

電氣電子数学

# 目次

第 1 章	種々の座標系と scale factor	3
1.1	scale factor の導入	3
1.2	scale factor と実際の座標系	3
1.3	scale factor によるベクトルの演算子の計算	4
第 2 章	波動方程式と変数分離	5
2.1	波動方程式	5
第 3 章	関数の無限級数分解による理解	8
3.1	テイラー展開	8
3.2	数列の収束	8
3.3	ベッセル方程式とテーラー展開	9
第 4 章	2 階常微分方程式の一般的な解を目指す	11
4.1	2 階同次微分方程式の解析	11
4.2	フックスの定理	13
4.3	線形独立な解	13
4.4	2 つ目の解	14
4.5	非同次 2 階常微分方程式	15
第 5 章	グリーンの定理	16
5.1	グリーンの定理	16
5.2	$\mathcal{L}$ の再検討	18
5.3	ディラックのデルタ関数	20
5.4	グリーン関数法の実例	21
第 6 章	関数の展開	23
6.1	関数に対する直交という概念	23
6.2	正規直交な固有関数で展開	25
6.3	フーリエ級数	26
第 7 章	ベッセル関数・ベッセル級数	28
7.1	ベッセル関数	28
7.2	ベッセル関数の母関数	30

7.3	ベッセル級数 . . . . .	31
7.4	球体座標でのベッセル関数 . . . . .	32
7.5	ベッセル関数の一般化 . . . . .	33
第 8 章	ルジャンドル多項式と母関数	34
8.1	2 項定理 . . . . .	34
8.2	母関数 . . . . .	36
8.3	ルジャンドル多項式の母関数 . . . . .	36
8.4	ルジャンドル多項式の漸化式 . . . . .	38
8.5	ルジャンドル多項式の性質 . . . . .	39
第 9 章	フーリエ変換・ラプラス変換	41
9.1	フーリエ級数展開 . . . . .	41
9.2	フーリエ級数展開の性質 . . . . .	43
9.3	フーリエ変換 . . . . .	45
9.4	フーリエ変換の応用 . . . . .	48
9.5	ラプラス変換 . . . . .	49
9.6	ラプラス変換の利用 . . . . .	52

# 第 1 章

## 種々の座標系と scale factor

3次元空間で1つの点を決定しようと思うと3つの要素でなせることはすぐわかるが、この3つの要素の現れ方は何でもいい。なじみ深いのはデカルト座標だがその他にも座標系が存在していることは知っている。その各々の座標系が全くの別物として考えられるのは都合が悪い。よってここに scale factor というものを導入して一般的な発想を身に着けたい。

### 1.1 scale factor の導入

先にも述べた通り3次元座標は3つの要素で確定できる。これを  $(q_1, q_2, q_3)$  としておく。すると位置は3変数関数  $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$  として扱うことができる。ここで  $(h_1, h_2, h_3)$  を以下のように定義する。

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right| \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

この  $(h_1, h_2, h_3)$  を scale factor と呼ぶ。

### 1.2 scale factor と実際の座標系

#### 1.2.1 デカルト座標

デカルト座標では位置  $\mathbf{r}$  は

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

で表現される。ここで正規直交基底表すのは大きさの計算に便利だからで、ほかの座標に対してもまずこの形にすることから始まる。

定義通りの計算をすると、

$$(h_x, h_y, h_z) = (1, 1, 1)$$

となる。これを基準というイメージで見るとよいかもしれない。

#### 1.2.2 円柱座標

円柱座標とは、 $z$  軸の値で1つの  $xy$  平面を決定し、決定した  $xy$  平面を極座標と同じように  $z$  軸からの距離と  $x$  軸正方向からの角で決定する。

$$\mathbf{r}(\rho, \varphi, z) = \rho \cos \varphi \mathbf{i} + \rho \sin \varphi \mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

scale factor は

$$(h_\rho, h_\varphi, h_z) = (1, \rho, 1)$$

### 1.2.3 球体座標

球体座標とは、原点からの距離、z 軸正方向との成す角、x 軸正方向と成す角の 3 要素で位置を決定する座標だ。これに関してはなかなかイメージが浮かばない。式に直すと以下の通りとなり、さらに理解から遠ざかる。

$$\mathbf{r}(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + r \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + r \cos \theta \mathbf{k}$$

scale factor は

$$(h_r, h_\theta, h_\varphi) = (1, r, r \sin \theta)$$

となる。

## 1.3 scale factor によるベクトルの演算子の計算

とりあえず 3 つの座標系に対して scale factor を計算したが、一体何に使えるのかという事はわかっていない。定義では偏微分の大きさをとっていた。これは直交座標系に対する座標の偏りと考えるのが適当かもしれない<sup>\*1</sup>。

さて、得体ののしれない数ではあるが有用であることは確かで、ここからそれについて述べる。話の一般化のためにスカラー関数  $\phi$  とベクトル関数  $\mathbf{F}$  を次のように用意する。

$$\begin{aligned} &\phi(q_1, q_2, q_3) \\ \mathbf{F}(q_1, q_2, q_3) &= F_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{i} + F_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{j} + F_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{k} \end{aligned}$$

さらに 3 要素  $(q_1, q_2, q_3)$  で決定する正規直交基底を  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  を用意する。

用意ができると次にすることは予想ができるだろう。ナブラを使う計算の一般化を図る。

**勾配** デカルト座標では  $\nabla$  は偏微分をベクトルのイメージで計算すればよくそれほど難儀することはなかった。しかし、scale factor を導入し一般化すると

$$\nabla \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q_3} \mathbf{e}_3 \quad (1.2)$$

となる。同じ形の項が覚えやすいのでまだ難しくはない。

**発散** もう早くも式が複雑になる。

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (F_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (F_3 h_1 h_2) \right] \quad (1.3)$$

**ラプラシアン** 電気電子では頻出な演算子だ。

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q_3} \right) \right] \quad (1.4)$$

<sup>\*1</sup> 3 要素それぞれの偏微分とはその変数での変化のスピードだといえる。そのスピードに違いがあるということを座標に偏りがあると表現してみた。正しいわけではないが各々でより良いイメージを作してほしい。

回転 ラプラシアンで衝撃の複雑さを見せたが回転は多少はわかるようになっている。

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 F_2) \right\} \\ \frac{1}{h_3 h_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 F_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (h_3 F_3) \right\} \\ \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 F_1) \right\} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

ベクトルに対する計算は厳密な方法が配布教材 3 章の P.185 以降に載っているので参照されたし。

## 第 2 章

# 波動方程式と変数分離

電気電子の問題では主に 3 次元を扱うわけで、そのため微分方程式は 3 変数だ。このような場合どのように解くのかということになるが、変数分離が最も効果的だ。この方法は解の式の形を仮定する。

さらに話はシリンダー内の電子を考えるべく、円柱座標に絞ったものに進む。

## 2.1 波動方程式

### 2.1.1 変数分離

$$\nabla^2 F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

これは波動方程式だ。しかしこれでももちろん解けるはずがない。さて、この方程式は時間の微分が入っている式だが、波を扱っているという前提を忘れてはいけない。つまり時間成分は波を表すだけだといいたい。ここで、さっそく第 1 の仮定だ。

$$F(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{j\omega t}$$

これは  $F$  が位置と時間の関数ではあるが、それらは分離できるという仮定だ。これを受け入れ式を変形すると、

$$\nabla^2 \psi + \frac{\omega^2}{c^2} \psi = 0$$

となる。ここで  $k = \omega/c$  とすると見覚えのある波動方程式が現れる。

1 次元の波動方程式は今までの授業で扱ったこともあり皆が解くことが可能だろう。しかし眼前にあるのは 3 次元の波動方程式だ。これを真っ向から解くのは至難だ。そこで第 2 の仮定を用意する。

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

これは  $\psi$  に関しても 3 つの変数を分けて考えることができるという仮定だ。この仮定はかなり破壊力がある。これを認めると波動方程式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + ZX \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 XYZ &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 &= 0 \end{aligned}$$

この式の素晴らしいところは 3 つの項がすべて違う独立した変数による関数になっている点だ。この式がどのような場合に成立するのか考える。例えば変数  $x$  の部分のみ左辺に残し残りを右辺に移したらどうなるだろうか。両辺で変数の異なる式となる。ここで注意すべきは 3 変数が独立だということだ。つまり、変数  $x$  の部分は定数でなければ等式は成立しない\*1。

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -l^2 \quad (2.1)$$

という式が立つ。ここでの右辺は計算の簡単のために置いているがなんでも定数であればいい。当然だがこの議論は  $y, z$  に対しても同様で

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -m^2 \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -n^2 \quad (2.3)$$

が得られる。ただし

$$k^2 = l^2 + m^2 + n^2$$

が条件だ。

仮定を置くことで 3 変数の偏微分方程式が 3 つの常微分方程式と 1 つの条件式で表せることが分かった。これらを解くのはそれほど難しくはない。境界条件などの詳しく条件を与えてはいなかったが以下になるだろう。

$$\begin{aligned} X &= X_l(x) = A_l e^{\pm jlx} \\ Y &= Y_m(y) = B_m e^{\pm jmy} \\ Z &= Z_n(z) = C_n e^{\pm jnz} \end{aligned}$$

これらの積で  $\psi$  は完成する。ここで忘れてはいけない条件式は

$$n = \pm \sqrt{k^2 - l^2 - m^2}$$

だ。ここから  $n$  は消去できる。そして境界条件は与えこしなかったがこれによって  $l, m$  は離散的な値をとることが分かる\*2。

---

\*1 もし  $x$  の関数のままであったとしよう。すると変数  $y, z$  の部分の線形和が  $x$  の関数だという事になる。これは 3 変数が独立していることに矛盾するだろう。

\*2 領域の境界で関数値が 0 になるという条件による。

## 2.1.2 デカルト座標ではない座標系

先の計算はデカルト座標系でおこなった。しかし、前章では円柱座標や球体座標も扱った。これらでは計算がどのようなようになるのかは確認すべきだ。

まずは円柱座標による変数分離を試したい。前章の scale factor の用いて波動方程式は次のように書き下せる。

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \quad (2.4)$$

ここでも先の計算と同じように仮定をおく。

$$\psi = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

このようにすることで微分方程式は次のように変形できる。

$$\frac{1}{\rho P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0$$

完全とはいかないが少なくとも変数  $z$  の部分は変数分離が完了してる状況だ。直ちに

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = l^2 \quad (2.5)$$

を得ることができる。これを代入し両辺を  $\rho^2$  でかけることで、

$$\frac{\rho}{P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \rho^2(l^2 + k^2) = 0 \quad (2.6)$$

となる。ここで  $\varphi$  の変数分離も完了するので

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \quad (2.7)$$

が得られる。そしてこれも代入することで  $\rho$  に関しても常微分方程式が得られる。まとめると、

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\rho}{d\rho} \right) + (n^2 \rho^2 - m^2) P = 0$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = l^2 Z$$

$$l = \sqrt{n^2 - k^2}$$

となる。明かなことだが  $\varphi$  は  $2\pi$  で元に戻る\*3。このことから  $\Phi$  は周期  $2\pi$  の周期関数だ。このことから直ちに  $m$  が整数だとわかる。

次は球体座標だ。波動方程式は次の通りになる。

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k^2 \psi \right] = 0 \quad (2.8)$$

---

\*3 方位角は  $2\pi$  の自由度があるといってもいい。



ここでも次の仮定をおく.

$$\psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

また変数分離の計算をするのはしんどいのでここでは得られる常微分方程式を示す.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left( k^2 - \frac{\lambda}{r^2} \right) R = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi \quad (2.11)$$

境界条件から  $m$  が整数であることが分かる. また  $\lambda$  は

$$\lambda = l(l+1)$$

で表され,  $l$  は自然数だ.

## 第 3 章

# 関数の無限級数分解による理解

### 3.1 テイラー展開

$n$  回微分を定義できるならその関数はテイラー展開ができる.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \quad (3.1)$$

とくに  $a=0$  をマクローリン展開という. 三角関数や指数関数などいくつか特徴的なものがあるのでこれは別に確認するといいい.

このような変形の利点は規則的な項の直和は計算が容易なところだ.

さらに重要なのはテイラー展開は一意で, 展開ができるならばそれはただ 1 つの方法だけだ.

### 3.2 数列の収束

数列の収束は容易にわかるものではない. いくつかの確認方法があるのでこれらを確認する,

#### 3.2.1 ダランベールの判定法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

この値が 1 より小さければ収束, 1 より大きければ発散, 1 であれば不明となる. これでは 1 となったときに判定ができなくなるわけだが, これを解決する方法もある.

