第三讲

傅立叶变换

《数字信号处理》第一部分

提纲

- 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)
- 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)
- 连续时间信号的采样及采样定理
- 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

- 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)
- 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)
- 连续时间信号的采样及采样定理
- 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

连续周期信号的傅立叶级数

- 周期信号 $x(t)$,周期为 T ,$\boxed{\text{基波角频率为 } \omega_0 = 2\pi/T}$。在满足狄氏条件时，可展成

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(n\omega_0 t\right) + b_n \sin\left(n\omega_0 t\right)\right]$$

称为三角形式的傅里叶级数，其系数

- 直流分量 $$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{d}t$$
- 余弦分量的幅度 $$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos\left(n\omega_0 t\right)\mathrm{d}t$$
- 正弦分量的幅度 $$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin\left(n\omega_0 t\right)\mathrm{d}t$$

连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

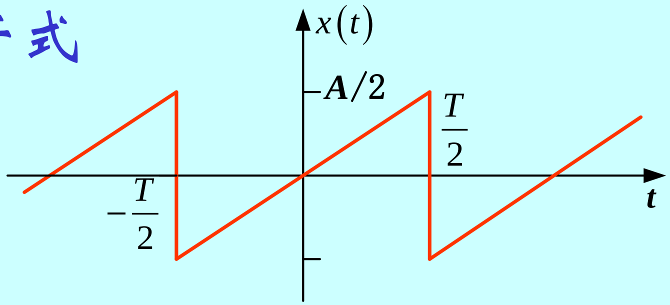
- 连续周期信号的傅立叶级数的狄义赫利(Dirichlet)条件
  - 根据高等数学的知识，我们知道，满足"狄义赫利(Dirichlet)条件"的任何周期函数可以展成"正交函数线性组合"的无穷级数--傅立叶级数
  - (1)同一个周期内　间断点的个数有限；
  - (2)同一个周期内　极大值和极小值的数目有限；
  - (3)同一个周期内　信号"绝对可积"

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \left| x(t) \right| \mathrm{d}\, t < \infty$$

连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

连续周期信号的傅立叶级数(例)

- 求周期锯齿波的傅里叶级数展开式



$$x(t)=\frac{A}{T}t \qquad \left(-\frac{T}{2}\le t\le\frac{T}{2}\right)$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{A}{T}t\,\mathrm{d}t=0 \qquad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{A}{T}t\cos\left(n\omega_0 t\right)\mathrm{d}t=0$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{A}{T}t\sin\left(n\omega_0 t\right)\mathrm{d}t=\frac{A}{n\pi}(-1)^{n+1} \qquad n=1,2,3\cdots$$

$$\boxed{x(t)=0+\frac{A}{\pi}\sin\omega_0 t-\frac{A}{2\pi}\sin 2\omega_0 t-\cdots}$$

直流　基波　谐波

连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

- 用三角函数表示周期锯齿波
  - Matlab程序演示

$$x(t)=0+\frac{A}{\pi}\sin\omega_0 t-\frac{A}{2\pi}\sin 2\omega_0 t-\cdots$$

  - 吉布斯现象 Gibbs phenomenon
    - 吉布斯现象Gibbs phenomenon(又叫吉布斯效应)： 将具有不连续点的周期函数(如矩形脉冲)进行傅立叶级数展开后，选取有限项进行合成。当选取的项数越多，在所合成的波形中出现的峰起越靠近原信号的不连续点。当选取的项数很大时，该峰起值趋于一个常数，大约等于总跳变值的9%。这种现象称为吉布斯现象。

连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

连续周期信号的傅立叶级数--复指数形式

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

$$a_n\cos(n\omega_0 t) = \frac{a_n}{2}\left(e^{-in\omega_0 t} + e^{in\omega_0 t}\right)$$

$$b_n\sin(n\omega_0 t) = \frac{ib_n}{2}\left(e^{-in\omega_0 t} - e^{in\omega_0 t}\right)$$

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t)\right]}$$

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}e^{-in\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \qquad n = \ldots -2, -1, 01, 2\ldots$$

$$c_0 = a_0 \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$c_n = c_{-n}^{*} = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

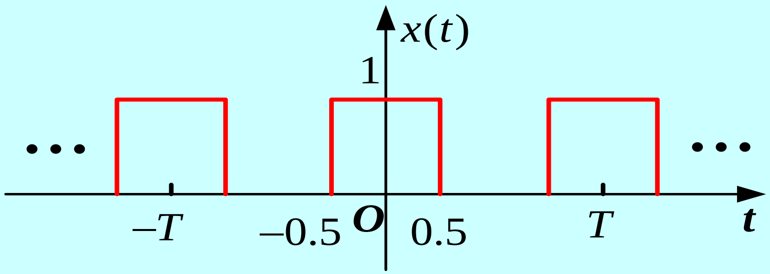
$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-in\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

(例) 周期方波信号$x(t)$

- 一个周期内$x(t)$表达式

$$x(t)=\begin{cases}0 & -T/2<t<-0.5\\ 1 & -0.5<t<0.5\\ 0 & 0.5<t<T/2\end{cases}$$

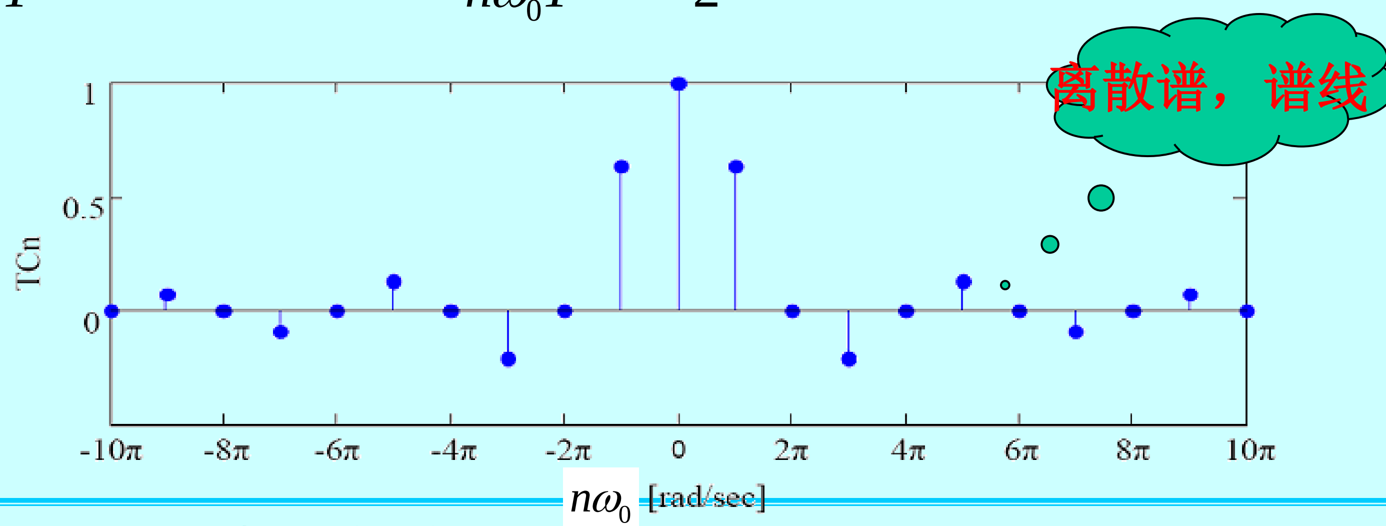


周期方波信号时域波形

$$c_{n\_square}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-in\omega_0 t}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{n\omega_0 T}\sin\frac{n\omega_0}{2}\quad (n=\ldots-2,-1,0 1,2\ldots)$$

$$Tc_n=\frac{2}{n\omega_0}\sin\frac{n\omega_0}{2}$$

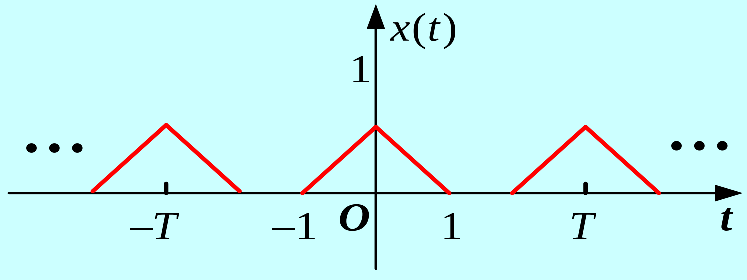
$$\boxed{\omega_0=\frac{2\pi}{T}}$$



连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

- (例) 周期三角波信号$x(t)$
  - 一个周期内$x(t)$表达式

$$x(t)=\begin{cases}0 & -T/2<t<-1\\ 1-|t| & -1<t<1\\ 0 & 1<t<T/2\end{cases}$$



周期三角波信号时域波形

$$c_{n\_tri}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-in\omega_0 t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\left(\frac{2}{n\omega_0}\sin\frac{n\omega_0}{2}\right)^2\quad(n=\ldots-2,-1,0,1,2\ldots)$$

$$\boxed{Tc_{n\_tri}=\left(Tc_{n\_square}\right)^2}$$

  - Matlab程序演示对比

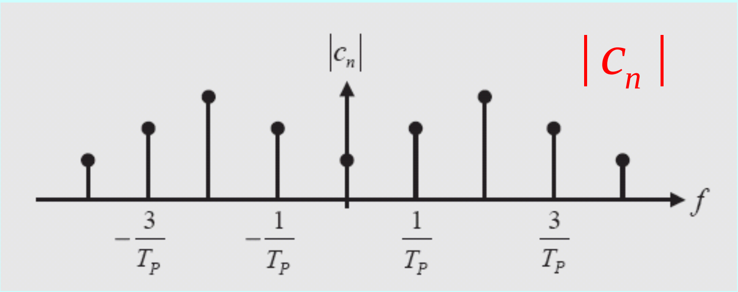
连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \qquad n\in Z$$

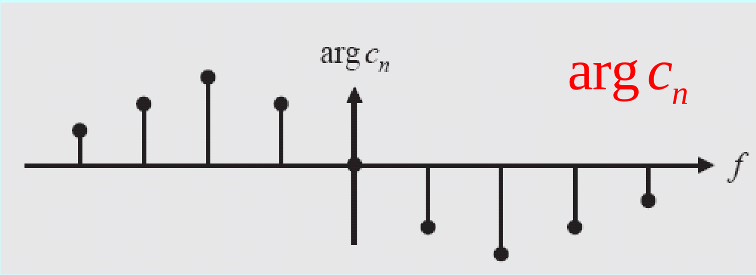
$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$$

频谱的概念

- 通过傅立叶级数的分解，一个周期信号可以看作由不同频率的简谐函数叠加而成
- c_n表示信号的各个频率分量，其一般为复数，通常用幅值谱和相位谱表示
- 周期信号频谱的特点
  - 离散性，即谱线是离散的；
  - 谐波性，即谱线只出现在基波频率的整数倍上；
  - 收敛性，即谐波的幅度随着谐波次数的增高而减小



幅值谱



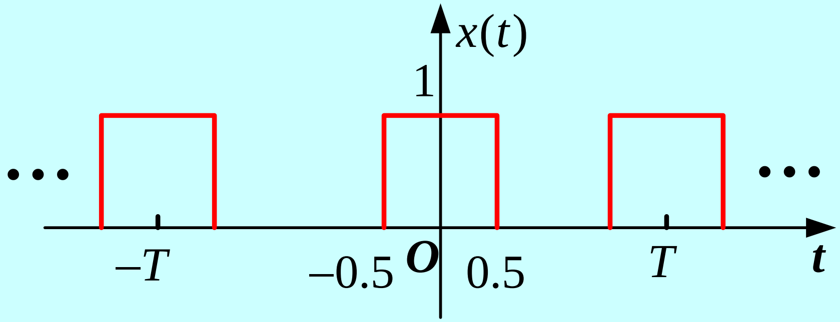
相位谱

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

- 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)
- 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)
- 连续时间信号的采样及采样定理
- 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

