Modern Control Theory
Spring 2017

Weijun Zhang （张伟军）
Associate Professor, Robotics Institute
School of Mechanical Engineering
Office:930 Building A of ME school
401 Building B of ME School

zhangweijun@sjtu.edu.edu.cn
021-34205559

课程概要

- 能控标准型和能观标准型（3.6）
- 线性系统的结构分解（3.8)
- 传递函数阵的实现问题（3.9）

Controllable Canonical Form

- 如何采用矩阵变换转化为能控标准型
- 可以分为能控标准I型和II型

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I 型

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

II 型

Controllable Canonical Form-Type II

（1）能控标准型对设计状态反馈是极为方便的

（2）主要讨论如何变换成为能控标准I型和II型

对于单维线性定常系统 $\sum \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$

若系统是完全可控的，则必有 $rank\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \mathrm{n}$

取线性无关的n个列作为状态空间的基底

Controllable Canonical Form-Type II

$$x = T_{c2}\bar{x} = \begin{bmatrix} b & Ab & \ldots & A^{n-1}b \end{bmatrix}\bar{x}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\,x + b\,u \\ y &= C\,x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\,\bar{x} + \bar{b}\,u \\ y &= \bar{C}\,\bar{x} \end{aligned}$$

$$\bar{A} = T_{c2}^{-1} A T_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = T_{c2}^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Controllable Canonical Form-Type II

$$\bar{C} = CT_{c2} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \bar{x}$$

证明:

$\beta_0 = Cb$

$\beta_1 = CAb$

$\cdots$

$\beta_{n-1} = CA^{n-1}b$

Step1先求 $\bar{A} = T_{c2}^{-1} A T_{c2}$

$$AT_{c2} = A\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Ab & A^2 b & \cdots & A^n b \end{bmatrix}$$

代入

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \cdots - a_0 I$$

Controllable Canonical Form-Type II

$$AT_{c2} = A\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Ab & A^2b & \cdots & (-a_{n-1}A^{n-1} - \ldots - a_1A - a_0I)\ b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Controllable Canonical Form-Type II

$$\overline{A} = T_{c2}^{-1} A T_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Step2求 $\overline{b} = T_{c2}^{-1} b \Rightarrow b = T_{c2}\overline{b} = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}\overline{b}$

欲使上式成立 $\overline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\overline{C} = CT_{c2} = \begin{bmatrix} Cb & CAb & \cdots & CA^{n-1}b \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

Controllable Canonical Form-Type I

对于单维线性定常系统 $\sum \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$

取线性无关的基底构成变换矩阵 $T_{c1} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
e_1 &= A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + a_{n-2}A^{n-3}b + \ldots + a_1 b \\
e_2 &= A^{n-2}b + a_{n-1}A^{n-3}b + \ldots + a_2 b \\
&\vdots \\
e_{n-1} &= Ab + a_{n-1}b \\
e_n &= b
\end{aligned}
$$

Controllable Canonical Form-Type I

$$=\begin{bmatrix} A^{n-1}b & A^{n-2}b & \cdots & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_{n-1} & 1 & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = T_{c1}^{-1} A T_{c1} \Rightarrow$$

$$Ae_1 = A(A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + a_{n-2}A^{n-3}b + \ldots + a_1 b)$$

$$= -a_0 b = -a_0 e_n$$

$$Ae_2 = A(A^{n-2}b + a_{n-1}A^{n-3}b + \ldots + a_2 b)$$

$$= (A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \ldots + a_2 Ab + a_1 b) - a_1 b$$

$$= e_1 - a_1 e_n$$

Controllable Canonical Form-Type I

$$Ae_{n-1} = A(Ab + a_{n-1}b) \qquad\qquad Ae_n = Ab$$

$$= (A^2b + a_{n-1}Ab + a_{n-2}b) - a_{n-2}b \qquad\qquad = (Ab + a_{n-1}b) - a_{n-1}b$$

$$= e_{n-2} - a_{n-2}e_n \qquad\qquad = e_{n-1} - a_{n-1}e_n$$

$$\bar{A} = T_{c1}^{-1}AT_{c1} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Controllable Canonical Form-Type I

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$T_{c1}\bar{b} = b = e_n$$

$$\bar{b} = T_{c1}^{-1} b \Rightarrow$$

$$= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Controllable Canonical Form-Type I

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{C} = CT_{c1} = C\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{C}\begin{bmatrix} A^{n-1}b & A^{n-2}b & \cdots & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_{n-1} & 1 & & \mathbf{0} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Observable Canonical Form-Type I

