

電磁気学

# 目次

第 1 章	真空中の静電界	3
1.1	クーロンの法則 . . . . .	3
1.2	電界 . . . . .	4
1.3	電気力線 . . . . .	5
1.4	電位 . . . . .	5
1.5	ガウスの法則 . . . . .	6
1.6	ラプラスの方程式・ポアソンの方程式 . . . . .	7
1.7	電位・電界の計算 . . . . .	7
1.8	導体に関する静電界 . . . . .	10
第 2 章	真空中の導体系	11
2.1	電位係数・容量係数・誘導係数 . . . . .	11
2.2	静電シールド . . . . .	13
第 3 章	誘電体中の静電界	14
3.1	誘電体の分極 . . . . .	14
3.2	分極の強さ . . . . .	15
3.3	誘電体による電位 . . . . .	17
3.4	電束密度 . . . . .	18
3.5	誘電体境界面 . . . . .	18
3.6	誘電体とコンデンサ . . . . .	20
第 4 章	静電エネルギー・力	23
4.1	導体系の静電エネルギー . . . . .	23
4.2	静電界中のエネルギー密度 . . . . .	24
4.3	導体系にはたらく力 . . . . .	27
4.4	導体表面に作用する力 . . . . .	29
4.5	誘電体の境界にはたらく力 . . . . .	31
4.6	マクスウェルの応力 . . . . .	33
第 5 章	静電界の境界値問題	34
5.1	鏡像法 . . . . .	34
5.2	球に関する問題 . . . . .	37

5.3	一様電界 . . . . .	40
5.4	等角写像 . . . . .	43
<b>第 6 章</b>	<b>定常電流</b>	<b>46</b>
6.1	電荷と電流 . . . . .	46
6.2	電流保存則 . . . . .	47
6.3	抵抗と電流 . . . . .	47
6.4	定常電流界と静電界 . . . . .	48
6.5	定常電流界の計算 . . . . .	48
<b>第 7 章</b>	<b>定常電流による磁界</b>	<b>50</b>
7.1	磁束密度の計算の手法 . . . . .	50
7.2	磁束の磁束の連続性 . . . . .	52
7.3	真空中の直流電流による磁束 . . . . .	52
7.4	ベクトルポテンシャル . . . . .	56
7.5	電流によるベクトルポテンシャルの計算 . . . . .	56
<b>第 8 章</b>	<b>磁性体</b>	<b>59</b>
8.1	磁化と磁化電流 . . . . .	59
8.2	磁界の強さ . . . . .	63
8.3	具体的な磁界・磁束 . . . . .	64
8.4	EB 対応・EH 対応 . . . . .	65
8.5	磁界に関する境界条件・磁界のエネルギー . . . . .	67
8.6	強磁性体 . . . . .	68
8.7	磁気回路 . . . . .	71

## 第 1 章

# 真空中の静電界

## 1.1 クーロンの法則

### 1.1.1 力の大きさ

図 1.1 のように  $Q_0, Q_1$  クーロンの 2 つの電荷が距離  $r_{01}$  離れているときこの 2 つの電荷にはたらく力の大きさ  $F$  は以下のようにになる.

$$F = \frac{Q_0 Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{01}^2} \quad (1.1)$$

この分母に注目することすることで以下の明かな関係が見える.

$$Q_0 Q_1 > 0 \Rightarrow \text{反発}$$

$$Q_0 Q_1 < 0 \Rightarrow \text{引力}$$



図 1.1 クーロン力

式 (1.1) の分母に現れた  $\epsilon_0$  はこれもみんなの知るところであるが電気定数<sup>\*1</sup>である. その値は以下のとおりである.

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

ここから式 (1.1) の定数の部分が算出できる.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \times 10^9$$

値だけ見てもどうなんだという話であるが, ここで参考として重力定数  $G$  をしめす.

$$G \simeq 6.7 \times 10^{-11}$$

---

<sup>\*1</sup> 真空中の誘電率ともいう.

この差は明らか\*2である。

### 1.1.2 向きのある力

力は向きを持つベクトル量なのでベクトルとして考えよう。図 1.1 の 2 つの電荷の位置をどこか任意の定点からの位置ベクトルで  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$  とする。すると点電荷  $Q_1$  が点電荷  $Q_0$  に及ぼす力は以下の式となる。

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^3} Q_0 Q_1 \quad (1.2)$$

さらに多数の電荷が存在する場合を考える。ベクトル量であるため重ね合わせを使うことで以下の式が導き出される。

$$\mathbf{F} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|^3} Q_i$$

## 1.2 電界

### 1.2.1 静電気力の正体

はるか昔、静電気力の伝わり方には遠隔作用説、近接作用説の 2 説があった。遠隔作用説とは静電気力が電荷の間を直接伝わるというものである。これに対して近接作用説は電荷に直接触れるものが影響、つまり場を通して力が伝わるというものである。実際は電界 (電場) というものの存在が力を伝えるため近接作用説が正しかったということになる。

### 1.2.2 電荷が作る電界

まずは点電荷  $Q_1$  が作る電界  $\mathbf{E}$  を考える。電界の定義が単位電荷にはたらく力であることから以下の式が立つ。

$$Q_1 \cdot \mathbf{E} = \mathbf{F}$$

点電荷  $Q_1$  が  $\mathbf{r}_1$  にあると考え式 (1.2) と比較すると容易に以下の式が導き出せる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (1.3)$$

ここでも当然複数個の電荷を考える。なんのことはなく電荷が多数の時は重ね合わせを使えばよい。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|^3} Q_i \quad (1.4)$$

### 1.2.3 分布電荷が作る電界

分布電荷ではある体積の中で電荷が連続的に存在するがその密度が位置の関数になっている。図 1.2 のとおりである。

---

\*2 下敷きで頭を擦ったら髪の毛が下敷きに吸い付いて立つ。これは静電気力の身近な例であるが重力に容易に打ち勝っているという見方ができる。

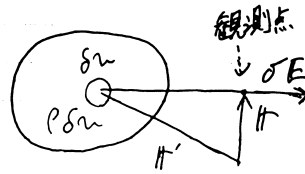


図 1.2 分布電荷の電界

それでは電界を考えてみよう．電荷がないところで適当な定点をとり，観測点へ位置ベクトルを  $\mathbf{r}$ ，電荷が分布している空間内の位置ベクトルを  $\mathbf{r}'$  とする．これで準備は完了で，電荷が分布している空間内で，微小体積をとる ( $\delta v$ )．するとその微小体積内で電荷密度は一定であるといえる ( $\rho(\mathbf{r}')$ )．この 2 つの積で微小体積での電荷が判明するわけだが，これでその微小体積による電界は容易に計算できる．

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

これを電荷が分布している空間全体で積分すればよいのである．

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv \quad (1.5)$$

## 1.3 電気力線

電気力線とは  $\mathbf{E}$  の流線 (指力線) である．交差したり分岐したり途絶えることはもちろんない．その指し示す方向は電界の方向を表し，単位面積当たりの本数が電界の大きさを表している．

では電気力線の総本数は何本なのか．これは点電荷  $Q$  の距離  $r$  における電界と，その距離での点電荷を中心とする球の表面積を考えればよい．

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ S &= 4\pi r^2 \\ \therefore \frac{E}{S} &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

この関係は思いのほか大事である．

## 1.4 電位

### 1.4.1 電位の計算

電位は単位電荷にはたらく力であるというのが電位の定義であるが，2 点間の電位差という場合は仕事量で考える．2 点  $P_1, P_2$  を置くと点  $P_1$  から  $P_2$  へ単位正電荷を移動させるときの仕事はその 2 点の電位差ということになる．

さて実際に計算をしよう．図 1.3 の通りに経路をとり，その図の中での微小距離  $\delta \mathbf{s}$  をとる．経路内で電界  $\mathbf{E}$  は変化をするが微小距離内では変化がないといえる．このことから微小距離内での仕事は以下のようにあ

らわせる。

$$\delta W = -\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{s}$$

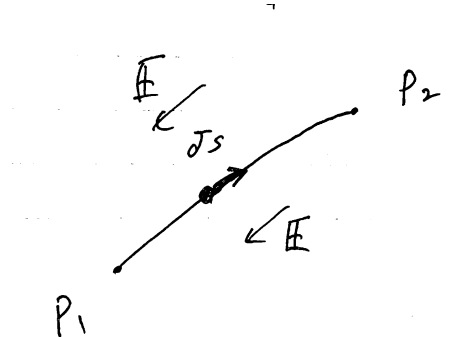


図 1.3 電位の計算

符号が負であるのは力の向きと動く方向によるものである。経路全体とすべく両辺を積分することで電位差は以下のように求められる\*3。

$$V_{P_1}(P_2) = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{s} \quad (1.6)$$

電位差の始点を無限遠にもっていくことで電位が求まる。

$$V_{P_1}(P_2) = - \int_{\infty}^{P_2} \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{s} \quad (1.7)$$

## 1.4.2 電位の計算から分かること

式 (1.6) によって 2 点間の電位差が計算できると述べたが、この計算が意味あるものとなるのは積分の値が経路に依らないときである。さてこれに関して数学の話を深めるのは面倒であるので条件のみを述べると、 $\mathbf{E}$  に渦がないことである。

$$\text{curl} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

そして渦がないならばスカラーポテンシャルが存在し、これが電位である。

$$\mathbf{E} = -\text{grad} V \quad (1.8)$$

さて、計算の方法がよくわかったところで原点にある点電荷  $Q$  による電位を原点からの距離  $r$  の関数で表したものを示しておく。

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

## 1.5 ガウスの法則

電気力線の総本数を求めよう。電荷  $Q$  覆う閉曲面  $S$  を貫く電気力線を計算すればよいのだ。そう考えると  $S$  の微小面積での電気力線の本数を計算して積分すればよいだろうと思いつく。微小面積  $d\mathbf{s}$ \*4 を貫く電気力

\*3  $V_{P_1}(P)$  とは点  $P_1$  からの電位差であることを表している。

\*4 これは面積ベクトルである。方向は面の法線方向かつ閉曲面の外側、大きさは面積である。

線の本数  $dN$  は

$$\begin{aligned}dN &= \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \\&= E \cdot ds \cos \theta \\&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} ds \cos \theta \\&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\omega\end{aligned}$$

このような式変形ができる。  $\omega$  は立体角<sup>\*5</sup>である。この両辺を閉曲線全域で積分することで

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.9)$$

が得られる。複数電荷の場合はここの電荷でガウスの法則を使い和をとればよい。

さて、式 (1.9) の変形させて

$$\int_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{s} = Q$$

さらにガウスの発散定理を用いて

$$\int_V \operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) dV = Q$$

また電荷は電荷密度の体積積分で算出できるので

$$Q = \int_V \rho dV$$

以上から次の式が導かれる。

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.10)$$

ガウスの法則の微分形だ。

## 1.6 ラプラスの方程式・ポアソンの方程式

式 (1.8) と式 (1.10) から電位と電荷密度の関係式が導出できる。あまりに対したことがないので式のみ示す。

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{ポアソンの方程式}) \quad (1.11)$$

$$\nabla^2 V = 0 \quad (\text{ラプラスの方程式}) \quad (1.12)$$

$$(1.13)$$

ポアソンの方程式のうち  $\rho = 0$  であるのがポアソンの方程式である。

## 1.7 電位・電界の計算

### 1.7.1 電気双極子

クーロン力が重力に比べて強いことは先に述べているが、その力のため正電荷と負電荷は引き寄せられ2つで1セットの電気双極子という形態をとることが多い。2つの電荷の距離は極めて近いが合わせて電荷0なんて考え方はできない。

---

<sup>\*5</sup> 立体角が何なのかは各自で調べてもらおう。



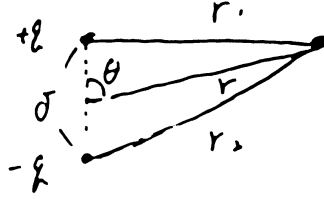


図 1.4 電気双極子

では図 1.4 のような電気双極子による電位を考える．距離が分かっている場合は容易に以下の式で答えが出る．

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

しかし，問題なのは正電荷と負電荷の距離が極めて近いことで，これでは電位は 0 とだけで終わってしまう．なのでこの電気双極子の中心からの距離をおき，さらに 2 つの電荷を結ぶ線分に対する角を置くことで先ほどの式を書き換える．

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{r^2 - 2r \left( \frac{\delta}{2} \right) \cos \theta + \left( \frac{\delta}{2} \right)^2} \\ r_2 &= \sqrt{r^2 + 2r \left( \frac{\delta}{2} \right) \cos \theta + \left( \frac{\delta}{2} \right)^2} \\ \frac{1}{r_1} &\simeq \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{\delta}{r} \cos \theta \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\because \delta \ll r) \\ &\simeq \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\delta}{r} \cos \theta \right) \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_2} &\simeq \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{r} \cos \theta \right) \\ \therefore V &\simeq \frac{q\delta \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

さらに  $\delta \rightarrow 0$  で有限の値で  $q\delta = m$  とする．

$$V = \frac{m \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.14)$$

これをさらにベクトルで書き直す．まず負電荷から正電荷をベクトル  $\boldsymbol{\delta}$  と置く．すると  $q\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{m}$  となる．さらに電位を考える方向への単位ベクトルは  $\boldsymbol{r}/r$  で与えられるのでこれらを用いて式 (1.14) を書き換えると，

$$V = \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.15)$$

となる．分母の  $r$  の指数に注意が必要である．

電位が判明すれば式 (1.8) から電界が計算できる．ここで工夫したいのは電気双極子の中心から座標をとっているので球体座標を用いるのが良いという事である．球体座標では，

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

である。これによって

$$\mathbf{E} = \left( \frac{2m \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \frac{m \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, 0 \right) \quad (1.16)$$

## 1.7.2 平行無限線状電荷

何かすごい名前ではあるが単に電荷が糸のように存在しているだけである。ここで考えるのは無限長の直線状に電荷がある場合を考える。

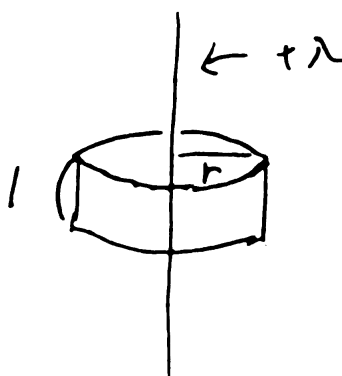


図 1.5 1 本の無限長線状電荷の概念図

まずは 1 本だけの時を考える。電荷線密度を  $\lambda$  とする。発想としては線電荷の周りに半径  $r$  高さ 1 の円柱を置いてガウスの法則を使う。この時、無限長である条件から円柱の底面を貫く電気力線がないと行きつけば計算は容易である。図 1.5 は概念図である。

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E \cdot 2\pi r = \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

電界が導き出せたら次は電位を求めたくなるがこれは発散してしまう。無限長という条件は電位の基準点である無限遠を用意するのを妨げるからだと思っていけば問題はない。これを 2 次元問題<sup>\*6</sup>という。

では次にもう 1 本電荷線密度  $-\lambda$  の線電荷を加えて考える。計算は 1 本の時と同様である。正直電界は重ね合わせでどうにでもなるので電位のみを扱う。定積分ができなかったので、不定積分を 2 本の線電荷に対して行う。図はこの問題に対して与えられたものでデカルト座標である。

$$V_1 = K_1 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log r_1$$

$$V_2 = K_2 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log r_2$$

電位も足せばよいので、

$$V = V_1 + V_2$$

$$= (K_1 + K_2) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{r_2}{r_1}$$

<sup>\*6</sup>  $r \rightarrow \infty$  で  $V \rightarrow 0$  にならないという問題。

$r_1 = r_2$  で電位が 0 は明らかなので, ただちに  $K_1 + K_2 = 0$  とわかり計算は完了する.

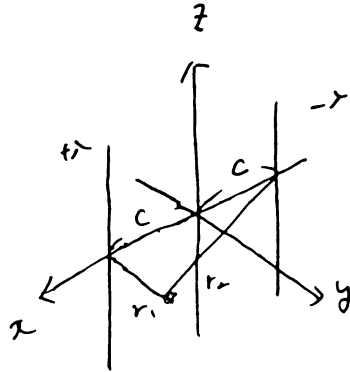


図 1.6 平行無限長線状電荷

## 1.8 導体に関する静電界

### 1.8.1 導体中の電荷

導体内が同電位であることは皆の知るところであろう. そうなると導体内では電界が 0 である. そして式 (1.10) などから導体内の電荷密度は 0 であるとわかる. つまり導体に置ける電荷はすべて導体表面に存在するのだ.

では, 中空部の存在する導体のその中空部に電荷  $Q$  が存在するときを考えてみる (図 1.7).

$$\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{S} = 0$$

であり, なおかつ導体の電荷はその表面にのみ存在することから, 導体の内側表面に電荷  $-Q$  が分布するということが分かる. さらに, 導体の全体としての電荷が 0 であるとするとき, 導体の外側表面に  $Q$  の電荷が分布している.

