第 1 章

複素数の計算と性質

複素数の計算と性質を理解することによって，文章題を解くに十分な理解を身につける．

1.1　表示形式による計算の違い

表示形式は複素数の捉え方を表すことはすでに述べている．これによって計算の考え方も大きく変わる．この使い分けこそが複素数の醍醐味ではないのかと私は考える．

1.1.1　実部と虚部による計算

$z = x + iy$ という形式の場合，計算はすべて文字式の計算と同じものであると考えたらいい．具体的に和と積の計算を以下に示す．

$$
\begin{aligned}
(a+ib)+(c+id) &= (a+c)+i(b+d) \\
(a+ib)\cdot(c+id) &= (ac-bd)+i(ad+bc)
\end{aligned}
$$

虚数単位 i を単純に文字とみなして計算すればいい．ただ，2 乗したときに -1 となることを忘れてはならない．割り算に関してはこの形式であるとなかなか計算が進まない．もっと言えば積でも係数はなかなか重たいものになっている．

実部と虚部を分けて計算する手法は複素数を相手にするときの最もまっとうな方法であるといえる．まずはこの方法を第一に考えるとよいだろう．

1.1.2　極形式の計算

極形式は積と商のみで使うことを勧める．

$$
\begin{aligned}
z_1 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \\
z_2 &= r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
z_1\cdot z_2 &= r_1 r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \\
z_1/z_2 &= r_1/r_2\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}
\end{aligned}
$$

複素数の大きさに注目すると積と商はそのまま反映されている．偏角に注目すると積ならば足し算，商ならば引き算になっている．まるで指数の計算かのようである．これを利用することで複素数の計算は飛躍的に容易になる．

1.1.3　ド・モアブルの定理

極形式の積の計算を累乗に繰り返し使用することで次の公式を得ることができる．

$$\{r(\cos\theta + ii\sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{1.1}$$

これは極形式によって受ける最大の恩恵である．複素数の計算で指数が現れたら必ずド・モアブルの定理を適応することを考えよう．

1.2　複素数について

かなり遅いタイミングであるが，ここで複素数の性質や扱い方について述べる．

1.2.1　大きさ

複素数の世界では，数の大小関係は存在しない．実数の世界では数直線の右側が大きな数だという理解ができたが，複素数平面ではそのようにはいかない．しかし，大きさというものを全く考えないわけにはいかないので，次で複素数の大きさを定義する．

$$z = x + iy \ \Rightarrow\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.2}$$

これは複素数平面上での原点からの距離である．しかし，複素数の大きさは与えたが，複素数に大小関係は存在しない．

1.2.2　偏角

複素平面上に図示した複素数 z と原点とを結ぶ線分と実軸の正方向とのなす角を偏角という．

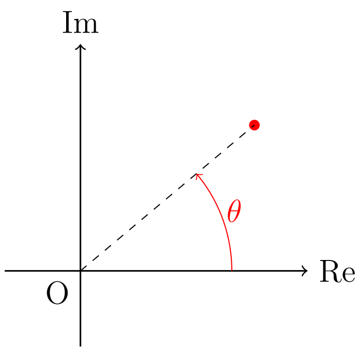

図 1.1　偏角

複素平面においては角度に向きが存在する．反時計回りが正で時計回りが負である．これは何度も繰り返し述べてゆくが，角度に方向があるという理解が複素数の学習には必要だ．

1.2.3　共役な複素数

共役という言葉は高校数学でも何度か出てきたように思う．今までのものと似たようなものである．

複素数 $z = x + iy$ に対して共役な複素数 $\bar{z}$ は次で定義される．

$$\bar{z} = x - iy \tag{1.3}$$

共役な複素数とは虚部を -1 倍したものである．共役な複素数の組の和と積はともに実数になる．また，積は複素数の大きさの 2 乗となっていることに注意しよう．

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2z \\ z \cdot \bar{z} &= x^2 + y^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

極形式で共役な複素数を見てみる．$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とする．

$$\begin{aligned} \bar{z} &= r(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \end{aligned}$$

このように，偏角が -1 倍されている．これを複素数平面で図示すると図 1.2 のようになる．加えて，共役複素数は複素平面上における実軸対称な点ということができる．

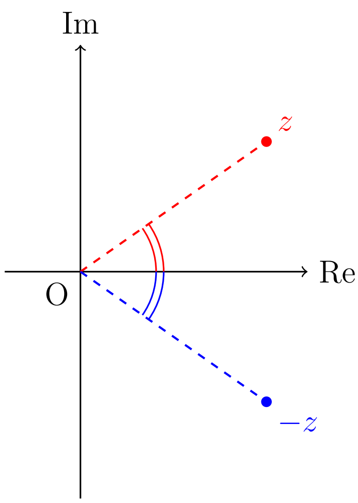

図 1.2　共役複素数

1.2.4　純虚数

実部が 0 である複素数を純虚数という．これは虚数単位 i の実数倍である[*1]．これ以上のことはないのだが，問題を解く上で純虚数という言葉を見たら，実部が 0 になるという条件が与えられていると解釈する必要がある．したがって，語句として覚えておこう．

1.3　本章で扱う問題

本章の内容で扱う問題は以下のものが考えられる．

[*1] 0 は実数ということにする．

- 極形式を利用した複素数の剰余算
- ド・モアブルの定理の利用
- 共役複素数の利用

1.3.1 極形式を利用した複素数の計算

問題

以下を計算せよ．解答の表記は問わない．

1. $(7+7\sqrt{3}i)\times(9+9i)$
2. $(3-3\sqrt{3}i)\div(7\sqrt{3}+7i)$

1 つ目はそのまま計算することも可能な範囲ではあるが 2 つ目は確実に面倒になる問題だ．まず 1 つ目を極形式を利用して計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned}(7+7\sqrt{3}i)\times(9+9i) &= 14\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times 9\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\ &= 14\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\times 9\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &= 126\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

もちろん，普通に計算しても構わない．

$$(7+7\sqrt{3}i)\times(9+9i) = 63\{(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i\}$$

2 つ目は次のようになる．

$$\begin{aligned}(3-3\sqrt{3}i)\div(7\sqrt{3}+7i) &= 6\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\div 14\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{3}{7}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)\\ &= -\frac{3}{7}\end{aligned}$$

意外な結果を得ることができた．極形式を使わない場合は分母と分子の両方に分母の共役複素数かければいい．

1.3.2 ド・モアブルの定理の利用

問題

以下の計算を通して三角関数に関係する計算公式を導出せよ．

1. $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2$
2. $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3$
3. $(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta+i\sin\beta)$

1 つ目の式を文字式として計算するパターンと，ド・モアブルの定理を用いて計算するパターンの 2 つで変形する．

$$
\begin{aligned}
(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2i\cos\alpha\sin\alpha \\
&= \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha \\
\therefore \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin 2\alpha &= 2\cos\alpha\sin\alpha
\end{aligned}
$$

これは倍角公式である．

2 つ目は

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

を利用して計算を進める．

$$
\begin{aligned}
\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha &= \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha - i\sin^3\alpha \\
&= (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha) + i(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha) \\
&= (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) + i(-4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha)
\end{aligned}
$$

これは三倍角の公式である．

最後は結果のみ示すと，

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

が得られる．これは加法定理である．

このように，ド・モアブルの定理から三角関数の公式を導出することができる．