2 回前期 関数論

目次

第 1 章

正則関数

1.1 複素平面上のトロポジー

語句についてまとめる．

近傍 点 z_0 を中心として半径 ε の円の内部全体*1を近傍と呼ぶ．

内点 点 z_0 のある近傍*2が集合 S の点のみ含むとき，その点を S の内点と呼ぶ．

外点 点 z_0 のある近傍が集合 S の点を含まないとき，その点を S の外点と呼ぶ．

連結した集合 S の任意の 2 点をその集合に属する点を端点とする有限個の線分で結ぶことができる場合，その S を連結した集合と呼ぶ．

集積点 S に対し点 z_0 のいかなる近傍も点 z_0 とは異なる S の点を持つ場合，点 z_0 を S の集積点と呼ぶ．

1.2 複素変数の関数

1.2.1 導入

複素変数の関数 f によって z が w と対応するとき，

$$w = f(z)$$

と表され今まで扱ってきた関数のように示せる．しかしグラフで表そうとすると話は変わり，実数関数では xy 平面で表せていたが複素変数の関数ではそうはいかない．z のとり得る値をそれだけで複素数平面で表し，さらに w の方も同じく複素数平面を考えるので，z の描く図形から w の描く図形への写像といった様子*3に

*1 境界は含まない．
*2 当然都合よく ε をとる場合を考えている．
*3 写像といった様子ではなく写像である．またこれは変換ともいう．

なる．不慣れであるとイメージがしにくいためこのことは常に頭に置いておきたい．

1.2.2　実部と虚部

$$w = f(z)$$

において当然 z, w は複素数からとっているのだが，これらを実部と虚部に分けて書き下してみる．

$$f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y) \tag{1.1}$$

ここで現れた関数 u, v は 2 つの実数変数による実数値関数で，すなわち複素関数はこのように実数値関数と虚数単位で表すことができる．以降このような書き下しは頻出である．

1.3　極限

1.3.1　複素関数での極限の定義

実は複素関数における極限は実数値関数のときと同様の $\varepsilon - \delta$ 論法で説明ができる．あっけない話ではあるが複素関数で取り扱う話はいくつか実数関数のときの話をそのまま使えばよいものもある．

しかし，まったく同じというわけではない．実数値関数では右側極限と左側極限の 2 つの一致が極限値存在の条件であった．これは入力の実数には 2 通りの近づき方があり，極限値とはいかなる近づき方でも取る値が同じであることが条件だったからである．ではこれを複素関数に置き換え考えると，入力の複素数 z には無数の近づき方が存在[*4]する．こうなってはすべては調べられないように思われる．しかし複素数関数では極限値の存在は実部を動かし近づける方法と虚部を動かし近づける方法の 2 つの極限値[*5]のみを見る方法をよく見る．当面はこれで十分であると考えられる．

1.3.2　極限の計算規則

教科書 P.28 を見ればわかるが複素関数の極限は線形性がある．四則計算後の極限と極限をとった後の四則計算は同じ値をとる．さらに実部と虚部の関係には以下の関係が成立する．

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{z \to z_0} \mathrm{Re} f(z) = \mathrm{Re}\ w_0 \\ \lim_{z \to z_0} \mathrm{Im} f(z) = \mathrm{Im}\ w_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

この結果は式 (1.1) からも十分に予想のつく結果であり，ここから実部，虚部をとる操作と極限をとる操作の順番は入れ替え可能であることがわかる．

1.4　連続関数

複素関数 $f(z)$ が z_0 において連続とは以下の式が成立することを指す．

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = z_0$$

[*4] 複素数平面を考えれば自明．
[*5] 実部を動かし近づけるとは最初から虚部狙いの複素数と一致させて極限をとる方法で虚部を動かし近づけるとはその逆の方法である．

これは今まで微分積分学で与えた定義と全く同じである．面白味はない結果であるがまあ当然といえる．さらに連続な複素関数の和，積，商はすべて[*6]連続でこれも微分積分学の時と同じである．

さてここから複素関数ならではの話であるが，式 (1.1)，式 (1.2) から以下の定理に行き着く．

定理

$$f(z) \text{ が } z_0 \text{で連続} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\ f(z), \mathrm{Im}\ f(z) \text{ が } z_0 \text{で連続}$$

これは複素関数の連続性は実部，虚部に分けた実数値関数の連続性に言い換えることができるというもので，複素関数の極限を相手しなくていい利点があると考えられる[*7]．

1.5 導関数・微分公式

1.5.1 導関数の定義

残念ながらここも実数の時と話は大きく変わらない．複素関数 $f(z)$ の z_0 における導関数を $f'(z_0)$ とすると，

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad = \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z} \tag{1.3}$$

その他の表記についても実数値関数のときと同じようにやって問題ない．

1.5.2 微分公式

まだ複素関数の初等関数について扱っていないため今まで実数値関数で扱ったすべての微分公式は触れられないが，以下の定理は成立する．

定理

$f(z), g(z)$ は微分可能，c は複素定数とするならば以下の 3 種の微分公式が成立する．

1.
$$(c)' = 0,\ \{cf(z)\}' = cf'(z),\ (z^n)' = nz^{n-1}\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

2.
$$\begin{cases} \{f(z) + g(z)\}' = f'(z) + g'(z) \\ \{f(z)g(z)\}' = f(z)'g(z) + f(z)g(z)' \\ \left\{\dfrac{f(z)}{g(z)}\right\}' = \dfrac{f(z)'g(z) - f(z)g(z)'}{\{g(z)\}^2}\ (g(z) \neq 0) \end{cases}$$

3.
$$\{f(g(z))\}' = \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z}$$

多項式の微分や線形性，合成関数の微分に関しては今までの微分積分学で扱ってきたことと全く同じだといえる．

[*6] 商を考えるとき，(分母) $\neq 0$ は当然の条件である．

[*7] 役に立つのかは不明．

1.6　コーシー・リーマンの方程式と微分可能性

多項式までは前節まででで微分ができるようになった．次に注目したいのは微分可能性であり，微分の十分条件を何とか求めたい．順を追って進める．

1.6.1　コーシー・リーマンの方程式 (微分の必要条件)