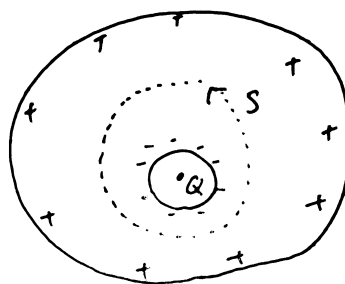


図 1.7 中空部のある導体

## 1.8.2 導体の電界

導体の表面に電荷があることが分かったがそこからの電界がどうなっているのかを考える。まず電界の方向だがそれは導体表面に対して垂直の方向である\*7。ではその大きさだが、導体表面に電荷面密度  $\sigma$  で電荷があるとしたとき、微小面積  $\delta S$  において

$$\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{S} = \epsilon_0 E \delta S = \sigma \delta S$$

したがって

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.17)$$

# 第 2 章

## 真空中の導体系

導体の話は前章から少し触れているがこの章でも大きく取り扱う。

## 2.1 電位係数・容量係数・誘導係数

### 2.1.1 複数の導体と行列による表現

$n$  個の導体が真空中にあるときの電位や容量などの関係の表すものだ。全く話が見えないのでさっそく電位係数を紹介する。

$n$  個の導体が他の影響を受けない状態で存在するとき、各々の電位は各導体の持つ電荷の線形結合で与えられることは想像できるだろう\*1。これを行列の形にまとめると、

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \quad \left( \mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \right)$$

となる。電位係数とはこの行列  $\mathbf{P}$  の要素  $p_{ij}$  のことだ。電位係数はその一切を導体系の幾何学的条件\*2に依存していてその他は影響しない。そして最も重要な性質は行列  $\mathbf{P}$  が対象行列だということで、この証明にグリーンの定理を必要とする。

\*7 表面の 1 点のみからの電界は放射状だろうが、それが無数に表面上を並んでいると想像すれば重ね合わせから打ち消しが起こることが想像できる。

\*1 2 つから考えてみればすぐにわかる。

\*2 距離や位置のこと。

また、行列  $\mathbf{P}$  は正則で逆行列  $\mathbf{C}$  をもつ、

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}$$

どこかで見たことのあるような式だ。この行列  $\mathbf{C}$  の対角成分を容量係数、そのほかの成分を誘導成分という。当然これらの成分は幾何学的条件にのみ依存する。

### 2.1.2 静電容量

静電容量  $C$  は導体の電位  $V$  と導体に蓄えられている電荷  $Q$  で以下のように定義される。

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.1)$$

実際のところ静電容量はコンデンサを扱うときによく耳にする語句だ。平行版コンデンサでは導体があるがこのようなときの静電容量を行列の視点で求めてみる。

2つの導体それぞれ電位  $V_1, V_2$ 、電荷が  $Q_1, Q_2$  だとすると、

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

コンデンサの場合を考えるので  $Q_1 = -Q_2 = Q$ 、 $V = V_1 - V_2$  とする。これで、先に示した静電容量の定義式が使え、

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{p_{11} - 2p_{12} + p_{22}}$$

が導き出される。

### 2.1.3 コンデンサの容量

この節の内容とは少し異なるがこのタイミングでコンデンサの容量の計算方法を扱う。

**同心球コンデンサ** 図 2.1 のようなコンデンサだ。内部の球の半径が  $a$ 、外側は内径が  $b$  の球殻上導体だ。そして中の球には電荷が  $Q$ 、外殻には  $-Q$  の電荷が蓄えられているとする。つまりところ式 (2.1) の静電容量の定義式を使いたいわけで、これを目標にする。

まず幾何学的な見方から、電界が球対称で半径方向なのはすぐにわかる。電界の方向が分かるという事はその方向の積分をすることで電位が計算できる\*3。電界は容易に計算でき、

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (a < r < b)$$

これを積分することで電位差は計算できる。

$$V = \int_b^a -E(r)dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

あとは式 (2.1) に代入することで

$$C = 4\pi\epsilon_0 / \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

---

\*3 スカラのみで計算が終わるというのは、ベクトルや発散などの存在を知った我々にとってありがたいと感じるのではないかな。

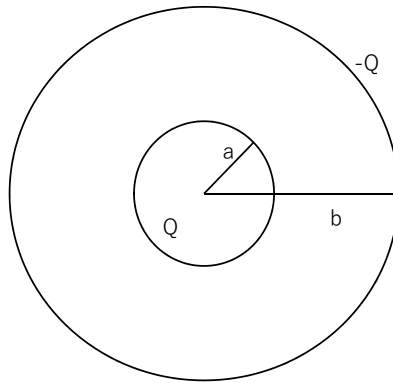


図 2.1 同心球コンデンサ

**同軸円筒導体** 名前だけで形状が想像できるのならば諸君の想像力はたくましいといえる。太さ  $a$  の導体円柱の周りをそれより太い導体の筒で覆った状態だ。もちろん導体円柱，導体筒の軸は一致させてあり，導体筒の内径は  $b$  である (図 2.2)。導体円柱の単位長さ当たりの電荷を  $\lambda$ ，導体筒の単位長さ当たりの電荷を  $-\lambda$  とする。考え方は同心球コンデンサと全く同じだ。しかし，電界を求める際に導体円柱が無限長あると仮定するため，電界は円柱の側面より出てくると注意が必要だ。

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\therefore V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{b}{a}$$

静電容量は

$$C = 2\pi\epsilon_0 / \log \frac{b}{a}$$

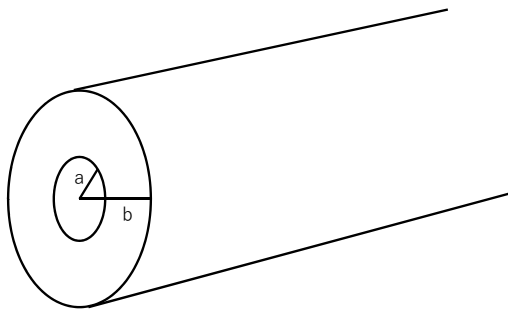


図 2.2 同軸円筒導体

## 2.2 静電シールド

複数の導体についての話をしてきたが，その位置関係は何となくみんな別々に存在している状況を想像していたのではないか。事実，今までの話で複数の導体は触れることなく適当な距離をもって存在している場合を

想定していた。次の話は、複数ある導体のうち1つが他の導体の内部に存在している場合を考える。

図 2.3 の状況を考える。導体 1 が導体 2 の内部に存在する場合だ。このとき導体 1 の電荷  $Q_1$  は導体 1 と導体 2 の電位差  $V$  にのみ依存し、その他の導体は関係がなくなる。逆にその他の導体も導体 1 の影響は受けない。つまり導体の静電誘導作用が導体 2 によって遮られているのだ。これを静電シールドと呼ぶ。

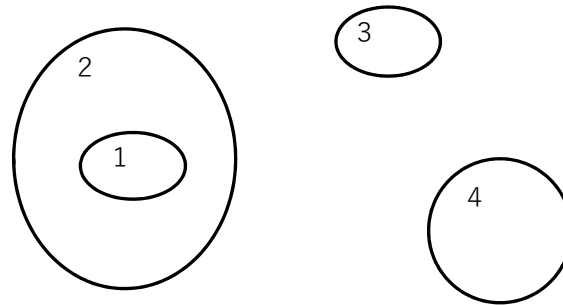


図 2.3 静電シールド

## 第 3 章

# 誘電体中の静電界

誘電体とは絶縁体の別称だ。電流を流さない誘電体も電界の影響を受け、また影響を与えたりする。

## 3.1 誘電体の分極

### 3.1.1 電子分極

原子核の周りを電子がまわる様子を想像してほしい。原子核は正電荷で、電子は負電荷だ。原子は全体として電荷がないように見える。ここに電界があるとそれに伴うクーロン力で原子核、電子の位置関係が変化する(図 3.1)。これを電子分極という。電荷をその重心で捉えれば電子分極した原子は電気双極子とみなせる。

### 3.1.2 原子分極 (イオン分極)

図 3.2 を見てほしい。原子に電荷がある結晶、つまりイオン結晶を考えているが、電界によって結晶の構造がずれるように変化している。これを原子分極という。

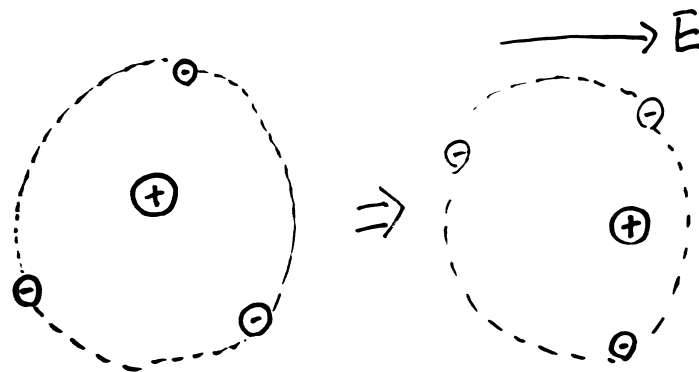


図 3.1 電子分極

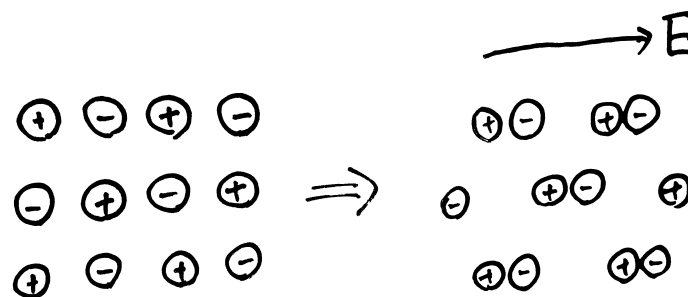


図 3.2 原子分極

## 3.2 分極の強さ

### 3.2.1 電気双極子と分極の強さ

微小体積の分極を電気双極子に見立てて話を進める．図 3.3 がその微小体積だ．

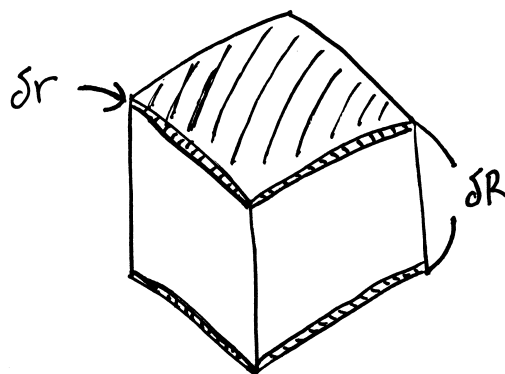


図 3.3 微小体積



1 辺が  $\delta R$  の微小立方体の中に体積密度  $\rho_0, -\rho_0$  の正と負の電荷が一樣に存在するとする。これが電界によって分極を起こす。このとき微小体積の上下  $\delta r$  に正負の電荷が移動したとしよう。このときの分極電荷は

$$\rho_0 \delta S \delta r \quad (\delta S = (\delta R)^2)$$

となる。ここで電気双極子モーメントを以下のように定義する。

$$\mathbf{p} = q\mathbf{s} \quad (3.1)$$

$q$  は分極した電荷、 $\mathbf{s}$  は分極した負の電荷から、正の電荷へのベクトルだ。

今考えている状況に対しても電気双極子モーメント  $\mathbf{p}$  を計算すると、

$$\mathbf{p} = \rho_0 \delta S \delta r \cdot \delta \mathbf{R}$$

ここでようやく分極の強さ  $\mathbf{P}$  が電気双極子モーメントによって以下のように定義できる。

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{\delta V} = \rho_0 \delta \mathbf{r} \quad (3.2)$$

この式からもわかる通り分極の強さは単位体積当たりの電気双極子モーメントとなる。

ついでと言ったら良くはないが、ここで微小体積の底面で表面の分極電荷密度を計算する。

$$\sigma_P = \frac{\rho_0 \delta S \delta r}{\delta S} = \rho_0 \delta r = P$$

分極の強さの大きさとなる。

### 3.2.2 電荷の量

分極をした後の微小体積について考える。

分極の際に微小体積内部から表面へ電荷が移動するわけだから、その両者の量には等式が成立するだろう。まずは表面の電荷を計算する。

$$Q_{P \text{ 表面}} = \oint_S \sigma_P dS = \oint \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS$$

この計算では分極の強さを表すベクトルの向きを利用して法線面積分になっているが、ガウスの定理より、

$$Q_{P \text{ 表面}} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{P} dv$$

表面の電荷と内部の電荷との和は最初の条件より 0 であるはずだ。そのことを念頭に分極後の微小体積内の電荷を計算する。

$$Q_{P \text{ 内部}} = \int_V \rho_P dv = -Q_{P \text{ 表面}}$$

これより、

$$\begin{aligned} \int_V \rho_P dv &= \int_V \operatorname{div} \mathbf{P} dv \\ \therefore \rho_P &= -\operatorname{div} \mathbf{P} \end{aligned}$$

分極された電荷について扱ったが、ここで分極していない電荷の真電荷と合わせこれまでの結果をまとめる (表 3.1)。

表 3.1 真電荷と分極電荷

	真電荷	分極電荷
電荷体積密度	$\rho_0$	$-\text{div} \mathbf{P}$
電荷表面密度	$\sigma_0$	$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$

### 3.3 誘電体による電位

分極の発生は誘電体中の真電荷による電界に反応して誘電分極が発生，分極電荷による電界が発生するという流れだ．そこで誘電体を相手に電界を考える場合，真電荷の電界と分極電荷による電界の2つの和をとるという方法をとる．そうすると2つの電荷が真空中に存在していると考えることができる．ここから電位を計算しよう．

真空中の閉曲面  $S$  に囲まれた体積  $v$  の誘電体の領域を考える．体積密度  $\rho_0$ ，面密度  $\sigma_0$  の真電荷密度があるとする．電界を考える場所は用意した誘電体領域の外側にある点  $\mathbf{r}^*$  とする．まずは真電荷の側面から電位  $V_0$  を考える．

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho_0}{r} dv + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_0}{r} dS$$

この式は何ら難しいことはなく位置  $\mathbf{r}$  から内側の電荷の総量を計算して公式に代入したに過ぎない．

次は分極電荷についての計算だ．分極の強さを  $\mathbf{P}$  とする．考えている誘電体領域の中の微小体積  $\delta v$  をとる．電気双極子と考えて微小体積による電圧  $\delta V_P$  を計算する．

$$\mathbf{m} = q\mathbf{s} = \mathbf{p} = \mathbf{P}\delta v$$

より，

$$\delta V_P = \frac{\mathbf{P}\delta v \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\mathbf{P}\delta v}{4\pi\epsilon_0} \text{grad}' \left( \frac{1}{r} \right)$$

となる．ここで  $\mathbf{r}$  がどこからのベクトルなのかを与える．まず電位を考えている位置を  $(x, y, z)$  とする．次に誘電体領域内で微小体積を与えたが，この座標を  $(x', y', z')$  とする．ここから，

$$\mathbf{r} = (x - x', y - y', z - z')$$

これで計算が具体的にできる．微小体積を考えたらもちろん積分をすることで全体を考える．

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \mathbf{P} \cdot \text{grad}' \left( \frac{1}{r} \right) dv$$

この計算が面倒なもので説明する気もなく結果を与える．

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho_P}{r} dv + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_P}{r} dS$$

意外なもので，真電荷と同形の式となる．これの和を考えることで電位が計算でき，

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_0 + \sigma_P}{r} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho_0 + \rho_P}{r} dv \quad (3.3)$$

これでひと段落．

---

\*1 どこからのベクトルなのかは後で明らかにする．

### 3.4 電束密度

先の節で電位を計算したが電界は計算しなかった。何も計算できないわけではない。しかし誘電体を考えるとき、電界がそれほど役には立たない。電束密度という新しい概念を導入したい。

誘電体内で閉曲面  $S$  をとる。この内部に存在する分極電荷、真電荷を  $Q_P, Q$  とする。ここで電気力線の総本数を  $N$  とすると、

$$N = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{Q_P + Q}{\varepsilon_0}$$

ここから式変形をする。

$$\begin{aligned} \oint_S \varepsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{S} - Q_P &= Q \\ \Leftrightarrow \oint_S (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) d\mathbf{S} &= Q \quad (\because Q_{P \text{ 内部}} = -Q_{P \text{ 外部}} = -\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S}) \end{aligned}$$

となる。

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.4)$$

を定義することで、

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (3.5)$$

となる。ここで定義した  $\mathbf{D}$  を電束密度という。

これまでの議論は電荷を真電荷と分極電荷を分けて考えることによって、真空中に場所を絞ることができた。しかし、この考え方をやめ、誘電体の誘電率  $\varepsilon$  を使うと話をもっと簡単だ。

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (3.6)$$

また、

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E} \quad (3.7)$$

だ。

さて、電束密度の導入でガウスの法則の式は以下ようになる。

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (3.8)$$

当然  $Q$  は真電荷だ。

分極電荷に対する長い計算から電束密度によりやく至ったのにも関わらず、式 (3.6) の結果はあまりにもあっけないものだ。これは誘電率というものの存在意義に関わっていると考えられる。見てのとおり、電束密度とは誘電率と電界の積で与えられる。そしてその電束密度の閉曲面での面積積分で閉曲面内の真電荷の量が与えられる (式 (3.8))。つまり誘電率自体が分極の結果を含む定数だといえる。

### 3.5 誘電体境界面

#### 3.5.1 電界・電束密度への条件

2 種の誘電体が接している状況を考える。境界面の真電荷面密度を  $\sigma$  とする。境界面の微小面積  $\delta S$  をとる。境界での条件を探るべく、図 3.4 のように 2 つの誘電体をまたぐように微小体積を断面積が  $\delta S$  となるよ

うにとる．高さは  $\delta h$  だ．図 3.4 において上半分を領域 1 下半分を領域 2 とする．またガウスの法則で法線面積分をするので  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  を用意してある\*2．  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$  だ．

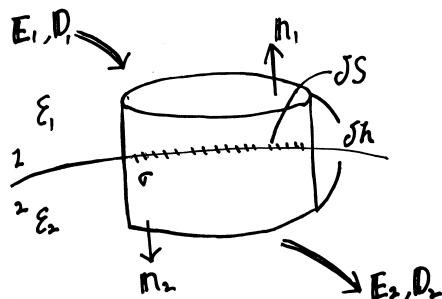


図 3.4 誘電体の境界 1

準備の大方済んだので計算に入る．  $\mathbf{E}_1, \mathbf{D}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{D}_2$  は図のようにあるとする．．早速ガウスの法則を使う\*3．

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS &= \oint_S (\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2) dS \\ &= (-D_{1n} + D_{2n}) \delta S = \sigma \delta S \\ \therefore -D_{1n} + D_{2n} &= \sigma\end{aligned}$$

さらに境界面に電荷が存在していない場合は、

$$D_2 = D_{1n}$$

だ．このとは電束密度の法線方向成分は連続だということだ．

次に図 3.5 のように境界面を行き来するような経路  $C$  をとり、その経路で電界を積分する．始点と終点が同じであればその積分値は 0 となる．  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$  は単位接線ベクトルで  $\mathbf{t}_2 = -\mathbf{t}_1$  だ．

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

左辺をもう少し丁寧に計算すると、

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \oint_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} ds \\ &= (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{t}_2 = 0 \\ \therefore E_{1t} &= E_{2t}\end{aligned}$$

