

# 自動制御工学

# 目次

第 1 章	微分方程式とラプラス変換	2
1.1	ラプラス変換の定義	2
1.2	ラプラス変換の計算	4
1.3	$n$ 次式	4
1.4	微分方程式のラプラス変換による開放	6
1.5	逆ラプラス変換の実用的な計算法	7
1.6	ラプラス変換・逆ラプラス変換の主な性質	8
第 2 章	伝達関数	10
2.1	伝達関数	10
2.2	過渡応答と基本的な伝達関数	12
2.3	ブロック線図	17
第 3 章	伝達関数の複合と制御	18
3.1	フィードバック制御系	18
3.2	ラウスの安定判別法	21
3.3	制御系の自由度と簡単なフィードバック制御系	22
3.4	定常偏差が 0 になる条件	25
第 4 章	システム応答と安定性	26
4.1	静止状態応答の主要な構成成分	26
4.2	極と根の補足	28
第 5 章	周波数応答	29
5.1	周波数応答の定義と意味	29
5.2	ベクトル線図	30
5.3	ナイキストの安定判別法	32
5.4	ゲイン余裕・位相余裕	36
5.5	ボード線図	37

# 第 1 章

## 微分方程式とラプラス変換

### 1.1 ラプラス変換の定義

#### 1.1.1 対象の関数

ラプラス変換をおこなう関数は時間の関数であることが大抵で  $f(t)$  と表されている。そして  $f(t)$  は次のような性質を持つ。

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$t$  が負であるときは関数値が 0 となる関数がラプラス変換の対象となる関数だ。この条件は大前提として存在しているので、明示されないことも多い。

あくまでこれは対象とする関数の話で、これで必ずラプラス変換が可能というわけではない。

#### 1.1.2 ラプラス積分

ラプラス積分は次の計算のことだ。この計算が可能な関数であればラプラス変換は可能だ。

$$I(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad s \in \mathbb{C}$$

このときの複素数  $s$  はラプラス積分が可能となるように任意で用意できる。この積分の結果をそのままラプラス変換とすることもできなくはないが、それは正確ではない。次でラプラス変換を正確に示す。

#### 1.1.3 ラプラス変換

次の関数のラプラス変換を考える。

$$f(t) = c \quad c \in \mathbb{R}$$

これはステップ関数という。ラプラス積分は

$$I(s) = \int_0^{\infty} ce^{-st} dt = \frac{c}{s} \quad \operatorname{Re} s > 0$$

これをそのままラプラス変換とするのではなく、解析接続をおこなう。そして結論としてラプラス変換  $F(s)$  は

$$F(s) = \frac{c}{s} \quad s \neq 0$$

となる。

ラプラス変換とは，ラプラス変換して得られた関数をさらに解析接続することで関数を変換する操作だということだ．最終的に得られる関数  $F(s)$  の定義域はラプラス積分できる  $s$  の範囲と異なっている．

#### 1.1.4 逆ラプラス変換

逆ラプラス変換は厳密にいうと次の計算によってなされる．

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{Br} F(s) e^{st} ds \quad (1.1)$$

この計算をブロムウィッチ積分という．積分路の  $Br$  をブロムウィッチ積分路といい，複素平面上では図 1.1 のようにあらわされる．

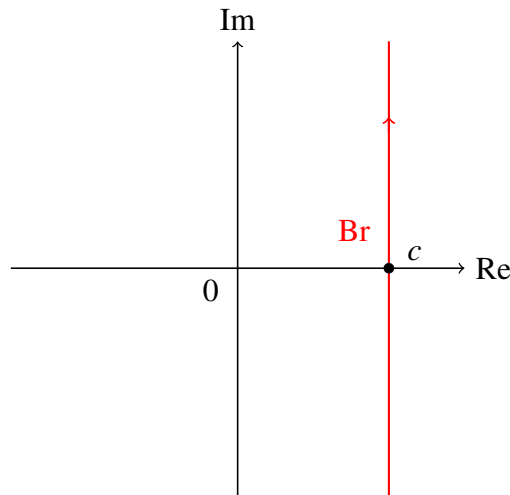


図 1.1 ブロムウィッチ積分路

複素平面上で虚軸と平行な直線で方向は上向きだ．実軸との交点を  $c$  とすると，

$$c \leq \operatorname{Re} s$$

であり， $c$  は  $F(s)$  が正則となるように選ぶ．

このような計算で逆ラプラス変換が可能となる．しかし，これは現実的な方法とは言えない．

#### 1.1.5 線形性

定義の説明も終えたところで，定義からわかる性質をここで示しておく．複数の関数の線形結合に対するラプラス変換には次の計算が成立するのだ．

$$\begin{aligned} a, b &\in \mathbb{R}, \mathbb{C}, \\ \mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] &= a\mathcal{L}[f_1(t)] + b\mathcal{L}[f_2(t)] \end{aligned}$$

これは積分が線形性を持つ計算であることから明らかだ．

関数の積に対しては別の計算法が成立するがこれはのちに扱う．

## 1.2 ラプラス変換の計算

具体的な関数のラプラス変換を扱う。

### 1.2.1 ステップ関数

単純な関数に対してのラプラス変換を紹介する。まずはステップ関数だ。これはすでに紹介していて

$$\begin{aligned} f(t) &= c \quad c \in \mathbb{R}, \\ F(s) &= \frac{c}{s} \quad s \neq 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

となる。

### 1.2.2 指数関数

指数関数は複素数のもので考える。

$$f(t) = e^{pt} \quad p \in \mathbb{C}$$

この関数をフーリエ変換する

$$\begin{aligned} I(s) &= \int_0^\infty e^{pt} e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-p)t} dt = \frac{1}{s-p} \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} p \\ \therefore F(s) &= \frac{1}{s-p} \quad s \neq p \end{aligned} \quad (1.3)$$

フーリエ積分で明らかに  $s \rightarrow s-p$  の置き換えがなされているだけだとわかる。このことは  $e^{pt}$  を含む関数のフーリエ変換が  $s \rightarrow s-p$  の置き換えによって対処できることを表している。

$$\mathcal{L}[e^{pt} f(t)] = F(s-p) \quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

## 1.3 $n$ 次式

順を追って一般化したい。

$$f(t) = t$$

とする。ここからフーリエ積分をおこなう。

$$\begin{aligned} I(s) &= \int_0^\infty t e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty -\frac{\partial}{\partial s} e^{-st} dt \\ &= -\frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

もちろん、普通に部分積分をおこなっても同様の結果を得ることができる。これを繰り返し使うと

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^2] &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[t] \\ \mathcal{L}[t^3] &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[t^2] \\ \mathcal{L}[t^4] &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[t^3] \\ &\vdots\end{aligned}$$

となることがわかる。最終的に次のように結論付けられる。

$$\mathcal{L}[t^k] = \frac{k!}{s^{k+1}} \quad (1.4)$$

さらに、指数関数を加えた  $t^k e^{pt}$  であれば

$$\mathcal{L}[t^k e^{pt}] = \frac{k!}{(s-p)^{k+1}} \quad (1.5)$$

となる。

### 1.3.1 単位インパルス関数

ディラックのデルタ関数のことを言っている。これは計算の結果を覚えればよい。

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (1.6)$$

導出は極限の計算だが、ここで扱わない。

### 1.3.2 三角関数

三角関数は複素関数への拡大をおこなったうえで計算する。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos \beta t] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{j\beta t} + e^{-j\beta t})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-j\beta} + \frac{1}{s+j\beta}\right\} = \frac{s}{s^2 + \beta^2}\end{aligned}$$

同様にして

$$\mathcal{L}[\sin \beta t] = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$$

となる。 $e^{pt}$  倍されたときの処理も同じだ。

### 1.3.3 逆変換

この節で述べてきたラプラス変換は逆方向に見れば逆変換を表している。逆変換をするときはここまでで述べた形に式を変形させることでおこなう。ブロムウィッチ積分は現実的な方法ではないと述べたのはそのためだ。

ラプラス変換と逆ラプラス変換とを使いこなせるようになると、受ける恩恵が大きい。次節でラプラス変換の利用について述べる。

## 1.4 微分方程式のラプラス変換による開放

### 1.4.1 微分された関数のラプラス変換

関数  $f(t)$  のラプラス変換を  $F(s)$  とする．すると  $f'(t)$  のラプラス変換は次のようにあらわすことができる．

$$\mathcal{L}[f'(t)] = -f(+0) + sF(s) \quad (1.7)$$

この関係を繰り返し使うことでさらに次の関係を得る．

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \{s^{n-1}f(+0) + s^{n-2}f'(+0) + \cdots f^{(n-1)}(+0)\} \quad (1.8)$$

これは微分を  $s$  をかけるという操作に置き換えているといえる．逆に積分は次の関係が成立する．

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s) \quad (1.9)$$

積分と微分はラプラス変換後においては  $s$  で割るか<sup>\*1</sup>，かけるかに変換されることがわかる．

### 1.4.2 微分方程式の解法

具体的に次の微分方程式をラプラス変換を利用して解く．

$$x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 2 \quad x(0) = -3, x'(0) = 5$$

関数  $x(t)$  のラプラス変換を  $X(s)$  とする．微分方程式の両辺をラプラス変換しても等式は崩れない．両辺のラプラス変換を実行すると

$$(s^2X(s) + 3s - 5) - (sX(s) + 3) - 2X(s) = \frac{2}{s}$$

となる．微分方程式が 1 次方程式となっていることがわかるだろうか．ラプラス変換と逆ラプラス変換を利用することで微分方程式は 1 次方程式に変換できるので． $X$  について解くと

$$X(s) = \frac{-3s^2 + 8s + 2}{(s^2 - s + 2)s}$$

となる．あとは逆変換だ．まずは三角関数の逆変換を疑うべきだが，分母が因数分解できることに注目しよう．この場合は部分分数分解を実行する．

$$X(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-2} - \frac{3}{s+1}$$

を得る．逆変換ができる形になったので解を導く．

$$x = -1 + e^{2t} - 3e^{-t}$$

今まで学んだ方法で微分方程式を解いて結果が一致するかの確認は各自に任せる．このような解放が利用できるのは初期条件が初期条件が与えられているタイプの微分方程式だ．また，ラプラス変換が可能な関数に解があることも条件となるだろう．

条件さえ満たせばラプラス変換を利用した微分方程式の解法は効果的だ．ただし問題となるのは逆ラプラス変換である．逆変換ができるか否かが微分方程式を解くことができるかにかかってくる．

---

<sup>\*1</sup> 初期値の分のずれを考える必要がある．

## 1.5 逆ラプラス変換の実用的な計算法

### 1.5.1 強プロパーな関数

ある関数をラプラス変換したものを  $F(s)$  とする。微分方程式においては次のように表現することができるだろう。

$$F(s) = \frac{N(s)}{M(s)}$$

そして、このような形の関数になったとき、 $M(s)$  の次数が  $N(s)$  の次数より大きい\*2。そのような関数を強プロパーな関数という。

### 1.5.2 部分分数分解

$F(s)$  を前にしたら、初めに分母の因数分解をおこなう。各因数の次数が 2 以下となれば、そこから部分分数分解を試みる。これによって分解された  $F(s)$  はすでに紹介してある初等関数のラプラス変換を参考に逆ラプラス変換ができる。

