



上海交通大学

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY



ME6011 弹塑性力学

讲课教师：沈 彬 博士、副研究员

办 公 室：机械A楼720室

电 话：021-34206556

13818945392

E-Mail: binshen@sjtu.edu.cn



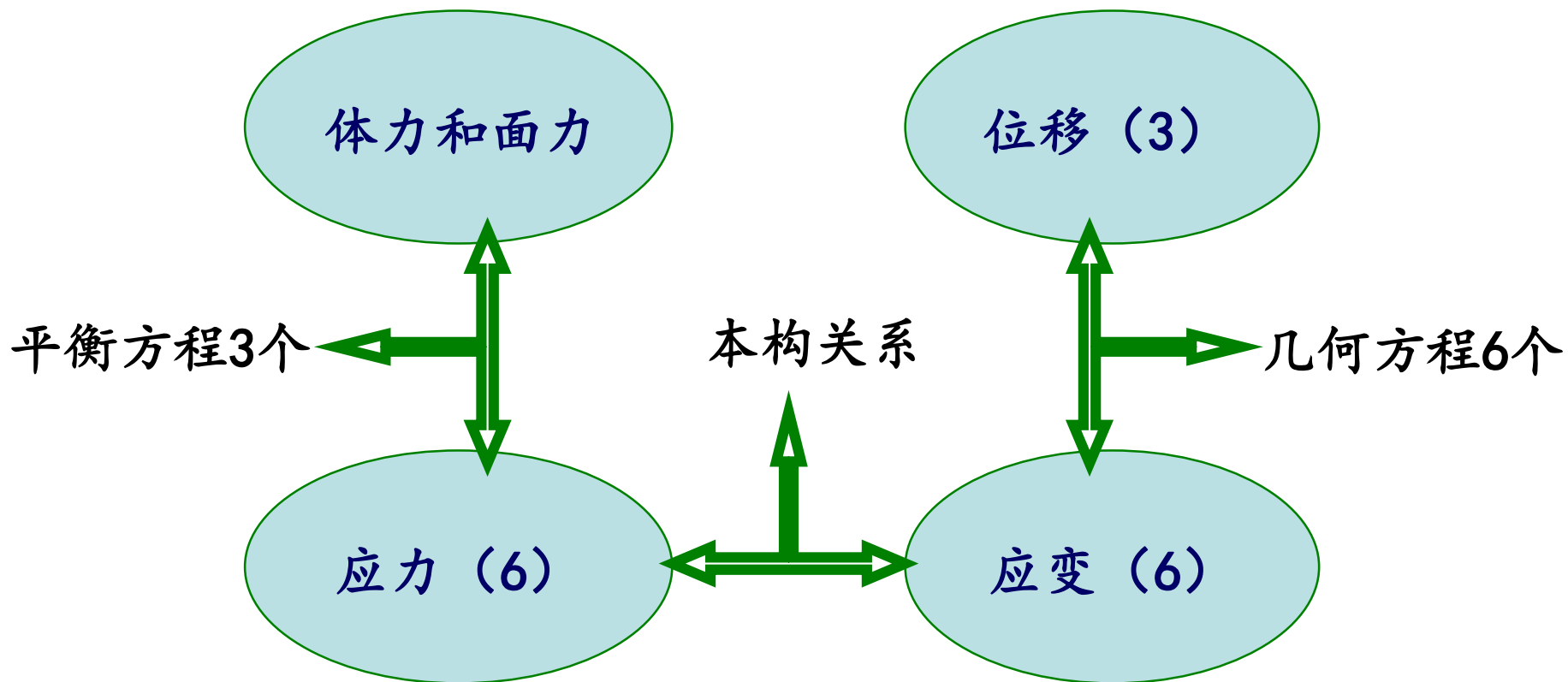
第四章 弹性与塑性应力应变关系

- 概述
- 简单应力状态下的基本试验
- 弹性力学中常用的简化力学模型
- 广义胡克定律
- 特雷斯卡和米泽斯屈服条件
- 塑性应力应变关系
- 德鲁克公设



概述

- 静力平衡条件和几何位移条件都与物体的材料特性无关。



力学问题中各量间关系



概述

建立弹性材料模型的必要性

- (1) 因为弹性模型可很好地描述处于荷载作用下的许多工程材料性，其弹性本构关系已是不同工程问题中得到广泛应用的弹性理论基础；
- (2) 塑性理论也需要弹性本构模型。

基本假定

- (1) 材料特性是与时间无关的。
- (2) 忽略力学和热学过程的相互作用。



概述

塑性力学研究任务

(1) 工程实践中很多问题与塑性变形相关，如金属的压力加工成型（拉拔、滚轧、锻造、冲压和切削）就是利用塑性变形的不可逆性达到加工成型的目的。

(2) 工程结构设计中，允许结构产生一定的塑性变形又不至于导致结构破坏，则可以充分发挥材料的潜能，提高结构的设计承载能力。

塑性力学基本方程

- (1) 描述物体平衡状态的平衡方程
- (2) 描述物体形变的几何方程
- (3) 刻画材料物理状态和力学性质的本构方程



概述

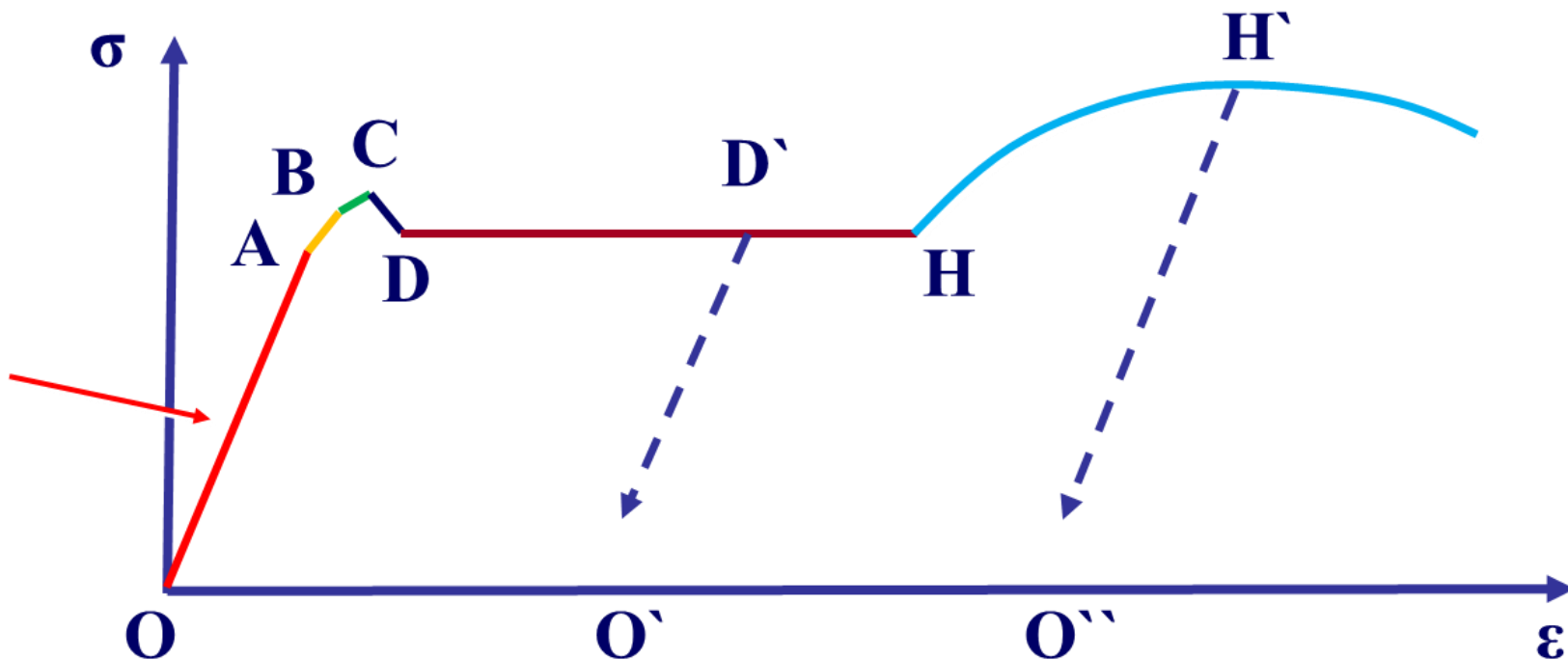
本构关系 (constitutive relation)

- (1) 反映应力应变之间的联系
- (2) **材料的固有特性**：每一种材料，应力、应变有着固有的关系
- (3) **广义Hook定律**：线性
- (4) **增量理论**：非线性，应变与应力状态和变形历史有关，研究应力和应变增强之间的关系



弹性力学&塑性力学

广义胡克定律



A: 比例极限

B: 弹性极限

C: 上屈服极限

D: 下屈服极限(σ_s)



简单应力状态下的基本试验

单轴拉伸（或压缩）试验和静水压力试验是塑性力学中的两个基本试验，塑性应力应变关系的建立是以这些实验资料为基础的。



标准拉伸、压缩实验

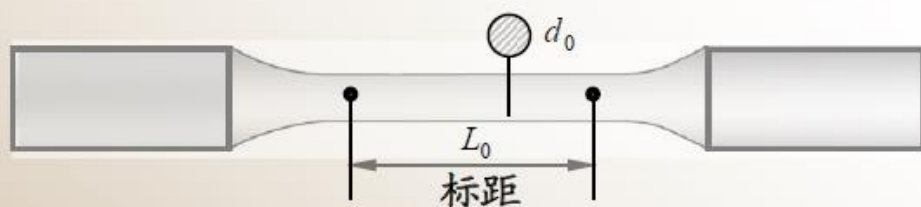
试验条件 常(室)温、准静态加载

试验设备 材料试验机

Ziwek, MTS, INSTRON;

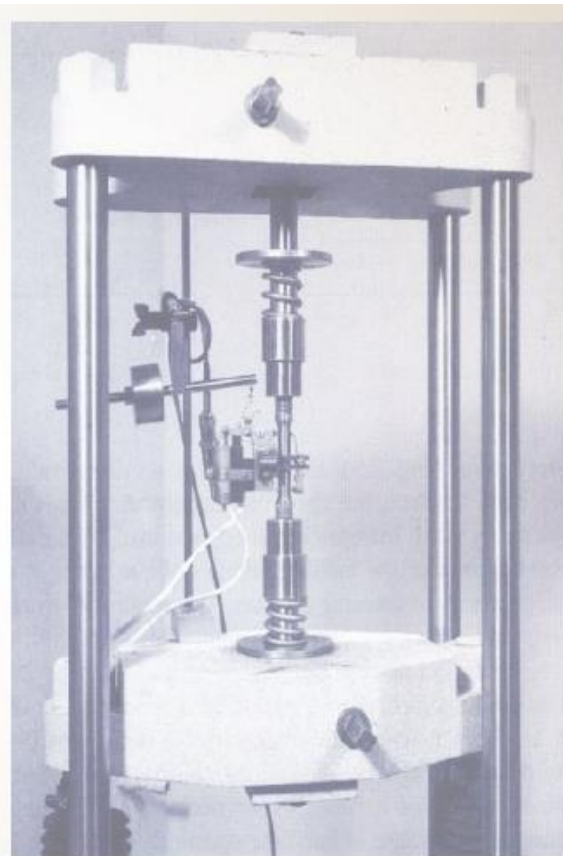
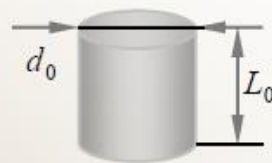
试件 GB6397-86 《金属拉伸试验试样》

