



## 第三讲

# 傅立叶变换

## 《工程信号处理》



# 提纲

---

- 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)
- 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)
- 连续时间信号的采样及采样定理
- 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)



# 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

- 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)
- 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)
- 连续时间信号的采样及采样定理
- 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

# 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

## ■连续周期信号的傅立叶级数

■周期信号  $x(t)$ , 周期为  $T$ , 基波角频率为  $\omega_0 = 2\pi/T$ 。在满足狄氏条件时, 可展成

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

称为三角形式的傅里叶级数, 其系数

■直流分量

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

■余弦分量的幅度

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

■正弦分量的幅度

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

# 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

## ■ 连续周期信号的傅立叶级数的狄义赫利(Dirichlet)条件

- 根据高等数学的知识，我们知道，满足“狄义赫利(Dirichlet)条件”的任何周期函数可以展成“正交函数线性组合”的无穷级数--傅立叶级数
- (1) 同一个周期内 间断点的个数有限；
- (2) 同一个周期内 极大值和极小值的数目有限；
- (3) 同一个周期内 信号“绝对可积”

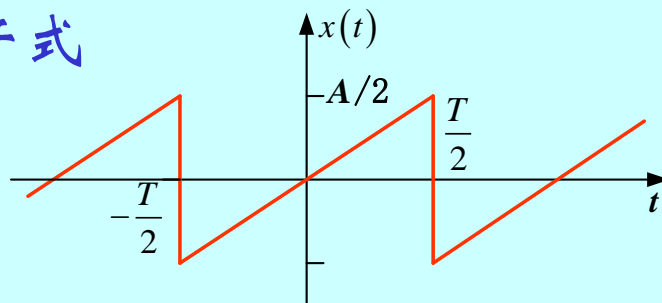
$$\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt < \infty$$

# 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

## 连续周期信号的傅立叶级数(例)

### 求周期锯齿波的傅里叶级数展开式

$$x(t) = \frac{A}{T} t \quad \left( -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \right)$$



$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{A}{T} t dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{A}{T} t \cos(n\omega_0 t) dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{A}{T} t \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{A}{n\pi} (-1)^{n+1} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(t) = 0 + \frac{A}{\pi} \sin \omega_0 t - \frac{A}{2\pi} \sin 2\omega_0 t - \dots$$

直流

基波

谐波

# 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

## ■ 用三角函数表示周期锯齿波

### ■ Matlab程序演示

$$x(t) = 0 + \frac{A}{\pi} \sin \omega_0 t - \frac{A}{2\pi} \sin 2\omega_0 t - \dots$$

### ■ 吉布斯现象 Gibbs phenomenon

- 吉布斯现象Gibbs phenomenon(又叫吉布斯效应): 将具有不连续点的周期函数(如矩形脉冲)进行傅立叶级数展开后, 选取有限项进行合成。当选取的项数越多, 在所合成的波形中出现的峰起越靠近原信号的不连续点。当选取的项数很大时, 该峰起值趋于一个常数, 大约等于总跳变值的9%。这种现象称为吉布斯现象。

# 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

## 连续周期信号的傅立叶级数—复指数形式

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta \longrightarrow \begin{aligned} a_n \cos(n\omega_0 t) &= \frac{a_n}{2} (e^{-in\omega_0 t} + e^{in\omega_0 t}) \\ b_n \sin(n\omega_0 t) &= \frac{ib_n}{2} (e^{-in\omega_0 t} - e^{in\omega_0 t}) \end{aligned}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

$$\begin{aligned} x(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \\ c_n &= c_{-n}^* = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

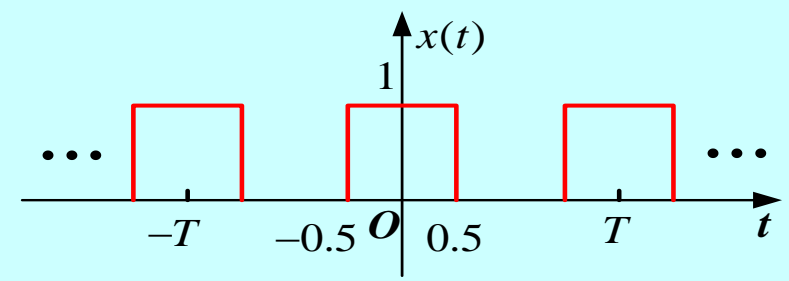


# 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

(例) 周期方波信号 $x(t)$

■ 一个周期内 $x(t)$ 表达式

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 < t < -0.5 \\ 1 & -0.5 < t < 0.5 \\ 0 & 0.5 < t < T/2 \end{cases}$$

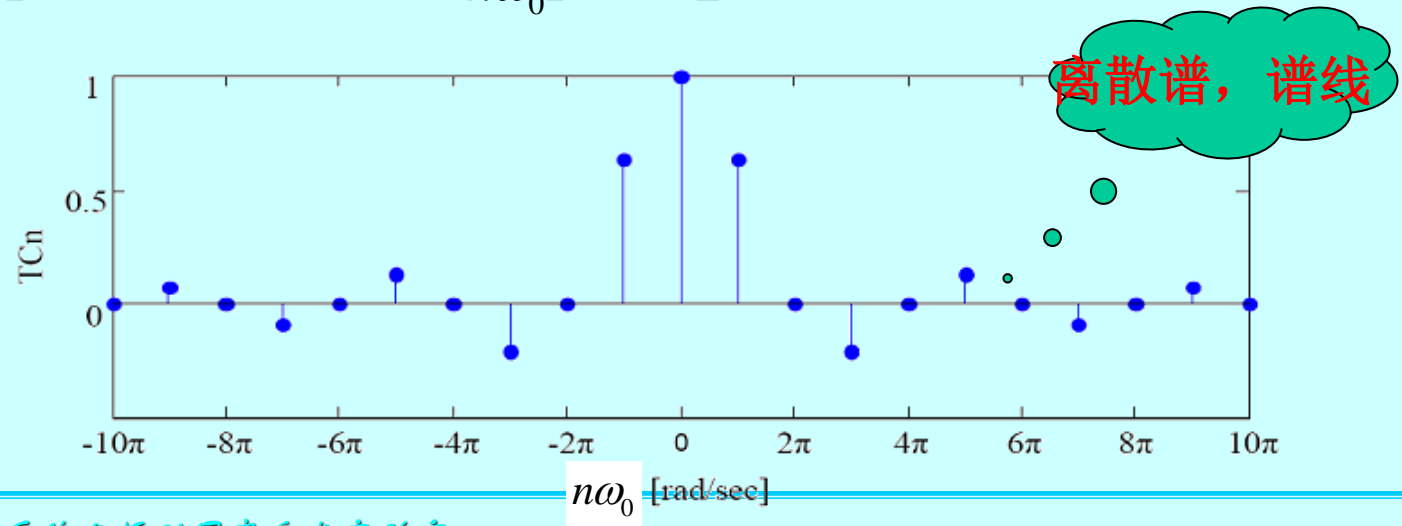


周期方波信号时域波形

$$c_{n\_square} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{2}{n\omega_0 T} \sin \frac{n\omega_0}{2} \quad (n = \dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots)$$

$$Tc_n = \frac{2}{n\omega_0} \sin \frac{n\omega_0}{2}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

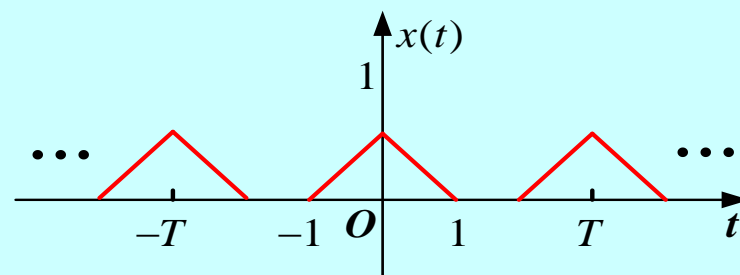


# 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

## ■ (例) 周期三角波信号 $x(t)$

### ■ 一个周期内 $x(t)$ 表达式

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 < t < -1 \\ 1 - |t| & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < T/2 \end{cases}$$



周期三角波信号时域波形

$$c_{n\_tri} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \left( \frac{2}{n\omega_0} \sin \frac{n\omega_0}{2} \right)^2 \quad (n = \dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots)$$

$$Tc_{n\_tri} = \left( Tc_{n\_square} \right)^2$$

### ■ Matlab 程序演示对比

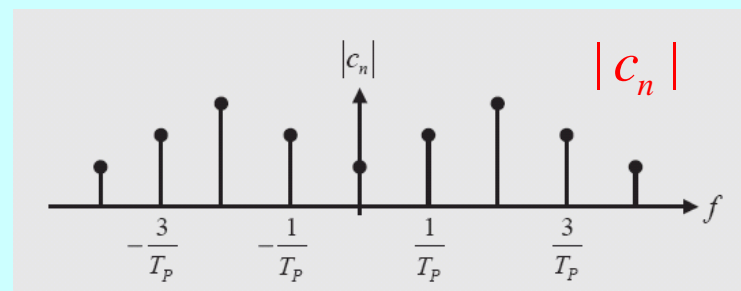
# 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

## ■ 频谱的概念

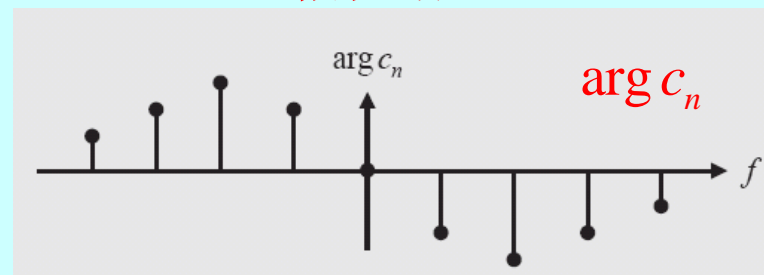
- 通过傅立叶级数的分解，一个周期信号可以看作由不同频率的简谐函数叠加而成
- $c_n$  表示信号的各个频率分量，其一般为复数，通常用幅值谱和相位谱表示
- 周期信号频谱的特点
  - 离散性，即谱线是离散的；
  - 谐波性，即谱线只出现在基波频率的整数倍上；
  - 收敛性，即谐波的幅度随着谐波次数的增高而减小

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad n \in Z$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$



幅值谱



相位谱

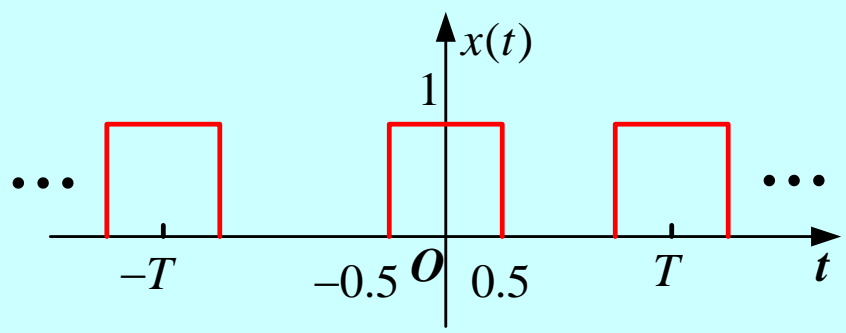


# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

- 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)
- 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)
- 连续时间信号的采样及采样定理
- 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## 周期方波信号 $x(t)$ 的分析