したがって、逆ラプラス変換ができるかは、部分分数分解ができるかという話に変換される。ここからは具体的な例で話を進める。

$$F(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{(s+1)(s+3)(s+5)}$$

この関数の部分分数分解を考える。

$$F(s) = \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+3)} + \frac{A_3}{(s+5)}$$

となる。こうすると  $A_1$  の導出は簡単ではないだろうか。

$$A_1 = (s+1)F(s)|_{s=-1}$$

である。要は分母を払って、極となる  $s$  の値を代入すればいいのだ。他の  $A_2, A_3$  も同様の計算で容易に算出できる。この例では  $F(s)$  が一位の極しか持っていない。他の  $A_2, A_3$  も同様の計算で容易に算出できる。この例では  $F(s)$  が一位の極しか持っていない。

次の例は二位の極を持っている場合を考える。計算をするというだけでは高校数学と大差ないが、問題なのはそれを素早く完了させることだ。

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s-2)}$$

まずは先と同じようにゴールの形を作る。

$$F(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{s-2}$$

$A_2, A_3$  に関しては、先の同じように分母をなくしてから代入するという方法で容易に計算できる。多少の計算を要するのは  $A_1$  だ。

$A_1$  には微分を利用する。

$$(s+1)^2 F(s) = A_1(s+1) + A_2 + \frac{A_3}{s-2}(s+1)^2$$

---

\*2 必ずというわけではない。しかし、強プロパーな関数でなければ逆ラプラス変換はできないので考える必要は今のところない。



この両辺を  $s$  で微分する．すると次のようになる．

$$\{(s+1)^2 F(s)\}' = A_1 + \left\{ \frac{A_3}{s-2} \right\}' \cdot (s+1)^2 + \frac{A_3}{s-2} \cdot 2(s+1)$$

$s = -1$  を代入することで  $A_1$  を得ることができる．

$$A_1 = \{(s+1)^2 F(s)\}'|_{s=-1}$$

これ以上の位数の極ではどのような方法でも面倒な計算となるだろう．

## 1.6 ラプラス変換・逆ラプラス変換の主な性質

### 1.6.1 初期値公式・最終値公式

元の関数  $f(t)$  の初期値，最終値はラプラス変換  $F(s)$  から計算することができる．

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} f(t) &= \lim_{x \rightarrow \infty} xF(x) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) &= \lim_{x \rightarrow +0} xF(x) \end{aligned}$$

ここでの  $x$  は実数だ．

### 1.6.2 時間軸方向に平行移動された関数

ラプラス変換が可能な関数  $F(t)$  に対して次のように関数  $h(t)$  を定義する．

$$h(t) := \begin{cases} 0, & (t < L) \\ f(t-L), & (t \geq L) \end{cases} \quad L \geq 0$$

これは図 1.2 のように関数を時間軸方向に平行移動させた状態だ．

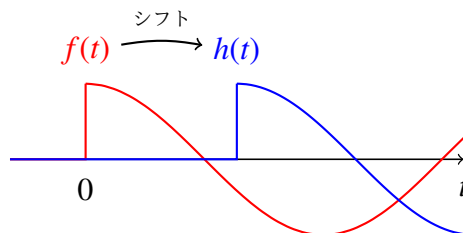


図 1.2 時間軸シフト

$h(t)$  をラプラス変換すると次のようになる．

$$\mathcal{L}[h(t)] = e^{-Ls} \mathcal{L}[f(t)] \quad (1.10)$$

この公式は極めて有効だ．これと，ラプラス変換の線形性を合わせて利用すると次のような関数が容易にラプラス変換できる．

図 1.3 の時間関数を式としてあらわすと

$$f(t) = \begin{cases} 1, & (0 \leq t \leq T) \\ 0, & (t > T) \end{cases}$$

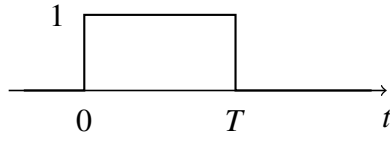


図 1.3 矩形パルス

となる．これを 2 つのステップ関数の和として考えることができる．

$$\begin{aligned} g(t) &= 1 \\ h(t) &= \begin{cases} 0, & (t < T) \\ -1, & (t \geq T) \end{cases} \\ f(t) &= g(t) + h(t) \end{aligned}$$

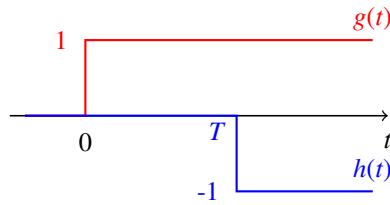


図 1.4 矩形波の分解

$h(t)$  はステップ関数を  $T$  だけ平行移動させているものとわかる．これらによって  $f(t)$  のラプラス変換を実行する．

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[g(t)] + \mathcal{L}[h(t)] \\ &= \frac{1}{s} - e^{-Ts} \frac{1}{s} \end{aligned}$$

図 1.5 のような 1 つだけの三角波のような波形でも同様の計算が可能だ．

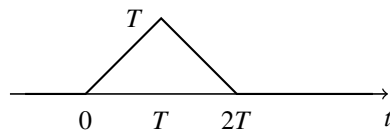


図 1.5 三角パルス波

これは 3 つの関数に分解して考えることができる．図はその 3 つを表したものだ．すべてランプ関数によってあらわすことができている．ここから容易にラプラス変換がなされる．

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2} - 2e^{-Ts} \frac{1}{s^2} + 2e^{-2Ts} \frac{1}{s^2}$$

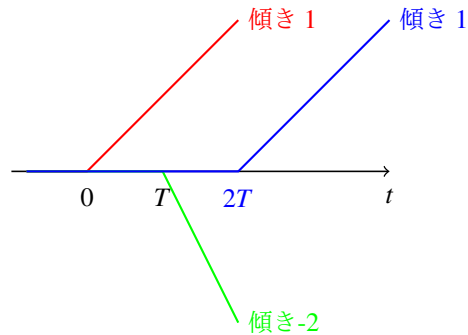


図 1.6 三角波の分解

### 1.6.3 畳み込み積分

電気電子数学で扱った内容なので公式のみを示す.

$$\mathcal{L}[f * g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)] \quad (1.11)$$

$$\mathcal{L}[f(t) \cdot g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] * \mathcal{L}[g(t)] \quad (1.12)$$

ラプラス変換では畳み込みが単純な積に変換されるのだ. これを利用して畳み込み積分を回避したりなどする.

## 第 2 章

# 伝達関数

原因があり, 結果が出てくるという哲学のような話を厳密な計算のもとおこなう. 前章で扱ったラプラス変換とそこから出てくる複素関数が話の根幹となる.

## 2.1 伝達関数

### 2.1.1 システムと伝達関数

一般に図 2.1 のように原因となる入力をシステムに対して送り, そのシステムの作用によって結果となる出力が出てくる.

出力というものはその時点での入力だけではなく, 過去の入力に依存しているものも多い. これを正しく把握しなければならない.

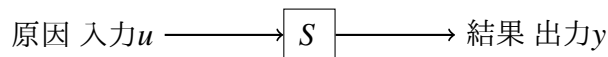


図 2.1 システムの概念図

この入力と出力の関係の把握の結実が伝達関数だ。何らかの入力  $u(t)$  に対して何らかの出力  $y(t)$  を考えるとき、それらのラプラス変換  $U(s), Y(s)$  の関係を

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

として、つなぐ  $G(s)$  を伝達関数という。

### 2.1.2 直流モーターによる例

図 2.2 のような直流モーターを例に伝達関数の理解を深める。

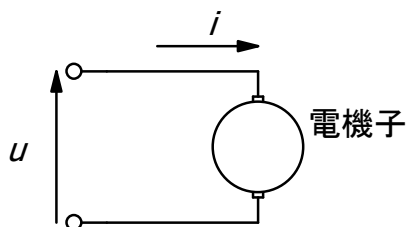


図 2.2 直流モーター

入力電圧を  $u(t)$  とする。これが今回のシステムの入力だ。これに対して出力をモーターの回転角  $y(t)$  とする。まずはこれらに関係をつなぐ式を探したい。

まず電流とコイル、抵抗の関係を表す。

$$u(t) = Ri(t) + v(t)$$

$R$  はもちろん抵抗だ。ここで現れる  $v(t)$  は逆起電力だ。これはコイルの回転によって電磁誘導で生まれる起電力だ。

逆起電力はコイルの角振動数と比例の関係がある。

$$v(t) = K_2 \omega(t) \quad (K_2 : \text{定数})$$

コイルの回転の力強さ、つまりはトルクは流れる電流量<sup>\*1</sup>で決定する。

$$q(t) = K_1 i(t) \quad K_1 : \text{定数}$$

最後にコイルの回転を力学から眺め運動方程式を立てる。ここでコイルには  $M$  の重さがあるとする。

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + F \frac{dy}{dt} = q(t)$$

という式が立つ。 $F$  はコイル回転時の摩擦力だ。

<sup>\*1</sup> コイルの回転は流れる電流に加わるローレンツ力であったことは高校物理の範囲。

これらの式を完全な停止状態<sup>\*2</sup>という初期条件を与え、ラプラス変換する。

$$\begin{aligned}U(s) &= RI(s) + V(s) \\V(s) &= K_2\Omega(s) \\Q(s) &= K_1I(s) \\sY(s) &= \Omega(s) \\Ms^2Y(s) + FsY(s) &= Q(s)\end{aligned}$$

これらを代数的に解くことで  $U(s), Y(s)$  の関係が次のように得られる。

$$Y(s) = \frac{K}{s(1 + Ts)}U(s) \quad \left( T = \frac{MR}{FR + K_1K_2}, \quad K = \frac{K_1}{FR + K_1K_2} \right)$$

これで伝達関数が求められた<sup>\*3</sup>。

ちなみにモーターと聞いて興味のある回転速度を表す角振動数は

$$\Omega(s) = \frac{K}{1 + Ts}U(s)$$

と、このように与えられる。

## 2.2 過渡応答と基本的な伝達関数

伝達関数の応答の安定性と、伝達関数の基本的な要素を扱う。

### 2.2.1 過渡応答と安定性

伝達関数がラプラス変換された入出力の関数  $U(s), Y(s)$  の関係を表すものであることがわかった。

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

これはラプラス変換されているものなので、逆変換を実行することで元の関数を手に入れることを考える。

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[G(s)Y(s)] \\&= y * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)y(\tau)d\tau\end{aligned}$$