### 3.2.2 ガウスの判定法

ダランベールの判定法で 1 となり判定ができなかったときに利用する判定法だ. これは収束判定する数列が常に正であることが条件で, 以下の式を立てる.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{h}{n} + \frac{B(n)}{n^2}$$

この式に現れる  $B(n)$  は  $n \rightarrow \infty$  で収束する関数で,  $h$  が 1 より小さければ収束, 1 以上であれば発散という判定ができる.

## 3.3 ベッセル方程式とテーラー展開

ベッセル方程式は以下の式だ. これはずいぶん前に現れて覚えがあるかもしれない.

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + (n^2 \rho^2 - m^2) P = 0$$

ここでの  $m$  は整数だということを思い出しておこう. この式は複雑なので, できる限り簡単にとらえたい. まずは  $n\rho = x, P(\rho) = y(x)$  をおく. するとベッセル方程式は

$$x \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + (x^2 - m^2) y = 0$$

このように心なしか簡単になった気がする.

### 3.3.1 マクローリン展開の利用

以前として面倒な式ではある. そこで流れを変えるべく,  $y(x)$  のマクローリン展開を試みる.

$$y(x) = x^k (a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{k+\lambda}$$

このようにすると, 微分計算も簡単だ.

$$y'(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (k+\lambda) a_{\lambda} x^{k+\lambda-1}$$

2 回微分も同様だ.

$$y''(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) a_{\lambda} x^{k+\lambda-2}$$

微分が用意できるとベッセル方程式はさらに変形が進む.

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) a_{\lambda} x^{k+\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} (k+\lambda) a_{\lambda} x^{k+\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{k+\lambda+2} - \sum_{\lambda=0}^{\infty} m^2 a_{\lambda} x^{k+\lambda}$$

ここからすべきことは見失いがちだ． $x^n$  の係数をまとめてすべてが 0 になることを考える．各次数の係数は以下ようになる．

$$\begin{aligned}x^k &: k(k-1)a_0 + ka_0 - m^2a_0 \\x^{k+1} &: (k+1)ka_1 + (k+1)a_1 - m^2a_1 \\x^{k+2} &: (k+2)(k+1)a_2 + (k+2)a_2 + a_0 - m^2a_2 \\x^{k+j+2} &: (k+j+2)(k+j+1)a_{j+2} + (k+j+2)a_{j+2} + a_j - m^2a_{j+2}\end{aligned}$$

個の係数のすべてが 0 になるわけだから次の 4 式がわかる．

$$\begin{aligned}(k^2 - m^2)a_0 &= 0 \\ \{(k+1)^2 - m^2\}a_1 &= 0 \\ \{(k+2)^2 - m^2\}a_2 - a_0 &= 0 \\ \{(k+j+2)^2 - m^2\}a_{j+2} - a_j &= 0\end{aligned}$$

$a_0$  は  $y(x)$  の展開式からも明らかのように 0 ではない．ここから 4 式の 1 つ目を用いることで

$$k = \pm m$$

と分かる．ここからは  $k$  の値で場合を分ける．まずは  $k = m$  の場合を扱う．2 番目の式を使うことで

$$\{(m+1)^2 - m^2\}a_1 = 0 \quad \therefore a_1 = 0$$

と分かる．そして 2 番目の式から次の漸化式を得る．

$$a_{j+2} = \frac{-1}{(j+2)(2m+j+2)}a_j$$

ここから奇数番目の  $a_j$  がすべて 0 であることがわかる．偶数番目のみが値を持つので自然数  $p$  を用意することで先の漸化式は

$$a_{2p} = \frac{-1}{2p(2m+2p)}a_{2(p-1)}$$

となる． $a_0$  を初期値として考えると

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p m!}{2^{2p} p! (m+p)!} a_0$$

というように一般項を得る．係数の一般項が得られたので  $y(x)$  は次のように解くことができる．

$$\begin{aligned}y(x) &= \sum a_{2p} x^{m+2p} \\ &= 2^m m! \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! (m+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2p} a_0 \\ &= 2^m m! a_0 J_m(x)\end{aligned}$$

ここで現れた  $J_m$  は

$$J_m(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! (m+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2p} \quad (3.2)$$

である．これをベッセル関数という．

次は  $k = -m$  の場合を考える．先の議論と異なるのは漸化式のみで

$$a_{j+2} = \frac{-1}{(j+2-m)^2 - m^2} a_j = \frac{-1}{(j+2)\{j-2(m-1)\}} a_j$$

となる．もし  $m$  が整数でなければ，2 つ目の解を作ることはできない．しかし， $m$  は方位角の自由度によって現れた数．したがって必ず整数となる． $j = 2(m-1)$  のとき  $a_{j+2}$  は発散する．

## 第 4 章

# 2 階常微分方程式の一般的な解を目指す

### 4.1 2 階同次微分方程式の解析

2 階の同次常微分方程式をとにかく一般的に書こうとしたら次の形に行きつくことは皆に認めてもらえるだろう．

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (4.1)$$

あまりに一般的すぎては手も足も出ないので，とりあえずはテーラー展開を実行してたい．そのために都合が悪ければ平行移動してでも原点中心でテーラー展開できると状態にしたと考える\*1．

$$\begin{aligned} y &= \sum_{\lambda=0} a_{\lambda} x^{k+\lambda} \quad (a_0 \neq 0) \\ P(x) &= \sum_{\nu=0} p_{\nu} x^{r+\nu} \quad (p_0 \neq 0) \\ Q(x) &= \sum_{\nu=0} q_{\nu} x^{s+\nu} \quad (q_0 \neq 0) \end{aligned}$$

このようになる．このまま式 (4.1) に代入する．

$$\sum_{\lambda=0} a_{\lambda} (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2} + \sum_{\lambda=0, \nu=0} p_{\nu} a_{\lambda} (k+\lambda) x^{r+\nu+k+\lambda-1} + \sum_{\lambda=0, \nu=0} q_{\nu} a_{\lambda} x^{s+\nu+k+\lambda}$$

となる．前章に比べて指数がはるかに複雑になっている．それでもやることに大きな変化はない．次数ごとに項を分けて考え，そしてすべての係数が 0 となることを考える．しかし，全く同じというわけではない．まずは最低次数のみに注目して係数が 0 であるという条件を適応する．これは指数があまりに複雑なのでいきなりすべてを相手にするのではなく場合分けを行いたいからだ．最低次数の候補以下の 3 つだ．

$$a_0 k(k-1) x^{k-2}, \quad p_0 a_0 k x^{r+k-1}, \quad q_0 a_0 x^{s+k}$$

では場合分けだ．

---

\*1 早速，一般的ではなくなりつつはあるが，平行移動くらいは目をつぶってほしい．前に進むことが目的なので都合のいい仮定をどんどんおいていくが，気にしないでもらいたい．

$r \geq 0, s \geq 0$  このときは  $a_0 k(k-1)x^{k-2}$  が最低次数の項だ。直ちに

$$k(k-1) = 0$$

を得る。ここから式 (4.1) の解が 2 つあることが分かる。

$$y(x) = \sum_{\lambda=0} a_{\lambda} x^{k+\lambda} \quad (k=0, 1)$$

同じ係数に次数の変化を考えたら当然だ。そしてこのとき、 $x=0$  は正則点 (通常点) と呼ばれる。これは  $x=0$  で無限回の微分が定義できるということだ\*2。

$-1 \leq r < 0$  または  $-2 \leq s < 2$  このときは  $P(x), Q(x)$  の少なくとも一方が  $x=0$  で発散してしまう\*3。しかし、 $xP(x), x^2Q(x)$  で収束する。このときの最低次数の項は次の通りだ。

$$\{a_0 k(k-1) + \delta_{r,-1} p_0 a_0 k + \delta_{s,-2} q_0 a_0\} x^{k-2}$$

となる。ここで現れた  $\delta$  はクロネッカーのデルタと呼ばれ以下の式を満たすものだ。

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$a_0 \neq 0$  の条件を忘れず使うと結局は次の式になる。

$$k(k-1) + \delta_{r,-1} p_0 k + \delta_{s,-2} q_0 = 0$$

このとき  $x=0$  は確定特異点と呼ばれる。解はただ 1 つのみ

$$y(x) = \sum_{\lambda=0} a_{\lambda} x^{k+\lambda} \quad (k=0, 1)$$

だが、 $k$  が分かる分かるわけでもない。

$r < -1$  または  $s < -2$  このときは  $xP(x)$  または  $x^2Q(x)$  でさえも  $x=0$  で発散してしまう。最低次数の項は  $p_0 a_0 k x^{r+k-1}$  または  $q_0 a_0 x^{s+k}$  となる\*4。解は存在しない。 $x=0$  は不確定特異点と呼ばれる。

具体的な例は必要だろう。ルジャンドルの方程式は

$$(1-x^2)y'' - 2xy' \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) Y = 0$$

このような式だが、確定特異点は  $x = \pm 1, \infty$  の 3 つで不確定特異点はない。ベッセル方程式では

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

確定特異点はなく不確定特異点が  $x = \infty$  となってる。最後にエルミート方程式は

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$$

ベッセル方程式と同様に確定特異点はなく、不確定特異点が  $x = \infty$  だ。

\*2 この講義でのテーラー展開はローラン展開を大いに含んでいる。そうすると展開で指数が負になることがあるわけだが、正則点ではそのようなことがない。基本的に原点中心の展開を行うためその形状で原点のみ特異点なのか正則点なのかが分かるのだ。

\*3  $-1 \leq r < 0$  ならば  $P(x)$  が、 $-2 \leq s < 2$  ならば  $Q(x)$  が発散する。

\*4 またはといっているがどちらかとれるというわけではない  $r < -1$  ならば前者、 $s < -2$  ならば後者であると読んでほしい。

## 4.2 フックスの定理

先の節で扱った微分方程式の解法はフロベニウスの方法などと呼ばれているものだ。これは関数の正則点、または確定特異点の周りではテーラー展開、ローラン展開を使って式を変換できること利用したものだ。この方法が正しいと認めれば、正則点、確定特異点を問わず少なくとも 1 つの解が存在することを確認した。解の個数自体は先の方法で確認する必要がある。

この話で大事なのは正則点、確定特異点では必ず級数による解が存在していることが分かっている点だ。これをフックスの定理という。

## 4.3 線形独立な解

$\varphi_\lambda(x)$  を  $n$  階常微分方程式の 1 つの解とする。そうすると解がいくつかあるので  $\lambda$  はいくつか用意できる。とりあえず 3 つくらいとって線形和を考える。すると、

$$k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + k_3\varphi_3 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

と直ちに分かるのだ。線形独立という用語はベクトルで現れるもので関数に対する扱いは初めてにも思われるが全くベクトルと同じだ。正確には任意の  $x$  で等式が成り立つようにする恒等式のイメージが必要だ。

そして、この関係の面白いところは微分してもその性質が変わらないとことだ。少しはなしが見えなくなりそうなので具体的に述べる。

$n$  階常微分方程式に対しては  $n$  この解が存在し、それらがすべて  $n-1$  回は微分できる。これは当然なこととして受け入れるとして、このどの微分に対しても線形独立というのは次のような事を言う。

$$k_1\varphi_1^{(r)} + k_2\varphi_2^{(r)} + \dots + k_n\varphi_n^{(r)} = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0 \quad (0 \leq r \leq n-1)$$

これで十分に伝わっただろう。これを行列にまとめてみる。

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

この式から

$$W = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

このようにロンスキー行列式をいうものを定義できる。この  $W$  の値で

$$W \neq 0 \Rightarrow \text{解は線形独立}$$

$$W = 0, \alpha < x < \beta \Rightarrow \alpha < x < \beta \text{ で解は線形従属}$$

ということが分かる。

ロンスキー行列式を使って当然ともいえる命題を証明する。”2 階の常微分方程式の線形独立な解は高々 2 つ”という命題だ。以下の微分方程式に線形独立な解を 3 つ  $y_1, y_2, y_3$  として仮定する。

$$y''(x) + P(x)y' + Q(x)y(x) = 0$$

この微分方程式に対してロンスキー行列式を計算する.

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ -Py_1' - Qy_1 & -Py_2' - Qy_2 & -Py_3' - Qy_3 \end{vmatrix} \\ &= -P \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \end{vmatrix} - Q \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

ロンスキー行列式が 0 になったということは 3 つの解は線形従属ということだ. これで命題の証明は完了した.

