例 3-16 (1) 利用埃尔米特插值公式推导带导数的求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{(b-a)^2}{12}[f'(b)-f'(a)]$$

及其余项

$$R[f] = \frac{(b-a)^5}{4!30}f^{(4)}(\eta),\quad a \leqslant \eta \leqslant b$$

(2) 利用(1)的结论推导所谓带修正项的复化梯形求积公式

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)\mathrm{d}x \approx T_N - \frac{h^2}{12}[f'(x_N) - f'(x_0)]$$

这里 $T_N = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(x_N)]$，$x_i = x_0 + ih$，$h = (x_N - x_0)/N$.

分析 (1) 的结论用埃尔米特插值多项式做即可，(2) 的结论是在 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,\cdots,N)$ 上分别用(1)的结论即可.

解答 (1) 取 $x_0 = a, x_1 = b$，作埃尔米特插值，得

$$H_3(x) = \left[1 - 2\left(\frac{x-a}{a-b}\right)\right]\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^2 f(a) + \left[1 - 2\frac{x-b}{b-a}\right]\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 f(b) + \frac{(x-a)(x-b)^2}{(a-b)^2}f'(a) + \frac{(x-b)(x-a)^2}{(b-a)^2}f'(b)$$

插值余项为

$$R_3(x) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-a)^2(x-b)^2,\quad a < \xi < b$$

所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b H_3(x)\mathrm{d}x + \int_a^b R_3(x)\mathrm{d}x$$

对 $H_3(x)$ 的积分，我们有

$$\int_a^b H_3(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)] - \frac{(b-a)^2}{12}[f'(b) - f'(a)]$$

余项 $R[f] = \int_a^b R_3(x)\mathrm{d}x =$

$$\int_a^b \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-a)^2(x-b)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\eta)\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{4!}\frac{1}{30}f^{(4)}(\eta)(b-a)^5,\quad a < \eta < b$$

(2)
$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{h}{2}[f(x_{k-1}) + f(x_k)] - \frac{h^2}{12}[f'(x_k) - f'(x_{k-1})]\right\} = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(x_N)] - \frac{h^2}{12}[f'(x_N) - f'(x_0)] = T_N - \frac{h^2}{12}[f'(x_N) - f'(x_0)]$$

故题断得证.

例 3-17 用 x_n 表示 $a + nh$，f_n 表示 $f(x_n)$，试推导开型牛顿-柯特斯求积公式：

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{3}{2}h(f_1 + f_2)$$

分析 所谓开型求积公式，是指不包含积分区间端点的函数值的求积公式. 构造办法之一是用插值法，之二是利用代数精确

度概念去做．但本题求积节点，求积系数都已知，故应用插值法来做．

解答 用 x_1,x_2 作插值节点，则

$$f(x)\approx P_1(x)=f_1+\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

故

$$\int_{x_0}^{x_3}f(x)\mathrm{d}x\approx\int_{x_0}^{x_3}(f_1+\frac{f_2-f_1}{h}(x-x_1))\mathrm{d}x=$$

$$f_1(x_3-x_0)+$$

$$\frac{f_2-f_1}{2h}[(x_3-x_1)^2-(x_0-x_1)^2]=$$

$$3hf_1+\frac{1}{2h}(f_2-f_1)(4h^2-h^2)=\frac{3}{2}h(f_1+f_2)$$

所以它是一种插值型求积公式．

例 3－18 推导下列三种矩形求积公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(a)+\frac{1}{2}f'(\eta)(b-a)^2\quad(\text{左矩形公式})$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(b)-\frac{1}{2}f'(\eta)(b-a)^2\quad(\text{右矩形公式})$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}f''(\eta)(b-a)^3(\text{中矩形公式})$$

分析 本题三个求积公式的节点与系数都已知，若用插值法，由于是单点公式，故行不通．可考虑用泰勒展开来推导．

解答 (1) 左矩形公式

将 $f(x)$ 在 a 处展开，得

$$f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a),\ \xi\in[a,x]$$

两边在 $[a,b]$ 上积分，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a)\mathrm{d}x+\int_a^b f'(\xi)(x-a)\mathrm{d}x=$$

$$(b-a)f(a)+\int_a^b f'(\xi)(x-a)\mathrm{d}x$$

由于 $(x-a)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，故有 $\eta\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(a)+f'(\eta)\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x$$

从而得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(a)+\frac{1}{2}f'(\eta)(b-a)^2,\ \eta\in[a,b]$$

(2) 右矩形公式

将 $f(x)$ 在 b 处展开，并积分，即得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(b)-\frac{1}{2}f'(\eta)(b-a)^2,\ \eta\in[a,b]$$

(3) 中矩形公式

将 $f(x)$ 在 $\frac{a+b}{2}$ 处展开，得

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2,\ \xi\in[a,b]$$

两边积分，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2\mathrm{d}x=$$

$$(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\eta)\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2\mathrm{d}x=$$

$$(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}f''(\eta)(b-a)^3,\ \eta\in[a,b]$$

例 3－19 已知 $x_0=\frac{1}{4},x_1=\frac{1}{2},x_2=\frac{3}{4}$，

(1) 推导以这三个点作为求积节点在 $[0,1]$ 上的插值型求积公式；

(2) 指明求积公式所具有的代数精确度；

(3) 用所求公式计算$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

分析 本题所推导的公式也是开型的，节点已知，求积系数未知，故可用插值法求解.

解答 (1) 由公式知，插值多项式 $P_2(x)$ 为

$$P_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

故 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\approx\int_0^1 P_2(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{2}A_kf(x_k)$

其中

$$A_0=\int_0^1\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{4})}{(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})(\frac{1}{4}-\frac{3}{4})}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

$$A_1=\int_0^1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{(x-\frac{1}{4})(x-\frac{3}{4})}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})(\frac{1}{2}-\frac{3}{4})}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$$

$$A_2=\int_0^1\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})}{(\frac{3}{4}-\frac{1}{4})(\frac{3}{4}-\frac{1}{2})}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

因此所求开型求积公式为

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{1}{3}[2f(\frac{1}{4})-f(\frac{1}{2})+2f(\frac{3}{4})]$$

(2) 上述求积公式是由二次插值函数积分而来，故至少具有二次代数精确度. 将 $f(x)=x^3$, x^4 代入上求积公式，有

$$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{3}[2\times(\frac{1}{4})^3-(\frac{2}{4})^3+2(\frac{3}{4})^3]$$

$$\int_0^1 x^4\mathrm{d}x\neq\frac{1}{3}[2(\frac{1}{4})^4-(\frac{2}{4})^4+2(\frac{3}{4})^4]$$

所以所求求积公式具有三次代数精确度.

(3) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}[2\times(\frac{1}{4})^2-(\frac{2}{4})^2+2\times(\frac{3}{4})^2]=\frac{1}{3}$

由于该求积公式具有三次代数精确度，从而$\frac{1}{3}$为$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$的精确值.

例 3-20 设 $P_2(x)$ 是对 $f(x)$ 的二次插值多项式，插值节点为 $0,h,2h$，用 $P_2(x)$ 导出求积分 $I=\int_0^{3h}f(x)\mathrm{d}x$ 的数值积分公式 I_h，并用泰勒展开证明：

$$I-I_h=\frac{3}{8}h^4f'''(0)+O(h^5)$$

分析 第一步可求出 $P_2(x)=\sum_{i=0}^{2}l_i(x)f(x_i)$, $x_i=ih(i=0,1,2)$；然后积分得 $I_h=A_0f(x)+A_1f(h)+A_2f(2h)$；最后由于题中 $I-I_h=\frac{3}{8}h^4f'''(0)+O(h^5)$ 仅含有 $f'''(0)$，故应将 I_h 中的 $f(h)$, $f(2h)$ 在 0 处展开，得到 I_h 的另一种表达式，将这个表达式与 $f(x)$ 的泰勒展开式的积分式比较，可得 $I-I_h$ 之值.

解答 依题意，$P_2(x)=l_0(x)f(0)+l_1(x)f(h)+l_2(x)f(2h)$，其中

$\frac{x^3}{3}-hx^2\Big|_0^{3h}$

$9h^3-9h^3$

$$l_0(x)=\frac{(x-h)(x-2h)}{(0-h)(0-2h)}=\frac{1}{2h^2}(x^2-3hx+2h^2)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-0)(x-2h)}{(h-0)(h-2h)}=\frac{-1}{h^2}(x^2-2hx)$$

$$l_2(x)=\frac{(x-0)(x-h)}{(2h-0)(2h-h)}=\frac{1}{2h^2}(x^2-hx)$$

将 $P_2(x)$ 在 $[0,3h]$ 上积分，得

$$\int_0^{3h}P_2(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}hf(0)+\frac{9}{4}hf(2h)$$

所以 $$I_h=\int_0^{3h}P_2(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}h[f(0)+3f(2h)]$$

这就是所求的积分公式.

把 $f(2h)$ 在 $x=0$ 处展开，得

$$f(2h)=f(0)+2hf'(0)+\frac{1}{2}(2h)^2f''(0)+\frac{1}{6}(2h)^3f'''(0)+\frac{1}{4!}(2h)^4f^{(4)}(\xi),\ \xi\in(0,2h)$$

于是

$$I_h=3hf(0)+\frac{9}{2}h^2f'(0)+\frac{9}{2}h^3f''(0)+3h^4f'''(0)+O(h^5)$$

再把 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展开，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(0)x^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(\eta)x^4,\ \eta\in(0,x)$$

积分，得

真 准确值

$$I=\int_0^{3h}f(x)\mathrm{d}x=3hf(0)+\frac{1}{2}(3h)^2f'(0)+\frac{1}{6}(3h)^3f''(0)+\frac{1}{24}(3h)^4f'''(0)+O(h^5)=$$
$$3hf(0)+\frac{9}{2}h^2f'(0)+\frac{9}{2}h^3f''(0)+$$

$$\frac{27}{8}h^4f'''(0)+O(h^5)$$

故 $$I-I_h=\frac{27}{8}h^4f'''(0)-3h^4f'''(0)+O(h^5)=\frac{3}{8}h^4f'''(0)+O(h^5)$$

例 3－21 若求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$ 的求积系数 $A_k(k=0,1,2,\cdots,n)$ 由下列方程组确定：

$$\begin{cases}A_0+A_1+\cdots+A_n=b-a\\ x_0A_0+x_1A_1+\cdots+x_nA_n=\frac{1}{2}(b^2-a^2)\\ \cdots\quad\cdots\\ x_0^nA+x_1^nA_1+\cdots+x_n^nA_n=\frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})\end{cases}$$

证明：方程组的解 A_k 与插值型求积公式的系数 $A_k=\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x$ 完全一致.

证明 方程组中 $n+1$ 个等式表明求积公式对 $f(x)=1,x,\cdots,x^n$ 精确成立，则求积公式至少具有 n 次代表精确度. 根据结论 $\int_a^b f(x)ax\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$ 至少有 n 次代数精确度的充要条件是它是插值型的，从而求积公式为插值型的，故方程组的解 A_k 就应该等于 $\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x\ (k=0,1,2,\cdots,n)$.

反之，若 $A_k=\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x\ (k=0,1,2,\cdots,n)$，则求积公式是插值型的，至少具有 n 次代数精确度，从而求积公式对 $f(x)=1,x,\cdots,x^n$ 均能精确成立，即求积系数 A_k 满足题中方程组.

例 3－22 假定 $f(x)\in C[a,b]$，证明对于 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的复化梯

形公式和复化辛普森公式当 $n\to\infty$ 时趋于积分值 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

分析 在 $f(x)$ 连续的假定下，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在是不成问题的．应想法把复化求积公式与定积分的定义联系起来论证即可．

证明 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故可积．由定积分定义知，对 $[a,b]$ 的任一分划 Δ，设任一小区间长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，取每一小区间上任一点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，所得之黎曼和为 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$，取极限 $\lim\limits_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在．该积分对于等距分划和取特殊 ξ_i 当然成立．

(1) 关于复化梯形公式的收敛性：

复化梯形公式 $(h=(b-a)/n)$ 为：

$$T_n=\frac{h}{2}\sum_{i=1}^n[f(x_{i-1})+f(x_i)]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\frac{b-a}{n}+\sum_{i=1}^n f(x_i)\frac{b-a}{n}\right]$$

当 $\max\Delta x_i\to 0$ 时，$n\to\infty$，故

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(a+(i-1)h)\frac{b-a}{n}+\right.$$

$$\left.\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(a+ih)\frac{b-a}{n}\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]=$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(T_n 右端括号内两项和式分别是 n 等分 $[a,b]$ 后，ξ_i 取小区间的左、右端点而得到的黎曼和．)

(2) 复化辛普森公式的收敛性证明：

我们也可按(1)的证法去做．这里给出另一证法．利用连续

函数的性质，在每一小区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 上，$\exists\ \xi_i$，使得 $f(\xi_i)=\frac{1}{6}[f(x_{i-1})+4f(x_{i-\frac{1}{2}})+f(x_i)]$，这样

$$S_n=\sum_{i=1}^n\frac{h}{6}[f(x_{i-1})+4f(x_{i-\frac{1}{2}})+f(x_i)]=$$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$

这也是一个黎曼和，其极限(当 $n\to\infty$ 时)为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

例 3-23 用反证法证明：不存在 A_k、$x_k(k=0,1,2,\cdots,n)$，使得求积公式

$$\int_a^b\rho(x)f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^n A_kf(x_k)$$

的代数精确度超过 $2n+1$ 次．

分析 只要能找到一个 $2n+2$ 次的多项式，使求积公式两边不能相等即可．而具有 $2n+1$ 次代数精确度的求积公式的求积节点是 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式的零点 $x_k(k=0,1,2,\cdots,n)$，因此自然以 $\omega_{n+1}^2(x)=\prod_{i=0}^n(x-x_i)^2$ 作为首选考察对象．

反证 构造一个多项式 $K(x)=\omega_{n+1}^2(x)=(x-x_0)^2\cdots(x-x_n)^2$，并令 $f(x)=K(x)$，代入题中积分公式，则左端有

$$\int_a^b\rho(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\rho(x)K(x)\mathrm{d}x>0$$

右端有

$$\sum_{k=0}^n A_kK(x_k)=0$$

故左端 $\neq$ 右端．说明不存在具有 $2n+2$ 次代数精确度的求积公式．故高斯型求积公式是具有最高次代数精确度的求积公式．

例 3-24 对于高斯型求积公式 $\int_a^b\rho(x)f(x)\mathrm{d}x\approx$

$\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$，证明：

（1）求积系数 $A_k > 0$，$k = 0,1,2,\cdots,n$ 且 $\sum_{k=0}^{n} A_k = \int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x$；

（2）求积系数 $A_k = \int_a^b \rho(x) l_k(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x) l_k^2(x)\mathrm{d}x$，$l_k(x)$ 是以 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为插值节点的拉格朗日插值基函数，$k = 0,1,2,\cdots,n$.