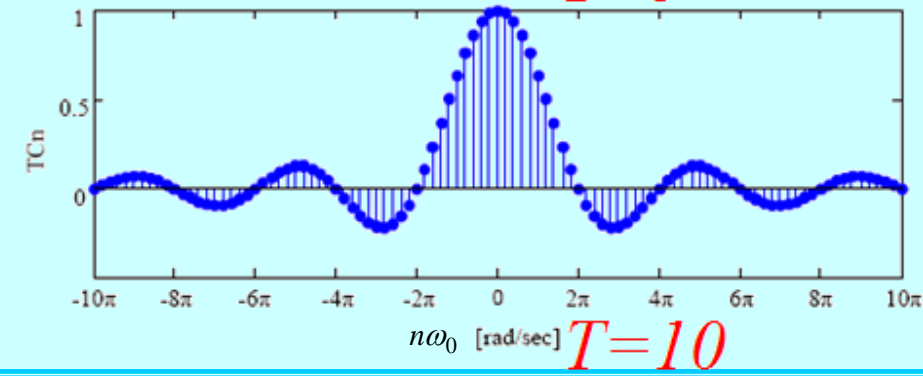
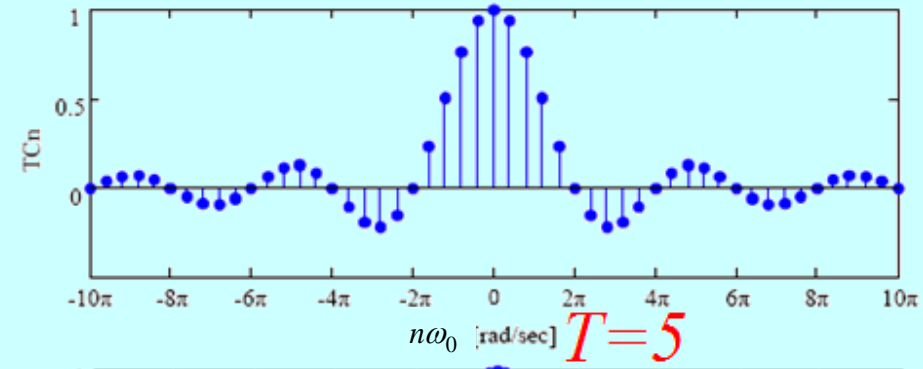
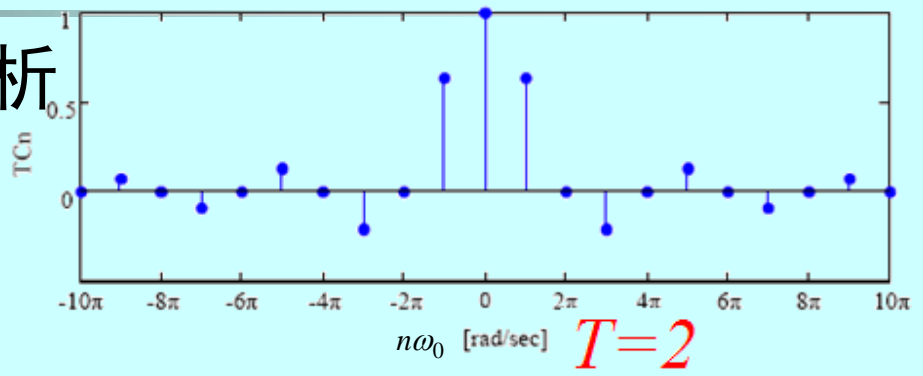
周期方波信号时域波形

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

$$c_n = \frac{2}{Tn\omega_0} \sin \frac{n\omega_0}{2}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$



# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## ■ 从傅立叶级数到连续时间信号的傅立叶变换(FT)

■ 对于非周期信号，可以把它当作周期为无限长的信号来处理，此时有： $T \rightarrow \infty$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \Delta\omega \rightarrow 0$

■  $n\omega_0 = n\Delta\omega = \omega$ ，所以离散频谱( $n\omega_0$  的函数)会演变成连续频谱( $\omega$  的函数)

■ 同时频谱系数  $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt \rightarrow 0$

■ 引入频谱密度概念： $Tc_n = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{c_n}{f_0} = \frac{c_n}{\omega_0} 2\pi$

$$X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} Tc_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

- 从傅立叶级数到连续时间信号的傅立叶变换(FT)
  - 傅立叶反变换(IFT)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T c_n \frac{1}{T} e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T c_n \frac{\omega_0}{2\pi} e^{in\omega_0 t}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T c_n \frac{\omega_0}{2\pi} e^{in\omega_0 t} \xrightarrow[n\omega_0 \rightarrow \omega]{\omega_0 \rightarrow d\omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} T c_n$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## ■ 连续非周期信号 $x(t)$ 的傅立叶变换对

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \Leftrightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i2\pi ft} df$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega q} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(p)e^{-i(p-q)\omega} dp d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(p) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(p-q)\omega} d\omega dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(p)\delta(p-q) dp = x(q) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$$



# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

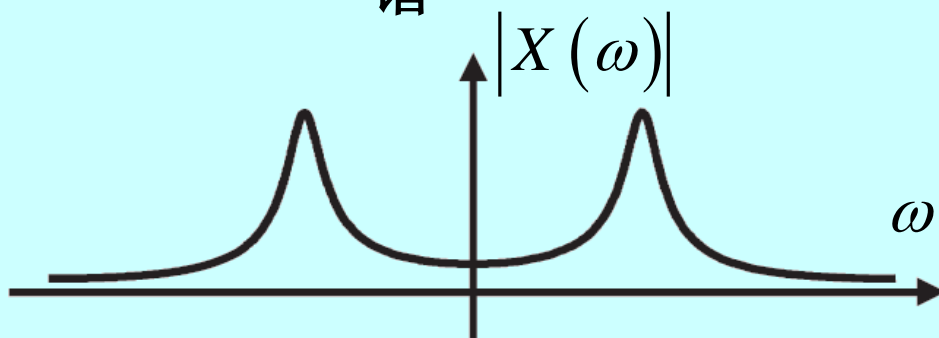
## ■ 幅值谱与相位谱

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\phi(\omega)} = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega)$$

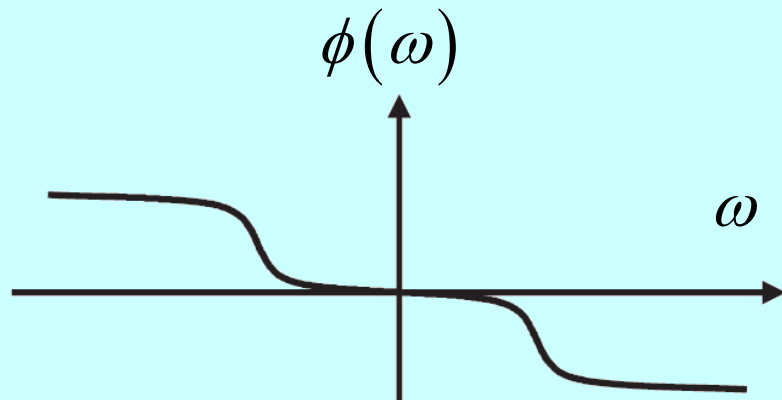
实部      虚部

幅值  
谱

相位谱



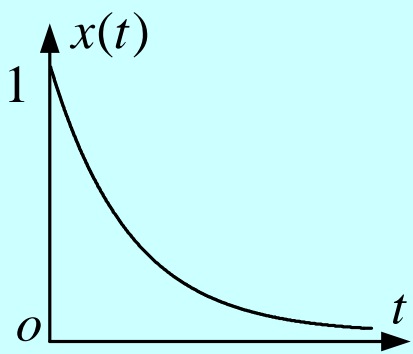
幅值谱



相位谱

# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## ■ 单边指数信号的FT频谱

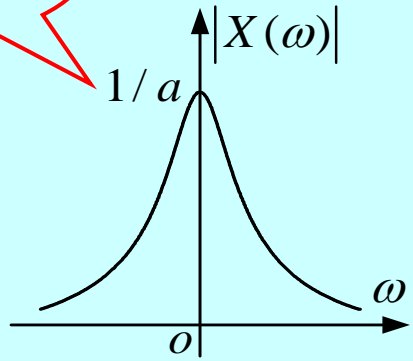


$$x(t) = e^{-at}u(t), (a > 0)$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{a + i\omega} \end{aligned}$$

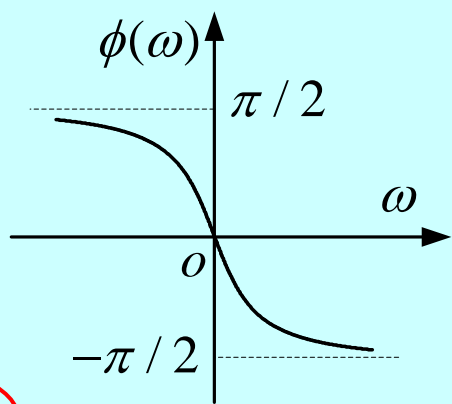
$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

幅值谱



$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

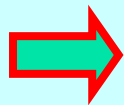
相位谱



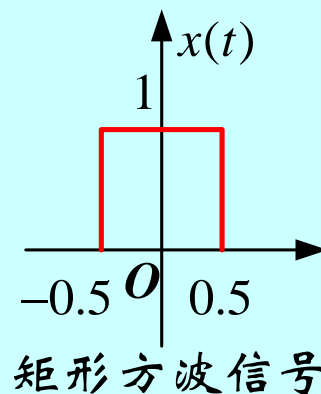
# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## ■ (例) 矩形方波信号 $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t < -0.5 \\ 1 & -0.5 < t < 0.5 \\ 0 & 0.5 < t < \infty \end{cases}$$

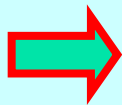


$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)} \end{aligned}$$

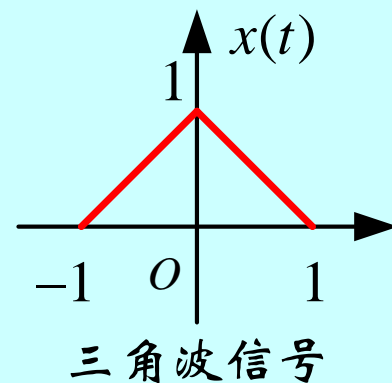


## ■ (例) 三角波信号 $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 < t < -1 \\ 1-|t| & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < T/2 \end{cases}$$



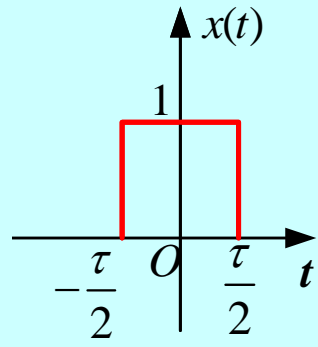
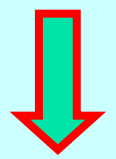
$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \left[ \frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)} \right]^2 \end{aligned}$$



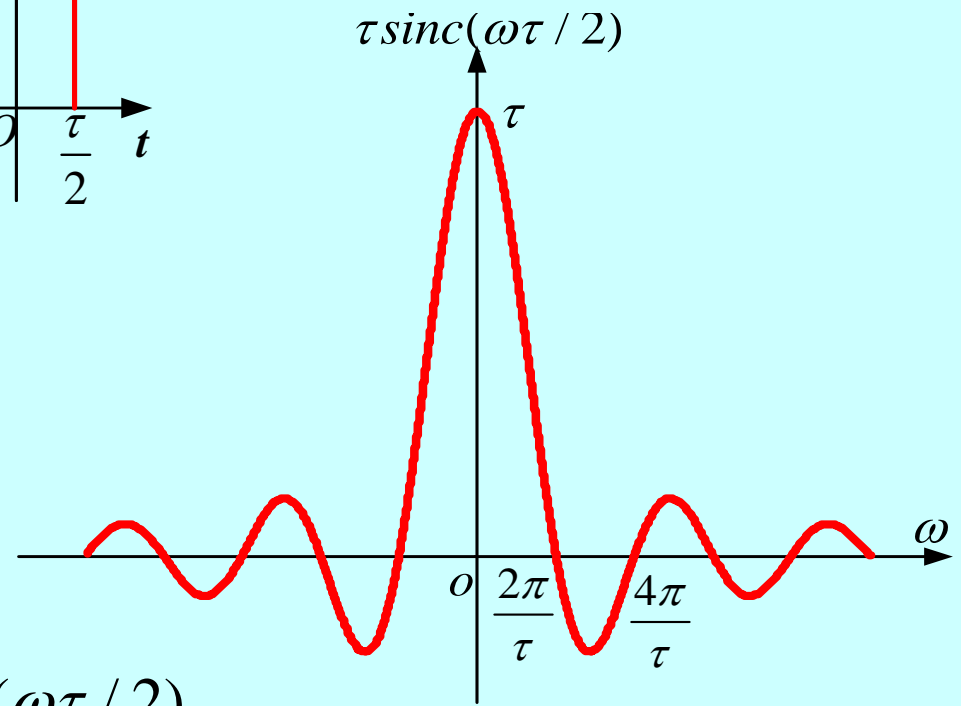
# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## ■ 矩形方波(方波脉冲)信号的分析