この  $g(t)$  を取り出すことができれば、実際の信号をシステムの実情を理解したことになる。

これを実現するのは入力をデルタ関数としたときだ。デルタ関数としての入力はインパルスと呼ばれ、入力をインパルスとしたときの出力 (応答) を特別にインパルス応答という。

$$y_{\text{impulse}} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)\delta(\tau)d\tau = g(t)$$

からもインパルス応答が伝達関数を逆変換したものだとわかる。教科書では先にインパルス応答を紹介し、それが伝達関数の逆変換であると定義していた。

---

<sup>\*2</sup>  $y(0) = 0, y'(0) = 0$  という条件だ。

<sup>\*3</sup> 自然なように見えて無理やりな形になってることに気づくだろうか。伝達関数は、その形自体にシステムの特性を秘めている。のちにその意味についても扱う。

伝達関数の逆変換  $g(t)$  が得られたことにより、任意の入力  $u(t)$  に対する応答  $y(t)$  は次の畳み込み積分で計算される。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

この式の意味するところは、入力を無数のインパルスの集合とみなし、その時間の異なる無数のインパルスによる応答をすべて足し合わせているということだ。

インパルス応答のほかにも初期値を 0 としたうえで単位ステップ関数となる信号を与えたときの応答を特別にステップ応答という。

$$y_{\text{step}} = \mathcal{L}^{-1} \left[ G(s) \cdot \frac{1}{s} \right]$$

安定な伝達関数はこのステップ応答が  $t \rightarrow \infty$  で  $G(0)$  の値に収束する。これが伝達関数の安定性を確認する 1 つの方法だ。そして、比較に用いられる  $G(0)$  をシステムの定常ゲインという。

## 2.2.2 伝達関数の安定

伝達関数  $G(s)$  が安定であるということは以下の 4 つの内容のそれぞれと同値関係にある。

- $G(s)$  の極すべてにおいて、その実部が負である。実部が負である極を安定極という。
- 入力がある界であるとき、出力も有界である。
- $t \rightarrow \infty$  のとき、インパルス応答は  $g(t) \rightarrow 0$ 。
- $t \rightarrow \infty$  のとき、ステップ応答は一定値となり、それは  $G(0)$  と等しくなる。

## 2.2.3 比例要素 (ゲイン要素)

$$G(s) = K \quad : \text{定数}$$

伝達関数が定数であるとき、比例要素という。このような伝達関数を持つ機構の例として挙げられるのは歯車やポテンショメータだ。

## 2.2.4 積分要素 (積分器)

$$G(s) = \frac{c}{s} = \frac{1}{Ts}$$

このような形の伝達関数を積分要素 (積分器) という。数式としては後者の書き方が好まれる。ステップ応答は  $t/T$  となる (図 2.3)。

すると  $T$  の意味が少しわかる。これを積分時間という。具体的な例としては図 2.4 の回路が挙げられる。キャパシタは電荷の蓄積をするが、積分に相当する。

入力電流を  $u(t)$  とすると出力電圧  $y(t)$  は

$$u(t) = \frac{d}{dt} C y(t)$$

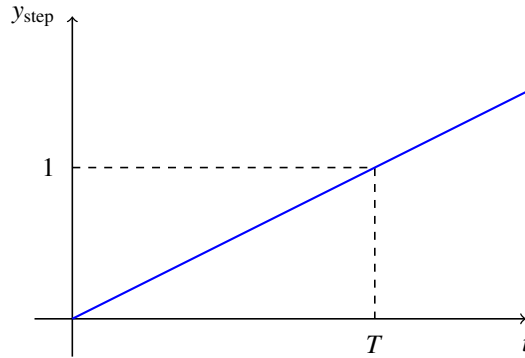


図 2.3 積分要素のステップ応答

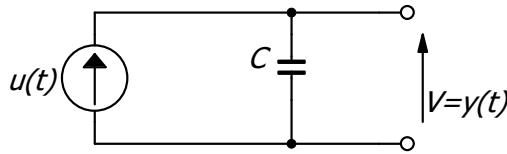


図 2.4 積分器の例

と表すことができる．完全な静止状態と同じような<sup>\*4</sup>初期条件を与えるとラプラス変換することで次の式を得ることができる．

$$U(s) = sCY(s)$$

これを  $Y(s)$  で解くことで

$$Y(s) = \frac{1}{Cs} U(s)$$

を得る．

## 2.2.5 一次遅れ要素

$$G(s) = \frac{c}{s+a} = \frac{K}{1+Ts}, \quad a > 0, T > 0, K > 0$$

このような形の伝達関数を一次遅れ要素という．ここでも後者の書き方が好まれる． $T$  を時定数という．ステップ応答を計算してみる．

$$Y_{\text{step}}(s) = \frac{K}{(1+Ts)s} = \frac{K}{s} + \frac{K}{1/T + s}$$

$$\therefore y_{\text{step}}(t) = K(1 - e^{-t/T})$$

これを図示すると図 2.5 のようになる．ここから時定数  $T$  の図形的な意味が分かるだろう．

具体的に挙げられる例は図のような抵抗と容量を並列に設置した回路だ．入力電流を  $u(t)$ ，出力電圧を  $y(t)$  とすると，入出力特性は

$$Y(s) = \frac{R}{1 + sCR}$$

<sup>\*4</sup> 出力  $y(t)$  の初期条件として  $y(0) = y'(0) = 0$  を与えるということ．

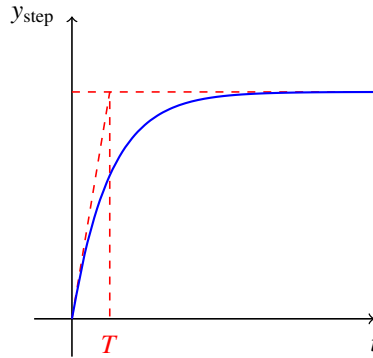


図 2.5 1 次遅れ要素のステップ応答

となる。

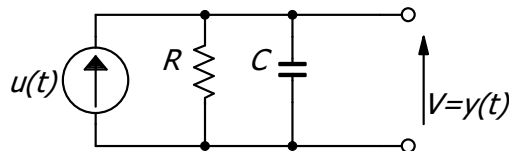


図 2.6 1 次遅れ要素の例

## 2.2.6 二次遅れ要素

$$G(s) = \frac{c}{s^2 + as + b} = \frac{K}{1 + 2\zeta Ts + (Ts)^2} = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

このような形に表される伝達関数を二次遅れ要素という。ζ は減衰定数と呼ばれる。

ステップ応答に対して最終値公式を適用すると

$$y_{\text{step}} \rightarrow K \quad t \rightarrow \infty$$

となることがわかる。

減衰定数によってステップ応答は大きく変化する。ζ > 1 ならば伝達関数 G(s) は異なる 2 つの実数解をもつことになる。そして t > 1 で強意の単調増加をする。

ζ = 1 ならば伝達関数は 2 位の極を 1 つもつことになる。このときも t > 1 であればステップ応答は強意の単調増加をする。

最後に ζ < 1 であれば伝達関数は 2 つの複素極を持つことになる。この場合、ステップ応答は振動をしながら K に収束する。これを図示すると図 2.7 のようになる。

これは、まっすぐに K に収束しなければならない応答\*5が K を通り過ぎてしまっているととらえる。このような応答を行き過ぎ量といったりする。

ζ ≥ 1 では振動しないステップ応答を見せるため非振動的な二次遅れと呼ばれ、ζ < 1 では振動的な二次遅れという。

\*5 ζ ≥ 1 のときはステップ応答は 0 から K へと漸近するグラフとなり、通り過ぎることはない。



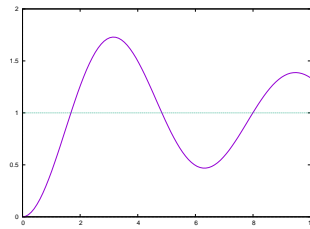


図 2.7 振動的な 2 次遅れ要素のステップ応答

図 2.7 に示した通り，行き過ぎる量は徐々に減少するが，その減少を減衰比という．そして行き過ぎが発生する時間を行き過ぎ時間  $T_p$  といい，

$$T_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} T$$

で計算される．

例としては図 2.8 の回路が挙げられる．

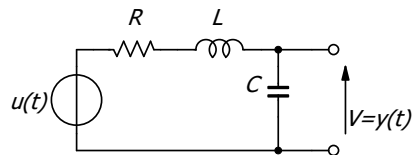


図 2.8 2 次遅れ要素の例

入力電圧を  $u(t)$ ，出力電圧を  $y(t)$  とすると伝達関数は次で与えられる．

$$G(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s^2 LC + sCR + 1}$$

また，図 2.9 のような回路も伝達関数は二次遅れ要素となる．

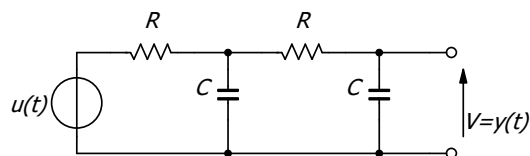


図 2.9 2 次遅れ要素の例

$$G(s) = \frac{1}{s^2 C^2 R^2 + 3sCR + 1}$$

回路に対する伝達関数をいくつか書くとその導出は覚えられるのではないか．回路の定常状態をフェーザで考える場合，インダクタンスを  $j\omega L$ ，キャパシタンスを  $1/j\omega C$  して，抵抗のように計算する．この  $j\omega$  を  $s$  とすれば伝達関数が導出できる\*6．

\*6 これは，正確ではない．電流，電圧の微分が 0 なるという条件が必要となる．ただ，たいいてい場合はこの条件を満たしているの  
で容易に伝達関数を求めることができる．

### 2.2.7 むだ時間要素

入力信号を時間  $L > 0$  だけ遅らせた信号を出力とする信号を  $y(t)$  とする.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < L \\ u(t-L), & t \geq L \end{cases}$$

これは時間軸方向に平行移動された関数のラプラス変換の性質を利用することで伝達関数を得ることができる.

$$Y(s) = e^{-Ls}U(s)$$

むだ時間という表現は慣習的なものなので覚えておけばいい.

### 2.2.8 伝達関数の縦続接続

一般的に伝達関数は図 2.10 のような概念図で合わせるように複数の伝達関数の集合体としてみるができる.

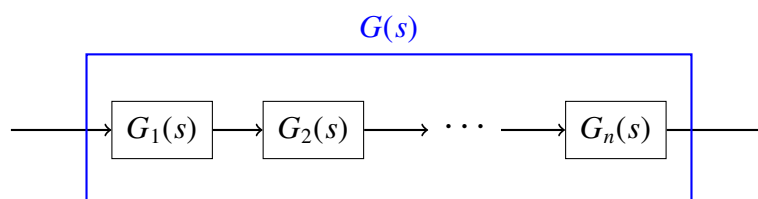


図 2.10 縦続接続の概念図

このようなとき, 全体の伝達関数  $G(s)$  は次のように計算される.

