複素数

高校数学の複素数についての参考資料である．ベクトルに関する理解があると本資料は読みやすいものになるだろう．

目次

第 1 章

複素数の導入

1.1　複素数の定義

1.1.1　虚数とは

虚数単位 i[*1]は次を満たす数である．

$$i^2 = -1 \tag{1.1}$$

単に虚数と呼ぶこともあり，複素数の基本となる量である．

今までは数を 2 乗すると正の数または 0 となると教わってきた．しかし，これは正しくない．正しくは **実数**を 2 乗すると正の数または 0 となる．ここで意識したいのが実数という数の枠組みだ．これまでに扱ってきた有理数や無理数といった数の枠組みはすべて実数に含まれる (図 1.1)．虚数というのは実数という枠の外の数の 1 つだ．

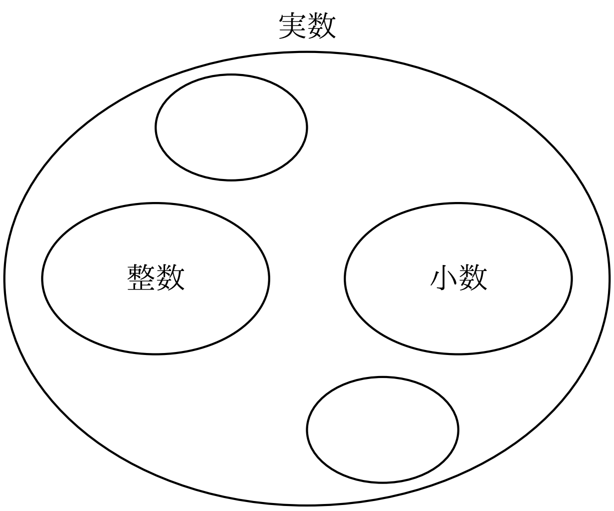

図 1.1　実数

*1 以降，本参考資料では断りなく i を虚数単位とする．

1.1.2　複素数とは

複素数は次で表現される数 z のすべてをいう．

$$z = x + iy \qquad x, y \text{ は任意の実数} \tag{1.2}$$

これは簡単に虚数が入っている数というわけではない． $y = 0$ の場合を考えればわかる通り，実数を含んでいる (図 1.2)．実数とは複素数の特別な形だということができる．

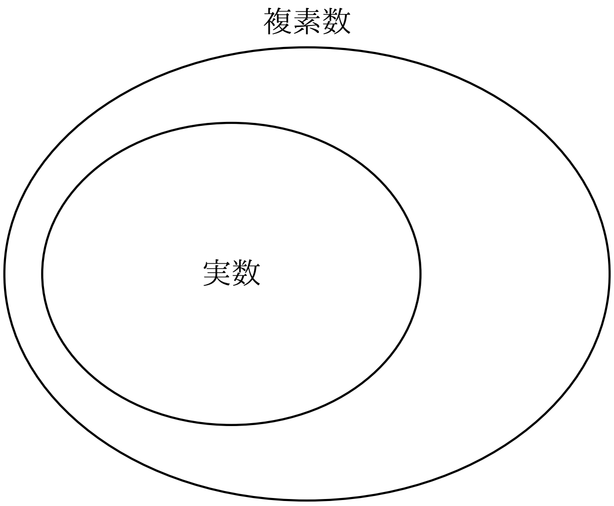

図 1.2　実数と複素数の関係

1.2　複素数の表現

複素数の表現方法はいくつか存在する．

1.2.1　実部・虚部

定義で扱ったのが次の表現である．

$$z = x + yi$$

これは複素数の実部と虚部を明確にするための表現である．x が実部， y が虚部である．複素数の基本的な計算はこの表現によっておこなう．計算のときは虚数単位 i は文字として計算してよい．そのため，複素数の計算は実部と虚部の計算と言っていい．

1.2.2　極形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

上の式は極形式というものだ．複素数の大きさと偏角[*2]を明確にするための表現である．r が大きさを，θ が偏角を表している．これらは複素数の掛け算や割り算のときに効果的な表現である．