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \tau / 2 \\ 0 & |t| > \tau / 2 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \\ \Rightarrow X(\omega) &= \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega/2} \\ &= \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = \tau \text{sinc}(\omega\tau/2) \end{aligned}$$



# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ FT的基本性质  $FT[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt = X(\omega)$

■ 线性性质  $FT[ax_1(t) + bx_2(t)] = aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$

■ 时移性质  $FT[x(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$

■ 共轭对称性  $X(-\omega) = X^*(\omega)$

■ 尺度变换性质

■ 时域卷积性质

■ 时域积分性质

■ 时域微分性质

# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ FT的尺度变换性质  $FT[x(t)] = X(\omega) \rightarrow FT[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

■ 证明

$$\begin{aligned} FT[x(at)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} d\tau \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

■ 意义

(1)  $0 < a < 1$  时域扩展, 频域压缩

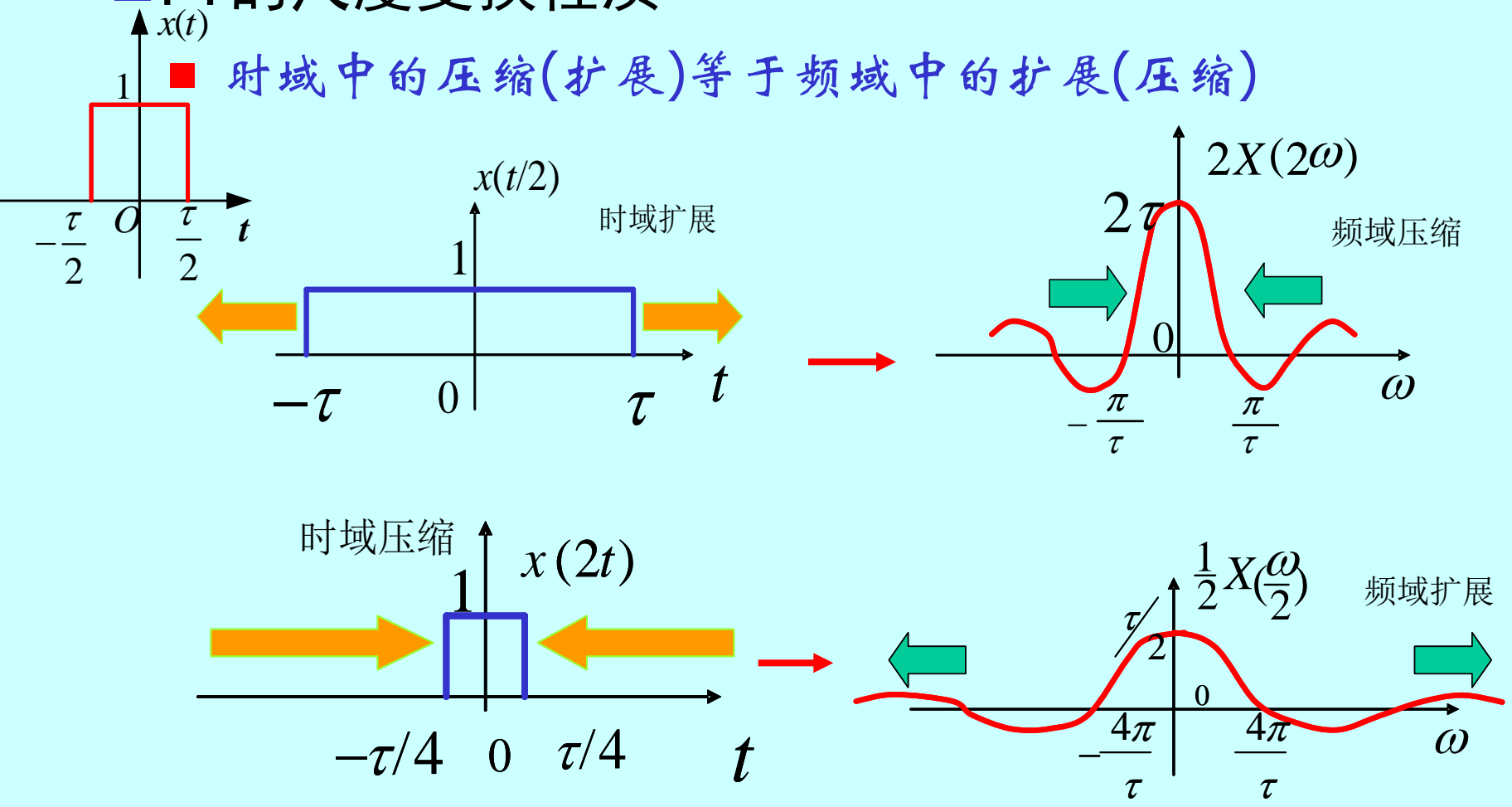
(2)  $a > 1$  时域压缩, 频域扩展

(3)  $a = -1$   $x(t) \rightarrow x(-t)$ ,  $X(\omega) \rightarrow X(-\omega)$

# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## FT的尺度变换性质

■ 时域中的压缩(扩展)等于频域中的扩展(压缩)

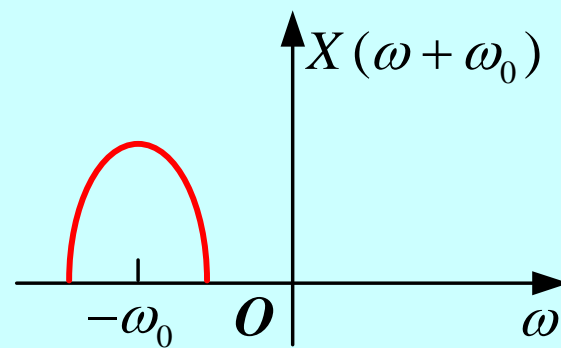
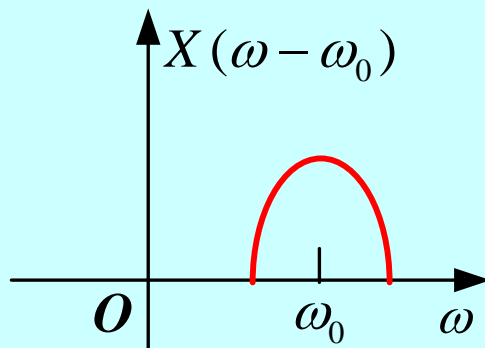
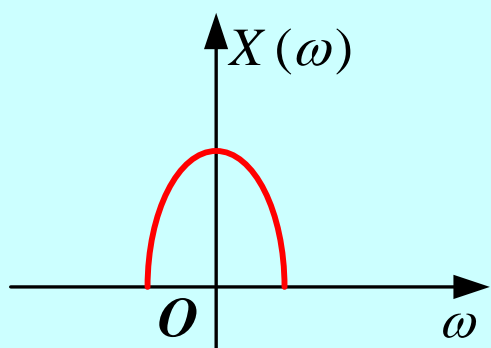


# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## ■ FT的基本性质

■ 带有尺度变换的时移特性  $FT[x(at-b)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{b\omega}{a}}$

■ 频移特性  $FT[x(t)e^{\pm j\omega_0 t}] = X(\omega \mp \omega_0)$





# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## ■ FT的基本性质

### ■ 对偶性

$$FT[x(t)] = X(\omega) \quad \longrightarrow \quad FT[X(t)] = 2\pi x(-\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

↓ 变量替换

$$2\pi x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{j\omega t} dt$$

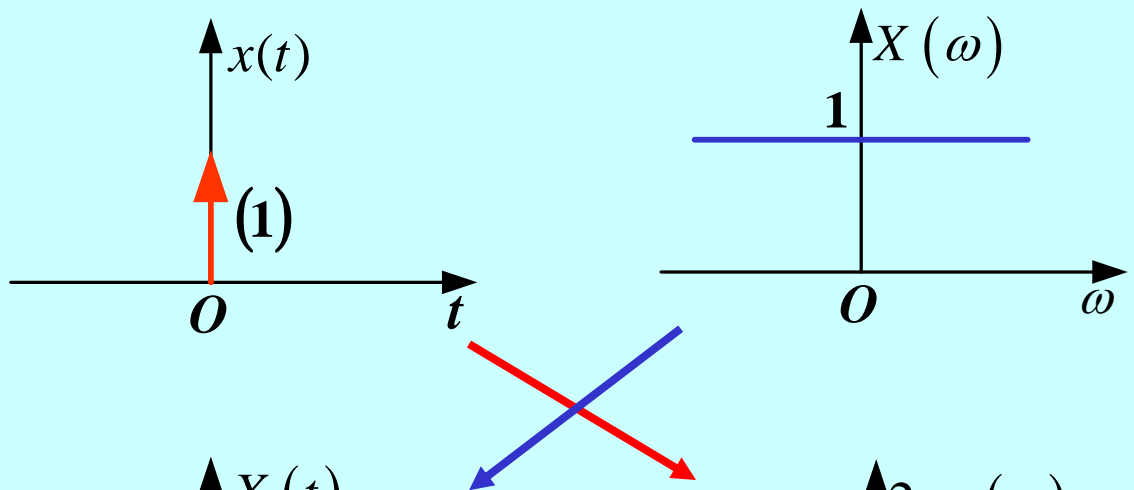
$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt$$

# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## 冲激函数和直流信号的FT

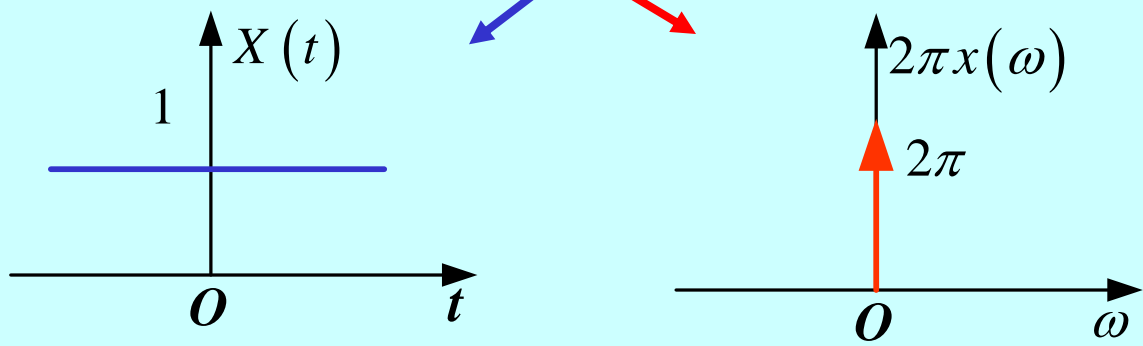
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$