これは電界の接線方向成分は誘電体の境界で連続だということを示している．

\*2 単位法線ベクトル．

\*3 電束密度の添字に  $n$  が増えているがこれは法線方向の成分という意味だ．

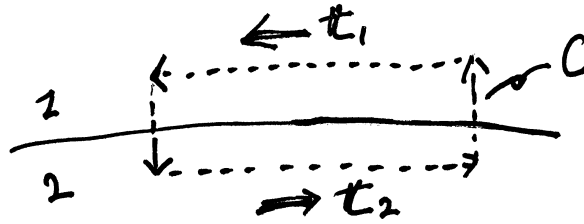


図 3.5 誘電体の境界 2

### 3.5.2 電位への条件

電位は電界ベクトルのスカラポテンシャル\*4なので，電界で与えられた条件を電位に直す．

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} &= \sigma \\ \frac{\partial V_1}{\partial t} &= \frac{\partial V_2}{\partial t}\end{aligned}$$

$n, t$  は法線，接線を表している．2 つ目の式に注目して両辺を積分する．

$$V_1 = V_2 + K \quad (K \text{ は積分定数})$$

どこかに  $V_1 = V_2$  の点があれば  $K = 0$  だ．

### 3.5.3 電気力線と境界面

電束密度の法線方向成分が境界をまたいで等しいことは先の計算で分かった．図 3.5 のように電束密度と境界面の法線方向との成す角を  $\theta_1, \theta_2$  とすると，

$$D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2$$

となっている．次に電界は接線方向成分が境界をまたいで等しいことが分かった．同様に表すと，

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

この 2 式から  $E_1, E_2$  を消去し，式変形をすると

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (3.9)$$

が得られる．これを屈折の法則と呼ぶ．

これを応用し，誘電体 2 が導体であると仮定すると， $D_2 = E_2 = 0$  より，電気力線が導体表面に垂直であることがわかる．

## 3.6 誘電体とコンデンサ

平行板コンデンサを考える．電極板間の距離を  $d$ ，面積を  $S$  とする．この極板の間に誘電体を入れたうえでその静電容量を計算する．

\*4  $\mathbf{E} = -\text{grad}V$  の関係のこと．微分積分学 1 で扱った内容．

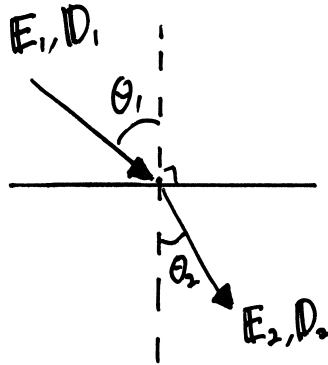


図 3.6 屈折の法則

### 3.6.1 誘電率と静電容量

単純な平行板コンデンサを考える．極板間の距離は  $d$ ，面積は  $S$ ，そしてその間を誘電率  $\varepsilon$  の誘電体が隙間なく埋め尽くしているとする．

このような状態で極板に  $V$  の電位差が生じると，電界  $E$  は，

$$E = \frac{V}{d}$$

となる．また極板に面密度  $\sigma$  の電荷がたまつたとすると，ガウスの定理より

$$D = \sigma, \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

が得られる．これによって電圧  $V$  は

$$V = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon}$$

あとは静電容量の定義式より，

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} \tag{3.10}$$

となる．

### 3.6.2 複数の誘電体を直列に挿入

図 3.7 のようなコンデンサを次は扱う．平行板の間を複数の誘電体が直列に並んで埋めている．図 3.7 のように誘電体ごとに幅  $d_i$ ，電位差  $V_i$  を与える．

極板に電荷  $Q$  を与えると，この状況ではどの誘電体でも電束密度が等しくなる<sup>\*5</sup>

$$D_1 = \cdots = D_n = \frac{Q}{S}$$

．電界は電束密度から与えることができるので，

$$E_i = \frac{D_i}{\varepsilon_i} = \frac{Q}{\varepsilon_i S}$$

<sup>\*5</sup> 境界条件のうち，境界の法線方向の電束密度が等しいというものを使った．

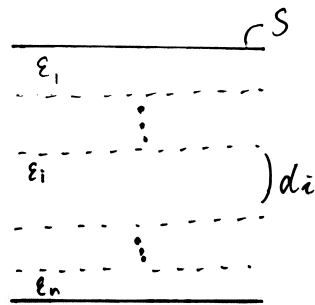


図 3.7 誘電体を挿入した平行板コンデンサ 1

となる．これより極板間の電位差  $V$  は

$$V = \sum \frac{Q}{\varepsilon_i S} d_i$$

と計算できる．電荷と電位が分かれば静電容量の定義式より

$$C = \sum \frac{1}{\frac{d_i}{\varepsilon_i S}}$$

となる．この結果は誘電体ごとにコンデンサをわけたものを直列接続したときの合成容量と同じだ．

### 3.6.3 複数の誘電体を並列に挿入

図 3.8 のようなコンデンサを考えよう．平行板の間を複数の誘電体が平行に並んで埋めている．図 3.8 のように誘電体ごとに面積  $S_i$  と電荷面密度  $\sigma_i$  を与える．

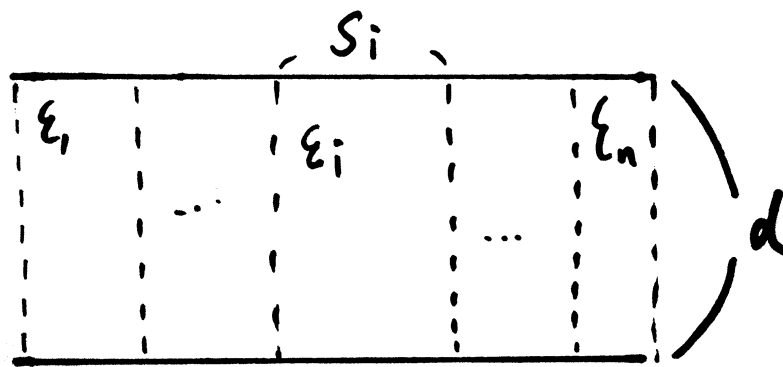


図 3.8 誘電体を挿入した平行板コンデンサ

極板間に電圧  $V$  を与えると，この状況ではどの誘電体での電界は等しくなる\*6．

$$E_1 = \dots = E_n = \frac{V}{d}$$

\*6 境界条件のうち，境界の接線方向の電界が等しいというものを使った．

電荷の面密度は電束密度で与えられるので、

$$\sigma_i = D_i = \varepsilon_i E = \frac{\varepsilon_i V}{d}$$

となる。これより、極板全体の電荷  $Q$  は

$$Q = \sum \frac{\varepsilon_i S_i}{d} V$$

と計算できる。電荷と電位がわかれば静電容量の定義式より

$$C = \sum \frac{\varepsilon_i S_i}{d}$$

となる。この結果は誘電体ごとにコンデンサをわけたものを並列接続したときの合成容量と同じだ。

## 第 4 章

# 静電エネルギー・力

### 4.1 導体系の静電エネルギー

#### 4.1.1 2つの導体

真空中に導体が2つある状況を考える (導体 1, 導体 2)。これらの導体にはそれぞれ電荷が  $q_1, q_2$ , 電位が  $v_1, v_2$  あるとすると次の2式が立つ。

$$v_1 = p_{11}q_1 + p_{12}q_2$$

$$v_2 = p_{21}q_1 + p_{22}q_2$$

ここまでは今までの話だが、ここで静電エネルギーを計算したい。2つの導体に電荷  $Q_1, Q_2$  を与えた時の静電エネルギーを計算する。これは次の手順で計算できる。

1.  $q_2 = 0$  としたうえで、 $q_1 : 0 \rightarrow Q_1$  に必要なエネルギーの計算
2.  $q_1 = Q_1$  としたうえで、 $q_2 : 0 \rightarrow Q_2$  に必要なエネルギーの計算
3. 以上の2つのエネルギーの和を計算

手順が分かったら計算をする。最初の手順では  $v_1 = P_{11}q_1$  を使えばいい。微小電荷  $\delta q_1$  を導体 1 に追加するための仕事 (エネルギー)  $\delta W_1$  は

$$\delta W_1 = v_1 \delta q_1 = p_{11} q_1 \delta q_1$$

であり、これを積分することで

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^{Q_1} p_{11} q_1 dq_1 \\ &= \frac{1}{2} p_{11} Q_1^2 \end{aligned}$$



をえる。

次は2つ目の手順だ。このときの  $v_2$  は、

$$v_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}q_2$$

となる。あとは先と同様に微小電荷を介して式を立てる。

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_0^{Q_2} (p_{21}Q_1 + p_{22}q_2) dq_2 \\ &= p_{21}Q_1Q_2 + \frac{1}{2}p_{22}Q_2^2 \end{aligned}$$

$W_1, W_2$  の和をとることで

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}p_{11}Q_1^2 + p_{21}Q_1Q_2 + \frac{1}{2}p_{22}Q_2^2 \\ &= \frac{1}{2}p_{11} + \frac{1}{2}p_{12}Q_1Q_2 + \frac{1}{2}p_{21}Q_1Q_2 + \frac{1}{2}p_{22}Q_2^2 \\ &= \frac{1}{2}(p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2)Q_1 + \frac{1}{2}(p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2)Q_2 \\ &= \frac{1}{2}(V_1Q_1 + V_2Q_2) \end{aligned}$$

ここでの  $V_1, V_2$  は電荷が  $Q_1, Q_2$  のときの電位だ。つまり電位と電荷の積の総和を半分にするだけでよい。

#### 4.1.2 $n$ 個導体

2個での話を拡張する。厳密な計算は面倒だが答えの予想はつくのではないかな。

$$w = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i$$

これも電荷と電位の積の総和をとり、半分にすればいい。

#### 4.1.3 コンデンサの静電エネルギー

コンデンサも立派な導体系だ。コンデンサの特徴は一方の電極が電荷  $Q$  となったとき、他方の電荷が  $-Q$  となる点だ。さらに極板間の電位差が  $V$  で与えられる。

$$W = \frac{1}{2}(QV_1 - QV_2) = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

これは見覚えのある式だ。

### 4.2 静電界中のエネルギー密度

静電エネルギーは一体どこにあるのか。位置エネルギーであれば高さという形で明らかだが電荷に関してはそうも簡単に言うてはいられない。この答えとして空間にエネルギーがあると唱えた人がいた。それは理にかなっていたようだ。

空間に存在するエネルギーを考えるなら、密度に行きつくのは当然だろう。

### 4.2.1 分布する電荷

閉曲面  $S_i$  の内部に密度  $\rho$  で電荷が存在しているとする．体積は  $v$  だ．さらに表面には面密度  $\sigma$  で電荷が存在しているとする．電位は閉曲面内で  $V$  で\*1．表面では  $V_i$  だ．このような電荷の塊が大きな閉曲面  $S_\infty$  に内在している (図 4.1)．

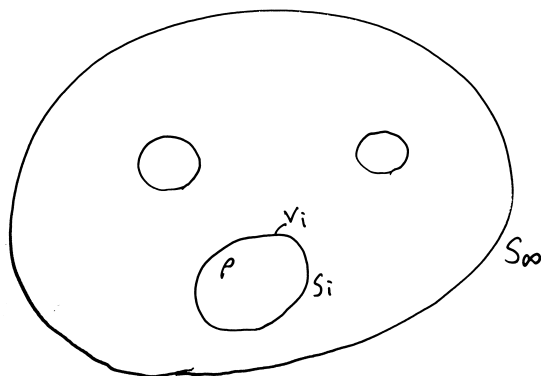


図 4.1 点在する分布電荷

このときの閉曲面全体での静電エネルギーは意外と簡単に計算できて，方法としては内部と表面を別々に積分したらい．

閉曲面内で微小体積  $\delta v$  をとると，電荷は  $\rho \delta v$  となる．これで微小体積の静電エネルギーは

$$\delta W_{\text{内部}} = V \rho \delta v$$

となる．次は表面に対しても微小面積  $\delta S$  をとると，同様に

$$\delta W_{\text{表面}} = V_i \sigma \delta S$$

となる．あとは積分して和をとればいい\*2．

$$W = \frac{1}{2} \int_v V \rho dv + \frac{1}{2} \sum_i \oint_{S_i} V_i \sigma dS \quad (4.1)$$

### 4.2.2 電界・電束密度

式 (4.1) を何とか電界と電束密度で表したいというのが目的．公式に関しては復習しよう．早速計算だ．

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(VD) &= \nabla \cdot (VD) \\ &= (\nabla V) \cdot D + V \nabla D \\ &= -E \cdot D + V \rho \\ \therefore V \rho &= \operatorname{div}(VD) + E \cdot D \end{aligned}$$

\*1 内部では電位が変わる．

\*2 表面に関しては閉曲面すべての合計を計算する必要がある．

これをすぐさま式 (4.1) に代入してみる.

$$W = \int_v (\operatorname{div}(V\mathbf{D}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) dv + \oint_{S_i} V_i \sigma dS$$

これを少しずつ計算してみる.

$$\begin{aligned} \int_v \operatorname{div}(V\mathbf{D}) dv &= \int_{S_\infty} V\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \sum_i \oint_{S_i} V_i \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{S_i} V_i \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_{S_i} V_i \sigma dS \end{aligned}$$

ガウスの定理をふんだんに使っていてかなり大変だがこのような計算になる. これを使って計算すると式 (4.1) はさらに,

$$W = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv$$

となる.

この結果から, 単位体積当たり

$$\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

のエネルギーが蓄えられてることが分かる.

ここで公式として与える. 静電エネルギー密度  $w$  は

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{D}^2 \quad (4.2)$$

この式 (4.2) を分極ベクトルも使って表現すると,

$$\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}$$

となる. 左辺第 1 項は真空中の静電エネルギーであり, 第 2 項は分極のエネルギーだ.

### 4.2.3 平行板コンデンサ

図 4.2 のような平行板コンデンサだ.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} QV \\ &= \frac{1}{2} (\sigma S)(Ed) \\ &= \frac{1}{2} ED \cdot (Sd) \end{aligned}$$

よって

$$w = \frac{1}{2} ED$$

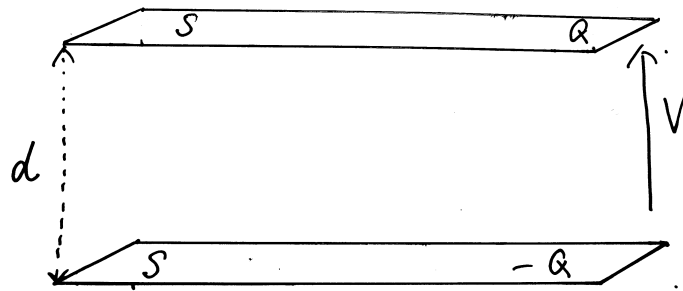


図 4.2 平行板コンデンサの静電エネルギー

### 4.3 導体系にはたらく力

$n$  個導体にはたらく力を扱うときは、各導体の電荷が一定の場合、各導体の電位が一定の場合を分けて考える。前者は電荷を与えた導体が他の導体などに触れない状態 (図 4.3) を想像したらよく、後者は常に電圧源につながれている状態 (図 4.4) を想像したらよい。

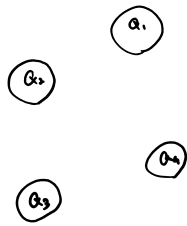


図 4.3 電荷一定の導体系

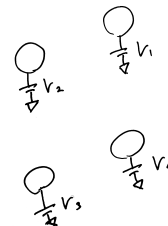


図 4.4 電位一定の導体系

#### 4.3.1 電荷が一定な $n$ 個導体

各導体の電荷が一定の場合を考える。このとき、外部からのエネルギーの供給はない。ある導体が静電気力  $F_\xi$  を受け微小距離  $\delta\xi$  だけ変位したとする。すると導体系の静電エネルギーの変化  $\delta W$  は

$$\delta W = -F_\xi \delta\xi$$

である\*3。この式を変形することで

$$F_\xi = - \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_{Q \text{ 一定}} \quad (4.3)$$

を得る。また導体間のクーロン力として考えることで

$$F_\xi = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial p_{ij}}{\partial \xi} Q_i Q_j$$

\*3 正の仕事をするのでエネルギーは失われる。

となることを示しておく。

さて、見慣れない記号を付けた  $F_\xi$  について述べておく。これは一般化力というものだ。今回は  $\xi$  は変位を表していた。例えば  $\xi$  が角度を表す場合、 $F_\xi$  は力のモーメント、トルクを表すことになる。

### 4.3.2 電位が一定な $n$ 個導体

各電位が一定な状態を考える。これは導体が常に電圧源につながれていることを想像すればいい。ある導体  $i$ \*4の電荷が  $\delta Q_i$  増えたとする。このとき、導体  $i$  につながれていた電源がする仕事  $\delta W_o$  は

$$\delta W_o = \sum_i V_i \delta Q_i$$

これによる導体系の静電エネルギーの変化  $\delta W$  は

$$\delta W = \frac{1}{2} \sum_i V_i \delta Q_i$$

となる。では静電界のした仕事はいくらなのか。これは電源の仕事から静電エネルギーの変化を引いた部分だ。

$$F_\xi \delta \xi = \delta W_o - \delta W = \delta W$$

これを変形することで力が得られる。

$$F_\xi = \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_{V \text{ 一定}} \quad (4.4)$$

ここでも先と同様に別視点から力をとらえる。

$$F_\xi = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial q_{ij}}{\partial \xi} V_i V_j$$

### 4.3.3 2通りの力

これまでで導体系に対して電荷一定と電位一定の2種類の力を計算してきた。ここではこれらの2力が等しいことを示したい。ここで使うのは導体系の電位と電荷の関係は正則行列を用いて表せるということ\*5これらから静電エネルギーは次のようにあらわせる。

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \mathbf{V} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \mathbf{V} \mathbf{Q} = \frac{1}{2} \mathbf{V} \mathbf{C} \mathbf{V}$$

これは  $\mathbf{P} \mathbf{C} = \mathbf{1}$  を利用した結果だ。これを微分してみると面白い結果に行きつく。

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_{\mathbf{Q} \text{ 一定}} &= \frac{1}{2} \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \xi} \mathbf{Q} \\ \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_{\mathbf{V} \text{ 一定}} &= \frac{1}{2} \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \xi} \mathbf{V} \end{aligned}$$

---

\*4 1 つとは言っていない。

\*5 電位係数、容量係数、誘導係数のことだ。

また,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(PC)}{\partial\xi} &= \frac{\partial P}{\partial\xi}C + P\frac{\partial C}{\partial\xi} = 0 \\ \therefore \frac{\partial P}{\partial\xi} &= -{}^tP\frac{\partial C}{\partial\xi}P \quad (\because {}^tP = P, CP = 1)\end{aligned}$$

となるので, これらを用いることで

$$\begin{aligned}-\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}\right)_{Q\text{一定}} &= \frac{1}{2}{}^tQ{}^tP\frac{\partial C}{\partial\xi}PQ \\ &= \frac{1}{2}V\frac{\partial C}{\partial\xi}V \\ &= \left(\frac{\partial W}{\partial\xi}\right)_{V\text{一定}}\end{aligned}$$

となり 2 力が等しいことが分かる\*6.