1.2.3　表示の変換

2 つの形式の変換は素早くできるようになりたい．

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

このように表現できた場合は

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

と変換される．これは直交座標を極座標に変換するときの式に他ならない．この理解は後の複素数平面を扱う部分で述べる．

1.3　複素数平面

複素数の 2 つの表現方法では実部と虚部，または大きさと偏角といったように 2 つの要素によって 1 つの複素数を表現してる．これはまさしく，平面上での点の表現であるといえるだろう．このことから，複素数を平面上の点として表現する手法がある．そこで使う平面を複素数平面と呼ぶのだ．

1.3.1　複素平面の導入

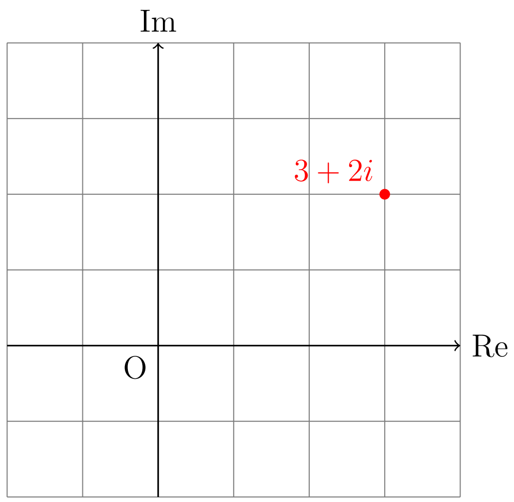

図 1.3　複素平面の導入

図 1.3 で複素数平面の使い方を理解する．横方向の軸は実軸，縦方向の軸は虚軸という．それらの値が実部，虚部を意味している．これによって平面上の点が複素数を表すことができるようになっている．

[*2] 複素数の大きさと偏角はあとで扱う内容である．ひとまず読み進めてほしい．

実軸上全体の点は実数を示している．横方向のみであった数直線を縦方向に拡張したものが複素数平面であると考えることもできる．このように考えると 3 つ目の軸を足して新たな数が作れるのかという話になるかもしれないが，多くの人が考える必要がないことだと思われる[*3]．

1.3.2　極座標

複素数の表現には極形式というものがあった．極座標というものに親しみがない場合は各自で調べてほしい．図 1.4 は極座標表示から複素平面に図示したものだ．

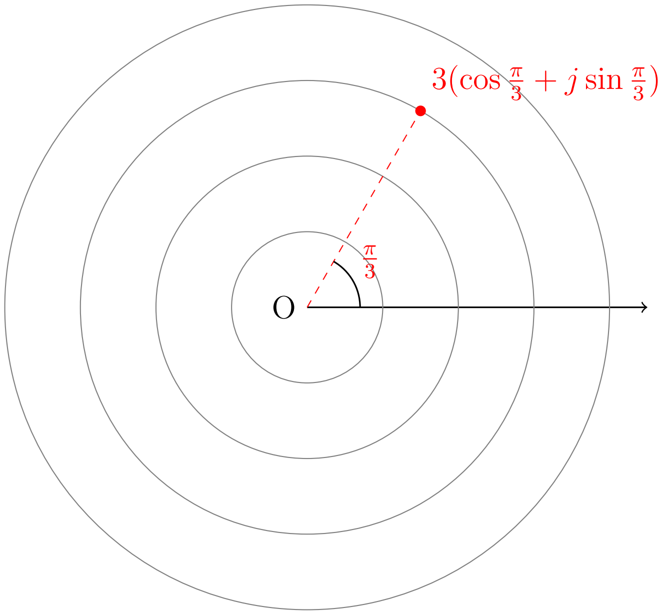

図 1.4　極形式による複素平面

実軸の正方向が極座標の偏角をはかる基準になっている．そして原点からの距離が複素数の大きさである．複素数の極形式での説明では説明はしなかった大きさと偏角の説明は図 1.4 で済ませることにする．

1.3.3　複素数の大きさ

複素数の大きさは極形式での r の値のことを言っている．これは複素平面上では原点からの距離である．ちょうど，数直線上で絶対値は原点からの距離と考えていることと同じだ．

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

1.4　本章で扱う問題

本章で扱った内容から解くことができる問題を以下に示す．

[*3] 工学部で 2 年間数学を学んでも出てくることはなかった．数体の拡張は理学関係なのかもしれないが，門外漢なのでわからない．興味があればガロア体など調べるのも良いだろう．

