)=x(A,B)+y(A',B)$. 故$(\bullet,\bullet)$ 是 V 上的一个内积.

(2) $(E_{ij},E_{kl})=tr(E_{ij}^TE_{kl})=tr(E_{ji}E_{kl})=tr(\delta_{ik}E_{jl})$. 因此，如果$i=k,j=l$, 则 $(E_{ij},E_{kl})=1$；否则，$(E_{ij},E_{kl})=0$. 即$E_{ij},1\le i,j\le n$ 构成V的一个标准正交基.

(3) 由 (2) 易知，$U^\perp=\{A\in V\,|\,tr(A)=0\}$. 故 $E_{ij}\,(i\ne j),E_{11}-E_{ii},2\le i\le n$ 是 $U^\perp$ 的一组基. 显然 $E_{ij}\,(i\ne j)$, 是标准正交组且与诸 $E_{11}-E_{ii}$ 均正交，因此只需将 $E_{11}-E_{ii}$, $1\le i\le n$ 标准正交化即可. 可得 $U^\perp$的一个标准正交基为$E_{ij}\,(i\ne j),\beta_k=\sqrt{\dfrac{k}{k+1}}[\dfrac{1}{k}(\sum_{i=1}^{k}E_{ii})-E_{k+1,k+1}],k=1,2,...,n-1$.

13. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(1) 写出 A 的 Jordan 标准形 J (请将 Jordan 块按阶数从大到小排列);

(2) 求 $\int_0^t e^{Js}ds$;　(3) 求定解问题 $x'(t)=Jx(t)+(0,0,1)^T,x(0)=(1\ 0\ 0)^T$ 的解.

解: (1) A 的最小多项式为 $\lambda(\lambda-1)^2$, 因此 Jordan 标准形 $J=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\oplus(0)$.

(2) 因为 $e^{Js}=e^s\begin{pmatrix}1&s\\0&1\end{pmatrix}\oplus(1)$, 故

$$\int_0^t e^{Js}ds=\begin{pmatrix}e^t-1&te^t-e^t+1\\0&e^t-1\end{pmatrix}\oplus(t).$$

(3) 因为$e^{-Js}=e^{-s}e^{-sN}\oplus(1)=e^{-s}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-s)^nN^n}{n!}\oplus(1)=e^{-s}(I-sN)\oplus(1)$. 因此$e^{-Js}=e^{-s}\begin{pmatrix}1&-s\\0&1\end{pmatrix}\oplus(1)$. 所以$e^{-Js}(0,0,1)^T=(0,0,1)^T$.

故定解问题的解为

$$x(t)=e^{Jt}x(0)+e^{Jt}\int_0^t e^{-Js}(0,0,1)^Tds=(e^t,0,0)^T+(0,0,t)^T=(e^t,0,t)^T.$$

14. 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的秩为 $r > 0$, A 的奇异值分解为 $A = U\mathrm{diag}(\sigma_1, ..., \sigma_r, 0, ..., 0)V^*$, U 与 V 均为酉矩阵. 设矩阵 $B = \begin{pmatrix} A & A \end{pmatrix}$.

(1) 求 BB^* 的谱分解;

(2) 求 B 的奇异值分解;

(3) 求 B^*B 的 Moore-Penrose 广义逆.

解：(1) 令 $D = \mathrm{diag}(\sigma_1, ..., \sigma_r, 0, ..., 0)$. 因为 $BB^* = 2AA^* = 2UDV^*VD^*U^* = 2UD^2U^*$, 故 BB^* 的谱分解为$BB^* = U\mathrm{diag}(2\sigma_1^2, ..., 2\sigma_r^2, 0, ..., 0)U^*$.

(2) 由(1) 可知，B 的奇异值为 $\sqrt{2}\sigma_1, ..., \sqrt{2}\sigma_r, 0, ..., 0$. 因为 $U^*AV = D$, 故 $U^*(AV \;\; AV) = (D \;\; D)$, 即 $U^*B(V \oplus V) = (D \;\; D)$. 所以

$$U^*B(V \oplus V)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{pmatrix} = (\sqrt{2}D \;\; 0)$$

令 $W = (V \oplus V)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{pmatrix}$, 则 W 是酉矩阵. 得 B 的奇异值分解为

$$B = U\mathrm{diag}(\sqrt{2}\sigma_1, ..., \sqrt{2}\sigma_r, 0, ..., 0)W^*.$$

(3) 由(2) 可得 $B^*B = W(2D^2)W^*$, 故其 Moore-Penrose 广义逆为

$$(B^*B)^\dagger = \frac{1}{2}WD^{-2}W^* = \frac{1}{2}W\mathrm{diag}(\sigma_1^{-2}, ..., \sigma_r^{-2}, 0, ..., 0)W^*.$$

四. 证明题(每题 10 分, 共 10 分)

15. 设 A, B 均为 $m \times n$ 阶复矩阵. 记 σ_A 是A的最大奇异值. 证明:

(1) $\sigma_A = \max\limits_{x\neq 0, x\in\mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max\limits_{x^*x=1} \|Ax\|_2$.

(2) $\sigma_{A+B} \le \sigma_A + \sigma_B$.

证明. (1) 设$\lambda_1^2 \ge \cdots \ge \lambda_n^2$ 是半正定矩阵 A^*A 的所有特征值, 则$\sigma_A = \lambda_1$. 设$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是属于$\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2$ 的单位正交的特征向量. 则任意$0 \neq x \in \mathbb{C}^n, x = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$, 有

$$\|Ax\|_2{}^2 = x^*A^*Ax = x^*(A^*Ax) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2|x_i|^2\alpha_i^*\alpha_i \le \lambda_1^2 x^*x$$

所以

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \le \lambda_1.$$

取$x = \alpha_1$ 可知第一个等号成立. 令$y = \frac{x}{\|x\|_2}$ 可得第二个等式.

(2) 由(1) $\sigma_{A+B} = \max\limits_{x^*x=1} \|(A+B)x\|_2 \le \max\limits_{x^*x=1} \|Ax\|_2 + \max\limits_{x^*x=1} \|Bx\|_2 \le \sigma_A + \sigma_B$.