## 4.4 2 つ目の解

2 階の常微分方程式に注目する. ここからしばらくは正則点のみを扱う. したがって線形独立な解は 2 つある. 扱う式はおなじみの次の式だ.

$$y''(x) + P(x)y' + Q(x)y(x) = 0$$

この微分方程式の解を  $y_1, y_2$  とする.  $W$  を計算すると

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

さらに  $W$  を微分したものも考えておく.

$$\begin{aligned} W' &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' \\ &= y_1 y_2'' - y_1'' y_2 \end{aligned}$$

このようになる. これとは別に  $y_1, y_2$  の 2 回微分を計算すると,

$$y_1'' = -Py_1' - Qy_1, \quad y_2'' = -Py_2' - Qy_2$$

となる. この 2 式を  $W'$  に代入することで,

$$\frac{dW}{dx} = -PW$$

を得る. この結果は想像以上に重要で, 式変形から

$$\frac{dW}{W} = -P(x)dx$$

となる. 両辺を積分することで式 (4.3) を得る.

$$\begin{aligned} \ln W &= - \int^x P(x_1) dx_1 \\ \therefore W(x) &= \exp \left[ - \int^x P(x_1) dx_1 \right] \end{aligned} \tag{4.3}$$

この計算では積分の下限を用意しない不定積分だった. 下限  $a$  をおくと式 (4.3) は次のように書き代わる.

$$W(x) = W(a) \exp \left[ \int_a^x P(x_1) dx_1 \right]$$

大きな変化ではないが覚えておこう。

さて次は微分計算の妙を用いて計算をしてみる。2つの解  $y_1, y_2$  を分母分子にもってきて  $y_2/y_1$  とする。この分数式を微分すると分子に  $W$  が現れるのだ。

$$\frac{d}{dx} \frac{y_2}{y_1} = \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2}$$

この式の両辺を積分してやることで2つの解の関係式を得ることができる。

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{W(x_1)}{y_1^2(x_1)} dx_1 \quad (4.4)$$

さらに式 (4.3) を代入することで最終的な結論を得る。

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{\exp\left[-\int^x P(x_1) dx_1\right]}{y_1^2(x_2)} dx_2 \quad (4.5)$$

この式の存在は与えられた微分方程式は何か1つの解を導出することで残りの解を導けることを表している。

## 4.5 非同次2階常微分方程式

前節までは同次の2階常微分方程式を扱った。次は非同次を扱う。非同次の微分方程式の解法はまず同次のものを解いた後、特別解(以下、特解)を計算し足すという流れをとる。この特別解というのが難儀なのだ。今まで別の講義などで扱った微分方程式は基本的に過渡現象を解析するためのものだったため無限時間の経過を考えれば必ず定常状態になる。つまりは定常状態を表す式が特解となり得たのだ。しかし今から扱うのは一般の微分方程式ゆえそのような容易な方法で特解が導出できるとは限らない。一般的な方法を模索したい。

長い前振りはこれまでにして本題に移る。

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x) \quad (4.6)$$

まずは一般的な非同次常微分方程式を式 (4.6) だとして。右辺を0として同次微分方程式を解けば  $y_1, y_2$  が得られる。つぎに特解を  $y_p$  としたとき、これらを  $y_1, y_2$  を用いて、

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

と表せることを仮定する。あくまで仮定だが、これで特殊解が表せることが分かり、さらに  $u_1, u_2$  が導出できれば都合がいい。式 (4.6) に特解を代入することで  $u_1, u_2$  の条件が得られると考えるのは極めて自然だ。まずは特解を微分する。

$$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2' + (y_1 u_1' + y_2 u_2')$$

項が4つなのはあまりに長い。先に話すと、もう一回は微分する予定なので次は項の数は8つとなるのは避けたい。そこで式 (4.6) を使う前に  $u_1, u_2$  に対して1つ条件を与えてしまう。

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \quad \dots (\text{条件 1})$$

さらに2回微分を計算することで、

$$y_p'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2'$$



これらを式 (4.6) に代入する.

$$\begin{aligned}(u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2') + P(u_1 y_1' + u_2 y_2') + Q(u_1 y_1 + u_2 y_2) &= F \\ u_1(y_1'' + P y_1' + Q y_1) + u_2(y_2'' + P y_2' + Q y_2) + (y_1' u_1' + y_2' u_2') &= F \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' &= F \quad \cdots (\text{条件 2})\end{aligned}$$

$y_1, y_2$  が式 (4.6) の同次の解であることから式は単純になり, 2 つ目の条件を得る.

2 つの条件より, 次の式を得る.

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}$$

$W \neq 0$  であれば  $u_1', u_2'$  について解くことができる<sup>\*5</sup>.

$$u_1' = -\frac{y_2 F}{W}, \quad u_2' = \frac{y_1 F}{W}$$

後は積分してしまえばいいわけで, ここから特解が求まる.

$$y_p(x) = -y_1(x) \int^x \frac{y_2(t)F(t)}{W\{y_1(t), y_2(t)\}} dt + y_2(x) \int^x \frac{y_1(t)F(t)}{W\{y_1(t), y_2(t)\}} dt \quad (4.7)$$

最初の微分方程式の解は同次の解の任意定数倍と特解との和なので,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p$$

となる. 前章の話も合わせれば式 (4.6) のような 2 階常微分方程式は 1 つの解が分かった時点で完全に解くことができるのだ.

## 第 5 章

# グリーンの定理

正直に言ってかなりしんどい範囲であるといえる.

## 5.1 グリーンの定理

2 つのスカラ関数  $u(\mathbf{r}), v(\mathbf{r})$  について次の 2 式を用意する.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (u \nabla v) &= u \nabla \cdot \nabla v + (\nabla u) \cdot (\nabla v) \\ \nabla \cdot (v \nabla u) &= v \nabla \cdot \nabla u + (\nabla v) \cdot (\nabla u)\end{aligned}$$

---

<sup>\*5</sup> 逆行列をしたら直ちに答えが出る.

この2式の差をとって体積積分する.

$$\int_V \nabla \cdot (u \nabla v - v \nabla u) dv = \int_V (u \nabla \cdot \nabla v - v \nabla \cdot \nabla u) dv$$

この式の左辺にガウスの定理を使うことで体積積分を法線面積分にする.

$$\int_V \nabla \cdot (u \nabla v - v \nabla u) dv = \int_S (u \nabla v - v \nabla u) d\mathbf{s}$$

最初に用意した  $u, v$  を  $\varphi, G$  に置き換えると最終的に次の等式を得る.

$$\int_V (\varphi \nabla^2 G - G \nabla^2 \varphi) dv = \int_S (\varphi \nabla G - G \nabla \varphi) d\mathbf{s} \quad (5.1)$$

この式 (5.1) の関係をグリーン定理という. 体積積分と法線面積分の関係の1つといえる. 式の細かいところを間違えてしまいそうなほど左右の形は似ている. 以降, このグリーン定理を使った話が続く. 何度も式 (5.1) は見返してほしい.

### 5.1.1 グリーン関数法

電荷密度  $f(\mathbf{r})$  によって発生している電位場  $\varphi(\mathbf{r})$  を考える.. それらには以下の関係が成立する.

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r})$$

ここでの式は考えている領域の全体を考えた式といえよう. 次は部分を考える.  $\mathbf{r}_2$  のみの電荷による位置  $\mathbf{r}$  の電位を  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$  とする.

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$$

これで2つのスカラー関数\*1が現れたことになる. 分布する電荷を包含する体積をとりグリーン定理を適用すると,

$$\int_V (\varphi(\mathbf{r}_2) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}_2)) dv = \int_S (\varphi(\mathbf{r}_2) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \nabla \varphi(\mathbf{r}_2)) d\mathbf{s}$$

このようになる\*2.

用意した体積での表面の積分は0であると仮定しよう\*3. すると左辺は0となる. すると最終的には次の式が得られる.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) f(\mathbf{r}_2) dv_2 \quad (5.2)$$

ちらちら見える添字の2は, 2の添字のついている変数で計算することを表すものだ. 例えば式 (5.2) で体積積分は  $dv_2$  となっているが, これは  $\mathbf{r}_2$  に関して計算せよという意味だ. 左辺を見れば明らかではあるがここで述べておく.

グリーン定理からスカラー関数に関する式が1つ得られたわけだがこれで何ができるのかいまいち分からない. いきなり説明は難しいので少し異なる話から始めたい.

\*1 デルタ関数もスカラー関数という判断だ.

\*2  $\mathbf{r}_2$  は変数. ここでの電位を計算しているイメージ.

\*3 逆にこのようになるように体積を選ぶ.

前節から 2 階の微分方程式を扱ってきたが、次はベクトルの 2 階の微分方程式のようなものを考える。

$$\nabla \cdot (p(\mathbf{r})\nabla)\varphi(\mathbf{r}) + q(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r})$$

この節の最初に挙げた式の一般形と考えるのがいいだろう。このような長々とした式は次の演算子を置くことで簡潔に記述できる。

$$\mathcal{L} = \nabla \cdot (p(\mathbf{r})\nabla) + q(\mathbf{r})$$

とすると

$$\mathcal{L}\varphi(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r})$$

このようになる。こう見ると演算子  $\mathcal{L}$  の逆数に相当する演算子  $\mathcal{L}^{-1}$  のようなものがあれば直ちに

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\mathcal{L}^{-1}f(\mathbf{r})$$

となって微分方程式が解ける。このような都合の良い考えを実現するのがグリーン関数法だ。 $\mathcal{L}^{-1}$  を実現するには都合の良い関数  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$  を発見して

$$\int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)f(\mathbf{r})d\mathbf{r}$$

とするだけで  $-\mathcal{L}^{-1}f(\mathbf{r})$  に相当しているというのだ。驚きの方法だがこれはグリーンの定理によって裏付けられている。

では  $G$  をどう見つけるかという話になるが、これは

$$\mathcal{L}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$$

を満たす  $G$  だという事が分かっている。この式の意味するところを考える。左辺のデルタ関数は  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$  となって初めて値をとる。その時の値は無限だとなって確かに扱いにくい。デルタ関数は積分して利用するのが常だ\*4。このことを考えて  $G$  を考えるとこれは変数が  $\mathbf{r}$  で  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$  のときに有限の値をとることが分かる。これは  $\mathbf{r}_2$  の影響のみによる  $\mathbf{r}$  での関数値というものに相当する。

分かりにくいので言葉を尽くすと、全領域の電荷による電位を考える  $\varphi$  に対し、微小体積をとって、その部分の電荷による電位を考えるのが  $G$  だ\*5。

デルタ関数を積分して 1 にすることから  $G$  の 1 回微分が分かる。これが導き出せたら問題の条件に合わせて  $G$  を決定し式 (5.2) を使うだけだ。

## 5.2 $\mathcal{L}$ の再検討

前章のグリーン関数法を扱う際に微分方程式に対して  $\mathcal{L}$  という演算子を用意して、その逆数のようなものを探した。この章では  $\mathcal{L}$  についてももう少しだけ学習を深めたい。

---

\*4 積分したら 1 になる。

\*5 あくまでイメージの話だ。

### 5.2.1 $\mathcal{L}$ を常微分方程式に

グリーン関数法の説明で  $\mathcal{L}$  は

$$\mathcal{L} = \nabla \cdot (p(\mathbf{r})\nabla) + q(\mathbf{r})$$

として用意した。そのときはベクトルを相手にしていたためベクトルの演算子という印象であっただろう。これを一般的な 2 階常微分方程式に定義したい。

$y, p_0, p_1, p_2$  を  $x$  の実数値関数とする。すると一般の同次常微分方程式は

$$p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$$

と表せる。これで  $\mathcal{L}$  をおくことはできない。ベクトル関数での  $\mathcal{L}$  の形からも想像すると

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) + q$$

となるはずだからだ。つまり、この形を無理やりにでも用意できればいいわけだ。

話を戻すと、一般の微分方程式に対して両辺に  $1/p_0 \exp[\int^x p_1/p_0 dt]$  をかける。すると、

$$\exp \left[ \int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right] y'' + \frac{p_1}{p_0} \exp \left[ \int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right] y' + \frac{p_2}{p_0} \exp \left[ \int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right] y$$

という形になる。かなり複雑な式になったが、

$$p(x) = \exp \left[ \int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right], \quad q(x) = \frac{p_2(x)}{p_0(x)} \exp \left[ \int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right]$$

とおくことで複雑な式は

$$py'' + p'y' + qy = 0$$

という極めて簡単な形となる。これを式変形すると

$$(py')' + qy = 0$$

となるが、これは紛れもなく当初の  $\mathcal{L}$  の予想した形だ。結果として

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dx} \left( \frac{p(x)d}{dx} \right) + q(x), \quad p(x) = \exp \left[ \int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right], \quad q(x) = \frac{p_2(x)}{p_0(x)} \exp \left[ \int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right]$$

と結論づけられる。あとはグリーン関数法から微分方程式は解くことができる。

### 5.2.2 エルミート演算子

$x$  の複素関数  $u, v$  と、それらの複素共役な関数となる  $u^*, v^*$  を用意する。これらの関数で以下の計算を進める。

$$\begin{aligned} \int_a^b v^* \mathcal{L} u dx &= \int_a^b v^* (pu')' dx + \int_a^b v^* q u dx \\ &= [v^* pu']_a^b - \int_a^b v'^* pu' dx + \int_a^b v^* q u dx \\ &= [v^* pu']_a^b - [u^* qp'^*]_a^b + \int_a^b u (pv^*)' dx + \int_a^b u q v^* dx \\ &= [v^* pu']_a^b - [u^* qp'^*]_a^b \int_a^b u \mathcal{L} v^* dx \end{aligned}$$

ここで、いつものように都合のいい過程を 1 つ.

$$v^*pu'|_{x=a} = v^*pu'|_{x=b}, \quad upv^{*'}|_{x=a} = upv^{*'}|_{x=b}$$

とする. すると,

$$[v^*pu']_a^b - [u^*qp^{*'}]_a^b = 0$$

となる. これで長々計算した結果が,

$$\int_a^b v^* \mathcal{L}u dx = \int_a^b u \mathcal{L}v^* dx$$

となるのだ. さらに  $\mathcal{L}$  演算子の  $p, q$  が実数値関数であることから複素共役はそれ自身となる. 最終的に次の結果を得る.

$$\int_a^b v^* \mathcal{L}u dx = \int_a^b u (\mathcal{L}v^*) dx \quad (5.3)$$

### 5.3 ディラックのデルタ関数

グリーン関数の導出の際に現れた  $\delta$  をディラックのデルタ関数という. この関数は次のように定義される.