分析 题目中涉及到高斯型求积公式，就应该把 x_i 是什么样的节点、求积公式是如何来的，求积公式的代数精确度等联系起来．利用这些概念，经过一定的论证，有可能得到题中结论．下题中证明思想也是这样．

证明 （1）求积公式是高斯型的，故它的代数精确度是 $2n+1$ 次的．因此，对 $2n$ 次的多项式 $l_k^2(x)$ $(k = 0,1,2,\cdots,n)$，求积公式是精确成立的，即有

$$\int_a^b \rho(x) l_k^2(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} A_i l_k^2(x_i)$$

由于 $l_k(x)$ 是拉格朗日插值基函数，满足 $l_k(x_i) = \delta_{ki}$，所以有

$\int_a^b \rho(x) l_k^2(x)\mathrm{d}x = A_k > 0$，$k = 0,1,2,\cdots,n$.

特别当 $f(x) \equiv 1$ 时，求积公式准确成立，有

$$\int_a^b \rho(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k$$

这就证明了（1）的结论．

（2）一方面，由（1）知 $A_k = \int_a^b \rho(x) l_k^2(x)\mathrm{d}x$；另一方面，高斯型求积公式是以 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的 $n+1$ 次正交多项式的零点为插值节点的拉格朗日插值多项式积分而得，即

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b \rho(x)\left(\sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)\right)\mathrm{d}x =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b \rho(x) l_k(x)\mathrm{d}x\right) f(x_k) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

故 $$A_k = \int_a^b \rho(x) l_k(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x) l_k^2(x)\mathrm{d}x,$$

$$k = 0,1,2,\cdots,n$$

例 3－25 设 $\{\varphi_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式序列，x_i $(i = 0,1,2,\cdots,n)$ 为 $\varphi_{n+1}(x)$ 的零点，$l_i(x)$ $(i = 0,1,\cdots,n)$ 是以 $\{x_i\}$ 为节点的拉格朗日插值基函数，$\int_a^b \rho(x) f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 为高斯型求积公式，证明：

（1）当 $0 \leqslant k,\ l \leqslant n,\ k \neq l$ 时 $\sum_{i=0}^{n} A_i \varphi_k(x_i)\varphi_l(x_i) = 0$；

（2）$\int_a^b \rho(x) l_k(x) l_j(x)\mathrm{d}x = 0,\ k \neq j$；

（3）$\sum_{k=0}^{n}\int_a^b \rho(x) l_k^2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x$.

证明 （1）因 $\int_a^b \rho(x) f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 是高斯型求积公
要说明
式，故对于 $f(x)$ 是不超过 $2n+1$ 次的多项式都能精确成立．由于 $\varphi_k(x)\varphi_l(x)$ 是 $k+l$ 次的多项式，$k+l \leqslant 2n$，故对于 $\varphi_k(x)\varphi_l(x)$，求积公式也精确成立，即有

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} A_i \varphi_k(x_i)\varphi_l(x_i)$$

又由于 $k \neq l$ 时，$\varphi_k(x)$ 与 $\varphi_l(x)$ 关于 $\rho(x)$ 在 $[a,b]$ 上正交，因此

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)\mathrm{d}x = 0$$

所以 $\sum_{i=0}^{n} A_i\varphi_k(x_i)\varphi_l(x_i) = 0,\ k \neq l,\ k、l \leqslant n.$

(2) $l_k(x)$、$l_j(x)$ 是 n 次插值多项式的插值基函数，满足 $l_k(x_i) = \delta_{ki}$，$l_j(x_i) = \delta_{ji}$，且 $l_k(x)l_j(x)$ 是 $2n$ 次多项式，故

$$\int_a^b \rho(x)l_k(x)l_j(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} A_i l_k(x_i)l_j(x_i)$$

当 $k \neq j$ 时，$l_k(x_i)l_j(x_i) = 0\ (i = 0,1,2,\cdots,n)$，因此

$$\int_a^b \rho(x)l_k(x)l_j(x)\mathrm{d}x = 0$$

(3) 由上题知，有

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = \sum_{k=0}^{n}\int_a^b \rho(x)l_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\int_a^b \rho(x)l_k^2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x$$

例 3-26 试证高斯型求积公式的收敛性：对任何有限区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$，任意的 $\varepsilon > 0$，总存在 $N > 0$，当 $n \geqslant N$ 时，

$$\left|\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k^{(n)})\right| < \varepsilon$$

其中 $x_k^{(n)}$ 是高斯求积节点 $(k = 0,1,2,\cdots,n)$，A_k 为求积系数．

分析 本题对于只学过高等数学的读者来说，难度较大．主要是用到逼近连续函数 $f(x)$ 的 Weierstrass 定理，以及一些极限存在性的证明技巧．

证明 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由 Weierstrass 定理知，总存在多项式 $P(x)$（设其为 m 次），满足

$$|f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2C},\ 对\ \forall\ \varepsilon > 0, x \in [a,b],$$

其中 $C = \int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x > 0$，由权函数定义知，$C$ 是有限正数．这样

$$\left|\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i^{(n)})\right| =$$
$$\left|\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \rho(x)P(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \rho(x)P(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} A_i P(x_i^{(n)}) + \sum_{i=0}^{n} A_i P(x_i^{(n)}) - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i^{(n)})\right| \leqslant$$
$$\left|\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \rho(x)P(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b \rho(x)P(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} A_i P(x_i^{(n)})\right| + \left|\sum_{i=0}^{n} A_i P(x_i^{(n)}) - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i^{(n)})\right|$$

对于上不等式右端第一项，有

$$\left|\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \rho(x)P(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b \rho(x)|f-P|\mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon}{2C}\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{2}$$

第二项由于 $P(x)$ 是 m 次多项式，故当 $m \leqslant 2n+1$ 时，即 $n \geqslant \frac{1}{2}(m-1)$ 时，高斯型求积公式精确成立，有

$$\left|\int_a^b \rho(x)P(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} A_i P(x_i^{(n)})\right| = 0$$

对于第三项，我们有

$$\left|\sum_{i=0}^{n} A_i P(x_i^{(n)}) - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i^{(n)})\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} A_i\left|P(x_i^{(n)}) - f(x_i^{(n)})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2C}\sum_{i=0}^{n} A_i = \frac{\varepsilon}{2} \qquad \left(\sum A_i = \int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x = C\right)$$

由上述估计知，对 $\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ N > \frac{m-1}{2}$，当 $n \geqslant N$ 时

$$\left|\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i^{(n)})\right| < \varepsilon$$

根据极限定义知，高斯型求积公式是收敛的．

例 3 - 27 验证高斯型求积公式

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

的系数及节点分别为

$$A_0 = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}, \quad A_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}},$$

$$x_0 = 2-\sqrt{2}, \quad x_1 = 2+\sqrt{2}$$

分析 求积公式中因有 e^{-x}，区间为 $[0,+\infty)$，自然应想到高斯-拉盖尔求积公式．这样就有两种解法：一是利用高斯-拉盖尔求积公式验证；一是利用高斯型求积公式的代数精确度概念来求 $A_i, x_i (i=0,1)$．

证一 使用两点高斯-拉盖尔求积公式证．

由 $\quad L_2(x) = \mathrm{e}^{x} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^2\mathrm{e}^{-x}) = 2-4x+x^2$

解得 $L_2(x)=0$ 的根为

$$x = (4 \pm \sqrt{16-8})/2 = 2 \pm \sqrt{2}$$

故高斯点为 $x_0 = 2-\sqrt{2}, x_1 = 2+\sqrt{2}$．

由高斯-拉盖尔求积系数 $A_k = \dfrac{[(n+1)!]^2}{x_k[L_{n+1}'(x_k)]^2}, n=1, k=0,1$，得

$$A_0 = \frac{2^2}{(2-\sqrt{2})[-4+2(2-\sqrt{2})]^2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$A_1 = \frac{2^2}{(2+\sqrt{2})[-4+2(2+\sqrt{2})]^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$$

即公式得到验证．

证二 所给高斯求积公式的代数精确度为3，故对 $f(x)=1$，

x, x^2, x^3 均能精确成立，即有

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = A_0 + A_1 = 1 \\ \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{x}x\mathrm{d}x = x_0A_0 + x_1A_1 = 1 \\ \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{x}x^2\mathrm{d}x = x_0^2A_0 + x_1^2A_1 = 2 \\ \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{x}x^3\mathrm{d}x = x_0^3A_0 + x_1^3A_1 = 6 \end{cases}$$

用类似于例 3 - 14 的解法一的办法解得

$$A_0 = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}, \quad A_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}},$$

$$x_0 = 2-\sqrt{2}, \quad x_1 = 2+\sqrt{2}$$

即公式得到验证．

例 3 - 28 证明求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{9}[5f(\sqrt{0.6}) + 8f(0) + 5f(-\sqrt{0.6})]$$

对于次数不高于 5 的多项式准确成立，并计算积分

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}\mathrm{d}x$$

分析 求积公式中系数与节点全部给定，因此可以直接将 $f(x)=1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$ 代入进行验证；另一方面，从已给求积公式来看，积分区间为 $[-1,1]$，权函数为 $\rho(x)=1$，因此该求积公式有可能是三点高斯-勒让德求积公式．

证一 代 $f(x)=x^i (i=0,1,2,\cdots,5)$ 直接验证，知求积公式确能精确成立，略去细节．

证二 验证给定的求积公式是高斯-勒让德求积公式．

因在 $[-1,1]$ 上，三次勒让德多项式为

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

它的三个零点分别为 $x_0=-\sqrt{0.6}$, $x_1=1$, $x_2=\sqrt{0.6}$;

再由三点高斯-勒让德求积公式的求积系数

$$A_k=\frac{2}{(1-x_k^2)[P_{n+1}'(x_k)]^2},\ n=2,k=0,1,2,$$

得
$$A_0=2/[(1-\frac{3}{5})(\frac{15}{2}\times\frac{3}{5}-\frac{3}{2})^2]=5/9$$

$$A_1=2/[(1-0)(\frac{15}{2}\times 0-\frac{3}{2})^2]=8/9$$

$$A_2=2/[(1-\frac{3}{5})(\frac{15}{2}\times\frac{3}{5}-\frac{3}{2})^2]=5/9$$

故题中所给求积公式就是三点高斯-勒让德求积公式,其代数精确度为 5.

下面计算$\int_0^1\frac{\sin x}{1+x}dx$:

令 $x=\frac{1}{2}(t+1)$,则

$$\int_0^1\frac{\sin x}{1+x}dx=\int_{-1}^1\frac{\sin(\frac{t+1}{2})}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}t}dt=\int_{-1}^1\frac{2\sin(\frac{t}{2}+\frac{1}{2})}{3+t}dt\approx$$

$$\frac{1}{9}[5\times\frac{\sin(-\frac{\sqrt{0.6}}{2}+\frac{1}{2})}{3-\sqrt{0.6}}+8\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}}{3}+$$

$$5\times\frac{\sin(\frac{1}{2}\sqrt{0.6}+\frac{1}{2})}{3+\sqrt{0.6}}]=0.2842485$$

故
$$\int_0^1\frac{\sin x}{1+x}dx\approx 0.2842485$$

例 3-29 用三点公式求 $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ 在 $x=1.0,1.1,1.2$ 处的导数值,并估计误差. $f(x)$ 的函数值由下表给出:

x_i	1.0	1.1	1.2
$f(x_i)$	0.250 000	0.226 757	0.206 612

解答 三点求导公式为

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi_0)$$

$$f'(x_1)=\frac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_2)]-\frac{1}{6}h^2f'''(\xi_1)$$

$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi_2)$$

取上表中 $x_0=1.0$, $x_1=1.1$, $x_2=1.2$,分别将有关数值代入上三式,即可得导数的近似值. 由于 $|f'''(\xi_i)|\leqslant\max\limits_{1.0\leqslant x\leqslant1.2}|f'''(x)|=\max\limits_{1.0\leqslant x\leqslant1.2}\left|\frac{-4!}{(1+x)^5}\right|=\frac{4!}{2^5}=0.75$,故可得误差估计及导数值如下表:

x	1.0	1.1	1.2
三点公式	−0.247 92	−0.216 94	−0.185 96
准确 $f'(x)$	−0.250 00	−0.215 96	−0.187 83
理论误差限	0.002 50	0.001 25	0.002 50
实际误差限	0.002 08	0.000 98	0.001 87

例 3-30 已知函数 $y=e^x$ 的下列数值

x	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
y	12.182 5	13.463 7	14.879 7	16.444 6	18.174 1

试用二点、三点微分公式计算 $x=2.7$ 处的一阶、二阶导数值.

分析 本题没有明确指出用那些点处的函数值来求 $f'(2.7)$ 和 $f''(2.7)$. 因此,随着步长 h 不同,导数值有可能不同. 另外,用两点函数值时,只能求一阶导数值.

解一 取 $h=0.1$. 此时,两点公式有两种取法.