- 虚数の定義
- 虚数の計算
- 虚数の形式の変換
- 複素数平面による図示

これらに関する問題とその解法を示しておく．

1.4.1　虚数の定義

問題

以下を計算せよ．

1. $\sqrt{-1}$
2. $\sqrt{-5}$
3. $\sqrt{i}$　　　(難)

1 問目は虚数単位の定義である．

$$\sqrt{-1} = i$$

2 問目は 2 つの平方根の積に分けることで容易に理解できる．

$$\sqrt{-5} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{5}i$$

最後の問題は難しい．次章の内容によって答えることができる問題である．したがって同じ問題はあとでも出題する．答えだけ示す．

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

この値を 2 乗するとちょうど i になることが確認できる．

1.4.2　虚数の計算

問題

以下を計算せよ．

1. $(1+i)+(3+5i)$
2. $(2+3i)\times(5+2i)$
3. $(1+2i)^2$

大した説明はないので，計算を以下に示す．

$$\begin{aligned}(1+i)+(3+5i) &= 4+6i\\(2+3i)\times(5+2i) &= 4+19i\\(1+2i)^2 &= -3+4i\end{aligned}$$

文字計算を基本としながら，$i^2=-1$ を使うことで容易に計算できる．

1.4.3　形式の変換

複素数の 2 つの形式を自由に変換できることが大事だ．特に $x+iy$ という形から極形式に変換することができる必要がある．逆は単に三角比の計算なので説明する必要はないと思われる．

問題

以下の複素数を極形式に書き直せ．

1. $1+i$
2. $1-\sqrt{3}i$
3. $1+2i$　　（ヒント：有名角でない場合は，適当な文字を与えてから後で説明すれば良い．）

計算の方針としては，最初に複素数の大きさを求める．これで複素数をくくると極形式一歩手前の状態になる．あとは実部と虚部を $\cos,\sin$ に照らして偏角を決定する．

$$
\begin{aligned}
1+i &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\
&= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}) \\
1-\sqrt{3}i &= 2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= 2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}) \\
1+2i &= \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}i\right) \\
&= \sqrt{5}(\cos\alpha+i\sin\alpha) \qquad \left(\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\right)
\end{aligned}
$$

