微分積分学続論

目次

第 1 章

序論

1.1　外積

1.1.1　空間の向き付け

空間の向きのつけ方には以下の右手系 (図 1.1) と左手系 (図 1.2) の 2 種がある。中指上向きを z 軸として、親指から x, y, z とすれば与えられる。

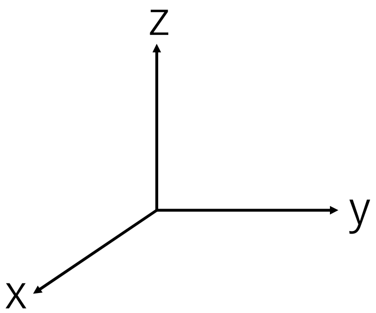

図 1.1　右手系

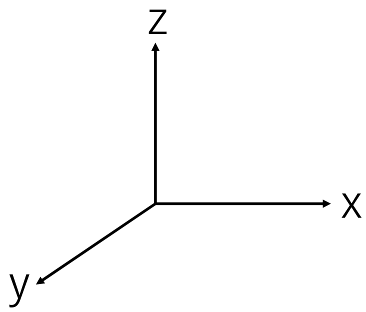

図 1.2　左手系

1.1.2　外積の幾何学的な定義

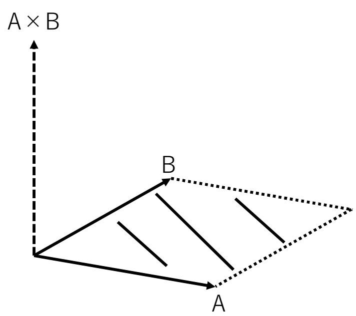

図 1.3　幾何学的な定義

図 1.3 を見ると外積の大きさは平行四辺形の面積、外積の向きは $\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ へ右ねじを回転させたときのねじのすすむ方向であることがわかる。

1.1.3　外積の計算上の性質

以下の式が成立する。

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{A} \times (\alpha \boldsymbol{B}) = (\alpha \boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}$$

1.2　座標を加える

1.2.1　右手系

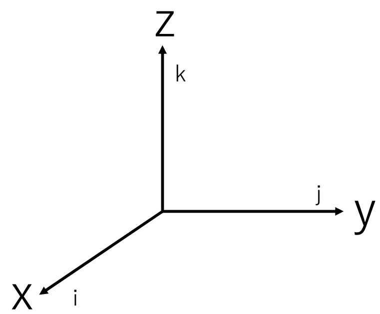

図 1.4　単位ベクトル

図 1.4 のように 3 つの単位ベクトルを置くと以下の関係となる。

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

1.2.2　左手系

左手系では右手系と符合が逆の以下の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{j}$$

基本的に右手系で話はすすめるのであまり使わない。

1.3　単位ベクトルを使って外積の計算

1.3.1　外積

右手系としたうえで

$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{i} + B_y \boldsymbol{j} + B_z \boldsymbol{k}$$

として計算を進める[*1]。

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{1.1}$$

左手系ではこれがマイナスとなる。

1.3.2　スカラ三重積

三つのベクトル $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ に対して、

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$$

この値をスカラ三重積という。これは $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ を循環させても同じ値をとる。これを単位ベクトルを用いて計算する[*2]と、

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix} \tag{1.2}$$

となる。この値の絶対値は $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ が成す平行六面体の体積である。

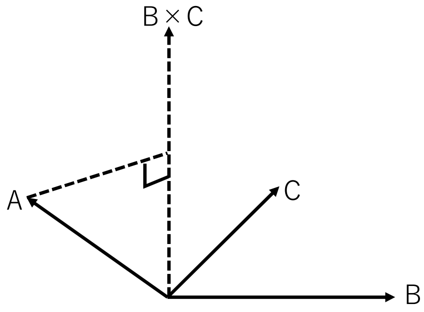

図 1.5　スカラ三重積

1.4　双対基底

1.4.1　導出

3 次元ベクトルにおける双対基底の導出は以下の通り。

$$\boldsymbol{a}'=\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{[\boldsymbol{abc}]}$$