拉伸试件 $L_0 = 10d_0$ 或 $L_0 = 5d_0$



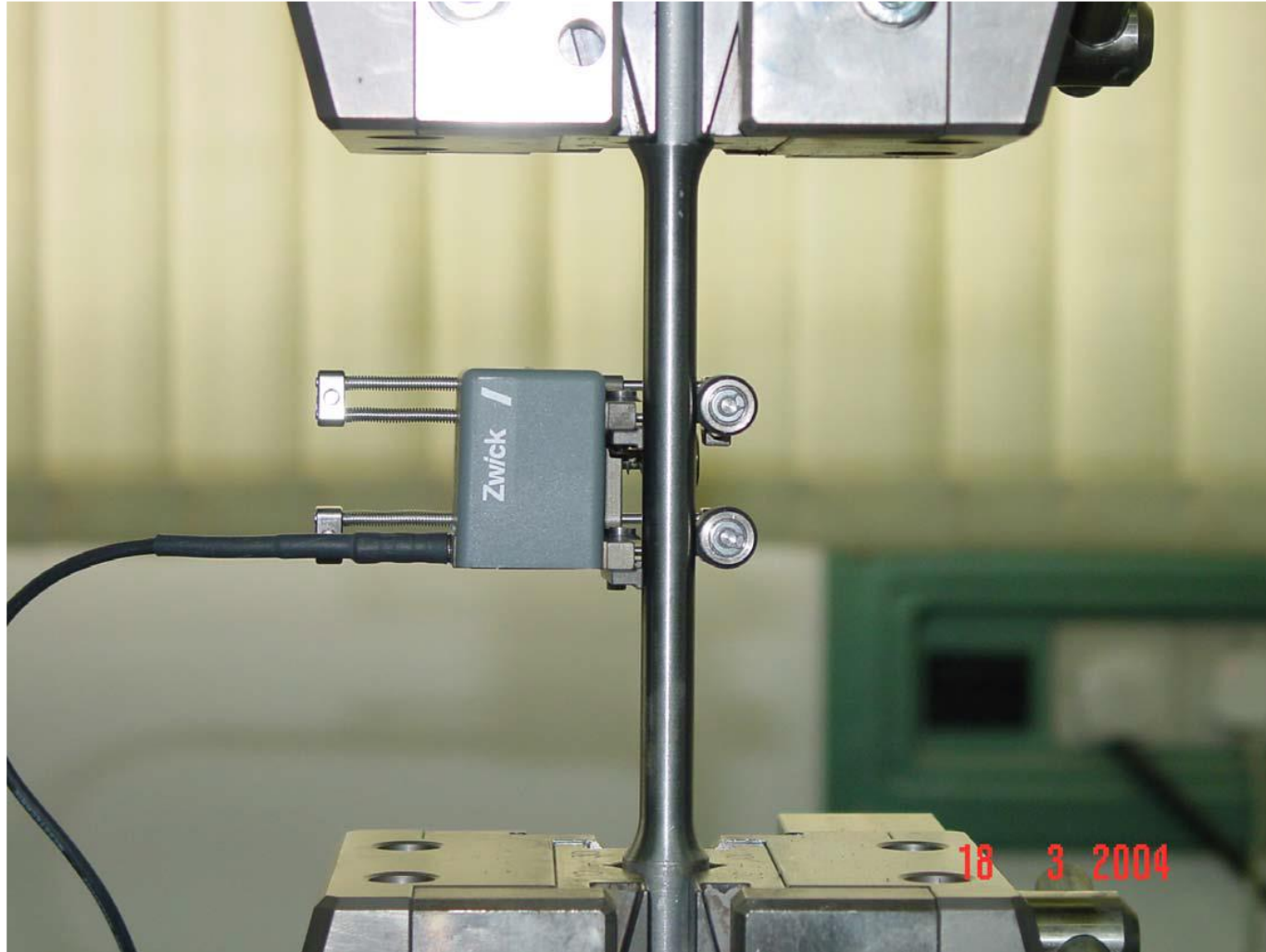
压缩试件

$L_0 = (1.5 \sim 3.0)d_0$





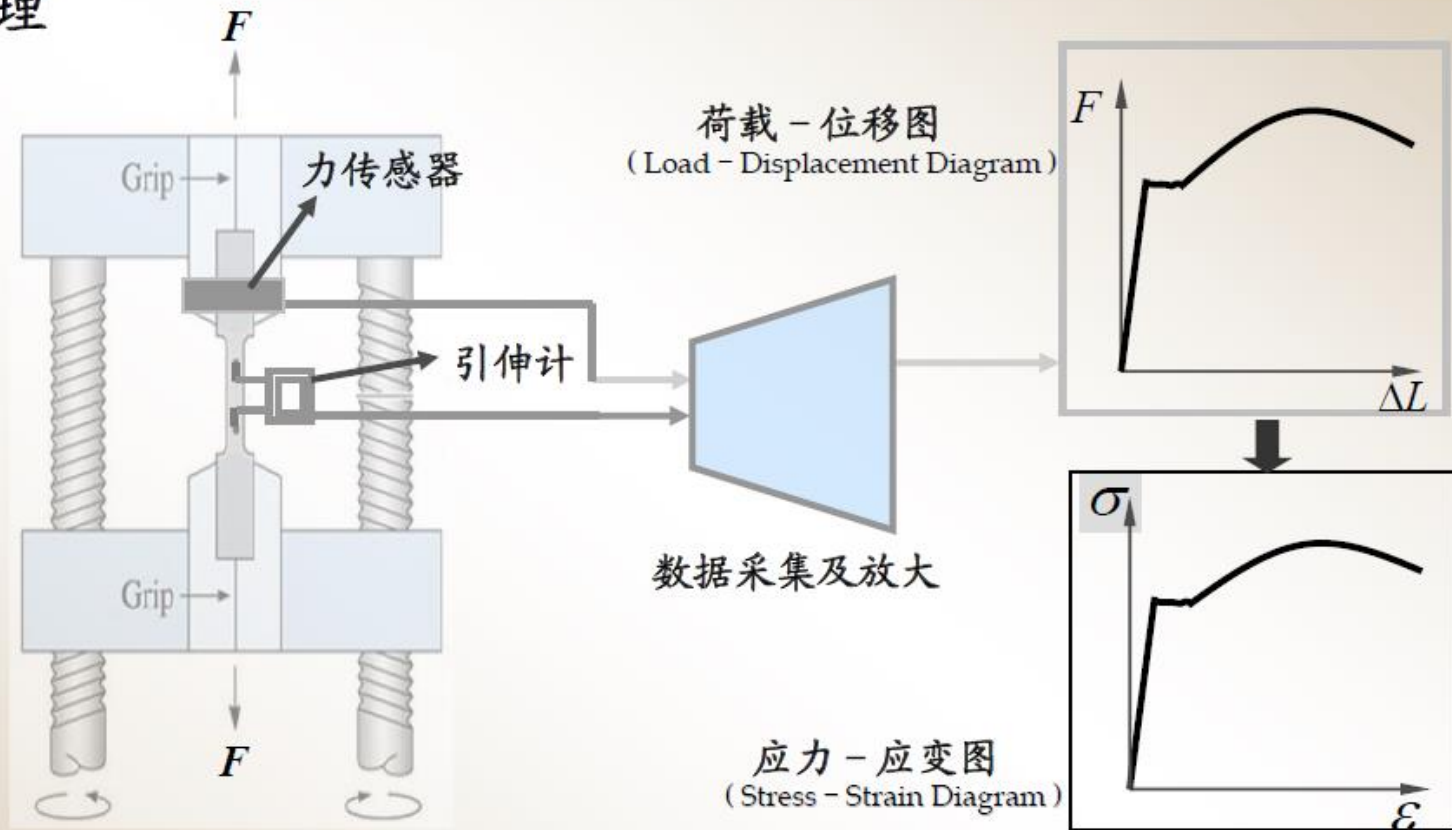
标准拉伸、压缩实验





标准拉伸、压缩实验

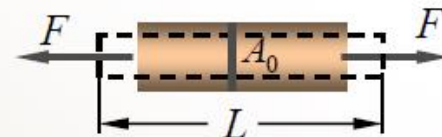
试验原理



名义或工程应力和应变 (Nominal or Engineering Stress and Strain)

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

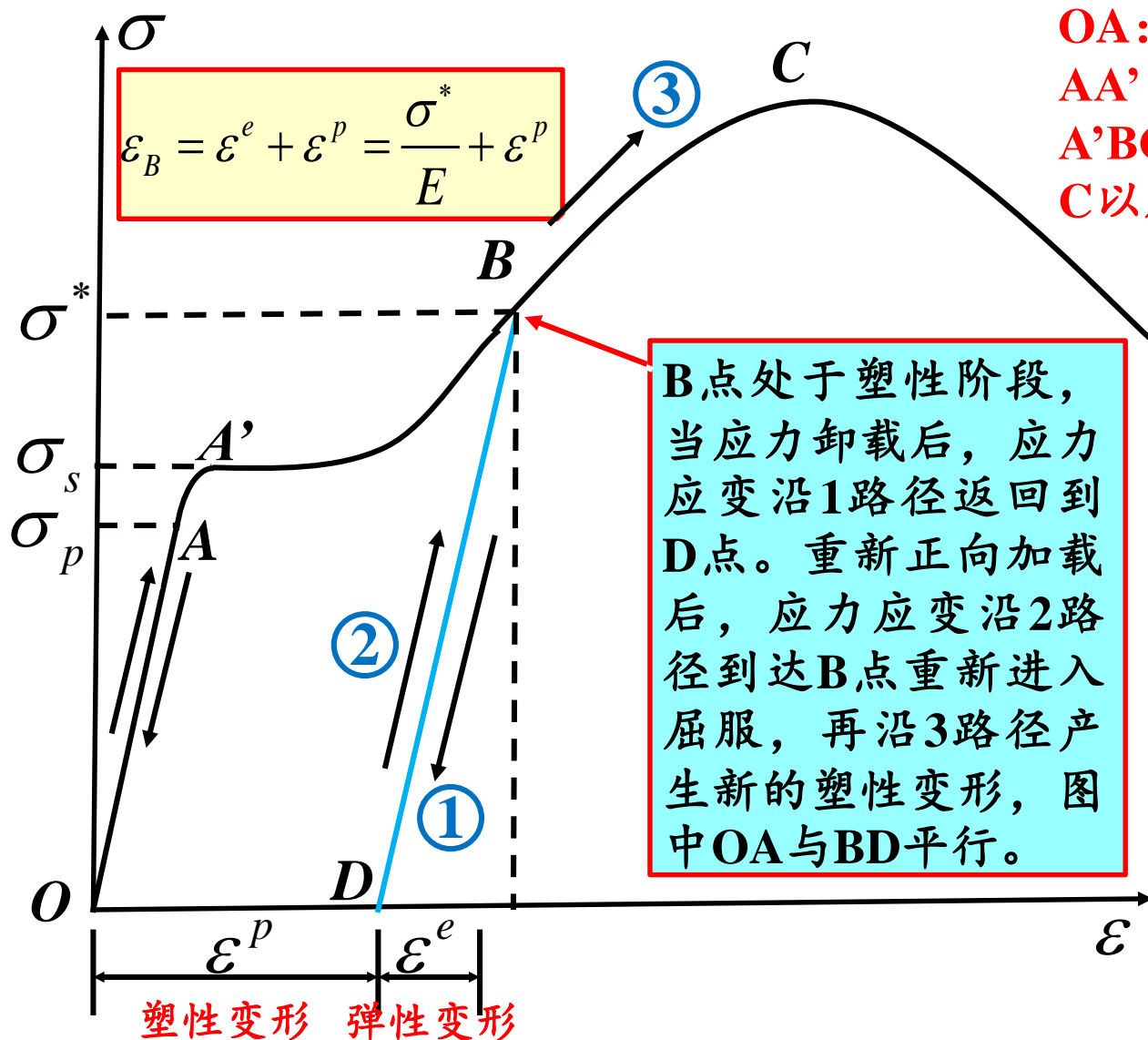
$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}$$