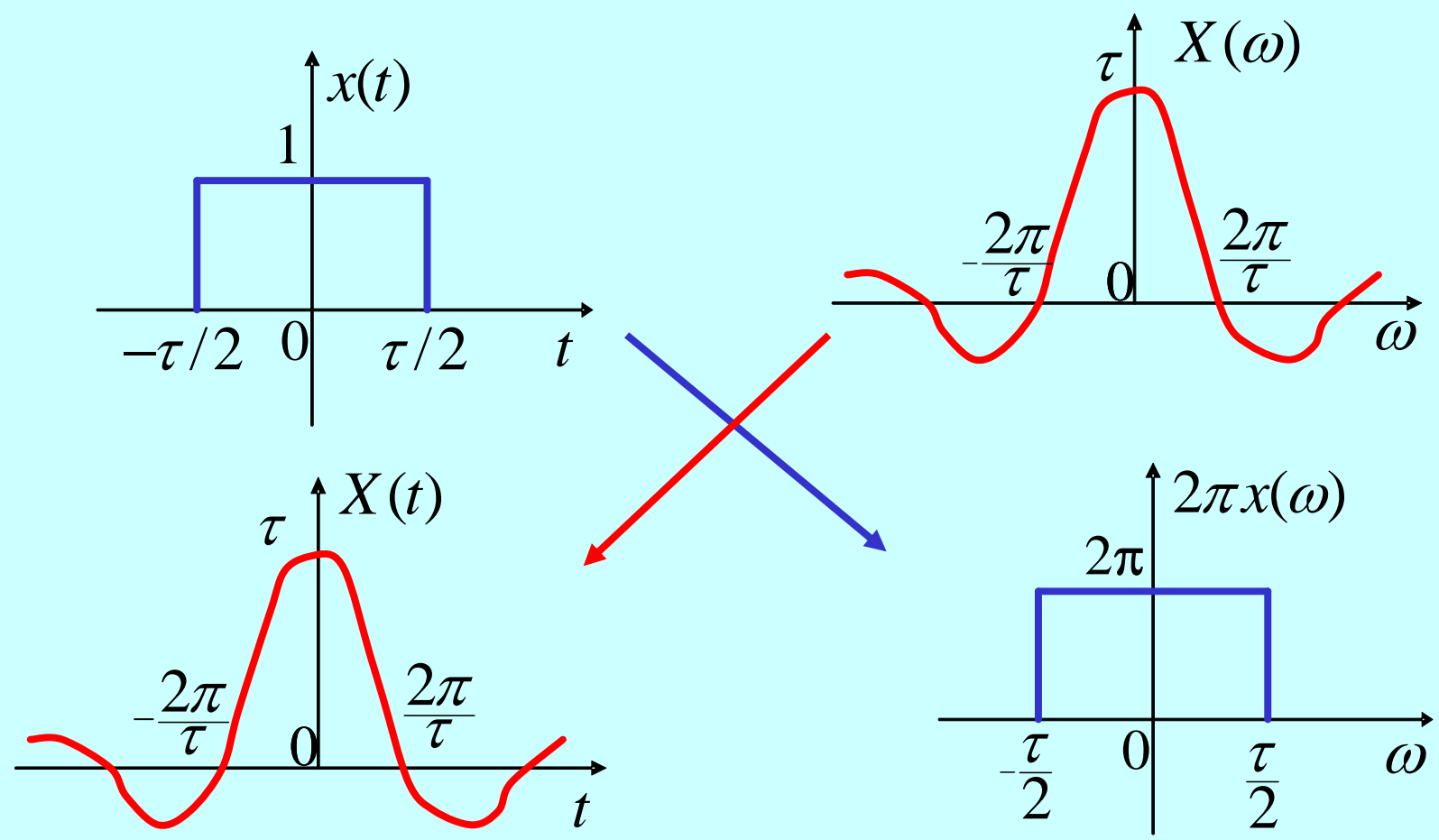
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$



# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ 若 $x(t)$ 为偶函数，则时域和频域完全对称



# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## ■ FT的基本性质

### ■ 时域微分性质

$$FT\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = j\omega X(\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow \frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [j\omega X(\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

### ■ 时域卷积性质

$$FT[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(\omega) X_2(\omega)$$

$$FT[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

卷积定义

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

交换积分次序

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) X_2(\omega) e^{-j\omega \tau} d\tau$$

时移性质

$$= X_1(\omega) X_2(\omega)$$

# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## ■ FT的基本性质

### ■ 频域卷积性质

$$FT[x_1(t) \cdot x_2(t)] = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

$$FT[x_1(t) \cdot x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(u) e^{jut} du \right] x_2(t) e^{-j\omega t} dt$$

傅里叶逆变换

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(u) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j(\omega-u)t} dt \right] du$$

交换积分次序

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(u) X_2(\omega - u) du$$

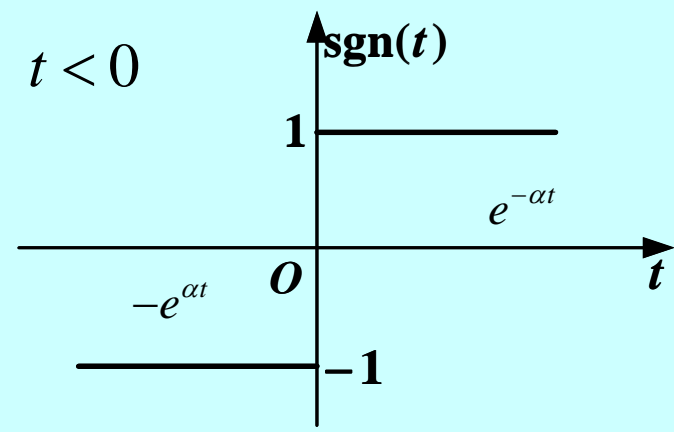
$$= \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

傅里叶变换  
卷积定义

# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## ■ 符号函数的FT

$$f(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} +1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$



■ 处理方法：做一个双边函数

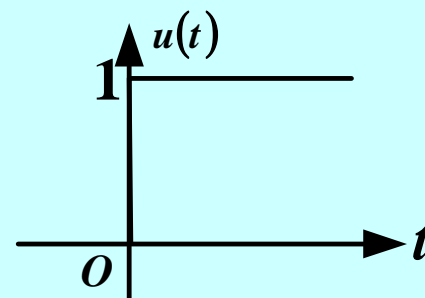
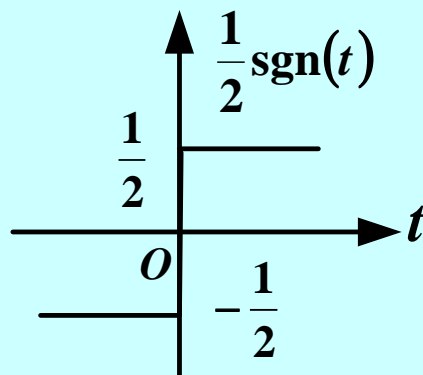
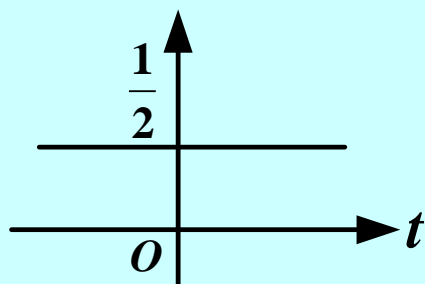
$f_1(t) = \text{sgn}(t)e^{-\alpha|t|}$ , 求  $F_1(\omega)$ ,  
求极限得到  $F(\omega)$ 。

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \int_{-\infty}^0 -e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{-1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

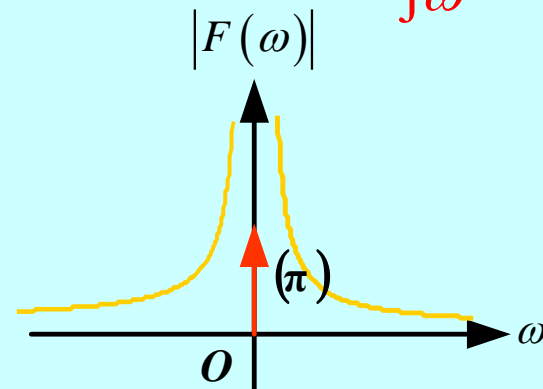
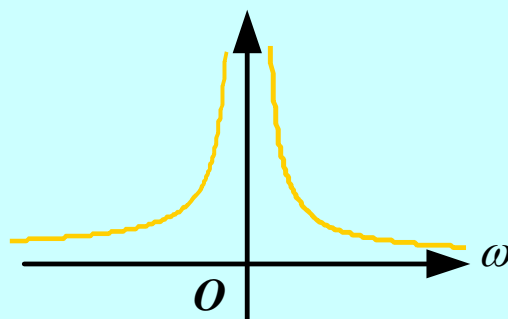
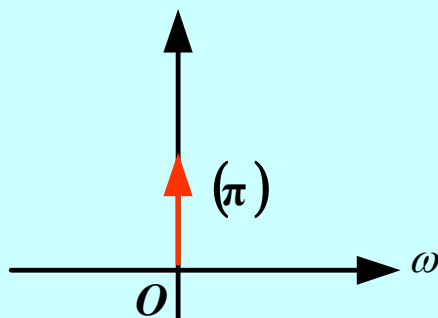
$$F(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_1(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega}$$

# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ 单位阶跃函数的FT  $\rightarrow u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t)$



$$\frac{1}{2} \leftrightarrow \pi\delta(\omega) \quad + \quad \frac{1}{2}\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \quad = \quad u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## ■ FT的基本性质

### ■ 时域积分性质

$$FT\left[\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

$$FT\left[\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

利用单位阶跃函数的FT  
及FT的时域卷积性质

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

$$= FT[x(t) * u(t)] = X(\omega) \left( \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right)$$

$$\text{当 } X(0)=0 \quad FT\left[\int_{-\infty}^t x(t)\right] = \frac{1}{j\omega} X(\omega)$$



# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## ■ FT的基本性质

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt$$

■ 时域相关性定理  $\Rightarrow FT(r_{xy}(\tau)) = FT(x(t)) FT^*(y(t))$

$$\begin{aligned}
 FT(r_{xy}(\tau)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt \right] e^{-i\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y^*(t - \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] dt \quad \xrightarrow{u = t - \tau} \quad e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} y^*(u) e^{i\omega u} du \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) FT^*(y(t)) e^{-i\omega t} dt \\
 &= FT(x(t)) FT^*(y(t))
 \end{aligned}$$

## ■ 函数自相关的FT是其幅度谱的平方

$$FT(r_x(\tau)) = FT(x(t)) FT^*(x(t)) = \|FT(x(t))\|^2$$

# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## ■ FT的基本性质

### ■ 帕斯瓦尔定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|X(\omega)\|^2 d\omega$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \right]^* dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)X(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|X(\omega)\|^2 d\omega \end{aligned}$$

# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## ■ 解析信号的定义

- 已知信号 $x(t)$ 希望通过对 $x(t)$ 进行某种变换  $\hat{x}(t) = x(t) * h(t)$  来构造所谓“解析信号(analytic signal)”:

$$a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad A_x(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$