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx \quad (5.4)$$

ここで  $f$  を  $f(x) = 1$  という定数関数としたとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

という関係を得る. 厳密ではないがイメージとしてのデルタ関数は次の通りだ.

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$$

区間  $[a, b]$  をとりこの区間上の点  $x_0$  をとると, デルタ関数の定義はさらに一般的なものとなる.

$$f(x_0) = \int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx \quad (5.5)$$

このデルタ関数を 3 次元に拡張すると, 積分が体積積分となるだけだ.

$$\int_v f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = f(\mathbf{r}_0)$$

当然, 3 次元でも次の式は成立する. グリーン関数はそこから計算した.

$$\int_v \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = 1$$

## 5.4 グリーン関数法の具体例

### 5.4.1 グリーン関数の計算

グリーン関数法に関しては具体例を挙げるのが適当だと考える． $G$  の導出までを扱う． $\mathcal{L}$  演算子において  $p(\mathbf{r}) = 1, q(\mathbf{r}) = 0$  とすると，これはラプラシアンを表す．すると

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$$

が得られる．これらを  $\mathbf{r}_2$  を包含する閉曲面  $S$  で体積積分をする．このときにガウスの発散定理を併用して体積積分を法線面積分に変換して  $\nabla$  を 1 つ減らしておく．

$$\int_S \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{S} = -1$$

が得られる．ここからは考えている次元によって話が変わる．まずは 3 次元座標を考える．このときは

$$\frac{\partial}{\partial r_{12}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{12}^2}$$

が得られる． $r_{12} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|$  である．どうしてこうなるかは各自に任せる．最終的には

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}$$

次は 2 次元だがこのときは

$$\frac{\partial}{\partial r_{12}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_{12}}$$

となる．結果は

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|$$

だ．

### 5.4.2 方程式を解く

次の 1 次元の波動方程式を解く．定義域は  $x$  全域だ．

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + k^2 y(x) = -f(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

最初にすべきはグリーン関数  $G(x, x_2)$  の導出だ．

$$\frac{d^2 G(x, x_2)}{dx^2} + k^2 G(x, x_2) = -\delta(x - x_2)$$

説明では積分をしてデルタ関数の処理をしたが<sup>5</sup>，先のグリーン関数の導出例とは異なり  $\mathcal{L}$  が複雑なため積分計算ができない．問題を簡単にするために  $x_2 = 0$  とする．すると  $x < 0$ ， $x > 0$  でグリーン関数は容易に計算できる<sup>6</sup>．まずは  $x < 0$  の範囲では

$$\frac{d^2 G_{<}(x)}{dx^2} + k^2 G_{<}(x) = 0$$

---

<sup>5</sup> デルタ関数は無限に発散する点さえ避けることができれば，値を 0 として考えることができる．実際にグリーン関数法を使うときはその方法が現実的といえる．

となるので解くと

$$G_{<}(x) = Ae^{jkx} + Be^{-jkx}$$

となる。

ここで波動方程式の解の基本的な理解であるが、指数が  $jkx$  のような複素平面上で虚軸の正の方向に進むような値の場合、その項は空間上の正の方向の波の成分を表していて、逆に虚軸の負の方向に進むような値の場合は空間の負の方向の波の成分を表している。これは物性・デバイス基礎論で扱った内容だ。

波動方程式の解の解釈が分かったところで、今考えている領域が  $x < 0$  であることから、 $x$  軸正方向に進む波はないものと考えなければならない<sup>\*7</sup>。したがって、

$$G_{<}(x) = Be^{-jkx}$$

同様に  $x > 0$  に関して計算して

$$G_{>}(x) = Ce^{jkx}$$

を得る。境界条件として  $x = 0 (= x_0)$  のとき  $G_{<}(0) = G_{>}(0)$  とすることで、 $B = C$  である。これでグリーン関数の形が大方できたためここで積分の計算をする。積分範囲は  $x_2 = 0$  を含む微小区間  $[0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon]$  だ。

$$\int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \frac{d^2 G(x)}{dx^2} dx + [k^2 G(0)x]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = - \int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \delta(x)$$

途中の式はこのようになる。左辺の第2項は積分の計算を完了させてあるが、グリーン関数が  $G(0)$  とされている。正しくないように見える計算だが目をつむってほしい。要は積分の際に第2項が関係ないことということだ。ここから計算を完了させると

$$\left. \frac{dG_{>}(x)}{dx} \right|_{x=\varepsilon} - \left. \frac{dG_{<}(x)}{dx} \right|_{x=-\varepsilon} = -1$$

となる。見当をつけた  $G_{>}, G_{<}$  の任意定数はこの式から計算すればいい。

$$jkCe^{jk\varepsilon} + jkB e^{-jk(-\varepsilon)} = -1, \quad B = C, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\therefore B = C = \frac{j}{2k}$$

したがって

$$G_{<}(x) = \frac{j}{2k} e^{-jkx}, \quad G_{>}(x) = \frac{j}{2k} e^{jkx}$$

となる。これらの式が  $x_2 = 0$  を境界に与えられていることを思い出すことで  $x_2 = 0$  におけるグリーン関数は

$$G(x, 0) = \frac{j}{2k} d^{jk|x|}$$

となる。次は固定した  $x_2$  を動くようにしなければならない。  $x_2$  を動くものとするでデルタ関数の部分で  $x$  としていた部分が  $x - x_2$  となるのが唯一の変化だ<sup>\*8</sup>。よって  $x_2 = 0$  で導出された  $G(x, 0)$  の  $x$  を  $x - x_2$  に置き換えるだけで話がすむ。

$$G(x, x_2) = \frac{j}{2k} e^{jk|x-x_2|}$$

<sup>\*7</sup> 境界をまたぐ波がないという理解で十分。正確には  $x_2 = 0$  と置いた部分による湧き出しのような波を扱ってるのでそのようになる。

<sup>\*8</sup>  $G_{<}, G_{>}$  は1変数関数なので  $x_2$  に影響を受けない。あとの変化は積分範囲が  $[x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon]$  となることだが、これもデルタ関数の変化によって片付けられる内容だ。

後は式 (5.2) を 1 次元で使うことで微分方程式は解くことができる。実際の問題では  $x_2$  の固定によってそこを境界とした  $G_<, G_>$  を導出し、そこからグリーン関数を求めるという流れで解く。

## 第 6 章

# 関数の展開

関数を級数に展開するというのはテーラー展開で既に行っているが、その他にも関数を展開する方法はある。それについていろいろと述べていきたい。

## 6.1 関数に対する直交という概念

### 6.1.1 スツルム・リウヴィルの定理

行列  $A$  には固有値  $\lambda$  が存在し、その固有値と行列によって与えられる固有ベクトル  $v$  が与えられれば

$$Av = \lambda v$$

となることは線形代数学の中でもかなり重要な内容としてすでに扱っているだろう。線形代数学では関数が行列をかけることとして扱われたりもしていることから、何らかの作用が定数倍に置きかかわっているという理解もできるだろう。

この考え方を行列に代わって演算子でもできるというのがこの節のきっかけだ。演算子  $\mathcal{L}$  に固有値  $\lambda$  が存在し、これらによって固有関数  $f$  があるので

$$\mathcal{L}f = \lambda f$$

となるのだ。そうすると関数がベクトルのように見えはしないだろうか。

$\mathcal{L}$  に対して、固有関数  $u$  があるとする。すると正の実数値をとる関数  $w$  を用いることで

$$\mathcal{L}u(x) + \lambda w(x)u(x) = 0$$

となる。さらに欲張って固有値、固有関数は複数あることにしよう。

$$\mathcal{L}u_i + \lambda_i w u_i = 0$$

$$\mathcal{L}u_j + \lambda_j w u_j = 0$$

複素関数として考えると固有値、固有関数に対しては共役なものを考えることができる。そこで 2 式の一方に複素共役を考えて

$$(\mathcal{L}u_j)^* + \lambda_j^* w u_j^* = 0$$



とする。1 番目の式の  $u_j^*$  倍と 3 番目の式の  $u_i$  倍の差を計算することで次の式を得る。

$$u_j^* \mathcal{L}u_i - u_i (\mathcal{L}u_j)^* + (\lambda_i - \lambda_j^*) w u_i u_j^* = 0$$

得られた式を区間  $a \leq x \leq b$  で積分をする。

$$\int_a^b u_j^* \mathcal{L}u_i dx - \int_a^b u_i (\mathcal{L}u_j)^* dx = (\lambda_j^* - \lambda_i) \int_a^b w u_i u_j^* dx$$

$\mathcal{L}$  演算子がエルミート演算子であることから左辺が 0 になるので<sup>\*1</sup>最終的に、

$$(\lambda_j^* - \lambda_i) \int_a^b w u_i u_j^* dx = 0 \quad (6.1)$$

を得る。もし、 $i = j$  ならば、積分計算の部分が必ず正になることが分かる。式 (6.1) の成立には  $\lambda_i - \lambda_i^* = 0$  が必要になる。これは固有値が実数であることを示している。逆にもし  $i \neq j$  ならば、積分計算が 0 であることが分かる。これは固有関数  $u_i, u_j$  が直交の関係にある関数であることを示している。

### 6.1.2 関数の正規直交化

2 つの固有関数  $u_i, u_j$  の直交性は、区間  $I = [a, b]$  を用意し  $I$  上で正の実数値関数  $w$  とすることで、

$$\int_a^b u_i u_j^* w dx = 0$$

の成立から確認した。ベクトルの内積の計算を関数に適応させるとこのようになるのだらう<sup>\*2</sup>。ところで、この章の話のスタートは演算子が線形代数学における行列による作用と見立てることができるだろうというところだ。その延長で関数の直交性が出てきたので、正規化 (大きさを 1 にすること) に相当する何らかの計算を考えるべきだろう。

固有関数の正規化にはまず  $N_i$  を次の式で定義する。

$$\int_a^b u_i u_i^* w dx = N_i$$

すると  $N_i$  によって関数  $u_i$  は正規化される。

$$\varphi_i(x) = u_i(x)/N_i$$

この計算も線形代数学での正規化と対応することが分からなくはない。

正規化された固有関数  $\varphi_i, \varphi_j$  からは以下の簡潔な関係が得られる。

$$\int_a^b \varphi_i \varphi_j dx = \delta_{ij} \quad (6.2)$$

ここでの  $\delta$  はクロネッカーのデルタだ。式 (6.2) が 0 であるとき、 $\varphi_i, \varphi_j$  は直交かつ正規化されているため正規直交な関係にあるといえる。

<sup>\*1</sup> 理由になってはいない気がする。興味があれば各自の学習に任せる。

<sup>\*2</sup> ベクトルの内積は計算結果が定数だ。関数でも同じように定数を結果とする計算を用意しようと考えれば、定積分をすることは容易に想像できる。