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdots G_N(s)$$

このように表される状態を縦続結合という. そして因数となっている  $G_i(s)$  たちに比例要素や積分器のような性質が備わっているのだ.

つまりは伝達関数は様々な要素の積という形として存在する. これは, モーターの伝達関数からも確認できる.

## 2.3 ブロック線図

図 2.10 から縦続接続されている個々の伝達関数の積によって全体の伝達関数を与えられることを述べた. 伝達関数を持つ機構同士の接続の関係を体系的に表すことができたなら, 先の例のように全体の伝達関数を与えることができる.

伝達関数をもつ機構同士の関係を伝達関数をどのように計算し合えばよいのかという観点からまとめたものがブロック線図だ.

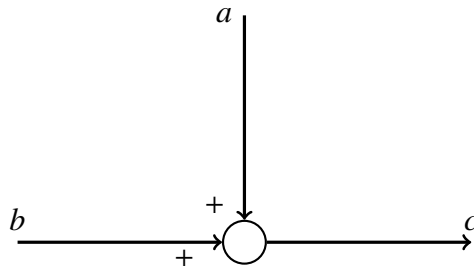


図 2.11 加え合わせ点

### 2.3.1 ブロック線図の規則

**加え合わせ点** 加え合わせ点は以下の図 2.11 のようにあらわされる． $a + b = c$  を示している．

**引き出し点** 引き出し点は以下の図 2.12 のようにあらわされる． $a = b = c$  であり， $a$  から分岐していることを示している．

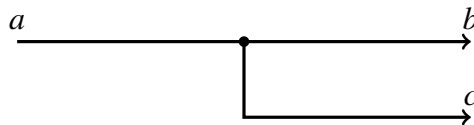


図 2.12 引き出し点

実はこの 2 点を抑えることでブロック線図を理解することができる．また教科書 P.57 にブロック線図の書き換えに関する説明があるが，ここで説明はしない．

## 第 3 章

# 伝達関数の複合と制御

### 3.1 フィードバック制御系

#### 3.1.1 フィードバック制御系の構造

まず，基本となるブロック線図を以下の図 3.1 で示す．

図 3.1 の構造を詳しく見る． $C_r, C$  によって構成されている目標値  $r$  と検出信号  $w$  から操作信号  $u$  を出力する部分を制御器と呼ぶ．この部分は装置を作る我々が伝達関数を設計する部分だ．これに対して  $P, P_d$  を制御

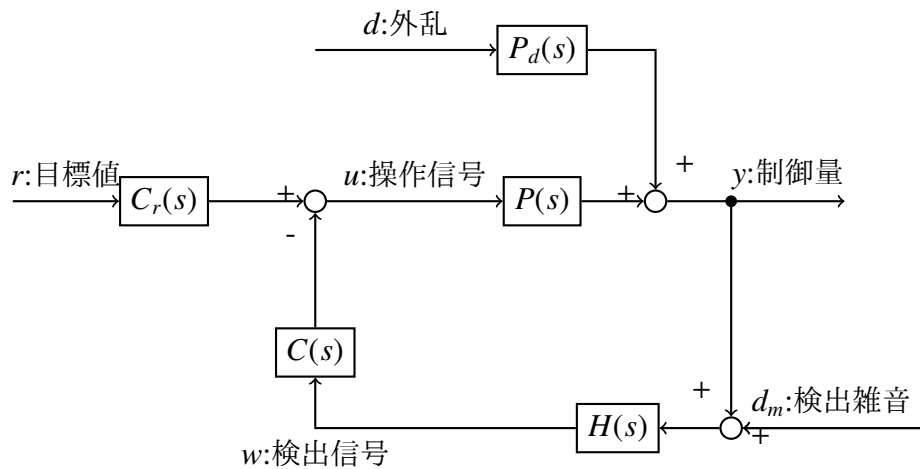


図 3.1 一般的な制御系

対象という．この部分はモータであったり，エアコンであったり，さまざまなものである．この部分の伝達関数を適切に評価することで制御器の伝達関数を決定する．最後に制御量と検出雑音を入力に検出信号を出力する部分を検出器という．モータにおける速度計，エアコンにおける温度計だ．目標値に対してのずれを正しくすることで操作信号に反映する．

このような構造がフィードバック制御系の基本形だ．基本形ではあるが，制御部にはもう 1 種類の別の構造がある．目標値，検出信号，操作信号の出力はそのままに図 3.2 のようになる構造を考えることができる．このような構造において， $C_f(s)$  を通る経路をフィードフォワードパスと呼ぶ．

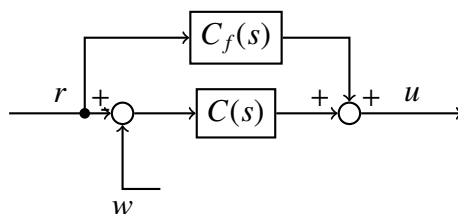


図 3.2 フィードフォワードパス

伝達関数の計算上では大きな変化はない．また，

$$C_f(s) + C(s) = C_r(s)$$

であれば 2 種の制御系は等価である．

### 3.1.2 伝達関数の導出

入力から出力までの伝達関数の求め方を説明する．入力や出力は必要に応じて任意で決めなければならない．大抵は  $y$  であるが，そのほかに興味が向くこともある．入力は  $r, d$  などいろいろとる．

手順としては，最初にループができないように入力と出力をつなぎ，その経路で現れる伝達関数の積を得る．この積は経路ごとにとり，複数経路があれば和をとる．これを  $G_1(s)$  とする．次にループ部分の経路を確

認し、ループ 1 週で現れる伝達関数の積を  $G_2(s)$  とする。このとき、ループの端の加え合わせ点が加算なのか減算なのかを確認する。そうすると、全体の伝達関数  $G(s)$  は次のように与えられる。

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_2(s)}$$

符号は加え合わせ点の符号を逆にしたものになる。

この話を用語を用いて繰り返す。まず還送比というものを導入する。これは閉ループ 1 週で現れる伝達関数の積だ。還送比を用いて次は還送差を与える。これは単に還送比に 1 を加えたものになる。これは閉ループが減算によって 1 周しているからだ。ここから全体の伝達関数の分母が還送差であることがわかる。そして分子は先に述べたように入力と出力を直接結ぶ経路に現れる伝達関数の積となっている。

最後に具体的に図 3.1 より、入力を  $r$ 、出力を  $y$  とした伝達関数  $G_{yr}(s)$  を与える。まずは還送差の計算だ。

$$(\text{還送差}) = 1 + P(s)H(s)C(s)$$

次に直接の経路を考える。

$$(\text{直接の経路}) = C_r(s)P(s)$$

これより

$$G_{yr} = \frac{C_r(s)P(s)}{1 + P(s)H(s)C(s)}$$

このようになる。

### 3.1.3 フィードバック制御系の安定性

伝達関数が安定とは、伝達関数の極の実部が負であるとすでに述べている。ここから、制御系が安定とは制御系で与えられるすべての閉ループ伝達関数が安定であることができる。しかし、これはかなり使い勝手の悪い条件だ。そこで、具体的に制御系が安定となる条件を 4 つ与える。

1. 外乱がないならば、目標値  $r$  がステップ関数であるときの  $y, u, w$  が一定値に収束する。
2. 外乱がないならば、 $y, u, w$  も有界である。
3. 外乱がないならば、 $y, u, w$  は  $r$  にのみに依存する。
4. 初期値およびインパルス状外乱の影響は一定時間の間でのみ現れる。

数学的に考えるときは、やはり伝達関数の極に注目するしかない。すべての伝達関数の分母は還送差に 1 を加えたもので一致しているので、単一の議論ですべての伝達関数の安定を示すことができると予想できる。ここで部分的な伝達関数を以下のように分数関数としてあらわす。

$$P(s) = \frac{B_P(s)}{A_P(s)}, \quad P_d(s) = \frac{B_d(s)}{A_P(s)}, \quad H(s) = \frac{B_H(s)}{A_H(s)}, \quad C(s) = \frac{B_C(s)}{A_C(s)}, \quad C_r(s) = \frac{B_r(s)}{A_C(s)}$$

これらの条件としては

$$\{A_P(s), B_P(s), B_d(s)\}, \quad \{A_C(s), B_C(s), B_r(s)\}$$

2 つの関数の組のそれぞれで共通の因数がないようにすることだ。要は極力単純な形にすることだ。

このように部分的な伝達関数を分数関数として表現することで、すべての閉ループ伝達関数は

$$\frac{\text{多項式}}{\Phi(s)}, \quad \Phi(s) = A_P(s)A_C(s)A_H(s) + B_P(s)B_C(s)B_H(s)$$

となる。この  $\Phi$  を特性多項式という。また、この方程式の根を特性根 (閉ループ根) と呼ぶ。安定性に関してはいくつかの安定判別法が存在する。次節でその 1 つであるラウスの安定判別法を説明する。

### 3.1.4 定常偏差

安定の判別の前に偏差について扱う。偏差  $e(t)$  は次のように与えられる。

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

これをラプラス変換したものは

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

となる。

ここで外乱や検出誤差を考えた  $Y(s)$  を以下に示す。

$$Y(s) = G_{yr}(s)R(s) + G_{yd}D(s) + G_{ydm}D_m(s)$$

これを偏差の式に代入すると

$$E(s) = \{1 - G_{yr}(s)\}R(s) - G_{yd}D(s) - G_{ydm}D_m(s)$$

となる。ここまでくると偏差のラプラス変換はブロック線図が与えられれば求められる状態になった。この式の中でも特別に目標値からの伝達関数を

$$G_{er}(s) = 1 - G_{yr}(s)$$

としておく。のちに使う。

定常偏差とは無限時間が経過したときの偏差ということになるがラプラス変換を知ることができたら、最終値公式から計算ができる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow +0} sE(s)$$

## 3.2 ラウスの安定判別法

閉ループ伝達関数の根が特性方程式から与えられることがわかった。ここから制御系の安定性を特性方程式の根の実部から確認できる状態となった。これを実行する方法がラウスの安定判別法だ。これは複素多項式の根の実部がすべて負なのか否かを判定する方法だ。

まず、対象とする関数を以下で定義する。

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s a_0, \quad a_k > 0, (k = 0, 1, \cdots, n)$$

係数に条件がある。これは根がすべて負であるということの必要条件がすべての符号が同符号だからだ。

そして判定法はラウス表と呼ばれる表の作成によって実現される。ラウス表とは多項式の係数と、その係数の計算によって与えられた数を並べたものだ。以下の手順で作成する。

1. 第 1 行目を  $a_n, a_{n-2}, a_{n-4}, \cdots$  とする。
2. 第 2 行目を  $a_{n-1}, a_{n-3}, a_{n-5}, \cdots$  とする。
3. 第  $k$  行目が  $x_m, x_{m-1}, \cdots, x_1$  という長さであったとき、第  $k+1$  行目は適宜 0 を補うことで  $y_m, y_{m-1}, \cdots, y_1$  とみる。

4. 第  $k+2$  行は  $z_{m-1}, z_{m-2}, \dots, z_1$  となり

$$z_{m-i} = -\frac{1}{y_m} \begin{vmatrix} x_m & x_{m-i} \\ y_m & y_{m-i} \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

で  $z_{m-i}$  は与えられる.