ある複素関数

$$f(z) := u(x,y) + jv(x,y)$$

が $z_0 = x_0 + jy_0$ において微分可能であるとき，以下の式が成り立つ．

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + jv_x(x_0,y_0)$$
$$f'(z_0) = v_y(x_0,y_0) - ju_y(x_0,y_0)$$

この 2 つの式は微分の定義である式 (1.3) の δz の近づけ方を実数固定と虚数固定の 2 種で計算し，なおかつ式 (1.2) の関係を用いることで導出できる．そして直ちにこの 2 式から以下の定理の成立がわかる．

定理

複素関数 $f(z) := u(x,y) + jv(x,y)$ が $z_0 = x_0 + jy_0$ において微分可能であるならば以下の 2 つの式，コーシー・リーマンの方程式が成立する．

$$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$$
$$u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$$

この定理で複素関数が微分できることの必要条件がわかる．さらには，求める過程において複素関数の微分は式 (1.1) で書き下された u, v の x, y のいずれかの偏微分で求められることも暗に示していて重要な方程式だといえる．

しかし，求めたいのは微分の十分条件であるので話を続ける．

1.6.2　コーシー・リーマンの方程式 (微分の十分条件)

直前に述べたコーシー・リーマンの方程式はあくまで複素関数の微分に対する必要条件であったが，そこにある条件を付けくわえた以下の定理では複素関数の微分に対する十分条件を与えている．

定理

$z_0 = x_0 + jy_0$ のある近傍で関数

$$f(z) := u(x,y) + jv(x,y)$$

が定義されていて，その近傍で u_x, u_y, v_x, v_y が存在し点 z_0 で連続であるとする．このとき，コーシー・リーマンの方程式が z_0 で成り立てば，$f(z)$ は z_0 で微分可能である．

これで微分可能性がわかるようになった．どれも今までの微分積分学の域を出ない議論なのでこれ以上の説明は不要であろう．

1.6.3 極形式のコーシー・リーマンの方程式

複素数は極形式で表されることもしばしばなのでここで極形式のコーシー・リーマンの方程式を与える．以下の 2 式である．

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta$$
$$\frac{1}{r}u_\theta = -v_r$$

さらに $z_0 = r_0 \exp(j\theta_0)$ における導関数は

$$f'(r_0 \mathrm{e}^{j\theta_0}) = \mathrm{e}^{-j\theta_0}\{u_r(x_0, y_0) + jv_r(x_0, y_0)\}$$

で表される．これに関しては一度自ら計算すべきである．

1.7 正則関数

1.7.1 正則・整関数・特異点

z_0 と z_0 のある近傍の各点において $f(z)$ が微分可能であるとき，$f(z)$ は z_0 で正則であるという．さらに，集合 R の各点で $f(z)$ が正則であるとき，$f(z)$ は R で正則であるという．このような関数を正則関数と表現したりすることがある．正則か否かは先の節で述べた微分の十分条件となる定理による．

正則の定義がわかったところで次は集合 R について少し話を広げる．正則な関数は基本的に開集合を考えている[*8]が，必ずしも集合 R が開集合として与えられるとは限らない．例えば"$f(z)$ は閉集合 $|z| \leq 1$ で正則な関数である"と言われたりする．この時は，"$|z| \leq 1$ を含む適当な開集合の領域"と言い換えて先に進もう．次は R が複素数平面全体であった場合，この複素数平面全体の任意の点で正則な関数を整関数という．

最後に特異点について，$f(z)$ が z_0 においては正則ではないが，いかなる z_0 の近傍においても少なくとも 1 点は正則であるとき，z_0 は $f(z)$ の特異点という．

1.7.2 正則な関数の性質

ここでは一気に 3 つの定理を紹介する．

定理

1. $f(z), g(z)$ が領域 D で正則ならば，D 内で f, g の四則演算はすべて正則．
2. D 内で $f'(z) = 0$ ならば，$f(z) = $ (定数)．
3. D 内で $f(z)$ が正則ならば，$u(x, y), v(x, y)$ は調和関数である．

ここで新しく表れた調和関数とは以下 2 つの条件を満たす関数のことである．

1. 1,2 階偏微分導関数が D 内で連続である．
2. ラプラスの方程式

$$h_{xx}(x, y) + h_{yy}(x, y) = 0$$

[*8] 境界点での近傍を考えると分かるはずである．

を満足する．

後付けであるのだが，コーシー・リーマンの方程式も当然満たしているので u, v は最終的には調和共役という関係になり以下の定理でまとめ上げられる．

定理

$f(z)$ が D 内で正則であることと，D で u, v が調和共役であることは同値

第 2 章

初等関数

高校数学で学んだ初等関数を複素関数に拡張する．とにかく結果のみを並べてゆくので証明や確認は自身で行うこと．

2.1　指数関数

複素関数における指数関数は以下の通り．

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z &= \mathrm{e}^{x+jy} \\ &= \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{jy} \\ &= \mathrm{e}^x \{\cos y + j \sin y\} \end{aligned}$$

このように z の実部は指数関数の大きさを決め，虚部は指数関数の偏角を決定していると考えてよい．さらに進んで考えると偏角には $2j\pi$ の自由度があるため複素関数における指数関数は周期関数の側面がある．

周期関数の側面は複素関数における指数関数に逆関数がないやもしれない可能性を提示していることに注意されたし．

2.2　三角関数・双曲線関数

ここでもあっさりと三角関数の定義を与える．

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{\mathrm{e}^{jz} + \mathrm{e}^{-jz}}{2} \\ \sin z &= \frac{\mathrm{e}^{jz} - \mathrm{e}^{-jz}}{2j} \end{aligned}$$

定義だけに注目すると実数関数における三角関数が複素関数における三角関数の特殊な場合であることがわかる．さらに加えて以下に双曲線関数の定義を与えると，

$$\cosh z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}$$
$$\sinh z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

これも実数関数の定義を考えると妥当なものであることは明らかである．またこの双曲線関数の定義と三角関数の定義をよく見ると，三角関数の定義は以下のように書き換えられることが分かる．

$$\cos z = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y$$
$$\sin z = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y$$

なんとなく，三角関数の加法定理のような形である．

2.3　対数関数

複素関数における初等関数の定義ではこの対数関数が最も難しいように思われる．そして指数関数のところでも述べたが，指数関数は周期関数の側面があるため逆関数が存在しない．そこで複素関数では対数関数を複素数の大きさ[*1]と偏角から考える．