## 4.4 導体表面に作用する力

導体にはたらく力といっても導体の電荷は表面にあるのだから, 表面に注意が向けられるのは自然なことだろう.

### 4.4.1 仮想仕事

図 4.5 のように導体と誘電率  $\varepsilon$  の間での話を考える. 導体表面の電荷面密度は  $\sigma$  で, 当然  $\sigma = D$  だ. この表面に微小面積  $\delta S$  をとる.  $\delta S$  での電荷は  $\sigma\delta S$  なのだから, 受ける力は  $E\sigma\delta S$  だとしてしまうとこれは誤りだ.

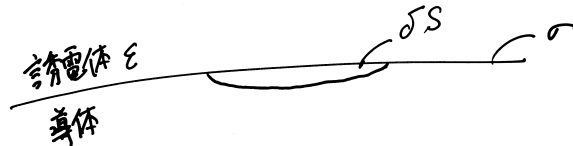


図 4.5 導体と誘電体の境界面

このような問題に対しては仮想仕事という概念を使う. これは微小距離動かしたときの仕事を考えるものだ. 図 4.6 のように導体表面が微小面積の法線方向に  $\delta s$  動いた\*7とする. すると微小面積が通過する部分の体積は  $\delta S\delta s$  だ. 先の節では空間に静電エネルギーが蓄えられているとした. その空間が導体の内部になってしまう. つまり, その体積の分の静電エネルギーは失われたとしたいのだ. 静電エネルギーの変化を  $\delta W$  とすると,

$$\delta W = -\frac{1}{2}ED\delta S\delta s$$

\*6 符号が明らかに違うと思ったら大バカ者だ.  $F_\xi$  の式を確認しよう (式 (4.3,4.4)).

\*7 導体表面が動くといってるので, 導体全体が動いているものと考えよう. そうすると導体の様々な向きの表面を扱う必要がある. しかし, 仮想仕事ではそのようなことは考えず, 大げさに言えば微小面積のみが動いたと考えて計算する.

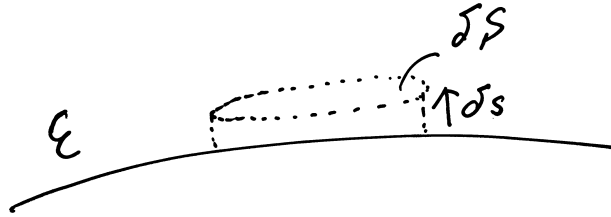


図 4.6 仮想仕事

となる。力を考えるなら  $F_\xi$  を計算するのだが、今回は  $\xi$  は  $s^*$ <sup>\*8</sup>である。そして明言はしていないが、電荷は不変だ。よって

$$F = - \left( \frac{\partial W}{\partial s} \right) = \frac{1}{2} ED \delta S$$

が得られる。ここから導体の単位面積当たりの静電力が分かる。

$$f = \frac{1}{2} ED = \frac{\sigma^2}{2\epsilon} \quad (4.5)$$

#### 4.4.2 コンデンサの極板にかかる力

コンデンサに対しては電荷一定の場合と電圧一定の場合の両方があり得る。静電容量は極板間の距離の関数だという事を念頭に、まずは電荷が一定のときを考える。静電エネルギー  $W$  は

$$W = \frac{1}{2C} Q^2$$

を使う。ここでの  $\xi$  は極板間の距離だ。

$$\begin{aligned} F &= - \frac{\partial W}{\partial \xi} = - \frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{C} \right) \\ &= \frac{Q^2}{2} \frac{1}{C^2} \frac{\partial C}{\partial \xi} \\ &= \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial \xi} \end{aligned}$$

これで電荷が一定のときの力が分かった。計算の途中に合成関数の微分を使っていることに注意してほしい。計算結果から電荷がなくなるのは意外だ。

つぎは電位が一定のときを考える。静電エネルギーは

$$\frac{1}{2} CV^2$$

を使う。

$$F = \frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial \xi}$$

---

\*8 弧長パラメータだと思われる。

これは電荷一定のときと同じだ。

最後に

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

$$\therefore \frac{\partial C}{\partial d} = -\frac{\varphi S}{d^2}$$

であることを使って極板間にはたらく力は、

$$F = -\frac{V^2 \varepsilon S}{2 d^2}$$

となる。符号が負なのは力の向きが  $d$  を考える向き (極板が離れる方向) とは反対だからだ。つまり、力は引き合うほうにはたらく。ちなみに、この値は電荷と電界を使うクーロン力の計算からも同様に与えられる。試すのも悪くないだろう。

## 4.5 誘電体の境界にはたらく力

導体の表面を扱ったのだから、誘電体に話が進むのは当然だ。導体薄板に 2 種の誘電体を挟んでその境界にはたらく力を計算する。

### 4.5.1 電界の方向に並ぶ 2 つの誘電体

図 4.7 のように 2 つの誘電体の境界面が電界に垂直な場合を扱う。誘電率  $\varepsilon_1$  のところを領域 1,  $\varepsilon_2$  のところを領域 2 とする。境界面の面積は  $S$  だ。この状況で領域 1 と領域 2 の境界がうける力を考える。境界面が

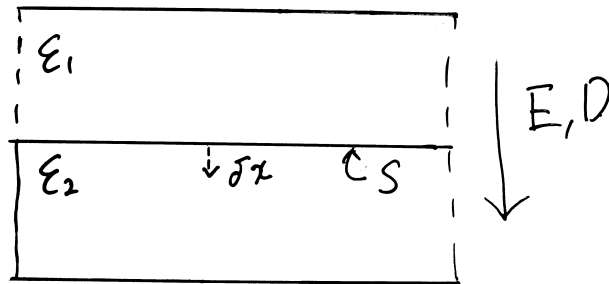


図 4.7 境界面が電界の方向と垂直な 2 つの誘電体

誘電体 2 のほうへ  $\delta x$  動いたときの仮想仕事を計算する。これは誘電率  $\varepsilon_1$  の体積が大きくなり、誘電率  $\varepsilon_2$  の体積が小さくなることによる静電エネルギーの増減を計算したらしい。

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{2} E_1 D_1 S \delta x - \frac{1}{2} E_2 D_2 S \delta x \\ &= \left( \frac{D_1^2}{2\varepsilon_1} - \frac{D_2^2}{2\varepsilon_2} \right) S \delta x \\ &= \frac{D^2}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) S \delta x \end{aligned}$$



誘電体境界面の法線方向の電束密度は一定だということを利用して  $D$  をおいた。ここから電荷一定\*9を条件に力を計算する。

$$F = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{D^2}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) S$$

面積で割ることで単位面積当たりの力 (圧力) が分かる。

$$f = \frac{D^2}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \quad (4.6)$$

この式を見ると誘電率の大小関係で力の向きが変わることが分かる (表 4.1)。

表 4.1 誘電率の大小関係と力の向き

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$	$f > 0$	領域 1 から領域 2 への向き
$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$	$f < 0$	領域 2 から領域 1 への向き

#### 4.5.2 電界の方向に垂直に並ぶ

図 4.8 のように 2 つの誘電体の境界面が電界と平行な場合を扱う。あとは先の場合と同じだ。この状況で領

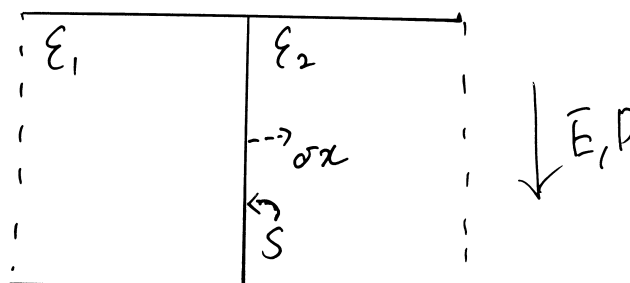


図 4.8 境界面が電界の方向と平行な 2 つの誘電体

域 1 と領域 2 の境界がうける力を考える。境界面が誘電体 2 のほうへ  $\delta x$  動いたときの仮想仕事を計算する。

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{2} E_1 D_1 S \delta x - \frac{1}{2} E_2 D_2 S \delta x \\ &= \left( \frac{\varepsilon_1 E_1^2}{2} - \frac{\varepsilon_2 E_2^2}{2} \right) S \delta x \\ &= \frac{E^2}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) S \delta x \end{aligned}$$

\*9 電束密度が  $D$  で一定なら、導体薄板の電荷面密度は  $\sigma = D$  で一定。つまり電荷は変わらない。

誘電体境界面の接線方向の電界が一定だということを利用して  $E$  をおいた．ここから電位一定<sup>\*10</sup>を条件に力を計算する．

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial W}{\partial x} \\ &= \frac{E^2}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)S \end{aligned}$$

面積で割ることで単位面積当たりの力 (圧力) が分かる．

$$f = \frac{E^2}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (4.7)$$

力の向きは表 4.1 の通りとなる．

誘電体が大きな領域から，誘電体が小さくなる向きへ力が働くことが分かる．

## 4.6 マクスウェルの応力

### 4.6.1 ファラデー管

電束線という電束密度と面積の積で与えられるものを考える．図形としては電気力線とほぼ同じで，正電荷から出てきて負電荷に入る．電荷  $Q$  の導体からは  $Q$  本の電束線が出ることは導体の表面電荷面密度と電束密度の関係からすぐにわかる．その導体のある微小面積  $dS$  をとると，その微小面積の電荷が単位電荷となる．このとき， $dS$  から出てくる電束線をファラデー管という．

すると 2 つの電荷  $Q, -Q$  はファラデー管でつながれているといえる (図 4.9)．

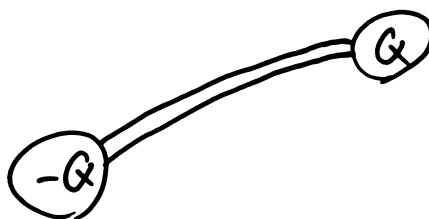


図 4.9 電荷間のファラデー管

### 4.6.2 マクスウェルの応力

導体薄板による電界，電束密度の中で誘電体の境界を考えるのは先ほどまでの内容だ．ここではファラデー管の中でのことを考える．

ファラデー管の方向と垂直に誘電体の境界があった場合，2 つの誘電体はその側に引っ張られる方向に力を受ける．対してファラデー管の方向と平行に誘電体の境界があった場合，2 つの誘電体が内側に押し付けられ

<sup>\*10</sup> 電界が  $E$  で一定なら，導体薄板間の電位差は  $V = Ed$  で一定．つまり，電位は変わらない．

る方向に力を受ける．前者を引っ張り応力，後者を圧縮応力という．具体的な計算は任せる．

## 第 5 章

# 静電界の境界値問題

いろいろな条件での静電界の問題をどのように解いていくのかを扱う．基本の式は

$$\begin{aligned}\Delta^2\varphi &= 0 \\ \Delta^2\varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon}\end{aligned}$$

の 2 式．ラプラス方程式とポアソン方程式だ．電位はこれらから計算ができる．これに加えて境界条件を与えることで電位は決定する．

以前扱った電位や電界の問題は誘電体が現れることによるものであったが，そこから新しく導体の要素を加えるのがこの章の肝となる．特有の手法が存在するので焦らず覚えよう．

### 5.1 鏡像法

導体によって生じる電位の条件を，仮想の電荷 (影像電荷) を置くことで実現しようとする方法だ．

#### 5.1.1 接地導体平面と点電荷

早速，図 5.1 を見てもらいたい． $x = 0$  のところに接地された導体が軸に対して垂直に置いてある． $x < 0$  には何もないとし，導体平面から  $a$  離れたところ，軸上に点電荷  $q$  がある．このときの原点から  $\mathbf{r}$  での電位を計算したい．もちろん  $\mathbf{r}$  は  $x > 0$  の部分を考えている．

電位の境界条件は導体平面で  $V = 0$  であることだ．導体による条件だがこれを導体なくして与えることを考える．これは原点对称に電荷  $-q$  を置くことで実現されるだろう (図 5.2)．大きさが等しく，正負が逆の電荷はその 2 点の垂直二等分線上で電位 0 を与える．これは導体の与えた条件と一致する．

後は元の電荷と，影像電荷の 2 つによる電位を計算すればいい．

$$V = \frac{1}{4\pi\varphi} \left( \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right)$$

3 次元で厳密に計算すると

$$\begin{aligned}r_1 &= \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2} \\ r_2 &= \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}\end{aligned}$$

となる．

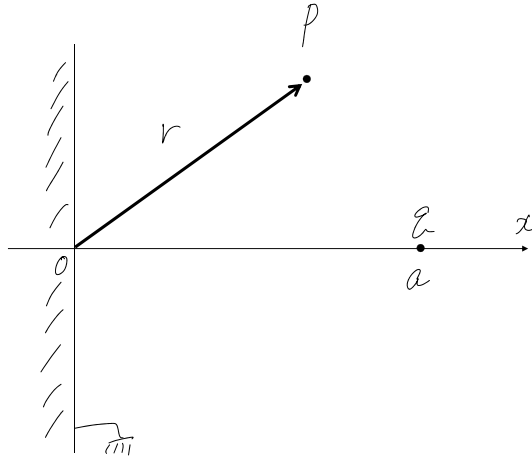


図 5.1 接地導体平面

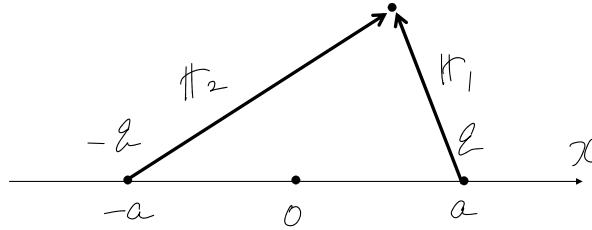


図 5.2 影像電荷

電位が分かったので次は電界を計算する.

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V = \frac{q}{a\pi\epsilon} \left( \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right)$$

ここから 3 方向の方向成分を分けて書くと,

$$E_x = \frac{q}{a\pi\epsilon} \left( \frac{x-a}{r_1^3} - \frac{x+a}{r_2^3} \right)$$

$$E_y = \frac{q}{a\pi\epsilon} \left( \frac{y}{r_1^3} - \frac{y}{r_2^3} \right)$$

$$E_z = \frac{q}{a\pi\epsilon} \left( \frac{z}{r_1^3} - \frac{z}{r_2^3} \right)$$

ここまでは半自動的に計算が進む. 影像電荷を仮定した答えは正しいものと受け入れ用. ここからは導体の表面の電荷分布を計算したい. これは導体表面の電束密度で与えられる.  $x=0$  では

$$E_x = \frac{-aq}{2\pi\epsilon(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad E_y = E_z = 0$$

必要なのは導体面の法線方向の電束密度で

$$D_x = \epsilon E_x$$

となる. これで導体表面の電荷密度  $\sigma$  は

$$\sigma = -\frac{qa}{2\pi\epsilon(a^2 + \rho^2)^{3/2}} \quad (\rho^2 = y^2 + z^2)$$

となる． $x$  軸からの距離で電荷密度が決定していることが分かる．密度が分かれば総和を計算しようとするのは必定だ．これは  $x$  軸からの距離で積分するのがいいだろう． $dydz = 2\pi\rho d\rho$  を使い、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty 2\pi\rho\sigma d\rho &= -qa \int_0^\infty \frac{\rho}{(a^2 + \rho^2)^{3/2}} \\ &= -qa \left[ \frac{1}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} \right]_0^\infty = -q\end{aligned}$$

と計算される．電荷  $q$  に反応して導体表面に電荷が分布したと考えれば必然的な答えだ．

最後に点電荷自体にかかる力を考えるが、これも影像電荷によるクーロン力を計算すればいい．

$$F = \frac{-q^2}{16\pi\epsilon a^2}$$

### 5.1.2 接地直交 2 導体

図 5.3 のような場合を考える．導体板による角の部分に電荷があるような状態だ．これは重ね合わせを考えることで影像電荷を置くことができる．結局は図 5.4 のように影像電荷を配置することになる．あとはこれら計 4 つの電荷による電界や電位を丁寧に計算すればいい．

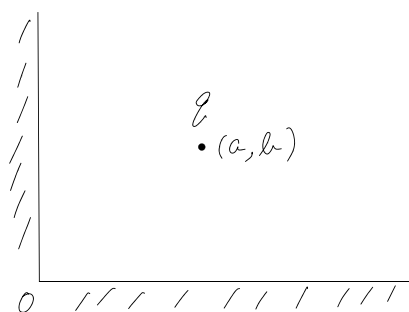


図 5.3 接地直交導体

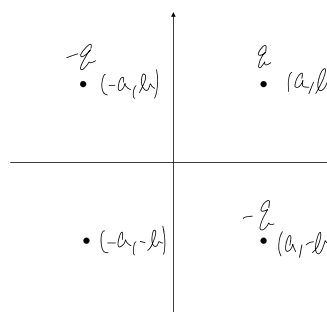


図 5.4 影像電荷

### 5.1.3 平面境界を持つ 2 種の誘電体

図のように誘電率が  $\epsilon_1, \epsilon_2$  の 2 種の誘電体が  $x = 0$  平面で接している状態で  $x = a$  の位置に電荷  $q$  がある場合を考える． $x$  が正の部分領域 1、負の部分領域 2 として領域内の電界や電位などの添字を統一しておく．