5. 一次的に第  $k+1$  行目に 0 を補った場合は以降の操作で 0 を省く.

6. 3. から 5. の操作を実行できなくなるまで繰り返す. ラウス表が完成したとき, 最下の 2 行は要素が 1 つしか含まない状態となる. このとき, 特性方程式の次数を  $n$  とするとラウス表は  $n+1$  行までできていれば完成である.

ラウス表の作成で注意すべきは最後まで実行が完了しているかということだ. 最後の 2 行の要素数が 2 つとなっていることの確認を怠ってはいけない.

ラウス表が完成したら, 第 1 列の要素を確認する. これらがすべて正であるとき, 対象の関数  $A(s)$  の持つ根の実部がすべて負であると結論付けられる. これにより制御系の安定性を確認することができる.

### 3.3 制御系の自由度と簡単なフィードバック制御系

少し現実に近づいた話に入る.

#### 3.3.1 制御系の自由度と単位フィードバック

問題とするのは図 3.3 のような制御系だ. このような制御系で  $C_f(s) = 0$  を考えると,  $C(s)$  によってすべての閉ループ伝達関数が決定する. その場合, 1 自由度制御系という.  $C_f(s)$  が 0 ではない値をとる場合は目標値  $r$  からの閉ループ伝達関数が変化する. その場合は 2 自由度制御系という.

図 3.3 の中では  $H(s)$  も操作できる伝達関数であるといえるが, これは好き勝手にするものではなく, 理想的には  $H(s) = 1, d_m = 1$  を目指すものである. 以降の話ではこの検出器の部分の部分は理想的な状態であるとして進める.

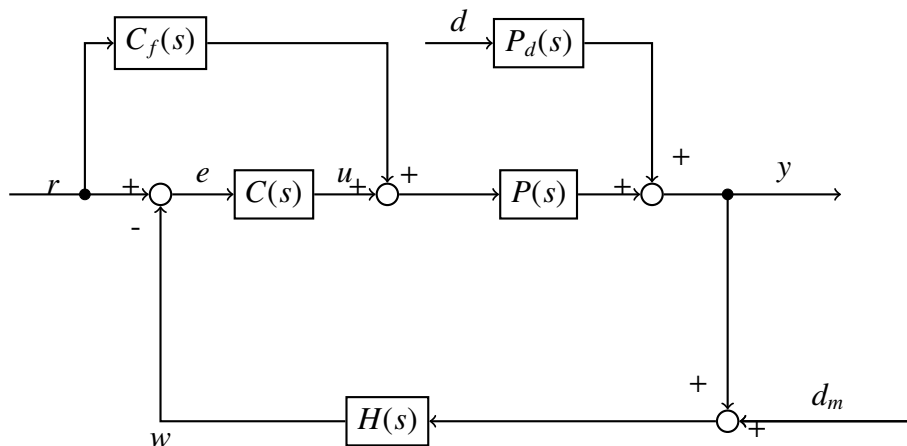


図 3.3 問題とする制御系

### 3.3.2 比例制御

最も基本的なフィードバック制御の考え方だ。操作信号を偏差の定数倍として制御する方法である。

$$u(t) = Ke(t)$$

これを実現するのは

$$C(s) = K, \quad C_f = 0$$

の場合で、これは 1 自由度制御系である。外乱のないような状態であれば目標値から偏差への伝達関数は

$$G_{er} = \frac{1}{1 + KP(s)}$$

となる。偏差のラプラス変換は

$$E(s) = \frac{1}{1 + KP(s)} \cdot R(s)$$

で与えられる。ここで目標値をステップ関数であるとして、目標値に対する定常偏差を計算する。

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_{r, \text{step}} &= \lim_{s \rightarrow 0} G_{er}(s) \frac{1}{s} \cdot s \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1 + KP(0)}, & P(s) \text{ に積分器を含んでいない場合} \\ 0, & P(s) \text{ に積分器を含んでいる場合} \end{cases} \end{aligned}$$

一般には定常偏差がなくなることがわかる。ここで  $C_f(s) = K_f$  として 2 自由度の制御系として定常偏差を再度考える。

$$G_{er} = \frac{1 - K_f P(s)}{1 - KP(s)}$$

伝達関数がこのようになるので、 $P(s)$  が積分器を持たない場合の定常偏差は

$$\varepsilon_{r, \text{step}} = \frac{1 - K_f P(0)}{1 - KP(0)}$$

となる。ここから

$$K_f = \frac{1}{P(0)}$$

である場合に定常偏差を 0 にすることができることがわかる。

制御部が単純な定数であっても十分に偏差を小さくすることができるのだ。

### 3.3.3 制御対象が一次遅れ要素のときの 2 自由度比例制御

先は比例制御を用いて一般の制御対象  $P(s)$  を考えた。ここからは  $P(s)$  自体に注目しながら比例制御を運用してゆく。

本項では一次遅れ要素の比例制御を考える。

$$P(s) = \frac{K_p}{1 + T_p s}, \quad K_p > 0, \quad T_p > 0$$



目標値のほか，外乱の影響<sup>\*1</sup>も考慮する． $C(s) = K, C_f(s) = K_f$  として伝達関数を示す<sup>\*2</sup>．

$$G_{yr}(s) = \frac{K'}{1 + T's}, \quad G_{yd} = \frac{K''}{1 + T's}$$

$$T' = \frac{1}{KK_p + 1}, \quad K' = \frac{(K + K_f)K_p}{KK_p + 1}, \quad K'' = \frac{K_p}{KK_p + 1}$$

伝達関数も一次遅れ要素の形になった．ここからステップ応答を考える．一次遅れ要素のステップ応答は図 2.5 の形となることを参考にすると次のことがわかる．

- $K$  を大きくすると  $T'$  が小さくなり，目標値応答が早くなる (速応性)．
- $K$  を大きくすると  $K''$  が小さくなる．すなわち，外乱の影響を抑制できる．
- $K$  を大きくすると  $K'$  が 1 に収束する．これは制御量が目標量に収束することを示している．

### 3.3.4 モデル化誤差

現実の現象を伝達関数に表現したときに，そのモデル化に誤りがある場合は定常偏差が小さくならないなどの影響が出る．これをモデル化誤差という<sup>\*3</sup>．

$$P_t(s) = P(s)(1 + \delta) = \frac{K_p(1 + \delta)}{1 + T_p s}$$

### 3.3.5 制御対象が“一次遅れ + 積分”のときの 1 自由度比例制御

制御対象の伝達関数が

$$P(s) = \frac{K_p}{s(1 + T_p s)}$$

である場合を考える．制御対象に積分器が含まれているので， $C_f(s) = 0$  が最もよい．このときの目標値，外乱から制御量への伝達関数は次の通りとなる．

$$G_{yr}(s) = \frac{K'}{1 + 2\xi T's + (T's)^2}, \quad G_{yd}(s) = \frac{K''}{1 + 2\xi T's + (T's)^2}$$

$$K' = 1, \quad K'' = \frac{1}{K}, \quad T' = \left(\frac{T_p}{KK_p}\right)^{1/2}, \quad \xi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{KK_p T_p}\right)^{1/2}$$

伝達関数は二次応答要素の形となった．ここからわかることを以下に示す．

- $K$  を大きくすると  $T'$  が小さくなり，速応性が向上する．
- $K$  を大きくすると  $K''$  が小さくなる．すなわち，外乱の影響を抑制できる．
- $K$  がある程度の値であると， $\xi \geq 1$  となり非振動的応答となる．
- $K$  が非常に大きいと， $\xi < 1$  となり振動的応答となる．この部分は制御対象が一次遅れ要素のみのときには現れなかった性質である．

<sup>\*1</sup>  $P_d(s) = P(s)$  として考えている．

<sup>\*2</sup> ここでは偏差ではなく，制御量に対する伝達関数である．

<sup>\*3</sup> 詳しくは教科書を各自で読むように．単純に式を計算すればわかる．

- $K' = 1$  のため、ステップ目標値に対する定常偏差が 0 になる。モデル化誤差があっても、 $P_I(s)$  に積分器があれば、やはり定常偏差は 0 となる。

外乱の影響は小さくはできるが 0 ではない。ステップ外乱に対する定常偏差は

$$\varepsilon_{d,\text{step}} = -\frac{1}{K}$$

となる。

## 3.4 定常偏差が 0 になる条件

### 3.4.1 厳密な条件

定常偏差が 0 になる条件を一般的に与えたい。偏差のラプラス変換を計算する<sup>\*4</sup>と次のようになる。

$$E(s) = \frac{1 - P(s)C_f(s)}{1 + P(s)C(s)}R(s) - \frac{-P_d(s)}{1 + P(s)C(s)}D(s)$$

制御系は安定であると仮定して、ステップ目標値、ステップ外乱に対する定常偏差を計算する。

$$\varepsilon_{r,\text{step}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - P(s)C_f(s)}{1 + P(s)C(s)}, \quad \varepsilon_{d,\text{step}} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - P_d(s)}{1 + P(s)C(s)}$$

分母に共通している  $P(s)C(s)$  の部分に積分器があると定常偏差が 0 に収束しそうであることはわかる。ただ、これは厳密ではないのでさらに計算を進める。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r,\text{step}} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{P(s)C(s)} - \frac{C_f(s)}{C(s)}}{\frac{1}{P(s)C(s)} + 1} \\ \varepsilon_{d,\text{step}} &= -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{P_d(s)}{P(s)} \cdot \frac{1}{C(s)}}{\frac{1}{P(s)C(s)} + 1} \end{aligned}$$

この計算結果から  $C(s)$  に積分器が含まれていれば

$$\varepsilon_{r,\text{step}} = \varepsilon_{d,\text{step}} = 0$$

となる。厳密には  $C(s)$  が  $s = 0$  で発散するということが大事だ。すると、その逆数は 0 に収束し、これが定常偏差を収束させている。

ただし、条件がいくつかある。

$$P(0) \neq 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{C_f(s)}{C(s)} = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P_d(s)}{P(s)} \neq \infty$$

1 つ目の式の示すところ制御対象の定常ゲインが 0 でないことだが、これは当然成立している内容だ。これを満たさない制御対象はそもそも制御を考えることができない。

2 つ目の式は制御部の条件になってる。我々はこの式を満たすように  $C(s), C_f(s)$  を設計しなければならない。

<sup>\*4</sup> 一次遅れを扱うときは  $P_d(s) = P(s)$  としたが、ここでは一般の  $P_d(s)$  で計算している。

最後の 3 つ目の式は  $P_d(s)$  の持つ積分器の数は  $P(s)$  の持つ積分器の数以下であるという条件だ。実はこれもほとんどの場合で自明だ。これは外乱の発生を考えるとわかる。 $P(s)$  がさらに部分的な伝達関数を合わせてできているとすると次の式を立てることができる。

$$P(s) = P_1(s) \cdot P_2(s) \cdots$$

これをブロック線図であらわすと図 3.4 のようになるが、外乱というのは、この部分的な  $P_i(s)$  の接続の部分から侵入する。したがって、外乱は部分的な  $P(s)$  を通るということになる。それゆえ 3 つ目の式も明らかであるということだ。

