2018 年センター試験本試験数学 1A の解説

フリーステップ香里園駅前校　数学チーム

問題は各自で用意すること

1　第 1 問

1.1　問題について

[1] は与えられた式の規則性を認識できるかを問う問題。最後に和と差の積[*1]を使いさえすればいいので悩むことなく完答したい。

[2] はお決まりの集合を扱った問題。前半の (1) は集合の要素の個数が高々 20 個で済むので機械的に書き上げればよいだろう。後半の (2) では与えられた条件式の絶対値をすぐさま処理すれば数直線を活用し答えが出せる。

[3] は軸が移動する二次関数の最小値がどこで現れるかの理解を問う問題。定義域と軸の位置関係で最小や最大となる x の値は変わってゆく。このことは簡素な図を描き、イメージをしっかりとつかめば難しいことではない。

1.2　解答例

ア

$$\begin{aligned}(x+n)(n+5-x) &= (x+n)\{(5-x)+n\}\\ &= x(5-x)+n^2+5n\end{aligned}$$

イ-エ　与えられた式

$$A = x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$$

[*1] $(a+b)(a-b) = a^2+b^2$ が和 × 差になっていることからこのように言ったりもする

に注目すると以下の式が見えてこないだろうか。

$$x(5-x)=X$$

$$\begin{aligned}(x+1)(6-x)&=(x+1)(1+5-x)\\&=x(5-x)+1^2+5\times 1\\&=X+6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+2)(7-x)&=(x+2)(2+5-x)\\&=x(5-x)+2^2+5\times 2\\&=X+14\end{aligned}$$

これは直前の問題を用いたもので、どうしても自力で気付かなければならない。ここまでくれば

$$A=X(X+6)(X+14)$$

オ

$$\begin{aligned}x&=\frac{5+\sqrt{17}}{2}\text{より}\\X&=\frac{5+\sqrt{17}}{2}\times\left(5-\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\\&=\frac{5+\sqrt{17}}{2}\times\frac{5-\sqrt{17}}{2}\\&=\frac{25-17}{4}\\&=2\end{aligned}$$

カ

$$\begin{aligned}X&=2\text{ より}\\A&=2\times(2+6)\times(2+14)\\&=2\times 2^3\times 2^4\\&=2^8\end{aligned}$$

キ　十分書き上げられそうな個数の時はそうしてしまうのも一手。

$$\begin{aligned}A&=\{1,2,4,5,10,20\}\\B&=\{3,6,9,12,15,18\}\\C&=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}\end{aligned}$$

(a)$A\subset C$ とはすなわち A の要素はどれをとっても C の要素だということ。しかし、A から 1 を取り出すと $1\notin C$ なので偽である。

(b)$A \cap B = \phi$ とはすなわち A と B には共通する要素がないということであるがこれは真である。

よって (a) 偽 (b) 真の 2

ク　$\cap$ が要素の共通のものを挙げ、$\cup$ が要素を合わせるということがわかったらあとは間違えずにやるだけ。問いに現れる集合の要素を示すことで解説とする。

$$\begin{aligned} A \cup C &= \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \\ (A \cup C) \cap B &= \{6, 12, 18\} \\ \overline{A} \cap C &= \{6, 8, 12, 14, 16, 18\} \\ (\overline{A} \cap C) \cap B &= \{3, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 18\} \\ B \cup C &= \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\} \\ \overline{A} \cap (B \cup C) &= \{3, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 18\} \end{aligned}$$

よって (c) と (d) はともに正しいので 0

ケ, コ　まずは絶対値の処理

$$\begin{aligned} |x - 2| > 2 &\Leftrightarrow x < 0, 4 < x \\ \sqrt{x^2} > 4 &\Leftrightarrow |x| > 4 \\ &\Leftrightarrow x < -4, 4 < x \end{aligned}$$

ここで $\sqrt{\ }$ の計算に注意[*2]しよう。ここから問題に出てくる条件の内容は

$$\begin{aligned} p &: x < 0, 4 < x \\ r &: 4 < x \\ s &: x < -4, 4 < x \\ q \text{ または } r &: x < 0, 4 < x \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} q \text{ または } r &\Leftrightarrow p \\ r &\Rightarrow s \end{aligned}$$

ここからケが 2、コが 0 とわかる[*3]。

[*2] $\sqrt{a^2} = |a|$ である

[*3] (十分条件) $\Rightarrow$ (必要条件)「矢の先は必要」としたらいいかな…

サ, シ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 - 2(a+3)x - 3a + 21 \quad (a > 0) \\
&= a\left(x - \frac{a+3}{a}\right)^2 - 3a + 21 - \frac{(a+3)^2}{a} \\
\text{よって } p &= \frac{a+3}{a} \\
&= 1 + \frac{3}{a}
\end{aligned}
$$

ス, セ　直前の問いから $y = f(x)$ のグラフの軸は $x = p$ だとわかってるので軸の位置から最小の位置を考える。今回 x^2 の係数 a は正のため $y = f(x)$ のグラフの軸は下に凸である。なので $x = 4$ で最小になるには $p \geq 4$ が条件 (ス) であり、$x = p$ で最小になるには $0 < p \leq 4$ が条件 (セ) である。以下はその概念図である。ここまでくれば計算は簡単。