境界条件は  $x = 0$  で

$$V_1 = V_2, \quad E_{1t} = E_{2t}, \quad D_{1n} = D_{2n}$$

となる．電位が連続であること以外の境界条件の与え方は今までの内容を読み直そう．

境界条件を与えたところで、電位・電界を考える位置でその影像電荷の置き方や誘電率が変わってゆく．まず  $x > 0$  での電位・電荷を考えるときは図のように全領域の誘電率を  $\epsilon_1$  とする．そして  $q$  の位置から原点对称に影像電荷  $q'$  を置く．そうすることで後は丁寧に計算をすればいい．

$x < 0$  での電位・電界を考えるときは全領域の誘電率を  $\varepsilon_2$  としてうえで  $q$  を  $q''$  に置き換える。これは誘電率を変えた影響を埋め合わせるようにしたものだ。

話はここまでにしたいところだが、影像電荷  $q', q''$  の関係を明らかにしたので実際の計算を行う。電位・電荷を考える位置を  $P = (x, y, z)$  とする。まず、領域 1 では

$$\mathbf{r}_1 = (x - a, y, z), \quad \mathbf{r}_2 = (x + a, y, z)$$

このようにすると直ちに

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r_1} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1 r_2}, \quad \mathbf{E}_1 = \frac{q\mathbf{r}_1}{4\pi\varepsilon_1 r_1^3} + \frac{q'\mathbf{r}_2}{4\pi\varepsilon_2 r_2^3}$$

領域 2 では

$$V_2 = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 r_1}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{q''\mathbf{r}_1}{4\pi\varepsilon_2 r_1^3}$$

となる。電位に対する境界条件より

$$\begin{aligned} \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r_1} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1 r_1} &= \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 r_1} \\ \Rightarrow \frac{q + q'}{\varepsilon_1} &= \frac{q''}{\varepsilon_2} \end{aligned}$$

という関係が得られる。さらに電束密度に対する条件から

$$q - q' = q''$$

が得られる\*1。2 式から影像電荷が判明し

$$\begin{aligned} q' &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \quad (= kq) \\ q'' &= \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \quad (= kq) \end{aligned}$$

となる。

## 5.2 球に関する問題

基本的には先と同様に影像電荷を置くことで条件を電荷のみに置き換えることを考える。

### 5.2.1 接地球

図 5.5 のように誘電率  $\varepsilon$  の空間に接地されている導体球がある。球の半径を  $a$ 、球の中心を原点として、球体の外側  $x = c$  の場所に電荷  $q$  があるとする。

この場合では図 5.6 のように球体内に影像電荷をおく。位置は  $x = c'$  で電荷が  $q'$  だ。影像電荷の条件は球面上での電位が 0 なので、まずは球体上の点  $P_0$  をとり、そこでの電位を計算する。

$$V_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon CP_0} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon C'P_0} = 0$$

---

\*1 計算は容易だが示すのが面倒。

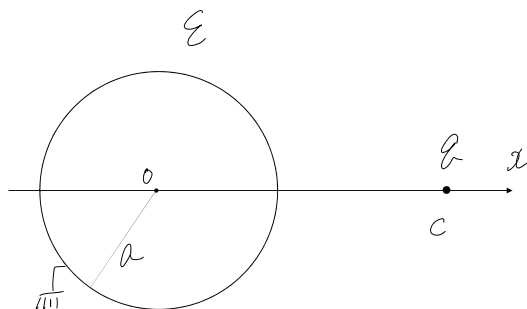


図 5.5 接地導体球

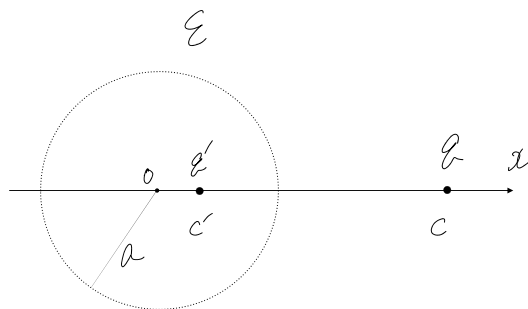


図 5.6 影像電荷

この式を変形すると

$$\frac{C'P_0}{CP_0} = -\frac{q'}{q}$$

となる。これはすぐに一定の値をとることが分かる。円の性質として円周上の点と他の 2 つの定点の距離の比が常に一定となるからだ。この条件を満足するのは

$$\triangle OCP_0 \sim \triangle OP_0C'$$

という三角形の相似だ。これから

$$\frac{OC'}{OP_0} = \frac{OP_0}{OC}$$

とわかる。これを変形することで

$$c' = \frac{a^2}{c}$$

が計算される。もちろんこの値は  $a$  より小さく、影像電荷が球体内にあることに矛盾しない。相似の条件から

$$\frac{P_0C'}{CP_0} = \frac{OP_0}{OC} = \frac{a}{c}$$

なので、電荷の比は

$$\frac{q'}{q} = -\frac{a}{c}$$

と計算される。つまり影像電荷の電荷は

$$q' = -\frac{a}{c}q$$

である。この影像電荷を置きで電荷による電位・電界の計算をすればいい。

## 5.2.2 非接地球

接地されていない導体球の場合は境界条件が変わる。まずは球面上の電位が一定という条件がある。残りの条件は球体の持つ電荷の量によって与えられることが多い。その場合は図のように影像電荷  $q', q''$  の 2 つを置く。

$q'$  は先の状況と同様で、球体表面を電位 0 にする効果のある影像電荷だ。球体面での電位一定の条件はこの電荷でクリアする。次は球体中心に置く  $q''$  だ。球体の中心に電荷があるので、この電荷でも球体表面の電位

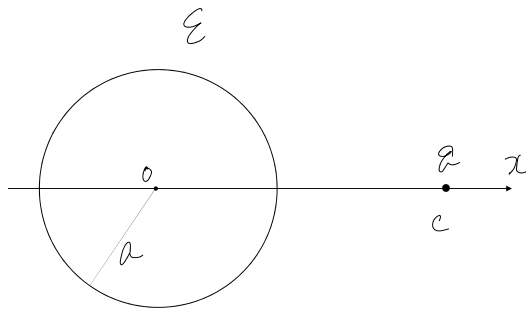


図 5.7 非接地球導体

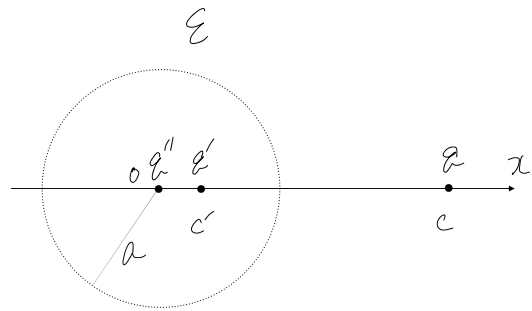


図 5.8 影像電荷

が一定であることは変わらない。これで球体の持つ電荷の量を表現する。球体が電荷  $Q$  を持つとき、

$$q'' = Q - q' = Q + \frac{a}{c}q$$

となる。これで影像電荷の配置は終了する。

問題によれば球体の持つ電荷が明示されていないことも多いだろう。その場合でも球体の電荷を導出する努力が必要だ。

### 5.2.3 接地中空導体内

図 5.9 のような状態だ。設置されている半径  $a$  の球殻中に電荷  $q$  がある。ここで球殻の厚みは考えていない。これは接地導体球と反対のことを考えればいい。

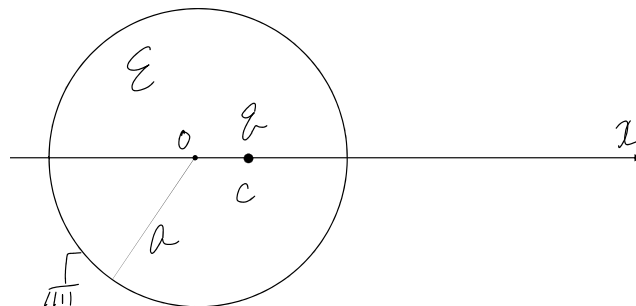


図 5.9 接地中空導体

図 5.10 のように影像電荷  $q'$  を置く。

$$c' = \frac{a^2}{c}, \quad q' = -\frac{a}{c}q$$

値も先と同様だ。

この影像電荷によって球殻内の電位・電界が計算できる。しかし、球殻外の電位・電界を計算するときは影像電荷が必要だろうか。否、必要ではない。これは球殻の中心に電荷が存在するものと考えて計算すればいい。



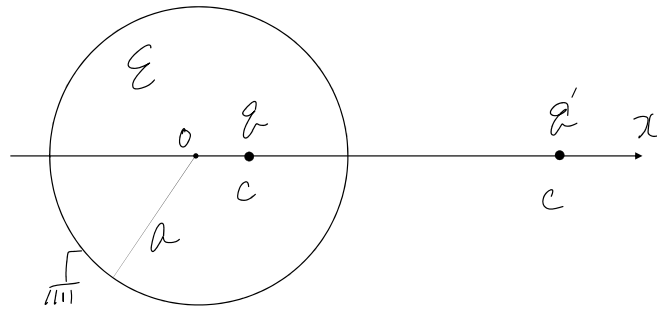


図 5.10 影像電荷

#### 5.2.4 非接地中空導体球内

もはや説明はいらないだろう。直前の例に加えて、導体球殻の中心に電荷を調節する影像電荷  $q''$  を置けばいい。

ここでも影像電荷が必要なのは球殻内の電位・電荷を計算するときのみだ。球殻外の場合は電荷が球殻の中心にあるものとして計算すればよい。

### 5.3 一様電界

一様電界中に導体や誘電体を置いた場合どうなるのか。これは双極子モーメントを利用することで解決できる。

#### 5.3.1 一様電界中の導体球

図 5.11 のように誘電率  $\epsilon$ 、電界が  $E_0$  の区間内に半径  $a$  の導体球があるとする。

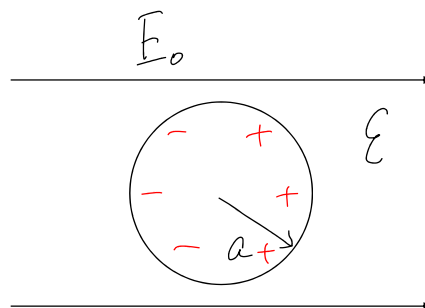


図 5.11 一様電界中の導体球

導体内の電界が 0 であることから、導体表面の電荷が移動することが分かるだろう。この電荷が対となり対称な位置関係になれば、双極子モーメントを考えるのは必然だ。影像双極子と呼ぶ。図 5.12 のように置き換えられよう。あとは元の電界  $E_0$  と双極子モーメントによる電界  $E_m$  の和をとればいい。

しかし、話はそう簡単ではない。双極子モーメントによる電界は球体座標による与え方を扱った。電界を考

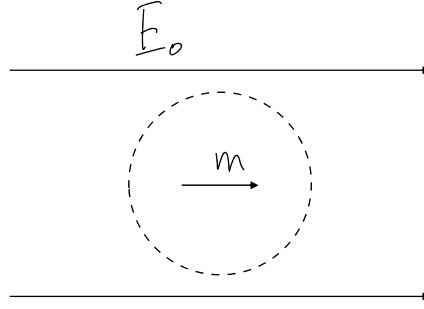


図 5.12 影像双極子

える位置  $P$  が決定すると、その方向を  $z$  軸にする球体座標を考えることになる。そして

$$\mathbf{E}_m = \frac{2m \cos \theta}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{e}_r + \frac{m \sin \theta}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{e}_\theta + 0 \mathbf{e}_\varphi$$

となる。これに対して  $\mathbf{E}_0$  を加えるので  $\mathbf{E}_0$  も分解する必要がある。

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \cos \theta \mathbf{e}_r - E_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta + 0 \mathbf{e}_\varphi$$

となる。これでようやく和を計算することができ

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_m = \left( E_0 \cos \theta + \frac{2m \cos \theta}{4\pi\epsilon r^3} \right) \mathbf{e}_r + \left( -E_0 \sin \theta + \frac{m \sin \theta}{4\pi\epsilon r^3} \right) \mathbf{e}_\theta + 0 \mathbf{e}_\varphi$$

という結論を得る。しかし、終わった気がしてはいけけない。境界条件から  $m$  を求める。境界条件は導体球面上での電位が一定であること。つまり、 $r = a$  で電界の球面の接線方向成分が 0 であることだ。

$$E_\theta = 0, \quad E_\varphi = 0$$

これより

$$\begin{aligned} -E_0 \sin \theta + \frac{m \sin \theta}{4\pi\epsilon a^3} &= 0 \\ \therefore m &= 4\pi\epsilon a^3 E_0 \end{aligned}$$

を得る。結局は

$$\begin{aligned} E_r &= E_0 \left( 1 + \frac{2a^3}{r^3} \right) \cos \theta \\ E_\theta &= -E_0 \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \end{aligned}$$

が結論になる。

### 5.3.2 一様電界中の誘電体球

図 5.13 のような状態だ。一様電界  $\mathbf{E}_0$  中に半径  $a$  の誘電体球を考える。誘電体外を領域 1、誘電体内を領域 2 とする。誘電率は  $\epsilon_1, \epsilon_2$  だ。図 5.14 ではすでに影像双極子  $\mathbf{m}$  を置いている。領域 1 での電界は先の例

と同じだ．結果のみ示すと

$$E_r = E_0 \cos \theta + \frac{2m \cos \theta}{4\pi\epsilon_1 r^3}$$

$$E_\theta = -E_0 \sin \theta + \frac{m \sin \theta}{4\pi\epsilon_1 r^3}$$

となる．

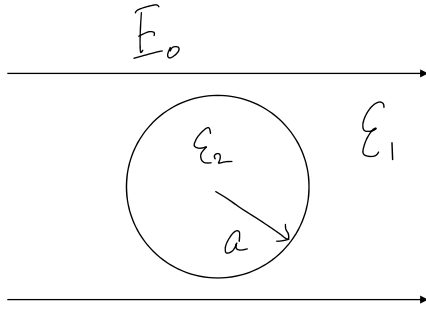


図 5.13 一様電界中の誘電体球

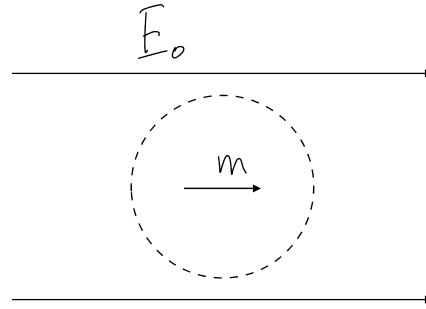


図 5.14 誘電体外部

次は領域 2 だ．誘電体内には  $\mathbf{E}_0$  よりも小さい一様電界がある\*2．これを  $\mathbf{E}_2$  と置く．領域 2 はこれでおしまいだ．

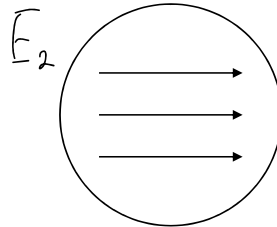


図 5.15 誘電体内部

ここまでで領域 1 では影像双極子  $\mathbf{m}$  から電界を計算し，領域 2 では誘電体球内での電界を  $\mathbf{E}_0$  と同じ方向の電界で  $\mathbf{E}_2$  とした．境界条件から厳密な値を計算する．条件は  $r = a$  で

$$\epsilon_1 E_{1r} = \epsilon_2 E_{2r}$$

$$E_{1\theta} = E_{2\theta}$$

である．これらを先の結果と合わせることで

$$\epsilon_1 E_0 + \frac{2m}{4\pi a^3} = \epsilon_2 E_2$$

$$-E_0 + \frac{m}{4\pi\epsilon_1 a^3} = -E_2$$

\*2 誘電体では分極電荷の移動によって外部の電界と逆向きの電界が発生する．外部との電界の和を考えると，それより小さな一様電界が発生していると考えられる．ちなみに導体は逆向きに発生する電界が外部の電界と等しい大きさになる．

を得る。これらの式を解くことで

$$E_2 = \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0$$

$$m = \frac{4\pi\varepsilon_1 a^3 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0$$

という結果を得る。結果はこれだけでもいいのだが、電束密度に注目して結果を見直す。

$$D_2 = \varepsilon_2 \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 = \frac{3\varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} D_0$$

## 5.4 等角写像

複素関数の計算を通して解析をする方法だ。

### 5.4.1 解析関数とポテンシャル

複素数  $z$  を実数  $x, y$  と虚数単位  $i$  で表すと

$$z = x + iy$$

となる。複素関数はこの表現をうまく使えば複素関数は実数関数で表せる。

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

この複素関数  $w(z)$  が微分可能なのかというのはコーシー・リーマンの方程式を使うことで確認できる。 $u, v$  が連続であることを前提とすればコーシー・リーマンの方程式自体が十分条件となる。

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

だ。このとき  $u, v$  の2回微分は

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

という関係となる。つまり、ラプラス方程式が成立するのだ。これは微分の順番が入れ替えられることから得られる。このような関数の組  $(u, v)$  を共役な関数という。

コーシー・リーマンの方程式をそのまま使うと

$$u_x v_x + u_y v_y = 0$$

となる。これは

$$(u_x, u_y) \perp (v_x, v_y)$$

を示していて  $u(x, y) = k, v(x, y) = l$  の曲線が直交することが分かる。これはちょうど電気力線と等電位線の関係に相当するだろう。

例えば  $u$  をポテンシャルの関数としたとき、

$$\mathbf{E} = - \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

となり，ポテンシャルの関数を  $v$  としたときは

$$\mathbf{E} = - \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

となる．さらに

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = |\mathbf{E}|$$

とわかる．

### 5.4.2 写像の等角性

2つの複素数  $z_1, z_2$  のなす角と，それらの複素数を関数  $f$  で移した後の  $w_1, w_2$  のなす角は等しいというものの．証明は面倒なので割愛する．