单轴应力-应变关系曲线

简单拉伸（低碳钢）

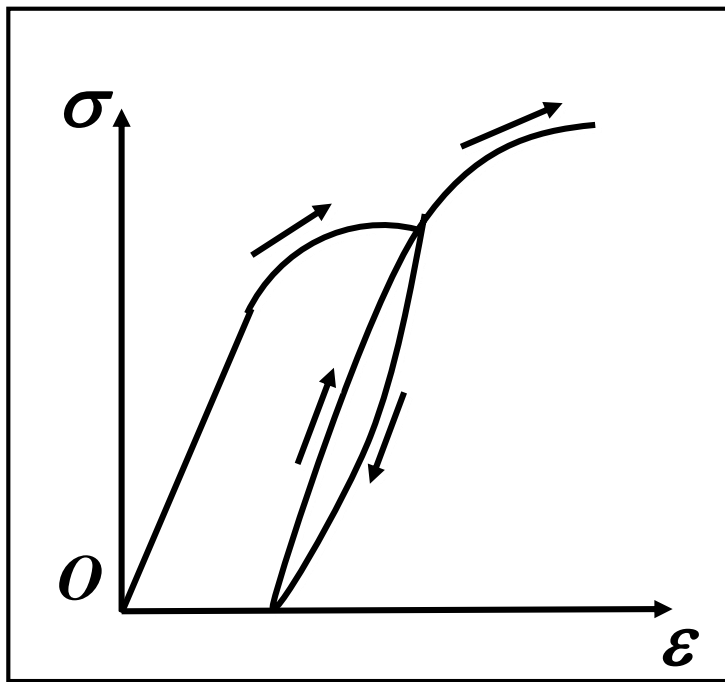


- OA:** 线弹性变形阶段
- AA':** 非线弹性变形阶段
- A'BC:** 塑性硬化阶段
- C以后:** 塑性软化阶段

- 弹性阶段若进行卸载，变形仍按照原来的应力应变关系曲线返回初始状态
- 应变软化通常伴随着试件局部颈缩
- 硬化阶段中屈服极限不断提高，应变硬化相当于材料因塑性变形其内部抵抗变形的能力得到增强。



卸载和重新加载



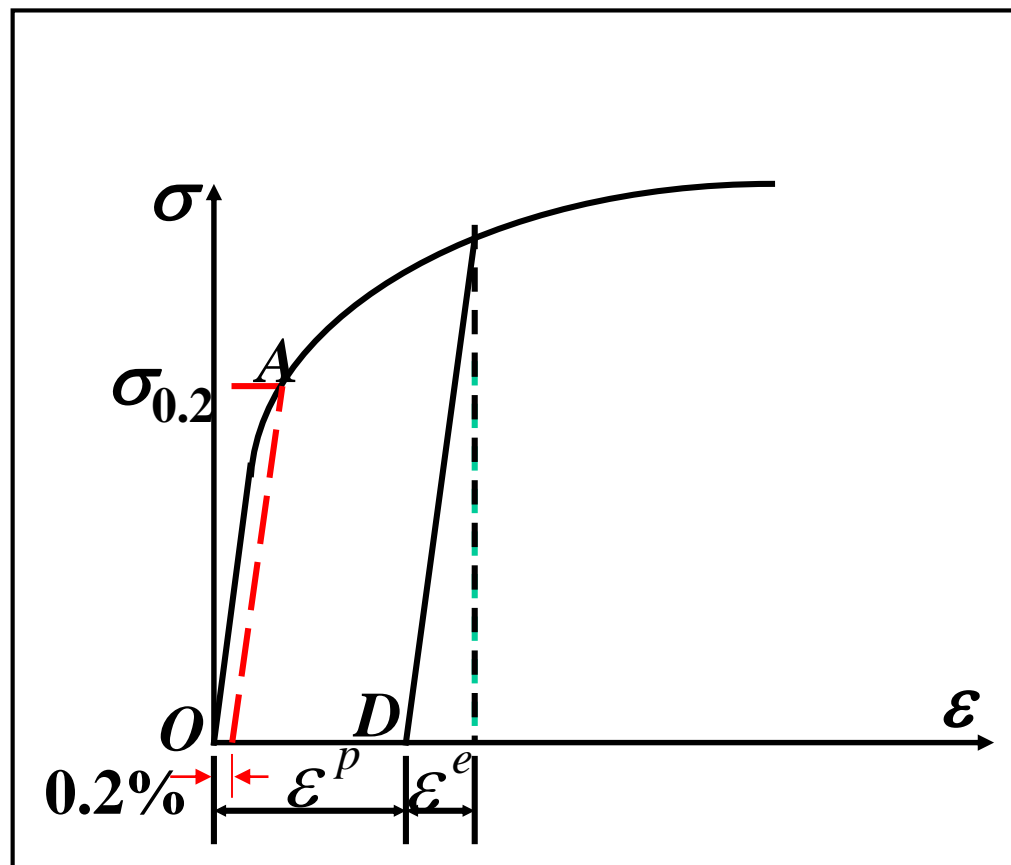
实际材料中卸载和再加载曲线一般不能完全重合，会形成一个小的**滞回环**，滞回环的面积代表了卸载和再加载循环中的**能量损失**，一般来说，损失的能量通常是很小的。



单轴应力-应变关系曲线

无明显屈服

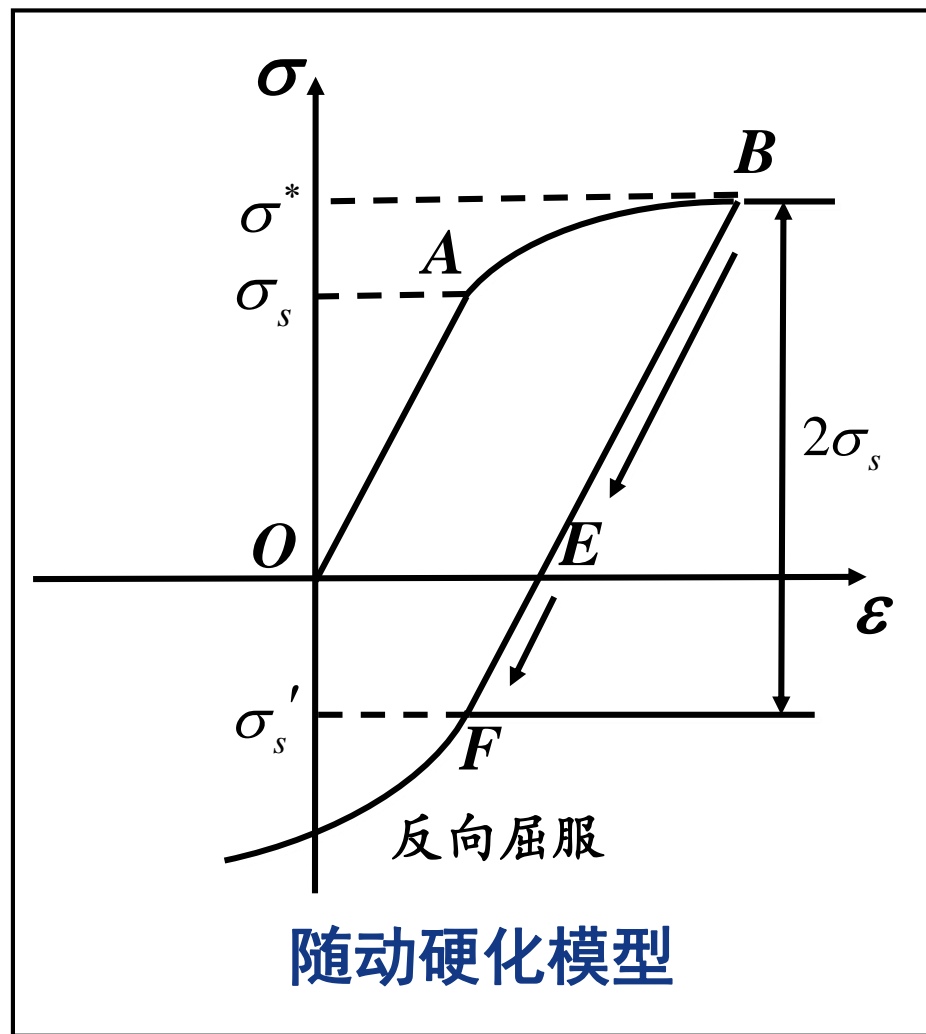
对于无明显屈服阶段的金属材料，如中碳钢，高强度合金钢，有色金属等
规定：屈服极限用产生0.2%塑性应变所对应的应力表示，记为 $\sigma_{0.2}$





单轴应力-应变关系曲线

反向加载



Bauschinger效应：因压缩屈服应力提高，而导致反向加载时，拉伸屈服应力降低。

一般认为是由于多晶材料晶界间的残余应力引起的。包辛格效应使材料具有各向异性性质。

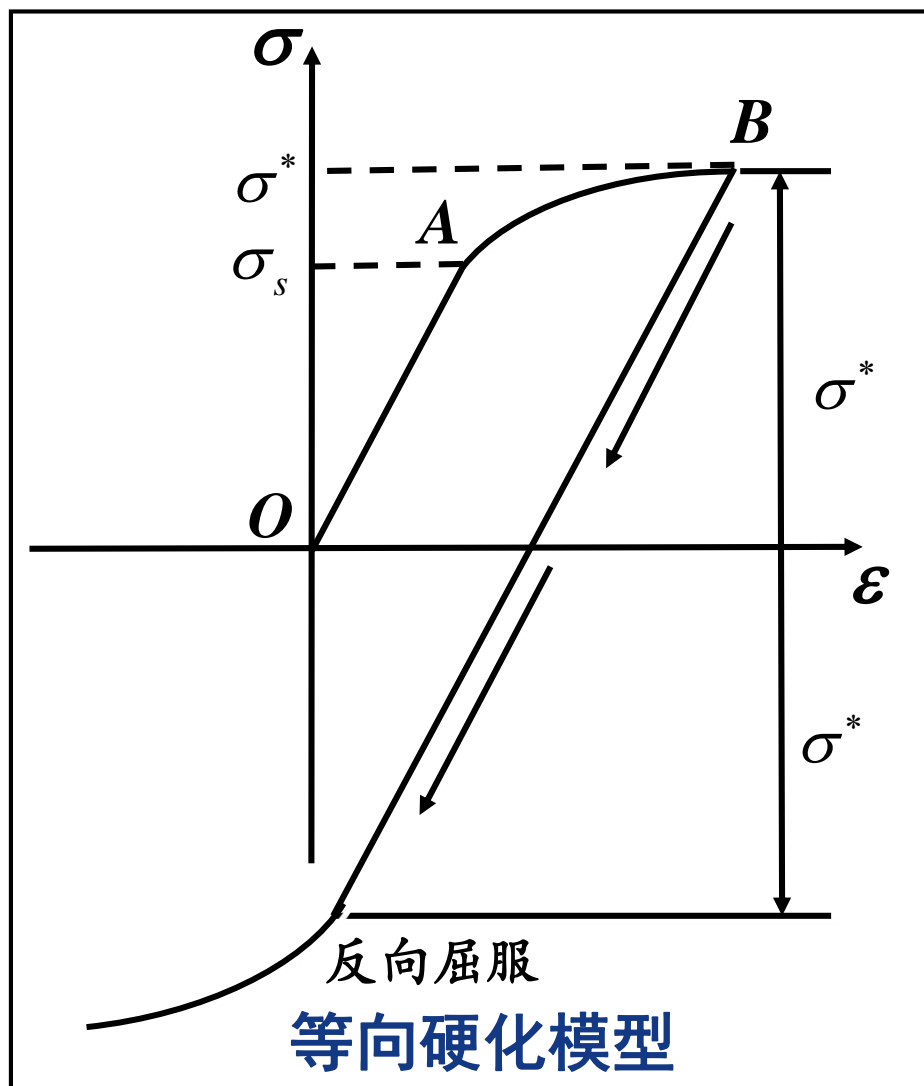
若反向屈服应力的降低程度正好等于正向屈服应力的提高程度，则称为**随动硬化**。