（1）能观标准型对设计状态观测是极为方便的

（2）主要讨论如何变换成为能观标准I型和II型

对于单维线性定常系统 $\Sigma \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$

若系统是完全可观的，则必有 $rank\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & A^T C^T \end{bmatrix}^T = \mathrm{n}$

若系统是可观的，则仅有n个向量是线性无关的，取线性无关的n个列作为状态空间的基底

Observable Canonical Form-Type I

$$x = T_{o1}\bar{x} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \bar{x}$$

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = Cx$$

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u$$

$$y = \bar{C}\bar{x}$$

$$\bar{A} = T_{o1}^{-1} A T_{o1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = T_{o1}^{-1} b = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

Observable Canonical Form-Type I

$$\overline{C} = CT_{o1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

变换阵

$$T_{o1}^{-1} = N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

构造 $\Sigma = (A, b, C)$ 对偶系统

$$\Sigma^* = (A^T, C^T, b^T)$$

Σ^* 可控型 $\Leftrightarrow$ Σ 可观型

Observable Canonical Form-Type I

Σ^* 可控型

$$\overline{\mathrm{A}}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathrm{B}}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C}^* = CT_{c2} = \begin{bmatrix} Cb & CAb & \cdots & CA^{n-1}b \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

Observable Canonical Form-Type II

根据对偶原理，可知此第二可控标准型就是对偶系统的第一可观标准型

对于单维线性定常系统 $\sum \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$

若系统是完全可观的，则必有 $rank\begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & \cdots & A^TC^T \end{bmatrix}^T = \mathrm{n}$

取线性无关的基底构成变换矩阵 $T_{o2}^{-1} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix}$

Observable Canonical Form-Type II

$$
=\begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_3 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CA^{n-1} \\ CA^{n-2} \\ \vdots \\ CA \\ C \end{bmatrix}
$$

$$
\overline{A} = T_{o2}^{-1} A T_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \overline{b} = T_{o2}^{-1} b = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}
$$

Observable Canonical Form-Type II

$$\overline{C} = CT_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

例题1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

变换第一可控标准型

变换第二可控标准型

例题2

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

化成可观标准II型

课程概要

- 能控标准型和能观标准型（3.6）
- 线性系统的结构分解（3.8)
- 传递函数阵的实现问题（3.9）

Structure Decomposition

结构分解举例

系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$\Rightarrow$$

经过变换后：

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -3 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -2 & \\ & & & -4 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Structure Decomposition

结构分解举例

由前述定理可知：

$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ 能控， $\tilde{x}_3, \tilde{x}_4$ 不能控