当 $x_0=2.6$, $x_1=2.7$ 时

$$f'(2.7)\approx\frac{1}{0.1}[f(2.7)-f(2.6)]=$$
$$\frac{1}{0.6}[14.8797-13.4637]=14.1600$$

当 $x_0=2.7$, $x_1=2.8$ 时

$$f'(2.7)\approx\frac{1}{0.1}[f(2.8)-f(2.7)]=15.6490$$

三点公式取 $x_0=2.6, x_1=2.7, x_2=2.8$,得

$$f'(2.7)\approx\frac{1}{2\times0.1}[f(2.8)-f(2.6)]=14.9045$$
$$f''(2.7)\approx\frac{1}{0.1^2}[f(2.8)-2f(2.7)+f(2.6)]=14.8900$$

解二 取 $h=0.2$,此时两点公式仍有两种取法.

当 $x_0=2.5$, $x_1=2.7$ 时

$$f'(2.7)\approx\frac{1}{0.2}[f(2.7)-f(2.5)]=13.4860$$

当 $x_0=2.7$, $x_1=2.9$ 时

$$f'(2.7)\approx\frac{1}{0.2}[f(2.9)-f(2.7)]=16.4720$$

三点公式取 $x_0=2.5$, $x_1=2.7, x_2=2.9$,则

$$f'(2.7)\approx\frac{1}{2\times0.2}[f(2.9)-f(2.5)]=14.9790$$
$$f''(2.7)\approx\frac{1}{0.2^2}[f(2.9)-2f(2.7)+f(2.5)]=14.9300$$

注记 $f'(2.7)$ 和 $f''(2.7)$ 的真值都是 14.879 73…,上面的计算表明:

(i) 当使用两点公式时,应取步长较小的函数值;

(ii) 一般情况下,同样步长的两点公式没有三点公式准确,步长越小越精确. 但如果高阶导数无界或舍入误差超过截断误差时,这个结论就不一定对了.

例 3-31 (1) 试推导四点数值微分公式

$$f'(x_0)=\frac{1}{6h}[-11f_0+18f_1-9f_2+2f_3]-\frac{h^3}{4}f^{(4)}(\xi)$$

其中 $x_{i+1}-x_i=h\ (i=0,1,2)$, $x_0<\xi<x_3$;

(2) 已知函数表

x	1.0	1.5	2.0	2.5
$f(x)$	8.00	13.75	21.00	29.75

求 $f'(1.0)$ 的近似值.

解答 (1) 因为公式中实际用到四个等距节点,故由牛顿插值公式,得

$$\begin{aligned}f(x)=N_3(x)+R_3(x)=&f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\\&f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\\&f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\\&\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\omega_4(x),\quad x_0<\xi<x_3\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}f'(x_0)\approx N_3'(x_0)=&f[x_0,x_1]+f[x_0,x_1,x_2](x_0-x_1)+\\&f[x_0,x_1,x_2,x_3](x_0-x_1)(x_0-x_2)=\\&\frac{1}{h}(f_1-f_0)+\frac{1}{2h}(-f_0+2f_1-f_2)+\\&\frac{1}{3h}(-f_0+3f_1-3f_2+f_3)=\\&\frac{1}{6h}[-11f_0+18f_1-9f_2+2f_3]\end{aligned}$$

$$R_3'(x_0) = \frac{1}{4!}\left[f^{(4)}(\xi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\omega_4(x) + \omega_4(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{(4)}(\xi)\right]\bigg|_{x=x_0} =$$

$$\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) =$$

$$-\frac{h^3}{4}f^{(4)}(\xi),\quad x_0 < \xi < x_3$$

从而有

$$f'(x_0) = \frac{1}{6h}[-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3] - \frac{1}{4}h^3 f^{(4)}(\xi)$$

$$x_0 < \xi < x_3$$

(2) 利用上述公式，得

$$f'(1.0) = \frac{1}{6 \times 0.5}[-11 \times 8.00 + 18 \times 13.75 -$$

$$9 \times 21.00 + 2 \times 29.75] = 10.00$$

例 3-32 设 $f(x) \in C^5[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$，$h > 0$，$x_k = x_0 + kh$，$f_k = f(x_k)$，$k = 0, \pm 1, \pm 2$. 求证：

(1) $f'(x_0) = \dfrac{1}{12h}[f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2] + O(h^4)$

(2) $f''(x_0) = \dfrac{1}{h^2}[f_{-1} - 2f_0 + f_1] + O(h^2)$

证明 本题我们用泰勒公式来做.

(1) $f(x_0 \pm 2h) = f(x_0) \pm 2hf'(x_0) + \dfrac{1}{2!}(2h)^2 f''(x_0) \pm$

$$\frac{1}{3!}(2h)^3 f'''(x_0) + \frac{1}{4!}(2h)^4 f^{(4)}(x_0) + O(h^5)$$

$$f(x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x_0) \pm$$

$$\frac{1}{3!}h^3 f'''(x_0) + \frac{1}{4!}h^4 f^{(4)}(x_0) + O(h^5)$$

所以

$$f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h) =$$

$$12hf'(x_0) + O(h^5)$$

即 $f'(x_0) = \dfrac{1}{12h}[f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2] + O(h^4)$

(2) 利用(1)中 $f(x_0 \pm h)$ 的展式，得

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f_{-1} - 2f_0 + f_1] + O(h^2)$$

三、习题三

1. 将[0,1]10 等份，分别用复化梯形和复化辛普森公式计算积分 $I = \int_0^1 \frac{1}{x}(1 - \mathrm{e}^{-x})^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$.

2. 用积分 $\int_2^8 \frac{\mathrm{d}x}{x} = 2\ln 2$ 计算 $\ln 2$，为使误差的绝对值不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-5}$，问用复化梯形公式至少要取多少个结点？

3. 用三点 Gauss - Legendre 求积公式计算积分 $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

4. 数值积分公式 $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{3}{2}[f(1) + f(2)]$ 是否为插值型求积公式？为什么？其代数精确度是多少？

5. 确定求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx A_1 f(a) + A_2 f(b) + A_3 f'(a)$$

中的参数 A_1、A_2、A_3，使其具有尽可能高的代数精确度.

第四章　方 程 求 根

一、内容提要

本章内容主要讨论非线性方程 $f(x)=0$ 的数值求解，其它内容未列入本书.

常用的方法有：

1. 二分法(参阅参考文献1,2)；

2. 简单迭代法：

将 $f(x)=0$ 变为另一种等价形式：$x=\varphi(x)$，选取根 x^* 的近似值 $x_0\in[a,b]$，则递推关系式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, $k=0,1,2,\cdots$，可产生迭代序列 $\{x_k\}$，这种迭代方法称为简单迭代法.

定理 4.1 设函数 $\varphi(x)$ 在有限区间 $[a,b]$ 上满足如下条件：

(i) 当 $x\in[a,b]$ 时，$\varphi(x)\in[a,b]$；

(ii) $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足李普希兹(Lipschitz)条件，即对 $\forall\ x_1、x_2\in[a,b]$，有 $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|$，而且 $L<1$，(本条件可加强为 $\varphi'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $|\varphi'(x)|\leqslant L<1$)，则方程 $x=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的解 x^* 存在且惟一，并对 $\forall\ x_0\in[a,b]$，由 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, $k=0,1,2,\cdots$ 产生的迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*，并有误差估计式

$$|x_k-x^*|\leqslant\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

3. 牛顿(Newton)迭代法

迭代公式为　$x_{k+1}=x_k-f(x_k)/f'(x_k)$, $k=0,1,2,\cdots$

定理 4.2 设 $f(x)$ 在包含零点 x^* 的某个闭区间 $[a,b]$ 内有二阶连续导数，且 $f'(x^*)\neq 0$，则只要选取 x_0 充分接近于 x^*，牛顿迭代法产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*，且有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

4. 弦割法、抛物线法(Muller 法)见参考文献1,2.

5. 迭代收敛阶的概念

定义 4.1 设迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛于 $x=\varphi(x)$ 的根 x^*，如果迭代误差 $e_k=x_k-x^*$ 满足下列关系式

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=c\ (c\neq 0,\text{常数})$$

则称该迭代过程是 p 阶收敛的. $p=1$ 称线性收敛，$p=2$ 称平方收敛，$p>1$ 称超线性收敛.

前述的简单迭代法是线性收敛的，牛顿法是平方收敛的，双点弦割法的收敛阶为1.618，抛物线法的收敛阶是1.839.

定理 4.3 对于迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，如果 $\varphi^{(p)}(x)$ 在所求根 x^* 的邻近连续，且 $\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$, $\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$，则该迭代过程在点 x^* 邻近是 p 阶收敛的.

二、典型题分析

例 4-1 利用二分法求方程 $f(x)=x^3-2x-5=0$ 在 $[2,3]$ 内的根的近似值，并指出误差.

解答 因 $f(2)=-1<0$, $f(3)=16>0$，故 $[2,3]$ 内确实有根. 用二分法计算列表如下：

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$ 的符号
1	2	3	2.5	+
2	2	2.5	2.25	+
3	2	2.25	2.125	+
4	2	2.125	2.062 5	−
5	2.062 5	2.125	2.093 75	−
6	2.093 75	2.125	2.109 375	+

故取 $x^* \approx (2.093\ 75 + 2.109\ 375)/2 = 2.101\ 562\ 5$，其绝对误差限为

$$|x^* - x_7| \leqslant \frac{1}{2^7} = 0.007\ 812\ 5$$

例 4-2 证明 $1 - x - \sin x = 0$ 在$[0,1]$内有一个根．使用二分法求误差不大于$\frac{1}{2} \times 10^{-4}$ 的根要迭代多少次？

解答 设 $f(x) = 1 - x - \sin x$，则 $f(0) = 1 > 0$，$f(1) = -\sin 1 < 0$；又因 $f'(x) = -1 - \cos x < 0$，$x \in [0,1]$，故 $f(x)$ 在$[0,1]$上单减，因此 $f(x)$ 在$[0,1]$上有且仅有一个根．

使用二分法时，误差限（按例 4-1 的编号方式）为 $|x_{k+1} - x^*| \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}(b-a) = \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4}$，解得

$$2^k \geqslant 10^4, k \geqslant 4\ln 10/\ln 2 = 13.287\ 7$$

所以需迭代 14 次即可．

例 4-3 求解方程 $x = e^{-x}$ 的根，要求取 $x_0 = 0.5$，分别用简单迭代法、迭代法的加速方法：$\bar{x}_{k+1} = \varphi(x_k)$，$x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} - \frac{p}{1-p}(\bar{x}_{k+1} - x_k)$，以及埃特金方法求解，要求误差应满足 $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-5}$．

解答 (1) 简单迭代法．此时迭代公式为

$$x_{k+1} = e^{-x_k},\ x_0 = 0.5,\ k = 0,1,2,\cdots$$

计算结果如下：

k	x_k	k	x_k
0	0.5	10	0.566 907 2
1	0.606 530 6	11	0.567 277 2
2	0.545 239 2	12	0.567 067 3
3	0.579 703 1	13	0.567 486 3
4	0.560 064 6	14	0.567 118 8
5	0.571 172 1	15	0.567 157 1
6	0.564 862 9	16	0.567 135 4
7	0.568 438 0	17	0.567 147 7
8	0.566 409 4	18	0.567 140 7
9	0.567 559 6		

此时已满足 $|x_{18} - x_{17}| < 10^{-5}$，故取 $x^* \approx x_{18} = 0.567\ 140\ 7$．

(2) 用加速技巧来做．在 $x_0 = 0.5$ 附近，$(e^{-x})' \approx -0.6$，故取 $p = -0.6$，此时迭代式为

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = e^{-x_k} \\ x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} + \dfrac{0.6}{1+0.6}(\bar{x}_{k+1} - x_k),\ k = 0,1,2,\cdots \end{cases}$$

计算结果如下：

k	$\bar{x}_k$	x_k	k	$\bar{x}_k$	x_k
0		0.5	3	0.567 149 8	0.567 143 1
1	0.606 530 7	0.566 581 7	4	0.567 143 4	0.567 143 3
2	0.567 461 9	0.567 131 8			

此时已满足 $|x_4 - x_3| < 10^{-5}$，故 $x^* \approx x_4 = 0.567\,143\,3$.

(3) 用埃特金方法来做．此时迭代式为

$$\begin{cases} c_k = \varphi(x_k),\ c_{k+1} = \varphi(c_k) \\ x_{k+1} = c_{k+1} - \dfrac{(c_{k+1} - c_k)^2}{c_{k+1} - 2c_k + x_k},\ k = 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$

计算结果如下：

k	C_k	C_{k+1}	x_k
0			0.5
1	0.606 530 7	0.545 239 2	0.567 623 9
2	0.566 870 8	0.567 297 9	0.567 143 3
3	0.567 143 3	0.567 143 3	

此时不能再算了，因已达到精度要求，故取 $x^* \approx x_2 = 0.567\,143\,3$ 即可．

例 4-4 当 R 取适当值时，曲线 $y = x^2$ 与 $y^2 + (x-8)^2 = R^2$ 相切，试用迭代法求切点横坐标的近似值，要求不少于 4 位有效数字，也不求 R.

分析 两曲线相切，在切点处曲线函数值相等，导数值相等，根据这些条件可列出切点横坐标应满足的关系式，然后用迭代法求解．

解答 $y = x^2$ 的导数为 $y' = 2x$；$y^2 + (x-8)^2 = R^2$ 的导数 y' 满足 $2yy' + 2(x-8) = 0$，故由两曲线相切的条件，可得

$\begin{cases} y = x^2 \\ y' = 2x \end{cases}$

$$4x^2 \cdot x + 2(x-8) = 0$$

即

$$2x^3 + x - 8 = 0$$

令 $f(x) = 2x^3 + x - 8$，则 $f(1) < 0$，$f(2) > 0$，因此 $f(x) = 0$ 在 $(1,2)$ 内有根．又在 $(1,2)$ 内 $f'(x) = 6x^2 + 1 > 0$，所以 $f(x) = 0$ 仅有一个根．构造迭代格式

$$x_{k+1} = [(8 - x_k)/2]^{1/3},\ k = 0, 1, 2, \cdots$$

取 $x_0 = \dfrac{1}{2}(1 + 2) = 1.5$，计算结果如下：

$$x_0 = 1.5,\ x_1 = 1.481\,248,\ x_2 = 1.482\,671,\ x_3 = 1.482\,563$$

由于 $|x_3 - x_2| = 0.000\,108 < \dfrac{1}{2} \times 10^{-3}$，故取 $x^* \approx x_3 = 1.483$，即可保证有 4 位有效数字．即两曲线切点的横坐标为 1.483.