周期方波信号$x(t)$的分析



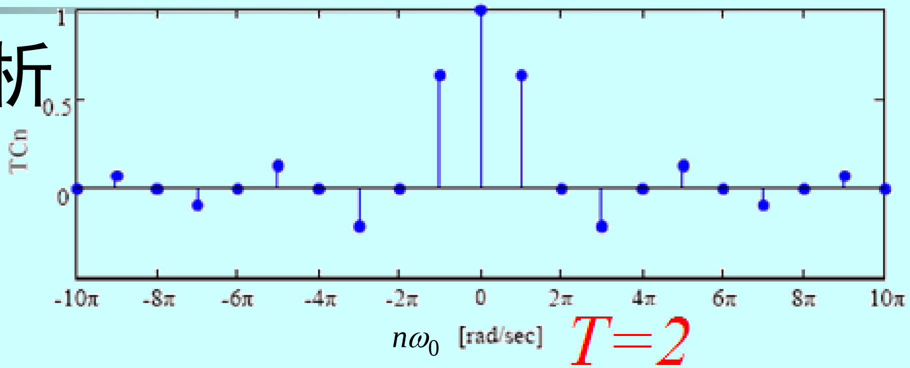
周期方波信号时域波形

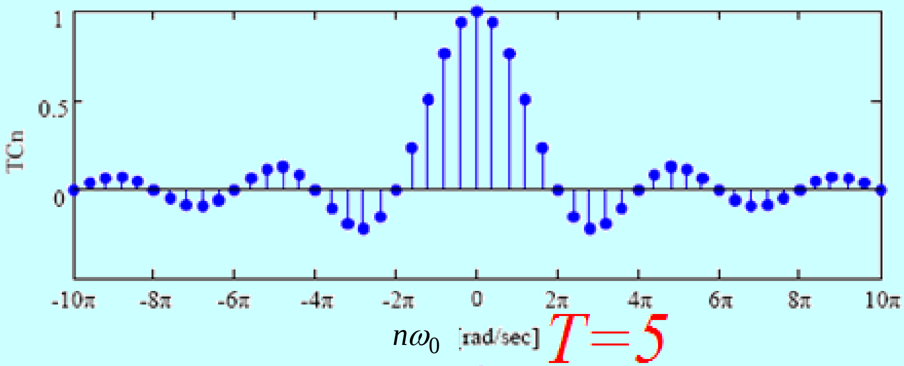
$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-in\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

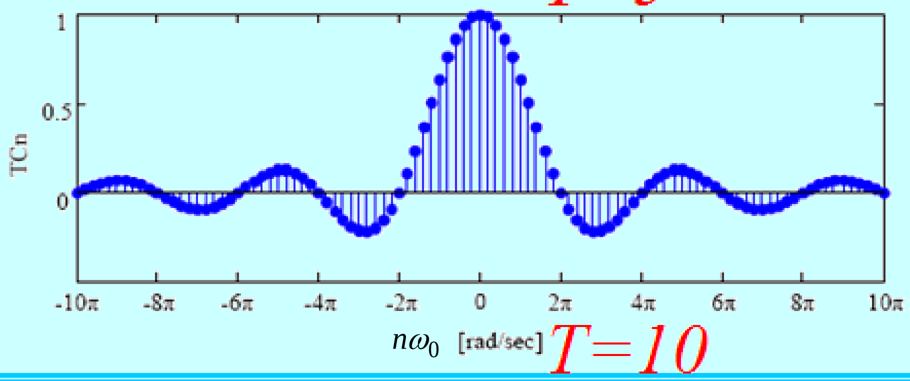
$$c_n = \frac{2}{Tn\omega_0}\sin\frac{n\omega_0}{2}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$n = \ldots -2, -1, 0 1, 2 \ldots$$







连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

从傅立叶级数到连续时间信号的傅立叶变换(FT)

- 对于非周期信号，可以把它当作周期为无限长的信号来处理，此时有：$T \to \infty$, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \Delta\omega \to 0$
- $n\omega_0 = n\Delta\omega = \omega$，所以离散频谱($n\omega_0$ 的函数)会演变成连续频谱(ω 的函数)
- 同时频谱系数 $c_n = \dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-in\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \to 0$
- 引入频谱密度概念：$Tc_n = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-in\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{c_n}{f_0} = \dfrac{c_n}{\omega_0}2\pi$

$$X(\omega) = \lim_{T\to\infty} Tc_n = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-in\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

- 从傅立叶级数到连续时间信号的傅立叶变换(FT)
  - 傅立叶反变换(IFT)

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} Tc_n \frac{1}{T} e^{in\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} Tc_n \frac{\omega_0}{2\pi} e^{in\omega_0 t}$$

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Tc_n \frac{\omega_0}{2\pi} e^{in\omega_0 t} \xrightarrow[n\omega_0\to\omega]{\omega_0\to d\omega} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$X(\omega)=\lim_{T\to\infty} Tc_n$$

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega}$$

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

■ 连续非周期信号$x(t)$的傅立叶变换对

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i2\pi ft}\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{i2\pi ft}\,\mathrm{d}f$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{i\omega q}\,\mathrm{d}\omega &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(p)e^{-i(p-q)\omega}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}\omega\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(p)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(p-q)\omega}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}p\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}x(p)\delta(p-q)\,\mathrm{d}p=x(q)\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega)$$

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

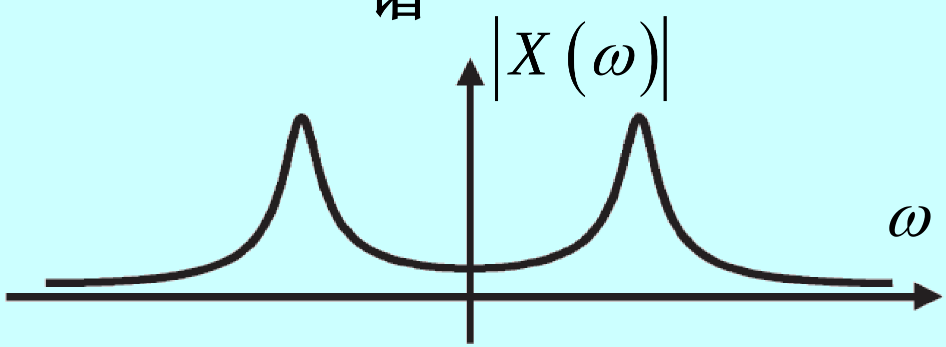
- 幅值谱与相位谱

$$X(\omega)=\left|X(\omega)\right|e^{j\phi(\omega)}=\mathrm{Re}(\omega)+\mathrm{j}\,\mathrm{Im}(\omega)$$

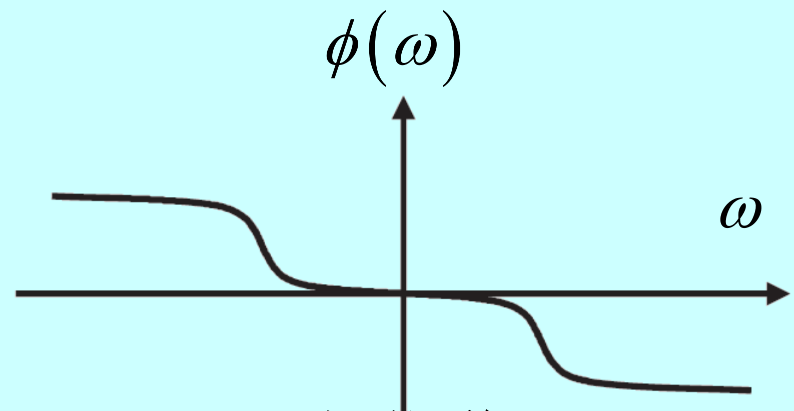
实部　　虚部

幅值谱

相位谱



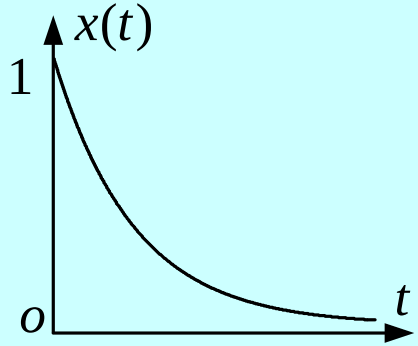
幅值谱



相位谱

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

- 单边指数信号的FT频谱



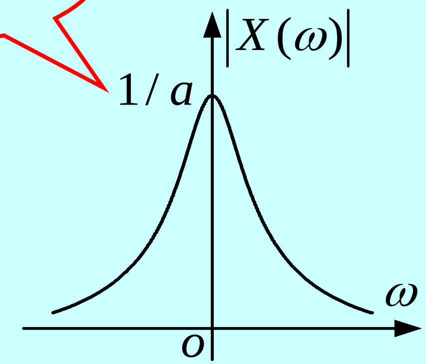
$$x(t)=e^{-at}u(t),\ (a>0)$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt$$

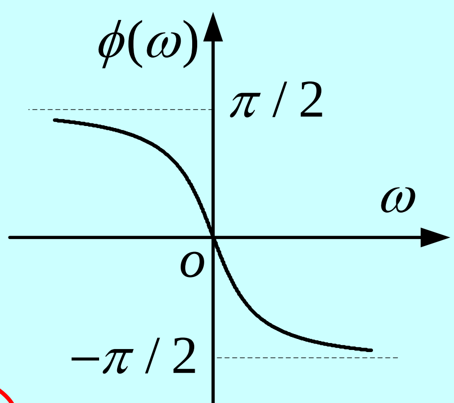
$$=\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{a+i\omega}$$

幅值谱

$$|X(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$



$$\phi(\omega)=-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

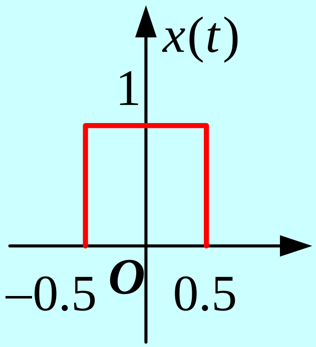


相位谱

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

- (例) 矩形方波信号$x(t)$

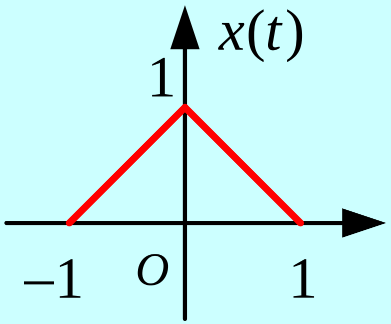
$$x(t)=\begin{cases}0 & -\infty<t<-0.5\\ 1 & -0.5<t<0.5\\ 0 & 0.5<t<\infty\end{cases}\Rightarrow X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt=\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)}$$



矩形方波信号

- (例) 三角波信号$x(t)$

$$x(t)=\begin{cases}0 & -T/2<t<-1\\ 1-|t| & -1<t<1\\ 0 & 1<t<T/2\end{cases}\Rightarrow X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt=\left[\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)}\right]^2$$

