ch8 广义逆矩阵

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\det A \neq 0 \longrightarrow A^{-1}$ 存在

$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, A^{-1} × ?

§1. 正交投影矩阵

一、投影矩阵 ($A^2=A$)

$$\begin{cases} \forall x \in R(A), & x = Ay \Rightarrow Ax = A^2y = Ay = x \\ \forall x \in N(A), & Ax = 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A)}$$

称 A 为 $\mathbb{C}^n$ 沿 $N(A)$ 到 $R(A)$ 之投影矩阵

若 $R(A)^{\perp} = N(A)$, 称 A 为正交投影矩阵

设 $P_{L,M}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 沿子空间 M 到子空间 L 上的投影

如何求 $P_{L,M}$？

设 $\dim L = r$, $\dim M = n-r$

在 L 和 M 中分别取基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$, $\{\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n\}$

则 $P_{L,M}\alpha_i = \begin{cases} \alpha_i, & i=1\sim r \\ 0, & i=r+1,\cdots,n \end{cases}$

令 $X=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\in\mathbb{C}^{n\times r}$, $Y=(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^{n\times(n-r)}$

则 $P_{L,M}X=X$, $P_{L,M}Y=0$

$\Rightarrow P_{L,M}(X,Y)=(X,0) \Longrightarrow \boxed{P_{L,M}=(X,0)(X,Y)^{-1}}$

二. 正交投影矩阵

Th. $\boxed{A\text{为正交投影矩阵} \Longleftrightarrow A^2=A,\ A^*=A}$

证. "$\Rightarrow$" 设 A 为 $\mathbb{C}^n$ 在子空间 L 上正交投影矩阵.

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 为 L 之标准正交基,

$\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$ 为 $L^\perp$ ……

则 $U=(\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n)$ 为酉阵

由 $A\alpha_i = \begin{cases} \alpha_i, & i=1\sim r \\ 0, & i=r+1, \cdots, n \end{cases}$

$$\Rightarrow AU = U\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = U\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \Rightarrow \begin{cases} A^*=A \\ A^2=A. \end{cases}$$

"$\Leftarrow$"

$A^* = A \Rightarrow$ ∃ 酉阵 U, ∋ $U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$A^2 = A \Rightarrow \lambda_i = 1$ or 0.

故 $A = U \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$

$\Rightarrow AU = U \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow AU_i = \begin{cases} U_i, & i = 1 \sim r \\ 0, & i = r+1, \sim n \end{cases}$

令 $L = [U_1, \cdots, U_r]$, $L^\perp = [U_{r+1}, \cdots, U_n]$

则 A 为 $\mathbb{C}^n$ 上 L 上之正交投影矩阵.

求 $\mathbb{C}^n$ 在子空间 $L=[\underbrace{\alpha_1,\cdots,\alpha_r}_{\text{基}}]$ 上之正交投影阵 P_L.

一般基，不一定正交基

设 $L^\perp=[\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n]$.

令 $X=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\in\mathbb{C}^{n\times r}$, $Y=(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^{n\times(n-r)}$

则 $X^*Y=0$, $Y^*X=0$.

$$\Rightarrow P_L=(X,0)(X,Y)^{-1}=(X,0)(X,Y)^{-1}((X,Y)^*)^{-1}(X,Y)^*$$

$$=(X,0)((X,Y)^*(X,Y))^{-1}(X,Y)^*$$

$$=(X,0)\begin{pmatrix}X^*X & 0\\ 0 & Y^*Y\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}X^*\\ Y^*\end{pmatrix}=\boxed{X(X^*X)^{-1}X^*}.$$

推论：若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为标准正交基，则 $P_L=XX^*$

§2. Moore-Penrose 广义逆

一. 定义

Def. 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $X\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 满足如下四个 Penrose 方程

(1) $AXA=A$

(2) $XAX=X$

(3) $(AX)^*=AX$

(4) $(XA)^*=XA$

则称 X 为 A 之 Penrose 广义逆, 记为 A^+.

显然, A 为非奇异阵时, $A^+=A^{-1}$.

Th. 对 $\forall A\in \mathbb{C}^{m\times n}$, A^+ 存在且唯一.

证. 若 $A=0$, 取 $X=0$ 即可.

设 $A\neq 0$, 则 $A=U\Sigma V^*$, 其中 $U^*U=E_m$, $V^*V=E_n$,

$$\Sigma=\mathrm{diag}(s_1,\cdots,s_r,0\cdots 0)_{m\times n}$$

取 $$X=V\begin{pmatrix} s_1^+ & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & s_r^+ & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{pmatrix}_{n\times m}U^*$$

则 X 满足 (1)—(4).

下证唯一性. 设 X, Y 均满足 (1)—(4),

则 $$\begin{aligned} X &= XAX = X(AX)^* = XX^*A^* = XX^*A^*Y^*A^* = X(AX)^*(AY)^* \\ &= XAXAY = XAY = (XA)^*YAY = (XA)^*(YA)^*Y \\ &= (YAXA)^*Y = (YA)^*Y = YAY = Y. \end{aligned}$$

Th. (1) $\operatorname{rank}(A^+) = \operatorname{rank}(A)$

(2) $R(A^+) = R(A^*)$, $N(A^+) = N(A^*)$.