## ■ 构造解析信号的好处

- 由于不含有负频率，可以使采样频率降低一半而不违反采样定理
- 在研究信号的时频分析时，使用解析信号可以减轻正负频率在零频附近的交叉干扰


# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ 如何构造解析信号  $a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$

$$A_x(\omega) = X(\omega) + j\hat{X}(\omega) = X(\omega) + jH(\omega)X(\omega)$$


$$A_x(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$

$$H(\omega) = \begin{cases} -j & \omega > 0 \\ j & \omega < 0 \end{cases}$$


$$H_1(\omega) = e^{\beta|\omega|} \cdot H(\omega)$$

$$h(t) = IFT[H(\omega)] = \lim_{\beta \rightarrow 0} \{ IFT[H_1(\omega)] \} = \frac{1}{\pi t}$$

$$\hat{x}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

 Hilbert变换

# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## ■ 解析信号瞬时幅值、瞬时相位、瞬时频率

$$a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = A_x(t)e^{j\phi_x(t)}$$

### ■ 瞬时幅值

$$A_x(t) = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$$

### ■ 瞬时相位

$$\phi_x(t) = \tan^{-1}(\hat{x}(t) / x(t))$$

### ■ 瞬时频率

$$\omega_x(t) = \dot{\phi}_x(t) = d\phi_x(t) / dt$$

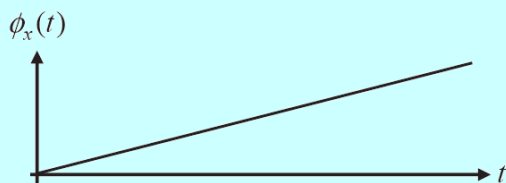
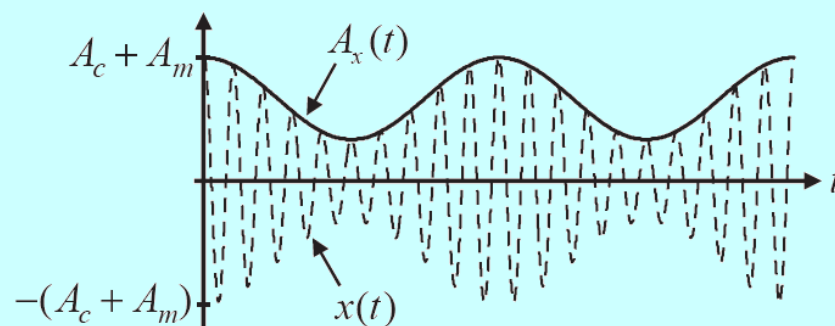
# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## ■ 例：幅值调制信号

$$\omega_m < \omega_c$$

$$x(t) = m(t) \cos(\omega_c t) = (A_c + A_m \sin(\omega_m t)) \cos(\omega_c t)$$

$$a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = A_x(t)e^{j\phi_x(t)} = (A_c + A_m \sin(\omega_m t))e^{j\omega_c t}$$

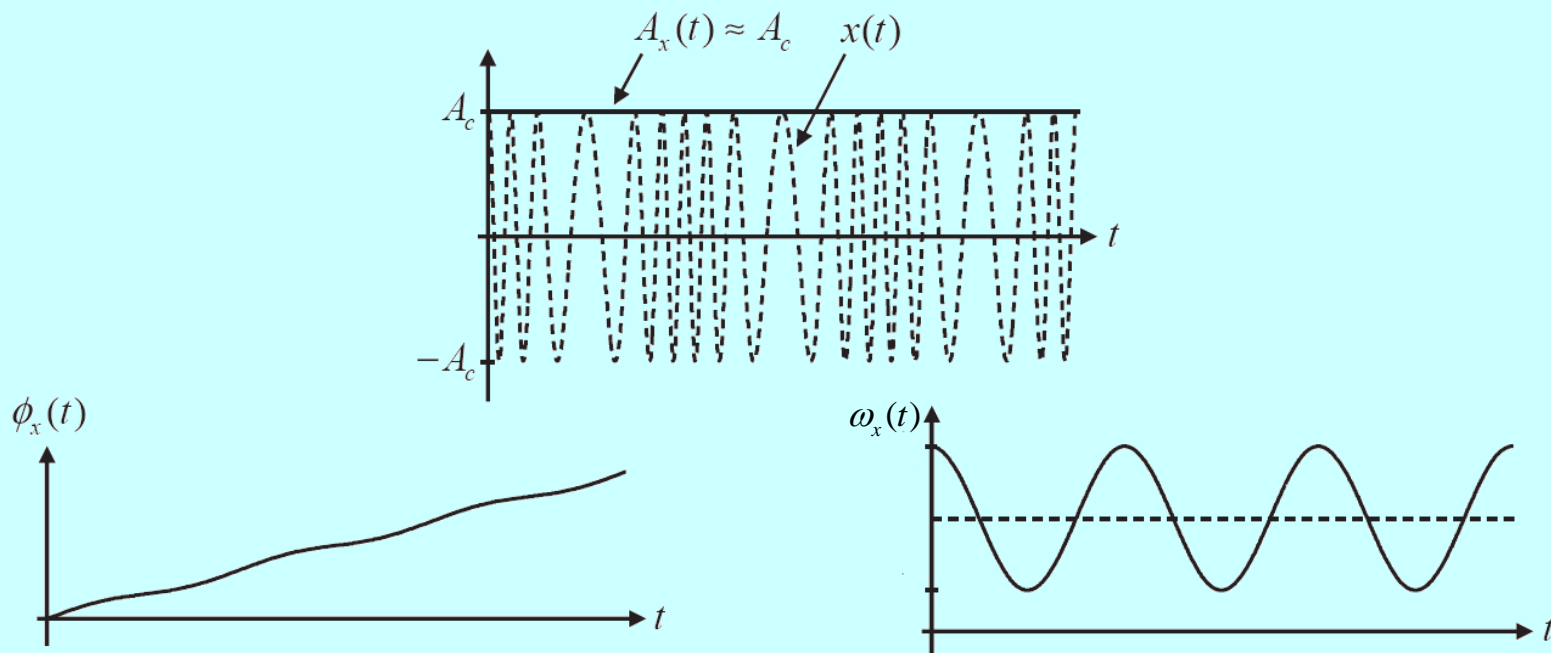


# 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

## ■ 例：频率调制信号

$$x(t) = A_c \cos(\omega_c t + A_m \sin(\omega_m t)) \quad A_m \omega_m \ll \omega_c$$

$$a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = A_x(t)e^{j\phi_x(t)} \approx A_c e^{j(\omega_c t + A_m \sin(\omega_m t))}$$





# 连续时间信号的采样及采样定理

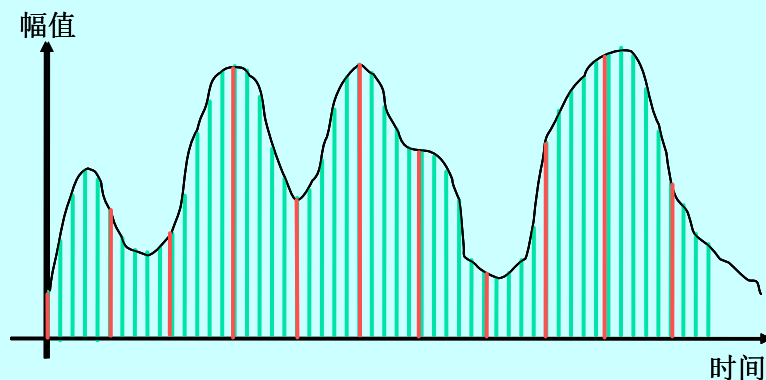
- 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)
- 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)
- 连续时间信号的采样及采样定理
- 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)



# 连续时间信号的采样及采样定理

## ■ 采样周期、频率

- 通常采用等时间采样来得到离散时间信号。设采样周期为 $T_s$ ， $T_s$ 的倒数称为采样频率 $f_s$ ，对应的角频率 $\omega_s = 2\pi f_s$



- 直观地看，采样周期 $T_s$ 较大时，则易丢失信息，使一些细节内容无法反映出来；而如果 $T_s$ 太小，信息虽不易丢失，但却使数据量明显增大，处理费时

## ■ 信号采样研究内容

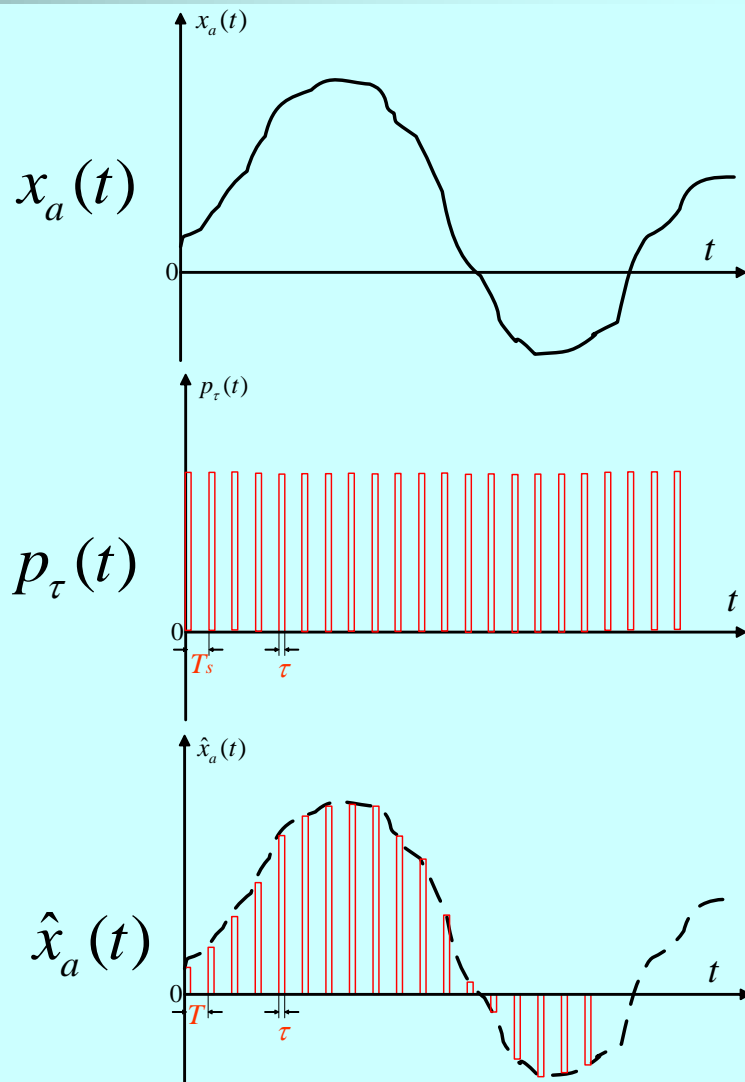
- 以一定的采样周期采样后，研究：(1)采样前后信号的信息是否有丢失；(2)采样前后信号的频谱有何变化；(3)采样信号能否恢复为原信号？

# 连续时间信号的采样及采样定理

## ■ 采样的精确数学描述

- 对连续时间信号  $x_a(t)$  的采样过程可看作对采样脉冲串调幅的过程：脉冲载波是一串周期为  $T_s$ 、宽度为  $\tau$  的采样矩形脉冲，以  $p_\tau(t)$  表示，调制信号是输入的连续时间信号  $x_a(t)$ ，采样输出为：

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)p_\tau(t)$$

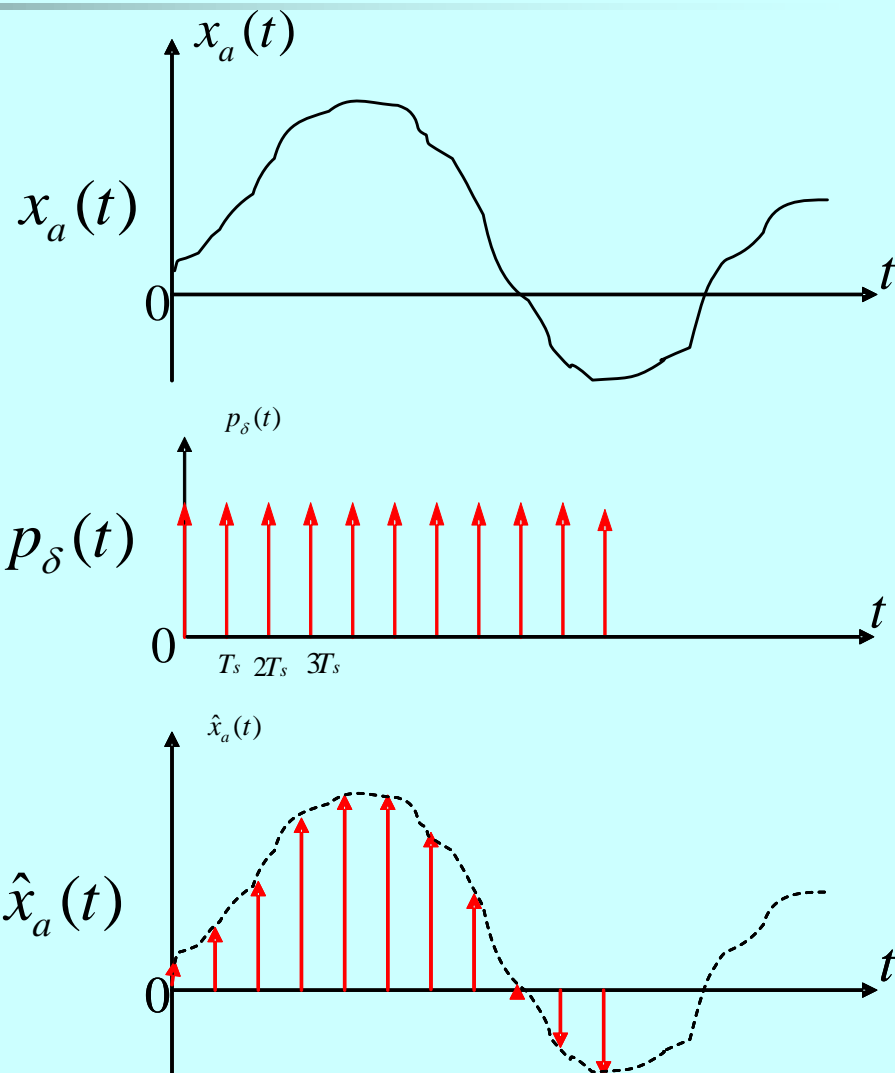


# 连续时间信号的采样及采样定理

## ■ 采样的工程描述

- 工程上，一般采样周期  $T_s \gg \tau$ ，可将采样矩形脉冲串  $p_\tau(t)$  近似为冲激函数串  $p_\delta(t)$ ，采样输出信号则近似为输入的连续时间信号  $x_a(t)$  与冲激函数串  $p_\delta(t)$  的乘积：