## 6.2 正規直交な固有関数で展開

### 6.2.1 展開

正規化された固有関数の系  $\{\varphi_n(x)\}$ <sup>\*3</sup> で関数  $F$  を展開することを考える。これはベクトルの正規直交基底の線形結合することに対応する。そのため、展開できる条件はベクトルの系が基底となっていること、つまり  $\{\varphi_n(x)\}$  が  $F$  を表すに足るだけの関数を持っていることだ。このような条件を完全性という。この完全性は次の式が成立するかどうかで決定できる。

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \left[ F(x) - \sum_{n=0}^m a_n \varphi_n(x) \right]^2 w(x) dx = 0 \quad (6.3)$$

$\{\varphi_n(x)\}$  が完全性を持つことで関数  $F$  は次のように展開される。

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

当然気になるのは  $a_n$  だ。これは直交性の利用で計算できる。最初から狙いがあるわけではないが以下の計算をおこなう。

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) \varphi_m w(x) dx &= \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \right) \varphi_m^*(x) w(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_{nm} \\ &= a_m \end{aligned}$$

これで係数はわかる。計算には積分計算とシグマ計算の交換を使っている。簡潔に書くと

$$a_m = \int_a^b F(x) \varphi_m w(x) dx \quad (6.4)$$

ここで展開した関数  $F$  は少なくとも区分的に連続な関数だ。もし、関数  $f_0$  に不連続な点  $x_0$  があった場合、この方法では

$$f(x_0) = \frac{1}{2} \{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)\}$$

となる。これは不連続点の関数値は右側極限と左側極限の平均をとることを示している。

### 6.2.2 平均収束と一様収束

完全性の十分条件となってる式 (6.3) は今まであまり見かけたことのない極限だ。これは平均収束というものを扱っている。例として、関数  $S(x)$  を固有関数の系  $\{u_n(x)\}$ <sup>\*4</sup> で級数展開することを考える。

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^n u_i$$

<sup>\*3</sup> 添字が異なる  $\varphi_i$  はすべて直交の関係にある。

<sup>\*4</sup> 前節での正規直交な関数系。

とする。元の関数が連続な関数であれば何の問題もなく一様収束を用いて

$$|S(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

とすることができる。図がその概念図だ。

しかし、前節では区分的に連続な関数を扱っているため図のような状況が存在する。 $x = x_0$  で  $\Delta S$  関数値が飛んでいる。状況だ。このとき、 $s_n(x_0)$  が飛んでいる値の midpoint をとることが分かっていることから、 $x = x_0$  近傍で

$$|S(x) - s_n(x)| \geq \frac{\Delta S}{2} \quad \forall n$$

となってしまう。これでは一様収束が使えないそこで用いられるのが一様収束より条件が弱い平均収束だ。

$$\int_a^b |S(x) - s_n(x)| dx \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

当然 2 乗でも成立する。

### 6.2.3 ディラックのデルタと直交性

ディラックのデルタ関数  $\delta(x - t)$  に対して先と同様に  $\{\varphi_n\}$  での展開を考える。係数が  $t$  の関数になることが予想できる<sup>\*5</sup>。

$$\delta(x - t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \varphi_n(x)$$

ここから  $c_n$  を計算するが

$$c_n = \int_a^b \varphi_n^*(x) \delta(x - t) dx = \varphi_n^*(t)$$

となる。これはデルタ関数の一般的な定義だ。結局デルタ関数は

$$\delta(x - t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^*(t) \varphi_n(x)$$

となる。

## 6.3 フーリエ級数

聞いたことがあるのではないだろうか。電気電子工学科で学習する数学の内容としても 1, 2 を争う重要度ではないだろうか。心してかかればならない。

### 6.3.1 固有関数の導出

次の 2 階の常微分方程式を考える。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}, n \geq 0)$$

---

<sup>\*5</sup> 単純に 2 変数関数である  $\delta(x - t)$  の展開に  $\varphi_n(x)$  では足りないだろうという発想。

この方程式の境界条件は

$$y(x_0) = y(x_0 + 2\pi)$$

とする。するとこの微分方程式の解は

$$y = \cos nx, \sin nx$$

の2つとなる。これが区間  $[x_0, x_0 + 2\pi]$  での固有関数なのだ。本当に固有関数なのかを確認する。確認は3通りだ。まずは  $\sin nx, \sin mx$  の関係から。

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} \{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\} dx = C_n \delta_{mn}$$

となる。クロネッカーのデルタから直交性が明らかとなる。また  $m = n$  のときは  $C_m$  の値が肝心になる。

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} (1 - \cos 2nx) dx \\ &= \begin{cases} \pi & (n \neq 0) \\ 0 & (n = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。つまり、固有関数を  $\pi$  で割れば正規化できることが分かる。次は  $\cos nx, \cos mx$  の関係だ。

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} \{\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\} dx = D_n \delta_{mn}$$

$D_n$  も計算すると、

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} (1 + \cos 2nx) dx \\ &= \begin{cases} \pi & (n \neq 0) \\ 0 & (n = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。最後に  $\sin mx, \cos nx$  の関係を計算すると

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \sin mx \cos nx dx = \int_{x_0}^{x_0+2\pi} \{\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\} dx = 0$$

と計算され、3つの組み合わせによる計算から、 $\sin nx, \cos nx$  が区間  $[x_0, x_0 + 2\pi]$  で固有関数であることを確認することができた。またそれらは  $\pi$  で割ることで正規化されることが分かっている。

### 6.3.2 フーリエ級数展開

区間  $I : [x_0, x_0 + 2\pi]$  で  $\sin nx, \cos nx$  が固有関数であることが分かったため、これらで関数  $f$  を展開できる。特別に

$$C_0 = 0, \quad D_0 = 2\pi$$

と定義することで  $f$  は次のように展開ができる。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (6.5)$$

これをフーリエ級数展開という。式 (6.4) より係数 (フーリエ級数) は

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x) \sin nx dx$$

と計算される． $\pi$ で割っているのは，正規化の係数を含めているからだ．この正規化をするための係数をフーリエ級数に含めている操作が周期のことなる関数の展開の際に効果を発揮する．

## 第 7 章

# ベッセル関数・ベッセル級数

### 7.1 ベッセル関数

変数分離によって 3 変数の偏微分方程式を 3 つの常微分方程式に変換することができた．しかし，その上微分方程式が解けるものなのかはわからない．ここでその一部を紹介する．

#### 7.1.1 ベッセル方程式とは

ピストン内の粒子を考えると円柱座標が適しているだろう．円柱座標における波動方程式を計算すると  $\rho$  に関する微分方程式が他の 2 つの微分方程式とは異なり容易に解けない式となってる．

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left( \beta - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

となる<sup>\*1</sup>．この式に対して  $x = \beta\rho$  の置き換えをすると，方程式は変数  $x$  と  $x$  の関数の  $R$  という形になる．

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2} \right) R = 0$$

見やすさのため  $R$  を  $y$  に， $m$  を  $\nu$  に置き換えることで，

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

と簡単に表記し，この方程式を位数  $\nu$  のベッセル方程式と呼ぶ．

#### 7.1.2 ベッセル方程式の解

解  $y$  の導出はすでに扱っているフロベニウス法を用いる．

$$y = x^\alpha \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda \quad (\alpha = \pm\nu)$$

と仮定される．位数の現れ方に注意しよう．

---

<sup>\*1</sup> 最初の登場では関数は  $P$  となっていて，式の形も若干違うが同じ式を示している．最初に出た式に対して  $\rho^2$  で割る操作を考えてみよう．

位数を非負実数と仮定して解くと次の2式になる\*2.

$$J_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2j} \quad (7.1)$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2j} \quad (7.2)$$

$$(7.3)$$

このとき、2つの解は線形独立な関係にある。この解のことをベッセル関数という。

次に位数が自然数  $n$  であると仮定する。すると  $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$  で  $\Gamma(j - n + 1) \rightarrow \pm\infty$  である。そうすると  $J_{-n}$  で考える必要のある系列は  $n$  以降のみとなり

$$J_{-n}(x) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (j - n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j-n}$$

となる。ここで  $j = i + n$  と置いて  $j_{-n}$  を計算してみる。

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+n}}{(i+n)! i!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i+n} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (-1)^n}{(i+n)! i!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i+n} \\ &= (-1)^n J_n \end{aligned}$$

となり、もう一方の解も現れる。また、この関係から、2解は線形従属であることもわかる。

さらに、付け加えると円柱座標上での波動方程式から現れるベッセル方程式の位数は必ず整数となる。これはその由来が方位角の自由度にあるからだ。

### 7.1.3 円柱座標の波動方程式

円柱座標の波動方程式を変数分離したら、 $\varphi, z$  に対する常微分方程式は簡単なものだった。そして、面倒な部分も解くことができたため、一般解は次のようにまとめることができる。

$$f(\rho, \varphi, z) = J_m(\beta\rho) e^{\pm im\varphi} (A_l \cos l_z + B_l \sin l_z)$$

また、時間成分を与え、さまざまに  $k, l, m$  を置くことを考えることで最終的な結論を得ることができる。

$$E_z(\rho, \varphi, z, t) = \sum_{k,l,m} E_{k,m} J_m(\beta\rho) e^{\pm im\varphi} (A_l \cos l_z + B_l \sin l_z) e^{-i\omega t} \quad (7.4)$$

ただし

$$\beta^2 = k^2 - l^2, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

---

\*2 すでに示した解は位数に当たる数が整数であり階乗の形で現れた。これに対しては階乗を実数に拡張したガンマ関数で対処する。

### 7.1.4 ノイマン関数とハンケル関数

ノイマン関数とは位数が非負実数のベッセル方程式の解  $J_\nu, J_{-\nu}$  によって次のように定義される。

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$$

ここでの位数は整数ではない。整数のときのノイマン関数は極限の計算によって求められる。

さらに、ハンケル関数は次のように定義される。

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)} J_\nu(x) + i N_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)} J_\nu(x) - i N_\nu(x) \end{aligned}$$

当然  $H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}$  は複素共役の関係にある。

以上でベッセル方程式の解が3つの方法で表現された。最初のベッセル関数を第1種ベッセル関数、ノイマン関数を第2種ベッセル関数、ハンケル関数を第3種ベッセル関数と呼ぶことがある。

## 7.2 ベッセル関数の母関数

様々な位数のベッセル関数を導出できる単純な方法があればうれしい。というところから母関数は現れる。

### 7.2.1 母関数の導出

指数関数のテーラー展開は簡単にできることは皆の知るところだろう。次の2つの指数関数をテーラー展開して積をとる。

$$e^{\frac{x}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!}, \quad e^{-\frac{x}{2t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x}{2t}\right)^k}{k!}$$

これらの積を計算すると

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{i!j!} \left(\frac{x}{2}\right)^{i+j} t^{-i+j}$$

となる。これに対して  $n = -i + j$  をおき、 $j$  を消去する。

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!(n+i)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2i} t^n$$

となるがこの  $t^n$  の係数の形に見覚えはないだろうか。まさしく  $J_n$  である。最終的に

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \quad (7.5)$$

となる。このような関数を母関数という。以降、

$$g(x, t) = \exp \frac{x}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right)$$

と表記する。

## 7.2.2 数列的なベッセル関数

母関数を  $t$  で偏微分してみよう.

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} = \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) t^{n-1}$$

$2t/x$  を各辺にかけることで

$$e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} \left(t + \frac{1}{t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2n}{x} J_n(x) t^n$$

となる. 計算を続けると

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{J_{n-1} + J_{n+1}\} t^n &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2n}{x} J_n(x) t^n \\ \therefore J_{n-1} + J_{n+1} &= \frac{2n}{x} J_n(x) \end{aligned}$$

となり, 3 項間漸化式になる.

次は母関数を  $x$  で偏微分してみる.

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x) t^n$$

これも先と同様に計算を進めることで

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$$

という, 先と異なる 3 項間漸化式を得る. 2 つの 3 項間漸化式から,  $J_{n-1}$  を消去すると

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x) \quad (7.6)$$

という 2 項間漸化式が得られる.

## 7.3 ベッセル級数

証明や議論があまりに面倒なので結果だけを記す.

位数  $\nu$  のベッセル関数  $J_\nu$  の根を小さいものから  $\alpha_{\nu 1}, \alpha_{\nu 2}, \dots$  とする. ベッセル方程式のもととなった円柱座標による微分方程式を考え, そこでの変数  $\rho$  の定義域が 0 から  $a$  であり境界での解が 0 であるとする<sup>\*3</sup>. このとき,

$$p(\rho) = \rho, \quad q(\rho) = -\frac{\nu^2}{\rho}, \quad w(\rho) = \frac{\rho}{a^2}, \quad \lambda_n = \alpha_{\nu n}^2$$

とすると

$$\frac{d}{d\rho} \left[ p(\rho) \frac{d}{d\rho} \right] + q(\rho)$$

---

<sup>\*3</sup> 円柱座標での微分方程式を変数分離すると 1 つは  $\rho$  の微分方程式となる. その解を  $P(\rho)$  とすると  $P(0) = P(a) = 0$  であるということだ.