$$\sigma^* - \sigma'_s = 2\sigma_s$$



单轴应力-应变关系曲线

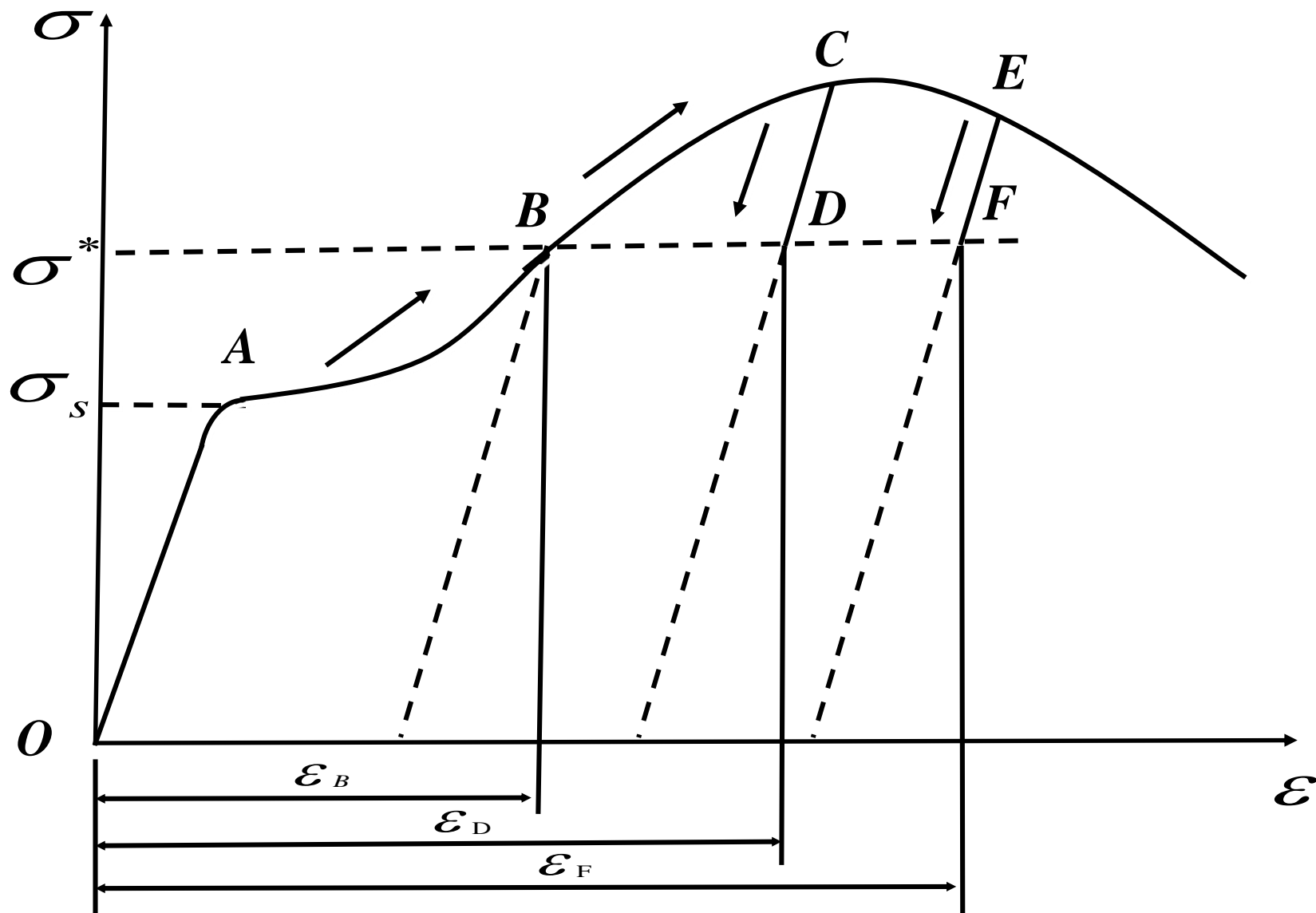
反向加载



有一些材料并没有Bauschinger效应，相反，因拉伸提高了材料的屈服应力，在反向加载即进行压缩时，屈服应力也得到同样程度地提高，这种硬化特性称之为**等向硬化**。



不同应力路径下的应变





塑性变形特点

- 由于塑性应变不可恢复，所以外力所作的**塑性功**具有不可逆性，或称为**耗散性**。在一个加载卸载的循环中外力作功恒大于零，这一部分能量被材料的塑性变形损耗掉了。
- 由于应力—应变关系的非线性，应力与应变间不存在单值对应关系，同一个应力可对应不同的应变，反过来也是如此。这种**非单值性**是一种路径相关性，即需要考虑加载历史。
- 当受力固体产生塑性变形时，将同时存在有产生弹性变形的**弹性区域**和产生塑性变形的**塑性区域**。并且随着载荷的变化，两区域的**分界面也会产生变化**。



静水压力试验

Bridgman对金属材料在静水压力（各向均匀等压）作用下的体积改变进行了试验研究：

(1) 体积变化：

体积应变与静水压力的关系：

$$\varepsilon_v = ap - bp^2$$

	铜	铝	铅
a	7.31×10^{-7}	13.34×10^{-7}	23.73×10^{-7}
b	2.7×10^{-12}	3.5×10^{-12}	17.25×10^{-12}

铜：当 $p=1000\text{MPa}$ 时， $ap=7.31 \times 10^{-4}$ ，而 $bp^2=2.7 \times 10^{-6}$ 。说明第二项远小于第一项，可以略去不计。

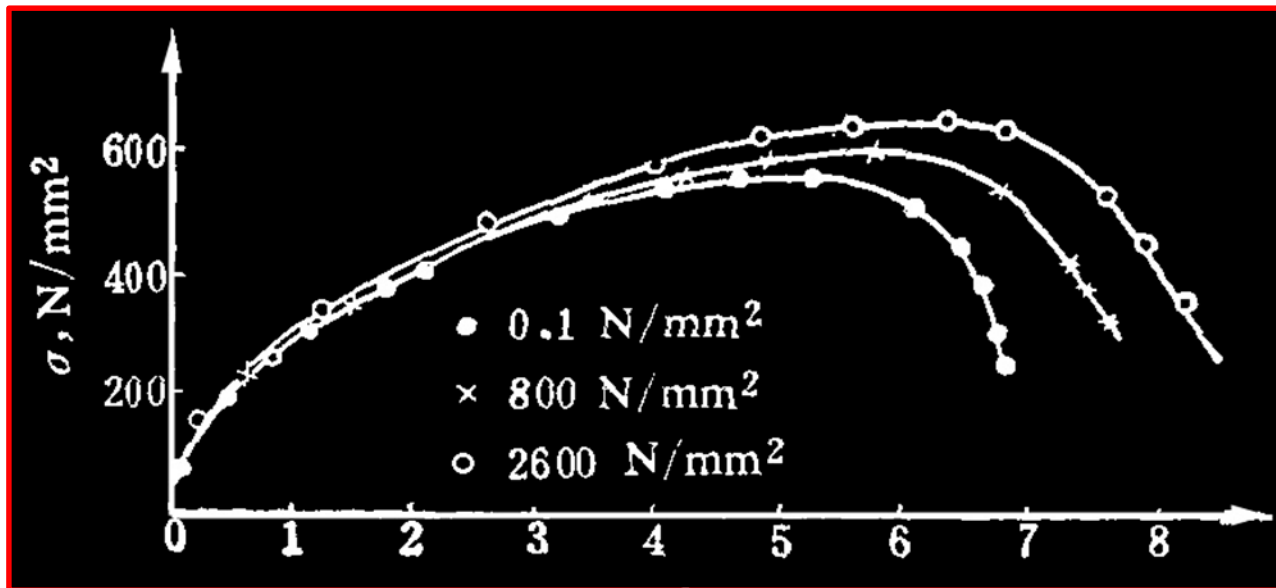
体积变形是弹性的，没有塑性体积变形产生

卸去静水压力后，材料并没有残余的体积应变。试验还表明，这种弹性体积变形很小，当**发生较大塑性变形时，可忽略弹性体积变化**，即认为在塑性阶段，材料是不可压缩的。



静水压力试验

(2) 静水压力对屈服极限的影响:



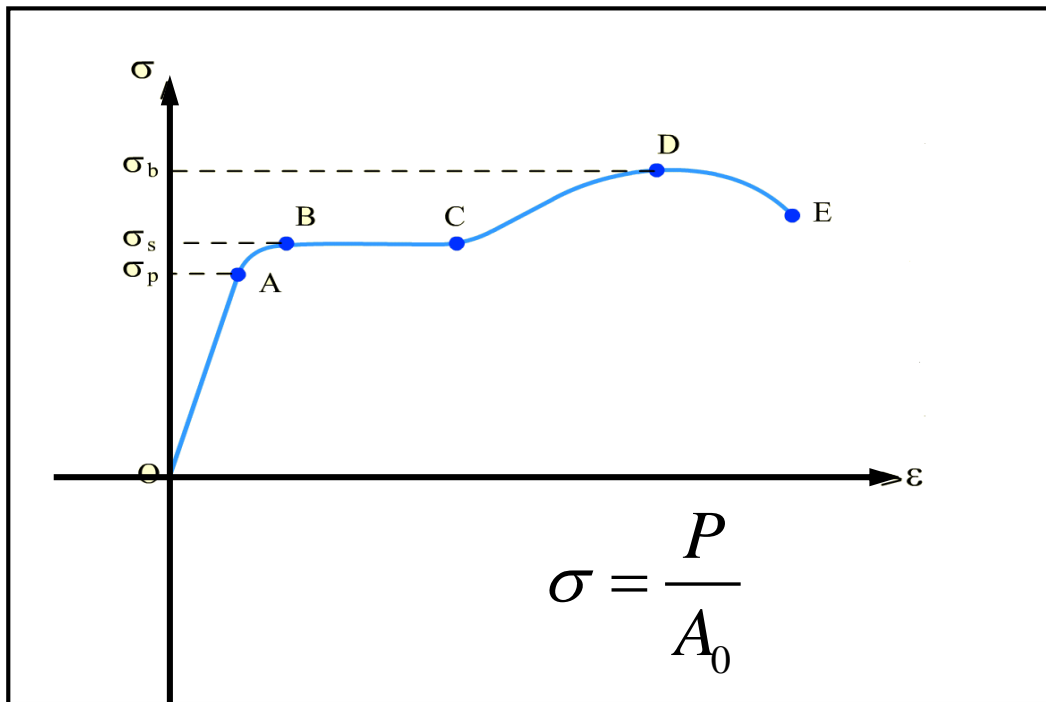
Bridgman对镍、铌的拉伸试验表明，静水压力增大，塑性强化效应增加不明显，但颈缩和破坏时的塑性变形增加了。