例 4-5 分别用单点弦割法和双点弦割法求 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ 的根，要求 $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$.

解答 因 $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$，令 $f'(x) = 0$，则由于 $f'(x) = 0$ 的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 3 \times 10 < 0$，故 $f(x)$ 没有极值点．由于 $f(1) = -7 < 0$，$f(2) = 12 > 0$，因此 $f(x) = 0$ 在 $(1,2)$ 内仅有一根．

(1) 用单点弦割法，迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)} f(x_k),\ k = 1, 2, \cdots$$

取 $x_0 = 1$，$x_1 = 2$，计算结果如下：

k	x_k	k	x_k
0	1	5	1.368 808 644
1	2	6	1.368 808 049
2	1.368 421 053	7	1.368 808 115
3	1.368 851 263	8	1.368 808 107
4	1.368 803 298		

此时，已满足精度要求，故取 $x^* \approx x_8 = 1.368\,808\,107$ 即可．

(2) 若采用双点弦割法，迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k),\ k = 1, 2, \cdots$$

仍取 $x_0=1$，$x_1=2$，则有

k	x_k	k	x_k
0	1	3	1.368 850 469
1	2	4	1.368 808 104
2	1.368 421 053	5	1.368 808 108

取 $x^* \approx x_5 = 1.368\,808\,108$，可保证 $|x_5 - x_4| < 10^{-6}$.

注记 本题方程称为 Leonardo 方程．Leonardo 于 1225 年研究了该方程，并得到了 $x^* = 1.368\,808\,107$ 的结果，这在当时是非常重要的结果，但无人知道他是用何法而得．这时 $f(x^*) \approx -0.000\,000\,009$.

例 4-6 用牛顿法求解 Leonardo 方程

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

要求 $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$.

解答 由上题知，$f(x)=0$ 在 $(1,2)$ 内有一个根，且 $f''(x) > 0$，$f(2) > 0$，故应取 $x_0 = 2$，利用牛顿迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k),\ k = 0,1,2,\cdots$$

计算结果如下：

k	x_k	k	x_k
0	2	3	1.368 869 419
1	1.6	4	1.368 808 109
2	1.383 388 704	5	1.368 808 108

$|x_5 - x_4| = 0.1 \times 10^{-8} < 10^{-6}$，故取 $x^* \approx x_5 = 1.368\,808\,108$.

注记 由上两题知，要达到同样的精度，牛顿法的迭代次数不一定比弦割法少，尽管牛顿法是平方收敛的．究竟二者谁的迭代次数少，要视问题而定．另外就整体计算时间而言，当牛顿法中 $f'(x_k)$ 的计算量超过 $f(x_k)$ 的计算量的 44% 时，双点弦割法的总计算时间较牛顿法的少，见参考文献 7.

例 4-7 用抛物线法求解方程 $x = e^{-x}$.

解答 抛物线法的迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4f(x_k)f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}]}}$$

式中 $\omega = f[x_k,x_{k-1}] + f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}](x_k - x_{k-1})$，根式前的正负号取与 ω 相同的符号．

原方程可化为 $f(x) = xe^x - 1 = 0$，取 $x_0 = 0.5$，$x_1 = 0.6$，$x_2 = 0.565\,32$（这三个值是以 $x_0 = 0.5$，$x_1 = 0.6$，用弦割法得来 $x_2 = 0.565\,32$）作为初始近似，得

$f(x_0) = -0.175\,639$，$f(x_1) = -0.093\,271$，

$f(x_2) = -0.005\,031$，

$f[x_0,x_1] = 2.689\,10$，$f[x_1,x_2] = 2.833\,73$，

$f[x_0,x_1,x_2] = 2.214\,18$，故 $\omega = 2.756\,94$，

$$x_3 = x_2 - \frac{2f(x_2)}{\omega + \sqrt{\omega^2 - 4f(x_2)f[x_0,x_1,x_2]}} = 0.567\,14$$

与例 4-3 的结果比较知，$x_3 = 0.567\,14$ 可以作为 $f(x)=0$ 的近似值．也说明抛物线法收敛较快．

例 4-8 利用牛顿法求 $\sqrt{115}$ 的近似值．

分析 要用牛顿法，必须找一个函数 $f(x)$，使 $f(x)=0$ 的解是 $\sqrt{115}$. 为此可将求 $\sqrt{115}$ 的问题转化为求 $f(x) = x^2 - 115 = 0$ 的正根问题．

解答 设 $f(x) = x^2 - 115$，则求 $f(x)=0$ 的正根就是求 $\sqrt{115}$. 由 $f(10) = -15 < 0$，$f(11) = 6 > 0$，知在 $(10,11)$ 内方程有根．再由 $f'(x) = 2x > 0$，$f''(x) = 2 > 0$ 知，可取 $x_0 = 11$. 用牛顿法 $x_{k+1} = x_k - (x_k^2 - 115)/(2x_k)$，$k = 0,1,2,\cdots$，得

$x_0 = 11$，$x_1 = 10.727\,272\,73$，$x_2 = 10.723\,805\,86$，$x_3 = 10.723\,805\,30$.

可以看出，x_2,x_3 已经在小数点后有 6 位数字相同，故可取 $x^* \approx x_3 = 10.723\,805$.

例 4-9 方程 $x^3-2x^2+x=0$ 有二重根 $x^*=1$，取 $x_0=2$，用牛顿法和处理重根的牛顿法修正形式 $x_{k+1}=x_k-mf(x_k)/f'(x_k)$ 分别求解三步，比较结果．m 为根的重数．

解答 $f(x)=x^3-2x^2+x, f'(x)=3x^2-4x$，故两种方法的迭代公式分别为：

牛顿法 $\quad x_{k+1}=x_k-f(x_k)/f_1'(x_k)$

修正牛顿法 $\quad x_{k+1}=x_k-2f(x_k)/f'(x_k),\ k=0,1,2,\cdots$

计算结果如下：

k	牛顿法 x_k	修正牛顿法 x_k
0	2	2
1	1.6	1.2
2	1.347 368 421	1.015 384 615
3	1.193 516 664	1.000 115 465

说明对于重根，牛顿迭代法收敛速度变慢．

例 4-10 能不能用迭代法求解下列方程，如果不能时，试将方程改写成能用迭代法求解的形式．

(1) $x=(\cos x+\sin x)/4$； (2) $x=4-2^x$.

分析 判断方程 $x=\varphi(x)$ 能否用迭代法求根，最关键的是 $\varphi(x)$ 在根的附近能否满足 $|\varphi'(x)|\leqslant L<1$. 因此可用该条件来判断.

解答 (1) $\varphi(x)=(\cos x+\sin x)/4$，对所有的 x，有

$$|\varphi'(x)|=|(-\sin x+\cos x)/4|\leqslant\frac{2}{4}=\frac{1}{2}<1$$

故能用迭代法求根．

(2) 方程为 $x-4+2^x=0$. 设 $f(x)=x-4+2^x$，则 $f(1)<0, f(2)>0$，故有根区间为$[1,2]$. 题中 $\varphi(x)=4-2^x, |\varphi'(x)|=|-2^x\ln2|>2\ln2\approx1.386\,29>1$，故不能用 $x_{k+1}=4-2^{x_k}$ 来迭代．

把原方程改写为 $x=\ln(4-x)/\ln2$，此时，$\varphi(x)=\ln(4-x)/\ln2$，$|\varphi'(x)|=\left|\frac{-1}{4-x}\cdot\frac{1}{\ln2}\right|<\frac{1}{4-2}\cdot\frac{1}{\ln2}=\frac{1}{2\ln2}<1$，故可用迭代公式

$$x_{k+1}=\ln(4-x_k)/\ln2$$

来求解．

例 4-11 为求方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的一个根，设将方程改写为下列等价形式，并建立相应的迭代公式：

(1) $x=1+\frac{1}{x^2}$， 迭代公式 $\quad x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^2}$

(2) $x^3=1+x^2$， 迭代公式 $\quad x_{k+1}=(1+x_k^2)^{1/3}$

(3) $x^2=\frac{1}{x-1}$， 迭代公式 $\quad x_{k+1}=1/(x_k-1)^{1/2}$

试分析每种迭代公式的收敛性，并取一种公式求出具有 4 位有效数字的近似根．

解答 取 $x_0=1.5$ 的邻域$[1.3,1.6]$来考察．

(1) $\varphi(x)=1+1/x^2$，$|\varphi'(x)|=|-2/x^3|<2/1.3^3=0.901<1$，故迭代公式(1)收敛．

(2) $\varphi(x)=(1+x^2)^{1/3}$，$|\varphi'(x)|=|2x/[3(1+x^2)^{2/3}]|<2\times1.6/[3(1+1.3^2)]^{2/3}\approx0.551\,5<1$，故(2)也收敛．

(3) $\varphi(x)=1/\sqrt{x-1}$，$|\varphi'(x)|=|-1/[2(x-1)^{3/2}]|>\frac{1}{2(1.6-1)^{3/2}}=1.075\,828\,7>1$，故发散．

由于 $|\varphi'(x_0)|$ 越小，越快地收敛于 x^*，故取第(2)式来求根．计算结果如下：

k	x_k	k	x_k
0	1.5	5	1.466 243 01
1	1.481 248 03	6	1.465 876 82
2	1.472 705 73	7	1.465 710 24
3	1.468 817 31	8	1.465 634 46
4	1.467 047 97	9	1.465 599 99

由于 $|x_9 - x_8| = 0.000\,034\,47 < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$，故可取 $x^* \approx x_9 \approx 1.466$.

例 4-12 给定函数 $f(x)$，设对一切 x，$f'(x)$ 存在且 $0 < m \leqslant f'(x) \leqslant M$，试证明对于 $0 < \lambda < \frac{2}{M}$ 的任意 λ，迭代过程 $x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$ 均收敛于 $f(x) = 0$ 的根 x^*.

分析 问题可看作 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$，$\varphi(x_k) = x_k - \lambda f(x_k)$. 这样，要判断该迭代过程收敛，需对 $|\varphi'(x)|$ 进行考察，进而得出应有的结论.

证明 设方程 $f(x) = 0$ 的等价形式为 $x = x - \lambda f(x)$，则 $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$，$|\varphi'(x)| = |1 - \lambda f'(x)|$. 因为 $0 < m \leqslant f'(x) \leqslant M$，$0 < \lambda < \frac{2}{M}$，所以

$$0 < \lambda m \leqslant \lambda f'(x) \leqslant \lambda M < 2$$

$$-2 < -\lambda f'(x) < 0$$

$$-1 < 1 - \lambda f'(x) < 1,\ |1 - \lambda f'(x)| < 1$$

因此迭代格式收敛于 $f(x) = 0$ 的根 x^*.

例 4-13 对于牛顿迭代公式 $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$，证明

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k - x_{k-1}}{(x_{k-1} - x_{k-2})^2} = -\frac{1}{2}\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

这里 x^* 为 $f(x) = 0$ 的根.

分析 本题结论有点像定理 4.2 的结论. 故证明时自然会想到牛顿迭代法的收敛性证明方法. 另外，也可直接求极限.

证明 因 $x_k = x_{k-1} - f(x_k)/f'(x_{k-1})$，所以 $x_k - x_{k-1} = -f(x_{k-1})/f'(x_{k-1})$，故 $(x_k - x_{k-1})/(x_{k-1} - x_{k-2})^2 = -f(x_{k-1})/[f'(x_{k-1})(x_{k-1} - x_{k-2})^2]$. 根据泰勒展式 $f(x_{k-1}) = f(x_{k-2}) + f'(x_{k-2})(x_{k-1} - x_{k-2}) + f''(\xi)(x_{k-1} - x_{k-2})^2/2$，($\xi$ 介于 x_{k-1} 与 x_{k-2} 之间)，以及 $x_{k-1} = x_{k-2} - f(x_{k-2})/f'(x_{k-2})$，得 $f(x_{k-1}) = f''(\xi)(x_{k-1} - x_{k-2})^2/2$，因此有

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{(x_{k-1} - x_{k-2})^2} = -\frac{f''(\xi)(x_{k-1} - x_{k-2})^2}{2f'(x_{k-1})(x_{k-1} - x_{k-2})^2} = -f''(\xi)/(2f'(x_{k-1}))$$

所以 $\lim_{k\to\infty}(x_k - x_{k-1})/(x_{k-1} - x_{k-2})^2 = -f''(x^*)/[2f'(x^*)]$

例 4-14 证明：对于 $f(x) = 0$ 的多重根 x^*，牛顿法仅为线性收敛.

分析 要证明牛顿法线性收敛，只需证明 $(x_{k+1} - x^*)/(x_k - x^*) \to C$（$C \neq 0$ 的常数）$(k \to \infty)$. 若 x^* 是 $f(x) = 0$ 的 m 重根，则 $f(x) = (x - x^*)^m h(x)$，$h(x^*) \neq 0$. 利用 $f(x)$ 的这一表达式可得出前述极限.