$z = r\mathrm{e}^{j\theta}$ の対数関数は，

$$\log z = \ln r + j\theta$$
$$\therefore \log z = \ln |z| + j \arg z$$

これも実数関数のときの対数の計算を想像すれば理解に苦しくない．しかし，この定義ではまた偏角に $2j\pi$ の自由度が存在する．そこでそろそろ複数存在する偏角に対し，その代表となる値を主値として用意する．

$$2n\pi\text{の自由度のある偏角に対し，主値は}$$
$$-\pi \leq \Theta < \pi$$
$$\text{で定義する．}$$

以下たいていの主値は頭文字が大文字になっていることに注意して読み進めるように．

主値が定まったおかげで，対数関数も主値では一つに定まった．

$$\mathrm{Log} z = \ln |z| + j\Theta$$

2.4　複素数のべき乗

複素数のべき乗 z^c は以下のように定義する．

$$z^c = \exp(c \log z)$$

[*1] $|z| = r > 0$ でのみ考える．

$\log z$ が多価関数であるため，z^c も多価関数である．

第 3 章

積分

3.1　実変数複素数値関数

この場合の積分は非常に簡単である．実部と虚部を別々に積分したら計算は完了する．
実数変数 t の複素数値関数

$$w(t) = u(t) + jv(t)$$

を区間 (a, b) で積分したら，

$$\int_a^b w(t)\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\mathrm{d}t + j\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$$

となり，悩むことなく計算が可能である．またその他の積分もここに落ち着くことができればよいと思う．

3.2　複素数平面上の曲線

次は複素変数複素数値関数の積分に移りたいがここで一つ問題が生じる．経路の問題である．実数の場合では積分区間は軸上の 1 次元を動くためあまり意識してこなかったが複素数平面ではそうはいかない．つまり線としての経路を与えなければならないのだ．まずはその経路となる複素数平面上の曲線について扱う．

3.2.1　弧

実変数関数 $x(t), y(t), (a \leq t \leq b)$ によって以下のように表される複素数平面上の曲線を弧と呼ぶ．

$$z(t) = x(t) + jy(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

このような弧の中でも自分自身と交わることのない弧のことを**単純弧 (ジョルダン弧)** と呼ぶ．さらに $z(a) = z(b)$ 以外で一致することの無い弧を**単一閉曲線 (ジョルダン曲線)** と呼ぶ．例えば，単位円はジョルダン曲線である．

3.2.2　弧 $z(t)$ の導関数と弧の長さ

弧 $z(t)$ に対し導関数は以下のように定める．

$$z'(t) = x'(t) + jy'(y)$$

つまり，弧 $z(t)$ が微分可能であるとは $x(t), y(y)$ が微分可能であるということである．また定義された t の範囲内で $z'(t) \neq 0$ のとき，その弧を**なめらかな弧**と呼び，それらを有限個つないで作られたこのことを**部分的になめらかな弧**と呼ぶ．

ではここからこの長さに話を進めたい．$z(t)$ が微分可能でありなおかつ，x', y' が連続である場合，

$$|z'(t)| = \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2}$$

は連続であり，ここからこの長さ L は

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b |z'(t)|\mathrm{d}t \\ &= \int_C |\mathrm{d}z| \end{aligned}$$

とこのように表記[*1]できる．

3.2.3 向き

ジョルダン曲線に話を絞ると，曲線によって領域が生まれ，その領域に対し曲線には 2 つの方向[*2]が存在することになる．ここでどちらを正の向きとするかが後の線積分にかかわるのでここで明らかにする．ジョルダン曲線における正の向きは曲線で生まれた領域を左手に見ながら進行できる方向である．すなわち反時計回りである．

3.3 線積分

ようやく複素関数における積分の線積分の話となる．

3.3.1 表記・計算

ある複素関数 $f(z)$ を弧 $C := z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ で線積分することを以下のように表記する．

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z \text{ または } \int_{z(a)}^{z(b)} f(z)\mathrm{d}z$$

ここでいくつか当然のように扱う約束やルールを示す．

- 関数 f は C 上で区分的連続
- 弧 C は区分的なめらか
- 線積分に対し 2 種類の表記が存在したが，後者の表記が使用できるのは積分値が積分路 C によらない場合[*3]のみである．

[*1] $L = \int_C |\mathrm{d}z|$ という表記を覚えられれば十分である．
[*2] 右回りと左回りのこと．
[*3] これについては後に詳しく述べる．

では，実際の計算に移る．計算は実数関数における変数変換に似た見た目をしているため覚えやすいと思われる．以下に式を示す．

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t \tag{3.1}$$

非積分関数を $z = u + jv$ として式 (3.1) をさらに式変形[*4]すると，

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + j\int_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)$$

となる．

3.3.2 性質

直感的に想像できる性質[*5]はすべて成立する．ここでは複素関数特有の性質を 1 つ述べる．以下の式である．

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| \leq ML \quad (|f(z)| \leq M, (C\text{ の長さ}) = L)$$

これも十分理解できる計算であるが大事なのは積分の外側の絶対値の処理である．証明は当然ここでは行わない．

3.4 コーシー・グルサの定理

3.4.1 連結

本題の定理に進む前にいくつか新しい概念を導入したい．

単連結　ジョルダン曲線の内部の点すべてからなる集合

多重連結　単連結ではない集合

なんとも言えない定義ではあるが，単純に内部に空洞がないのが単連結，内部に空洞があるのが多重連結という理解で十分である．

3.4.2 コーシー・グルサの定理

ここからコーシー・グルサの定理とそれによって導かれた諸定理について述べる．証明は示さないので，教科書を参照すること．

コーシー・グルサの定理

区分的なめらかなジョルダン曲線 C の上と内部で $f(z)$ が正則

$$\Rightarrow \int_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

正則であることが重要な条件となっている定理だが，ここにさらに単連結という概念を加えることで以下のように言いかえられる．

[*4] 詳しくは教科書 P.75 の計算を参照.