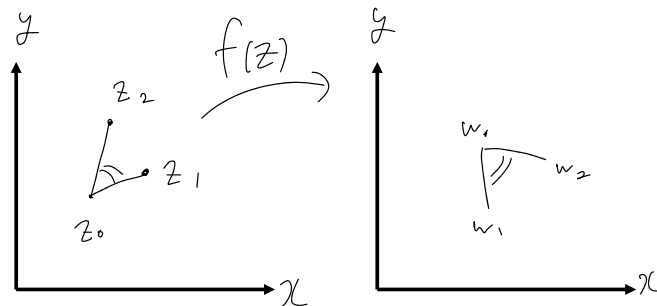


図 5.16 等角写像

### 5.4.3 2次元静電界問題

2次元の静電界の問題は複素関数を用いて考えることが可能だ．その方法はまず  $xy$  平面を複素平面に置き換えることから始まる．その後ポテンシャルを

$$w = u + iv$$

における  $u$  または  $v$  で表現する．このとき  $u, v$  がラプラス方程式を満たし，さらに境界条件を満たすように設定する．後は微分を計算する．なお複素関数の扱いは関数論で扱っていて，特に正則関数を扱った章を参考にしてほしい．

### 5.4.4 円柱導体

図のように半径が  $a$ ，無限長の円柱導体に一定の電位  $u_0$  を与えたものとする．

$u$  をポテンシャルの関数とする．円柱外部には電荷がないのでラプラス方程式が成立する\*<sup>3</sup>．

$$|z| > a \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

\*<sup>3</sup> ラプラス方程式が成立しない，すなわちポワソン方程式となるのは電荷が存在している場合だ．

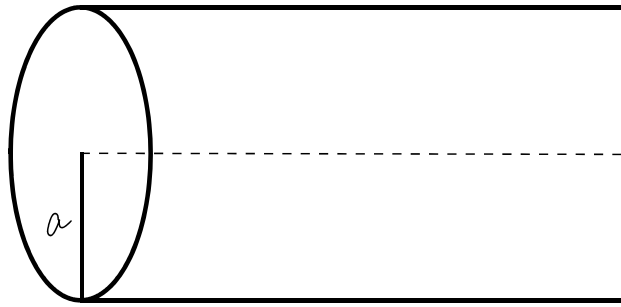


図 5.17 円柱導体

位置の指定は極座標を使う．

$$z = re^{i\theta} \quad (-\pi < \theta \leq \pi)$$

写像関数  $w$  は定数  $K_0, K$  を用いることで

$$w(z) = K_0 - K \log \frac{z}{a} = K_0 - K \log \frac{r}{a} - iK\theta$$

とする\*4．ポテンシャルの関数は  $u$  なのでポテンシャルに対する境界条件の利用すると，

$$K_0 - K \log \frac{r}{a} = u_0$$

となるので  $K_0 = u_0$  であるとすぐにわかる．しかし， $K$  に関しては決定ができないので，さらに計算を進める．ここで円柱導体の単位長さ当たりの電荷を  $Q$  とする．

$$E_r = -\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{K}{r}$$

であるから

$$Q = 2\pi a \varepsilon E_r|_{r=a} = 2\pi \varepsilon K$$

ここから  $K$  が決定し，その他の関数も直ちに分かる．

$$\begin{aligned} K &= \frac{Q}{2\pi \varepsilon} \\ u &= u_0 - \frac{Q}{2\pi \varepsilon} \log \frac{r}{a} \\ v &= -\frac{Q}{2\pi \varepsilon} \theta \end{aligned}$$

作図をすれば容易にわかるが， $u = \text{一定}$  とすれば等電位線となる同心円が， $v = \text{一定}$  とすれば電気力線となる放射状の線が描かれる．

\*4 ポテンシャルが対数関数となっている．これは P.9 にある第 1.7.2 項にある議論と同様の方法で求められる．

これ以上の具体例は各自に任せる．電位と電界の計算は何も複素数でなくても可能だ．しかし，関数的に等電位線と電気力線を扱える利点は大きいので覚えておきたい技法だ．

## 第 6 章

# 定常電流

今までの話は全て静止している電荷に対して行われてきた．この章からする話は一定速度で移動する電荷，すなわち定常電流に対する議論だ．これは静電界での話と対応がとれる内容が少なくない．実際に問題も静電界への置き換えを使うことがある．

### 6.1 電荷と電流

#### 6.1.1 電流とは

静電界において電荷の移動はない．静電界での導体は完全導体と呼ばれ，内部の電界が 0 なる．では静電界でなければどうなのだという話になるが，このときの導体は完全導体ではないということになる．これは導体内に電界が生じているということで，この電界により電荷は移動する．これを電流と呼ぶ．

一口に電流といっても伝導電流と対流電流の 2 つに大別される．前者がいま説明したところの電流のことで，電界による導体内での電荷 (電子) の移動だ．対して後者の対流電流は電荷をもつ粒子 (荷電粒子) が移動することで発生する電流だ．水溶液中のイオンの移動などがその具体例だ．この章で扱うのは前者の伝導電流だ．

#### 6.1.2 電流の量

電流の量は単位時間あたりに通過する電荷の量で定義されている．アンペアのことだ．ただ，これでは面積がまちまちで統一的な話ができるとは言えない．そこで単位面積当たりの電荷の通過量を電圧密度  $\mathbf{J}$  として考える．またこれは向きを与えたベクトル量として扱う．電流密度  $\mathbf{J}$  と電流  $I$  の間には電流を考える面積の面積ベクトル  $\mathbf{S}$  を合わせることで次の関係となる．

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$$

法線面積分で電流密度から電流値が計算できる．

## 6.2 電流保存則

電荷はどこからか湧き出すこともなく、どこかに消えゆくこともないことを示した法則だ。閉曲面  $S$  を考え、そこから流出する電流  $I$  を計算する。

$$I = \oint_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv$$

左辺は内部の電荷の減少量を表している。ガウスの定理より法線面積分を体積積分に変えることで

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{J} dv = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv$$

積分と微分の順序の入れ替えをすることで、

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (6.1)$$

を得る。これが電荷保存則の式だ。そしてこの式 (6.1) において閉曲面  $S$  内の体積  $V$  の電荷量に変化がない場合、そのときの電流を定常電流という。

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$$

## 6.3 抵抗と電流

### 6.3.1 オームの法則

電流  $\mathbf{J}$  が断面積  $\delta S$ 、長さ  $\delta s$  の微小体積を通過することを考える。この微小体積に抵抗が  $\delta R$  発生するとするとこの微小抵抗は断面積に反比例し、長さに比例する<sup>\*1</sup>ので

$$\delta R = \rho_r \frac{\delta s}{\delta S}$$

という関係式が成立する。 $\rho_r$  とは抵抗率という定数で、物質ごとに決まっている。抵抗値が分かれば、微小体積での電圧降下  $\delta V$  を計算することができる。

$$-\delta V = \rho_r \frac{\delta s}{\delta S} \cdot J \delta S = \rho_r J \delta s$$

となる。この式を変形することで

$$-\frac{\delta V}{\delta s} = \rho_r J$$

となる。ここでの左辺は電界だ。これは大きさの式だが、向きの要素を含めることで次の結果を得る。

$$\mathbf{E} = \rho_r \mathbf{J}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (6.2)$$

これはオームの法則の微分形と呼ばれる式だ。 $\sigma$  は導電率で抵抗率の逆数である。

---

<sup>\*1</sup> これに関しては根拠が示されていない。抵抗というものが導体中にある電荷移動の障害物であるという理解から得られる結論だ。



### 6.3.2 電流の発熱・電力

単位面積当たりの電流が  $\mathbf{J}$ ，単位長さ当たりの電位差は  $\mathbf{E}$  であることから，単位面積・単位体積当たりで発生するジュール熱  $p$  は

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}^2 = \rho \mathbf{J}$$

と与えられる。これは単位体積当たりの話だということは計算に活きるかもしれない。

## 6.4 定常電流界と静電界

定常電流を扱う問題はうまく静電界に置き換えて解くことができる。その置き換え方，考え方を説明する。定常電流界では磁束密度も一定なので，マクスウェル方程式の

$$\text{curl} \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

より

$$\text{curl} \mathbf{E} = 0$$

とわかる。このほかにも電位や電流密度に関係した式をまとめると，

$$\begin{aligned} \text{curl} \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{E} &= -\text{grad} V \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \end{aligned}$$

の3式となる。定常電流界の問題はこの3式を基本に解く。これに対応する形で静電界では次の3式が成立する。

$$\begin{aligned} \text{curl} \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{E} &= -\text{grad} V \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \end{aligned}$$

そこで  $\mathbf{J} \leftrightarrow \mathbf{D}$ ,  $\sigma \leftrightarrow \varepsilon$  の対応を考えれば，静電界も定常電流界も計算上は同じだといえる。この理解から定常電流界の問題を解いてゆく。

## 6.5 定常電流界の計算

### 6.5.1 接地抵抗

図 6.1 のように半径が  $a, b$  の円柱を半分にした導体が導電率  $\sigma$  の物質に埋まっている状態を考える。2本の銅線の距離は  $d$  だ。半径  $a$  のほうを電極  $C_1$ ，他方を電極  $C_2$  とする。 $d \ll a, b$  ならば，導線は太さのない点電流源とみなせる。

そうすると点電荷と同じように計算ができる。計算のため図 6.2 のように  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  とする。また円柱の半分では計算がうまくいかないなので，わざとない分を補って電流を  $2I$  とする。

後は計算をするだけだ。

$$V = \frac{2I}{4\pi\sigma r_1} + \frac{-2I}{4\pi\sigma r_2}$$

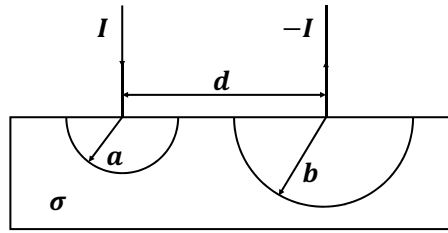


図 6.1 接地抵抗

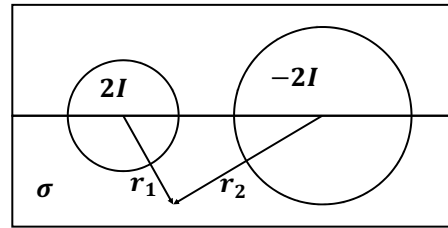


図 6.2 接地抵抗：計算の補助

電流の向きで正負が決まっていることに注意しよう．

電極  $C_1$  表面における電位を計算するとき， $r_1 = a, r_2 \simeq d$  とすることで

$$V_1 = \frac{2I}{4\pi\sigma a} + \frac{-2I}{4\pi\sigma d}$$

と計算でき，電極  $C_2$  の表面に関しても同様にして

$$V_2 = \frac{2I}{4\pi\sigma d} + \frac{-2I}{4\pi\sigma b}$$

となる．ここからは電極間の抵抗値を計算したい．そこで電極間の電位差を計算する．

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 \\ &= \frac{I}{2\pi\sigma} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d} \right) \\ &\simeq \frac{I}{2\pi\sigma} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (\because d \ll a, b) \end{aligned}$$

というように計算される．あとは電流  $I$  で割ることで，

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

電極の距離に依存していないことが分かる．

電極間ではなく接地抵抗\*2を計算する．

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2\pi\sigma a} \\ R_2 &= \frac{1}{2\pi\sigma b} \end{aligned}$$

\*2 電位差ではなく無限遠との電位から抵抗を計算すること

と計算される．つまり，電極間の抵抗は接地抵抗の和で計算される．

## 第 7 章

# 定常電流による磁界

電流によって磁界が発生することはすでに皆知っている．この章では磁束密度の計算方法を扱う．

### 7.1 磁束密度の計算の手法

#### 7.1.1 ビオ・サバールの法則

ある経路  $C$  を流れる電流  $I$  によって発生する磁束密度  $\mathbf{B}$  を経路中の微小長  $\delta \mathbf{s}$  とそれによる微小な磁束密度  $\delta \mathbf{B}$  との対応から計算する方法だ．図 7.1 のような経路から，経路上にない点  $P$  に発生する磁束密度を計算する．

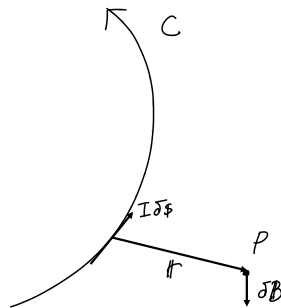


図 7.1 ビオ・サバールの法則

経路中の微小長をとるとその電流の成分は  $I \delta \mathbf{s}$  となる．その微小長から  $P$  へのベクトルを  $\mathbf{r}$  とすると次の式が立つ．

$$\delta \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \delta \mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

ここでの  $\mu_0$  は真空の透磁率で  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  という値だ．あとは経路  $C$  で積分をすることで磁束密度を計算できる．

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (7.1)$$

#### 7.1.2 アンペアの法則

図 7.2 ように閉ループ  $C_1$  に流れる電流  $I$  による磁束密度を計算する．

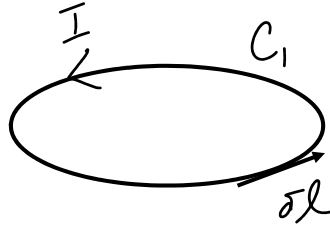


図 7.2 閉ループ電流

ループ中の微小長を  $\delta l$  とすると，式 7.1 より

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

次に点  $P$  を微小距離  $\delta \mathbf{s}$  動かしたときの磁束密度を計算する．これは観測点の移動ではあるが，閉ループ自体を  $\delta \mathbf{s}' = -\delta \mathbf{s}$  動かすことと同じだ．

ここで点  $P$  から見た  $C_1$  の立体角の変化  $\delta \omega$  を計算する．この計算の論理は難解なので説明は避けるが，立体角は面積を考えることで与えられるものだ．閉ループの移動によって発生する何らかの面積の変化を評価すればいい．

$$\delta \omega = \oint_{C_1} \frac{(\delta \mathbf{s}' \times d\mathbf{l}) \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3}$$

スカラ三重積の公式などを使うことで

$$\delta \omega = \oint_{C_1} \frac{(d\mathbf{l} \times \mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{s}}{r^3}$$

となる．

図 7.3 を見てほしい．最初の閉ループ  $C_1$  にさらに閉ループ  $C$  を足している．この閉ループ  $C$  の上で点  $P$  を動かして得られる磁束密度を経路積分する．

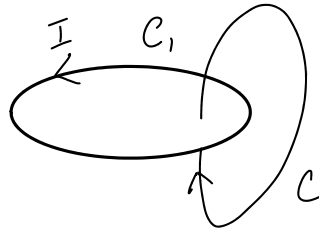


図 7.3 鎖交するループ

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= \oint_C \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) \cdot d\mathbf{s} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C d\omega \end{aligned}$$

立体角の部分の積分計算は閉ループ  $C_1$  に 1 回  $C$  が鎖交するたびに  $4\pi$  値が変化する．

これらをまとめると

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I \quad (7.2)$$

となる。これをアンペアの周回積分の法則という。

電流は電流密度の面積積分で与えられるので

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

となる。ストークスの定理\*1から線積分を面積積分として与えられる。

$$\oint_S \text{curl} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

となる。ここから

$$\text{curl} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (7.3)$$

## 7.2 磁束の磁束の連続性

磁束密度を面積積分することで磁束  $\Phi$  を得ることができる。

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

磁束 1Wb とは磁束密度が 1T のときに単位面積に直交する電束線を表している。次に電束密度の湧き出しを考えるが、式 (7.3) より  $\mathbf{B}$  には回転が計算できる。つまり湧き出しはない。

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (7.4)$$

これを電束の保存則という。電界には電荷という正、または負の電束線の源 (電荷) が単体であるのに対し、磁界では N,S の源が常に対となって存在していることがこの結果に関係している\*2。

## 7.3 真空中の直流電流による磁束

### 7.3.1 有限長直線状電流による磁束

図 7.4 のような電流を考える。電流は下から上の方向に大きさ  $I$  で流れている。この電流から  $l$  離れた点における磁束を計算する。

これは直線状の導線上に微小長  $d\mathbf{s}$  をとり、その部分で発生する微小磁束  $d\mathbf{B}$  を計算し、それを導線全体で積分すればいい。微小磁束の計算は図からおこなう。

図 7.5 から微小磁束  $d\mathbf{B}$  はビオ・サバールの法則より

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} \\ \therefore \delta B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds \cdot \sin \theta}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{l} \end{aligned}$$

と計算される。これは電流と同じ方向成分の磁束は無視できることを利用している。

\*1  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S \text{curl} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ .

\*2 磁石では単極が存在しない。

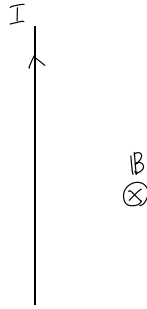


図 7.4 有限長直線状電流 1

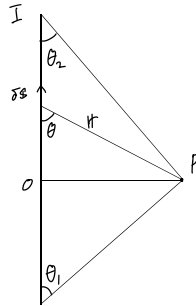


図 7.5 有限長直線状電流 2

あとは積分をすればよい．ここでの積分変数は角  $\theta$  だ．さらに注意として，角のとり方が最初と最後で変わっている．そこで積分区間の書き方は工夫する．

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_2} \frac{\sin \theta d\theta}{l} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi l} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi l} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + l^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + l^2}} \right) \end{aligned}$$

この結果から，電流が無限長であった場合の磁束がわかる． $a, b$  を無限大とすればいいのだ．

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

この結論は別の角度からの導くことができる．無限長の直線状電流に対してアンペアの周回積分の法則を利用する．

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= 2\pi l B_\theta = \mu_0 \\ \therefore B_\theta &= \frac{\mu_0 I}{2\pi l} \end{aligned}$$

### 7.3.2 円形電流による磁束

図 7.6 のように円形電流の中心をとおり電流に対して垂直となる方向に  $z$  軸をとる．その軸上の点での磁束を計算する．これも先と同様で，円形電流のうちの微小長に対応する微小磁束を計算し積分する．

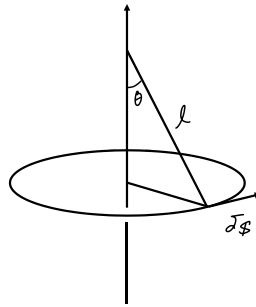


図 7.6 円形電流

問題とする状態の図形的な対称性から、磁束は  $z$  軸に平行な成分しかない。

$$\delta B_z = \frac{4\pi l^2}{\mu_0 I \delta s} \cos \theta \quad l = \sqrt{a^2 + z^2}$$

あとは積分を実行する。

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi l^2} \int_0^{2\pi a} ds \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

### 7.3.3 単層ソレノイドによる磁束

単層ソレノイドとはソレノイドのうちでも重ね巻きをしないものをいう。そのため、導線部分の厚みを 0 として考えることができる。これは先の円形電流が幅を持って並んでいる状態ということができる。

図 7.7 の単層ソレノイドの内部の磁束を考える。

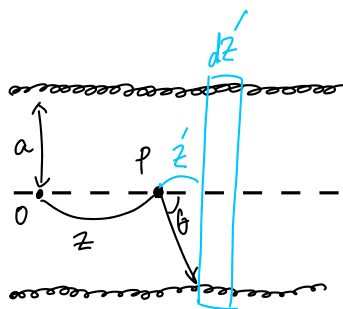


図 7.7 単層ソレノイドコイル

ソレノイドは有限長であるものとし、その中心での磁束を考える。これまでの問題と同様にソレノイドの微小区間での磁束を考える。これは円形電流による磁束を考えるのと同じだ。

$$\delta B = \frac{\mu_0 (N/l) a^2 \delta z'}{2(a^2 + z'^2)^{3/2}}$$

電流は全体で  $NI$  であるが、微小区間  $\delta z$  においては  $NI \cdot \delta z/l$  となることに注意する。

あとは積分変数を  $z'$  として積分すればいい.