证明 设 x^* 是 $f(x) = 0$ 的 m 重根($m \geqslant 2$)，则 $f(x)$ 可以表达为

$$f(x) = (x - x^*)^m h(x),\ h(x^*) \neq 0$$

所以 $f'(x) = m(x - x^*)^{m-1}h(x) + (x - x^*)^m h'(x) = (x - x^*)^{m-1}[mh(x) + (x - x^*)h'(x)]$

由牛顿法 $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$，得

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - (x_k - x^*)^m h(x_k)/\{(x_k - x^*)^{m-1}[mh(x_k) + (x_k - x^*)h'(x_k)]\} =$$

$$x_k - x^* - (x_k - x^*)h(x_k)/$$

k	x_k	k
0	1.5	
1	1.481 248 03	
2	1.472 705	
3	1.46	
4		

理4.2的结论．故证明时自然会想

号外，也可直接求极限．

$_{-1})$，所以 $x_k - x_{k-1} = -$

$- x_{k-2})^2 =$

公式 $f(x_{k-1}) =$

$)^2/2$，(ξ 介

$_{-2})$，得

根是线性收

$(x_{k+1} - \sqrt{a})/(x_k$

$-\sqrt{a})^3 = C(\neq 0)$ 才行 ……理 3.3 来证(下文未给出该种证明)．

证明 显然，当 $a > 0, x_0 > 0$ 时，$x_k > 0\ (k = 1,2,\cdots)$．令 $\varphi(x) = x(x^2 + 3a)/(3x^2 + a)$，则

$$\varphi'(x) = \frac{(3x^2 + 3a)(3x^2 + a) - x(x^2 + 3a)\cdot 6x}{(3x^2 + a)^2} =$$

$$\frac{(x^2 - a)^2}{(3x^2 + a)^2}$$

故对 $\forall\ x > 0$，$|\varphi'(x)| < 1$，即迭代收敛．设 $\{x_k\}$ 的极限为 l，则有

$$l = l(l^2 + 3a)/(3l^2 + a)$$

解得 $l = 0, l = \pm\sqrt{a}$．由题知取 $l = \sqrt{a}$．即迭代序列收敛于 $\sqrt{a}$．

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a} - x_{k+1}}{(\sqrt{a} - x_k)^3} = \lim_{k\to\infty}\frac{[\sqrt{a} - (x_k^3 + 3ax_k)/(3x_k^2 + a)]}{(\sqrt{a} - x_k)^3} =$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(\sqrt{a} - x_k)^3}{(\sqrt{a} - x_k)^3(3x_k^2 + a)} =$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{3x_k^2 + a} = \frac{1}{4a} \neq 0$$

$x-\frac{x^3-a}{2x}$

故题中迭代式确是求 $\sqrt{a}$ 的三阶方法．

例 4-16 研究求 $\sqrt{a}$ 的牛顿公式

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + a/x_k),\ x_0 > 0,\ k = 0,1,2,\cdots$$

证明对一切 $k = 1,2,\cdots,x_k \geqslant \sqrt{a}$，且序列 $\{x_k\}$ 是单减的，从而迭代过程收敛．

证明 因 $a > 0, x_0 > 0$，故 $x_k > 0, k = 1,2,\cdots$；对任意 $k \geqslant 0$，

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + a/x_k) =$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{x_k} - \sqrt{a}/\sqrt{x_k})^2 + \sqrt{a} \geqslant \sqrt{a}$$

因此对一切 $k \geqslant 1$，均有 $x_k \geqslant \sqrt{a}$．利用这一结果，得

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{1}{2}\,\frac{x_k + a/x_k}{x_k} = \frac{1}{2} + \frac{a}{2x_k^2} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{a}{2a} = 1$$

故 $x_{k+1} \leqslant x_k$，即 $\{x_k\}$ 单调递减．根据单调有界原理知，$\{x_k\}$ 收敛．

例 4-17 考虑下述修正的牛顿公式(steffenson 方法)

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/D_n,\ D_n = [f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)]/f(x_n),$$

$n \geqslant 0$，假定 $f'(x^*) \neq 0$，证明它对单根是一个二阶方法．

分析 要证 steffenson 方法是二阶的，当然要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x^*)/(x_n - x^*)^2 = C \neq 0$．由于 D_n 中含有 $f(x_n + f(x_n))$，故在证明时有可能要进行泰勒展开，另外知道 x^* 是单根，则有可能用到 $f(x) = (x - x^*)h(x), h(x^*) \neq 0$．利用这些因素，通过推导运算，可得题证．

证明 将 D_n 中 $f(x_n + f(x_n))$ 在 x_n 处展开，得

$$f(x_n + f(x_n)) = f(x_n) + f'(x_n)f(x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi)f^2(x_n)$$

其中 ξ 介于 x_n 与 $x_n + f(x_n)$ 之间．此时

$$[mh(x_k)+(x_k-x^*)h'(x_k)]=$$
$$(x_k-x^*)\{1-h(x_k)/$$
$$[mh(x_k)+(x_k-x^*)h'(x_k)]\}$$

所以 $$\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}=1-\frac{h(x_k)}{mh(x_k)+(x_k-x^*)h'(x_k)}$$

故 $$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}=1-\frac{h(x^*)}{mh(x^*)}=1-\frac{1}{m}$$

当 $m\geqslant 2$ 时，$1-\dfrac{1}{m}=C\neq 0$，说明牛顿法对重根是线性收敛的.

例 4-15 设 $a>0, x_0>0$，证明迭代公式

$$x_{k+1}=x_k(x_k^2+3a)/(3x_k^2+a)$$

是计算 $\sqrt{a}$ 的三阶方法.

分析 本题应说明 $\{x_k\}$ 的极限为 $\sqrt{a}$，并且 $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{k+1}-\sqrt{a})/(x_k-\sqrt{a})^3=C(\neq 0)$ 才行．关于第二件事也可按定理 3.3 来证(下文未给出该种证明).

证明 显然，当 $a>0, x_0>0$ 时，$x_k>0\ (k=1,2,\cdots)$．令 $\varphi(x)=x(x^2+3a)/(3x^2+a)$，则

$$\varphi'(x)=\frac{(3x^2+3a)(3x^2+a)-x(x^2+3a)\cdot 6x}{(3x^2+a)^2}=$$
$$\frac{(x^2-a)^2}{(3x^2+a)^2}$$

故对 $\forall\, x>0$，$|\varphi'(x)|<1$，即迭代收敛．设 $\{x_k\}$ 的极限为 l，则有

$$l=l(l^2+3a)/(3l^2+a)$$

解得 $l=0, l=\pm\sqrt{a}$．由题知取 $l=\sqrt{a}$．即迭代序列收敛于 $\sqrt{a}$.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^3}=\lim_{k\to\infty}\frac{[\sqrt{a}-(x_k^3+3ax_k)/(3x_k^2+a)]}{(\sqrt{a}-x_k)^3}=$$
$$\lim_{k\to\infty}\frac{(\sqrt{a}-x_k)^3}{(\sqrt{a}-x_k)^3(3x_k^2+a)}=$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{3x_k^2+a}=\frac{1}{4a}\neq 0$$

$x-\frac{x^2-a}{2x}$

故题中迭代式确是求 $\sqrt{a}$ 的三阶方法.

例 4-16 研究求 $\sqrt{a}$ 的牛顿公式

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+a/x_k),\ x_0>0,\ k=0,1,2,\cdots$$

证明对一切 $k=1,2,\cdots, x_k\geqslant\sqrt{a}$，且序列 $\{x_k\}$ 是单减的，从而迭代过程收敛.

证明 因 $a>0, x_0>0$，故 $x_k>0, k=1,2,\cdots$；对任意 $k\geqslant 0$，

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+a/x_k)=$$
$$\frac{1}{2}(\sqrt{x_k}-\sqrt{a}/\sqrt{x_k})^2+\sqrt{a}\geqslant\sqrt{a}$$

因此对一切 $k\geqslant 1$，均有 $x_k\geqslant\sqrt{a}$．利用这一结果，得

$$\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{1}{2}\,\frac{x_k+a/x_k}{x_k}=\frac{1}{2}+\frac{a}{2x_k^2}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{a}{2a}=1$$

故 $x_{k+1}\leqslant x_k$，即 $\{x_k\}$ 单调递减．根据单调有界原理知，$\{x_k\}$ 收敛.

例 4-17 考虑下述修正的牛顿公式(steffenson 方法)

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/D_n,\ D_n=[f(x_n+f(x_n))-f(x_n)]/f(x_n),$$

$n\geqslant 0$，假定 $f'(x^*)\neq 0$，证明它对单根是一个二阶方法.

分析 要证 steffenson 方法是二阶的，当然要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x^*)/(x_n-x^*)^2=C\neq 0$．由于 D_n 中含有 $f(x_n+f(x_n))$，故在证明时有可能要进行泰勒展开，另外知道 x^* 是单根，则有可能用到 $f(x)=(x-x^*)h(x), h(x^*)\neq 0$．利用这些因素，通过推导运算，可得题证.

证明 将 D_n 中 $f(x_n+f(x_n))$ 在 x_n 处展开，得

$$f(x_n+f(x_n))=f(x_n)+f'(x_n)f(x_n)+\frac{1}{2}f''(\xi)f^2(x_n)$$

其中 ξ 介于 x_n 与 $x_n+f(x_n)$ 之间．此时

$$D_n = \frac{[f(x_n) + f'(x_n)f(x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi)f^2(x_n) - f(x_n)]}{f(x_n)} =$$

$$f'(x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi)f(x_n)$$

又由于 x^* 是 $f(x)=0$ 的单根，故 $f(x)$ 可表示为

$$f(x) = (x - x^*)h(x), \quad h(x^*) \neq 0$$

所以 $$f'(x_n) = h(x_n) + (x_n - x^*)h'(x_n)$$

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - f(x_n)/D_n = x_n - x^* -$$

$$(x_n - x^*)h(x_n)/[f'(x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi)f(x_n)] =$$

$$(x_n - x^*)\{1 - h(x_n)/[h(x_n) + (x_n - x^*)h'(x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi)f(x_n)]\} =$$

$$\frac{(x_n - x^*)^2[h'(x_n) + \frac{1}{2}h(x_n)f''(\xi)]}{h(x_n) + (x_n - x^*)[h'(x_n) + \frac{1}{2}h(x_n)f''(\xi)]}$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{h'(x^*) + \frac{1}{2}h(x^*)f''(x^*)}{h(x^*)}$$

即迭代格式至少是二阶收敛的．

例 4－18 试给出简化牛顿公式(单调弦割法)

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_0),\ n = 0,1,2,\cdots$$

收敛的一个充分条件．又设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内有单根 x^*，证明 $|x_n - x^*| \leqslant \frac{1}{m}|f'(x_0)| \cdot |x_{n+1} - x_n|$，其中 $m = \min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$.

分析 这题可看作是迭代函数为 $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x_0)$ 的简单迭代法．因之，可用简单迭代法的充分条件来给出本题方法的收敛性条件．

解答 令 $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x_0)$，则 $|\varphi'(x)| \leqslant L < 1$(在 x^* 的邻域内)是 $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_0)$ 收敛的一个充分条件，

即

$$|1 - f'(x)/f'(x_0)| \leqslant L < 1$$

解得 $$0 < 1 - L \leqslant f'(x)/f'(x_0) \leqslant 1 + L$$

或 $$\frac{1}{1+L} \leqslant |f'(x_0)/f'(x)| \leqslant \frac{1}{1-L}$$

因而，只要对给定的 x_0，存在 $0 < L < 1$，使对任何 $x \in [a,b]$，上式都能成立的话，单调弦割法就收敛．

再由 $f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0$，有

$$x_{n+1} - x_n = -f(x_n)/f'(x_0) = -(f(x_n) - f(x^*))/f'(x_0) = -f'(\xi)(x_n - x^*)/f'(x_0),$$

ξ 介于 x_n 与 x^* 之间

这样 $$x_n - x^* = -\frac{f'(x_0)}{f'(\xi)}(x_{n+1} - x_n)$$

所以 $$|x_n - x^*| \leqslant \left|-\frac{f'(x_0)}{f'(\xi)}\right| \cdot |x_{n+1} - x_n| \leqslant \frac{1}{m}|f'(x_0)|x_{n+1} - x_n|$$

例 4－19 设在区间 $[a,b]$ 上函数 $y = f(x)$ 可逆，即存在足够光滑的函数 $Q(y)$，使 $x = Q(y)$；再设 $x^* \in [a,b]$ 为 $f(x)=0$ 的根，试把 $x^* = Q(0) = Q(y-y)$ 用泰勒公式展开，从而导出下列公式：

(1) $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$，(牛顿公式)

(2) $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) - f''(x_n)f^2(x_n)/\{2[f'(x_n)]^3\}$ (切比雪夫公式)

解答 已知 $x^* = Q(0) = Q(y - y) =$

$$Q(y) - yQ'(y) + \frac{1}{2}y^2Q''(y) + \cdots$$

由于 $x = Q(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数，故 $Q'(y) = 1/f'(x)$，

$$Q''(y) = \frac{d}{dy}Q'(y) = \frac{d}{dy}\left[\frac{1}{f'(x)}\right] = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\frac{dx}{dy} =$$

$-f''(x)/[f'(x)]^3$，依次代入 x^* 的表达式，有

$$x^* = Q(y) - y \cdot \frac{1}{f'(x)} + \frac{1}{2}y^2(-f''(x)/[f'(x)]^3) + \cdots =$$

$$x - f(x)/f'(x) - \frac{1}{2}f^2(x)f''(x)/[f'(x)]^3 + \cdots$$

分别取上式右端前二、三项，并令 $x = x_n$，有

$$x^* \approx x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

$$x^* \approx x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) - f''(x)f^2(x_n)/\{2[f'(x_n)]^3\}$$

例 4-20 已知方程 $f(x)=0$，

(1) 导出迭代求根公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f'(x_n)f(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f''(x_n)f(x_n)};$$

(2) 证明对 $f(x)=0$ 的单根，(1) 的公式具有三阶收敛速度；

(3) 讨论在 $f(x)=0$ 的重根附近，(1) 的公式的收敛速度.

分析 这里要求直接导出迭代公式，故可先求出根 x^* 的近似表达式，然后令其值为 x_{n+1} 即可. 为导出 x^* 的近似表达式可考虑 $f(x)$ 的泰勒展开式，想法导出所求公式.