[*5] 線形性や積分区間に対する計算などのこと．詳しくは教科書 P.76

コーシー・グルサの定理 (言い換え)

$f(z)$ は単連結な領域 D で正則であるとする．D 内の区分的なめらかな全てのジョルダン弧 C に対し

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

このような書き方でようやくわかるのは，何もジョルダン弧である必要はなく，自身に対する交点が無数にあってもその交点で分ければ，その 1 つ 1 つは定理の条件を満たしていることは容易にわかる．

では次に定理に現れるジョルダン弧 C を分割して単純弧としたときどのようになるのかを考える．定理に現れるジョルダン弧 C 上の異なる 2 点を z_1, z_2 とし，この 2 点によって弧 C を分割する．そして $z_1 \quad \to z_2$ の向きを正とした弧を C_1, C_2 とする．このような分割をすると，$C_1 - C_2 = C$ となる．こうして与えられた弧 C_1, C_2 を使うと以下のような定理が成立する．

コーシー・グルサの定理 (派生:積分路依存について)

C_1, C_2 が単連結領域 D 内の 2 点を結ぶ区分的なめらかなジョルダン弧であるとき，$f(z)$ が D 内で正則ならば

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$$

この定理は条件が整えば線積分は経路依存しないことを示しているものである．またここからこの定理が成立する場合，線積分は最も都合の良い積分路をとればよいことが分かり単純に計算にも活かせる．

3.5 原始関数と線積分

ここで扱うのは先の節で最後に現れた単連結領域内で正則な関数の線積分が経路に依存しないという話をさらに進めたもので，その定理から複素関数にも原始関数が存在するだろうという流れである．

まずは原始関数について定義から，

単連結な開集合 D 内で連続な $f(z)$ に対して，D の各点で $F'(z) = f(z)$ となるような
D で正則な関数 $F(z)$ を D における $f(z)$ の原始関数という．

このような面倒な言い方ではあるが漠然とした理解は実数関数のときと変わりない．特に多項式であれば同じだと思ってよい．そしてこの定義から直ちに以下の定理が導ける．

定理 (積分路によらない積分)

単連結な開集合 D 内で連続かつ正則な $f(z)$ があり，その原始関数を $F(z)$ とする．D 内に区分的なめらかな曲線 C が以下の式で与えられるとき，

$$C : z(t) = x(t) + jy(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

$f(z)$ の経路 C での線積分は，

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\mathrm{d}z &= \int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t \\ &= F(z(b)) - F(z(a))\end{aligned}$$

このようになり，全く微分積分学で扱った同じである．これは線積分が経路に依存していないということの表れであり，この定理が成立するとき積分を以下のような表記にできるのである．

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\mathrm{d}z$$

さらにこの表記ができる $f(z)$ に対して次の定理が成立する．

定理 (積分した関数の微分)

開集合 D 内で連続な $f(z)$ の線積分が経路依存しないとき，その積分路の始点終点を z_0 と z とすると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z} f(s)\mathrm{d}s = f(z)$$

つまり，積分して微分したら元の関数に戻るということである．さらに最後に原始関数の有無にかかわる定理を紹介する．

定理 (原始関数の存在の十分条件)

単連結な領域で正則な関数は常に原始関数を持つ．

3.6 コーシーの積分公式

ここで扱うコーシーの積分公式とは複素関数のある 1 点の値を線積分を含む形で表そうとするものである．ではさっそく定理を示す．

定理 (コーシーの積分公式)

正の向きを持った区分的なめらかなジョルダン曲線 C の上と内部で $f(z)$ は正則であるとし，$z_0 \in C$ なる z をとると

$$f(z_0) = \frac{1}{2j\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \tag{3.2}$$

この証明は何度も読むことを勧める．またこの定理で重要なのは複素関数は条件次第では無限回微分できることを示唆している点である．実際に以下の定理が成立する．

定理 (無限回の微分について)

区分的なめらかなジョルダン曲線 C で囲んだ領域 D をとる．
$f(z)$ が D 内で正則

$\Rightarrow f^{(n)}(z) \quad (n = 1, 2, \cdots)$ は D で正則

この定理は同時に $u(x, y), v(x, y)$ がいくらでも微分ができることも示している．ではさらに進んで n 回微分がいかにしてあらわされるのかをコーシーの微積分公式として以下に示す．

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi j}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\mathrm{d}s \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{3.3}$$

最後にこの話とはずれてくるかもしれないが，条件によく挙げられていた $f(z)$ が正則ということに対する十分条件となる定理を示す．

モレラの定理 (複素関数が正則である十分条件)

ある領域 D 内の任意のジョルダン曲線 C があり，

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0 \Rightarrow f \text{ は } D \text{ で正則}$$

この定理は D が単連結という条件が加わることで $\Rightarrow$ が $\Leftrightarrow$ に変わる．

これで積分に関する話は終わる．1 つの山場であるので復習は必須である．

第 4 章

数列・級数

この章では主に級数を扱うためかなり難解な印象を受ける内容だが，最初にこの章における目標を明らかにしたい．この章では最終的に複素関数のテイラー展開，ローラン展開の 2 つを可能にすることが目標である．微分積分学で扱った式の形から想像できる通りどうしても点列や関数列に対する極限などをいろいろと扱わなければならない．

4.1 数列・級数

4.1.1 通常の極限

通常の複素数列の極限は以下のように定義される．

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} z_n = z \text{ とは}\\ {}^\forall\varepsilon, {}^\exists n_0,\\ n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon\end{aligned}$$

と，このように定義される．イメージとしては z に点列が近づいていく感じである．この定義には収束先の情報が入っていて欠かせない．

4.1.2 コーシー列

ここでまた先ほどとは違った極限の見方を与えたい．そこで現れるのがコーシー列という概念で以下のように定義される．

定義：コーシー列

$$
\begin{gathered}
{}^{\forall}\varepsilon, {}^{\exists} n_0, \\
n \geq m > n_0 \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon
\end{gathered}
$$

このような複素数列 $\{z_n\}$ をコーシー列と呼ぶ.

そしてこの定義から直ちに以下の定理の成立が分かる.

定理 (コーシー列と数列の収束)

数列 $\{z_n\}$ が収束する

$\Rightarrow \{z_n\}$ はコーシー列である.

このような極限の収束のイメージは，n が十分大きくなると $\{z_n\}$ の変化は限りなくなくなるという感じである.