残り 2 つは循環させればよい。このようにして定義されるベクトルを相反系という。2 次元ベクトルに対しても 3 次元と同様な方法を用いてもよいが、以下の等式を利用してもよい。

$$\begin{pmatrix}a'_x & b'_x\\ a'_y & b'_y\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}a_x & b_x\\ a_y & b_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

[*1] 教科書 P.19 を参照
[*2] 教科書 P.26 を参照

1.4.2 性質

基本の式としては以下の 2 つ

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}'=1 \qquad \boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{c}=0 \tag{1.3}$$

もちろん他の 2 つも同様である。またあるベクトル $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 方向に分解すると以下のような式変形ができる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3\\&=l\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

ここで両辺に $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ をかけると、$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$ より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})&=l\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\\&=[\boldsymbol{abc}]\\\therefore l&=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}'\\&\text{同様にして、}\\m&=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b}' \qquad n=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}'\end{aligned}$$

以上から、

$$\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}')\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b}')\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}')\boldsymbol{c} \tag{1.4}$$

となる。

1.4.3 利用

式 (1.3) を利用しベクトルの計算をスカラーにするのが今のところの利用法。4 月 16 日の第 2 回授業の小テストを参照。

1.5 ベクトル・擬ベクトル

1.5.1 ベクトル・擬ベクトル とは

ベクトルを扱う中で速度ベクトルや加速度ベクトルのような自ら方向を持つベクトルと、面積ベクトルや角速度ベクトルのように回転に対して方向が与えられているベクトルが現れた。これらは区別して考える必要があり、前者をベクトル (極性ベクトル)、後者を擬ベクトル (軸性ベクトル) と呼んで区別する。極性ベクトルは空間反転[*3]をしたとき符号が反転するのに対し軸性ベクトルは符号が変化しない。それは空間反転に回転が影響を受けないからである。

また、外積で算出されるベクトルは元のベクトルにかかわらず擬ベクトルである[*4]。

[*3] 鏡に映った空間を考えればいい。

[*4] 教科書 P.33 にて証明

1.5.2　スカラー・擬スカラーとは

スカラーとは大きさのみを持った値と考えていいが、そこに少し様子の違うものがある。式 (1.2) によるスカラ三重積を例にとると右手系から左手系に、すなわち座標のとり方を逆にすると値の正負が逆になることがわかる。このように座標のとり方で符号が変化するスカラを擬スカラと呼ぶ。それに対し座標にかかわらず大きさと符合が一定のものは通常のスカラであり、質量やエネルギーがそれにあたる。

1.6　座標変換

行列のイメージでまとめる。

1.6.1　直交基底

原点を同じくする 2 つの直交座標系 $O_{xyz}, \bar{O}_{xyz}$ を考える。点 P に対し 2 つの座標系からそれぞれ座標を与え $(x, y, z), (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ とする。すると 2 つの座標には以下の式が成立する。

$$
{}^{t}(x, y, z) = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} {}^{t}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})
$$

このようになり、行列で考える座標変換と同じである。そしてこの計算がベクトルの座標変換にも同様に使える[*5]。

1.7　勾配・発散・回転

1.7.1　勾配

スカラー関数 $\phi = \phi(x, y, z)$ に対し以下の計算を勾配という。

$$
\mathrm{grad}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\boldsymbol{k}
$$

記号 ∇ を以下のように定義すると、

$$
\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.5}
$$

勾配は

$$
\nabla \phi \tag{1.6}
$$

となる。

1.7.2　発散

ベクトル関数 $\boldsymbol{A} = A_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + A_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + A_z(x, y, z)\boldsymbol{k}$ に対し以下の計算を発散という。

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{A} \tag{1.7}
$$

[*5] 教科書 P.34-39 参照

1.7.3　回転

ベクトル関数 $\boldsymbol{A} = A_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + A_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + A_z(x, y, z)\boldsymbol{k}$ に対し以下の計算を回転という。

$$\nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.8}$$

1.7.4　解釈

第 2 回、第 3 回講義資料を参照。

1.7.5　ベクトル関数の演算 (1 変数)

基本的には各成分ごとに微分、スカラー倍などを行えばよい。

第 2 章

多変数関数への拡張

2.1　陰関数定理の拡張

2.1.1　2 変数関数 $f(x,y)=0$

1 回生で学んだ陰関数定理は以下の定理のことであった。

陰関数定理 (1)