解答 (1) 设 x^* 为 $f(x)=0$ 的单根，则 $f^{(k)}(x^*)\neq 0, k = 1,2,\cdots$，不妨设在 x^* 的邻域内 $f^{(k)}(x)$ 均有界，则

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2!}f''(x_n)(x - x_n)^2 + O((x - x_n)^3)$$

令 $x = x^*$，我们有

$$f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(x^* - x_n)^2 + O((x^* - x_n)^3) = 0$$

解出 $f'(x_n)(x^* - x_n)$ 并乘以 $f'(x_n)$，得

$$[f'(x_n)]^2(x^* - x_n) = -f(x_n)f'(x_n) - \frac{1}{2}f'(x_n)f''(x_n)(x^* - x_n)^2 + O((x^* - x_n)^3)$$

上式右端第二项

$$-\frac{1}{2}f'(x_n)f''(x_n)(x^* - x_n)^2 = -f'(x_n)(x^* - x_n) \cdot \frac{1}{2}f''(x_n)(x^* - x_n) =$$

$$\left[f(x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(x^* - x_n)^2 + O((x^* - x_n)^3)\right] \cdot \frac{1}{2}f''(x_n)(x^* - x_n) =$$

$$\frac{1}{2}f(x_n)f''(x_n)(x^* - x_n) + O((x^* - x_n)^3)$$

所以

$$[f'(x_n)]^2(x^* - x_n) = -f(x_n)f'(x_n) - \frac{1}{2}f'(x_n)f''(x_n)(x^* - x_n)^2 + O((x^* - x_n)^3) =$$

$$-f(x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}f(x_n)f''(x_n)(x^* - x_n) + O((x^* - x_n)^3)$$

解出 $x^* - x_n$，得

$$x^* - x_n = \frac{-f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - \frac{1}{2}f(x_n)f''(x_n)} + O((x^* - x_n)^3)$$

即 $$x^* = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} + O((x^* - x_n)^3)$$

略去高阶无穷小，得

$$x^* \approx x_{n+1} = x_n - 2f(x_n)f'(x_n)/\{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)\}$$

(2) 讨论收敛速度：

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^3} =$$

$$\frac{x_n - 2f(x_n)f'(x_n)/\{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)\} - x^*}{(x_n - x^*)^3} =$$

$$\frac{O((x_n - x^*)^3)}{(x_n - x^*)^3} = O(1)$$

故在单根附近,(1) 的公式具有三阶收敛速度.

(3) 仅就二重根的情况证明之,其余类似.

利用 $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) = 0$,作泰勒展开,得

$$f(x_n) = \frac{1}{2}f''(x^*)(x_n - x^*)^2 + O((x_n - x^*)^3)$$

$$f'(x_n) = f''(x^*)(x_n - x^*) + O((x_n - x^*)^2)$$

$$f''(x_n) = f''(x^*) + O((x_n - x^*))$$

于是

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} =$$

$$\frac{x_n - x^* - 2f(x_n)f'(x_n)/\{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)\}}{x_n - x^*}$$

代入 $f(x_n)$、$f'(x_n)$、$f''(x_n)$ 的泰勒展开式,并化简得

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} \approx 1 - [f''(x^*)]^2/\{2[f''(x^*]^2 - \frac{1}{2}[f''(x^*)]^2\} =$$

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = \text{常数}\ (\neq 0)$$

故在重根附近,(1) 中公式是线性收敛的.

三、习题四

1. 用迭代法求下列方程的最小正根:

(1) $x^5 - 4x - 2 = 0$

(2) $2\tan x - x = 0$

(3) $x = 2\sin x$

2. 用区间二分法求方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 在[1.0,1.5]内的实根,要求准确到小数点后第二位.

3. 用 Newton 迭代法求 $x^3 - 3x - 1 = 0$ 在 $x_0 = 2$ 附近的实根.

4. 试建立计算 $\sqrt[3]{a}$ 的 Newton 迭代格式,并求 $\sqrt[3]{411.7910}$ 的近似值,要求迭代误差不超过 10^{-6}.

5. 试从 Newton 迭代法出发,推导求 $f(x) = 0$ 根的如下格式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})\ (k = 1,2,3,\cdots)$$

6. 已知 $x = \varphi(x)$ 在$[a,b]$内只有一实根,但

$$|\varphi'(x)| \geqslant k > 1 \quad \forall\ x \in [a,b]$$

试讨论如何将 $x = \varphi(x)$ 化为适于迭代求解的形式.

7. 利用牛顿法导出下列各式的迭代程序:

(1) $\frac{1}{b}$,不使用除法运算;

(2) $\sqrt{b}$,不使用开方运算;

(3) $1/\sqrt{b}$,不使用开方和除法运算.

第五章　解线性方程组的直接法

一、内容提要

设线性方程组为 $AX=b$，其中 A 为 n 阶非奇异矩阵，X,b 为 n 维列向量．

1．高斯(Gauss)消去法、高斯-若当(Gauss-Jordan)消去法和主元素消去法见参考文献 1．

2．矩阵分解方法：

由高斯消去法知，高斯消元过程实现了 A 的一个 LU 分解，其中 L 为单位下三角阵，U 为上三角阵，此分解称为 Doolittle 分解．A 有惟一 Doolittle 分解的充要条件是 A 的各阶顺序主子式均不为零．

如果 A 对称正定，则有惟一分解 $A=\tilde{L}\tilde{L}^{\mathrm{T}}$，这里 $\tilde{L}$ 为下三角阵，此分解称为平方根分解法或 Cholesky 分解．当 A 对称正定时，也可进行如下分解 $A=LDL^{\mathrm{T}}$，其中 L 为单位下三角阵，D 为对角阵．

有了上述分解，就可以简化解方程的过程．例如 $A=LU$，此时原方程组等价于如下方程组

$$\begin{cases} Ly=b \\ UX=y \end{cases} \quad \text{（两个三角方程组）}$$

这种解方程组的方法也称为直接三角分解法．

3．三对角方程的追赶法求解见参考文献 1，4．

4．向量、矩阵的范数及方程组的性态．

向量与矩阵范数的定义见参考文献 1．常用的向量范数是 P-范数：

$$\|X\|_P=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^P\right)^{1/P} \quad (P\geqslant 1,\text{正整数})$$

当 $P=1,2,\infty$ 时分别为

$$1\text{-范数}：\|X\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$2\text{-范数}：\|X\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$$

$$\infty\text{-范数}：\|X\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$$

与上述向量范数相容的矩阵范数分别为

$$1\text{-范数}：\|A\|_1=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$ 列

$$2\text{-范数}：\|A\|_2=(\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A))^{1/2}$$

$$\infty\text{-范数}：\|A\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$ 行

其中 $\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)$ 是对称矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的最大特征值．

定义 5.1　设 A 为非奇异矩阵，$\|\cdot\|_\alpha$ 为 A 的某种算子范数．称 $\|A\|_\alpha\cdot\|A\|_\alpha^{-1}$ 为矩阵 A 的条件数，记作 $\mathrm{Cond}_\alpha(A)$．

当 A 的条件数相对地大即 $\mathrm{Cond}(A)\gg 1$ 时，称方程组 $AX=b$ 是“病态”的；否则称为“良态”的．A 的条件数越大，方程组的病态程度越严重，从而越难求解．

二、典型题分析

例 5-1　用 Gauss 消去法解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\ \ x_3=0 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=3 \\ -x_1-3x_2+0x_3=2 \end{cases}$$

分析　这是常规计算题，只需对增广矩阵进行初等行变换而

化为上三角方程组回代求解.

解答　对增广矩阵施行 Gauss 消去法有

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad -2x_2 + x_3 = 3 \\ \qquad \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

回代求解得

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

例 5-2　用列主元素法解如下方程组

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 10 & -7 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

分析　本题实际上是按列选主元素后再进行 Gauss 消元过程,这是实际中求解线性方程组的比较可靠的方法.

解答　对增广矩阵按列选主元素再进行 Gauss 消元:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 & 4 \\ 10 & -7 & 0 & 7 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 6 & \frac{61}{10} \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ & \frac{5}{2} & 5 & \frac{5}{2} \\ & & \frac{31}{5} & \frac{31}{5} \end{pmatrix}$$

回代求解得　$x_3 = 1$, $x_2 = -1$, $x_1 = 0$

例 5-3　用 Gauss-Jordan 消去法解方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$,其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

分析　这只需要在 Gauss 消去法的基础上进一步将系数矩阵对角化即可.

解答　对增广矩阵施行 Gauss 消元过程有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

故

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

例 5-4　用列主元素法求如下矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

分析　按列选主元素后再用 Gauss 消去法化 $\boldsymbol{A}$ 为上三角阵.

这是实际中求行列式的比较可靠的方法．

解答　由 Guass 消去法有

$$\begin{pmatrix}3&-1&4\\-1&2&-2\\2&-3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&-1&4\\0&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\0&-\frac{7}{3}&-\frac{14}{3}\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}3&-1&4\\0&-\frac{7}{3}&-\frac{14}{3}\\0&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&-1&4\\0&-\frac{7}{3}&-\frac{14}{3}\\0&0&-4\end{pmatrix}$$

故　$\det A=(-1)\times 3\times(-\frac{7}{3})\times(-4)=-28$

注记　结果中出现的(-1)是由于行与行进行了一次交换．

例 5-5　用 Gauss-Jordan 消去法求矩阵 A 的逆．其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&-2\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

分析　对 A 及单位阵 I 同时施行 Gauss 消元过程，当 A 化为单位阵时，I 也就化为 A^{-1}.

解答　由 Gauss 消元过程得

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\1&2&-2&0&1&0\\-2&1&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&3&-1&2&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&2&5&-3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&0\\0&1&0&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

故　$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

例 5-6　用矩阵的直接三角分解法解方程组

$$\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\1&2&4&3\\0&1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\17\\7\end{pmatrix}$$

分析　这是常规计算题，只需按矩阵的三角分解过程认真计算即可．

解答　设

$$\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\1&2&4&3\\0&1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&\\l_{21}&1&&\\l_{31}&l_{32}&1&\\l_{41}&l_{42}&l_{43}&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2&0\\&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\&&u_{33}&u_{34}\\&&&u_{44}\end{pmatrix}$$

由矩阵乘法可逐行、逐列分别求出 u_{ij} 和 l_{ij}:

$$\begin{pmatrix}1&&&\\l_{21}&1&&\\l_{31}&l_{32}&1&\\l_{41}&l_{42}&l_{43}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\1&2&1&\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ & u_{22} & u_{23} & u_{24}\\ & & u_{33} & u_{34}\\ & & & u_{44}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ & 1 & 0 & 1\\ & & 2 & 1\\ & & & 2\end{pmatrix}
$$

解三角方程

$$
\begin{pmatrix}1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 17\\ 7\end{pmatrix}
$$

有　$y_1=5,\ y_2=3,\ y_3=6,\ y_4=4$

再解三角方程组

$$
\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ & 1 & 0 & 1\\ & & 2 & 1\\ & & & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 6\\ 4\end{pmatrix}
$$

得　$x_4=2,\ x_3=2,\ x_2=1,\ x_1=1.$

注记　由于三角分解过程十分规律，也可按紧凑格式直接得到

$$
\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 2 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4 & 3 & 17\\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 2 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 1 & 6\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4\end{array}\right)
$$

其中折线右上部的元素（竖线左侧）为上三角阵 u 的元素，最后一列为 y 的元素，故

$$
x_4=4/2=2,\quad x_3=(6-x_4)/2=2
$$
$$
x_2=3-x_4=1,\quad x_1=5-2x_3=1
$$

例 5－7　用平方根法(Cholesky 分解）解方程组

$$
\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 7\end{pmatrix}
$$

分析　由于系数矩阵的对称正定性，故一定有分解形式 $A=\widetilde{L}\widetilde{L}^{\mathrm{T}}$，其中 $\widetilde{L}$ 为下三角阵，然后由矩阵乘法即可求出 $\widetilde{L}$ 的元素．

解答　设

$$
\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_{11} & l_{21} & l_{31}\\ & l_{22} & l_{32}\\ & & l_{33}\end{pmatrix}
$$

由矩阵乘法得

$$
l_{11}=\sqrt{3},\ l_{21}=\frac{2}{\sqrt{3}},\ l_{31}=\sqrt{3}
$$
$$
l_{22}=\sqrt{2/3},\ l_{32}=-\sqrt{6}
$$
$$
l_{33}=\sqrt{3}
$$

由

$$
\begin{pmatrix}l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 7\end{pmatrix}
$$

得　$y_1=\dfrac{5}{\sqrt{3}},\ y_2=-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\ y_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

再由

$$
\begin{pmatrix}l_{11} & l_{21} & l_{31}\\ & l_{22} & l_{32}\\ & & l_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}
$$

得 $x_3=\frac{1}{3},\ x_2=\frac{1}{2},\ x_1=1$

例 5-8 用 LDL^T 分解法解方程组

$$\begin{bmatrix}3&3&5\\3&5&9\\5&9&17\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\16\\30\end{bmatrix}$$

分析 这只需要按 $A=LDL^T$ 的分解形式去严格计算.

解答 设有

$$\begin{bmatrix}3&3&5\\3&5&9\\5&9&17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\l_{21}&1&\\l_{31}&l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1&&\\&d_2&\\&&d_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&l_{21}&l_{31}\\&1&l_{32}\\&&1\end{bmatrix}$$

由矩阵乘法解得

$$d_1=3,\ l_{21}=1,\ l_{31}=\frac{5}{3}$$

$$d_2=2,\ l_{32}=2$$

$$d_3=\frac{2}{3}$$

由

$$\begin{bmatrix}1&&\\1&1&\\\frac{5}{3}&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\16\\30\end{bmatrix}$$

得 $y_1=10,\ y_2=6,\ y_3=\frac{4}{3}$

由

$$\begin{bmatrix}1&1&\frac{5}{3}\\&1&2\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1^{-1}&&\\&d_2^{-1}&\\&&d_3^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\6\\\frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

得 $x_3=2,\ x_2=-1,\ x_1=1$

例 5-9 用追赶法求解如下三对角方程组

$$\begin{bmatrix}2&1&&\\1&3&1&\\&1&1&1\\&&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\0\end{bmatrix}$$

分析 追赶法是求解三对角方程组的有效方法,它可理解为是系数矩阵的一种特殊三角分解,其中的元素可直接由公式而得.