证. (1) 显然.

(2) 若 $\beta \in R(A^*)$, $\Rightarrow \exists \alpha$, $\ni A^*\alpha = \beta$.

$$\Rightarrow (A^+A)A^*\alpha = (A^+A)^*A^*\alpha = (AA^+A)^*\alpha = A^*\alpha = \beta$$

$$\Rightarrow \beta \in R(A^+) \Rightarrow R(A^*) \subseteq R(A^+)$$

若 $\beta \in R(A^+) \Rightarrow \exists \alpha$, $\ni A^+\alpha = \beta$.

$$\Rightarrow A^*(A^+)^*A^+\alpha = (A^+A)^*A^+\alpha = A^+AA^+\alpha = A^+\alpha = \beta$$

$$\Rightarrow \beta \in R(A^*) \Rightarrow R(A^+) \subseteq R(A^*)$$

若 $\alpha \in N(A^*) \Rightarrow A^*\alpha = 0 \Rightarrow A^+\alpha = A^+AA^+\alpha = A^+(AA^+)^*\alpha = A^+(A^+)^*A^*\alpha = 0$

$$\Rightarrow N(A^*) \subseteq N(A^+) \qquad N(A^+) \subseteq N(A^*)$$

若 $\alpha \in N(A^+) \xRightarrow{A^+\alpha = 0} A^*\alpha = (AA^+A)^*\alpha = A^*(AA^+)^*\alpha = A^*AA^+\alpha = 0$

Moore在1920年利用投影算子给出了A^+的等价定义.

Def. 设$A\in C^{m\times n}$, 若$X\in C^{n\times m}$满足:

$$AX = P_{R(A)},\quad XA = P_{R(X)},$$

则称X为A的Moore广义逆.

$AX = P_{R(A)}$, 　这说明投影阵在广义逆中的作用 相当于

$AA^{-1} = E_n$. 　单位阵在逆阵中的作用

Th. Moore 广义逆与 Penrose 广义逆等价.

证: $\Leftarrow$ 若 X 满足 $AX = P_{R(A)}$, $XA = P_{R(X)}$.

则对 $\forall \alpha$, $AXA\alpha = P_{R(A)} A\alpha = A\alpha \Rightarrow AXA = A$

又 $P_{R(A)}$ 为正交投影阵, 则 $\Rightarrow (AX)^* = AX$

同理: $XAX = X$, $(XA)^* = XA$

$\Rightarrow$ 已知 $AXA = A$, $XAX = X$, $(AX)^* = AX$, $(XA)^* = XA$.

$\overset{?}{\Rightarrow} AX = P_{R(A)}$, $XA = P_{R(X)}$.

$\forall \alpha \in R(A)$, $\alpha = A\beta \Rightarrow \underline{AX\alpha} = AXA\beta = A\beta = \underline{\alpha}$

$\forall \alpha \in R(A)^{\perp} = N(A^*) \Rightarrow \underline{AX\alpha} = (AX)^*\alpha = X^*A^*\alpha = \underline{0}$

$\Rightarrow AX = P_{R(A)}$　类似可得 $XA = P_{R(X)}$

三. 性质. $\forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

① $(A^+)^+ = A$

② $(A^*)^+ = (A^+)^*$, $(A^T)^+ = (A^+)^T$

③ $(\lambda A)^+ = \lambda^+ A^+$

④ $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)^+ = \mathrm{diag}(\lambda_1^+, \cdots, \lambda_n^+)$

⑤ $A^+AA^* = A^*$, $A^*AA^+ = A^*$, $AA^+A^* = A$. $A^*A^+A = A^*$

⑥ $(A^*A)^+ = A^+(A^+)^*$

⑦ $A^+ = (A^*A)^+A^*$

⑧ 设 $A = B + C$, $B^*C = BC^* = 0$. $\Longrightarrow A^+ = B^+ + C^+$

⑨ $r(A) = r(A^+) = r(A^+A) = \mathrm{tr}(A^+A)$.

三. A^+的计算

(1) 奇异值分解求 A^+.

$A = U\Sigma V^*$, 其中 $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$.

则 $\boxed{A^+ = V\Sigma^+ U^*} = V \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r^{-1} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times m} U^*$

(2) 满秩分解求 A^+.

$A = LR$, 其中 $L \in \mathbb{C}^{m\times r}$, $R \in \mathbb{C}^{r\times n}$.

则 $\boxed{A^+ = R^*(RR^*)^{-1}(L^*L)^{-1}L^*}$.

$\Rightarrow$ $AA^+ = L(L^*L)^{-1}L^*$

$A^+A = R^*(R^*R)^{-1}R$

$\begin{cases} A^+ = (A^*A)^{-1}A^*, & A列满秩 \\ A^+ = A^*(AA^*)^{-1}, & A行满秩 \end{cases}$

(3). 正交三角分解求 A^+ （A列满秩）

$A=QR$，其中 $Q^*Q=E_n$，R为对角元为正的上三角阵

则 $\boxed{A^+=R^+Q^*}$

补充： $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$.

则 $Ax=b$ 必有唯一的极小范数最小二乘解：

$x^*=A^+b$.