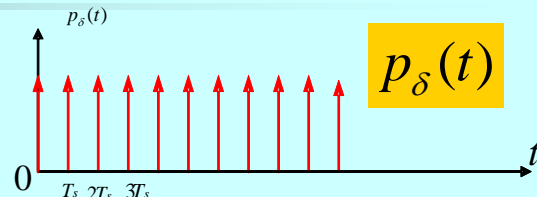
$$\begin{aligned}\hat{x}_a(t) &= x_a(t)p_\delta(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t-nT_s)\end{aligned}$$



# 连续时间信号的采样及采样定理

## ■ 采样信号的频谱

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) p_\delta(t)$$



■ 冲激函数串  $p_\delta(t)$  是一个周期函数(周期  $T_s$ )，可用付氏级数

展开：

$$p_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\omega_s t}$$

基频是采样频率  $\omega_s = 2\pi/T_s$

$$c_m = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} p_\delta(t) e^{-im\omega_s t} dt$$

$$= \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-im\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s}$$

$$p_\delta(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\omega_s t}$$

# 连续时间信号的采样及采样定理

## ■ 采样信号的频谱

■ 将冲激函数串  $p_\delta(t)$  级数表达式带入  $\hat{x}_a(t)$  傅立叶变换公式：

$$\begin{aligned}\hat{X}_a(\omega) &= FT[\hat{x}_a(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) p_\delta(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\omega_s t} \right) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-j(\omega - m\omega_s)t} dt\end{aligned}$$

■ 采样信号的频谱是连续信号频谱的周期延拓，重复周期为  $\omega_s$  (采样频率)

$$\hat{X}_a(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - m\omega_s)$$

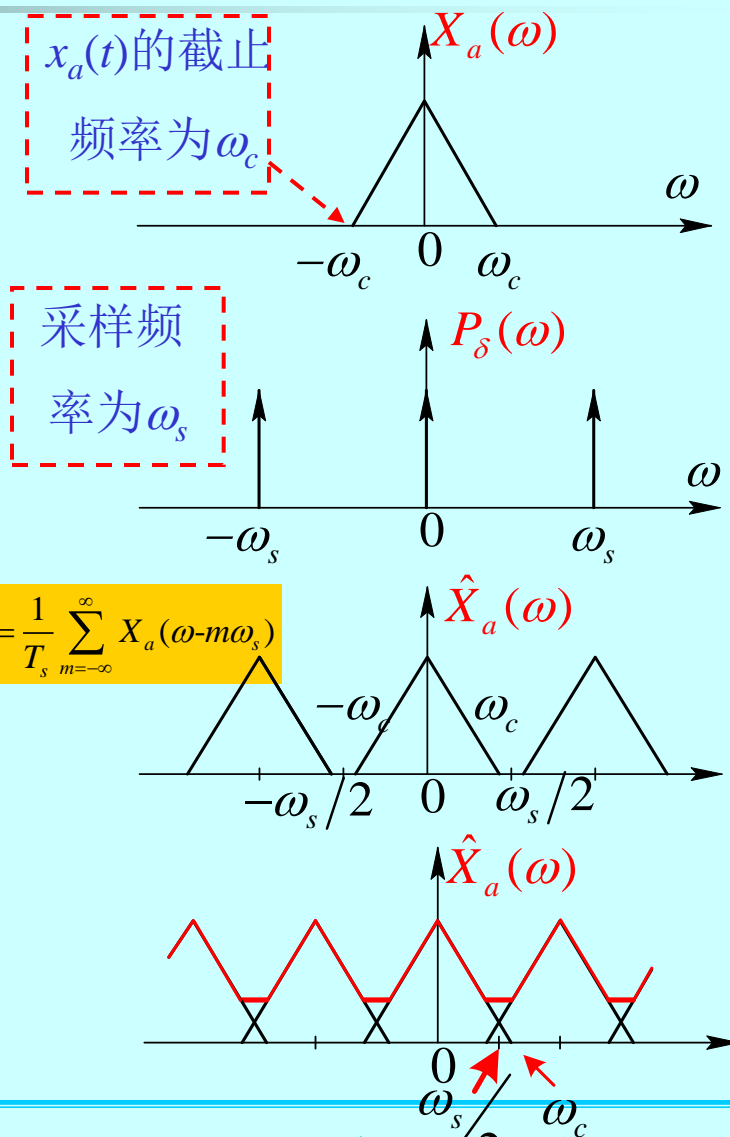
$$X_a(\omega) = FT[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-j\omega t} dt$$

# 连续时间信号的采样及采样定理

## ■ 采样信号的频谱

■ 采样信号的频谱是原连续信号的频谱以 $\omega_s$ 为周期，进行周期性延拓而成

■ 如右图例，设连续信号 $x_a(t)$ 是带限信号，最高截止频率为 $\omega_c$ ，采样频率为 $\omega_s$ 。当 $\omega_c > \omega_s/2$ 时，作周期延拓时会发生频域的“**混叠**”现象，导致 $X_a(\omega)$ 与 $X_a(\omega)$  在一个周期内不相等



# 连续时间信号的采样及采样定理

## ■ 采样定理

- 要使实信号采样后能够不失真还原，采样频率必须大于信号最高频率的两倍  $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$
- 实际工作中，考虑到有噪声，为避免频谱混淆，采样频率总是选得比两倍信号最高频率 $\omega_{\max}$ 更大些，如 $\omega_s > (3\sim 5)\omega_{\max}$
- 同时，为避免高于 $\omega_s/2$ (折叠频率)的噪声信号进入采样器造成频谱混淆，采样器前常常加一个保护性的前置低通滤波器(抗混叠滤波)，阻止高于 $\omega_s/2$ 频率分量进入

# 连续时间信号的采样及采样定理

## ■ 一些典型的数字信号处理系统的上限频率

应用系统	上限频率 $f_{\max}$	采样频率 $f_s$
地质勘探	500Hz	1-2 kHz
生物医学	1kHz	2-4 kHz
机械振动	2kHz	4-10 kHz
语音	4kHz	8-16 kHz
音乐	20kHz	40-96 kHz
视频	4MHz	8-10 MHz

$$\omega = 2\pi f$$





# 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

- 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)
- 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)
- 连续时间信号的采样及采样定理
- 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

# 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

## ■ 采样信号的频谱

■ 表达形式1  $\hat{x}_a(t) = x_a(t)p_\delta(t)$

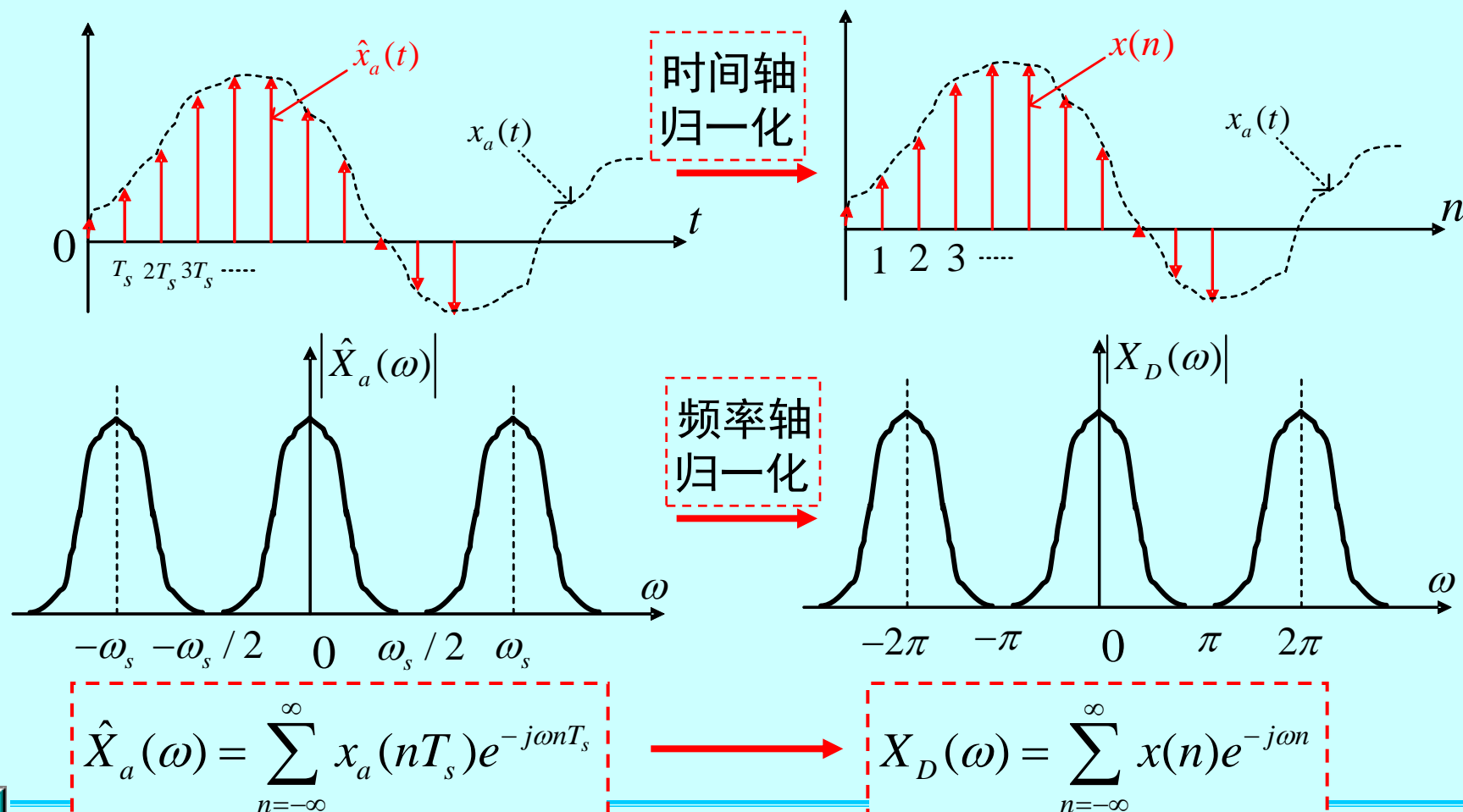
$$\begin{aligned}\hat{X}_a(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t)p_\delta(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\omega_s t} \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-j(\omega - m\omega_s)t} dt = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - m\omega_s)\end{aligned}$$