解答 设有分解

$$\begin{bmatrix}2&1&&\\1&3&1&\\&1&1&1\\&&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1&&&\\1&p_2&&\\&1&p_3&\\&&2&p_4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&q_1&&\\&1&q_2&\\&&1&q_3\\&&&1\end{bmatrix}$$

由公式
$$\begin{cases}p_1=b_1=2\\ q_i=\dfrac{c_i}{p_i}\quad(i=1,2,3)\\ p_i=b_i-a_iq_{i-1}\quad(i=2,3,4)\end{cases}$$

其中 b_i,a_i,c_i 分别是系数矩阵的主对角线元素及其下边和上边的次对角线元素. 我们有

$$\begin{cases}p_1=2 & q_1=\dfrac{1}{2}\\ p_2=\dfrac{5}{2} & q_2=\dfrac{2}{5}\\ p_3=\dfrac{3}{5} & q_3=\dfrac{5}{3}\\ p_4=-\dfrac{7}{3}\end{cases}$$

从而

$$\begin{pmatrix}2&1&&\\1&3&1&\\&1&1&1\\&&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&&&\\1&\frac{5}{2}&&\\&1&\frac{3}{5}&\\&&2&-\frac{7}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&&\\&1&\frac{2}{5}&\\&&1&\frac{5}{3}\\&&&1\end{pmatrix}$$

由此解两个特殊的简单方程组得

$$x_4=2,\ x_3=-1,\ x_2=1,\ x_1=0$$

例 5－10 求矩阵 Q 的 $\|Q\|_1$，$\|Q\|_2$，$\|Q\|_\infty$ 与 $\mathrm{Cond}_2(Q)$，其中

$$Q=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&1&-1&1\\-1&-1&1&1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

分析 这实际上是基本概念题，只要熟悉有关范数与条件数的定义即可．

解答 (1) 由定义，显然 $\|Q\|_1=4$

(2) 因 $Q^TQ=4I$，故 $\|Q\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(Q^TQ)}=\sqrt{4}=2$

(3) 由定义显知 $\|Q\|_\infty=4$

(4) 因 $Q^TQ=4I$，故 $Q^{-1}=\frac{1}{4}Q^T$，从而 $(Q^{-1})^T(Q^{-1})=\frac{1}{16}QQ^T$

$$\|Q^{-1}\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}[(Q^{-1})^T(Q^{-1})]}=\sqrt{\lambda_{\max}(\frac{1}{16}QQ^T)}=\sqrt{\lambda_{\max}(\frac{1}{4}I)}=\frac{1}{2}$$

所以 $\mathrm{Cond}_2(Q)=\|Q\|_2\cdot\|Q^{-1}\|_2=2\cdot\frac{1}{2}=1$

例 5－11 求矩阵 A 的条件数 $\mathrm{Cond}_1(A)$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&10^{-10}\end{pmatrix}$$

分析 同上题．

解答 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&10^{10}\end{pmatrix}$，于是

$$\mathrm{Cond}_1(A)=\|A\|_1\cdot\|A^{-1}\|_1=1\cdot10^{10}=10^{10}$$

注记 本题中 $\det(A)=10^{-10}\approx0$，A 几乎是一奇异矩阵，对此，我们也看到 $\mathrm{Cond}_1(A)$ 变得非常之大．这一点希望读者充分注意．

例 5－12 设有方程组 $AX=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\0&2&2\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

已知它有解 $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$．如果右端有小扰动 $\|\delta b\|_\infty=\frac{1}{2}\times10^{-6}$，试估计由此引起的解的相对误差．

分析 本题是讨论方程组的右端项的小误差所引起的解的相对误差的估计问题，这与系数矩阵的条件数有关，只要求出 $\mathrm{Cond}_\infty(A)$，再由有关误差估计式即可算得结果．

解答 容易求得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-1&1.5\\-2&1&-1\end{pmatrix}，从而 \quad \mathrm{Cond}_\infty(A)=22.5$$

由公式$\dfrac{\| \delta X \|_\infty}{\| X \|_\infty} \leqslant \mathrm{Cond}_\infty(A) \cdot \dfrac{\| \delta b \|_\infty}{\| b \|_\infty}$有

$$\frac{\| \delta X \|_\infty}{\| X \|_\infty} \leqslant 22.5 \times \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-6}}{2/3} = 1.6875 \times 10^{-5}$$

例 5-13 试证明矩阵 A 的谱半径与范数有如下关系

$$\rho(A) \leqslant \| A \|$$

其中 $\| A \|$ 为 A 的任何一种算子范数.

分析 由于谱半径是特征值的绝对值的最大者,故由特征值的定义出发论证是自然的.

证明 由特征值定义,对任一特征值 λ 有

$$AX = \lambda X \quad (X \neq 0,\text{特征向量})$$

取范数有

$$\| AX \| = |\lambda| \cdot \| X \|$$

由于范数 $\| A \|$ 是一种算子范数,故有相容关系

$$\| AX \| \leqslant \| A \| \cdot \| X \|$$

从而

$$|\lambda| \cdot \| X \| \leqslant \| A \| \cdot \| X \|$$

由于 $X \neq 0$,故 $|\lambda| \leqslant \| A \|$,从而

$$\rho(A) \leqslant \| A \|$$

例 5-14 试证对 n 维向量 X 有

$$\| X \|_\infty \leqslant \| X \|_1 \leqslant n \| X \|_\infty$$

分析 这只需要从向量范数的相应定义出发推证即可.

证明 由定义知

$$\| X \|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| =$$

$$\| X \|_1 \leqslant \sum_{i=1}^n \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

从而

$$\| X \|_\infty \leqslant \| X \|_1 \leqslant n \cdot \| X \|_\infty$$

注记 由此可以看到,范数 $\| \cdot \|_1$ 可由范数 $\| \cdot \|_\infty$ 所控制.

例 5-15 设 A 是 n 阶实矩阵,试证

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \| A \|_F \leqslant \| A \|_2 \leqslant \| A \|_F$$

分析 这里矩阵的 F-范数为 $\| A \|_F = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$,结合矩阵的 2-范数的定义,如果再熟悉矩阵中有关特征值的一些重要结论($\| A \|_2$ 与特征值有关)如对矩阵 $B = (b_{ij})_{n \times n}$ 有

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(B) = \sum_{i=1}^n b_{ii} \quad (\text{特征值之和等于对角元之和})$$

则将容易推证上述不等式.

证明 (1) 由范数定义有

$$\| A \|_2^2 = \lambda_{\max}(A^T A) \leqslant \lambda_1(A^T A) + \lambda_2(A^T A) + \cdots +$$

$$\lambda_n(A^T A) = A^T A\text{ 的对角元之和} =$$

$$\sum_{i=1}^n a_{1i}^2 + \sum_{i=1}^n a_{2i}^2 + \cdots + \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 =$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \| A \|_F^2$$

(2) 显然

$$\| A \|_2^2 = \lambda_{\max}(A^T A) \geqslant \frac{1}{n}[\lambda_1(A^T A) + \lambda_2(A^T A) + \cdots +$$

$$\lambda_n(A^T A)] = \frac{1}{n} \| A \|_F^2$$

从而
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \| A \|_F \leqslant \| A \|_2 \leqslant \| A \|_F$$

注记 由此可看到矩阵的 2-范数可由 F-范数得到控制.

例 5-16 设实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,试证

$$\| A \|_F = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

分析 与上题相同.

证明 因为 A 对称，故 $\lambda(A^{\mathrm{T}}A)=\lambda(A^2)=[\lambda(A)]^2$，从而

$$\lambda_1(A^{\mathrm{T}}A)+\lambda_2(A^{\mathrm{T}}A)+\cdots+\lambda_n(A^{\mathrm{T}}A)=\sum_{i=1}^{n}[\lambda_i(A)]^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$$

又
$$\lambda_1(A^{\mathrm{T}}A)+\lambda_2(A^{\mathrm{T}}A)+\cdots+\lambda_n(A^{\mathrm{T}}A)=$$

$A^{\mathrm{T}}A$ 的对角元之和 $=$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{1i}^2+\sum_{i=1}^{n}a_{2i}^2+\cdots+\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^2=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ji}^2=\|A\|_F^2$$

故
$$\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

例 5-17 设 A 为正交阵，试证 $\mathrm{Cond}_2(A)=1$.

分析 由正交矩阵和条件数的定义作简单推理即可.

证明 因为 A 正交，故 $A^{\mathrm{T}}A=AA^{\mathrm{T}}=I$，$A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$，从而

$$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^{\mathrm{T}}A)}=\sqrt{\rho(I)}=1$$

$$\|A^{-1}\|_2=\|A^{\mathrm{T}}\|_2=\sqrt{\rho(AA^{\mathrm{T}})}=\sqrt{\rho(I)}=1$$

故
$$\mathrm{Cond}_2(A)=\|A\|_2\cdot\|A^{-1}\|_2=1$$

例 5-18 设 A,B 为 n 阶矩阵，试证

$$\mathrm{Cond}(AB)\leqslant\mathrm{Cond}(A)\cdot\mathrm{Cond}(B)$$

分析 由条件数定义和矩阵范数的性质即可证明.

证明
$$\begin{aligned}\mathrm{Cond}(AB)&=\|AB\|\cdot\|(AB)^{-1}\|\leqslant\\&\|A\|\cdot\|B\|\cdot\|B^{-1}A^{-1}\|\leqslant\\&\|A\|\,\|B\|\,\|B^{-1}\|\cdot\|A^{-1}\|=\\&\|A\|\,\|A^{-1}\|\cdot\|B\|\cdot\|B^{-1}\|=\\&\mathrm{Cond}(A)\cdot\mathrm{Cond}(B)\end{aligned}$$

例 5-19 设 A,B 为 n 阶非奇异矩阵，$\|\cdot\|$ 表示矩阵的任何一种算子范数，试证

(1) $\|A^{-1}\|\geqslant\dfrac{1}{\|A\|}$

(2) $\|A^{-1}-B^{-1}\|\leqslant\|A^{-1}\|\cdot\|B^{-1}\|\cdot\|A-B\|$

分析 由矩阵范数的基本性质即可推证.

证明 (1) $A^{-1}A=I$，因为 $\|\cdot\|$ 是算子范数，故

$$\|A^{-1}A\|=\|I\|=1$$

又
$$\|A^{-1}A\|\leqslant\|A^{-1}\|\cdot\|A\|$$

故
$$\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\geqslant1$$

即
$$\|A^{-1}\|\geqslant\frac{1}{\|A\|}$$

(2) $A^{-1}-B^{-1}=A^{-1}(B-A)B^{-1}$，从而

$$\begin{aligned}\|A^{-1}-B^{-1}\|&=\|A^{-1}(B-A)B^{-1}\|\leqslant\\&\|A^{-1}\|\cdot\|B-A\|\cdot\|B^{-1}\|\end{aligned}$$

即
$$\|A^{-1}-B^{-1}\|\leqslant\|A^{-1}\|\cdot\|B^{-1}\|\cdot\|A-B\|$$

例 5-20 设 A 为 n 阶非奇异矩阵，且有三角分解 $A=LU$，其中 L 为单位下三角阵，U 为上三角阵. 求证 A 的所有顺序主子式均不为零.

分析 因为要证 A 的所有顺序主子式均不为零，故把 $A=LU$ 按分块的形式写出比较好，再由 A 的非奇异性即可推证.

证明 设

$$A_k=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}\end{pmatrix},\quad L_k=\begin{pmatrix}1&&&\\l_{21}&1&&\\l_{k1}&l_{k2}&\cdots&1\end{pmatrix},$$

$$U_k=\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}&\cdots&u_{1k}\\&u_{22}&\cdots&u_{2k}\\&&\cdots&\cdots\\&&&u_{kk}\end{pmatrix}$$

将 $A=LU$ 按分块形式写出则有

$$\begin{pmatrix}A_k&A_{11}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_k&O\\L_{21}&L_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}U_k&U_{12}\\O&U_{22}\end{pmatrix}$$

从而由矩阵的分块乘法有

$$A_k = L_k U_k,\ (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

因为 $A = A_n = L_n U_n$ 非奇异，故

$$\det A = \det L_n \cdot \det U_n = \det U_n = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn} \neq 0$$

从而 $\det A_k = \det L_k \cdot \det U_k = \det U_k = u_{11}u_{22}\cdots u_{kk} \neq 0$

A_k 非奇异，A 的所有顺序主子式不为零.

例 5-21 设矩阵 Q 对称正定，则 $f(x) = \sqrt{x^{\mathrm{T}}Qx}$ 是向量 x 的一种范数.

分析 这可以首先检验 $f(x)$ 是否满足向量范数的定义，在具体检验过程中再考虑是否要用到其它的数学结论.