偏角が有名角でない場合は文字を与えた上で説明すればいいというのは， $\cos,\sin$ の値を明らかにすればいいということである．

1.4.4　複素平面による図示

問題

本章の問題文に現れたすべての複素数を複素平面上に図示せよ．解答は含まれない．

解答は図 1.3 である．

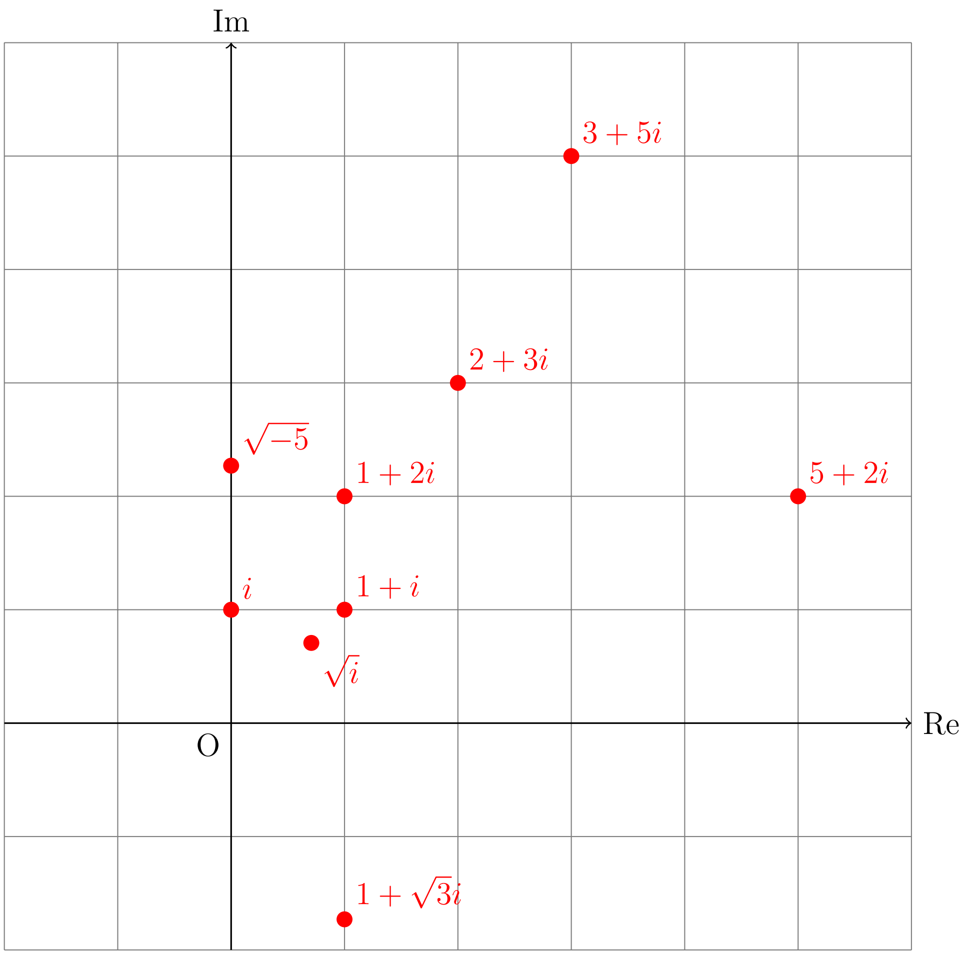

図 1.5　解答

第 2 章

複素数の計算と性質

複素数の計算と性質を理解することによって，文章題を解くに十分な理解を身につける．

2.1　表示形式による計算の違い

表示形式は複素数の捉え方を表すことはすでに述べている．これによって計算の考え方も大きく変わる．この使い分けこそが複素数の醍醐味ではないのかと私は考える．

2.1.1　実部と虚部による計算

$z = x + iy$ という形式の場合，計算はすべて文字式の計算と同じものであると考えたらいい．具体的に和と積の計算を以下に示す．

$$
\begin{aligned}
(a+ib)+(c+id) &= (a+c)+i(b+d) \\
(a+ib)\cdot(c+id) &= (ac-bd)+i(ad+bc)
\end{aligned}
$$

虚数単位 i を単純に文字とみなして計算すればいい．ただ，2 乗したときに -1 となることを忘れてはならない．割り算に関してはこの形式であるとなかなか計算が進まない．もっと言えば積でも係数はなかなか重たいものになっている．

実部と虚部を分けて計算する手法は複素数を相手にするときの最もまっとうな方法であるといえる．まずはこの方法を第一に考えるとよいだろう．

2.1.2　極形式の計算

極形式は積と商のみで使うことを勧める．

$$
\begin{aligned}
z_1 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \\
z_2 &= r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
z_1\cdot z_2 &= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \\
z_1/z_2 &= r_1/r_2\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}
\end{aligned}
$$

複素数の大きさに注目すると積と商はそのまま反映されている．偏角に注目すると積ならば足し算，商ならば引き算になっている．まるで指数の計算かのようである．これを利用することで複素数の計算は飛躍的に容易になる．

2.1.3　ド・モアブルの定理

極形式の積の計算を累乗に繰り返し使用することで次の公式を得ることができる．

$$\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{2.1}$$

これは極形式によって受ける最大の恩恵である．複素数の計算で指数が現れたら必ずド・モアブルの定理を適応することを考えよう．

2.2　複素数について

かなり遅いタイミングであるが，ここで複素数の性質や扱い方について述べる．

2.2.1　大きさ

複素数の世界では，数の大小関係は存在しない．実数の世界では数直線の右側が大きな数だという理解ができたが，複素数平面ではそのようにはいかない．しかし，大きさというものを全く考えないわけにはいかないので，次で複素数の大きさを定義する．

$$z = x + iy \;\Rightarrow\; |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.2}$$

これは複素数平面上での原点からの距離である．しかし，複素数の大きさは与えたが，複素数に大小関係は存在しない．

2.2.2　偏角

複素平面上に図示した複素数 z と原点とを結ぶ線分と実軸の正方向とのなす角を偏角という．

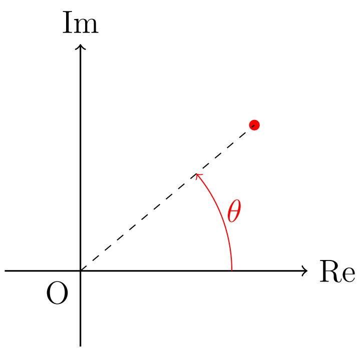

図 2.1　偏角

複素平面においては角度に向きが存在する．反時計回りが正で時計回りが負である．これは何度も繰り返し述べてゆくが，角度に方向があるという理解が複素数の学習には必要だ．