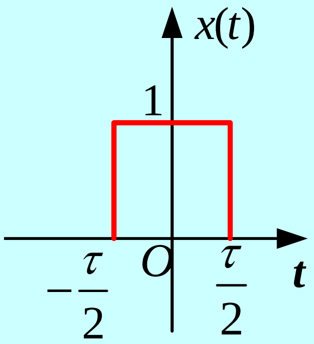


三角波信号

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

- 矩形方波(方波脉冲)信号的分析

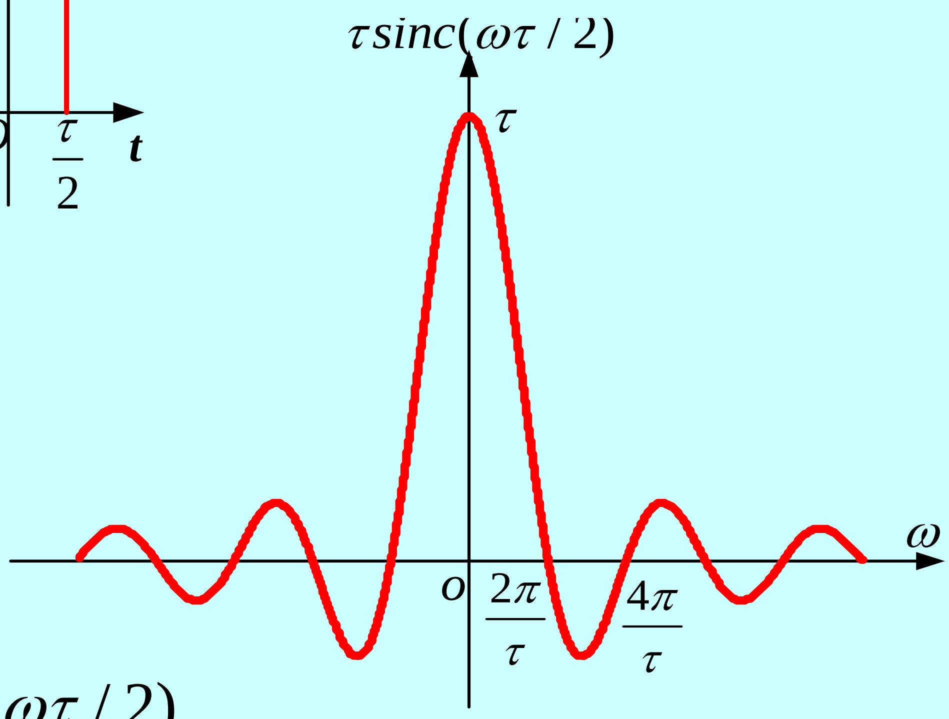
$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|\le \tau/2\\ 0 & |t|>\tau/2\end{cases}$$



$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow X(\omega)=\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega/2}$$

$$=\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}=\tau sinc(\omega\tau/2)$$



连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

- FT的基本性质 $FT[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = X(\omega)$

  - 线性性质 $FT[ax_1(t)+bx_2(t)] = aX_1(\omega)+bX_2(\omega)$
  - 时移性质 $FT[x(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
  - 共轭对称性 $X(-\omega) = X^*(\omega)$
  - 尺度变换性质
  - 时域卷积性质
  - 时域积分性质
  - 时域微分性质

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

- FT的尺度变换性质 $FT[x(t)] = X(\omega) \rightarrow FT[x(at)] = \frac{1}{|a|} X(\frac{\omega}{a})$

- 证明

$$FT[x(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} d\tau$$

$$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{|a|} X(\frac{\omega}{a})$$

- 意义

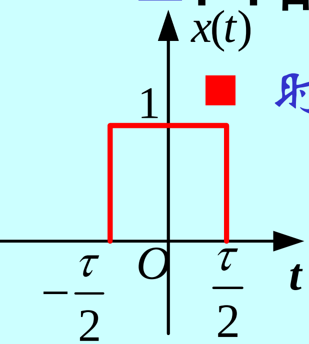
(1) $0 < a < 1$ 时域扩展，频域压缩

(2) $a > 1$ 时域压缩，频域扩展

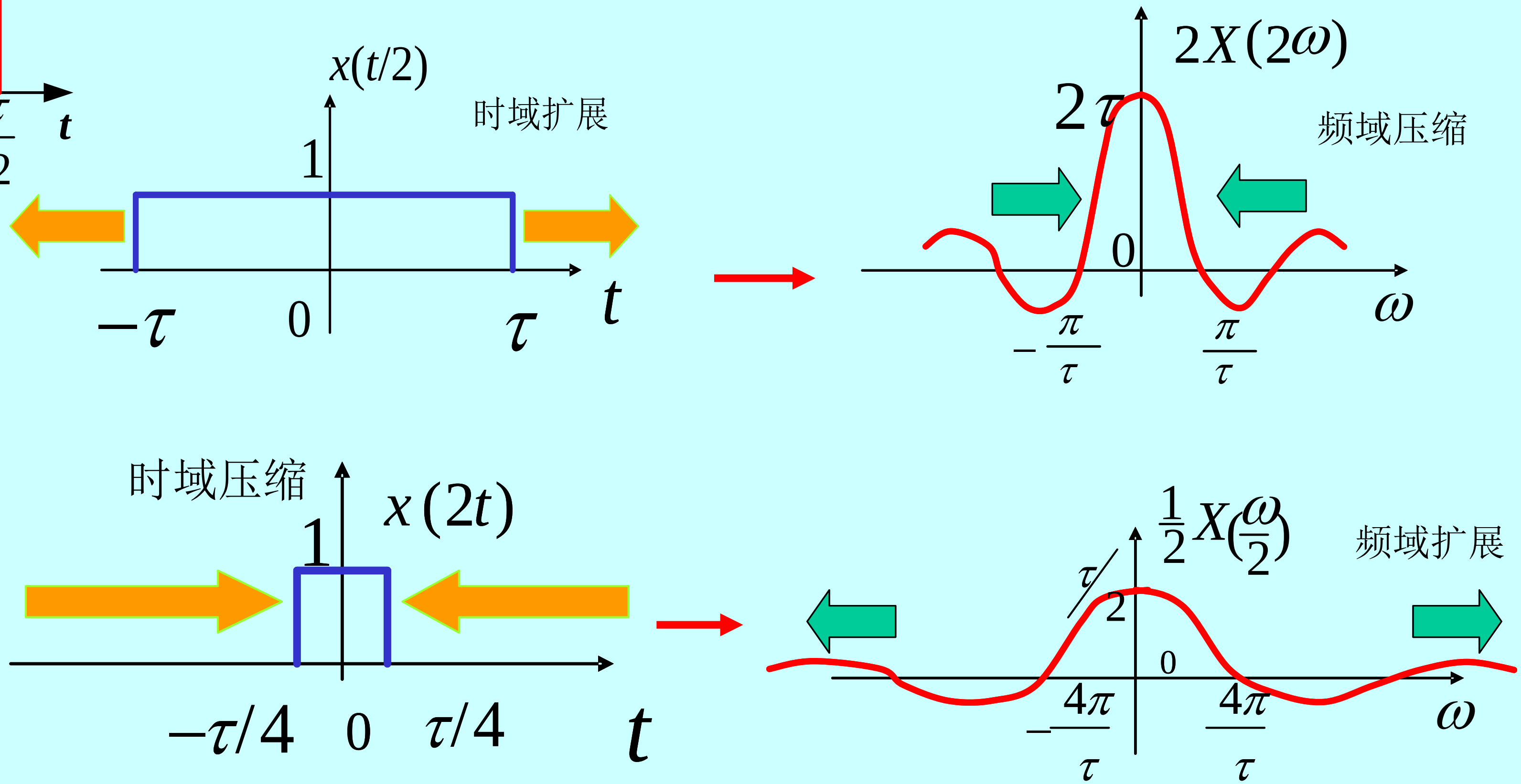
(3) $a = -1$ $x(t) \rightarrow x(-t)$, $X(\omega) \rightarrow X(-\omega)$

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

FT的尺度变换性质



- 时域中的压缩(扩展)等于频域中的扩展(压缩)

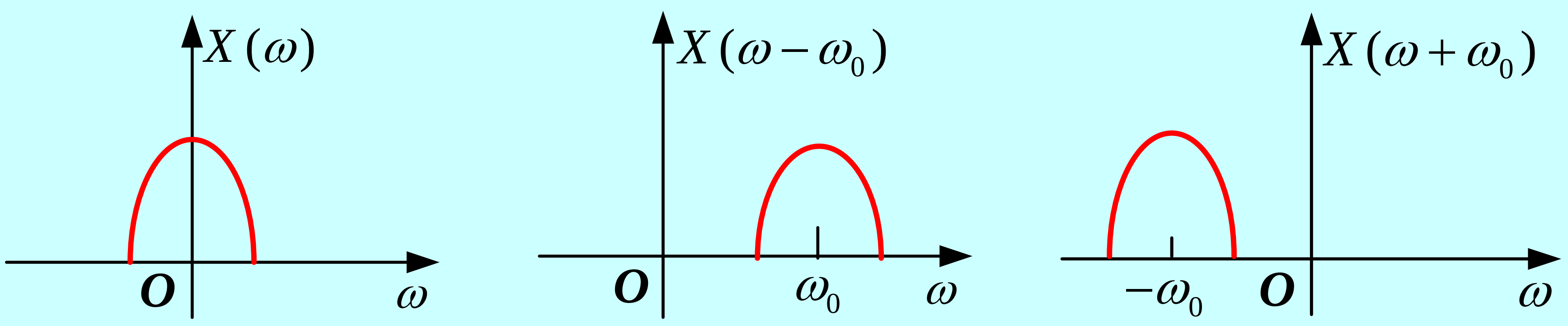


连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

FT的基本性质

- 带有尺度变换的时移特性 $FT\left[x(at-b)\right]=\dfrac{1}{|a|}X\left(\dfrac{\omega}{a}\right)e^{-j\frac{b\omega}{a}}$

- 频移特性 $FT\left[x(t)e^{\pm j\omega_0 t}\right]=X(\omega\mp\omega_0)$



连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

FT的基本性质

对偶性

$$FT[x(t)] = X(\omega) \longrightarrow FT[X(t)] = 2\pi x(-\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$\Big\downarrow$ 变量替换

$$2\pi x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{j\omega t}dt$$

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-j\omega t}dt$$

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

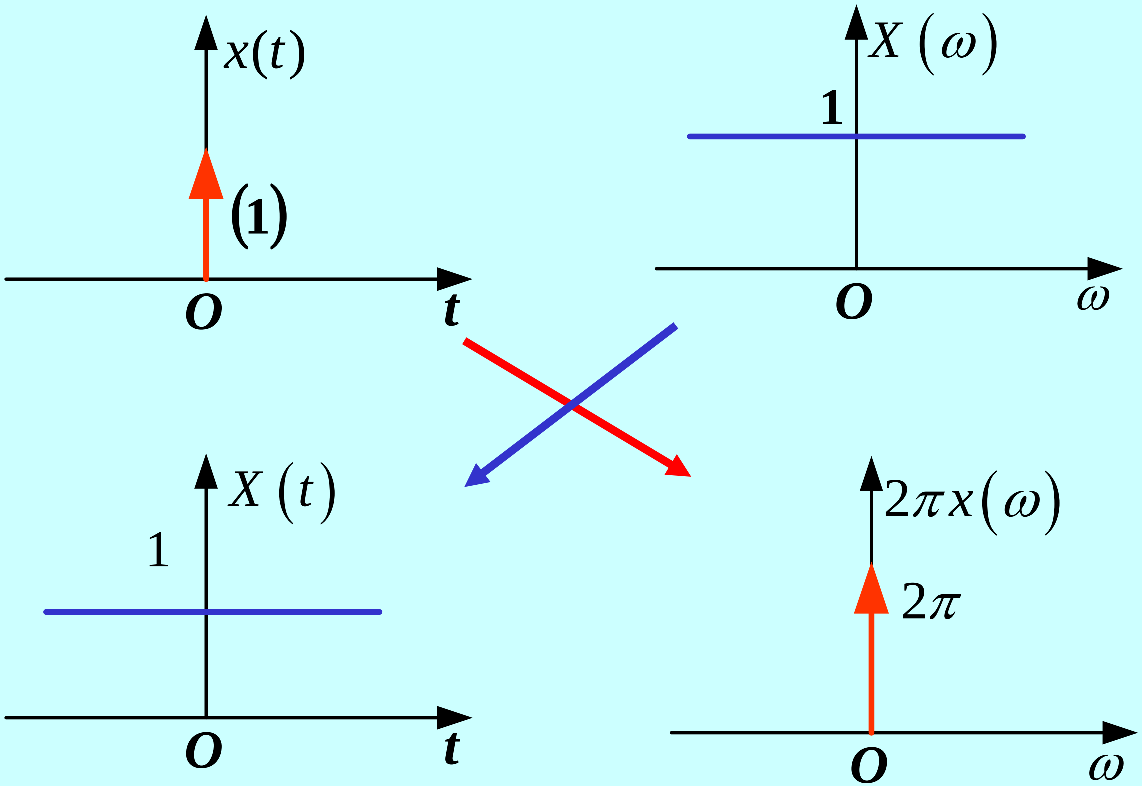
冲激函数和直流信号的FT

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t}\, dt = 1$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