证明 (1) 因 Q 对称正定，故对任意 x 有 $f(x) = \sqrt{x^{\mathrm{T}}Qx} \geqslant 0$，且仅当 $x = 0$ 时 $f(x) = 0$；

(2) 设 c 为任意实数，则

$$f(cx) = \sqrt{(cx)^{\mathrm{T}}Q(cx)} = \sqrt{c^2(x^{\mathrm{T}}Qx)} = |c|\ \sqrt{x^{\mathrm{T}}Qx} = |c|f(x)$$

(3) 下边检验三角不等式 $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$

$$f(x+y) = \sqrt{(x+y)^{\mathrm{T}}Q(x+y)} = \sqrt{x^{\mathrm{T}}Qx + y^{\mathrm{T}}Qy + x^{\mathrm{T}}Qy + y^{\mathrm{T}}Qx} = \sqrt{x^{\mathrm{T}}Qx + y^{\mathrm{T}}Qy + 2x^{\mathrm{T}}Qy}$$

因 Q 对称正定，故 Q 一定有表示式

$$Q = B^{\mathrm{T}}B\ (B \text{ 是可逆矩阵})$$

从而 $x^{\mathrm{T}}Qy = (Bx)^{\mathrm{T}}(By)$，由数学上熟知的许瓦兹不等式有

$$|x^{\mathrm{T}}Qy| = |(Bx)^{\mathrm{T}}(By)| \leqslant \sqrt{(Bx)^{\mathrm{T}}(Bx)} \cdot \sqrt{(By)^{\mathrm{T}}(By)}$$

代入上式有

$$f(x+y) \leqslant \sqrt{x^{\mathrm{T}}Qx + y^{\mathrm{T}}Qy + 2\sqrt{x^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Bx} \cdot \sqrt{y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}By}} = \sqrt{x^{\mathrm{T}}Qx + y^{\mathrm{T}}Qy + 2\sqrt{x^{\mathrm{T}}Qx} \cdot \sqrt{y^{\mathrm{T}}Qy}} = \sqrt{x^{\mathrm{T}}Qx} + \sqrt{y^{\mathrm{T}}Qy} =$$

$$f(x) + f(y)$$

所以 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Qx$ 是 x 的一种范数.

例 5-22 非奇异矩阵不一定都有 LU 分解.

分析 这只需要举一个例子就行了. 一般举例子尽量要简单些，而一个恰当的例子往往需要经过几次反复的“失败 — 修正”后才确定下来.

解答 考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

显然 A 非奇异，若 A 有 LU 分解，则有

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & ae \\ bd & be + cf \end{pmatrix}$$

于是 $ae = bd = 1$，而 $ad = 0$，显然矛盾.

故该非奇异矩阵不存在 LU 分解，所以说并非非奇异矩阵都有 LU 分解.

例 5-23 记 $\| x \|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$，其中 $x = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^{\mathrm{T}}$，试证 $p \to \infty$ 时，$\| x \|_p \to \| x \|_\infty$.

分析 $\| x \|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$，所以应尽量把 $\| x \|_p$ 中的和式通过不等式和 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$ 联系起来.

证明 显然

$$\| x \|_\infty^p = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leqslant n \cdot \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|^p = n \cdot \| x \|_\infty^p$$

两边开 p 次方有

$$\| x \|_\infty \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant n^{\frac{1}{p}} \| x \|_\infty$$

因 $\lim\limits_{p\to\infty} n^{\frac{1}{p}} = 1$，故 $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \| x \|_\infty$

即 $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$（当 $p \to \infty$ 时）

例 5-24 设 A 为非奇异矩阵，$B = A^{\mathrm{T}}A$，试证

$$\mathrm{Cond}_2(B) = [\mathrm{Cond}_2(A)]^2$$

分析 2-范数意义下的条件数与矩阵的特征值有关，本题应该由条件数的定义，结合特征值的有关性质去推证．

证明

$$\begin{aligned}\mathrm{Cond}_2(A^{\mathrm{T}}A) = {} & \|A^{\mathrm{T}}A\|_2 \cdot \|(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}\|_2 = \\ & \sqrt{\lambda_{\max}((A^{\mathrm{T}}A)^2)} \cdot \\ & \sqrt{\lambda_{\max}[((A^{\mathrm{T}}A)^{-1})^{\mathrm{T}} \cdot (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}]} = \\ & \sqrt{\lambda_{\max}^2(A^{\mathrm{T}}A)} \cdot \sqrt{\lambda_{\max}[((A^{\mathrm{T}}A)^{-1})^2]} = \\ & [\sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}]^2 \cdot [\sqrt{\lambda_{\max}((A^{\mathrm{T}}A)^{-1})}]^2 = \\ & \|A\|_2^2 \cdot \|A^{-1}\|_2^2 = \mathrm{Cond}_2^2(A)\end{aligned}$$

例 5-25 设 A 为 n 阶按行严格对角占优矩阵，经 Gauss 消去法一步后 A 变为如下形式

$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \ (i=1,2,\cdots,n)$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

试证 A_2 是 $n-1$ 阶的按行严格对角占优矩阵．

分析 本题应把 Gauss 消去法一步前后 A 的有关元素计算出来，再由按行严格对角占优的定义进行推证．

证明 A 经 Gauss 消去法一步后，A_2 的元素为

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \qquad (i, j = 2, 3, \cdots, n)$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}^{(2)}| = {} & \sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}\right| \leqslant \\ & \sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| + \sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}\right| = \\ & \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| - |a_{i1}| + \left|\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right| \sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n} |a_{1j}|\end{aligned}$$

因为 A 按行严格对角占优，故 $\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$，从而

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}^{(2)}| < {} & |a_{ii}| - |a_{i1}| + \left|\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right| \sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n} |a_{1j}| = \\ & |a_{ii}| - \left|\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right| (|a_{11}| - \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| + |a_{1i}|) < \\ & |a_{ii}| - \left|\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right| (0 + |a_{1i}|) \leqslant \\ & \left|a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i}\right| = |a_{ii}^{(2)}| \quad (i = 2, 3, \cdots, n)\end{aligned}$$

所以 A_2 仍按行严格对角占优．

例 5-26 设 A 是 n 阶实对称正定矩阵，经一次 Gauss 消元后 A 化为如下形式

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{pmatrix}$$

试证 A_2 也是对称正定矩阵．

分析 本题应把 Gauss 消元一步后 A_2 的元素计算出来，再由对称、正定的定义去论证．

证一 经 Gauss 消元一步后，A_2 的元素为

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}, \ (i, j = 2, 3, \cdots, n)$$

由于 A 对称，故 $a_{ij} = a_{ji}$，从而显然有

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ji}^{(2)}, \text{即 } A_2 \text{ 对称．}$$

为证 A_2 的正定性，请注意如下等式

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j = a_{11}(x_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{i1}}{a_{11}}x_i)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}^{(2)}x_ix_j$$

对任意 $y=(y_1\ y_2\ \cdots\ y_n)^{\mathrm{T}}\neq 0$，由满秩变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{a_{i1}}{a_{11}}x_i \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

一定可解出 $\boldsymbol{x}=(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^{\mathrm{T}}\neq 0$，此时

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j = a_{11}y_1^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}^{(2)}y_iy_j$$

特别取 $\boldsymbol{y}=(0\ y_2\ \cdots\ y_n)\neq 0$，则由 $\boldsymbol{A}$ 的正定性有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}^{(2)}y_iy_j > 0$$

即 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} > 0$，$\boldsymbol{A}_2$ 正定．

证二 如果从“对称矩阵正定的充要条件是其一切顺序主子式全大于零”出发，则有下面证法．与“证一”一样，$\boldsymbol{A}_2$ 的对称性是显然的．因为 $\boldsymbol{A}$ 正定，故 $\boldsymbol{A}$ 的一切顺序主子式全大于零，而题中所述的 Gauss 消元是把第一行的若干倍到其它行上，这不改变 A 的各阶顺序主子式值，即 $\boldsymbol{A}^{(2)}$ 的各阶顺序主子式全大于零．由行列式的展开定理显知

$\boldsymbol{A}^{(2)}$ 的 i 阶顺序主子式 $=$

$a_{11}\cdot\boldsymbol{A}_2$ 的 i 阶顺序主子式 >0 $(i=2,3,\cdots,n)$

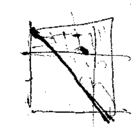
(注意 $\boldsymbol{A}$ 正定时 $a_{11}>0$)，即 $\boldsymbol{A}_2$ 正定．

例 5-27 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶上三角阵，且对角元 $a_{ii}\neq 0$，$(i=1,2,\cdots,n)$．试证 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 仍为上三角阵，并给出求逆算法(给出求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的元素的计算公式)．

分析 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有表达公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{\det\boldsymbol{A}}$，由此再利用 $\boldsymbol{A}$ 的下三角为零(主对角线以下)的特性可以证明 A^{-1} 的对角线以下的元素也为零；而求逆算法可类似矩阵的三角分解法，先设出所求矩阵的元素，再按照矩阵的乘法运算确定元素，当然计算顺序上应特别注意三角阵的特点．

解答 (1) 设 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$．由公式，$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{\det\boldsymbol{A}}$，其中

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$



而 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式．因为 $\boldsymbol{A}$ 为上三角阵，故 $i>j$ 时 $a_{ij}=0$，从而当 $i<j$ 时 $A_{ij}=0$，即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是上三角阵．

(2) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，因 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$，于是

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \vdots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

由矩阵乘法显然有 $a_{11}b_{11}=1$，故 $b_{11}=\dfrac{1}{a_{11}}$，根据这里的特点，我们将 $\boldsymbol{B}$ 按列求其元素，并且各列是从下向上求，每次先求对角元．

设 $\boldsymbol{B}$ 的前 $j-1$ 列已求出，现求 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列，由 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列有 $a_{jj}\cdot b_{jj}=1$，于是

$$b_{jj}=\frac{1}{a_{jj}}$$

再求 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列中的元素 $b_{ij}(i=j-1,\ j-2,\ \cdots,\ 1)$. $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘 B 的第 j 列得

$$a_{ii}b_{ij}+a_{i,i+1}b_{i+1,j}+\cdots+a_{ij}b_{jj}=0$$

于是

$$b_{ij}=-\frac{1}{a_{ii}}(\sum_{k=i+1}^{j}a_{ik}b_{kj})$$

最后得求逆算法

$$\begin{cases}b_{11}=\dfrac{1}{a_{11}}\\ b_{jj}=\dfrac{1}{a_{jj}}\\ b_{ij}=-\dfrac{1}{a_{ii}}(\sum\limits_{k=i+1}^{j}a_{ik}b_{kj})\ (i=j-1,\ j-2,\ \cdots,\ 1)\\ (j=2,3,\cdots,n)\end{cases}$$

三、习题五

1. 用矩阵的直接三角分解法解方程组

$$\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\2&-1&9&-7\\-3&4&-3&19\\4&-2&6&-21\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\17\\-13\end{pmatrix}$$

2. 用 LDL^{T} 分解法解下列方程组

$$\begin{cases}5x_1-4x_2+x_3=2\\-4x_1+6x_2-4x_3+x_4=-1\\x_1-4x_2+6x_3-4x_4=-1\\x_2-4x_3+5x_4=2\end{cases}$$

3. 用列主元消去法求解

$$\begin{pmatrix}1&2&3&\\2&1&2&3\\&2&1&2\\&&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异矩阵,求证

$$\mathrm{Cond}_2(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=[\mathrm{Cond}_2(\boldsymbol{A})]^2$$

5. 用 Gauss-Jordan 方法求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

6. 求三阶 Hilbert 矩阵

$$\boldsymbol{H}_3=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{4}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

的条件数 $\mathrm{Cond}_\infty(\boldsymbol{H}_3)$

7. 试证:如果 $\boldsymbol{A}$ 是对称正定阵,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是对称正定阵.

8. 设矩阵 $\boldsymbol{P}\in R^{n\times n}$ 非奇异,$\|\boldsymbol{x}\|$ 为 R^n 上的一向量范数,定义 $\|\boldsymbol{x}\|_P=\|\boldsymbol{Px}\|$. 试证明 $\|\boldsymbol{x}\|_P$ 是 R^n 上的一种向量范数.

9. 证明:当且仅当向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 线性相关且 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\geqslant 0$ 时才有

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_2=\|\boldsymbol{x}\|_2+\|\boldsymbol{y}\|_2$$

10. 画图描述如下点集

$$S_p=\{x|\ \|x\|_p=1,\ x\in R^2\}\quad(p=1,2,\infty)$$

11. 设有 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,如果 $|i-j|>t$ 时 $a_{ij}=0$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为带

宽 $2t+1$ 的带状矩阵．设 A 满足三角分解条件，试推导 $A=LU$ 的如下三角分解公式：

$$\begin{cases} u_{kj} = a_{kj} - \sum\limits_{m=\max(1,k-t)}^{k-1} l_{km}u_{mj} \\ \qquad (j = k, k+1, \cdots, \min(n, k+t)) \\ l_{ik} = (a_{ik} - \sum\limits_{m=\max(1,i-t)}^{k-1} l_{im}u_{mk})/u_{kk} \\ \qquad (i = k+1, k+2, \cdots, \min(n, k+t)) \\ (k = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

12. 设 $m \times n$ 矩阵 A 的各列线性无关，则有分解

$$A = QR$$

其中 R 为单位上三角方阵，Q^TQ 为对角阵．

13. 设 $\|x\|$ 是 $x \in R^n$ 的范数，试证 $\|x\|$ 是 x 的连续函数．

14. 设 A 是 n 阶方阵．证明：对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 A 的一种范数 $\|\cdot\|$，使 $\|A\| \leqslant \rho(A) + \varepsilon$．

第六章　解线性方程组的迭代法

一、内容提要

设有方程组 $AX=b$，其中 A 为 n 阶非奇异矩阵，故方程组有惟一解．

1. 简单迭代法

将 $AX=b$ 等价变形为 $X=BX+g$，其中 B 为 n 阶矩阵，g 为常数向量．任取 $X^{(0)} \in R^n$，作迭代过程：

$$X^{(k+1)} = BX^{(k)} + g, \ k = 0, 1, 2, \cdots$$

称之为简单迭代法，B 称为迭代矩阵．

若 $a_{ii} \neq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则从第 i 个方程解出 x_i，所得等价方程为 $X=BX+g$，其中 $B=I-\mathrm{diag}(a_{ii}^{-1})A$，$g=\mathrm{diag}(a_{ii}^{-1})b$，由此得所谓的 Jacobi（雅可比）迭代法：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i\Big) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

2. 高斯-赛德尔（Gauss - Seidel）迭代法

把简单迭代法中的迭代矩阵 B 写成

$$B = L + D + U$$

其中 $D=\mathrm{diag}(b_{ii})$，L 和 U 分别是由 B 的对角线以下和以上部分的元素组成的严格下、上三角阵，则 Gauss - Seidel 迭代格式为

$$X^{(k+1)} = LX^{(k+1)} + (D+U)x^{(k)} + g, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

或写成