2.2.3　共役な複素数

共役という言葉は高校数学でも何度か出てきたように思う．今までのものと似たようなものである．

複素数 $z = x + iy$ に対して共役な複素数 $\bar{z}$ は次で定義される．

$$\bar{z} = x - iy \tag{2.3}$$

共役な複素数とは虚部を -1 倍したものである．共役な複素数の組の和と積はともに実数になる．また，積は複素数の大きさの 2 乗となっていることに注意しよう．

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2z \\ z \cdot \bar{z} &= x^2 + y^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

極形式で共役な複素数を見てみる．$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とする．

$$\begin{aligned} \bar{z} &= r(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \end{aligned}$$

このように，偏角が -1 倍されている．これを複素数平面で図示すると図 2.2 のようになる．加えて，共役複素数は複素平面上における実軸対称な点ということができる．

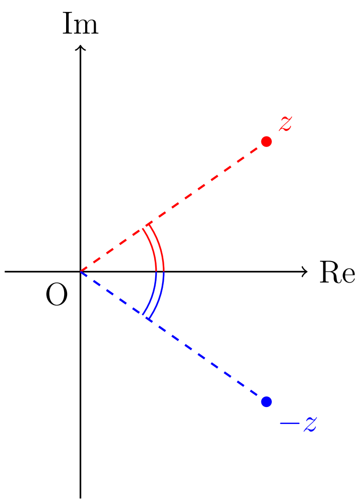

図 2.2　共役複素数

2.2.4　純虚数

実部が 0 である複素数を純虚数という．これは虚数単位 i の実数倍である[*1]．これ以上のことはないのだが，問題を解く上で純虚数という言葉を見たら，実部が 0 になるという条件が与えられていると解釈する必要がある．したがって，語句として覚えておこう．

2.3　本章で扱う問題

本章の内容で扱う問題は以下のものが考えられる．

[*1] 0 は実数ということにする．

- 極形式を利用した複素数の剰余算
- ド・モアブルの定理の利用
- 共役複素数の利用

2.3.1 極形式を利用した複素数の計算

問題

以下を計算せよ．解答の表記は問わない．

1. $(7+7\sqrt{3}i)\times(9+9i)$
2. $(3-3\sqrt{3}i)\div(7\sqrt{3}+7i)$

1 つ目はそのまま計算することも可能な範囲ではあるが 2 つ目は確実に面倒になる問題だ．まず 1 つ目を極形式を利用して計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned}(7+7\sqrt{3}i)\times(9+9i) &= 14\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times 9\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\ &= 14\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\times 9\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &= 126\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

もちろん，普通に計算しても構わない．

$$(7+7\sqrt{3}i)\times(9+9i) = 63\{(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i\}$$

2 つ目は次のようになる．

$$\begin{aligned}(3-3\sqrt{3}i)\div(7\sqrt{3}+7i) &= 6\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\div 14\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{3}{7}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)\\ &= -\frac{3}{7}\end{aligned}$$

意外な結果を得ることができた．極形式を使わない場合は分母と分子の両方に分母の共役複素数かければいい．

2.3.2 ド・モアブルの定理の利用

問題

以下の計算を通して三角関数に関係する計算公式を導出せよ．

1. $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2$
2. $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3$
3. $(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta+i\sin\beta)$

1 つ目の式を文字式として計算するパターンと，ド・モアブルの定理を用いて計算するパターンの 2 つで変形する．

$$
\begin{aligned}
(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2i\cos\alpha\sin\alpha \\
&= \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha \\
\therefore \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin 2\alpha &= 2\cos\alpha\sin\alpha
\end{aligned}
$$

これは倍角公式である．

2 つ目は

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

を利用して計算を進める．

$$
\begin{aligned}
\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha &= \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha - i\sin^3\alpha \\
&= (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha) + i(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha) \\
&= (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) + i(-4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha)
\end{aligned}
$$

これは三倍角の公式である．

最後は結果のみ示すと，

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

が得られる．これは加法定理である．

このように，ド・モアブルの定理から三角関数の公式を導出することができる．