$\tilde{x}_2$ $\tilde{x}_3$ 能观测， $\tilde{x}_1$ $\tilde{x}_4$ 不能观

系统有：

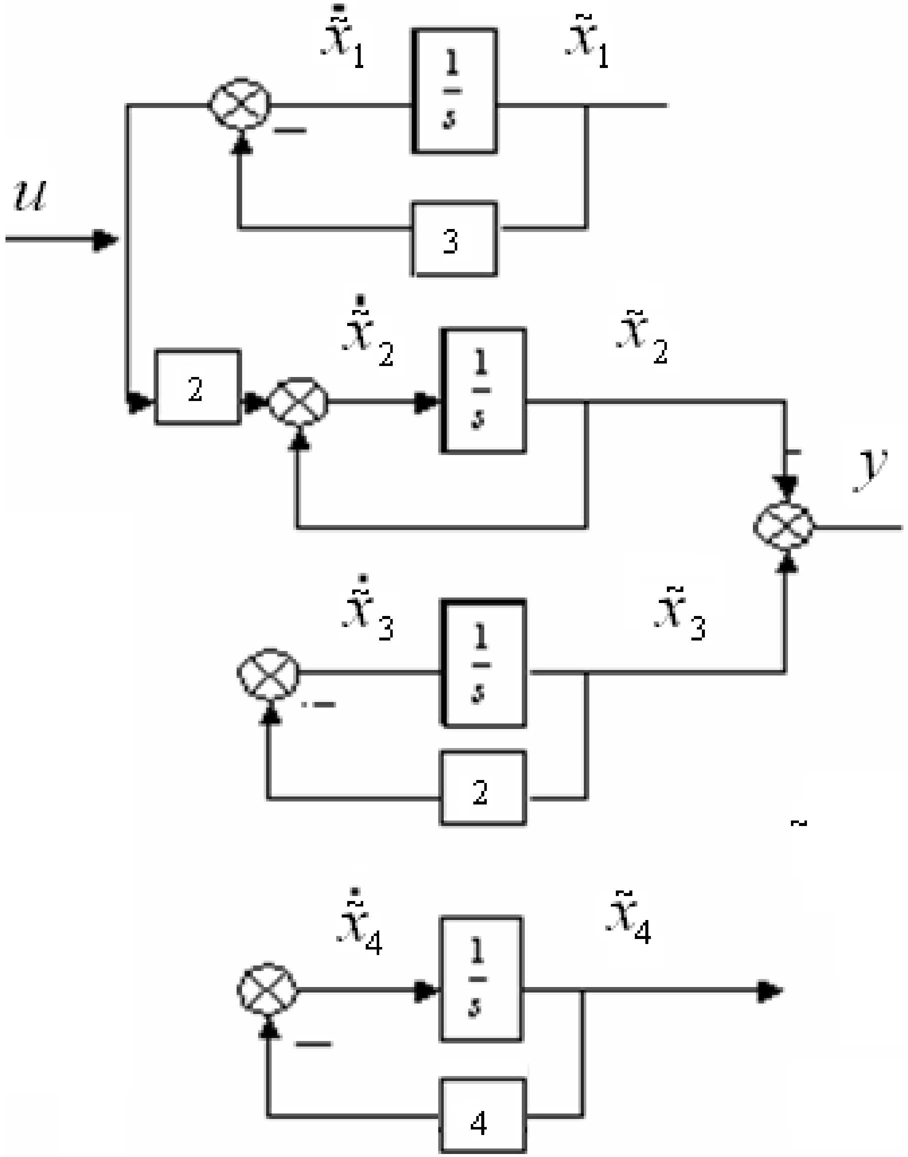
（1）能控能观 $\tilde{x}_2$

（2）能控不能观 $\tilde{x}_1$

（3）不能控能观 $\tilde{x}_3$

（4）不能控不能观 $\tilde{x}_4$

Structure Decomposition



Structure Decomposition

系统按能控性分解

定理： 设系统 $\Sigma(A,B,C)$ 不能控，则

$$\operatorname{rank}[M]=\operatorname{rank}[B,AB\ldots A^{n-1}B]=r<n,$$

必存在一非奇异矩阵 $T=R_c$，使得

$$\tilde{A}=TAT^{-1}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ n-r\end{array}$$

$$\tilde{B}=TB=\begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l} r \\ n-r \end{array}, \quad \tilde{C}=CT^{-1}=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \end{array}$$

Structure Decomposition

则系统得状态空间被分解成能控和不能控的两部分

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{A}_{12}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_1 u \\ y_1 = \tilde{C}_1\tilde{x}_1 \end{cases}, r\text{维子系统}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2 \\ y_2 = \tilde{C}_2\tilde{x}_2 \end{cases}, (n-r)\text{维子系统}$$

Structure Decomposition

变换矩阵 $T(R_c)$的求法：

（1）从 $M=[B,AB\ldots A_n\text{-}1B]$中选择 r 个线性无关的列向量。

（2）以（1）求得的列向量，作为 T 的前 r 个列向量，其余列向量可以在保持 T 为非奇异的情况下，任意选择。

Structure Decomposition

说明：

（1）系统按能控性分解后，其能控性不变。

（2）系统按能控性分解后，其传递函数阵不变。

Structure Decomposition

例题

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u$$

按能控性分解

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}x$$

Structure Decomposition

系统按能观性分解

$$\Sigma \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad \text{rank(N)} = rank\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n_1 < n$$

存在不可观分量 $\quad x = R_o \tilde{x}$

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$

$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

$$\tilde{x} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \tilde{x}_1 \\ \hline \tilde{x}_2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} n_1 \\ (n-n_1) \end{array}$$

$$A = R_o^{-1} A R_o = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \hline \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{n_1} & \underbrace{\qquad\quad}_{n-n_1} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} n_1 \\ n-n_1 \end{array}$$

Structure Decomposition

系统按能观性分解

$$\widetilde{B} = R_o^{-1} B = \begin{bmatrix} \widetilde{B}_1 \\ \hline \widetilde{B}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n-n_1 \end{matrix}$$

$$\widetilde{C} = CR_o = \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\hat{C}_1}_{n_1} & \underbrace{0}_{n-n_1} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{B}_1 u \\ y_1 &= \tilde{C}_1 \tilde{x}_1 \end{aligned}$$

$$R_o^{-1} = \begin{bmatrix} R_1' \\ R_2' \\ \vdots \\ R_{n1}' \\ \vdots \\ R_n' \end{bmatrix}$$

(1)前n1个行矢量是可控矩阵中的线性无关的行。

(2)后面的n-n1个行是任意的，只要Ro阵是非奇异的。

Structure Decomposition

例： 设线性定常系统如下，判别其能观性，若不是完全能观的，将该系统按能观性进行分解。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u,\ y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}x$$