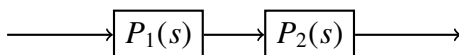


図 3.4  $P(s)$  の構成

### 3.4.2 具体的な制御部

条件を満たす制御部を考えると次のようになる。

$$C(s) = \frac{K}{s}, \quad C_f(s) = -K\alpha$$

$C(s)$  に積分器が含まれている。そのほかにも、よく用いられるのが

$$C(s) = K \left( 1 + \frac{1}{Ts} \right), \quad C_f(s) = -K\alpha$$

というものがある。この形は特別に比例積分制御という。ここでも積分器の要素がある。

以上のように、積分器を  $C(s)$  に持たせることで定常偏差を 0 にする手法を積分補償と呼ぶ。積分補償によって外乱によらず定常偏差を 0 とすることができる。

## 第 4 章

# システム応答と安定性

### 4.1 静止状態応答の主要な構成成分

制御量のラプラス変換を目標値と伝達関数で表現すると以下ようになる。これを逆ラプラス変換することを考えると、右辺の部分分数分解を考えることになる。

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

部分分数分解によって現れる項はその項の持つ極<sup>\*1</sup>によって以下の分類ができる。

1.  $G(s), U(s)$  の両方が持つ極に関する項.
2.  $G(s)$  のみが持つ極に関する項.
3.  $U(s)$  のみが持つ極に関する項.

1 つ目の項を”広義の共振成分”，2 つ目を”システム固有成分”，3 つ目を”入力固有成分”と呼ぶ。

#### 4.1.1 過渡応答の一般式

$G(s)$  の持つ極とその位数を  $p_i, r_i, (i = 1, \dots, N)$ ,  $U(s)$  の持つ極とその位数を  $\pi_i, \rho_i, (i = 1, \dots, \nu)$  とする。このうち、 $G(s), U(s)$  で共通する極は  $p_i, \pi_i, (i = 1, \dots, L)$  とする。

ここまで来たら、 $Y(s)$  の部分分数分解に対して、各項の極に注目しながら逆ラプラス変換を実行する。ある極  $p$  に対してその位数が  $r$  であった場合、その極に関する項の逆ラプラス変換は

$$(c_1 + c_2 t + \dots + c_r t^{r-1}) e^{pt}$$

という形であらわすことができる。これを用いて、広義の共振成分のモード<sup>\*2</sup>を計算する。 $G(s)$  での位数と  $U(s)$  での位数は合わせて考える必要があることに注意する。

$$(c_1 + c_2 t + \dots + c_{r_i+r_i} t^{r_i+r_i-1}) e^{p_i t}, \quad (i = 1, \dots, L)$$

続けて、システム固有成分のモードを示す。

$$(c_1 + c_2 t + \dots + c_{r_i} t^{r_i-1}) e^{p_i t}, \quad (i = L+1, \dots, N)$$

最後は入力固有成分だ。

$$(c_1 + c_2 t + \dots + c_{\rho_i} t^{\rho_i-1}) e^{\pi_i t}, \quad (i = L+1, \dots, \nu)$$

これで極によって分けて応答を考えることができるようになった。

#### 4.1.2 モードと定常応答・過渡応答

根 1 つ 1 つに対するモードが計算できたことから極に注目することで容易に定常応答を求めることができるようになった。安定根  $p$  である場合、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^k e^{pt} \rightarrow 0$$

であることから、定常応答に現れるのは不安定極によるモードのみであるとわかる。特に、伝達関数  $G(s)$  が安定であれば、定常応答は入力固有成分のうち不安定極によるものであるとわかる。

<sup>\*1</sup> ここで考えている右辺は必ず強プロパーは関数となっている。

<sup>\*2</sup> 新たな語句である。ある極に関する項の逆ラプラス変換をモードと呼ぶ。

## 4.2 極と根の補足

### 4.2.1 支配極

$G(s)$  が安定であるとする。  $G(s)$  の極を実部と虚部に分け  $-\alpha_i + j\beta_i$  表すことにすると、ステップ応答に含まれる応答は

$$G(0), \quad t^{k_i-1} e^{\alpha_i t} \times \begin{cases} \cos \beta_i t \\ \sin \beta_i t \end{cases}$$

となる。定数または減衰項となるわけだが  $\alpha_i$  の値で減衰の速度が変わる。中でも最も減衰が遅い、すなわち  $\alpha_i$  が最も小さいものを支配極という。

支配極の応答が過渡応答の中でも最も時刻の遅いところまで残る。そこで過渡現象を考えるとときに全ての不安定極ではなく支配極を考える方がよい場合も考えられる。

### 4.2.2 根軌跡と安定限界

制御系の安定性は今のところ特性方程式に対してラウスの安定判別法を利用する。このほかの安定判別法はのちに述べるが、その時に注目するのは還送差である。閉ループ伝達関数  $F(s) = P(s)C(s)$  に 1 を加えたものであるがこれが 0 となるときの根がすべて安定であれば、制御系は安定であるという手法だ。これに関しては条件が与えられる。

とにかく、還送差に注目し制御系の安定性を議論する方法が存在することを前提とする。このときの特性方程式は還送差そのものとなり

$$\Psi(s) = 1 + F(s)$$

となる。これを本項における特性方程式とする。

比例制御において制御部の定数  $K$  を 0 から  $\infty$  に変化させたときの特性根の軌跡を根軌跡という。根軌跡の作成は厳密には任意の  $K$  に対して特性方程式を解くことが必要となるが、概形であれば以下のポイントを抑えることで容易に作図できる。ここでは制御対象  $P(s)$  の分母多項式の次数が  $n$  で、 $P(s)$  の相対次数<sup>\*3</sup>が  $d$  の伝達関数を考える。すると、根は  $p_1, p_2, \dots, p_n$  となり、零点は  $z_1, \dots, z_{n-d}$  となる。零点に関しては位数が 2 以上の場合重複させて数えている。さらに  $P(s)$  の分子多項式の  $s^{n-d}$  の係数は正の実数となるようにする。

1. 根軌跡は  $n$  本の分枝からなり、実軸に対して対称。
2. 根軌跡は  $p_1, p_2, \dots, p_n$  から始まる。
3.  $K \rightarrow \infty$  のとき、 $n-d$  本の根軌跡は  $z_1, \dots, z_{n-d}$  に収束し、そのほかは無有限遠点に発散する。発散する分子は実軸上の点

$$s_0 = \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{k=1}^{n-d} z_k \right)$$

を通り、実軸と次の角をなす。

$$\theta_i = \frac{(2i+1)\pi}{d}, \quad i = 0, 1, \dots, d-1$$

<sup>\*3</sup> 分母と分子の次数の差を相対次数という。(相対次数) = (分母の次数) - (分子の次数)

4. 実軸上において、点  $s$  の右側にある  $P(s)$  の極及び零点の個数が奇数であれば、 $s$  は根軌跡上の点であるといえる。
5. 根軌跡が実軸から分枝する点  $s_i$  において次の式が成立する。

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{P(s)} \right]_{s=s_i} = 0$$

根軌跡が与えられると、いかなる  $K$  の範囲で制御系が安定性するのかがわかる。これによって安定限界というものを与えることができる。名前の通り不安定な根が初めて生まれるときの  $K$  の値のことだ。しかし、安定限界を根軌跡から求めることはあまり得策ではない。これ以上はのちの章で述べる。

## 第 5 章

# 周波数応答

本章では制御系が安定であることを前提に話を進める。

### 5.1 周波数応答の定義と意味

操作信号  $u(t)$  が複素正弦波であることを考える。

$$u(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

すると、制御信号のラプラス変換を  $U(s)$  とすると、

$$U(s) = \frac{1}{s - j\omega}$$

となる。ここで、制御対象が安定であると、

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

における不安定極は  $U(s)$  の極のみであることがわかる。すると定常の出力は入力固有成分のみに注目すれば良いことがわかり、今の条件では

$$y(t) = ce^{j\omega t}$$

と表すことができる。また、係数  $c$  に関しても計算は容易だ。不安定極の位数は 1 であり、逆ラプラス変換する際の係数計算<sup>\*1</sup>をすればいいので

$$c = Y(s) \cdot (s - j\omega)|_{s=j\omega} = G(j\omega)$$

---

<sup>\*1</sup> 逆ラプラス変換する際に部分分数分解を使う手法を紹介した。そのことを言っている。

と計算される。

入力が複素正弦波ではなく，正弦波  $u(t) = \cos \omega t$  である場合はこれまでの計算の結果のうち，実数部分を取り出せばよいので，

$$y(t) = |G(j\omega)| \cos(\omega + \angle G(j\omega))$$

が入力固有成分となり，定常応答となる。

## 5.2 ベクトル線図

### 5.2.1 具体的な制御系に対するベクトル線図

周波数応答を角周波数でプロットした複素平面上での軌跡をベクトル線図という。ここで考える周波数応答は振幅 1 で角周波数  $\omega$  が変化する複素正弦波に対するものである。作図の方法は簡単で伝達関数  $G(s)$  に  $s = j\omega$  を代入して，それをそのまま複素平面上に示せばいい。実部と虚部を分けて計算するのがよい。

実際にいくつかの制御系に対してベクトル線図を与える。まずは 1 次遅れ系を考える。

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K}{1 + Ts} \\ G(j\omega) &= \frac{K}{1 + jT\omega} \\ &= \frac{K}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{KT\omega}{1 + T^2\omega^2} \end{aligned}$$

計算の結果を図示すると図 5.1 のようになる。ベクトル線図は角周波数が 0 以上のみで考えることもあるが，ここでは全実数で考えている。角周波数が負の部分と正の部分で描かれるベクトル線図は実軸対象になるので，半分描けば残りの半分は自明となる。

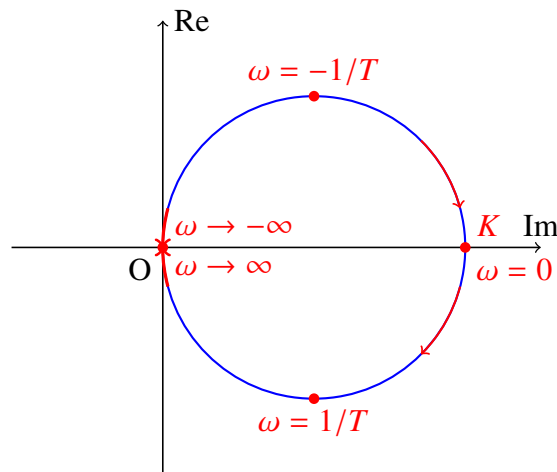


図 5.1 1 次遅れ系のベクトル線図

もう 1 つ例を挙げる。積分器である。

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s} \\ G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega} \end{aligned}$$