この勢いで級数の収束についてもコーシー列で述べてみる.

定理 (コーシー列と級数の収束)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n}^{\infty} z_n \text{が収束} \\
&\qquad \Rightarrow \text{部分和} \{S_n\} \text{がコーシー列} \\
&\qquad \Rightarrow {}^{\forall}\varepsilon, {}^{\exists} n_0, \geq m > n_0 \Rightarrow |z_n + \cdots + z_{m+1}| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

以上で数列，級数の簡単な部分は終わったことになる.

4.1.3 級数の絶対収束

まずは絶対収束についてその定義から始める.

定義：絶対収束

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| \text{ が収束するとき,} \\
\sum_{n=0}^{\infty} z_n \text{は絶対収束}
\end{gathered}
$$

まあ当然の定義でこれは全く実数の時と変わらない．さらにこれも実数の時と同じではあるのだが絶対収束から以下の定理が成立する.

定理 (絶対収束関連)

1. 複素級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ が絶対収束するのならば，$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ は収束する．
2. 複素級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ が絶対収束するのならば，順番によらず $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ は絶対収束する．

このくらいは当然のこととして覚えておきたい．

大したことのない話が長く続いたがそろそろ本格的に関数の話へ移ってゆく．

4.2 関数列の収束

関数列というのは少々イメージがわかないのでここでは関数列 $f_n(z)$ は n, x の 2 変数関数で，必ず n が先に決定するものだというイメージで説明しておく．正確には n によって関数自体を決定し，z で関数値を決定するというものである．ではさっそく複素関数の関数列に対して極限を導入していく．

定義：各点収束

点集合 E で定義された関数列 $f_n(z)$ について任意の E 内の点 z_0 において

$$f_n(z_0) \to f(z_0) \quad (n \to \infty)$$

が成立するとき，$f_n(z)$ は E において $f(z)$ に収束するという．

この定義を極限を厳密に述べた形に変えると

$$\begin{aligned} &z_0 \in E \text{ に対して} \\ &\quad {}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}n_0, \\ &\qquad\qquad n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon \end{aligned}$$

となる．ここで現れるのが n_0 であるが今の定義においてこれは z_0 の値によって決定する数である[*1]．果たして z_0 によらない n_0 によって収束を考えることはできないのか．結論から述べるとそれは可能で以下で詳しく説明する．

4.2.1 一様収束

早速定義である．

定義：一様収束

点集合 E で定義された関数列 $f_n(z)$ について任意の E 内の点 z_0 に対して z_0 とは無関係な n_0 が存在しすべての正の ε に対して

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon$$

が成立するとき，$f_n(z)$ は E において $f(z)$ に一様収束するという．

これも実数関数の時と同じ話ではあるが重要であるため説明は大事にしたい．各点収束との最大の違いは n_0 の出てくるタイミングで，一様収束では，n_0 は初めに決まり，z_0 は後から関数の定義された領域の中から好きに選んでいいわけである．当然ではあるが一様収束は各点収束よりも厳しい条件が課されている．

[*1] z_0 によって大きくてもよかったり小さい必要があったりと一定ではないということ．

一様収束の性質から導かれる定理が幾つかあるので紹介する．

定理 (一様収束する先の関数の連続性)

点集合 E 上で連続な関数 $f_n(z)$ の関数列が E 上の関数 $f(z)$ に一様収束するならば $f(z)$ は E 上で連続である．

つまりは関数列が連続であれば一様収束の先も連続であるということである．この定理は証明がやや難しいので配布された参考資料を一度は読むように．

4.2.2 極限と積分の順序交換

関数列のイメージを与える際，n によって関数を決定し z で値を決定すると述べたが，積分においてこの順序は変えられるのかということに注目する．以下の定理を読んでもらいたい．

定理 (極限と積分の順序交換)

区分的なめらかかつ有限長の C 上で連続な $f_n(z)$ の関数列が $f(z)$ に一様収束するならば以下の式が成立する．

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\mathrm{d}z=\int_C f(z)\mathrm{d}z \tag{4.1}$$

証明も簡単でこのことから一様収束の場合極限と積分は可換である．

さて，この話の続きなのだから微分はどうなるのかということを考えたいがそう話はうまくいかない．微分では一様収束では十分ではないのだ[*2]．そこで以下の広義一様収束という新しい収束の定義を加える．

定義：広義一様収束

以下の 2 つの内容は同値である．

1. $f_n(z)$ による関数列は D 上で定義されているとする．
   D に含まれる任意の閉円盤上で関数列が一様収束する．
2. $f_n(z)$ による関数列は広義一様収束である．

もちろん広義一様収束は一様収束に比べ緩い条件であるといえる．そしてこの広義一様収束によって関数列の微分に対しても以下の定理が成立する．

定理 (極限と微分の順序交換)

領域 D 上で定義された正則関数 $f_n(z)$ による関数列が D 上で $f(z)$ に広義一様収束するならば，$f(z)$ も D 上で正則関数である．また k 階導関数 $f_n^{(k)}(z)$ も $f^{(k)}(z)$ に広義一様収束する．

積分と同じような構図の定理が成立した．これで広義一様収束の場合は微分と極限の順序を交換できる．

ここまでで関数列の収束に関しての話は終わる．数列のときと同様次は級数について扱う．関数項級数と呼ぶ．この章の最初に目的はテイラー展開やローラン展開にあると述べたが，正しくこの関数項級数の状態になるのである．

[*2] 微分では開集合を考えたりするが，一様収束は開集合の境界において成立しない．

4.3　関数項級数

関数項級数とは以下の式のようなものをいい数列での級数と全く同じである．

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$$

極限を考える上ではこの式は部分和ということになる．まずはこの関数項級数が収束するということの定義から始める．

定義：関数項級数の収束

関数項級数の部分和 $S_n(z)$ が E 上で $S(z)$ に収束することと，関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は E 上で $S(z)$ に収束することと同値である．またこれは一様収束に対しても同様である．
さらに，$f_n(z)$ の絶対値の級数が E 上で収束するならば，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は E 上で絶対収束するという．

ここでは数列の級数で出てきた収束について関数項級数でも同様のことが言えることを保証する定理となっている．関数項級数でも絶対収束や一様収束は通常の収束より厳しい条件となっていて，絶対収束は関数項級数の収束判定に十分使えるものになっている．

