

例一、计算 Bezier 曲线

已知 3 次 Bezier 曲线 $C(t)$ 的四个控制顶点 $P_0 = (0,0)$ 、 $P_1 = (0,1)$ 、 $P_2 = (1,1)$ 、 $P_3 = (1,0)$ ，给出 Bezier 曲线的表达式，并分别求出其在参数 0, 0.5, 1 处的导数。

解：

根据 Bezier 曲线的定义，有：

$$\begin{aligned} C(t) &= \sum_{i=0}^3 P_i B_{i,3}(t) = P_0 B_{0,3}(t) + P_1 B_{1,3}(t) + P_2 B_{2,3}(t) + P_3 B_{3,3}(t) \\ &= (0,0) \cdot C_3^0 \cdot (1-t)^3 + (0,1) \cdot C_3^1 \cdot (1-t)^2 \cdot t + (1,1) \cdot C_3^2 \cdot (1-t) \cdot t^2 + (1,0) \cdot C_3^3 \cdot t^3 \\ &= (0,1) \cdot 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t + (1,1) \cdot 3 \cdot (1-t) \cdot t^2 + (1,0) \cdot t^3 \\ &= (0+3 \cdot (1-t) \cdot t^2 + t^3, 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t + 3 \cdot (1-t) \cdot t^2) \\ &= (3t^2 - 2t^3, 3t - 3t^2) \end{aligned}$$

其导数为：

$$C'(t) = (3t^2 - 2t^3, 3t - 3t^2)' = (6t - 6t^2, 3 - 6t)$$

于是有：

$$C'(0) = (0,3)$$

$$C'(0.5) = (1.5,0)$$

$$C'(1) = (0,-3)$$