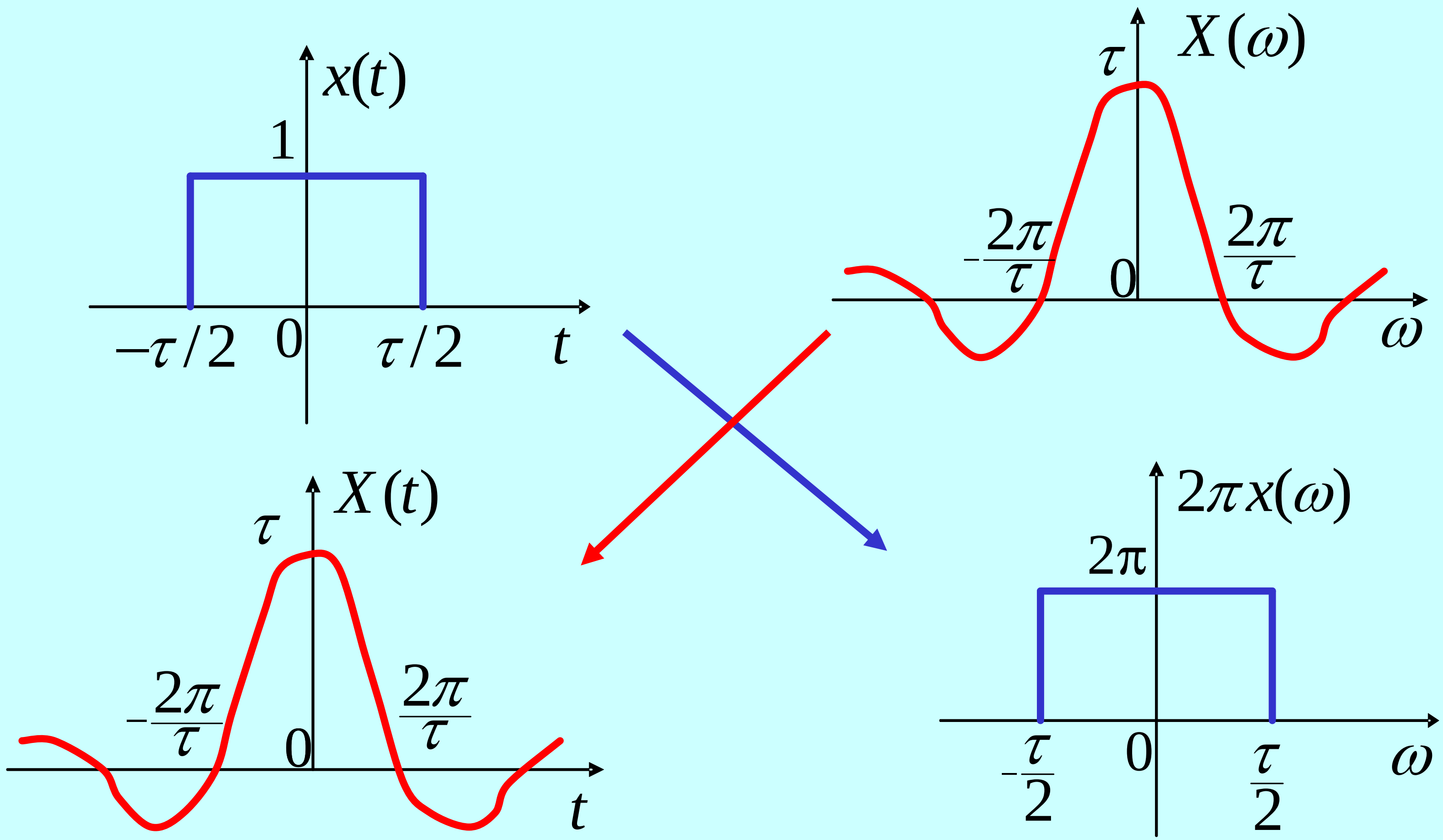
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\, dt = 2\pi\delta(\omega)$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$



连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

- 若$x(t)$为偶函数，则时域和频域完全对称



连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

FT的基本性质

- 时域微分性质

$$FT[\frac{d}{dt}x(t)] = j\omega X(\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \Rightarrow \frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[j\omega X(\omega)]e^{j\omega t}d\omega$$

- 时域卷积性质

$$FT[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(\omega)X_2(\omega)$$

$$FT[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau]e^{-j\omega t}dt$$ 卷积定义

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau)e^{-j\omega t}dt]d\tau$$ 交换积分次序

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)X_2(\omega)e^{-j\omega\tau}d\tau$$ 时移性质

$$= X_1(\omega)X_2(\omega)$$

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

- FT的基本性质
  - 频域卷积性质

$$FT[x_1(t)\cdot x_2(t)]=\frac{1}{2\pi}X_1(\omega)*X_2(\omega)$$

$$FT[x_1(t)\cdot x_2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_2(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_1(u)e^{jut}du\right]x_2(t)e^{-j\omega t}dt$$

傅里叶逆变换

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_1(u)\left[\int_{-\infty}^{\infty}x_2(t)e^{-j(\omega-u)t}dt\right]du$$

交换积分次序

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_1(u)X_2(\omega-u)du$$

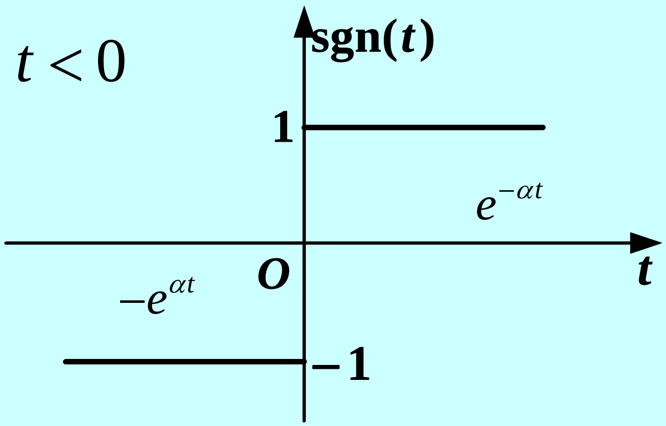
$$=\frac{1}{2\pi}X_1(\omega)*X_2(\omega)$$

傅里叶变换
卷积定义

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

符号函数的FT

$$f(t)=\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}+1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$$



- 处理方法：做一个双边函数

$f_1(t)=\operatorname{sgn}(t)e^{-\alpha|t|}$，求$F_1(\omega)$，

求极限得到$F(\omega)$。

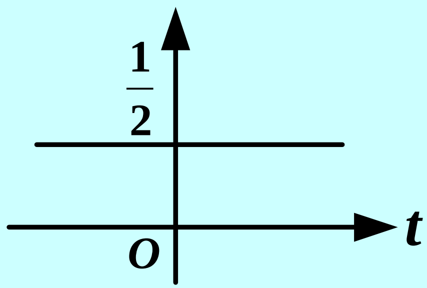
$$F_1(\omega)=\int_{-\infty}^{0}-e^{\alpha t}e^{-j\omega t}\,dt+\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}\,dt$$

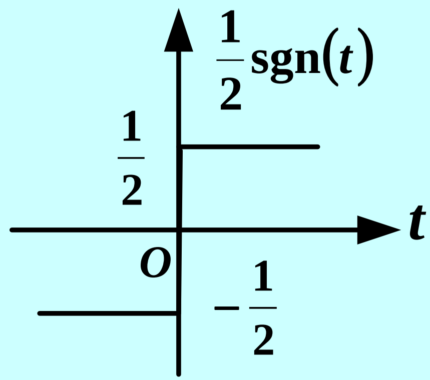
$$=\frac{-1}{\alpha-j\omega}+\frac{1}{\alpha+j\omega}=\frac{-j2\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

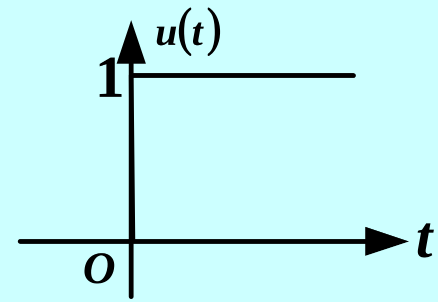
$$F(\omega)=\lim_{\alpha\to 0}F_1(\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-j2\omega}{\alpha^2+\omega^2}=\frac{2}{j\omega}$$

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

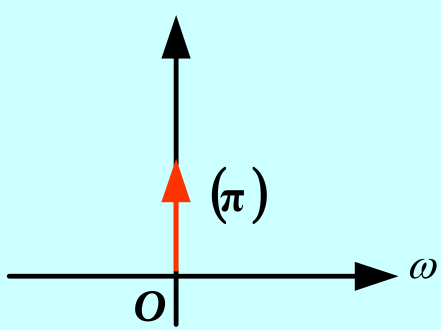
- 单位阶跃函数的FT → $u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$

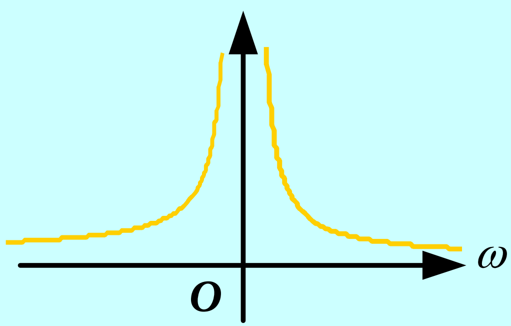


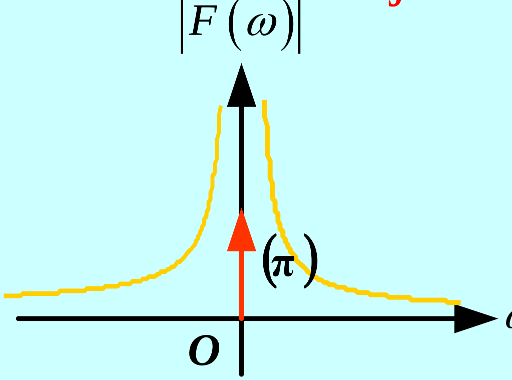




$$\frac{1}{2}\leftrightarrow\pi\delta(\omega) \quad + \quad \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\leftrightarrow\frac{1}{\mathrm{j}\omega} \quad = \quad u(t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$







连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

FT的基本性质

- 时域积分性质

$$FT[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau] = \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

$$FT[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt$$

利用单位阶跃函数的FT及FT的时域卷积性质

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt$$

$$= FT[x(t)*u(t)] = X(\omega)(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega))$$

当 $X(0)=0$ $\quad FT[\int_{-\infty}^{t} x(t)] = \frac{1}{j\omega} X(\omega)$

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

FT的基本性质

$$r_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y^*(t-\tau)\mathrm{d}t$$

- 时域相关性定理 ⇨ $\boxed{FT\left(r_{xy}(\tau)\right)=FT\left(x(t)\right)FT^*\left(y(t)\right)}$

$$FT\left(r_{xy}(\tau)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y^*(t-\tau)dt\right]e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$u=t-\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}y^*(t-\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]dt$$

$$e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}y^*(u)e^{i\omega u}du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)FT^*\left(y(t)\right)e^{-i\omega t}dt$$

$$=FT\left(x(t)\right)FT^*\left(y(t)\right)$$

- 函数自相关的FT是其幅度谱的平方

$$FT\left(r_x(\tau)\right)=FT\left(x(t)\right)FT^*\left(x(t)\right)=\left\|FT\left(x(t)\right)\right\|^2$$

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

- FT的基本性质
  - 帕斯瓦尔定理

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\|x(t)\|^2 dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\|X(\omega)\|^2 d\omega}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|x(t)\|^2 dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)x^*(t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]^* dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X^*(\omega)\left(\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\right)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X^*(\omega)X(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\|X(\omega)\|^2 d\omega$$

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

解析信号的定义

- 已知信号$x(t)$希望通过对$x(t)$进行某种变换 $\hat{x}(t)=x(t)*h(t)$ 来构造所谓“解析信号(analytic signal)”：

$$a_x(t)=x(t)+j\hat{x}(t) \qquad A_x(\omega)=\begin{cases}2X(\omega) & \omega>0\\ 0 & \omega<0\end{cases}$$

