A-3 予想問題

近藤 綜太

2020 年 7 月 14 日

考えられる最悪なパターンの問題を作りました．

問 1

真空の誘電率を ε_0 とする．

I. 図 1 のように $+q, -q$ の電荷が z 軸上 $z = \delta/2, -\delta/2$ に存在している．z 軸となす角が θ，原点からの距離が r である点 P をとる．$\delta \ll r$ である．

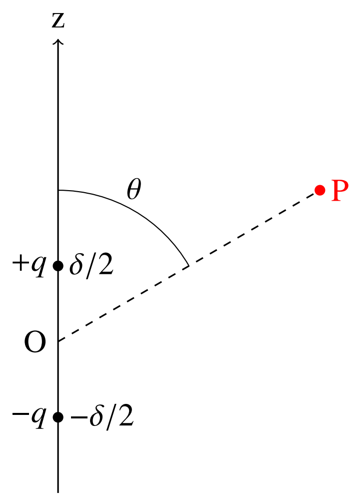

図 1 問題設定

(1) 点 P における電位を球体座標系で求めよ．

(2) 点 P における電界を球体座標系で求めよ．球体座標における ∇ 演算子は次のようになっている．

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$

(3) 向きを $-q$ の電荷から $+q$ の方向，大きさを $m = q\delta$ とするベクトル $\boldsymbol{m}$ を定義し，点 P における電界，電位を示せ．また，このベクトルの名称を答えよ．

II. 図 2 のように一様電界 $\boldsymbol{E}$(大きさ E_0) 中に半径 a の導体球を置く．導体球の中心を原点とし，電界の方向に軸をとる．軸とのなす角を θ，原点からの距離を $r(> a)$ である点を Q とする．

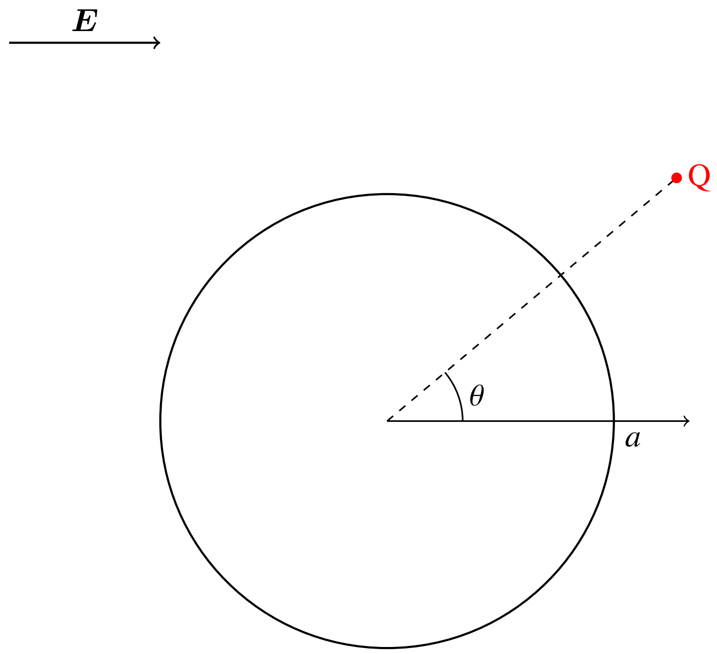

図 2 問題設定

(4) 導体球を取り除き，適当な影像双極子 $\boldsymbol{m}$ を与えることで導体外の電界を再現せよ．

(5) 点 Q における電界を球体座標系で求めよ．

問 2

以下の語句を説明せよ．

(1) 電位係数

(2) 伝導電流と対流電流

(3) 磁区と磁壁

解答案

問 1 前半

$+q$ の電荷から点 P までの距離を r_1，$-q$ の電荷から点 P までの距離を r_2 とする．すると，点 P での電位 V_p は次で計算される．

$$V_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

余弦定理を使うことで r_1, r_2 を計算することができる．

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{r^2 - 2r \cdot \frac{\delta}{2}\cos\theta + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \\ r_2 &= \sqrt{r^2 - 2r \cdot \frac{\delta}{2}\cos(\pi - \theta) + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

これらに対して近似計算を進める．

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &\approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\delta}{r}\cos\theta\right)^{-1/2} \\ &\approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\delta}{2r}\cos\theta\right) \\ \frac{1}{r_2} &\approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\delta}{2r}\cos(\pi - \theta)\right) \end{aligned}$$

これにより V_p は次のように計算され答えとなる．

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\left(1 + \frac{\delta}{2r}\cos\theta\right) - \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\delta}{2r}\cos(\pi - \theta)\right)\right] \\ &= \frac{q\delta\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

電位 $\boldsymbol{E}_p$ は次で計算される．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_p &= -\nabla \cdot V_p \\ &= \frac{q\delta\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_r + \frac{q\delta\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_\theta \end{aligned}$$

向きを $-q$ の電荷から $+q$ の方向，大きさを $q\delta$ とするベクトル $\boldsymbol{m} = (0, 0, q\delta)$ をとると，電位 V_p は次のように表される． $\boldsymbol{r}$ は点 P の位置ベクトルである．

$$V_p = \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

また，電界は次のようになる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_p &= -\nabla \cdot V_p \\ &= \frac{m\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_r + \frac{m\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_\theta \end{aligned}$$

ベクトル $\boldsymbol{m}$ は電気双極子モーメントである．

問 1 後半

導体球を取り除き，電界と同じ向き，大きさ m の電気双極子モーメントを原点に仮想する．先の問題の結果より，影像双極子によって生じる点 Q での電界 $\boldsymbol{E}_m$ は次のようになる．

$$\boldsymbol{E}_m = \frac{m\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_r + \frac{m\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_\theta$$

また，元からある電界 $\boldsymbol{E}$ は次のように分解される．

$$\boldsymbol{E} = E_0\cos\theta\boldsymbol{e}_r + -E_0\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

求める電界 $\boldsymbol{E}_q$ はこれらの和として計算される．

$$\boldsymbol{E}_q = \left(E_0\cos\theta + \frac{m\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(-E_0\sin\theta + \frac{m\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)\boldsymbol{e}_\theta$$

境界条件は導体の表面の電位が一定であることから与えられる．すなわち，導体表面 $r = a$ では球面の接線方向の電界が 0 である．

$$\begin{aligned} &-E_0\sin\theta + \frac{m\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = 0 \\ &\therefore m = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0 \end{aligned}$$

これにより，適当な影像双極子は向きが電界と同じで大きさが $4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0$ の電気双極子モーメントであることがわかった．

そして電界は次のようになる．

$$\boldsymbol{E}_q = E_0\left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)\boldsymbol{e}_r + -E_0\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)\boldsymbol{e}_\theta$$

問 2

電位係数　複数の導体が他の影響を受けない状態で存在するとき，その中の 1 つの導体の電位は他の導体の持つ電荷の線型結合で与えられる．電位係数はこの線型結合で用いる係数のことで，複数導体の幾何条件のみから与えられる．

伝導電流と対流電流　伝導電流とは，電界によって電子が導体内を移動することで発生する電流である．対流電流とは，電界によって電荷を持つイオンなどの粒子が移動することで発生する電流である．

磁区と磁壁　強磁性体内は，磁気モーメントがまとまって同じ向きとなっている領域が複数含まれる状態になっている．この一つの領域を磁区と呼び，2 つの磁区を隔てる境界を磁壁と呼ぶ．