材料的屈服和塑性变形与静水压力无关

对钢、铜等金属材料，可以认为塑性变形不受静水压力的影响。但对于铸铁、岩石、土壤等材料，静水压力对屈服应力和塑性变形的大小都有明显的影响，不能忽略。



真实应力应变



塑性变形较大时， σ - ϵ 曲线不能真正反映加载和变形的状态。

例如颈缩阶段， σ - ϵ 曲线上试件的应变增加而应力反而减小，与实际情况不符。

实际上颈缩后，由于局部的实际横截面积的减小，局部拉应力仍在增加。



真实应力应变

真实应力 $\sigma_T = \frac{P}{A} > \frac{P}{A_0} = \sigma$ 名义应力

材料体积不可压缩: $A_0 l_0 = A l$

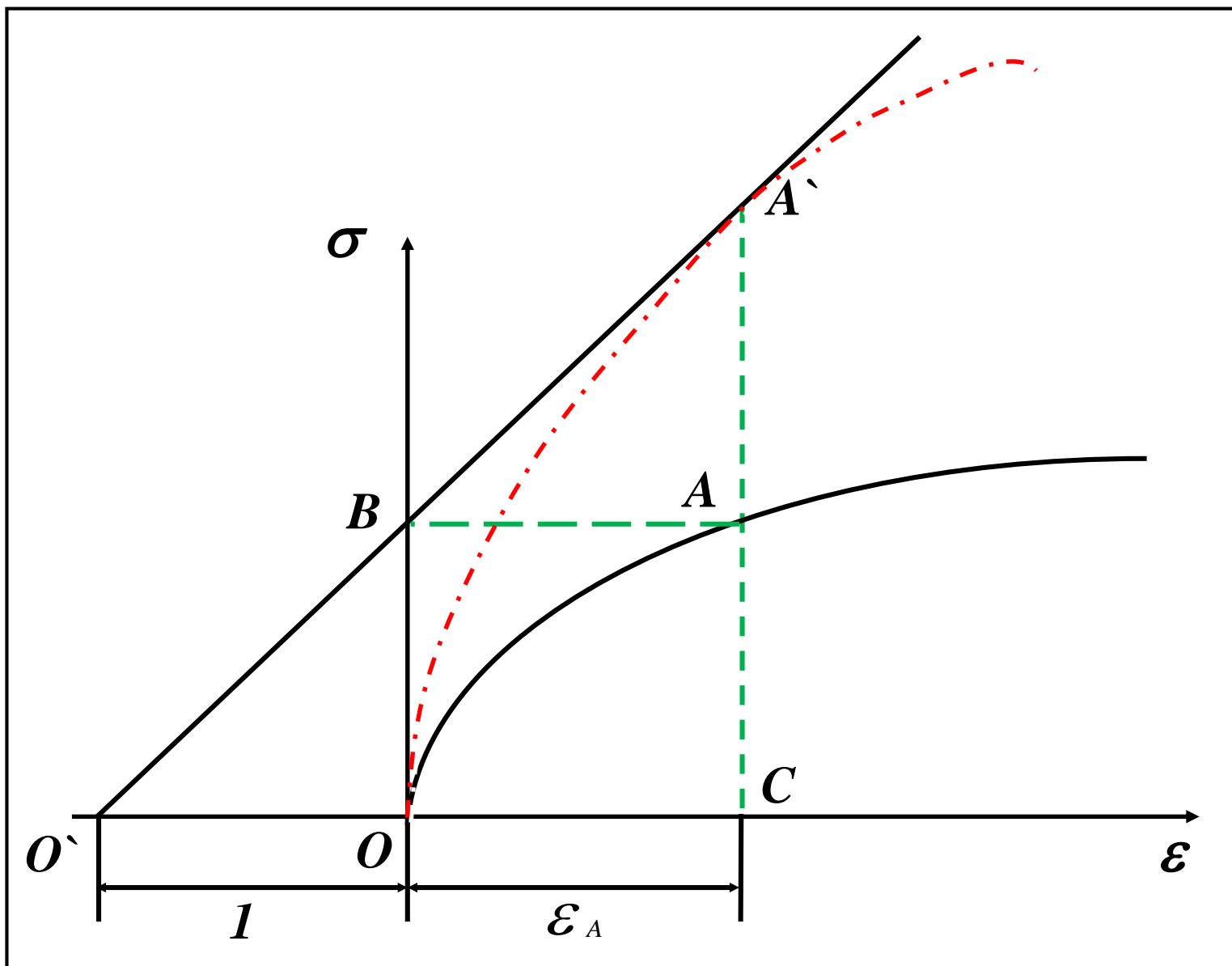
A 、 l —瞬时截面积、杆长 A_0 、 l_0 —初始截面积、杆长

$\Rightarrow \sigma_T = \frac{P}{A} = \frac{Pl}{A_0 l_0} = \sigma \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right) = \sigma (1 + \varepsilon)$ 名义应变

名义应力—应变曲线 \Rightarrow 真实应力—应变曲线



真实应力应变曲线

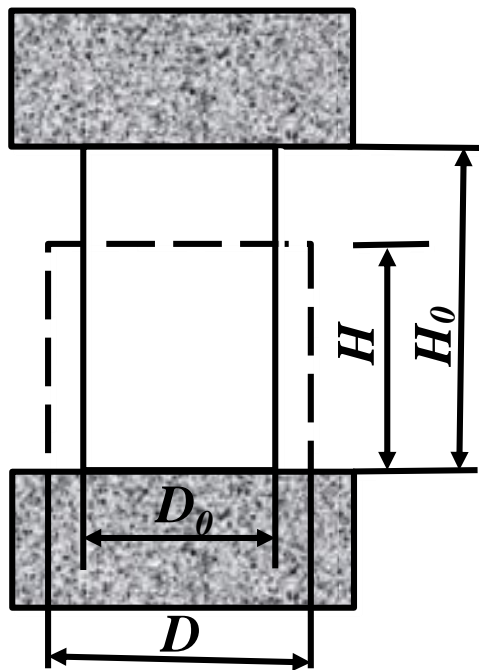




真实应力应变曲线

压缩试验

拉伸试验的最大应变受到颈缩的限制，一般应变可达1左右，为了获得加大程度塑性变形时的真实应力-应变曲线，往往采用压缩试验。



压缩时的应变为：
$$\bar{\varepsilon} = \frac{H_0 - H}{H_0} = 1 - \frac{H}{H_0}$$

由上式可得：
$$\frac{H}{H_0} = 1 - \bar{\varepsilon}$$

压缩时的对数应变为：
$$\varepsilon^* = \ln \frac{H_0}{H} = \ln \left[\frac{1}{1 - \bar{\varepsilon}} \right]$$

材料体积不可压缩：
$$A_0 H_0 = A H = \text{const}$$

➡ 单向压缩应力：

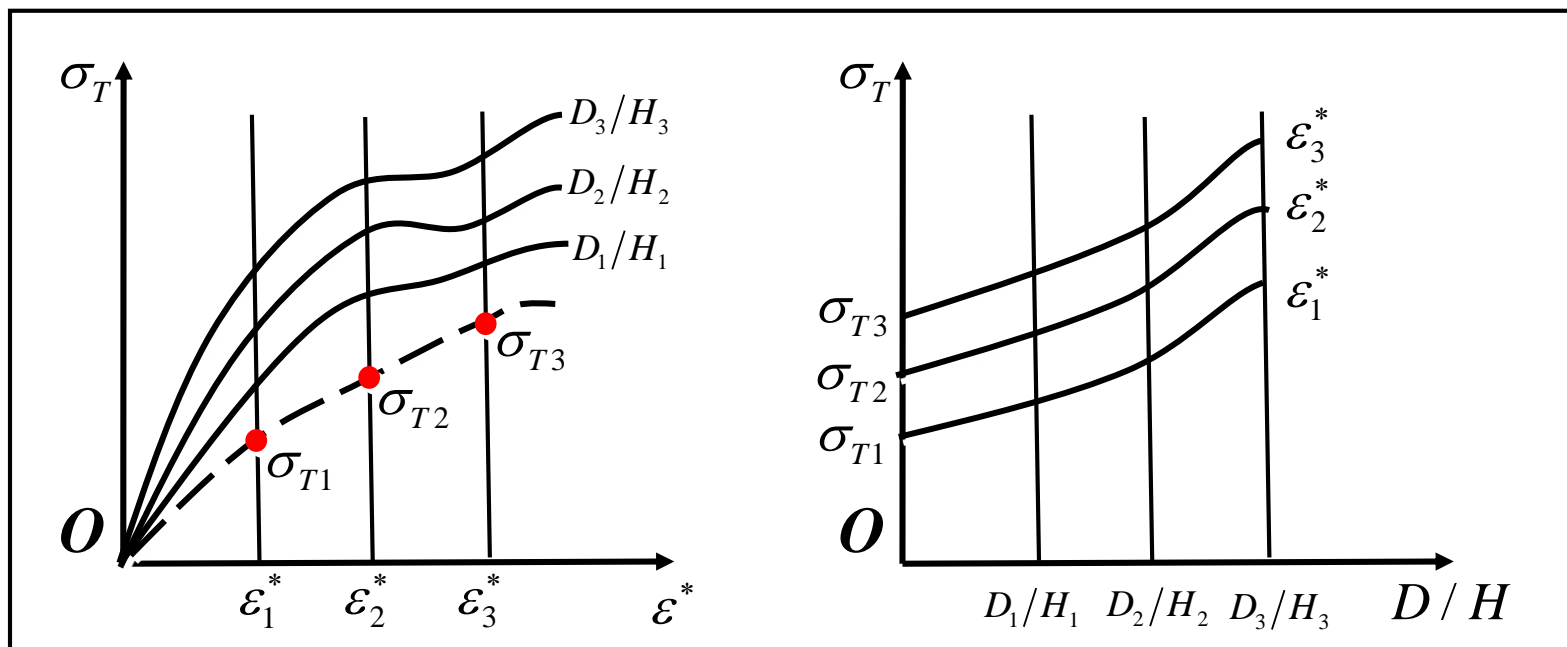
$$\varepsilon_T = \frac{P}{A} = \frac{P}{A_0 \frac{H_0}{H}} = \frac{P}{A_0} (1 - \bar{\varepsilon})$$



真实应力应变曲线

压缩试验

圆柱试件的压缩曲线受 D_0/H_0 比值的影响较大， D_0/H_0 比值趋于零时，摩擦力的影响也将消失，我们采用外推的方法间接地推出 $D_0/H_0=0$ 时的真实应力。