构造解析信号的好处

- 由于不含有负频率，可以使采样频率降低一半而不违反采样定理
- 在研究信号的时频分析时，使用解析信号可以减轻正负频率在零频附近的交叉干扰

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

- 如何构造解析信号 $a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$

$$A_x(\omega) = X(\omega) + j\hat{X}(\omega) = X(\omega) + jH(\omega)X(\omega)$$

$$A_x(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$

$$H(\omega) = \begin{cases} -j & \omega > 0 \\ j & \omega < 0 \end{cases}$$

$$H_1(\omega) = e^{\beta|\omega|} \cdot H(\omega)$$

$$h(t) = IFT[H(\omega)] = \lim_{\beta \to 0}\{IFT[H_1(\omega)]\} = \frac{1}{\pi t}$$

$$\hat{x}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

Hilbert变换

连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

- 解析信号瞬时幅值、瞬时相位、瞬时频率

$$a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = A_x(t)e^{j\phi_x(t)}$$

- 瞬时幅值

$$A_x(t) = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$$

- 瞬时相位

$$\phi_x(t) = \tan^{-1}(\hat{x}(t) / x(t))$$

- 瞬时频率

$$\omega_x(t) = \dot{\phi}_x(t) = \mathrm{d}\phi_x(t) / \mathrm{d}t$$

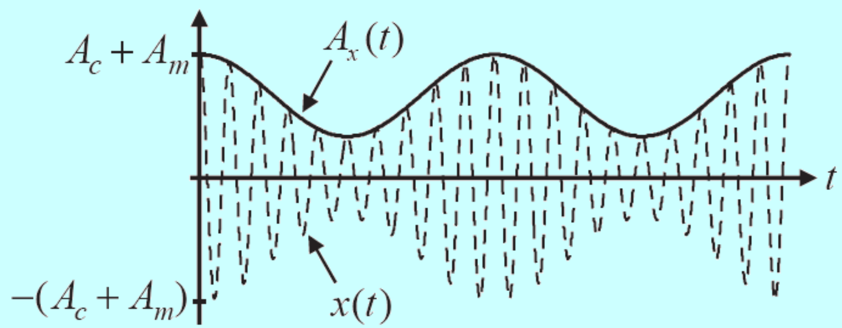
连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

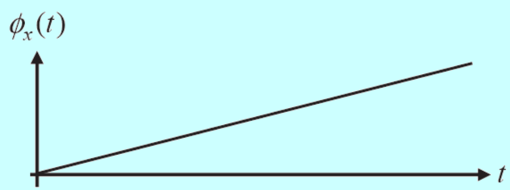
- 例：幅值调制信号

$$\omega_m < \omega_c$$

$$x(t) = m(t)\cos(\omega_c t) = (A_c + A_m \sin(\omega_m t))\cos(\omega_c t)$$

$$a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = A_x(t)e^{j\phi_x(t)} = (A_c + A_m \sin(\omega_m t))e^{j\omega_c t}$$



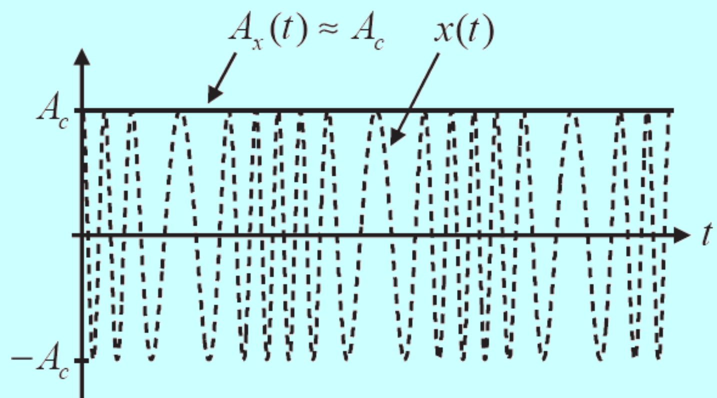


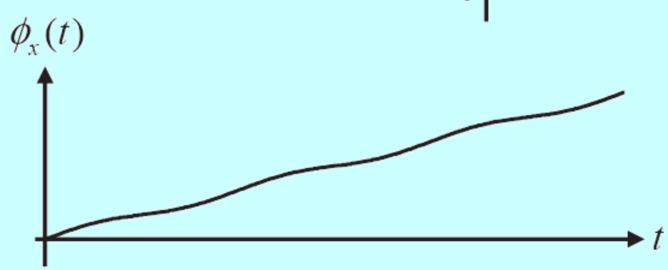
连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)

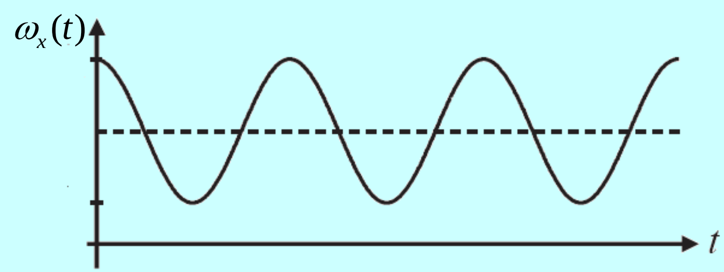
- 例：频率调制信号

$$x(t) = A_c \cos(\omega_c t + A_m \sin(\omega_m t)) \qquad A_m \omega_m << \omega_c$$

$$a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = A_x(t) e^{j\phi_x(t)} \approx A_c e^{j(\omega_c t + A_m \sin(\omega_m t))}$$





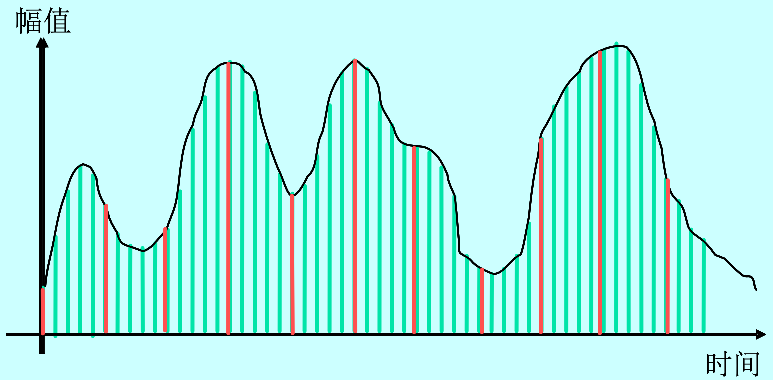


连续时间信号的采样及采样定理

- 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)
- 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)
- 连续时间信号的采样及采样定理
- 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

连续时间信号的采样及采样定理

- 采样周期、频率
  - 通常采用等时间采样来得到离散时间信号。设采样周期为T_s，T_s的倒数称为采样频率f_s，对应的角频率$\omega_s=2\pi f_s$



  - 直观地看，采样周期T_s较大时，则易丢失信息，使一些细节内容无法反映出来；而如果T_s太小，信息虽不易丢失，但却使数据量明显增大，处理费时

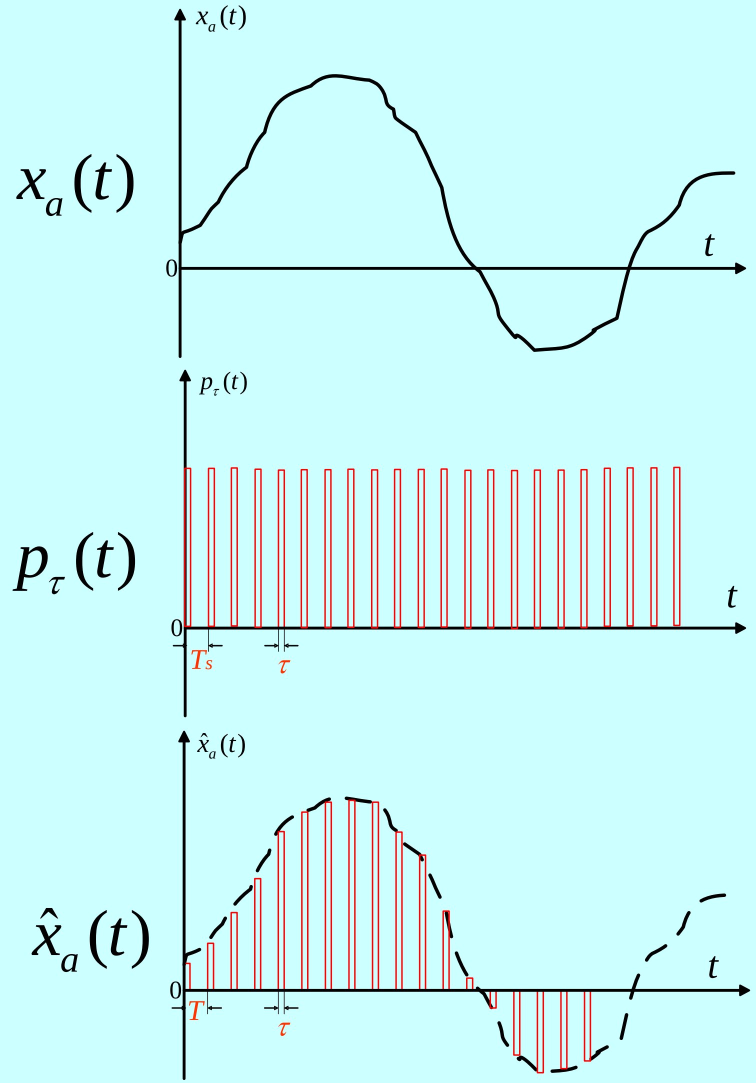
- 信号采样研究内容
  - 以一定的采样周期采样后，研究：(1)采样前后信号的信息是否有丢失；(2)采样前后信号的频谱有何变化;(3)采样信号能否恢复为原信号？

连续时间信号的采样及采样定理

采样的精确数学描述

- 对连续时间信号$x_a(t)$的采样过程可看作对采样脉冲串调幅的过程：脉冲载波是一串周期为T_s、宽度为τ的采样矩形脉冲，以$p_{|}(t)$表示，调制信号是输入的连续时间信号$x_a(t)$，采样输出为：

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)\,p_\tau(t)$$



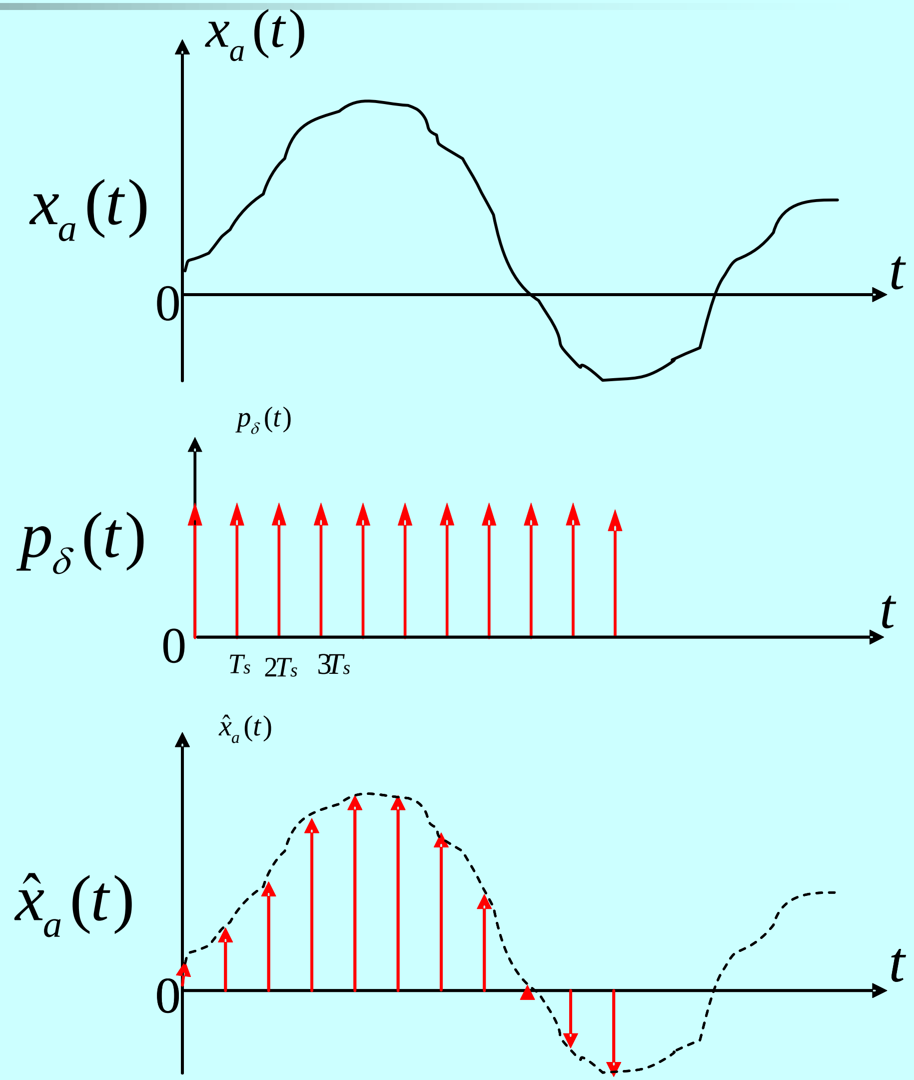
连续时间信号的采样及采样定理

采样的工程描述

- 工程上，一般采样周期$T_s >> \tau$，可将采样矩形脉冲串$p_\tau(t)$近似为冲激函数串$p_\delta(t)$，采样输出信号则近似为输入的连续时间信号$x_a(t)$与冲激函数串$p_\delta(t)$的乘积：