$f(x,y)$ が (x_0,y_0) 近傍で偏微係数 f_x, f_y が連続であるとする。
$f(x_0,y_0)=0$ で $f_y(x_0,y_0)\neq 0$ の時、(x_0,y_0) 近傍で $y_0=\varphi(x_0), f(x_0,\varphi(x_0))=0$ を満たす $\varphi(x)$ が存在し、$\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x=-f_x/f_y$ となる。

これはいかなる陰関数も条件次第では通常の関数のような扱いができるということを示している。ここからはこの変数の数を増やしてゆく。

2.1.2　3 変数関数 $f(x,y,z)=0$

3 変数関数に関しては 2 変数関数の時の延長としての考え方でまず次の定理が成立する。

陰関数定理 (2)

$f(x,y,z)$ は (x_0,y_0,z_0) 近傍で f_x,f_y,f_z が連続であるとする。
$f(x_0,y_0,z_0)=0$ で $f_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ の時、
(x_0,y_0,z_0) 近傍で $z_0=\varphi(x_0,y_0), f(x_0,y_0,\varphi(x_0,y_0))=0$ を満たす $\varphi(x,y)$ が存在し、
$\varphi_x=-f_x/f_z, \varphi_y=-f_y/f_z$ となる。

この定理は $f(x,y,z)$ の x,y いずれか一方を固定することで陰関数定理 (1) と同じ状況になることから正しいことが容易にわかる。意味としては

ここからはさらに関数自体を 2 つにして話を進める。次の定理に進む前に以下の計算について理解が必要で

ある。

$$
\begin{aligned}
&f(x,y,z), g(x,y,z) \text{ に対して、} \\
&\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} \partial f/\partial y & \partial f/\partial z \\ \partial g/\partial y & \partial g/\partial z \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

このような計算は後に出ると思われる。

では早速次の定理に移る。

陰関数定理 (3)

$f(x,y,z), g(x,y,z)$ は (x_0,y_0,z_0) 近傍で各偏微係数が連続てあるとする。
$f(x_0,y_0,z_0) = g(x_0,y_0,z_0) = 0$ で $\partial(f,g)/\partial(y,z) \neq 0$ の時、$y_0 = \varphi(x_0), z_0 = \psi(x_0)$ となる φ, ψ が存在し、$\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x = -(\partial(f,g)/\partial(x,z))/(\partial(f,g)/\partial(y,z)), \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x = -(\partial(f,g)/\partial(x,y))/(\partial(f,g)/\partial(y,z))$ となる。

きわめて何かではあるが次の一般化へ向けての前準備であると考えてくれればよい。

2.1.3 多変数関数 $f_i(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)=0$

まず、$f_i(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)$ についてからその解釈について述べる。この式を正確に示すと、

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n) &= 0 \\
f_2(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n) &= 0 \\
&\vdots \\
f_n(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n) &= 0
\end{aligned}
$$

つまりは f_i は n 個ある。ここで n この f_i をまとめ

$$
\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)
$$

とする。また

$$
\boldsymbol{x} = (x_1,\cdots,x_m), \quad \boldsymbol{y} = (y_1,\cdots,y_n)
$$

とすると、$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ という表記ができる。

次は一般のヤコビ行列を明らかにする。以下の定義である。

$$
\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{f}}{\mathrm{D}\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_n/\partial x_1 & \cdots & \partial f_n/\partial x_m \end{pmatrix}
$$

$$
\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{f}}{\mathrm{D}\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial y_1 & \cdots & \partial f_1/\partial y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_n/\partial y_1 & \cdots & \partial f_n/\partial y_n \end{pmatrix}
$$

注意したいのは添え字の推移でともに同じように増えるのではなく、変数の添え字は横に、関数の添え字は縦に動く。また $\mathrm{D}\boldsymbol{f}/\mathrm{D}\boldsymbol{y}$ は正方行列である。大方の準備ができたのでここで一般の陰関数定理を示す。

陰関数定理 (一般)

$\boldsymbol{R}^{n+m}$ の点 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ で定義された $\boldsymbol{R}^m$ 値関数 $\boldsymbol{f}$ があって $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$ とする。