■ 表达形式2  $\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t - nT_s)$

$$\begin{aligned}\hat{X}_a(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t - nT_s) \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) x_a(t) e^{-j\omega t} dt \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) e^{-j\omega nT_s}\end{aligned}$$

# 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

■ 采样频率归一化  $f_s = T_s = 1$



# 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

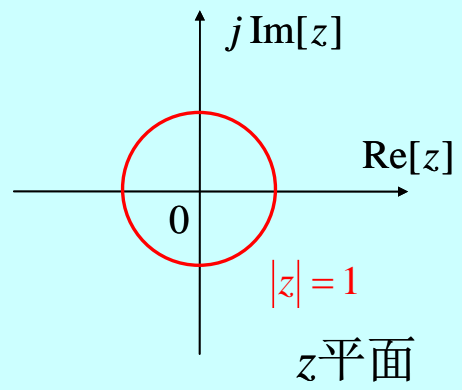
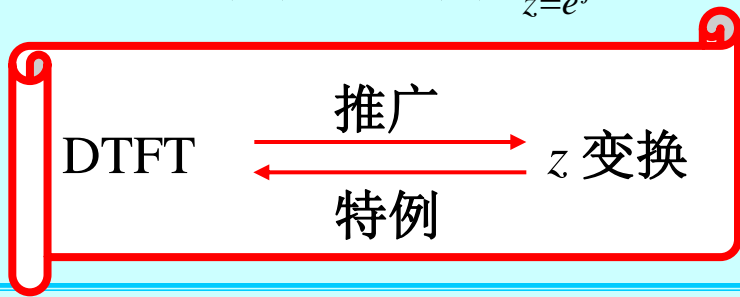
## ■ 离散时间信号傅立叶变换(DTFT)的定义

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

## ■ DTFT的特点

- $X(\omega)$ 是 $\omega$ 的连续函数
- $X(\omega)$ 是 $\omega$ 的周期函数，周期为 $2\pi$   $X(\omega) = X(\omega + 2\pi)$
- $X(\omega)$ 是 $\omega$ 的复函数  $X(\omega) = \text{Re}[X(\omega)] + j \text{Im}[X(\omega)]$
- DTFT是 $z$ 仅在单位圆取值的 $z$ 变换

$$X(\omega) = X(z) \big|_{z=e^{j\omega}}$$



# 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

## DTFT反变换

■  $X_D(\omega)$  是  $\omega$  的连续，周期函数，可利用连续周期函数的傅立叶级数来求DTFT反变换：

连续周期函数  
的傅立叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t}$$

$$X_D(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad \text{[DTFT]}$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_D(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

[DTFT反变换]

# 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

## ■ DTFT的性质表

性质	时域	频域
线性	$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$	$X_D(\omega) = aX_{D1}(\omega) + bX_{D2}(\omega)$
时移	$y(n) = x(n - n_0)$	$Y_D(\omega) = e^{-j\omega n_0} X_D(\omega)$
频移	$y(n) = e^{j\omega_0 n} x(n)$	$Y_D(\omega) = X_D(\omega - \omega_0)$
时域卷积	$y(n) = x(n) * h(n)$	$Y_D(\omega) = X_D(\omega) H_D(\omega)$
频域卷积	$y(n) = x(n)h(n)$	$Y_D(\omega) = X_D(\omega) * H_D(\omega)$ $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_D(\theta) H_D(\omega - \theta) d\theta$
Parseval 定理	$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty}  x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}  X_D(\omega) ^2 d\omega$	

# 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

## ■ 线性时不变离散时间系统的频率响应



$$y(n) = x(n) * h(n)$$



$$Y(\omega) = X(\omega) \underline{H(\omega)}$$

系统频率  
响应函数

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \text{Re}[H(\omega)] + j \text{Im}[H(\omega)] = \underbrace{|H(\omega)|}_{\text{幅频响应}} e^{j \underbrace{\arg[H(\omega)]}_{\text{相频响应}}}$$

## ■ 线性时不变离散时间系统的描述形式

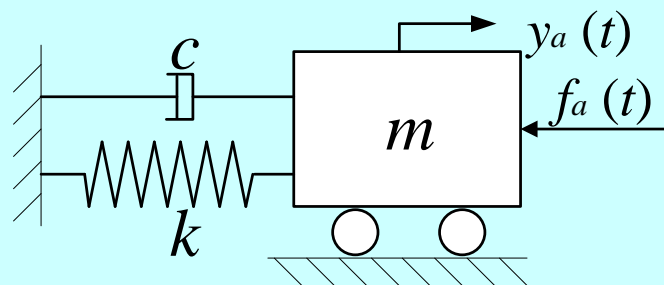
时域	{	■ 差分方程	$\sum_{i=0}^N b_i y(n-i) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i)$	
		■ 单位脉冲响应	$h(n) = T[\delta(n)]$	$y(n) = x(n) * h(n)$
频域		■ 频率响应函数	$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$	$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$
z域		■ 系统函数	$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$	$Y(z) = X(z)H(z)$

# 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

## ■ 例：单自由度振动系统分析

### ■ 运动方程

$$m \frac{d^2 y_a}{dt^2} + c \frac{dy_a}{dt} + k y_a = f_a(t)$$



$$\frac{d^2 y_a}{dt^2} + 2\zeta\Omega_n \frac{dy_a}{dt} + \Omega_n^2 y_a = x_a(t)$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\Omega_n}$$

$$\Omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x_a(t) = \frac{f_a(t)}{m}$$



# 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

## ■ 例：单自由度振动系统分析(2)

### ■ 输入-输出差分方程的建立

$$\frac{d^2 y_a}{dt^2} + 2\zeta\Omega_n \frac{dy_a}{dt} + \Omega_n^2 y_a = x_a(t)$$

$$\left. \frac{dy_a}{dt} \right|_{t=nT_s} = \frac{y_a(nT_s + T_s) - y_a(nT_s)}{T_s}$$

$$\left. \frac{d^2 y_a}{dt^2} \right|_{t=nT_s} = \frac{y_a(nT_s + 2T_s) - 2y_a(nT_s + T_s) + y_a(nT_s)}{T_s^2}$$

$$\sum_{i=0}^N b_i y(n-i) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i)$$

$$y(n) + (2\zeta\Omega_n T_s - 2)y(n-1) + (1 - 2\zeta\Omega_n T_s + \Omega_n^2 T_s^2)y(n-2) = T_s^2 x(n-2)$$

$$b_0 = 1$$

$$b_1$$

$$b_2$$

$$a_2$$

$$a_0 = a_1 = 0$$



# 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

## ■ 例：单自由度振动系统分析(3)

### ■ 系统函数 $H(z)$

$$y(n) + (2\zeta\Omega_n T_s - 2)y(n-1) + (1 - 2\zeta\Omega_n T_s + \Omega_n^2 T_s^2)y(n-2) = T_s^2 x(n-2)$$



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T_s^2 z^{-2}}{1 + (2\zeta\Omega_n T_s - 2)z^{-1} + (1 - 2\zeta\Omega_n T_s + \Omega_n^2 T_s^2)z^{-2}}$$

### ■ 极点

$$z_{1,2} = 1 - \zeta\Omega_n T_s \pm j\Omega_n T_s \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (\zeta < 1)$$



$$|z_{1,2}| < 1 \Rightarrow T_s < \frac{2\zeta}{\Omega_n}$$

### ■ 频响函数 $H(\omega)$

$$H(\omega) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{T_s^2 e^{-j2\omega}}{1 + (2\zeta\Omega_n T_s - 2)e^{-j\omega} + (1 - 2\zeta\Omega_n T_s + \Omega_n^2 T_s^2)e^{-j2\omega}}$$

# 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}$$

## ■ 几个有用的MATLAB命令

### ■ 系统的零极点图 `zplane(a,b)`

- 在z平面上画出用分子a和分母b表示的系统的零点 (用 ‘o’表示)和极点 (用 ‘x’表示), 并画出单位圆

### ■ 系统的脉冲响应函数 `impz`

- `[h,t]=impz(a,b)`----得到系统的脉冲响应h, 取样点数N由impz函数自动选取并记录在t中(`t=[0:N-1]'`)
- `[h,t]=impz(a,b,N)`----得到系统在指定点的脉冲响应h。当N为标量时, `t=[0:N-1]'`; 当N为矢量时(其值应为整数), 则`t=N`,即在这些指定的点计算脉冲响应h
- `[h,t]=impz(b,a,N,Fs)`----得到系统在指定点的脉冲响应h。取样间隔为`1/Fs`
- `h=impz(a,b)`等效于`h=filter(a,b,delta)`

# 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N b_k e^{-jk\omega}}$$

## ■ 几个有用的MATLAB命令

### ■ 系统的频率响应函数 freqz

- $[h,w]=\text{freqz}(a,b,n)$ ----得到系统n点的频率响应，这n点均匀分布在单位圆的上半圆(0- $\pi$ )。h中为频率响应H(w), w为这n点的频率。(缺省n=512)
- $[h,f]=\text{freqz}(a,b,n,Fs)$ ----得到系统n点的频率响应，这n点均匀分布在单位圆的 (0-Fs/2)范围内。h中为频率响应H(f), f为这n点的频率(Fs 和f以Hz为单位)
- 不带输出变量的freqz函数则画出幅频和相频特性曲线

# 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

## ■ 例：单自由度振动系统分析(4)

### ■ MATLAB代码

```

wn = 2*pi*10;           % undamped natural frequency
Kesi = 0.1;             % damping ratio
Ts = 1/1000;           % sampling period
N=round(1/Ts);
a=[0, 0, Ts*Ts];
b=[1, (2*Kesi*wn*Ts-2), (1-2*Kesi*wn*Ts+wn*wn*Ts*Ts)];
figure
zplane(a,b)             % 绘制系统的零极点图
figure
[h,t]=impz(a,b,N,1/Ts);
plot(t,h)               % 绘制系统的脉冲响应
figure
freqz(a,b,N,1/Ts);      % 绘制系统的幅频和相频响应