Structure Decomposition

解： 系统的能观性判别矩阵

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

其秩，$rankN = 2 < n$

所以该系统是状态不完全能观的。

Structure Decomposition

为构造非奇异变换阵 R_o^{-1}，取

$$R_1' = C = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\end{bmatrix}, R_2' = CA = \begin{bmatrix}1 & -2 & 3\end{bmatrix}, R_3' = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

得 $$R_o^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad R_o = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

其中 R_3,是在保证 R_o^{-1} 非奇异的条件下任意选取的。

Structure Decomposition

于是系统状态空间表达式变换为

$$\dot{\tilde{x}} = R_o^{-1} A R_o \tilde{x} + R_o^{-1} b u$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = C R_o \tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}$$

Structure Decomposition

按照能控和能观性分解

若线性系统是不完全能控和能观的，则存在变换矩阵R，使得:

$$x = R\bar{x}$$

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\,\bar{x} + \bar{b}\,u \qquad \bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \bar{C}\,\bar{x}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Structure Decomposition

按照能控和能观性分解

步骤1：首先将系统作能控性分解

$$x = R_c \bar{x}$$
$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\,\bar{x} + \bar{b}\,u$$
$$y = \bar{C}\,\bar{x}$$

$$\begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} = R_c x$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = R_c^{-1} A R_c \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} + R_c^{-1} B u$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ 0 & \bar{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = C R_c = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix}$$

Structure Decomposition

按照能控和能观性分解

步骤2：对不能控子系统作能观性分解

$$x_{\bar{c}} = R_{02}\begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{\bar{c}o} \\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = R_{02}{}^{-1}\bar{A}_4 R_{02}\begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{33} & 0 \\ A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$y = \bar{C}_2 R_{02}\begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

Structure Decomposition

按照能控和能观性分解

步骤3：对能控子系统作能观性分解

$$x_c = R_{01}\begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$R_{01}\begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} = \bar{A}_1 \ R_{01}\begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix} + R^{-1}{}_{01} + Bu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} = R^{-1}{}_{01}\bar{A}_1 \ R_{01}\begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix} + R^{-1}{}_{01}R^{-1}{}_{01} + R^{-1}{}_{01}Bu$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{13} & 0 \\ A_{23} & A_{24} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}u$$

$$y = \bar{C}R_{01}\begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix}$$

Structure Decomposition

分解后的表达为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \\ \dot{x}_{\bar{c}o} \\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

Example

已知系统：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}x$$

是状态不完全能控和能观的，试按照能控性和能观性进行结构分解。

Structure Decomposition

按照对角化分解

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & & & & \\ 0 & -4 & & & & \\ & & 3 & 1 & & \\ & & 0 & 3 & & \\ & & & & -1 & 1 \\ & & & & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

课程概要

- 能控标准型和能观标准型（3.6）
- 线性系统的结构分解（3.8)
- 传递函数阵的实现问题（3.9）

系统传递函数阵实现的概念

根据给定的传递函数阵$G(s)$，求其相应的状态空间表达式$\sum(A,B,C,D)$使其满足$C(sI-A)^{-1}B+D=G(s)$，称该状态空间表达式$\sum(A,B,C,D)$为传递函数阵$G(s)$的一个实现。

实现的条件

通过模拟结构图，用积分器、加法器等（集成电路块）连接试验，物理可实现条件为

1、 $G(s)$ 中的每一个元素 $G_{ij}(s)$ 的分子分母多项式的系数均为实常数。

2、 $G(s)$ 中每一个元素均为 s 的真有理分式函数。

如何实现

- 状态变量的选择有无穷多组，实现的方法有无穷多。单变量系统可以根据直接写出其能控标准型实现和能观标准型实现。

最小实现

（1）**定义**：若 $G(s)$ 的一个实现为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad （1）$$

如果 $G(s)$ 不存在其他实现

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x} \end{cases} \qquad （2）$$

使 $\tilde{x}$ 的维数小于 x 的维数，则称(1)式的实现为 $G(s)$ 的最小实现。

最小实现

（2）**定理：**$G(s)$的一个实现

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

为最小实现的充要条件是$\sum(A, B, C)$不但能控而且能观。

最小实现

（3）确定最小实现的步骤(1)

1、对 $G(s)$ 初选一种实现 $\sum(A, B, C)$，通常选取能控或能观标准型实现，检查其实现的能控性（或能观性），若为能控又能观则(A,B,C)便是最小实现。

最小实现

（3）**确定最小实现的步骤(2)**

2、否则对以上标准型实现$\sum(A, B, C)$进行结构分解，找出其完全能控又完全能观的子系统$\sum(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$，这便是$G(s)$的一个最小实现。