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)p_\delta(t)$$

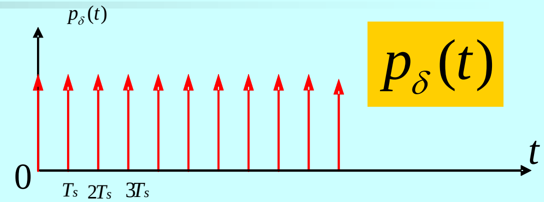
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t - nT_s)$$



连续时间信号的采样及采样定理

■ 采样信号的频谱

$$\hat{x}_a(t)=x_a(t)p_\delta(t)$$



$p_\delta(t)$

■ 冲激函数串$p_\delta(t)$是一个周期函数(周期T_s)，可用付氏级数展开：

$$p_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m e^{im\omega_s t}$$

基频是采样频率$\omega_s=2\pi/T_s$

$$c_m=\frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2}p_\delta(t)e^{-im\omega_s t}dt$$

$$=\frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2}\delta(t)e^{-im\omega_s t}dt=\frac{1}{T_s}$$

$$p_\delta(t)=\frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\omega_s t}$$

连续时间信号的采样及采样定理

采样信号的频谱

- 将冲激函数串$p_\delta(t)$级数表达式带入$\hat{x}_a(t)$傅立叶变换公式:

$$\hat{X}_a(\omega)=FT[\hat{x}_a(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}x_a(t)p_\delta(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{T_s}\int_{-\infty}^{+\infty}x_a(t)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\omega_s t}\right)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_a(t)e^{-j(\omega\text{-}m\omega_s)t}dt$$

- 采样信号的频谱是连续信号频谱的周期延拓，重复周期为ω_s(采样频率)

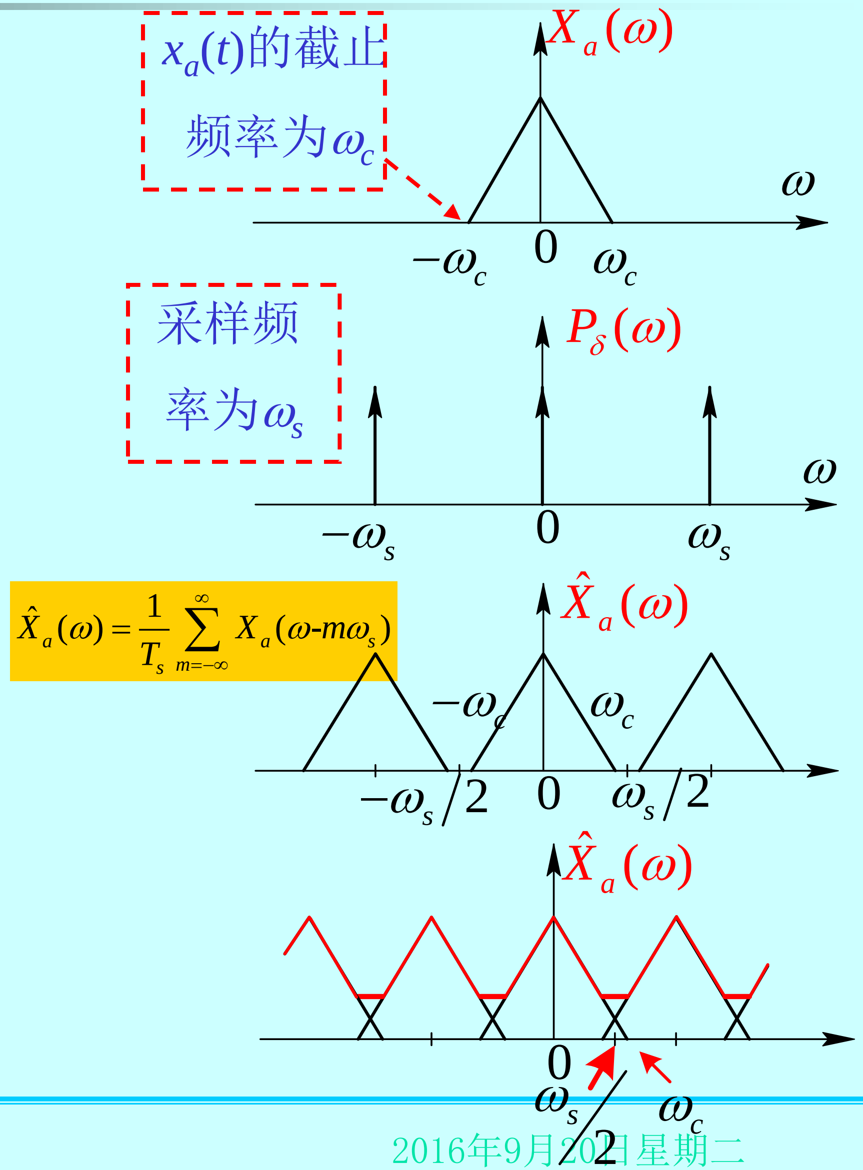
$$\boxed{\hat{X}_a(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_a(\omega\text{-}m\omega_s)}$$

$$X_a(\omega)=FT[x_a(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}x_a(t)e^{-j\omega t}dt$$

连续时间信号的采样及采样定理

采样信号的频谱

- 采样信号的频谱是原连续信号的频谱以ω_s为周期，进行周期性延拓而成
- 如右图例，设连续信号$x_a(t)$是带限信号，最高截止频率为ω_c，采样频率为ω_s。当$\omega_c > \omega_s/2$时，作周期延拓时会发生频域的“**混叠**”现象，导致$X_a(\omega)$与$\hat{X}_a(\omega)$ 在一个周期内不相等



连续时间信号的采样及采样定理

采样定理

- 要使实信号采样后能够不失真还原，采样频率必须大于信号最高频率的两倍　$\omega_s \geq 2\omega_{max}$
- 实际工作中，考虑到有噪声，为避免频谱混淆，采样频率总是选得比两倍信号最高频率ω_{max}更大些，　如$\omega_s > (3\sim5)\ \omega_{max}$
- 同时，为避免高于$\omega_s/2$(折叠频率)的噪声信号进入采样器造成频谱混淆，采样器前常常加一个保护性的前置低通滤波器(抗混叠滤波)，阻止高于$\omega_s/2$频率分量进入

连续时间信号的采样及采样定理

一些典型的数字信号处理系统的上限频率

应用系统	上限频率 f_{max}	采样频率 f_s
地质勘探	500Hz	1-2 kHz
生物医学	1kHz	2-4 kHz
机械振动	2kHz	4-10 kHz
语音	4kHz	8-16 kHz
音乐	20kHz	40-96 kHz
视频	4MHz	8-10 MHz

$\omega=2\pi f$

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

- 连续周期时间信号的傅立叶变换(FS)
- 连续非周期时间信号的傅立叶变换(FT)
- 连续时间信号的采样及采样定理
- 离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

采样信号的频谱

- 表达式1 $\hat{x}_a(t)=x_a(t)p_\delta(t)$

$$\hat{X}_a(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_a(t)p_\delta(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{T_s}\int_{-\infty}^{+\infty}x_a(t)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\omega_s t}\right)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_a(t)e^{-j(\omega\text{-}m\omega_s)t}dt=\frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_a(\omega\text{-}m\omega_s)$$

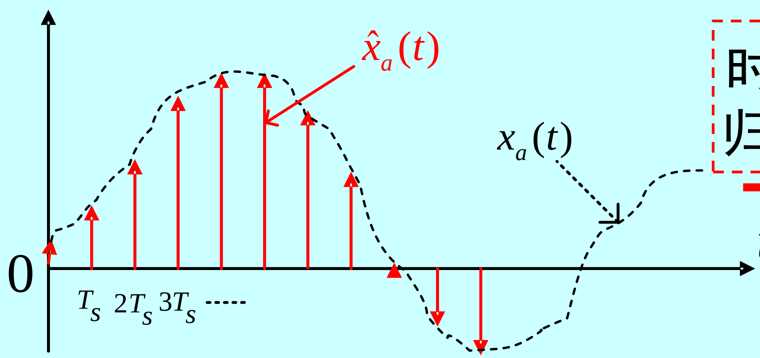
- 表达式2 $\hat{x}_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(t)\delta(t-nT_s)$

$$\hat{X}_a(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(t)\delta(t-nT_s)\right)e^{-j\omega t}dt$$

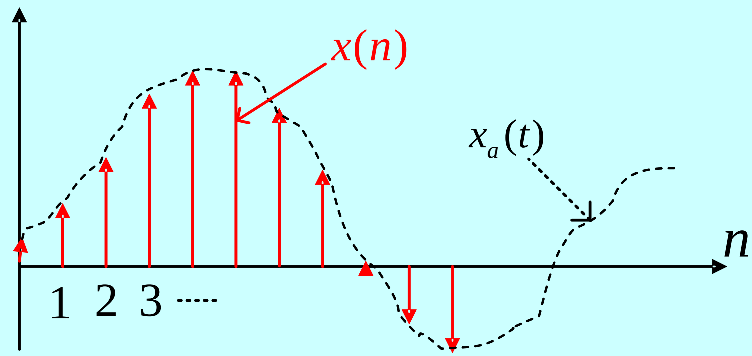
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)x_a(t)e^{-j\omega t}dt\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT_s)e^{-j\omega nT_s}$$

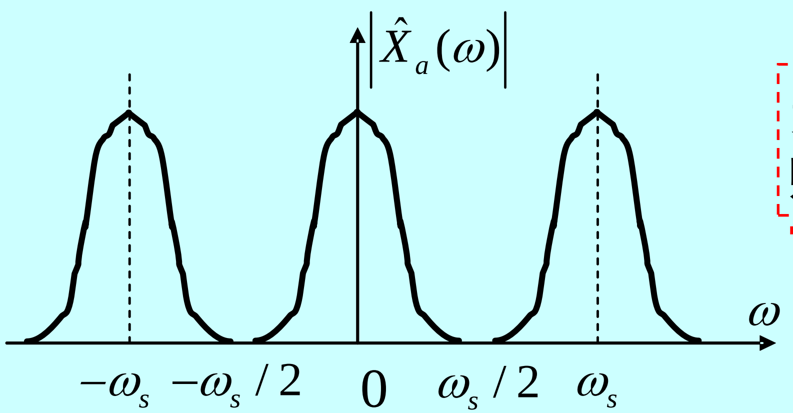
离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