は先の章で扱った  $\mathcal{L}$  にほかならず,

$$\{\mathcal{L} + \lambda_n w(\rho)\} J_\nu \left( \alpha_\nu \frac{\rho}{a} \right) = 0$$

が成立する. 前章での議論と同様のことをすることで

$$(\alpha_{\nu m}^2 - \alpha_{\nu n}^2) \int_0^a \frac{\rho}{a^2} J_\nu \left( \alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) J_\nu \left( \alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) d\rho = 0 \quad (7.7)$$

$$\int_0^a \left[ J_\nu \left( \alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) \right]^2 \rho d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(\alpha_{\nu m})]^2 \quad (7.8)$$

という 2 つの関係を得る. 位数の異なるベッセル関数がそれぞれ直交していることがわかる. このことから, 関数をベッセル級数を用いて展開できることがわかる.

## 7.4 球体座標でのベッセル関数

球体座標において波動方程式を変数分離すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - \kappa) R &= 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( \kappa - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta &= 0 \\ \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} &= -m^2 \Phi \end{aligned}$$

原点からの距離である  $r$  の関数  $R$  に注目する.  $k = 0$  ならば,

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \kappa R = 0$$

を得る. ここで解の  $R$  のうち 1 つ<sup>\*4</sup>が  $r$  の実数乗であると仮定する.  $R = r^\alpha$  だ. すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} (\alpha r^{\alpha+1}) - \kappa r^\alpha &= 0 \\ (\alpha^2 + \alpha - \kappa) r^\alpha &= 0 \\ \therefore \alpha^2 + \alpha - \kappa &= 0 \end{aligned}$$

となり, 指数についての式が現れる. この  $\alpha$  の 2 次方程式の解を  $\alpha_1, \alpha_2$  とする. 2 次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -1, \quad \alpha_1 \alpha_2 = -\kappa$$

と分かる. ここでさらに  $\alpha$  の解が整数であると仮定する.  $\alpha_1 = n$  とおくと,

$$\alpha_2 = -(n+1), \quad \therefore \kappa = n(n+1)$$

となる.  $n$  の置き方に対応して任意定数をおくことで  $R$  の解を導くことができる.

$$R_n = A_n r^n + B_n r^{-n-1}$$

---

<sup>\*4</sup> 無数の解が存在しているので特別解を考えている.

$\kappa = n(n+1)$  が存在することを考えるので飛び飛びに  $R_n$  が与えられることがわかる.

次に  $k \neq 0$  のときを考える. このときの微分方程式は

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2R \frac{dR}{dr} \{k^2 r^2 - n(n+1)\} R = 0$$

となる. ここで  $x = rk, R(x) = Z(x)/\sqrt{x}$  をおくと

$$r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + r \frac{dZ}{dr} + \left\{ k^2 r^2 - \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \right\} Z = 0$$

と微分方程式は変形される. そのまま  $x = rk$  を代入して  $x$  についての方程式とみると

$$x^2 Z_\nu'' + x Z_\nu' + (x^2 - \nu^2) Z_\nu = 0$$

$Z_\nu$  は位数  $\nu = n + \frac{1}{2}$  のベッセル関数であるとわかる. このベッセル関数は位数が整数に  $1/2$  を足したものになっている. この場合は次の式で計算される.

$$\begin{aligned} j_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \\ n_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{x}} N_{n+\frac{1}{2}}(x) \\ h_n^{(1,2)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1,2)}(x) \end{aligned}$$

## 7.5 ベッセル関数の一般化

### 7.5.1 ベッセル関数と複素関数

ベッセル関数の母関数をもう一度示す.

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

ここで変数  $t$  を複素数で次のようにおく.

$$t = e^{j\theta}$$

このようにすると

$$t - \frac{1}{t} = 2j \sin \theta$$

となる. これによってベッセル関数の母関数は

$$e^{jx \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{jn\theta}$$

となる.

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

という関係を使うことで

$$e^{jx \sin \theta} = J_0(x) + 2[J_2 \cos 2\theta + J_4 \cos 4\theta + \cdots] + 2j[J_1 \sin \theta + J_3 \sin 3\theta + \cdots]$$

と、このようにシグマが展開される．ここから

$$\begin{aligned}\cos(x \sin \theta) &= J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\theta) \\ \sin(x \sin \theta) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \sin[(2n-1)\theta]\end{aligned}$$

とわかる．

## 7.5.2 ベッセル関数の一般化

さて、次は母関数を  $t^{m+1}$  で割ったものを積分する．複素数平面上の単位円を積分の経路とする．

$$\int_c \frac{e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}}{t^{m+1}} dt = \int_c \sum_n J_n t^{n-m-1} dt = 2\pi j J_m(x)$$

この計算を別の表現で行う．

$$2\pi j J_m(x) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{jx \sin \theta}}{e^{j(m+1)\theta}} j e^{j\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{j(x \sin \theta - m\theta)} j d\theta$$

これより実数  $m$  を位数とするベッセル関数は

$$J_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin \theta - m\theta) d\theta \quad (7.9)$$

で与えられる．さらに  $m$  が整数  $n$  であるときを考える．このとき被積分関数は  $x = \pi/2$  に対して対象であることから

$$J_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta \quad (7.10)$$

となる．

# 第 8 章

## ルジャンドル多項式と母関数

### 8.1 2 項定理

#### 8.1.1 等比級数の和

2 項定理の一般化を無限級数を用いて行う．まずは基本の式を示す．

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

この式を微分し続ける.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \\
\frac{2}{(1-x)^3} &= 2 + 3x + 12x^2 + \cdots \\
\frac{3 \cdot 2}{(1-x)^4} &= 6 + 24x + \cdots \\
&\vdots \\
\frac{(m-1)!}{(1-x)^m} &= (m-1)(m-2) \cdots 2 \cdot 1 + m(m-1) \cdots 3 \cdot 2x + (m+1)m \cdots 4 \cdot 3x^2 + \cdots \\
\therefore \frac{1}{(1-x)^m} &= 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{(m+1)m}{2!}x^2 + \frac{(m+2)(m+1)m}{3!}x^3 + \cdots \\
(1-x)^{-m} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-m}{k} (-x)^k
\end{aligned} \tag{8.1}$$

2 項定理とまではいかないが<sup>3</sup>, 近い形になった.

### 8.1.2 組み合わせの拡張

今まで整数上で考えてきた組み合わせは

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

という式で書き直すことができた. ここでは  $m, k \in \mathbb{N}$  とされてきた. これを  $m$  の部分を実数に拡張する.  $a \in \mathbb{R}$  をとることで,

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2) \cdots (a-k+1)}{k!}$$

となる. 結果を見ると当然の式になっている.  $a$  は負の整数をとることができるので次のような関係が得られる.

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2) \cdots (-1-n+1)}{n!} = (-1)^n, \quad \binom{-2}{n} = (-1)^n(n+1), \cdots$$

### 8.1.3 2 項定理の一般化

$m \in \mathbb{N}$  をとると

$$\begin{aligned}
(1+x)^m &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k \\
&= 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1) \cdots 2}{(m-1)!}x^{m-1} + \frac{m!}{m!}x^m \\
(1+x)^{-m} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-m}{k} x^k \\
&= 1 - \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 - \frac{(m+2)(m+1)m}{3!}x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

そして、 $a \in \mathbb{R}$  をとると

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \quad (8.2)$$

となる。

## 8.2 母関数

数列  $\{a_n\} (n=0, 1, \dots)$  と関数  $f(x)$  が次のように関係しているとする。

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

このとき、関数  $f(x)$  は数列  $\{a_n\}$  の母関数という。母関数は数列の情報をすべて含んでいる関数であるといえる。このときの数列  $\{a_n\}$  は関数列であってもよく、ある関数列に対する母関数が前もって知られていることがある。

また数列から母関数の導出、母関数から数列の導出は関数が展開された状態である必要がない。

例えば数列  $\{a_n\}$  が次のように与えられてたとする。

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

2 項間の漸化式より

$$\begin{aligned} a_2x^2 &= a_1x \cdot x + a_0 \cdot x^2 \\ a_3x^3 &= a_2x \cdot x^2 + a_1x \cdot x^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

すべての辺々を足し合わせることで

$$f(x) - a_1x - a_0 = (f(x) - a_0) \cdot x + f(x) \cdot x^2$$

となる。あとは数列の条件を当てはめることで

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

を得る。

母関数から数列を得るのは簡単で係数を求めればよいので

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} f(x) \Big|_{x=0}$$

でよい。

## 8.3 ルジャンドル多項式の母関数

### 8.3.1 母関数の定義

ルジャンドル多項式の母関数  $g(x, t)$  は次のように定義される。

$$g(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad (|t| < 1) \quad (8.3)$$

この母関数を式変形してゆく。

$$\begin{aligned}
 g(x, t) &= (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n (2xt - t^2)^n \\
 &= 1 + xt + \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)xt^2 + \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)t^3 + \cdots \\
 \therefore P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_4(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \cdots
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

母関数から関数列を得るには、式 (8.4) の中の  $(2xt - t^2)^n$  の部分を 2 項定理によってシグマを用いた式にして、その結果として現れる 2 重のシグマを処理すればよい。

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k} \tag{8.5}$$

を得る。ここで利用した 2 重シグマの処理とは以下の変換だ。

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} \quad (n = 2m - l, k = n - m)$$

### 8.3.2 母関数の利用

具体的にルジャンドル多項式の母関数が見れる例を挙げる。

図 8.1 のように  $z$  軸上  $z = a$  の位置に電荷  $q$  をおく。そして極角が  $\theta$ 、原点からの距離が  $r$  の位置における電位を考える。

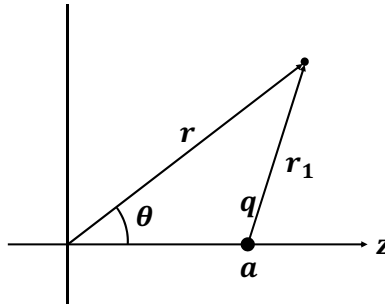


図 8.1 電位の計算

電荷からの距離を  $r_1$  とすると容易に電位  $V$  は

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1}$$

と与えられる。しかし、ここでは原点からの距離  $r$  と電荷の位置  $z = a$  がわかっているだけで、余弦定理を用いれば容易に  $r_1$  を計算することができ、次の式で電位は計算できる。

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 - 2\frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^n$$

一般的に 2 点間の距離の逆数を位置ベクトルなどで考えるとルジャンドル多項式の母関数が現れる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} &= \frac{1}{(|\vec{r}_1|^2 - 2|\vec{r}_1||\vec{r}_2|\cos\theta + |\vec{r}_2|^2)} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{|\vec{r}_1|^2} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) \left(\frac{|\vec{r}_2|}{|\vec{r}_1|}\right)^n & (|\vec{r}_1| > |\vec{r}_2|) \\ \frac{1}{|\vec{r}_2|^2} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) \left(\frac{|\vec{r}_1|}{|\vec{r}_2|}\right)^n & (|\vec{r}_1| < |\vec{r}_2|) \end{cases}\end{aligned}$$

電荷が複数個あった場合は単純に重ね合わせの原理を使えばよいので考えることは多くない．重ね合わせの際にルジャンドル多項式の一部が相殺されることがあり，これによって計算を容易ににすることができる．また  $n$  が大きいルジャンドル多項式は次数が大きな多項式となることがわかっているので，近似のするときに無視するという選択肢がある．

## 8.4 ルジャンドル多項式の漸化式

ルジャンドル多項式を関数列とみて，その漸化式を求める．

母関数  $g(x, t)$  を次のようにあらわす．

$$g(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

これを偏微分することで計算を進める．

### 8.4.1 $t$ での微分

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} = \frac{x - t}{(1 - 2xt + t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$

さらに

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n &= \frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^{1/2}} \\ &= \frac{(1 - 2xt + t^2)}{x - t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} \\ &\Rightarrow (1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + (t - x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0\end{aligned}$$

となる．左辺に対してさらに計算を進める．

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \sum_{m=0}^{\infty} mP_m(x)t^{m-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nxP_n(x)t^n + \sum_{s=0}^{\infty} sP_s(x)t^{s+1} + \sum_{s=0}^{\infty} P_s(x)t^{s+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)t^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) + P_{n-1}(x) - xP_n(x)]t^n + P_1(x) - xP_0(x) \\ &\quad (m = n+1, s = n-1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x)]t^n + P_1(x) - xP_0(x) = 0\end{aligned}$$