ベクトル線図は図 5.2 のようになる。

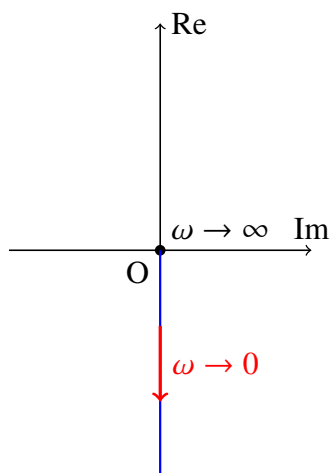


図 5.2 積分器のベクトル線図

### 5.2.2 一般のベクトル線図の書き方

簡単な伝達関数を持つ制御系であればベクトル線図は計算によって厳密に作図することができる。しかし、一般の伝達関数では実部と虚部に分けて計算することが困難な場合が多い。さらに、ベクトル線図にはそこまでの厳密さが必要というわけではない。そこでベクトル線図の概形を書くための手法を述べたい。そこで、まずは前提となる伝達関数の条件をいかに示す。これは伝達関数がたいてい満たしている条件であり、かつ満たしていない伝達関数を考えることは、本項においてない。

- $s = 0$  以外の不安定極はない。
- 不安定零点はない。
- 相対次数は正である。

この条件を満たしている伝達関数に対してベクトル線図の概形は次で作図される。

- 0 の右側極限
  - 積分器があれば定常ゲイン
  - 積分器があれば、その個数  $n$  によって 0 の右側極限は  $-n\pi/2$  の方向で発散
- 極限は  $-d\pi/2$  の方向から原点に収束

書き方があっているのかを積分器と 1 次遅れ要素を足した伝達関数のベクトル線図から確認してみる。

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + Ts)}$$

$$G(j\omega) = -\frac{KT}{1 + \omega^2 T^2} - j\frac{K}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

これを図示すると図 5.3 のようになる。ここから書き方が正しいことが確認される。



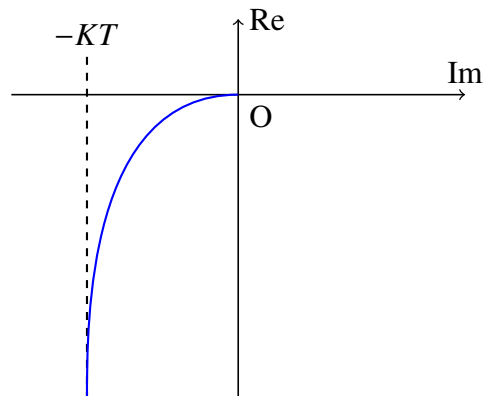


図 5.3 積分器 +1 次遅れ要素

## 5.3 ナイキストの安定判別法

制御系の安定性を議論する方法として、分数多項式として伝達関数の各部分を眺めて導いた特性方程式に対して、ラウスの安定判別法を利用するものをすでに述べた。本節では、一巡伝達関数に注目して、そこから安定性を議論するナイキストの安定判別法について述べる。

### 5.3.1 ナイキストの安定判別法とは

還送比 (一巡伝達関数) を  $F(s)$  とすると、一般の制御系では

$$F(s) = P(s)C(s)H(s)$$

となる。ここで  $F$  の分母分子で<sup>\*2</sup>不安定因子の相殺<sup>\*3</sup>が起こらないならば以下の方程式の根の実部が負であることが制御系安定の必要十分条件である。

$$F(s) + 1 = 0$$

ナイキストの安定判別法を使うには”不安定因子の～”という条件が課されている。ここで重要なのは、この条件を満たさない場合、安定判別法が使えないのではなく、制御系が安定ではないということである。つまり、ナイキストの安定判別法を使えない状態はすでに不安定であるという結論が得られているということだ。

### 5.3.2 ナイキストの安定判別法の方針

ナイキストの安定判別法の手法は計算ではない。  $F(s) + 1 = 0$  の根を考えているのではラウスの安定判別法と変わらない。ナイキストの安定判別法ではベクトル線図を拡張した図形のナイキスト軌跡の形から安定の判別をおこなう。

ナイキスト経路の作成方法をまずは習得する。

<sup>\*2</sup>  $P, C, H$  を分数多項式として、その積が  $F$  と考えている。

<sup>\*3</sup>  $P$  にあった不安定極が  $C, H$  の分子の多項式によって約分され消えること。

### 5.3.3 ナイキスト経路

ナイキスト軌跡はナイキスト経路を一巡伝達関数で写すことで得られる複素平面上での図形である。そこでまずはナイキスト経路というものを扱う。ナイキスト経路は図 5.4 であらわされる経路である。 $R$  は十分大きな実数である。ナイキスト軌跡はベクトル線図を拡張したようなものと述べたが、一般には閉路ではないベクトル線図を閉路にするという拡張である。ナイキスト経路の虚軸の部分は  $j\omega$  の値の動きを表し、そこに加えられた大きな半円がベクトル線図を閉路にする部分となる。

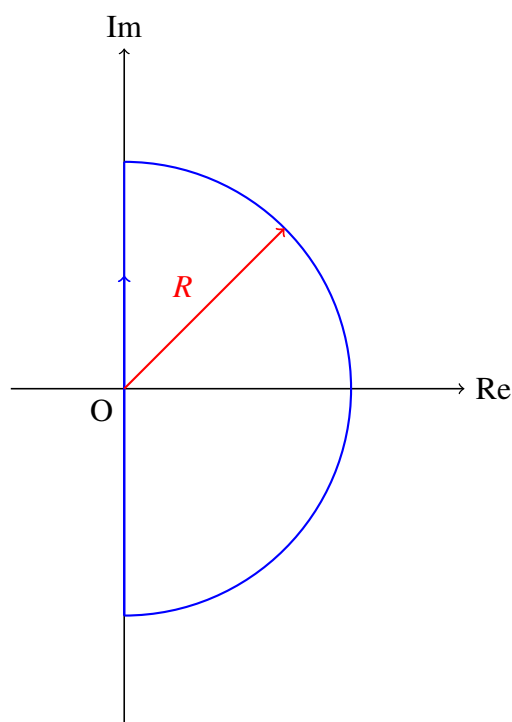


図 5.4 ナイキスト経路

この経路を伝達関数  $F$  で写すとナイキスト軌跡を得ることができる。しかし、 $F$  に虚軸上の極が存在するとき、ナイキスト軌跡を考えることができない<sup>\*4</sup>。その場合は、極を交わすように図 5.5 のような経路をナイキスト経路とする<sup>\*5</sup>。

### 5.3.4 ナイキスト軌跡の作図

発散のないナイキスト軌跡はベクトル線図を  $-\infty < \omega < \infty$  の範囲で作成することで得られる。これはナイキスト経路で加えられた半径  $R$  の半円の部分がほとんど 0 に収束することからわかることだ。したがって、1 次遅れのナイキスト軌跡は図 5.1 そのものであることがわかる。

<sup>\*4</sup> 発散して図形に閉路にならない。

<sup>\*5</sup> 極をナイキスト経路の外にするようにかわす手法もある。ここでは、虚軸上の極に対してはすべて、ナイキスト経路の内部に極を含むように経路を選択する。

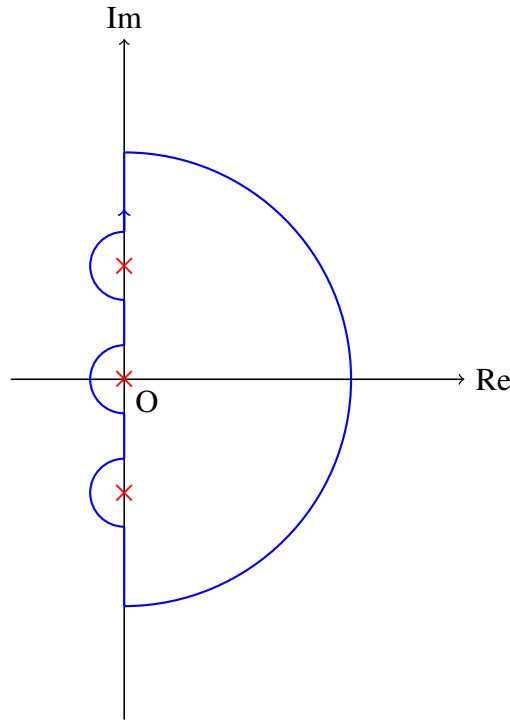


図 5.5 ナイキスト経路 2

問題なのは、ベクトル線図で発散のあるものだ。これはナイキスト経路として図 5.5 のものを選択する場合であるといえることができ、この場合でのナイキスト軌跡の作図は面倒である。例として積分器 +1 次遅れ要素が伝達関数のナイキスト軌跡を考える。

まずはベクトル線図を実軸対象に裏返すことで実数全体でのベクトル線図を得る。

積分器 +1 次遅れ要素の伝達関数は虚軸上において原点でのみ極を持つ。したがって、ナイキスト経路はその部分をかわすようになる\*6。原点付近のナイキスト経路を式に表すと次のようになる。

$$s = \varepsilon e^{j\theta} \quad \varepsilon \ll 1, \quad \theta : \frac{3\pi}{2} \rightarrow \pi \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

これを代入して軌跡を考える。

$$z = \frac{K}{s(1 + Ts)} = \frac{K\varepsilon e^{j\theta}}{\varepsilon e^{j\theta}(1 + T\varepsilon e^{j\theta})} \quad (5.1)$$

$$= \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta} + T\varepsilon^2 e^{2j\theta}} \quad (5.2)$$

$$\simeq \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}} \quad (\text{微小量の 2 乗は無視}) \quad (5.3)$$

$$= \frac{K}{\varepsilon} \cdot e^{-j\theta} \quad -\theta : \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi \rightarrow \frac{3\pi}{2} \quad (5.4)$$

計算の結果、極をかわしている部分のナイキスト経路により描かれる軌跡は  $\pi/2$  から  $\pi$  となり、 $3\pi/2$  とな

\*6 図 5.5 の原点付近の様子と同じになっている。

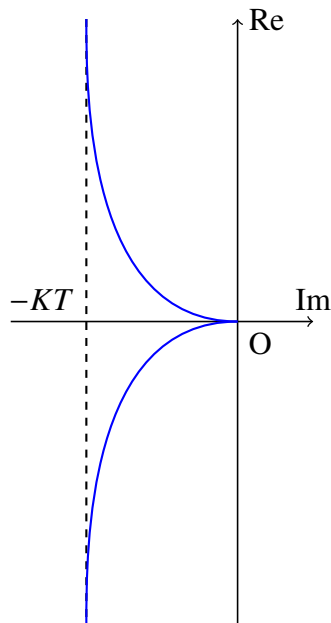


図 5.6 積分器 +1 次遅れ要素のナイキスト軌跡 1

るまでの半円であることがわかる．さらに，その半径  $K/\varepsilon$  は極めて大きい\*7．これらからナイキスト軌跡は図 5.7 であると結論付けられる．