関数項級数の収束判定が絶対収束ではいくら何でも心細い．そこでさらにもう 1 つ関数項級数の収束判定に使用できる定理を紹介する．

ワイルシュトラウスの優級数定理

$$|f_n(z)| \leq M_n, \quad ({}^{\forall} z \in E \text{ かつ } \sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{は収束})$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \text{ は } E \text{ 上で絶対収束し，かつ一様収束する}$$

この定理で関数項級数の収束はわかる．この定理の証明は M_n の級数がコーシー列であることを使う簡単なものである．

ここまでで関数項級数の話は簡単に終わる．

4.4　べき級数

直前の節で扱っていた関数項級数は $f_n(z)$ が様々な形をとることができたが，このべき級数では $a_n z^n$ に $f_n(z)$ が限定されるため関数項級数の特殊系であると言える．したがって，前節で述べた定理はすべて成立していることを前提として話が始まる．

4.4.1　べき級数と収束半径

ほとんどのことは前節と同様ではあるのだがべき級数特有の定理も存在するので紹介する．

定理 (べき級数の収束半径)

べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ が $z = \zeta(\neq 0)$ で収束するならば，このべき級数は

1. 領域 $D := \{z : |z| < |\zeta|\}$ で絶対収束
2. 任意の $R(0 < R < |\zeta|)$ 対して閉円盤 $E_R := \{z : |z| \leq R\}$ で一様収束する．

二つ目は広義一様収束にも見えるが閉円盤の中心が $a_n z^n = 0$ を与える点に固定されている表現となっている[*3]．

この定理から，すべてのべき級数は以下の 3 つの場合のうち 1 つに必ず分類されることが分かる．

1. すべての z で収束する．
2. $z = 0$ 以外のすべての z に対して発散する．
3. $|z| < \rho$ で絶対収束し，$|z| > \rho$ で発散するような $\rho > 0$ が存在する．

1 つ目と 2 つ目の分類も $\rho = \infty, \rho = 0$ という形で 3 つ目の分類に集約することもできる．そしてこのような ρ を収束半径と呼ぶ．

ここまでで最終の目標としていたテーラー展開，ローラン展開をする準備が完了した．

4.5 テーラー展開・ローラン展開

4.5.1 テーラー展開

テーラー展開についての定理を示す．

テーラーの定理

中心 z_0 半径が R の円 C の内部で関数 $f(z)$ が正則ならば，
C 内の任意の z において $f(z)$ は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \tag{4.2}$$

と，このようにべき級数での展開が可能．

証明を一読してもらいたいのは当然であるがここで気になるのは R のとることができる範囲である．しかしこれは定理の中ですでに述べているようなもので，円 C 内で関数 $f(z)$ が正則であることが条件なのだから円の半径 R は中心 z_0 から最寄りの特異点までの距離を d とすると $0 < R < d$ である．

さらに z_0 が原点である場合のテーラー展開は特別にマクローリン展開と呼ぶ．

4.5.2 ローラン展開

ローラン展開についての定理もあっさりと示す．

[*3] 中心が外れていてもその閉円盤を包含する大きな閉円盤が定理を満たす条件の下でとることができるので広義一様収束と同じだと考えられる．

ローランの定理

関数 $f(z)$ が $R_0 \leq |z-z_0| \leq R_1$ で正則ならば

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \tag{4.3}$$

と，このようにべき級数での展開が可能．また，

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \quad (C_1 := \{z | z = z_0 + R_1 \mathrm{e}^{j\theta}) \tag{4.4}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}} \mathrm{d}z \quad (C_0 := \{z | z = z_0 + R_0 \mathrm{e}^{j\theta}) \tag{4.5}$$

ここでも先ほどと同様に円の半径の値についての疑問が生まれるがここでも特異点を避ければ良いことが分かる．

さて，テーラー展開の式でさえ実際の計算はできそうもないのにローラン展開ときたら全くできる気がしない．いったいどのように展開をするのかについては以下で説明する．

4.5.3　展開の実行

基本的に公式を用いての正攻法の計算で展開を実行するのは困難であるため，等比級数の和の公式を利用する方法と既知のテーラー展開の計算結果の利用の 2 つの方法をうまく使うことで計算を実行する．

$f(z) = \dfrac{1}{z+3}$ のマクローリン展開

特異点 $z = -3$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3} \frac{1}{1-(-\frac{z}{3})} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{3}\right) \quad (|z| < 3) \end{aligned}$$

これは等比級数の和を利用した方法で思いつきさえすればとても容易に結果にたどり着く．では次の例である．

$$
\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)} &\text{のローラン展開} \\
&\text{特異点 } z = 0, 1 \\
&0 < |z| < 1 \Rightarrow \\
&\qquad f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-z} \\
&\qquad\quad = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\
&\qquad\quad = \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n-2)} \\
&\quad 1 < |z| \Rightarrow \\
&\qquad f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} \\
&\qquad\quad = -\frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\
&\qquad\quad = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+3)}
\end{aligned}
$$

この例は既知の計算結果を利用した方法で，ローラン展開でよくみられる方法である．

第 5 章

留数と極

5.1 留数

留数とは，関数 $f(z)$ の孤立特異点に対して与えられる複素定数のことである．留数の存在は複素積分に大きな効果を発揮する重要な定数であるので必ず理解したい．

5.1.1 孤立特異点

孤立特異点の定義を示す．

孤立特異点

点 z_0 が孤立特異点とは，
z_0 が特異点でかつ，z_0 のある近傍をとると，その近傍の z_0 以外の点では正則であることである．

この定義から今まで無意識に扱っていた特異点のほとんどが孤立特異点であったことが分かり，さらに一般の特異点は孤立していないことが分かる．

5.1.2 留数

さて，この孤立特異点から留数を導出する．$f(z)$ の孤立特異点 z_0 に対し，ある $R_1(0 < |z - z_0| < R_1)$ を用意する．すると $f(z)$ は $0 < |z - z_0| < R_1$ でローラン展開が以下のように実行できる．