- 采样频率归一化 $f_s = T_s = 1$

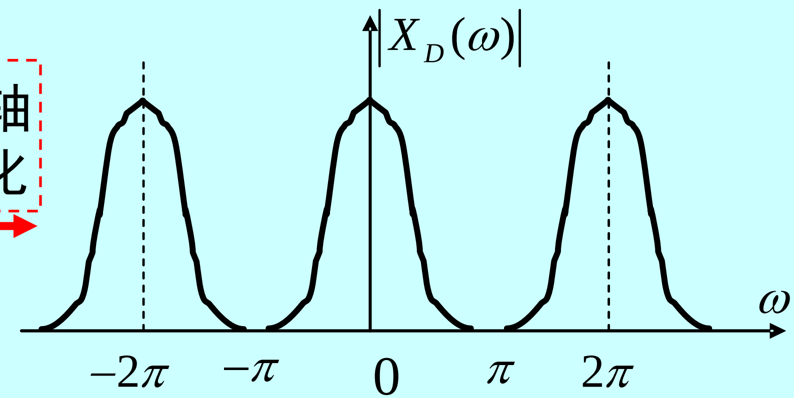


时间轴归一化





频率轴归一化



$$\hat{X}_a(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) e^{-j\omega nT_s}$$

$$X_D(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

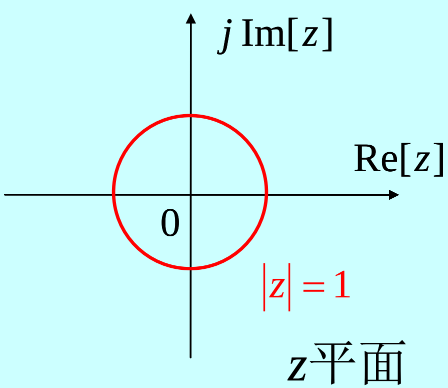
- 离散时间信号傅立叶变换(DTFT)的定义

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

- DTFT的特点
  - $X(\omega)$是ω的连续函数
  - $X(\omega)$是ω的周期函数，周期为2π　$X(\omega)=X(\omega+2\pi)$
  - $X(\omega)$是ω的复函数　$X(\omega)=\mathrm{Re}[X(\omega)]+j\,\mathrm{Im}[X(\omega)]$
  - DTFT是z仅在单位圆取值的z变换

$$X(\omega)=X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$\text{DTFT}\ \underset{\text{特例}}{\overset{\text{推广}}{\rightleftarrows}}\ z\text{变换}$$



离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

DTFT反变换

- $X_D(\omega)$是ω的连续，周期函数，可利用连续周期函数的傅立叶级数来求DTFT反变换：

连续周期函数的傅立叶级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t}$$

$$X_D(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

DTFT

$$\boxed{\Omega_0=\frac{2\pi}{T}}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\Omega_0 t}\,\mathrm{d}t \longrightarrow x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_D(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

DTFT反变换

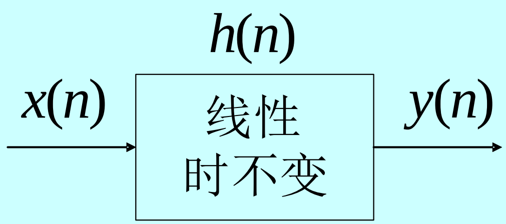
离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

DTFT的性质表

性质	时域	频域
线性	$x(n)=ax_1(n)+bx_2(n)$	$X_D(\omega)=aX_{D1}(\omega)+bX_{D2}(\omega)$
时移	$y(n)=x(n-n_0)$	$Y_D(\omega)=e^{-j\omega n_0}X_D(\omega)$
频移	$y(n)=e^{j\omega_0 n}x(n)$	$Y_D(\omega)=X_D(\omega-\omega_0)$
时域卷积	$y(n)=x(n)*h(n)$	$Y_D(\omega)=X_D(\omega)H_D(\omega)$
频域卷积	$y(n)=x(n)h(n)$	$Y_D(\omega)=X_D(\omega)*H_D(\omega)$ $=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_D(\theta)H_D(\omega-\theta)d\theta$
Parseval 定理	$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x(n)\rvert^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lvert X_D(\omega)\rvert^2 d\omega$	

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

■ 线性时不变离散时间系统的频率响应



$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(\omega) = X(\omega)\underline{H(\omega)}$$

系统频率响应函数

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \mathrm{Re}[H(\omega)] + j\,\mathrm{Im}[H(\omega)] = \underbrace{|H(\omega)|}_{\text{幅频响应}} e^{\overbrace{j\arg[H(\omega)]}^{\text{相频响应}}}$$

■ 线性时不变离散时间系统的描述形式

时域

■ 差分方程 $\displaystyle\sum_{i=0}^{N} b_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{M} a_i x(n-i)$

■ 单位脉冲响应 $h(n) = T[\delta(n)]$ $\quad y(n) = x(n) * h(n)$

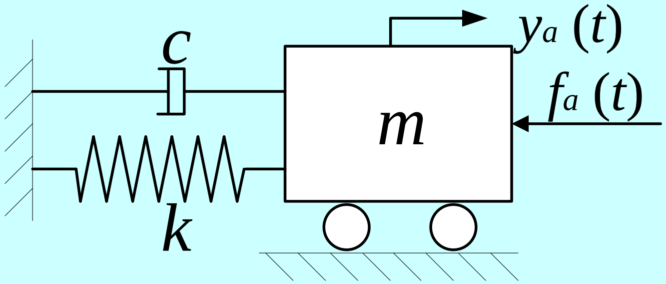
频域 ■ 频率响应函数 $\displaystyle H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$ $\quad Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$

z 域 ■ 系统函数 $\displaystyle H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$ $\quad Y(z) = X(z)H(z)$

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

- 例：单自由度振动系统分析
  - 运动方程

$$m\frac{d^2y_a}{dt^2}+c\frac{dy_a}{dt}+ky_a=f_a(t)$$



$$\frac{d^2y_a}{dt^2}+2\zeta\Omega_n\frac{dy_a}{dt}+\Omega_n^2y_a=x_a(t)$$

$$\zeta=\frac{c}{2m\Omega_n}$$

$$\Omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x_a(t)=\frac{f_a(t)}{m}$$

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

- 例：单自由度振动系统分析(2)
  - 输入—输出差分方程的建立

$$\frac{d^2y_a}{dt^2}+2\zeta\Omega_n\frac{dy_a}{dt}+\Omega_n^2y_a=x_a(t)$$

$$\left.\frac{dy_a}{dt}\right|_{t=nT_s}=\frac{y_a(nT_s+T_s)-y_a(nT_s)}{T_s}$$

$$\left.\frac{d^2y_a}{dt^2}\right|_{t=nT_s}=\frac{y_a(nT_s+2T_s)-2y_a(nT_s+T_s)+y_a(nT_s)}{T_s^2}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{N}b_iy(n-i)=\sum_{i=0}^{M}a_ix(n-i)}$$

$$y(n)+(2\zeta\Omega_nT_s-2)y(n-1)+(1-2\zeta\Omega_nT_s+\Omega_n^2T_s^2)y(n-2)=T_s^2x(n-2)$$

$\boxed{b_0=1}$ $\boxed{b_1}$ $\boxed{b_2}$ $\boxed{a_2}$ $\boxed{a_0=a_1=0}$

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

- 例：单自由度振动系统分析(3)
  - 系统函数$H(z)$

$$y(n)+(2\zeta\Omega_n T_s-2)y(n-1)+(1-2\zeta\Omega_n T_s+\Omega_n^2 T_s^2)y(n-2)=T_s^2 x(n-2)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{T_s^2 z^{-2}}{1+(2\zeta\Omega_n T_s-2)z^{-1}+(1-2\zeta\Omega_n T_s+\Omega_n^2 T_s^2)z^{-2}}$$

  - 极点 $z_{1,2}=1-\zeta\Omega_n T_s\pm j\Omega_n T_s\sqrt{1-\zeta^2}\qquad(\zeta<1)$

$$\boxed{\left|z_{1,2}\right|<1\Rightarrow T_s<\frac{2\zeta}{\Omega_n}}$$

  - 频响函数$H(\omega)$

$$H(\omega)=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{T_s^2 e^{-j2\omega}}{1+(2\zeta\Omega_n T_s-2)e^{-j\omega}+(1-2\zeta\Omega_n T_s+\Omega_n^2 T_s^2)e^{-j2\omega}}$$

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}b_k z^{-k}}$$

- 几个有用的MATLAB命令
  - 系统的零极点图 zplane(a,b)
    - 在z平面上画出用分子a和分母b表示的系统的零点 (用‘o’表示)和极点 (用‘x’表示)，并画出单位圆
  - 系统的脉冲响应函数 impz
    - [h,t]=impz(a,b)----得到系统的脉冲响应h，取样点数N由impz函数自动选取并记录在t中(t=[0:N-1]’)
    - [h,t]=impz(a,b,N)----得到系统在指定点的脉冲响应h。当N为标量时，t= [0:N-1]’；当N为矢量时(其值应为整数)，则t=N,即在这些指定的点计算脉冲响应h
    - [h,t]=impz(b,a,N,Fs)----得到系统在指定点的脉冲响应h。取样间隔为1/Fs
    - h=impz(a,b)等效于h=filter(a,b,δ)

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}a_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N}b_k e^{-jk\omega}}$$

- 几个有用的MATLAB命令
  - 系统的频率响应函数 freqz
    - [h,w]=freqz(a,b,n)----得到系统n点的频率响应，这n点均匀分布在单位圆的上半圆(0-π)。h中为频率响应H(w), w为这n点的频率。(缺省n=512)
    - [h,f]=freqz(a,b,n,Fs)----得到系统n点的频率响应，这n点均匀分布在单位圆的 (0-Fs/2)范围内。h中为频率响应H(f), f为这n点的频率(Fs 和f以Hz为单位)
    - 不带输出变量的freqz函数则画出幅频和相频特性曲线

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

- 例：单自由度振动系统分析(4)
  - MATLAB代码

```
wn = 2*pi*10;          % undamped natural frequency
Kesi = 0.1;            % damping ratio
Ts = 1/1000;           % sampling period
N=round(1/Ts);
a=[0, 0, Ts*Ts];
b=[1, (2*Kesi*wn*Ts-2), (1-2*Kesi*wn*Ts+wn*wn*Ts*Ts)];
figure
zplane(a,b)            % 绘制系统的零极点图
figure
[h,t]=impz(a,b,N,1/Ts);
plot(t,h)              % 绘制系统的脉冲响应
figure
freqz(a,b,N,1/Ts);     % 绘制系统的幅频和相频响应
```

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}b_k z^{-k}}$$

离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

分析结果(1)