虚线所示曲线则为所求的真实应力-应变曲线



弹塑性力学中常用的简化力学模型

对于不同的材料，不同的应用领域，应该采用不同的变形体模型。

选取力学模型的原则：

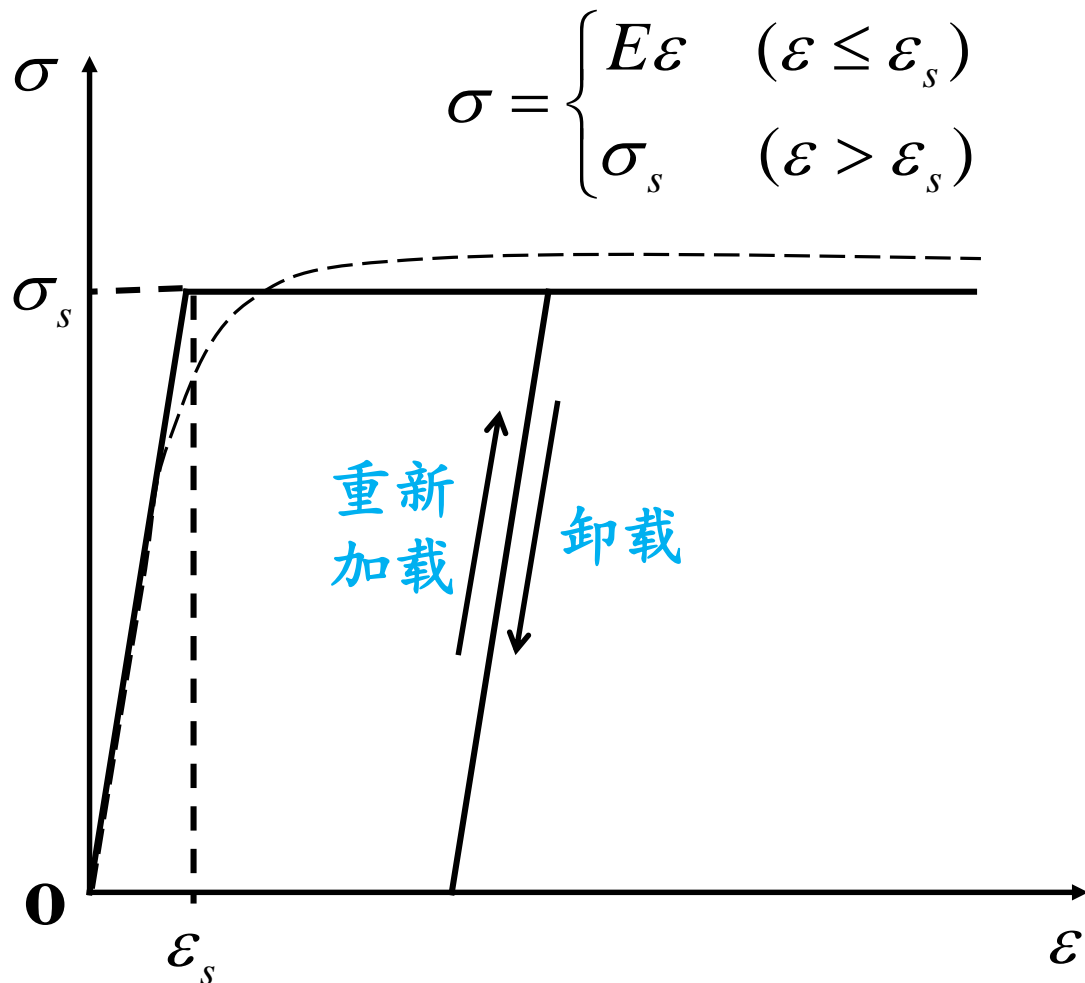
1. 符合材料的实际情况
2. 反映结构或者构件中真实的应力、应变情况
3. 数学表达时足够简单
4. 求解具体问题，不会出现较大的数学困难



弹塑性力学中常用的简化力学模型

(1) 理想弹塑性模型

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & (\varepsilon \leq \varepsilon_s) \\ \sigma_s & (\varepsilon > \varepsilon_s) \end{cases}$$



缺点：公式只包括了材料常数 E 和 σ_s ，故不能描述应力应变曲线的全部特征；

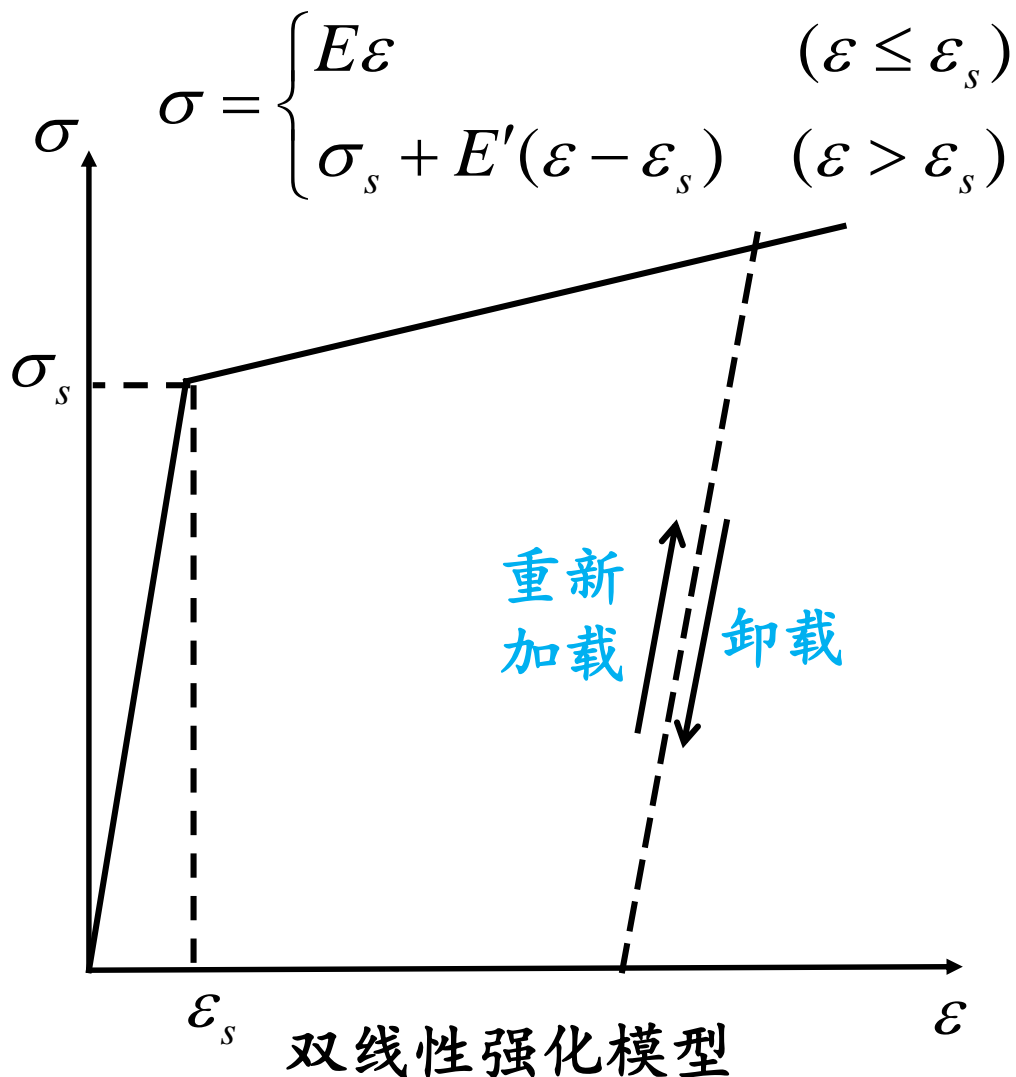
在 $\varepsilon = \varepsilon_s$ 处解析式有变化，给具体计算带来困难

优点：理想弹塑性模型抓住了**韧性材料**的主要特征，因而与实际情况符合得较好。



弹塑性力学中常用的简化力学模型

(2) 线性强化弹塑性模型



缺点：具体计算比理想弹塑性模型复杂得多

优点：对于具有显著强化性质的材料符合性较好



弹塑性力学中常用的简化力学模型

(3) 幂强化弹塑性模型

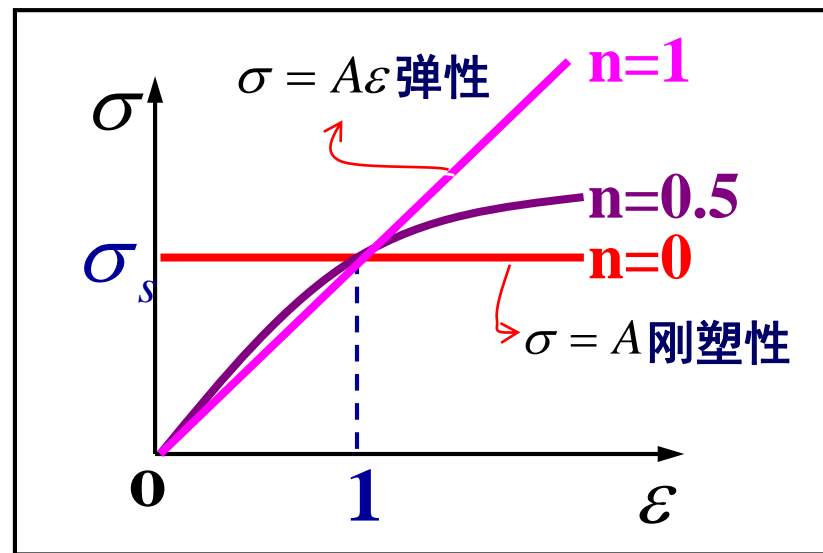
幂强化力学模型

$$\sigma = A\varepsilon^n$$

n —幂强化系数，介于0与1之间

缺点：只有两个参数 A 和 n ，因而也不可能准确地表示材料的所有特征。

优点：解析式比较简单，而且 n 可以在较大范围内变化。

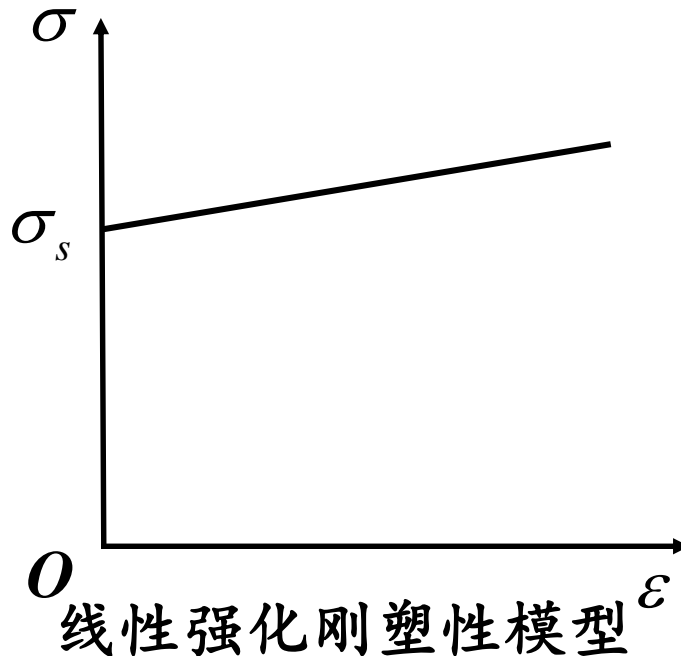
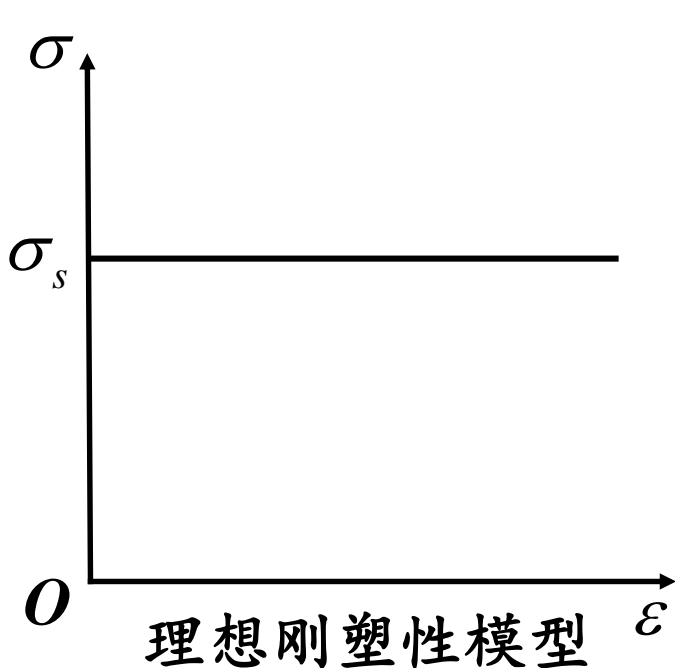