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{f}}{\mathrm{D}\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

で表される正方行列が正則ならば、ある $\boldsymbol{R}^m$ 値連続関数 $\boldsymbol{\varphi}$ で $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ となる。また、

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{D}\boldsymbol{x}} = -\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{f}}{\mathrm{D}\boldsymbol{y}}\right)^{-1} \cdot \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{f}}{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}$$

である。

これが一般の陰関数定理である。練習として先に示した陰関数定理がこの定理の特殊形であることを確認するとよい。

2.2 逆関数定理の拡張

2.2.1 1 変数関数

まずは微分積分学で学んだ逆関数定理について復習。

逆関数定理 (1)

関数 $f(x)$ があり、$x = x_0$ の近傍で $f'(x)$ が連続で 0 ではないとき、
$y = y_0 = f(x_0)$ の近傍で逆関数 $x = f^{-1}(y)$ が存在する。

この定理の証明は $F(x, y) = f(x) - y$ としたときの陰関数定理から直ちに示される。これと全く同じような方法で多変数関数に対して逆関数定理を与える。

2.2.2 多変数関数

早速多変数関数における逆関数定理を示す。

逆関数定理 (2)

関数 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x)$ があり、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ の近傍で $\boldsymbol{f}'(x)$ が連続かつ $\mathrm{D}\boldsymbol{f}/\mathrm{D}\boldsymbol{x}$ が正則であるとき、
$\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}(x)_0$ 近傍で逆関数 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}^{-1}(y)$ が存在する。

このように、逆関数定理も多変数関数で述べることができることが分かった。

2.3 積分の拡張

積分に関してはあまりにその範囲が広いため順を追って徐々に多変数関数に拡張してゆく。

2.3.1 2 変数関数の積分

2 変数関数の積分は微分積分学で学んだ累次積分と変数変換によって計算できる。累次積分の方法は今更ここで詳しく説明する気はない。しかし、変数変換の式は多変数関数の積分の際に何らかの示唆があるかもしれ

ないのでここでその方法を示しておく。

積分の変数変換の公式

積分変数 (x,y) が別の変数の組 (u,v) によって

$x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$

と表されるとき、積分には以下の等式が成立する。

$$\iint_{\mathrm{D}xy} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathrm{D}uv} f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial x,y}{\partial u,v} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{2.1}$$

2.3.2 広義積分

本来リーマン積分では定義できない積分一定の条件を適応することで積分を広義に可能にするというのも。これも深くは触れないが、変数変換などで計算が可能になる。詳しくは配布資料を参照。

2.4 空間曲線

2.4.1 曲線の長さ

媒介変数 t を用いて空間に存在する曲線は以下の式で表現される。

$$\boldsymbol{r} = (x(t), y(t), z(t))$$

ここからまずは空間内の曲線の長さについてに移る。まず空間内の曲線の微小変化は Δt を用いて

$$\Delta \boldsymbol{r} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Delta t, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Delta t, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\Delta t \right)$$

この微小変化の長さ微小長は当然 x, y, z の要素の二乗の和の平方根である。この微小長を t の変化する領域で積分すれば空間内の曲線の長さが計算できる。

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t \\ &= \int_0^t \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

曲線の長さが分かったところで次は曲線の接線を扱う。

2.4.2 曲線の接線

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right) = (x', y', z')$$

は曲線の接線方向を向いているので、これより $\boldsymbol{r}(t_0)$ における接線の方程式は

$$\frac{x - x'(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y'(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z'(t_0)}{z'(t_0)}$$

で与えられる。

2.4.3　弧長パラメータ

今まで主に無意識に扱ってきたパラメーラは時間 t であったが、ここでは曲線の長さ s をパラメータとした議論を進めてみる。ではさっそく微分の性質から見てみる。

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}\right| = 1$$

微小な $\boldsymbol{r}$ ではベクトルの大きさと曲線の長さは同じであることを使っている。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{t}$$

で与えられる $\boldsymbol{t}$ は単位ベクトルであり、接線方向を向いている。これを接線ベクトルと呼ぶ。さらに $\boldsymbol{t}$ は単位ベクトルであるとことから

$$\begin{aligned}
\{\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}\}' &= \boldsymbol{t}'\cdot\boldsymbol{t} + \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}' \quad (\boldsymbol{t}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}) \\
&= 0 \\
\therefore \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}' &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \boldsymbol{t}\perp\boldsymbol{t}'
\end{aligned}$$