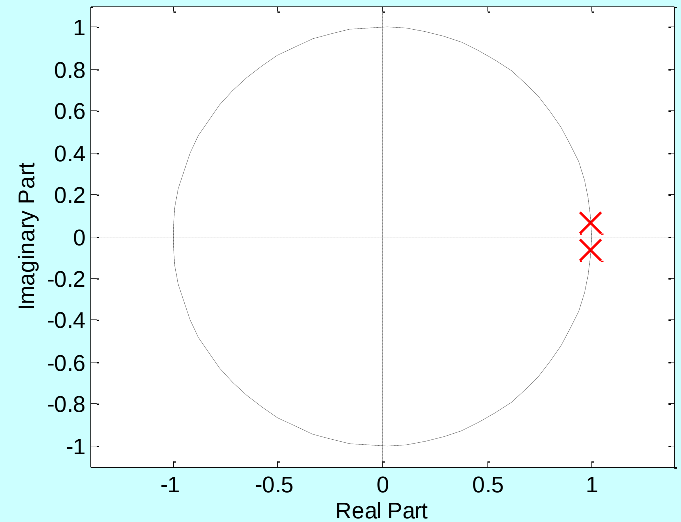
$$\Omega_n = 20\pi$$

$$\zeta = 0.1$$

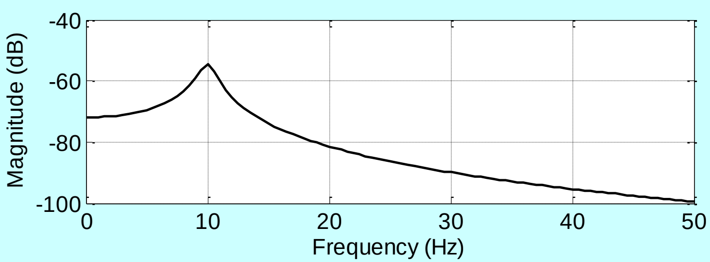
$$T_s = 0.001s$$

→ 极点在单位圆内

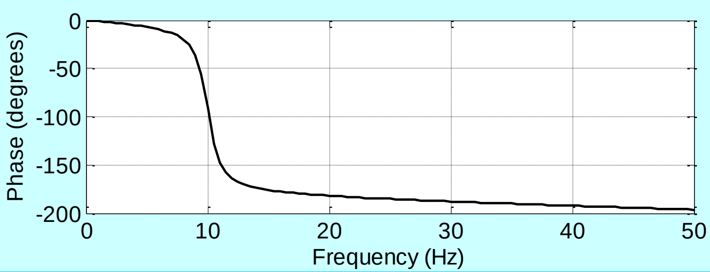
零极点图



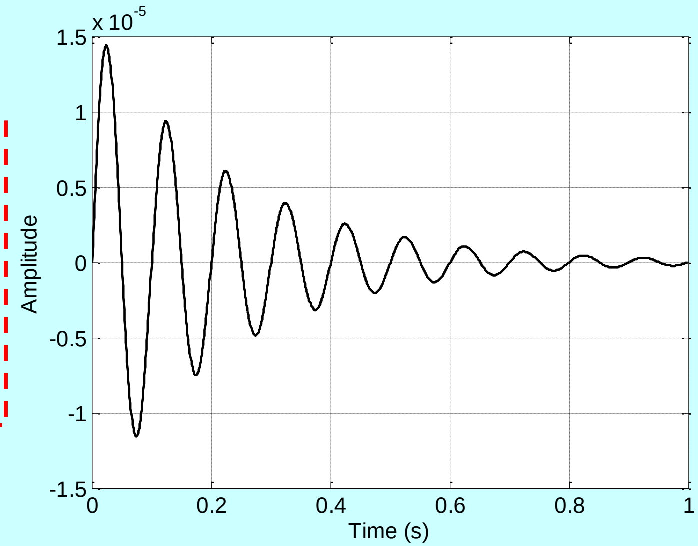
幅频响应



相频响应



脉冲响应



离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

分析结果(2)

$\Omega_n = 20\pi$

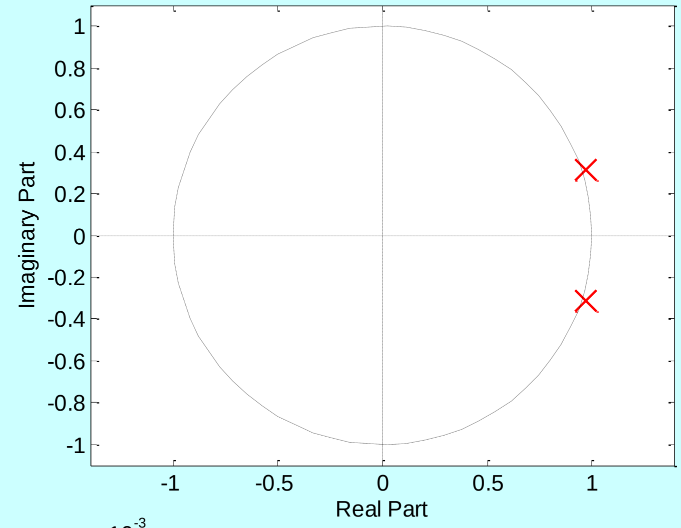
$\zeta = 0.1$

$T_s = 0.005s$

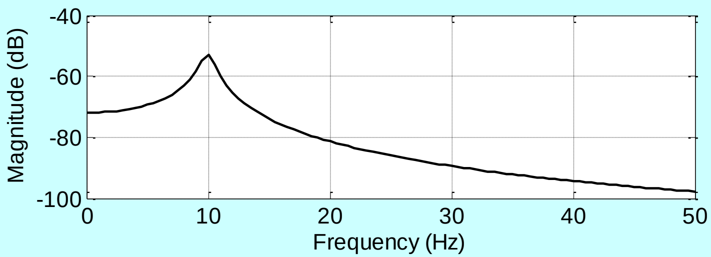
极点在单位圆外

$$T_s > \frac{2\zeta}{\Omega_n} \Rightarrow |z_{1,2}| > 1$$

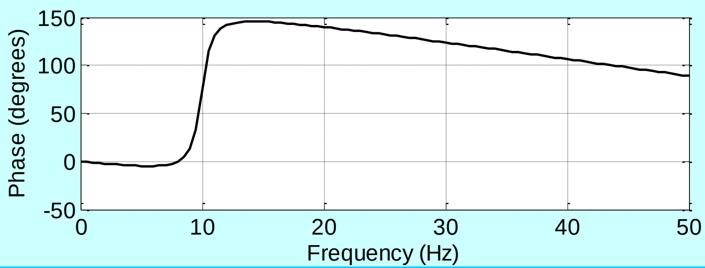
零极点图



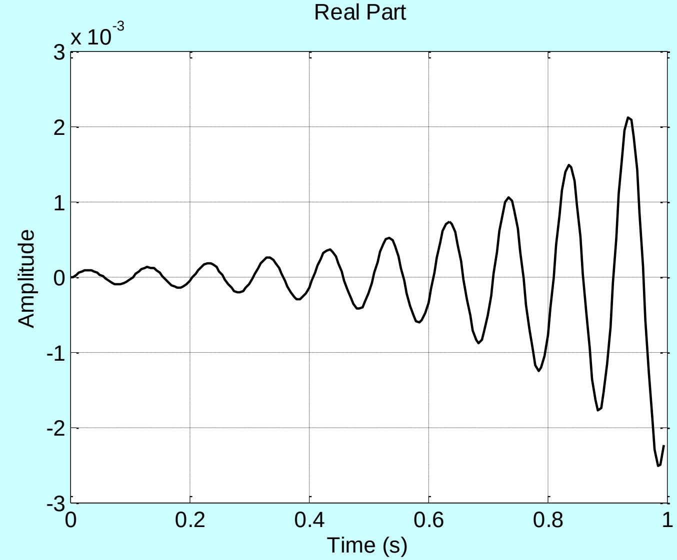
幅频响应



相频响应



脉冲响应



离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

分析结果(3)

$$\Omega_n = 20\pi$$

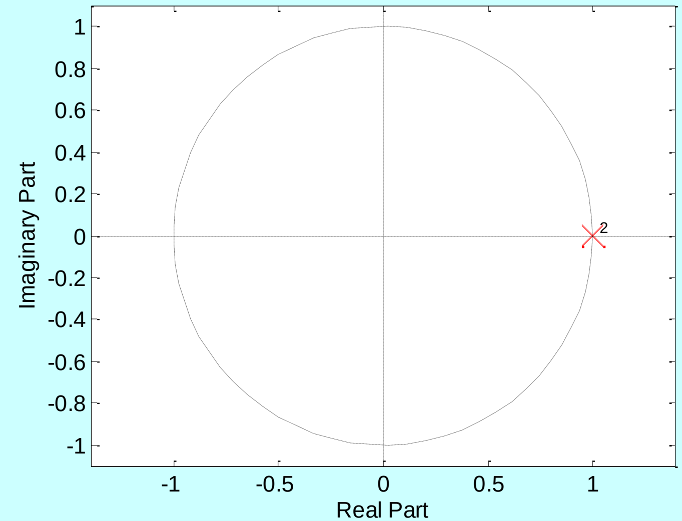
$$T_s = 0.001ms$$

$$\zeta = -0.1$$

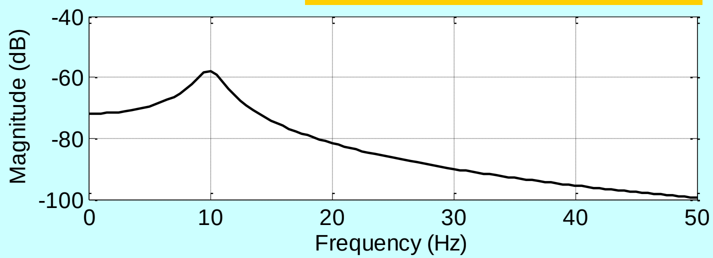
极点在单位圆外

$$T_s > \frac{2\zeta}{\Omega_n} \Rightarrow |z_{1,2}| > 1$$

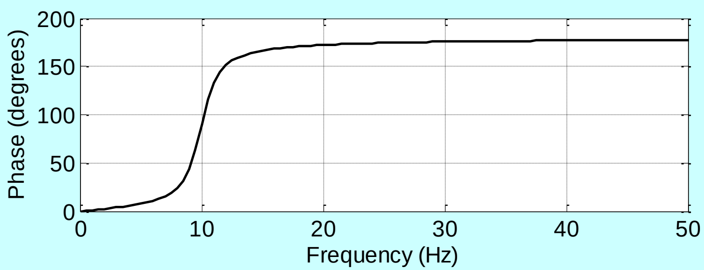
零极点图



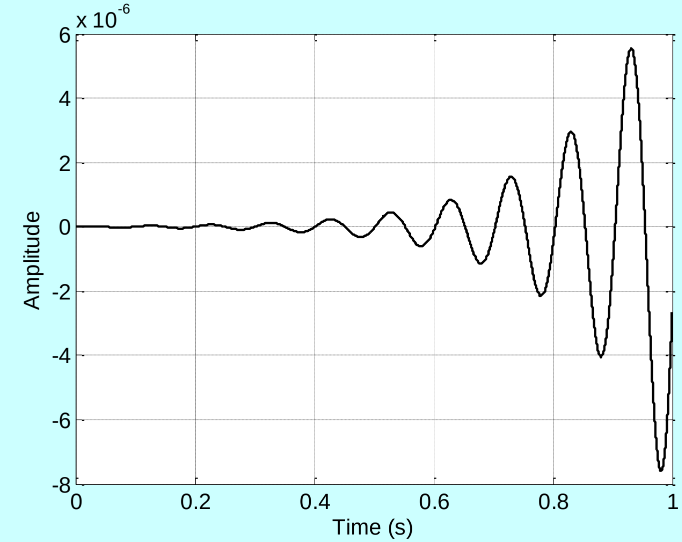
幅频响应



相频响应

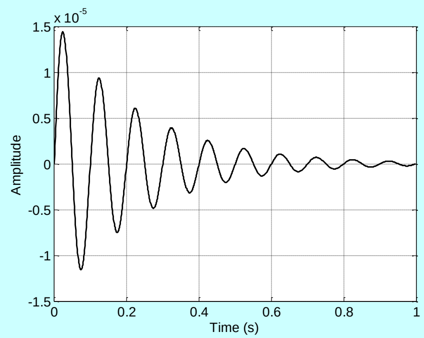


脉冲响应

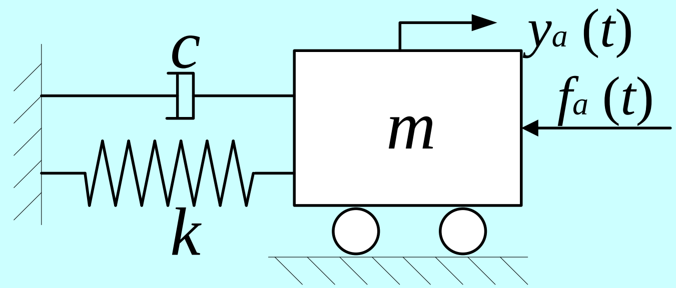


离散时间信号的傅立叶变换(DTFT)

- 利用Hilbert变换辨识阻尼系数



$$\boxed{\zeta = \frac{c}{2m\Omega_n}}$$



$$x(t) = Ae^{-\zeta\Omega_n t}\sin(\Omega_d t + \phi) \quad t \geq 0 \qquad \Omega_d = \Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

$$= A_x(t)e^{j\phi_x(t)} \approx (Ae^{-\zeta\Omega_n t})e^{j(\Omega_d t + \phi - \pi/2)} \quad t \geq 0$$

$$\ln A_x(t) \approx \ln A - \zeta\Omega_n t$$

The End

谢谢！

请批评指正