弹塑性力学中常用的简化力学模型

(4) 刚塑性模型 $\varepsilon_e \ll \varepsilon_p$

在实际工程问题中，弹性应变比塑性应变小得多，可以忽略弹性应变。特别适宜于塑性极限载荷的分析。



采用刚塑性模型给数学计算带来较大简化。

以上几种力学模型中，理想弹塑性力学模型、理想刚塑性力学模型、幂强化力学模型应用最为广泛。



广义胡克定律

1678年，R. Hooke发表了固体受力后应力和应变关系的定律——胡克定律。“有多大伸长，就有多大力”

材料拉伸曲线在应力小于弹性比例极限时应力和应变之间关系是线弹性的

应力与应变之间的关系可以用胡克定律表示：

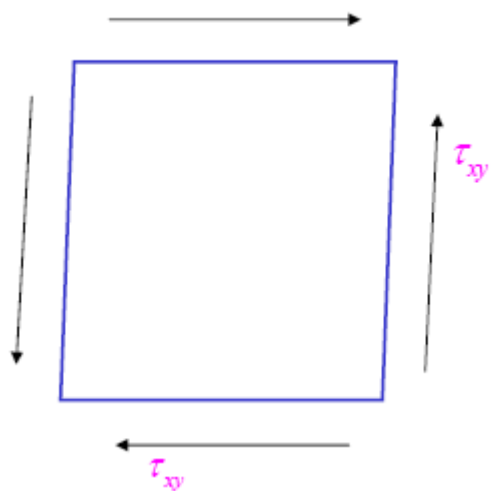
$$\sigma = E\varepsilon$$



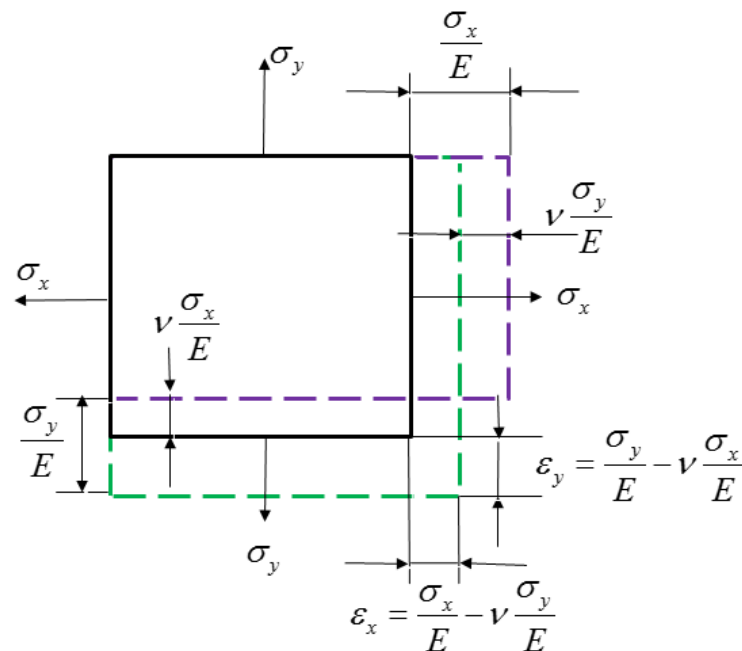
广义胡克定律

对于各向同性材料，根据实验结果可知，在小变形的情况下，

- 正应力只与线应变有关；
- 剪应力只与剪应变有关；
- 应力的叠加原理是适用的



纯剪应力状态

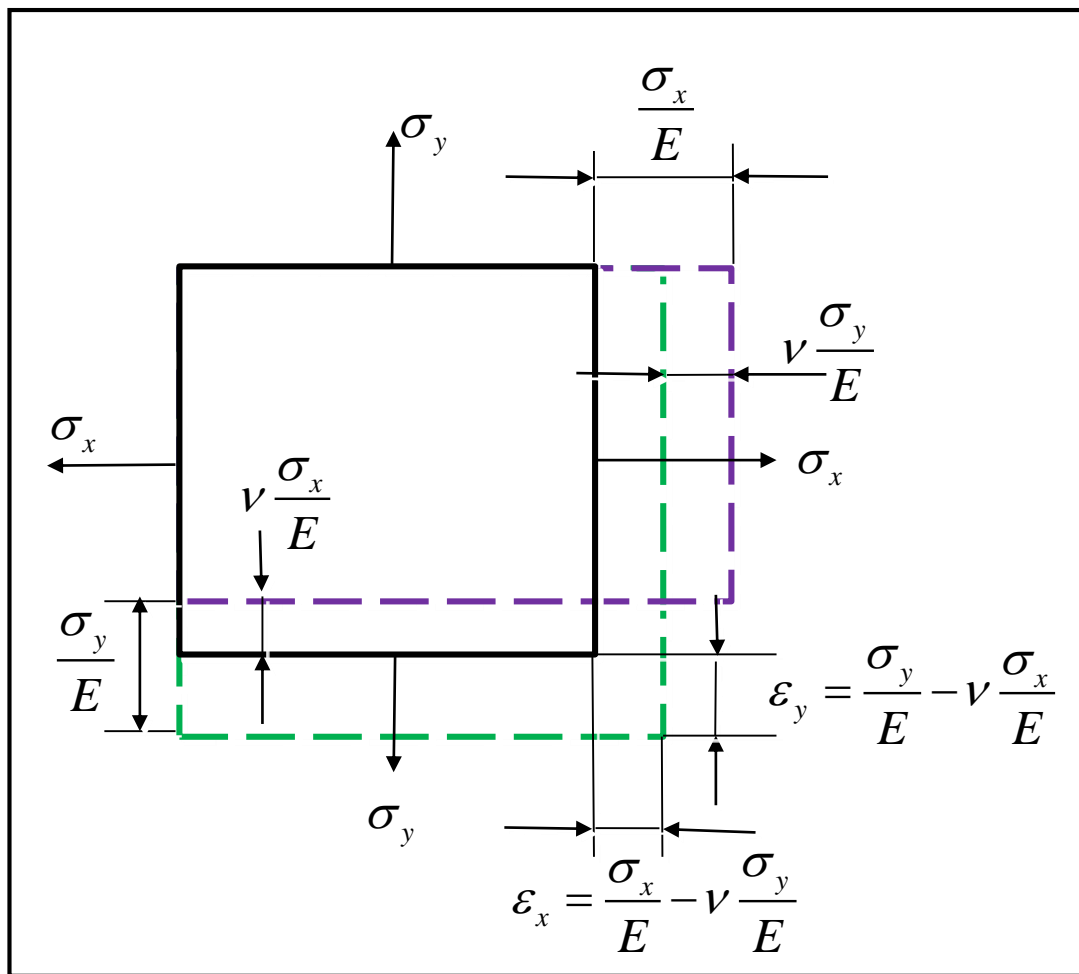


平面应力时的胡克定律



广义胡克定律

平面应力时的胡克定律



由于应力 σ_x 的作用：
 x 方向应变为 $\frac{\sigma_x}{E}$

y 方向应变为 $-\nu \frac{\sigma_x}{E}$

由于应力 σ_y 的作用：
 x 方向应变为 $-\nu \frac{\sigma_y}{E}$

y 方向应变为 $\frac{\sigma_y}{E}$

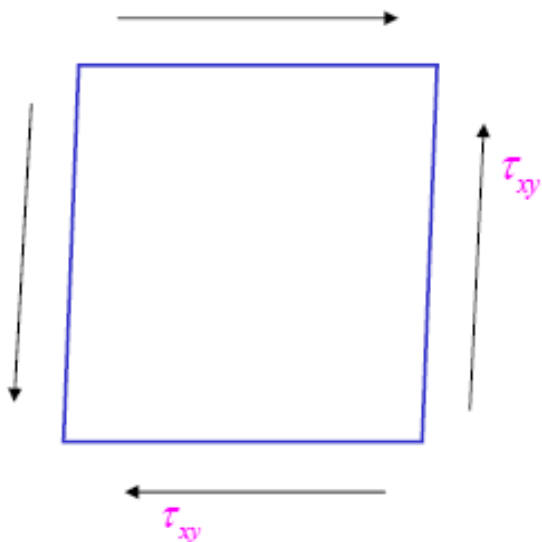
两个方向应力同时作用时：

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \end{cases}$$



广义胡克定律

纯剪应力状态



在纯剪应力状态下，由**实验结果**可知，在线弹性阶段应力与应变的关系：

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

式中 $G = E/2(1+\nu)$ 为剪切弹性模量



广义胡克定律

三维应力各向同性均匀材料—广义胡克定律：

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{array} \right.$$



广义胡克定律

三个应变公式两边相加：

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\text{令： } \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \theta = 3\varepsilon_0 \quad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \Theta = 3\sigma_0$$

$$\text{则上式可写为： } \theta = \frac{1-2\nu}{E} \Theta \quad \text{or} \quad \varepsilon_0 = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_0$$

广义Hook定律可写为

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_x - \nu\Theta] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_y - \nu\Theta] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_z - \nu\Theta] & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned}$$



广义胡克定律

求应变偏量分量：

$$\begin{aligned} e_x = \varepsilon_x - \varepsilon_0 &= \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_x - \nu\Theta] - \frac{1-2\nu}{E} \sigma_0 \\ &= \frac{1+\nu}{E} (\sigma_x - \sigma_0) \end{aligned}$$

应变偏量分量 $\underline{e_x} = \frac{1+\nu}{E} s_x = \frac{1}{2G} \underline{s_x}$ 应力偏量分量

同理可得：

$$e_y = \frac{1}{2G} s_y \quad e_z = \frac{1}{2G} s_z$$



广义胡克定律

$$e_x = \frac{1}{2G} s_x \quad e_y = \frac{1}{2G} s_y \quad e_z = \frac{1}{2G} s_z$$

$$\frac{e_x}{s_x} = \frac{e_y}{s_y} = \frac{e_z}{s_z} = \frac{\gamma_{xy}}{2\tau_{xy}} = \frac{\gamma_{yz}}{2\tau_{yz}} = \frac{\gamma_{zx}}{2\tau_{zx}} = \frac{1}{2G}$$

主应力偏量和主
应变偏量表示：

$$\frac{e_1}{s_1} = \frac{e_2}{s_2} = \frac{e_3}{s_3} = \frac{1}{2G}$$

$$\frac{e_1 - e_2}{s_1 - s_2} = \frac{e_2 - e_3}{s_2 - s_3} = \frac{e_3 - e_1}{s_3 - s_1} = \frac{1}{2G}$$