計算の結果から、次の漸化式をおくことができる。

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$P_1(x) - xP_0(x) = 0$$

## 8.4.2 $x$ での微分

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial x} = \frac{t}{1 - 2xt + t^2}^{3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^n$$

これをスタートに

$$t \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = (1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2xP'_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^{n+2} = 0$$

$$\therefore P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) = P_n(x) + 2xP'_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$P'_0(x) = 0, \quad p_0(x) - P'_1(x) + 2xP'_0(x) = P_0(x) - P'_1(x) = 0$$

という漸化式を得る。

## 8.4.3 2つの漸化式

2つの漸化式をまとめ計算すると次の式を得る。

$$(1 - x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (8.6)$$

ルジャンドル多項式はこの微分方程式の解であるということができる。

## 8.5 ルジャンドル多項式の性質

### 8.5.1 定点におけるルジャンドル多項式

$x = 1$  としてルジャンドル多項式を考える。母関数は次のようになる。

$$g(1, t) = (1 - 2t + t^2)^{-1/2} = \frac{1}{1 - t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

ここから

$$P_n(1) = 1$$

を得る。また  $x = -1$  とすると

$$g(-1, t) = \frac{1}{1 + t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

となり、

$$P_n(-1) = (-1)^n$$



を得ることができる。それでは  $x = 0$  とするとどうなるだろう。

$$\begin{aligned}
 g(0, t) &= (1 + t^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (t^2)^k \\
 &= 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8} + \cdots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} t^{2n} + \cdots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) t^n \\
 \therefore \quad &\begin{aligned} P_{2n}(0) &= (-1)^n \frac{2n-1}{2n} \\ P_{2n-1} &= 0 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

### 8.5.2 母関数の対称性

ルジャンドル多項式の母関数  $g(x, t)$  の対称性より,

$$g(x, t) = g(-x, -t)$$

であることがすぐにわかる。つまりは

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x) (-t)^n$$

である。ここから

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \quad (8.7)$$

という関係を得る。まとめると

$$P_n : \begin{cases} \text{even} & (n : \text{even}) \\ \text{odd} & (n : \text{odd}) \end{cases}$$

となる。ルジャンドル多項式の偶奇は添字の偶奇に従うのだ。

### 8.5.3 直交性

ルジャンドル多項式には

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m) \quad (8.8)$$

が成立する。実際に計算してみれば確認ができる。では  $n = m$  の時どうなるのかを計算する。

まずは,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - 2tx + t^2} = \int_{-1}^1 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \right]^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx$$

とする。ここで左辺の積分を  $y = 1 - 2xt + t^2$  の置換を利用することでおこなう。

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - 2tx + t^2} = \frac{1}{2t} \int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{t} \ln \left( \frac{1+t}{1-t} \right)$$

対数関数の部分にはテーラー展開を行うことで

$$\frac{1}{t} \ln \left( \frac{1+t}{1-t} \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2t+1} t^{2n}$$

とする.

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2t+1} t^{2n}$$

であるので

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2t+1}$$

#### 8.5.4 ルジャンドル多項式での展開

ルジャンドル多項式の関数列は完備なのであらゆる関数はルジャンドル多項式で展開できる.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

ここでの  $a_m$  は次のように計算される.

$$a_m = \frac{\int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx}{\int_{-1}^1 [P_m(x)]^2} = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx$$

## 第9章

# フーリエ変換・ラプラス変換

まずはフーリエ級数展開を扱い、そのあとでフーリエ変換へ進む。そして最後にラプラス変換を扱う。関数を積分によって変形させる積分変換から微分方程式を解くなどする。

### 9.1 フーリエ級数展開

まずはフーリエ級数展開と複素数を合わせる内容の話をする。

#### 9.1.1 オイラーの公式

馴染み深い式から話を始める。

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \quad (9.1)$$

複素数平面では単位円を示していることも皆の知るところだろう。左辺を整数乗すれば、それに伴い右辺も整数上され、その展開の結果から三角比の関係式を得られる。

$$\begin{aligned} e^{2jx} &= (\cos x + j \sin x)^2 \\ &= \cos^2 x + 2j \sin x \cos x - \sin^2 x \\ \therefore \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

このような方法は 3 乗, 4 乗と同じように使える.

### 9.1.2 フーリエ級数

周期が  $2\pi$  の関数  $f(x)$  は次のように展開される.

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, \dots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

ここで三角比を複素数によって表現してみる.

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{jnx} + e^{-jnx}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{jnx} - e^{-jnx}}{2j} \end{aligned}$$

これを代入してみると

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{jnx} + e^{-jnx}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{jnx} - e^{-jnx}}{2j} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jnx} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jnx} \end{aligned}$$

と式変形できるここで複素数の数列  $c_n$  を次のように定義する.

$$\begin{aligned} c_n &:= \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jnx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (\cos nx - j \sin nx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-jnx} dx \\ c_{-n} &:= \frac{a_n + jb_n}{2} e^{jnx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{jnx} dx \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

このようにすると

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}$$

と簡潔に書くことができる.

### 9.1.3 $e^{jnx}$ の直交性

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (e^{jmx})^* e^{jnx} dx &= \int_0^{2\pi} e^{j(n-m)x} dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{j(n-m)} \left[ e^{j(n-m)x} \right]_0^{2\pi} = 0 & (m \neq n) \\ 2\pi & (m = n) \end{cases} \end{aligned}$$

これより  $e^{jnx}$  には直交性があることがわかる。

これは複素数にする前の  $\sin nx, \cos nx$  が直交であることから明らかだ\*<sup>1</sup>。

### 9.1.4 フーリエ級数展開の変形

フーリエ係数をすべて積分の形にしてフーリエ級数展開を書き直す。

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \right) \cdot \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \right) \cdot \sin nx \\ &= \left( \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx dx \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx dx \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \end{aligned}$$

この変形が意味するのは積分されている関数の係数だ。無理やり  $1/\sqrt{\pi}$  という形を作っている。これがフーリエ変換につながるなのでこれ以上の説明はしない。

## 9.2 フーリエ級数展開の性質

### 9.2.1 鋸波

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi \\ x - 2\pi, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

このような関数のフーリエ展開を考える。区間は  $[0, \pi)$  を考える。元の関数は  $x = m\pi$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) で不連続な関数だ。一般に周期の端で不連続な関数に対してのフーリエ展開は精度が高くない。実際に展開すると

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

となる。これをグラフでプロットしてみる。図 9.1 だ。  $n$  が大きくなるに従い、元の関数に近づきはするがいまひとつな印象を受けるグラフとなっている。

### 9.2.2 関数の拡張

精度の高い展開をするために、元の関数に本来関係のない部分の関数を定義し、展開の精度が高まるようにする手法がある。

$$f(x) = x \quad 0 \leq x < \pi$$

---

\*<sup>1</sup>  $\sin nx, \cos nx$  が直交であることがフーリエ級数展開を可能にする理由の 1 つになっている。これに関しては関数の正規直交、完備性を扱っている部分を読み直してほしい。

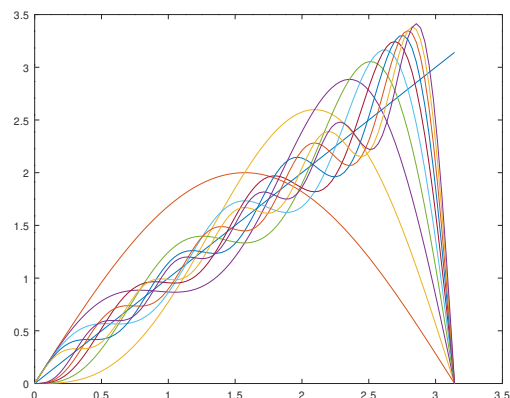


図 9.1 フーリエ級数の例

を考える．この関数の展開を考えたとき， $[0, \pi)$  に入っていない  $x$  における関数は自由に決定しても構わない．これは  $f(x)$  の部分だけ与えられた式を満たしていればよいからだ．ここで関数の定義域外において任意に関数をおく操作を拡張という．

フーリエ展開には周期  $2\pi$  の関数となることが望ましい．さらに言えば周期の両端での関数値が同じであるとなおよい<sup>\*2</sup>．これらから，次のように関数を拡張する．

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

そして展開を実行すると

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\cos nx}{n^2}$$

となる．ここでシグマの項を注目すると  $n^2$  が分母になっている．前小節であまり精度がよくなかった展開では分母は  $n$  であった．展開の精度はシグマの項の収束の速さに言い換えることができる<sup>\*3</sup>ので分母が  $n^2$  である今の展開のほうが精度が高いといえる．

さて，関数の展開という手法を試したがこれはフーリエ展開に限ったことではない．テイラー展開を考えたときは次のように関数を拡張する．

$$f(x) = x \quad -\infty < x < \infty$$

<sup>\*2</sup> 前小節の内容から周期の端で不連続であると展開の精度があまり高くない．

<sup>\*3</sup> シグマの項は真の関数へ近づく度合いといえる．その近づく度合いが早い段階 ( $n$  が小さい段階) で小さくなるというのは小さな  $n$  で真の関数を得られるということになる．つまり精度が高いのだ．

### 9.2.3 一般の周期のフーリエ級数

ここまででフーリエ級数展開してきた関数は周期が  $2\pi$  のものであった。周期は常に  $\pi$  ではないのでここで一般の周期  $L$  の関数  $f(x)$  へのフーリエ級数展開を与える。

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{2n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{L} \right] \\ a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{2n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

基本的に周期は都合のいいものをとればいい<sup>\*4</sup>が知っておいて損はない。また先に扱った複素数を用いた展開での係数  $c_n$  は

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-jn\pi x/L} dx \quad (n \in \mathbb{Z}, -\infty < n < \infty)$$

となる。

### 9.2.4 平均収束

フーリエ級数展開は平均収束する。平均収束するとは次の式が成立するということだ。

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left[ f(x) - \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m a_n \cos nx + \sum_{n=1}^m b_n \sin nx \right) \right]^2 dx = 0$$

厳密にはこの式は 2 乗平均収束と呼ばれる。平均収束に関しては統計などで扱うかもしれない。詳しくは扱わない。

### 9.2.5 微分・積分

フーリエ級数展開ではテーラー展開と同様に項別積分が許されている。具体的な成分は任せるが、項別積分を実行するとシグマの項の分母において、その次数が 1 つ大きくなることが確認できる。これは展開の精度が高まったことを示している。

逆に微分すると精度は落ちる。フーリエ級数展開では積分、微分によって収束の速度が変化するのだ。

これに関しては三角波と方形波のフーリエ級数展開を比べると体感できる。

## 9.3 フーリエ変換

ようやくフーリエ変換を扱う。この関数の変換は積分を用いるため、関数の積分変換である。フーリエ積分とも呼ぶ。

---

<sup>\*4</sup> 周期  $\pi$  の関数は周期  $2\pi$  として計算しても問題はない。

### 9.3.1 導出

周期  $2L$  の関数  $f(x)$  をフーリエ級数展開する.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi x/L} \quad \left( c_n := \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-jn\pi x/L} dx \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi x/L} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{L} \int_{-L}^L f(u) e^{-jn\pi u/L} du \end{aligned}$$

ここで  $\xi_n = n\pi/L$  を定義する. 添字ごとの間隔は  $\Delta\xi = \pi/L$  である.  $\xi_n$  によって,

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\xi_n x} \Delta\xi \int_{-L}^L f(u) e^{j\xi_n u} du$$

となる. ここまで来たら  $L \rightarrow \infty$  を考える. すると  $\xi_n$  は連続的な変数  $\xi$  とみなすことができ,  $\Delta\xi$  は微小量  $d\xi$  となる. するとシグマの計算は積分計算に書き直すことができる. 最終的に関数  $f(x)$  は次のように近似される.

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\xi x} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\xi u} du \quad (9.2)$$

式 9.2 をよく見ると後ろの積分によって関数  $f$  を変数  $\xi$  の関数に変え, 前方の積分によって  $f$  に戻している. この関数の変換を部分的に取り出すことでフーリエ変換を定義するのだ.

関数  $f(x)$  を関数  $F(\xi)$  にフーリエ変換,  $F$  を  $f$  に逆フーリエ変換するとは次の通りだ.

$$F(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx \quad (9.3)$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F](x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{j\xi x} d\xi \quad (9.4)$$

これは定義の一例だ\*5.

ここから式 (9.2) は  $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[[F][f]](x)$  を意味していたと分かる.

### 9.3.2 性質

フーリエ変換ができる条件は積分計算ができることだ. これを数学的に表現すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx < \infty$$

ということだ. 別表現では

$$f(x) \in L^1(-\infty, \infty)$$

となる.  $L^1$  級という表現がある\*6.