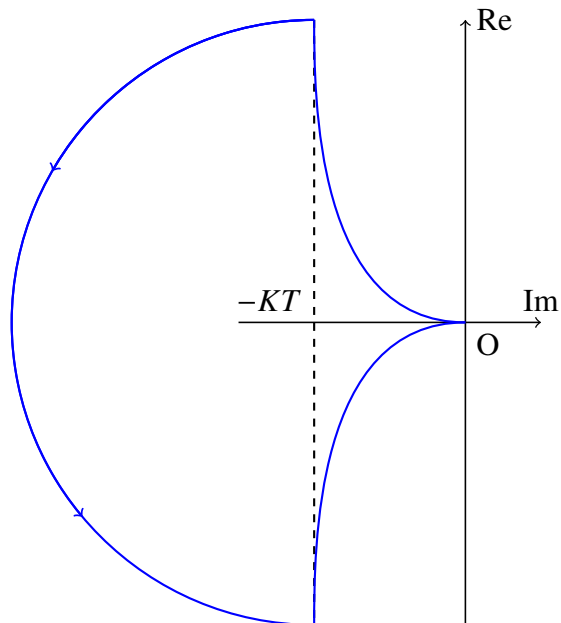


図 5.7 積分器 +1 次遅れ要素のナイキスト軌跡 2

\*7  $\varepsilon$  は微小量．

### 5.3.5 安定判別

ナイキスト軌跡を作図できるようになれば、最後は安定判別である。次の方法で安定判別がなされる。

ナイキストの安定判別法

ある制御系に対して、その一巡伝達関数  $F(s)$  がナイキストの安定判別法を使う条件を満たすならば、以下は同値。

1. 制御系は安定
2. ナイキスト経路の内部にある  $F$  の極の数と、ナイキスト軌跡が点  $(-1,0)$  を反時計回りに回る回数が同じ

図 5.6, 図 5.7 から積分器 +1 次遅れ要素の制御系の安定性を考える。ナイキスト経路の内部にある極の個数は図 5.6 から 1 個であることがわかる。さらに図 5.7 から複素平面上の点  $(-1,0)$  を反時計回り回る回数は 1 回であることがわかるので、制御系は安定であることが結論付けられる。

## 5.4 ゲイン余裕・位相余裕

ナイキストの安定判別法ではナイキスト軌跡が点  $(-1,0)$  を何回回るのかという図形的な条件から安定の判別をおこなっている。ナイキスト軌跡が多少変化しても  $(-1,0)$  を回る回数に変化が起こるわけではない。どれだけの変化が起こっても安定でいられるのかというものをゲイン余裕・位相余裕として評価し、制御系の安定性が特定の条件のみなのか、多少の誤差を許すのか<sup>\*8</sup>を議論することができる。

### 5.4.1 ゲイン余裕

比例制御を考えた場合、制御部の  $K$  がどのような範囲に収まれば制御系が安定であるかはゲイン余裕というもので考える。ここで発想として重要なのは、ナイキスト軌跡は  $K$  が変化することによって、形はそのままに大きさだけが変わるということである。当然ではあるが、奇跡のすべての点において、原点からの距離がかわるので、軌跡は相似形のまま大きくなったり、小さくなったりする。

図 5.8 における  $1/\alpha$  の値と 1 との大小関係で制御系の安定性が決定する。この例では、ナイキスト経路の内部に極がない状態を考えている<sup>\*9</sup>ので、制御器の  $K$  が  $\alpha$  倍されると制御系が不安定になる。

### 5.4.2 位相余裕

位相余裕はナイキスト軌跡に対して半径 1 の円を描き、位相がいくらずれても制御系が安定なのかを考えたものだ。赤い線と実軸の負の方向とのなす角が位相余裕となる。

<sup>\*8</sup> 制御対象の伝達関数は考えているものと実際のものが違うことがある。これはモデル化誤差ともいうが、この誤差があった場合に直ちに安定性に変化があるのか、それとも多少のモデル化誤差には関係なく安定なのかということは関心の対象となる。

<sup>\*9</sup> 定常ゲインが存在している。

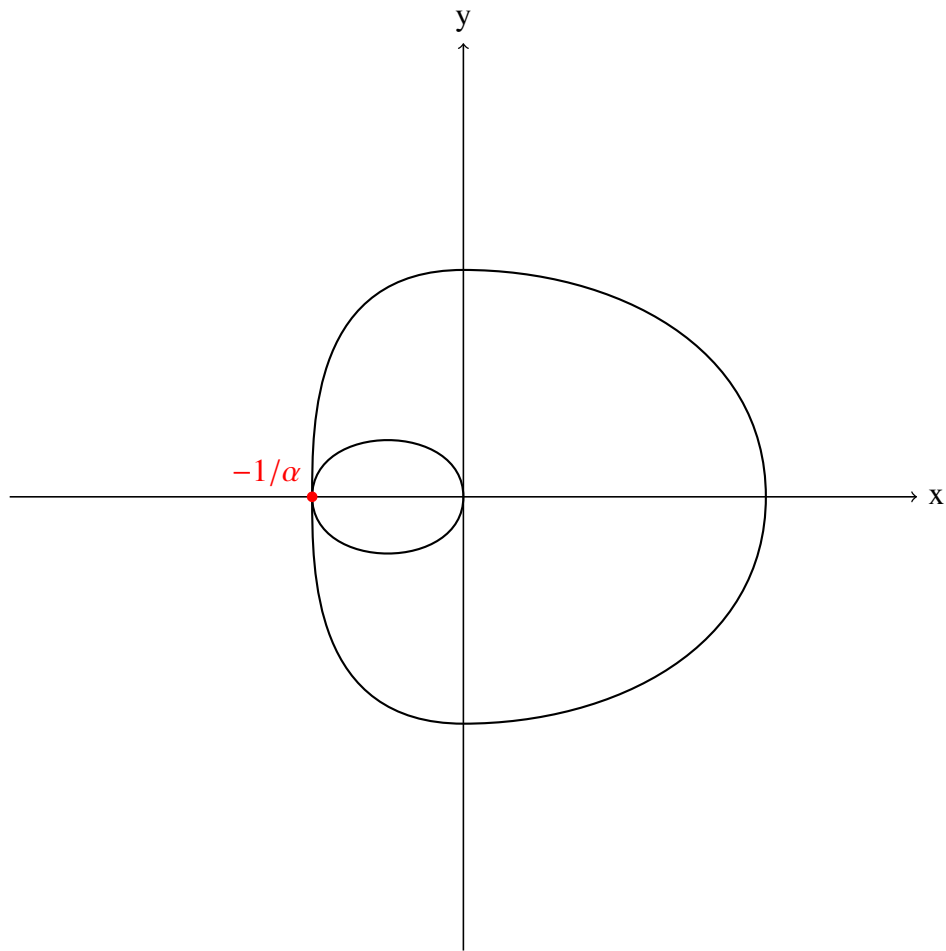


図 5.8 ゲイン余裕

## 5.5 ボード線図

ボード線図とは伝達関数の周波数応答をその絶対値と位相に分けて、それぞれ片対数グラフにプロットしたものである。基本的に説明することはこれ以上ない。

作成の手順としては漸近線を書いてからという話ではあるがこれ以上の説明は面倒である。加えて述べるならば、複数の伝達関数の積としての伝達関数のボード線図を考えると、この伝達関数のボード線図を作成した後、それらを足し合わせることで全体のボード線図を得られるという事柄がある。

複雑な伝達関数の場合は、ナイキスト軌跡やベクトル線図をいきなり作成することは困難となる。そのような場合においては、先にボード線図を作成し、それを手掛かりにベクトル線図を作成したりする。

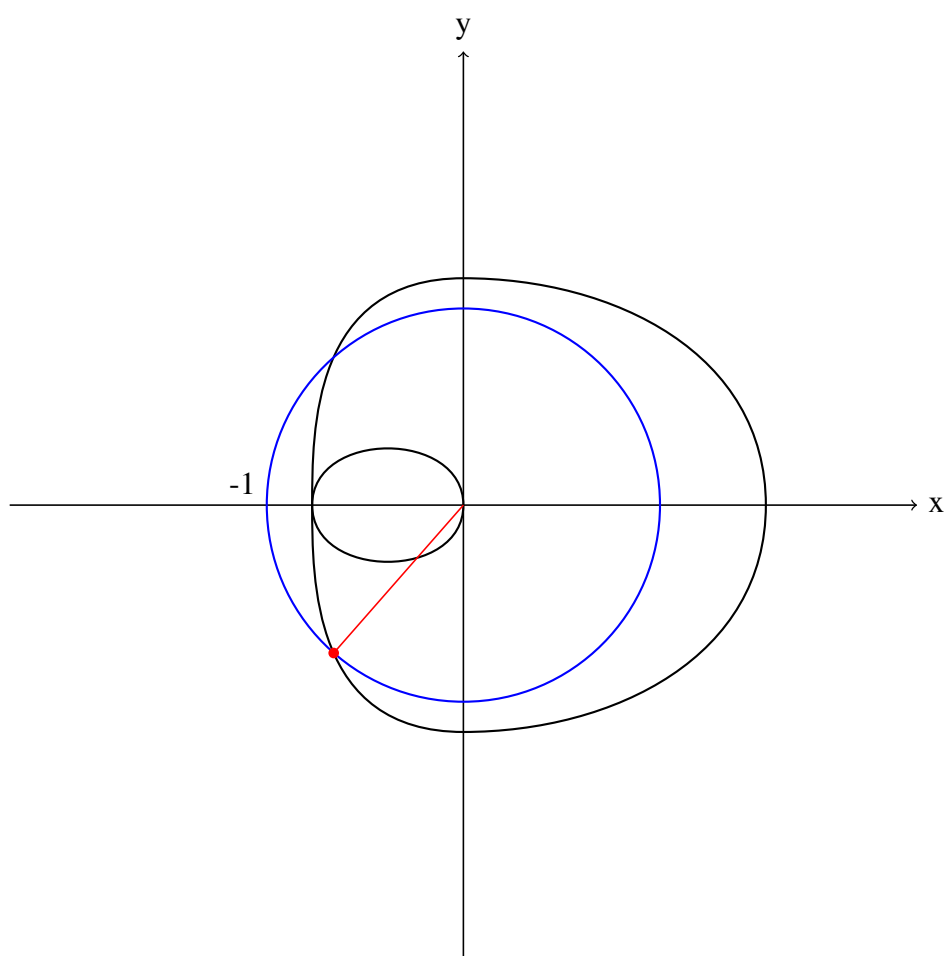


图 5.9 位相余裕