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = \frac{1}{2G}$$

在弹性变形阶段，应力圆和应变圆是成比例的。



广义胡克定律

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_2}{\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_2} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1} \quad \longrightarrow \quad \mu_\sigma = \mu_\varepsilon$$

$$\begin{aligned} \mu_\sigma &= \sqrt{3} \tan\left(\omega_\sigma - \frac{\pi}{6}\right) \\ \mu_\varepsilon &= \sqrt{3} \tan\left(\omega_\varepsilon - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \omega_\sigma = \omega_\varepsilon$$

在弹性变形阶段，应力主轴和应变主轴是重合的，同时各应力分量与相应的应变分量的比值是相同的。



广义胡克定律

各向同性体的胡克定律还可以用应变表示应力。

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_x - \nu\Theta] = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_x - \nu \frac{E}{1-2\nu}\theta]$$

$$\longrightarrow \sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_x + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\theta$$

引入拉梅 (Lamé) 弹性常数

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

且有 $2G = \frac{E}{1+\nu}$ 可得:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} \end{aligned} \right\}$$



广义胡克定律

用平均应力表示平均应变：

$$\Theta = \frac{E}{1-2\nu} \theta = (3\lambda + 2G)\theta$$

令： $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ (体积弹性模量)

$$\Rightarrow \Theta = 3K\theta$$

体积胡克定律

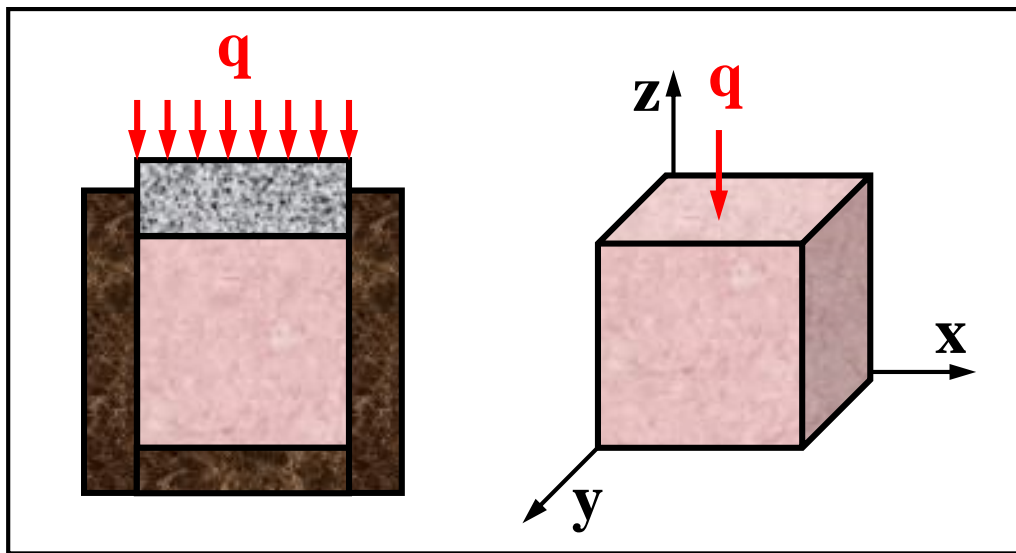




例题1

图示橡皮立方体放在同样大小的铁盒内，其上用铁盖封闭，铁盖上受压力 q 的作用。设铁盖与铁盒可以作为刚体看待，假设橡皮与铁盒之间无摩擦阻力。

试求铁盒内侧面受的压力，橡皮块的体积应变和橡皮块中最大的剪应力。



解：

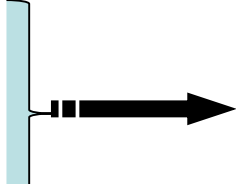
铁盒视为刚体

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0$$

$$\sigma_z = -q$$



代入空间问题的胡克定律

$$0 = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y - q)]$$
$$0 = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x - q)]$$

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\mu}{1-\mu}q$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[-q - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = -\frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{E(1-\mu)}q$$

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -\frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{E(1-\mu)}q$$

橡皮和铁盒之间无摩擦力 $\Rightarrow \tau_{ij} = 0$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\frac{\mu}{1-\mu}q, \sigma_3 = -q \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{(1-2\mu)}{2(1-\mu)}q$$

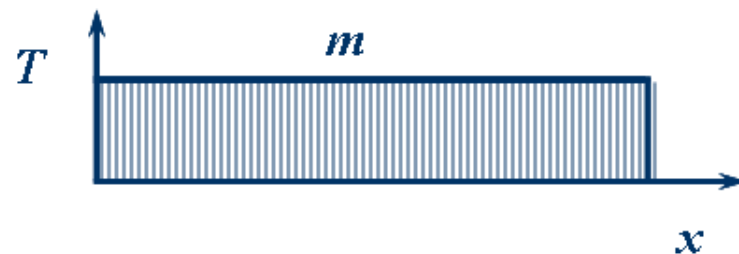
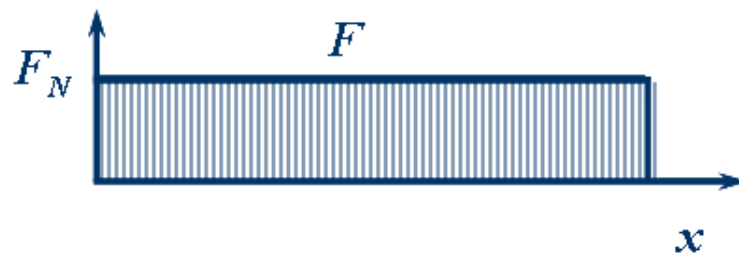
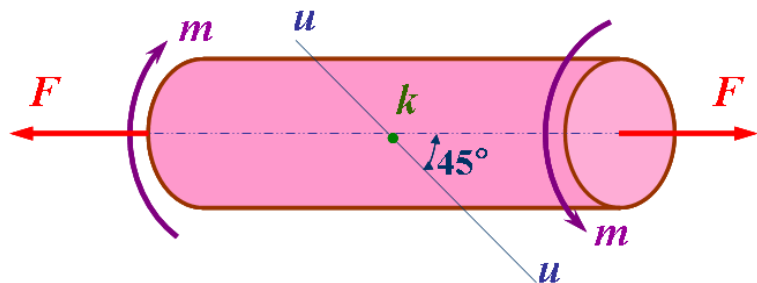


例题2

一圆轴承受轴向拉伸及扭转的联合作用，过K点（圆轴表面）沿轴向及与轴向成 45° 方向测线应变，轴向应变 $\varepsilon_0 = 500 \times 10^{-6}$ ， 45° 方向的应变为 $\varepsilon_u = 400 \times 10^{-6}$ ，若轴的直径 $D = 100\text{mm}$ ，弹性模量 $E = 200\text{GPa}$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ 。求： F 和 m 的值。

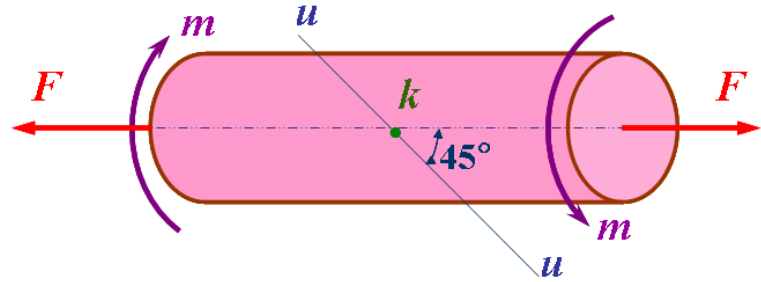
解：

1、内力分析

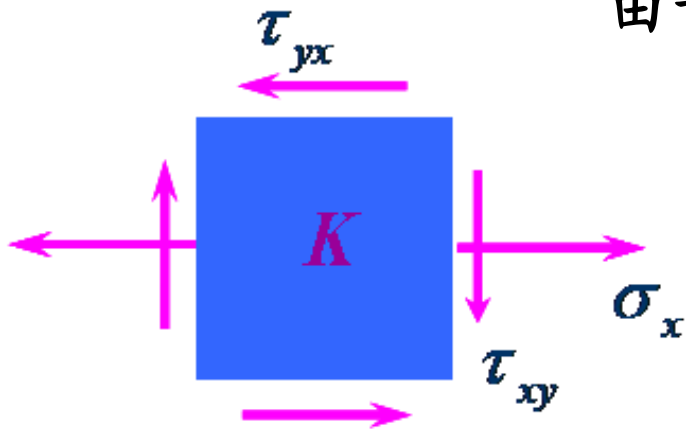




2、K点处的应力状态分析



由于K点 $\sigma_z = 0$ 该单元体处于平面应力状态

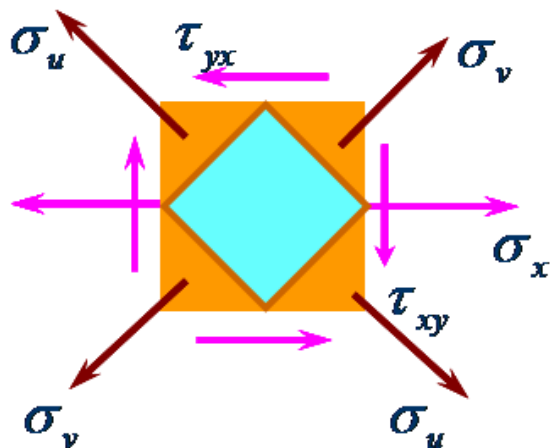
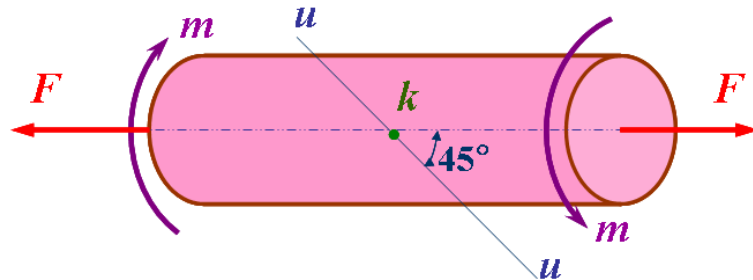


$$\sigma_x = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{A} \quad \sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{T}{W_t} = \frac{m}{W_t} = \frac{m}{\frac{\pi}{16} D^3}$$



3、计算外力 F 和外力偶 m



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{\sigma_x}{E} = 500 \times 10^{-6}$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = 100 \text{ MPa}$$

$$F = \sigma_x \cdot A = 1 \times 10^8 \times \frac{\pi}{4} \times (100)^2 \times 10^{-6} = 785 \text{ kN}$$

分别求 u , v 方向的正应力

$$\sigma_v = \sigma_x \cos^2(45^\circ) - 2\tau_{xy} \sin 45^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sigma_x}{2} - \tau_{xy}$$

$$\sigma_u = \sigma_x \cos^2(135^\circ) - 2\tau_{xy} \sin 135^\circ \cos 135^\circ = \frac{\sigma_x}{2} + \tau_{xy}$$

由
$$\varepsilon_u = \frac{1}{E}(\sigma_u - \nu\sigma_v) = 400 \times 10^{-6}$$

可得
$$\tau_{xy} = 3.46 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

$$m = \tau_{xy} \cdot \frac{\pi}{16} D^3 = 6.79 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



谢 谢 各 位 ！

Email: binshen@sjtu.edu.cn

Tel: 021 3420 6556