条件を満たすとフーリエ変換が可能となる. そして次の関係も成り立つ.

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| e^{-j\xi x} dx < \infty$$

\*5 係数  $1/2\pi$  の振り分け方に自由があるため様々な定義が可能だ. ここでは等分することで定義した.

\*6 1 回微分した後の関数が連続であることを  $C^1$  級といたりするがその仲間の表現だ.

加えて述べておきたいのは変換の前後で  $L^1$  級が維持されるわけではないということだ。まず  $f(x) = e^{-\gamma|x|}$  で変換をする。この関数が偶関数であることを利用して計算をすすめる。

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|} e^{-j\xi x} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} \cos \xi x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\gamma}{\xi^2 + \gamma^2} \end{aligned}$$

となる。当然ここでの  $F(\xi)$  は  $L^1$  級だということがわかる。

次は

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

をフーリエ変換する。

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\xi x} dx \\ &= \int_{-a}^a \cos \xi x dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi a}{\xi} \end{aligned}$$

となるがこの  $F(\xi)$  は  $L^1$  級ではない。

### 9.3.3 ガウス関数

$$f(x) = e^{-ax^2} \quad (a > 0)$$

ガウス関数をフーリエ変換する。ガウス積分を使うことが必要で、ここでは上手に平方完成をする。

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-j\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -a \left( x + \frac{j\xi}{2a} \right)^2 - \frac{-\xi^2}{4a} \right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -a \left( x + \frac{j\xi}{2a} \right)^2 \right\} dx \\ &= \frac{a}{\sqrt{2a}} e^{-\xi^2/4a} \end{aligned}$$

このように計算される。



## 9.4 フーリエ変換の応用

### 9.4.1 微分された関数のフーリエ変換

関数  $f(x)$  に対するフーリエ変換は式 (9.3) で与えられる。では  $f(x)$  を 1 回微分した関数をフーリエ変換したらどうなるのかを計算する。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{df(x)}{dx}\right](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx} e^{-j\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(x)e^{-j\xi x}]_{-\infty}^{\infty} + (j\xi) \cdot e^{-j\xi x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\xi x} dx \\ &= (j\xi)\mathcal{F}[f(x)](\xi)\end{aligned}$$

部分積分を使うことで簡単な形になった。この方法を繰り返すことで

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right](\xi) = (j\xi)^n \mathcal{F}[f(x)](\xi) \quad (9.5)$$

という結果を得る。

### 9.4.2 畳み込み

畳み込み積分を次のように定義する。

$$f * g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

通常では必要ない係数  $1/\sqrt{2\pi}$  が入っているのはフーリエ変換で畳み込み積分を組み込むときに計算が容易になるからで、それ以上の意味はない。

このように畳み込み積分を定義したうえで、畳み込み積分をした関数  $f * g$  をフーリエ変換する。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \right\} e^{-j\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-j\xi(x-y)}g(y)e^{-j\xi y}dy \right\} dx \\ &= \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]\end{aligned}$$

このように畳み込み積分された関数のフーリエ変換はフーリエ変換後にかけ合わせることで得られることがわかる。

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g] \quad (9.6)$$

同様の計算を関数の積に対してもおこなう。

$$\mathcal{F}[f \cdot g] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g] \quad (9.7)$$

を得る。

ここから、関数の畳み込みをフーリエ変換と逆変換から求める方法が存在する。

### 9.4.3 微分方程式

熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

をフーリエ変換を利用して解く．ここでは解く関数  $u(x, t)$  に対してフーリエ変換した関数  $U(\xi, t)$  を用意する．

$$U(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-j\xi x} dx$$

である．熱伝導方程式の両辺をフーリエ変換すると

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -a^2 \xi^2 U$$

となり  $U$  の常微分方程式となる．初期値  $U(\xi, 0) = U_0(\xi)$  は次で与えられる．

$$U_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) e^{-j\xi x} dx$$

初期値が与えられたので  $U(\xi, t)$  を求めると

$$U(\xi, t) = e^{-a^2 \xi^2 t} U_0(\xi)$$

となる．指数の部分はガウス関数がフーリエ変換されたものとわかる．つまり

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u(x, t)] &= U(\xi, t) = \mathcal{F} \left[ \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-x^2/4a^2t} \right] \cdot \mathcal{F}[u_0(x)] \\ &= \mathcal{F} \left[ \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-x^2/4a^2t} * u_0(x) \right] \end{aligned}$$

である．最後に逆フーリエ変換することで元の関数における解が計算される<sup>\*7</sup>．

## 9.5 ラプラス変換

### 9.5.1 導入

ラプラス変換で扱う関数  $f(t)$  は次のようなものだ．変数が  $t$  であるのは暗に時間を変数にする関数を扱うことを示している．

$$\begin{cases} |f(t)| \leq C e^{\sigma_0 t} & (t \geq 0) \\ f(t) = 0 & (t < 0) \end{cases}, \quad \sigma_0, C : \text{定数}$$

この関数は  $L^1$  級ではないことがある．つまりフーリエ変換ができないことがある関数だ．

そのような関数に対して複素数  $s$  を次のようにおく．

$$s = \sigma + j\mu \quad \sigma \geq \sigma_0$$

---

<sup>\*7</sup> 量み込みは余計な係数がついているほうで計算しなければならない．

この  $s$  を利用することで関数  $F(s)$  が定義できる.

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (9.8)$$

これをラプラス変換という. これはフーリエ変換での  $e^{-j\xi t}$  の指数の部分を一一般の複素数に拡張したものだといえる.

逆変換は次の式でなされる.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi j}} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (9.9)$$

## 9.5.2 具体的な関数

$f(t) = 1, (t \geq 0)$  のラプラス変換をする.

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad (\text{Re } s > 0)$$

さらに,  $\mathcal{L}[t], \mathcal{L}[t^2], \dots$  についてもラプラス変換をする.

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}, \dots, \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\text{Re } s > 0)$$

次は指数関数に対してもラプラス変換をおこなう.

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{s-a} \quad (\text{Re } s > a)$$

$e^{at}$  を  $a$  について微分しながらラプラス変換することで次の結果を得る.

$$\mathcal{L}[te^{at}] = \frac{1}{(s-a)^2}, \quad \mathcal{L}[t^2e^{at}] = \frac{2}{(s-a)^3}, \dots, \quad \mathcal{L}[t^ne^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (\text{Re } s > a)$$

最後に三角関数のラプラス変換を示す. これは指数関数の結果を利用する.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at} \cos \omega t] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{(a+j\omega)t} + e^{(a-j\omega)t}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-a-j\omega} + \frac{1}{s-a+j\omega} \right) \\ &= \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2} \quad (\text{Re } s > a) \end{aligned}$$

となる. 同様の計算をおこなうことで

$$\mathcal{L}[e^{at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2} \quad (\text{Re } s > a)$$

という結果を得る. ここで  $a = 0$  とすることで三角関数のラプラス変換を得る.

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

### 9.5.3 微分された関数

部分積分を使うことで微分された関数のラプラス変換を計算する.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f(t)](s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\
 \mathcal{L}[f'(t)](s) &= \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = [f(t)e^{-st}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\
 &= -f(0) + s\mathcal{L}[f](s) \\
 \mathcal{L}[f''(t)](s) &= \int_0^{\infty} f''(t)e^{-st} dt = [f'(t)e^{-st}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \\
 &= -f'(0) + s\mathcal{L}[f'](s) \\
 &= -f'(0) - sf(0) - s^2\mathcal{L}[f](s) \\
 &\vdots \\
 \mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) &= -f^{(n-1)}(+0) - sf^{(n-2)}(+0) - \dots - s^{n-1}f(+0) + s^n\mathcal{L}[f](s)
 \end{aligned}$$

### 9.5.4 変換後の微分

関数  $f(t)$  をラプラス変換した後の関数  $F(s)$  を微分することを考える.

$$\begin{aligned}
 F'(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{\infty} (-t)f(t)e^{-st} dt \\
 &= \mathcal{L}[-tf(t)] \\
 &\vdots \\
 F^{(n)}(s) &= \mathcal{L}[(-t)^n f(t)]
 \end{aligned}$$

このように積分と微分の順序を入れかえる\*8ことで容易に結論を得る.

### 9.5.5 変換後の定積分

$F(s)$  を定積分するときの積分区間は  $s$  からどこまでかということになる. そして積分は複素数の積分になるが, これを積分の順序交換で対処する.

$$\begin{aligned}
 \int_s^a F(u) du &= \int_s^a \int_0^{\infty} f(t)e^{-ut} dt du \\
 &= \int_0^{\infty} f(t) \int_s^a e^{-ut} du dt \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} (e^{-st} - e^{-at}) dt
 \end{aligned}$$

---

\*8 積分と微分の順序の交換ができるのかに関しては“微分と講義積分の順序”に関する定理を調べればわかるということをここで言及しておく.

積分区間を無限大までにしたら次の結果を得る.

$$\int_s^\infty F(u)du = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_s^a F(u)du = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = \mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right]$$

## 9.6 ラプラス変換の利用

### 9.6.1 微分方程式

$$x'''(t) + 4x''(t) + 6x'(t) + 4x(t) = 0, \quad x''(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x(0) = a, \quad t \geq 0$$

この微分方程式を解くにあたり, 解の  $x(t)$  をラプラス変換した  $X(s)$  を用意する. これによって微分方程式を書き換えると

$$(s^3 + 4s^2 + 6s + 4)X(s) - a(s^2 + 4s + 6)$$

となる. これを  $X(s)$  についてとくと

$$X(s) = \frac{a(s^2 + 4s + 6)}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4}$$

となる. これをうまく変形し, 何の関数をラプラス変換したものなのかを明らかにする.

$$\begin{aligned} X(s)/a &= \frac{s^2 + 4s + 6}{(s+2)(s^2 + 2s + 2)} \\ &= \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+1)^2 + 1} \\ &= \mathcal{L}[e^{-2t}] + 2\mathcal{L}[e^{-t} \sin t] \end{aligned}$$

これによって解は

$$x(t) = ae^{-2t} + 2ae^{-t} \sin t$$

と分かる.

### 9.6.2 畳み込み

計算式がフーリエ変換の一般化<sup>\*9</sup>であるラプラス変換では, フーリエ変換のときと同様の議論から次の結果を得る.

$$\mathcal{L}[f * g(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \cdot \mathcal{L}[g(t)](s) \quad (9.10)$$

---

<sup>\*9</sup> 指数が純虚数から一般の複素数になっていることを指している.

### 9.6.3 時刻の移動

関数  $f(t)$  のラプラス変換に対して、 $\tau > 0$  の分の時間  $t$  の変化を考える。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-\tau)] &= \int_0^{\infty} f(t-\tau)e^{-st}dt \\ &= e^{-s\tau} \int_{-\tau}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\ &= e^{-s\tau} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\ &= e^{-s\tau} \mathcal{L}[f(t)] \quad (f(t) = 0, t < 0)\end{aligned}$$

例えば  $f(t) = e^{at}$  のラプラス変換に対して  $\tau$  の変化を考えると

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = \frac{e^{-s\tau}}{s-a}$$

となる。しかし、ここで次のような計算はどうだろうか。

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = \mathcal{L}[e^{a(t-\tau)}] = e^{-a\tau} \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{e^{-a\tau}}{s-a}$$

これでは異なる結論が2つ出てきたことになる。これは積分範囲の誤りが原因だ。  $\tau$  の分変化させた関数は

$$f(t-\tau) = 0, \quad (t < \tau)$$

であるべきなのに対して、くくりだしによって対処した関数では

$$e^{-a\tau} f(t) = 0, \quad (t < 0)$$

となっている。これでラプラス変換の積分範囲を  $(0, \infty)$  としてしまうと  $f(t-\tau)$  のラプラス変換を考える上では誤りになってしまうのだ。正しくは

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)e^{-st}dt = \frac{e^{-s\tau}}{s-a}$$

となるのだ\*10。

次に  $\tau < 0$  の場合だ。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-\tau)] &= \int_0^{\infty} f(t-\tau)e^{-st}dt = e^{-s\tau} \int_{-\tau}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\ &= e^{-s\tau} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt + e^{-s\tau} \int_{-\tau}^0 f(t)e^{-st}dt \\ &= e^{-s\tau} \mathcal{L}[f(t)] - e^{-s\tau} \int_0^{-\tau} f(t)e^{-st}dt\end{aligned}$$

このようになる。  $\tau > 0$  のときは異なりすっきりしないがこれで計算は可能だ。

---

\*10 単純に積分での変数を  $t$  から  $k = t - \tau$  に変数変換しているだけだ。