ここで $\kappa = |\boldsymbol{t}'|$ を置き $\boldsymbol{t}'$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると

$$\boldsymbol{t}' = \kappa\boldsymbol{n}$$

ここでの $\boldsymbol{n}$ を主法線ベクトル、κ を曲率、$1/\kappa = \rho$ を曲率半径と呼ぶ。

2.4.4　フルネ・セレの公式

接線ベクトルと主法線ベクトルの外積を考える。

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$$

この両辺を弧長パラメータ s で微分する。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}' &= \boldsymbol{t}'\times\boldsymbol{n} + \boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}' \\
&= \kappa\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n} + \boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}' \\
&= \boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}'
\end{aligned}$$

単位ベクトル同士の外積である $\boldsymbol{b}$ は単位ベクトルである。よって弧長パラメータによる微分 $\boldsymbol{b}'$ は元のベクトルを直交する。さらに $\boldsymbol{b}'$ は $\boldsymbol{t}$ とも直交していることは外積の定義から明らか。ゆえに $\boldsymbol{b}'$ は主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と並行である。

$$\boldsymbol{b}' = -\tau\boldsymbol{n}$$

と書くことができ、τ はねじれ率と呼ぶ。

さらに

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t}$$

なので*1、これらの両辺を s で微分すると、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}' &= \boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{t} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{t}' \\ &= -\tau\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{t} + \boldsymbol{b} \times \kappa\boldsymbol{n} \\ &= \tau\boldsymbol{b} - \kappa\boldsymbol{t}\end{aligned}$$

さて今までの計算で出てきた以下の三式を合わせてフルネ・セレの公式という。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} &= \kappa\boldsymbol{n} \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s} &= -\kappa\boldsymbol{t} + \tau\boldsymbol{b} \\ \frac{\mathrm{b}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} &= -\tau\boldsymbol{n}\end{aligned}$$

2.5 空間曲面

2.5.1 空間曲面上の曲線の長さ

2 つの媒介変数 u, v を用いると空間内の曲面は以下のように表すことができる。

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

この媒介変数 u, v が別の媒介変数 t で $(u(t), v(t))$ と表せるとすると曲面上に存在する曲線は以下のように表せる。

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$$

この状況を前提に話を進める。まずは $\boldsymbol{r}$ の各成分を t で微分する。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

曲線の長さを計算する。

$$s(t) = \int_0^t \left\{ E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 \right\}^{1/2} \mathrm{d}t$$

但しこの式の中の E, F, G は以下のとおりである。

$$\begin{aligned}E &= \left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ F &= \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \\ G &= \left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\end{aligned}$$

これら E, F, G は曲面の第 1 基本量と呼ばれるもので、これらを利用することで以下の式が成立する。

$$\mathrm{d}s^2 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2$$

*1 $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{t}$ は 3 次元の直交基底を成している。

2.5.2　曲面の法線ベクトル

法線ベクトルは接平面に垂直なベクトルであるからまずは接平面を決定すればいい。また平面は 2 本の平行ではないベクトルで決定できる。このことを念頭に考える。

まず v を固定した場合を考えると $\boldsymbol{r}(u,v)$ は曲線を描く。そして、$\partial\boldsymbol{r}/\partial u$ はその接線方向を向く。同様に u を固定して生まれる曲線を考えると $\partial\boldsymbol{r}/\partial v$ は当然曲線の接線方向を向く。u, v と固定するほうを変えた曲線はから得られる接線方向のベクトルは平行ではないため面を張る[*2]。つまり $\partial\boldsymbol{r}/\partial u$、$\partial\boldsymbol{r}/\partial v$ の両方と垂直なベクトルが法線ベクトルとなるわけだがこれは外積で与えられる。

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

したがって、曲面上の点 (x_0, y_0, z_0) を通る接平面の方程式は

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(x-x_0)+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(y-y_0)+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(z-z_0)=0$$

である。

[*2] 接線方向のベクトルは曲面の同じ点で取っている。