```

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}$$

# 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

## ■ 分析结果(1)

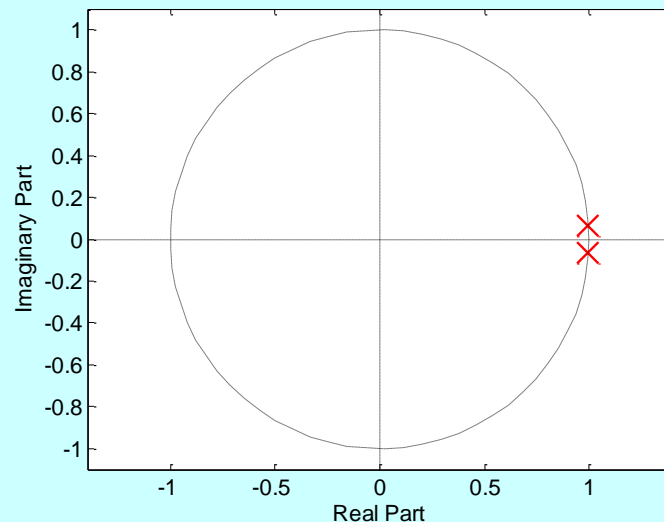
$$\Omega_n = 20\pi$$

$$\zeta = 0.1$$

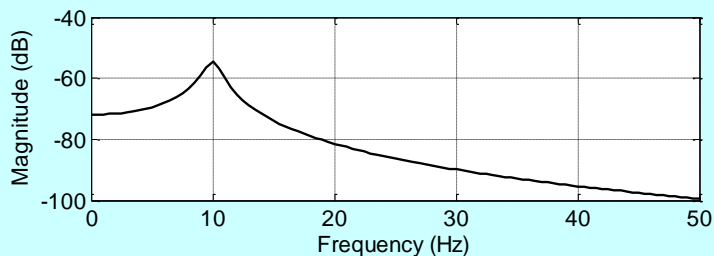
$$T_s = 0.001s$$

极点在单位圆内

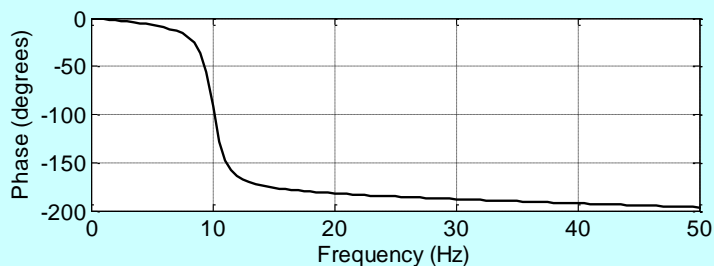
零极点图



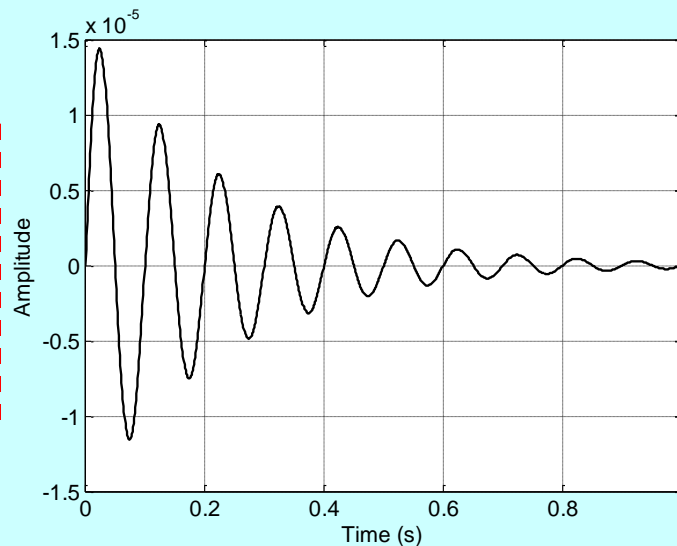
幅频  
响应



相频  
响应



脉冲  
响应



# 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

## ■ 分析结果(2)

$$\Omega_n = 20\pi$$

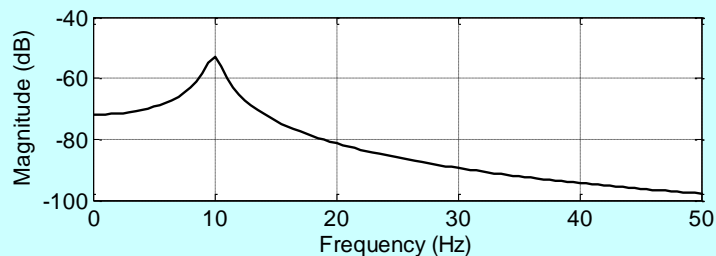
$$\zeta = 0.1$$

$$T_s = 0.005s$$

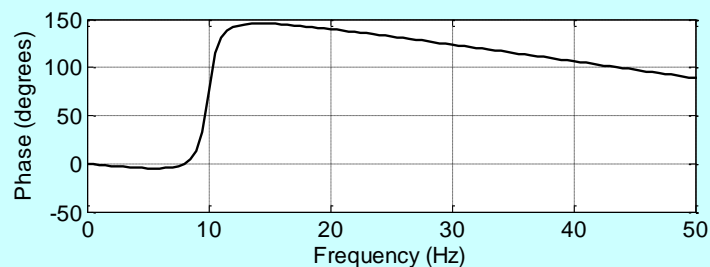
极点在单位圆外

$$T_s > \frac{2\zeta}{\Omega_n} \Rightarrow |z_{1,2}| > 1$$

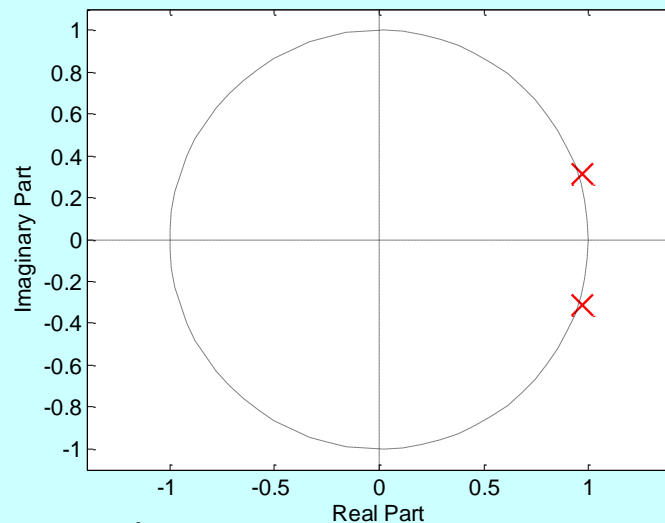
幅频  
响应



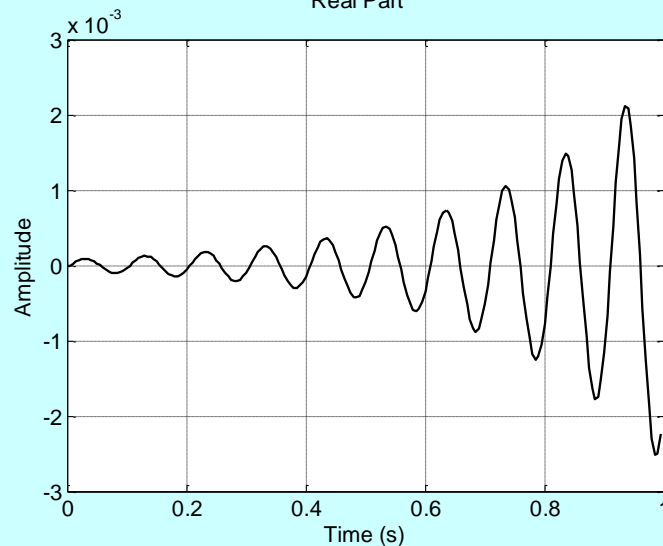
相频  
响应



零  
极  
点  
图



脉  
冲  
响  
应



# 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

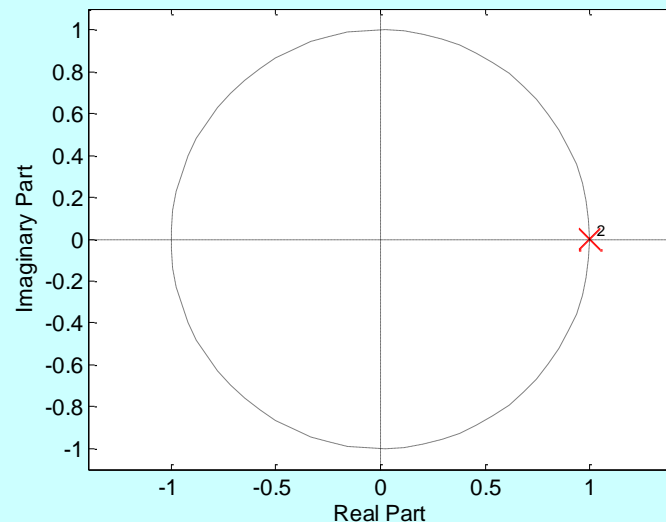
## ■ 分析结果(3)

$$\Omega_n = 20\pi$$
$$T_s = 0.001ms$$
$$\zeta = -0.1$$

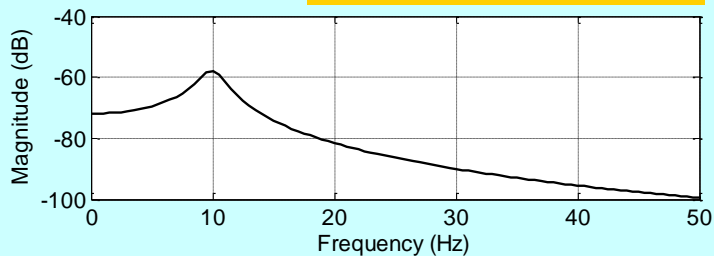
极点在单位圆外

$$T_s > \frac{2\zeta}{\Omega_n} \Rightarrow |z_{1,2}| > 1$$

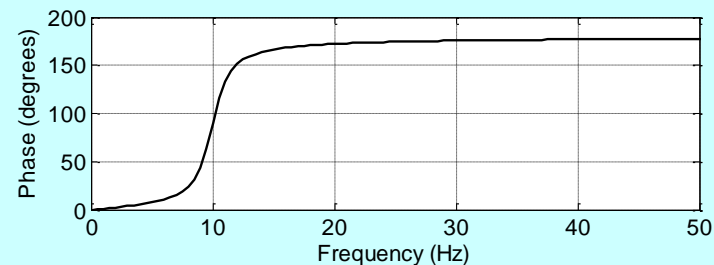
零极点图



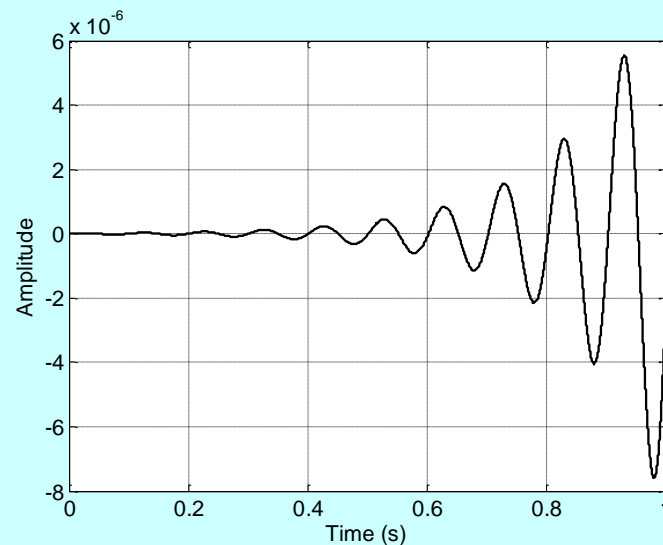
幅频  
响应



相频  
响应



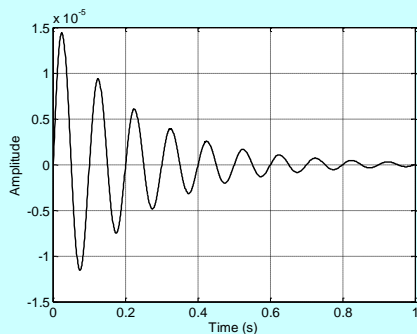
脉冲  
响应



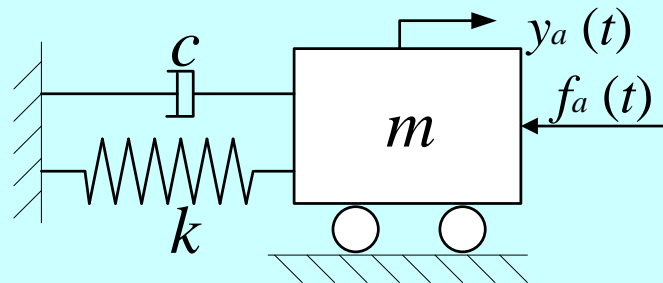


# 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

## ■ 利用Hilbert变换辨识阻尼系数



$$\zeta = \frac{c}{2m\Omega_n}$$



$$x(t) = Ae^{-\zeta\Omega_n t} \sin(\Omega_d t + \phi) \quad t \geq 0 \quad \Omega_d = \Omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\begin{aligned} a_x(t) &= x(t) + j\hat{x}(t) \\ &= A_x(t)e^{j\phi_x(t)} \approx (Ae^{-\zeta\Omega_n t})e^{j(\Omega_d t + \phi - \pi/2)} \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$$\ln A_x(t) \approx \ln A - \zeta\Omega_n t$$

# The End

# 谢谢!

## 请批评指正