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

この時，$f(z)$ の z_0 における留数とは b_1 である．

このように留数は求めることができる．しかし，ローラン展開における b_n はかなり難解な式を解かねばならず，あまり実用的ではない．ローラン展開が容易に行えるとも限らない．もっと言えば b_1 さえわかればいいのだから馬鹿正直にローラン展開を実行する必要さえない．よってここから効率的に留数を導出する方法を検討する[*1]．

5.1.3 留数の導出

留数の効率的な導出にはその前段階となる孤立特異点に対する多少の考察が必要となる．これは孤立特異点でのローラン展開の形状による．

極　$f(z)$ の主要部[*2]が有限個 (m 個) の項からなるとき，その孤立特異点は m 位の極と呼ぶ．

真性特異点　$f(z)$ の主要部が無限個の項からなるとき，その孤立特異点は真性特異点と呼ぶ．

除ける特異点　ローラン展開を行った時に，(z_0^z) の負のべき項の部分がなかった場合，その孤立特異点を除ける特異点を呼ぶ．

以上の 3 つが孤立特異点の分類である．この分類から明らかに除ける特異点の留数が 0 であるとわかる．そしてこの分類において極となった特異点の場合は以下の計算で留数を求めることができる．

1 位の極　1 位の極の場合はとても容易に留数を算出することができる．

$$R(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

まあ当然と言ったら当然な式である．さらに特殊な場合として $f(z)$ が分数関数であった場合，以下のように留数が求められる．

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \text{と表すと}$$

$$R(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

[*1] 使い道が見えぬまま導出の方法に話を広げても仕方がないように思えるが，ここは回り道をするようにしっかりと固めてゆきたい．

[*2] 主要部とはローラン展開における (z_0^z) の負のべき項の部分を指す．

つまり．分母の関数のみ微分すればよいのである．この方法はかなり効果的である．

m 位の極　m 位の極の場合は式こそ立つがあまり使えるとは思えない式である．

$$R(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \{(z-z_0)^{m-1} f(z)\}$$

この場合は素直にローラン展開を実行すべきである．

5.2　留数定理

留数の導出ができるようになれば次に考えるのは利用である．ここでは留数の力が大きく発揮される留数定理を扱う．

留数定理

C は正の向きを持つジョルダン曲線，$f(z)$ を C 内の複素関数，さらに，$f(z)$ の C 内にある有限個の特異点を $z_1 \cdots z_n$ とする．但しこれらの特異点はすべて孤立特異点である．この時，以下の式が成立する．

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi j \left\{ \sum_{k=1}^{n} R(z_k) \right\} \tag{5.1}$$

この定理は複素積分における極めて重要な定理でこれによって正則でない複素関数に対しても積分の計算が容易にできるようになる．

5.3　留数定理を背景に実数関数の積分

5.3.1　積分区間が無限大の積分

留数定理の存在は今までできなかった実数関数の定積分を可能にする．まずは積分区間が無限大の積分である．この場合は有限の値の積分を無限大に極限値をとるという考え方で計算をすればよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} f(x)\mathrm{d}x$$

さて，この積分の右辺の計算を考える．図 5.1 を見てもらいたい．実数関数の積分区間は複素平面では実軸で表されているが，これに半径 r の円を加え，この円の上半分を経路 C_r としたものを加えるとこれは区分的になめらかなジョルダン曲線である．つまり，この半円を足した経路であれば留数定理で積分が計算可能である．

$$\int_{-r}^{r} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi j \left\{ \sum_{k=1}^{n} R(z_k) \right\}$$

しかし，この計算結果に対し r を無限大とする極限をとったところで正しく計算ができているとは言えない．

$$\lim_{r \to \infty} \int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z$$

この部分が必ず現れる．次はこの値を計算する．ただ，ここではのちの議論の簡単化のため，$f(z)$ を分数関

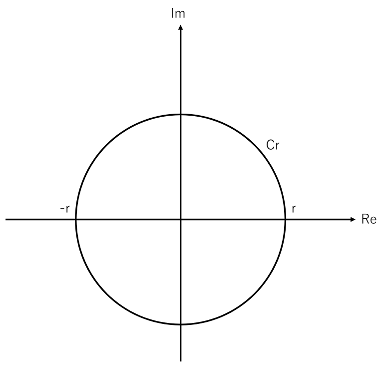

図 5.1　留数定理を用いた実数値関数の積分

数として扱う．

$$\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_r} f(r\mathrm{e}^{j\theta}) \cdot r\mathrm{e}^{j\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\int_{C_r} \frac{p(r\mathrm{e}^{j\theta})}{q(r\mathrm{e}^{j\theta})} \cdot r\mathrm{e}^{j\theta}\mathrm{d}\theta$$

さて，計算はここまでにしておいて，r を無限大とする極限を考える．上で行った計算をさらに都合よく進める．

$$\int_{C_r} \frac{p(r\mathrm{e}^{j\theta})}{q(r\mathrm{e}^{j\theta})} \cdot r\mathrm{e}^{j\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{(p(z)\text{ の最高次数の } r \text{ の多項式})}{(q(z)\text{ の最高次数の } r \text{ の多項式})} \cdot r(\text{有限確定値})$$

この変形から，$(q(z)$ の最高次数$) - (p(z)$ の最高次数$) \geq 2$ ならば余分であった項をなかったことにできる．言い換えれば，$(q(z)$ の最高次数$) - (p(z)$ の最高次数$) \geq 2$ ならば積分区間が無限大の実数関数の積分は複素積分に拡張したうえで留数定理で計算ができる．

新たな経路を追加することでジョルダン曲線を作り，留数定理を利用．さらに新たに加えた経路が無視できるならそのまま答えに行きつく．このような考え方で今までできなかった実数関数の定積分を可能にしている．つまり，追加した経路が計算結果として無視できるなら，ほかの計算もできるということである[*3]．

5.3.2　三角関数のみで構成される関数

この部分は正直簡単で，置換積分の域を出ない．

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_C f\left(\frac{z - z^{-1}}{2j}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)\frac{1}{iz}\mathrm{d}z \\ &C : z = \mathrm{e}^{j\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{aligned}$$

[*3] いちいち例を挙げるのは面倒である．教科書を参照するように．

この置換でもう計算が可能な状態になる．あとは留数定理などで計算すればよい．

第 6 章

解析接続他

6.1 解析接続

6.1.1 一致の定理

初めて聞く定理ではあるが意味を知れば難しくはない．まずは一致の定理の特殊版ともいえる以下の定理を見てほしい．

定理 (複素関数の零点)