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 N I}{2l} \int_{-z}^{l-z} \frac{a^2 dz'}{(a^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 N I}{2l} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \end{aligned}$$

ソレノイドが無限長であると考えと,

$$B = \mu_0 n I$$

となる. ここでの  $n$  は単位長さあたりのソレノイドの巻き数だ. さらにこの場合, ソレノイドコイル内の磁束は一様となり, 磁束がソレノイド外に漏れない. これはアンペールの周回積分の法則をソレノイドコイルの内部のみの経路や, 内部と外部をまたぐ経路で計算することから明らかになる.

### 7.3.4 円柱導体

図 7.8 のように太さがある導線による磁束を計算する.

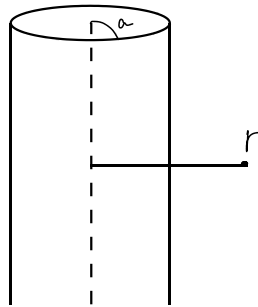


図 7.8 円柱導体

導線は無限長あるとする. するとこの計算はアンペールの周回積分の法則から容易に計算される. 導線の中心の軸からの距離を  $r$  とすると, 導線内部であるか外部出るかで場合が分けられる.

外部の場合は

$$\oint_C B ds = \mu_0 I$$

から\*3容易に計算され

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

となる.

対して, 導線内部であると電流量が  $r$  の関数となる.

$$I(r) = \frac{r^2}{a^2} I$$

これを用いて

$$B = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r}$$

としたら, これが結論となる.

---

\*3  $C$  は導線の軸を中心とする半径  $r$  の円である.



## 7.4 ベクトルポテンシャル

磁束  $\mathbf{B}$  は湧き出しがないことをすでに扱った\*4. 式で表現すると

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

となる. ここから  $\mathbf{B}$  はあるベクトル  $\mathbf{A}$  によって

$$\mathbf{B} = \operatorname{curl} \mathbf{A}$$

このときの  $\mathbf{A}$  を磁束密度  $\mathbf{B}$  のベクトルポテンシャルという. この式を満たす  $\mathbf{A}$  は無数に存在するので, これを一意に定めるために次の条件を課す.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

ベクトルポテンシャルが自由度を持ち, 一意に定まらないことをゲージ問題といい, 上の式によって条件を与える場合をクーロンゲージという.

## 7.5 電流によるベクトルポテンシャルの計算

### 7.5.1 一様媒質中の分布電流

アンペアの周回積分の法則を微分形式で表現した式 (7.3) をスタートとする.

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

これに対してベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を置くと

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

となる. ベクトル解析の公式から

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$$

となる. ベクトルポテンシャルは  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  なので

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

となる. この式を直交座標の成分表示であらわすと

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

となる. ポワソン方程式の形だ.

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho}{r} dv$$

---

\*4 単極がないことを述べた部分.

の形を利用することで

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_x dv}{r} \\ A_y &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_y dv}{r} \\ A_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_z dv}{r} \end{aligned}$$

となることがわかる。ベクトルを利用して表現すると

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} dv}{r}$$

となる。積分前の状態であらわすと

$$\delta \mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{J} \delta v}{4\pi r}$$

となる。つまりベクトルポテンシャルの方向は電流の方向と同じなのだ。

## 7.5.2 有限長直線電流

図 7.4 のような有限長の直線電流によるベクトルポテンシャルを考える。先の結果から考えるべきは電流と同じ方向成分のみだ。

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-a}^b \frac{I dz}{\sqrt{l^2 + z^2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{(a + \sqrt{l^2 + a^2})(b + \sqrt{l^2 + b^2})}{l^2} \end{aligned}$$

この結果を円柱座標で運用して磁束  $\mathbf{B}$  を計算する。

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{curl} \mathbf{A} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial A_z}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial A_z}{\partial r} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + l^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + r^2}} \right) \end{aligned}$$

有限長直線電流による磁束の結果と一致することがわかる。

## 7.5.3 無限長直線電流

これは有限長での結果で  $a, b \rightarrow \infty$  とすればよいという話ではない。そのような計算をすると  $A_z$  は発散してしまう。そこで  $l = c$  を基準として、そこでのベクトルポテンシャルを  $A_c$  とする。これは無限遠でもベクトルポテンシャルが 0 とはならないことが原因の 2 次元問題<sup>\*5</sup>だ。

このように基準をとり、 $a = b, b \rightarrow \infty$  とすると

$$A_z(l) - A_z(c) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \frac{c}{l}$$

---

<sup>\*5</sup> 2 次元問題はすでに何かしらで扱った。

という結果を得る．ここから磁束を計算すると，もちろんすでに計算した無限長直線電流による磁束

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}$$

に一致する．

## 7.5.4 無限長ソレノイドコイル

無限長ソレノイドコイルを考える．巻き数は単位長さあたり  $n$  だ．密に巻いてあるソレノイドコイルではソレノイドの外の磁束が 0 であることをすでに述べている．ここではソレノイド内部のベクトルポテンシャルを考える．

ソレノイド内の磁束はすでに導いた結果を使い

$$B = \mu_0 n I$$

となる．そして円柱座標上で  $\mathbf{A}$  を考えたとき，電流の向きとベクトルポテンシャルの向きが同じであることと，電流の向きが  $\varphi$  であることから

$$\mathbf{A} = (0, A_\varphi, 0)$$

と分かる．ここから回転を計算する．

$$\text{curl} \mathbf{A} = \left( 0, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) = (0, 0, B_z)$$

となる．

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) = \begin{cases} \mu_0 n I, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

ここから積分計算を実行すると

$$A_\varphi = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 n I r, & r < a \\ \frac{1}{2} \mu_0 n I \frac{a^2}{r}, & r > a \end{cases}$$

となり，これベクトルポテンシャルの計算が完了する．

この問題においては別解が存在する．

$$\text{curl} \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

から

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \int_S \text{curl} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r A_\varphi \end{aligned}$$

ストークスの定理から右辺の計算が進む．そして左辺を普通に計算すると

$$2\pi r A_\varphi = \begin{cases} \mu_0 n I \cdot \pi r^2, & r < a \\ \mu_0 n I \cdot \pi a^2, & r \geq a \end{cases}$$

となり，同じ結論を得る．

## 第 8 章

# 磁性体

鉄や永久磁石といった物質は磁性体と呼ばれる．磁気記憶や鉄心などに利用される．鉄心とは磁束の通り道として用意する磁性体のことで，大抵の場合は重い物質だ．

### 8.1 磁化と磁化電流

#### 8.1.1 磁性体

ある物質を磁界の中に置くと，その物質によって磁束を作るものがある．この現象を磁化といい，磁化する物質を磁性体という．

図 8.1 のような状態になる．磁化のときに生まれる磁束がどれほどの量なのかなどはのちに扱う．

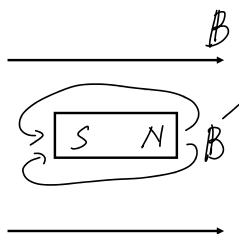


図 8.1 磁界中の磁性体

静電界では誘電体が電界の影響を受けて分極を起こす．これは磁性体が磁化する話と類似している．以降，静電界の話との類似点や数学的な計算方法の一致などから議論を大幅に省略することがある．この議論の省略にはこれまでの内容の復習が必要だろう．

#### 8.1.2 磁気モーメント

磁束というのは電流から生じる．例えば永久磁石では，電子のスピンによって生まれる微小電流ループによって磁束を発生させている．

磁性体が磁化するときも微小電流ループが影響する．そこで微小電流ループによる磁束をスタートに磁性体の磁化を考える．

図 8.2 の微小電流ループにおいて電流を  $I$ ，電流の経路によってできる微小面を  $\Delta S$  とする．面積ベクトル



図 8.2 微小電流ループ

表 8.1 磁性体の分類

反磁性体	磁化の方向が磁界の方向と逆
常磁性体	磁化の方向が磁界の方向と同じ
強磁性体	強い磁化が磁界の方向と同じ

の方向は電流の向きを使い右ねじの法則から決定する．これから磁気モーメントを次で定義する．

$$\mathbf{m} = I \Delta \mathbf{S} \quad (8.1)$$

3次元ベクトルなので，各方向成分がある．この解釈は次のようになる．

$$m_z = (\text{電流ループの } xy \text{ 平面に落とした影}) \times (\text{電流の } z \text{ 方向に垂直な成分})$$

さて，ループ状の電流から発生する磁束の形状は双極子モーメントによる電界の形と相似だ．ただ磁気モーメントとはあまり関係がない．

### 8.1.3 磁性体の種類

磁界が0の空間では物質中の磁気モーメントの平均が0となる．つまりは磁化していない．では磁界の中に物質があるとどうなるのか．そのとき磁化するものを磁性体であるとしたがこれではあまりに大雑把すぎる．どのように磁化するかで分類する．

分類すると表 8.1 のようになる．

この3つに分類される．強磁性体の性質として，この透磁率が定数でないという性質がある．これに関してはのちにも触れるがここで述べておく．

#### 8.1.4 磁化の強さ

話は再度物質の微小電流ループに戻る．磁化すると磁束が同じ向きにそろうようになることから，物質内の微小電流ループは同じ回転方向になっていると考えられる．そして，物質内には無数の微小電流ループがあり，その内側の部分に関しては近くの電流ループとの打消しが発生する．そこから，結論として磁化している物体にはその物体の外周を電流が流れるということがわかる (図 8.3)．

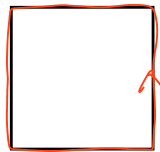


図 8.3 磁化電流

このように磁化した物体に流れる電流を磁化電流という。重ねて述べるが磁化電流は物体の境界を流れる。次に微小体積に対して磁化電流を考えたい。そこに関連するのが磁化ベクトルというものだ。まずはこの磁化ベクトルを定義する。

図 8.4 の微小体積が微小電流ループによって  $\Delta \mathbf{m}$  の磁気モーメントを持つとする。

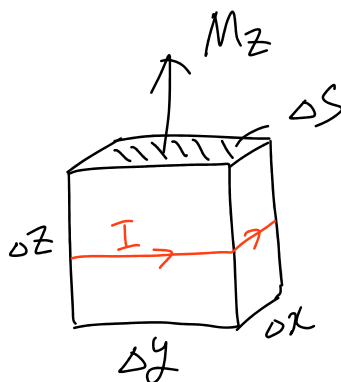


図 8.4 磁気モーメント

これに対して磁化ベクトルを以下で定義する。

$$\mathbf{M} = \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta v} \quad (8.2)$$

つまり、磁気ベクトルとは、微小体積における単位体積当たりの磁気モーメントということだ。そして、磁気ベクトルは単に磁化の強さともいう。磁化の程度をはかることができるものだ。

磁化ベクトルの成分の意味を考える。式 (8.2) から微小体積での磁気モーメントの  $z$  成分  $m_z$  を計算する。

$$m_z = M_z \Delta v = M_z \Delta z \cdot \Delta x \Delta y$$

磁気モーメントの成分の意味から考えると

$$M_z \Delta z \cdot \Delta x \Delta y = I_z \cdot \Delta S$$

となる。つまり、 $M_z \Delta z$  は  $z$  方向に垂直なループ電流を表していることがわかる。ここから  $M_z$  は単位長当たりの  $z$  方向に垂直なループ電流密度を意味することがわかる。

ここまでの議論で磁化ベクトルと磁化の原因の微小電流ループの関係がわかった。微小電流は物体全体では磁化電流としてまとめられる。そこで、次は磁化ベクトルと磁化電流の関係を考える。

### 8.1.5 磁化電流と磁化ベクトル

図 8.5 のように横並びの微小体積を考える。左側を微小体積 1、他方を微小体積 2 とする。並べ方が  $y$  方向であることを注意しよう。

それぞれの微小体積で  $z$  方向に垂直な方向の微小電流ループを考える。 $I_{m1}, I_{m2}$  だ。前小節の話から

$$\begin{aligned} I_{m1} &= M_z \Delta z \\ I_{m2} &= \left( M_z + \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y \right) \Delta z \end{aligned}$$

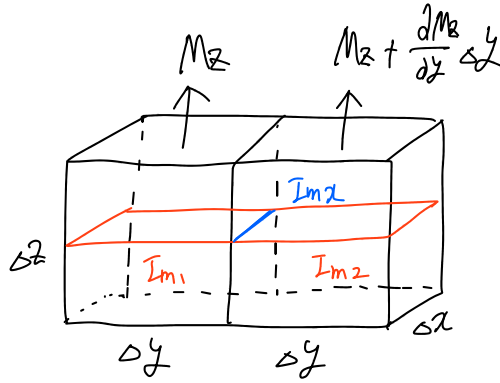


図 8.5 並列な微小体積

と分かる．ここから 2 つの微小体積の境界を流れる電流  $I_{mx}$  は

$$I_{mx} = I_{m2} - I_{m1} = \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y \Delta z$$

となる．実際のところは図 8.5 のように線状に電流が流れているわけではない．微小体積のとり方次第で線が生まれるというだけの話だ．現実的には微小体積の  $yz$  平面に対して垂直に  $I_{mx}$  は流れていると考えるべきだ．

面で流れる電流に対しては密度を考えるのが妥当だ．

$$j_{mx} = \frac{I_{mx}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial M_z}{\partial y}$$

さて，最初に微小体積は  $y$  方向に並べるものとして考えたが，物質中では当然  $x$  方向， $z$  方向にも並んでいる．そして考えるべき微小電流ループも  $z$  方向に垂直な成分だけではなく，ほか 2 方向も必要だろう．

まずは，微小体積を並べる向きから一般化する． $j_{mx}$  を考えるので， $z$  方向に並べたうえで， $y$  方向に垂直な微小電流ループを考える．すると

$$j_{mx} = -\frac{\partial M_y}{\partial z}$$

を得る\*1．2 通りの並べ方を合わせることで結論とできる．

$$j_{mx} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}$$

同様の議論を繰り返すと

$$\begin{aligned} j_{my} &= \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \\ j_{mz} &= \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \end{aligned}$$

を得る．得られた 3 つの式をまとめると

$$\mathbf{j}_m = \text{curl} \mathbf{M} \quad (8.3)$$

\*1 計算は各自に任せる．

を得る．ある閉曲線  $C$  で囲まれた面  $S$  での磁化電流  $I_m$  は

$$I_m = \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S} = \int_S \text{curl} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} \quad (8.4)$$

となる．これで磁化ベクトルと磁化電流の関係を表すことができた．

## 8.2 磁界の強さ

前節は物体の磁化の強さを扱った．本節では空間の磁界の強さを扱う．そのうえで，静電界における電界との対応を考えることで議論の類似な部分を体感する．

### 8.2.1 磁界の強さ

磁性体があると磁化電流  $I_m$  があることは前節の話で分かった．アンペアの周回積分の法則で現れる電流にも磁化電流の分がある．またそうではない部分もある．この分の電流は真電流  $I_f$  という．このことを踏まえると，式 (7.2) は次のように書き換えられる．

$$\oint_C \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = I_f + I_m$$

磁化電流も同じ経路で磁化ベクトル  $\mathbf{M}$  を積分することで得られるので

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= I_f + \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} \\ \therefore \oint_C \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{s} &= I_f \end{aligned}$$

ここで磁界の強さを次のように定義する．

$$\mathbf{H} := \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (8.5)$$

磁界を経路  $C$  で周回積分すると，真電流が得られる．

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_f \quad (8.6)$$

これは磁界の強さを使ったアンペアの周回積分の法則だ．微分形は，

$$\text{curl} \mathbf{H} = \mathbf{j}_f \quad (8.7)$$

となる．

また，磁性体が存在しても磁束保存則は変わらない．式 (7.4) が成立する．

### 8.2.2 磁化率・透磁率

磁化ベクトルは磁化モーメントと同じ向きで，磁化モーメントが磁界を同じ向きであることから磁化ベクトルと磁界は同じ方向だ．また，磁束密度と磁界も同じ向きなので次の 2 式を得る．

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad (8.8)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (8.9)$$



$\chi$  を磁化率,  $\mu$  を透磁率という・式 (8.5) から次の式を得ることができる.

$$\mu = (1 + \chi)\mu_0 \quad (8.10)$$

磁性体の区別は磁化率の値でおこなうことができる.

表 8.2 磁化率と磁性体

正の値	常磁性体
負の値	反磁性体
絶対値が十分に小さい	非磁性体
十分に大きい	強磁性体

透磁率からは次の定数も定義される.

$$\mu_s = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \nu = \frac{1}{\mu}$$

$\mu_s$  は比透磁率,  $\nu$  は磁気抵抗率という.