恒等的に 0 ではない正則関数の零点は孤立している．

ここでの孤立とは孤立特異点の時と同様で，ある零点のある近傍では最初の零点以外はいかなる点も近傍ではないということである．つまり定数関数でもなければ零点は連続して存在しないということである．これを言い換えたものが一致の定理である．

一致の定理

$f(z)$ が z_0 の近傍で正則である．すると $f(z)$ は適当な z_0 近傍で以下の 3 つの状態をいずれかをとる．

1. $f(z) = 0$
2. $f(z_0) = 0, f(z) \neq 0 \ (z \neq z_0)$
3. $f(z) \neq 0$

瞬時には話が見えない定理ではあるが，要は適当な近傍をとればその領域内には零点が高々 1 つ．そうでなければ領域全体が零点となるといっている定理でやはりここでも定数関数でなければ零点が連続して存在しないことを示している．

ここで発想を変えれば，連続して零点が存在すれば残りの点を吟味することなくその関数が値 0 の定数関数であるといえる，以下の定理はその部分を述べている．

定理 (連続した零点)

$f(z)$ が領域 D 内で正則でかつ，以下の 2 つの条件のいずれか 1 つでも満たすとき，D 内で $f(z)=0$ である．

1. D 内にとった小領域の各点において $f(z)=0$
2. D 内にとった弧上のすべてで $f(z)=0$

零点が連続して存在するというその連続というのを領域や弧に置き換えていると思えば理解はたやすい．

ここまでくると零点にこだわっていいることがもったいなく感じる．次の定理は一致の定理を改めたものである．

一致の定理 (改)

$f_1(z), f_2(z)$ は D 内で正則な関数とする．

1. D 内にとった小領域の各点において $f_1(z)=f_2(z)$
2. D 内にとった弧上のすべてで $f_1(z)=f_2(z)$

以上の条件のいずれか一方を満たすならば，D 内で
$f_1(z)=f_2(z)$ である．

これが一般的な一致の定理である．ここから一部の一致が全体の一致となることが分かり，未知の関数を調べるときに効果を発揮する．さらにこの一致の定理から以下の定理が直ちに導き出される．

定理 (定数関数でない関数の性質)

$f(z)$ は領域 D 内で正則とする．
$f(z)$ が D 内で定数ではないならば，$f(z)$ は D 内の任意の部分領域で定数ではない．

6.1.2 解析接続

まずは解析接続とは何なのかを把握してほしい．

解析接続

$f_1(z)$ は領域 D_1 内で正則であるとする．このときある関数 $f_2(z)$ が

1. $D_1 \cap D_2$ で $f_1(z)$ と同じ値をとる．
2. D_2 で正則である．

以上の 2 つの条件を満たすとき，
”f_2 を f_1 の D_2 への解析接続である”という．

内容からも何をやっているのかはあまりよくわからないが，簡単には定義されていない領域へ関数が引っ張り出されているイメージである．この解析接続を繰り返すと元の領域を定義域とする関数に戻ってくるが，これは最初の関数と異なることがある．

6.2 最大値の原理・リュウビルの定理

6.2.1 定理 (最大値の原理)

最大値の定理

関数 $f(z)$ が z_0 の近傍で正則で $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ ならば,
$f(z)$ は定数である.
すなわち，$f(z)$ が定数でないならば，この近傍内の少なくとも 1 つの z に対して,
$|f(z)| \geq |f(z_0)|$ である.

この定理では定数関数ではない関数をある近傍の中で考えるとき，その近傍内には必ず近傍の中心での関数値より大きな関数値を持つ点が存在することを意味している．さてこの定理から以下の定理を導くことができる.

定理 (開集合での関数値の大きさ)

$f(z)$ を開集合 D 内で正則で，かつ定数関数ではないとするならば,
$|f(z)|$ は D 内で最大値をとらない.
すなわち，D 内の任意の z に対して $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ が成り立つような z_0 は存在しない.

もし，z_0 の候補の点があってもその近傍では必ず z_0 よりも関数値の大きさが大きくなる z をとってくることができる．開集合においてはこれをいくらでも繰り返すことができるため，結局は上記の定理のようになる．では次は領域を有界閉集合として考える.

定理 (閉集合での関数値の大きさ)

$f(z)$ を有界閉集合 R 内で連続，R の内部で正則，かつ定数関数ではないとする.
ならば，$|f(z)|$ の最大値は R の境界上に存在する.

内部では開集合の時と同じ話であるし，なおかつ有界閉集合である以上 $|f(z)|$ の最大値は必ず存在するのでこのようになる.

6.3 偏角の原理

z があるジョルダン曲線 C 上を動いたとき，$w = f(z)$ と置いた w は複素数平面上で原点の周りを何回まわるか．この節ではこの問いに答えたい.

この問いを考えるうえで以下の仮定，定義を置く.

仮定 C の内部にある極を除いて $f(z)$ は C 上，内部で正則．さらに C 上に零点はないとする.
このようにすると $f(z)$ は原点を通らない.

定義 極，零点を数えるとき，1 つの極，零点に対してその位数を個数と考えて数える.

この仮定と定義を置くことで以下の定理が生まれる.

定理 (偏角の原理の前段階)

N を C 内部の零点の個数，
P を C 内部の極の個数とする．
すると以下の式が成り立つ．

$$\frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = N - P$$

ここから本題の偏角の原理が以下のようになる．

定理 (偏角の原理)

前定理と同じように N, P をとる．すると，

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_c \arg f(z) = N - P \tag{6.1}$$

この定理ではあるジョルダン曲線 C 上を動く z に対し，$w = f(z)$ と置いた w が複素数平面上で原点の周りを回る回数は C で囲まれた領域内での $f(z)$ の零点の個数から極の個数を引いたものに等しいことを示している．

6.4 ルーシェの定理

ルーシェの定理

C を区分的になめらかなジョルダン曲線，f, g を C 内部で正則，C の各点で $|f| \geq |g|$ とする．
この時，$f, f+g$ は C 内部に同じ数の零点を持つ．

以上