## 8.3 具体的な磁界・磁束

### 8.3.1 無限長円柱導体

図 8.6 のような半径  $a$  の無限長円柱導体を考える. 導体内外で透磁率は  $\mu, \mu_0$  だ. この導体に電流  $I$  が一様に流れている.

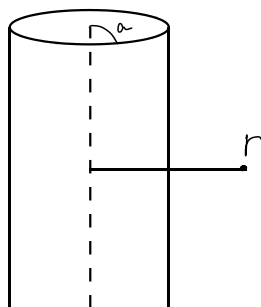


図 8.6 無限長円柱導体

$r < a$  のとき,  $r$  より内側の電流量  $I(r)$  は

$$I(r) = \frac{r^2}{a^2} I$$

で与えられる. これを用いながらアンペアの周回積分の法則の式を立てる.

$$\oint_C H ds = \frac{r^2}{a^2} I \quad (C : \text{半径 } r \text{ の円周})$$

$$\therefore H = \frac{rI}{2\pi a^2}, \quad B = \mu H = \frac{\mu r I}{2\pi a^2}$$

$a < r$  のとき,  $r$  の内側の電流は  $I$  で一定だ. アンペアの周回積分の法則より

$$\oint_C H ds = I$$

$$\therefore H = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

### 8.3.2 $N$ 巻き環状ソレノイドコイル

図 8.7 のように  $N$  巻きソレノイドコイルが輪を書いている. ソレノイド内の透磁率は一部が  $\mu$  でそれ以外が  $\mu_0$ , ソレノイド外の透磁率は  $\mu_0$  となっている. コイルは密に巻かれている.

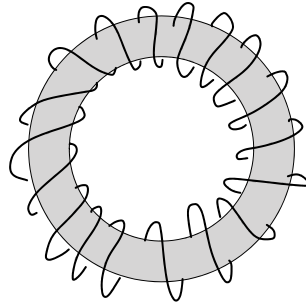


図 8.7 環状ソレノイドコイル

この問題に対しては環状ソレノイドの中心からの距離  $r$  をとることで計算できる. 議論の簡単のため, コイルと平行な平面しか考えない.

コイル内では半径  $r$  の円周の内部に電流が  $NI$  あり, 外部では 0 だ. これは半径  $r$  の円周がいくつかの電流ループに鎖交するの数を数えている. したがって,

$$H = \begin{cases} \frac{NI}{2\pi r}, & (\text{ソレノイド内}) \\ 0, & (\text{ソレノイド外}) \end{cases}$$

ここから磁束密度は

$$B = \begin{cases} \mu H \\ \mu_0 H \end{cases}$$

## 8.4 EB 対応・EH 対応

静電界と静電流界では数学的な類似点を多く見つけることができる. この理解は議論の省略を可能にする.

### 8.4.1 磁極

磁極は常に N 極と S 極が対となって存在している. これは静電界における分極電荷に相当する. 分極電荷密度  $\rho_P$  は分極の強さ  $\mathbf{P}$  によって

$$\rho_P = -\text{div} \mathbf{P}$$

で表される．これ同じような形の式で磁極密度  $\rho_m$  は表すことができる．

$$\rho_m = -\operatorname{div}(\mu_0 \mathbf{M}) \quad (8.11)$$

式 (8.5) を利用することで直ちに以下の式を得る．

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\rho_m}{\mu_0} \quad (8.12)$$

これはまさしく式 (1.10) であらわされるガウスの法則の微分形と同じ形といえるだろう．式の意味としては密度  $\rho_m$  の磁極から，それを  $1/\mu_0$  倍した本数の磁界が湧き出しているということである．

式 (1.10) と同じというのなら議論も同じことをいうことができると思うべきだ．早速，ガウスの法則の微分形を導出した議論と逆をたどってみる．体積積分する．

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div} \mathbf{H} dv &= \frac{1}{\mu_0} \int_V \rho_m dv \\ \Leftrightarrow \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{q_m}{\mu_0} \end{aligned}$$

$q_m$  は磁極だ．電荷に相当する．当然ではあるが，これはガウスの法則の式と同じ形だ．

真電流が 0 のとき，磁界は磁極から発するもののみとなる．また，湧き出しに値があるとき，回転の値は 0 だ．

$$\operatorname{div}(\mu_0 \mathbf{H}) = \rho_m, \quad \operatorname{curl} \mathbf{H} = 0$$

これは静電界における電界  $\mathbf{E}$  に成立する式と同形だ．以上から真電流が 0 のとき，磁界と磁極の関係は電界と電荷の関係が類似していると結論付けられる．

## 8.4.2 EH 対応

EH 対応とは静電界での電界・電束の関係と静磁界での磁界・磁束の関係に読み替えるというものだ．

繰り返しになるが真電流が 0 であるとき，

$$\operatorname{div}(\mu_0 \mathbf{H}) = \rho_m, \quad \operatorname{curl} \mathbf{H} = 0$$

であり，これは静電界での電界に成立する式

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = \rho, \quad \operatorname{curl} \mathbf{E}$$

と同形だ．

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\rho_m}{\mu_0}, \quad \rho_P = -\operatorname{div} \mathbf{P}$$

この対応をとりやすくするため次の磁気分極  $\mathbf{J}_m$  を定義する．

$$\mathbf{J}_m := \mu_0 \mathbf{M} \quad (8.13)$$

この磁気分極によって磁束  $\mathbf{B}$  は次のように表すことができる．

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J}_m$$

これは静電界における次の式と同形だ．

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

この式からも明らかに電界と磁界，電束と磁束が対応していることがわかる．

### 8.4.3 EB 対応

計算上の対応ではなく物理的な背景からの対応だ。基本的な物理量である電界と磁束を対応させている。そして磁界と電束は派生的に定義されているので、これらを対応させる。

これに関しては存在の説明のみで終える。

## 8.5 磁界に関する境界条件・磁界のエネルギー

### 8.5.1 境界条件

計算上の対応を述べている EH 対応から磁界、磁束密度の境界条件がどのようなになっているのかはすぐにわかる。

透磁率が  $\mu_1, \mu_2$  の各領域の磁界を  $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ 、磁束密度を  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$  とする。すると電界、電束密度と同様に磁界では境界面の接線方向の成分が等しく、磁束密度では境界面の法線方向の成分が等しい。

$$\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}, \quad \mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}$$

これは真電流が 0 であるときに成立する関係だ。

真電流があるときは磁界の境界面の接線成分の関係がかわる。図 8.8 のように境界面に対して  $K$  の真電流があるとする。

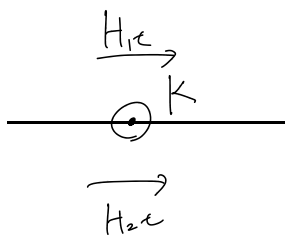


図 8.8 境界面上での真電流

このときは境界面の接線方向で磁界に対して次の式が成立する。

$$\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t} + K$$

### 8.5.2 磁界も持つエネルギー

磁界が単位体積あたりに蓄えるエネルギーを  $w_m$  とすると、電界のときと同様にして次で計算される。

$$w_m = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu} \quad (8.14)$$

しかし、これは常に成立するのではない。成立の条件は透磁率  $\mu$  が一定であるときだ。つまり、強磁性体では利用できない。強磁性体に関してはのちに扱う。

磁界が変化したときのエネルギーの変化を  $dw_m$  は次で計算される。

$$dw_m = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

微小変化を考えるのは磁束密度のほうだ。

## 8.6 強磁性体

### 8.6.1 磁化

強磁性体とは磁化率  $\chi$  が大きな物体のことをいう。式 (8.10) から透磁率が大きいことも明らかだ。このような物体は与えられた磁界に対して、はるかに大きな磁化をする。

強磁性体の磁化は物体内の磁気モーメントの向きから考えるのがよい。強磁性体内では磁気モーメントが平行となっている領域が複数含まれている状態になっている。図 8.9 の状態だ。この 1 つの領域を磁区と呼ぶ。そして、それらの境界を磁壁という。

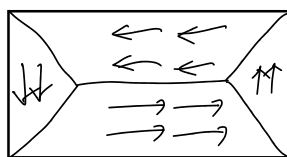


図 8.9 強磁性体中の磁気モーメント

磁区，磁壁から強磁性体の磁化を説明する。すると 2 つの動きに直すことができる。1 つは磁壁の移動だ。図 8.10 のような移動が起きる。周囲の磁界によって磁性体内の磁気モーメントの向きが変わるが，これは無作為な位置というわけではなく，隣り合ったものから順々に向きが変わるのだ。

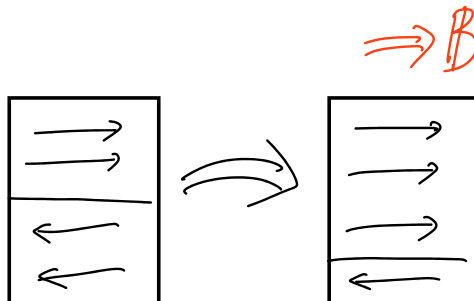


図 8.10 磁壁移動

もう 1 つが磁化回転だ。図 8.11 のように磁区内の磁気モーメントの向きが磁区全体で変わる。

### 8.6.2 磁化曲線

必要な磁界の強さによって，磁壁移動，磁化回転の順で強磁性体が磁化することがわかった。周囲の磁界に対する磁化ベクトルの大きさをグラフとしてあらわしたのが図 8.12 だ。磁化曲線と呼ばれる。

磁化曲線であらわされている通りで磁壁移動，磁化回転を順に起こした強磁性体はある程度の磁化をした後にそれ以上大きく磁化の強さが大きくならないようになる。この状態を磁気飽和という。磁界に対して磁化の変化の割合が変化しているということは磁化率が変化している\*2ことを表している。ここから透磁率が変化していることがわかり，強磁性体の透磁率が定数ではないことが，ここで確認できるのだ。

\*2 ある磁界を境に急激に減少する。

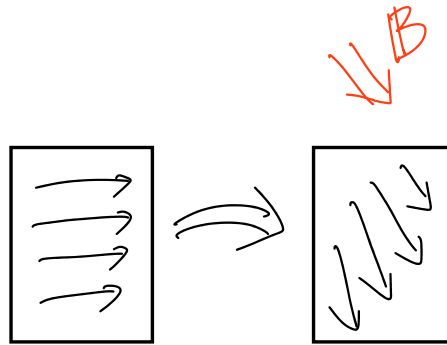


図 8.11 磁化回転

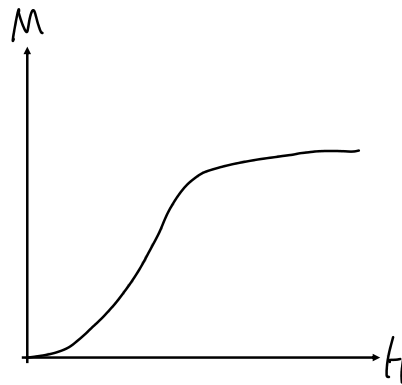


図 8.12 磁化曲線

次に、一度磁化した強磁性体に磁化させたときとは逆の向きの磁界をかける．その時の磁性体内部の磁束密度の推移を図 8.13 であらわす．これを BH 曲線という．

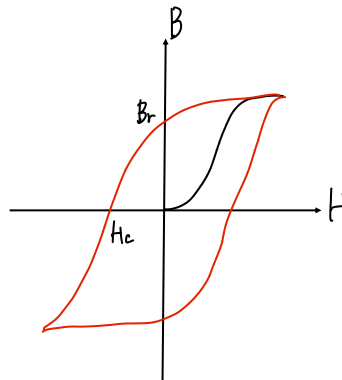


図 8.13 BH 曲線

図から、ループが生まれることが確認できる．磁化した強磁性体は磁界をなくすだけでは磁化が取まらないのだ．このような磁束密度を残留磁化密度  $B_r$  という．この性質を磁気ヒステリシスといい磁気記憶を実現している．

磁界を  $-H_c$  としたときに磁束密度はようやく 0 となる．この  $H$  の大きさを保持力という．また図のルー

プをヒステリシスループという。

### 8.6.3 磁気異方性

永久磁石の存在の根拠となっている性質だ。それは、磁性体内の磁気モーメントには向きやすい方向軸 (磁化容易方向) と向きにくい方向軸 (磁化困難方向) があるというものだ。

磁化容易方向で磁化の向きを逆転させるのに必要なエネルギーより、磁化困難方向で磁化の向きを逆転させるのに必要なエネルギーのほうが大きい。これは、そもそも磁化困難方向に磁気モーメントが向くこと自体が不安定であることが原因で、磁化容易方向に磁気モーメントが向いていることが自然なのだ。これによって永久磁石の磁化が簡単になくることがない。

### 8.6.4 飽和曲線と磁界のエネルギー

透磁率の一定ではない強磁性体においては磁界のエネルギーが定義できていなかった。ここで、飽和曲線を利用して磁界のエネルギーを定義する。

ここで考えるのは磁気ヒステリシスの小さい強磁性体だ。この場合 BH 曲線は図 8.14 のようになる。

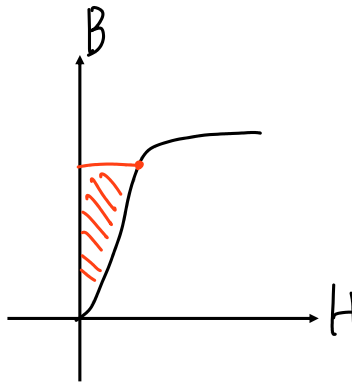


図 8.14 磁気ヒステリシスの小さい磁性体の BH 曲線

その曲線の B 軸に落とす影が磁界のエネルギー密度となる。式で表現すると

$$w_m = \int_0^B H dB \quad (8.15)$$

### 8.6.5 ヒステリシス損

ヒステリシスループを一周させるように強磁性体を磁化させると、そのループの面積分のエネルギーを失う。これをヒステリシス損という。磁気記憶で 0 と 1 を往復させるとヒステリシス損の分のエネルギーを失うということだ。

コンデンサではこのような損失はないため、これは電気と磁気の違いの 1 つだといえる。

強磁性体を十分に磁気飽和させるだけの強さの交流磁界を与えると

$$P = w_h f \quad (w_h : \text{ループの面積}, f : \text{交流磁界の周波数})$$

この量のエネルギーが毎秒失われる。

## 8.7 磁気回路

### 8.7.1 磁気回路

真電流がない場合，磁界と磁束が電界と電束に類似しているということは述べた．次は真電流のある磁界と，定常電流界の電流との類似を見る．これに関しては次の表 8.3 にまとめる．

表 8.3 電流と磁界の類似

$$\begin{array}{ll} \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} & \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} & \Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ V = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} & NI = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \end{array}$$

この表で現れた  $NI = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$  は回路における起電力に対応するものとして起磁力という．あとは抵抗を定義すればいい．通常の回路では長さ  $l$ ，断面積  $S$ ，導電率  $\sigma$  から

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$

と抵抗は定義された．これと同じように

$$R_m = \frac{l}{\mu S} \quad (8.16)$$

とすることで磁気回路における磁気抵抗を定義できる．

以上から電流を磁束に，起電力を起磁力に，抵抗を磁気抵抗に置き換えることで電位回路を磁気回路に置き換えることができる．

### 8.7.2 磁気回路の例

図 8.7 のようにソレノイドコイルをループ状につないだものを考える．

コイルは  $N$  回巻きで，電流は  $I$  だ．ここから起磁力は  $NI$  とわかる．次に平均のループ長を  $l$ ，ソレノイドコイル内の透磁率を  $\mu$ ，断面積を  $S$  とすると，磁気抵抗は

$$R_m = \frac{l}{\mu S}$$

となる．これらによってコイル内に流れる磁束は

$$\Phi = \frac{NI \cdot \mu S}{l}$$

と計算される．このようなことが磁気回路では可能なのだ．

### 8.7.3 キルヒホフの法則

電気回路で成立する法則が磁気回路でも成立する．磁気回路に合わせた表現で次のようになる．

1. 磁気回路中の結合点に入る磁束の和は 0.
2. 各部分における磁気抵抗と磁束の積の総和は磁路に作用する起磁力の総和に等しい.



### 8.7.4 磁気回路と電気回路の相違点

漏洩磁束 電流には漏れがないが、磁気漏洩はある。

非線形特性 電気抵抗は定数だが、透磁率が磁界で変化することによって磁気抵抗は定数ではない。

損失 電気回路ではジュール損失があるが、これに対応する損失は磁気回路にない。

素子 インダクタやキャパシタに相当する素子はない。

## 8.8 減磁力

磁性体を磁界  $H_0$  中におくと磁化を起し、磁性体内部に  $H$  が発生する。一般に  $H$  は  $H_0$  より小さくなる。

$$H_d = H_0 - H$$

その差は自己減磁力、または単に減磁力という。減磁力の理由としては磁化した磁性体の両端に磁極が生まれることだ (図 8.1)。この両端の磁界によって磁性体内部に外部磁界とは反対向きの磁界が発生する。この磁界を減磁界という。

磁性体の両端に現れる磁極の強さは磁性体の磁化の強さに比例することがわかっている。このときの比例定数を  $N$  とする。すると、

$$H_d = NM = \chi NH$$

と表される。 $N$  は減磁率と呼ばれる。減磁率を使い磁性体内の磁界  $H$  と減磁力  $H_0$  は次のように表すことができる。

$$H = \frac{H_0}{1 + \chi N}, \quad H_d = \frac{\chi NH_0}{1 + \chi N}$$

減磁率は磁性体の幾何的条件で決定する。そして xyz の 3 方向の減磁率の総和は必ず 1 となる性質がある。例えば球体上の磁性体の減磁率は 1/3 である。

### 8.8.1 永久磁石

外部の磁界なしに磁化を起している物体を永久磁石という。永久磁石の磁化の強さは残留磁束密度で決定するのではない。減磁力で決定するのだ。HB 曲線において減磁力がどの部分に相当するのかを図 8.15 に示す。

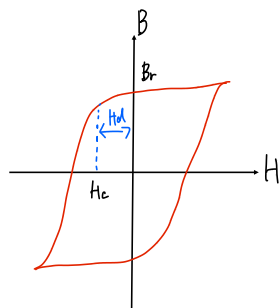


図 8.15 BH 曲線に現れる減磁力