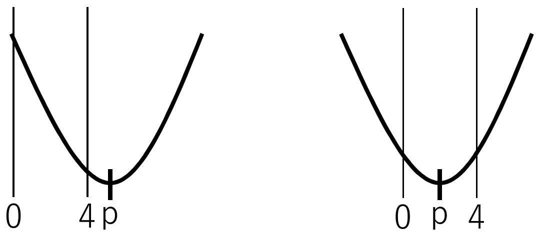

図 1　概念図

$$
\begin{aligned}
p &\geq 4 \quad \text{より} \\
(0 <)\, a &\leq 1 \quad (\text{ス}) \\
0 < p &\leq 4 \quad \text{より} \\
a &\geq 1 \quad (\text{セ})
\end{aligned}
$$

ソ-ト　今回軸の位置は [サ, シ] より正の値のみをとる。このことから $f(x)$ が最小となるのは [ス, セ] で挙げられた通り $x = 4$ または $x = p$ の時のみ。これを場合分けして別々に考えればよい。

1. $f(x)$ が $x = 4$ で最小、すなわち $(0 <)a \leq 1$ の時

$$
\begin{aligned}
f(4) &= a \times 4^2 - 2 \times (a+3) \times 4 - 3a + 21 \\
&= 5a - 3 = 1 \\
\therefore a &= \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

これは $0 < a \leq 1$ を満たす

これでまず 1 つ (ソ, タ)

2. $f(x)$ が $x=p$ で最小、すなわち $a \geq 1$ の時

$$f(p) = -3a + 21 + \frac{(a+3)^2}{a} = 1$$
$$\Leftrightarrow -3a + 20 + \frac{(a+3)^2}{a} = 0$$
$$\Leftrightarrow 4a^2 - 14a + 9 = 0$$

二次方程式の解の公式より

$$a = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{4}$$

$a \geq 1$ なので、

$$a = \frac{7 + \sqrt{13}}{4}$$

$f(p)$ は [サ, シ] での平方完成の式の使った。これでもう 1 つ (チ-ツ)

2　第 2 問

2.1　問題について

[1] は余弦定理の運用、三角比の計算、そして 2 直線が平行であることの性質の理解を問う問題である。序盤は余弦定理から $\cos\angle\mathrm{ABC}$、$\sin\angle\mathrm{ABC}$ はすんなり出るはずであるが、その次から雲行きが怪しくなる。$\mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}$ の表す値の意味と平行な 2 直線の関係を正しく理解していれば何とかなる。台形のどこが平行なのかわかりさえすれば難しくない。決して当てずっぽうにならないように。

[2] はデータの分析に関する理解を問う問題。与えられた表を正しく読み取ることができれば難しくない。しかし、目の付け所を正しく理解していないと大きく時間を使ってしまうため不安があったのなら今一度復習をすることを勧める。これといった回答方針はなく、いかに要領よく解答できるかにかかっている。最後の計算問題は最初から全体を見ると分かりにくいので部分から攻める。

2.2　解答例

[1] について具体的な図は与えない。自ら作図するように。

ア, イ　$\triangle\mathrm{ABC}$ に対し余弦定理を適応し

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{AC}^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}$$
$$= \frac{5^2 + 9^2 - 6^2}{2\cdot 5\cdot 9}$$
$$= \frac{7}{9}$$

ウ-オ $0 < \angle \mathrm{ABC} < \pi$ なので $\sin \angle \mathrm{ABC} > 0$ に注意する。

$$\begin{aligned} \sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \quad \text{より} \\ \sin\angle\mathrm{ABC} &= \sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{ABC}} \\ &= \sqrt{\frac{32}{81}} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{9} \end{aligned}$$

カ $\sqrt{}$ のある大小比較は 2 乗するのが基本ではあるがそれにこだわる必要はない。$\sqrt{2} \simeq 1.41$[*4]で十分である。

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC} &= 5 \times \frac{4\sqrt{2}}{9} \\ &\simeq \frac{20 \times 1.41}{9} \\ &= \frac{28.2}{9} \end{aligned}$$

これに対して、

$$\begin{aligned} \mathrm{CD} &= 3 \\ &= \frac{27}{9} \\ \therefore \mathrm{CD} &< \mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC} \end{aligned}$$

キ この問いは直前の [カ] を理由に台形 ABCD の平行な辺の組を決定している。そのため、まずは唐突に表れた $\mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}$ の値の意味を考える。これは、$\triangle\mathrm{ABC}$ を描くと想像しやすく、底辺を線分 BC としたときの $\triangle\mathrm{ABC}$ の高さとなっている。言い換えれば、$\mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}$ は点 A と線分 BC の距離 (h とする) となっている。このことから、[カ] の不等式は長さの大小関係を示しているとわかる。
次は平行な 2 直線の関係を長さというキーワードと共に考えると、「平行な 2 直線の一方から他方へ引いた垂線の長さは常に等しい」というものが思いつく。図 2 の性質のことである。
ここまで来たら AD//BC を仮定[*5]する。すなわち点 A と線分 BC の距離 (h) と点 D と線分 BC の距離 (h' とする) が等しいことを仮定するのである。

$$\begin{aligned} h' &= \mathrm{CD}\cdot\sin\angle\mathrm{DCB} \\ 0 &< \sin\angle\mathrm{DCB} \leq 1 \quad \text{なのだから} \\ h' &\leq \mathrm{CD} \\ \text{したがって}, h = h' &\text{は } h > \mathrm{CD} \text{ に矛盾} \end{aligned}$$

[*4] $\sqrt{2} \simeq 1.41421356\cdots$「一夜一夜に人見ごろ」(ひとよひとよにひとみごろ) で覚えよう

[*5] 唐突かつ必然的ではない仮定ではあるが、[カ] の不等式を使うためには h を含む式、つまり点 A と線分 BC の距離と点 D と線分 BC の距離について考えるしかないのである。

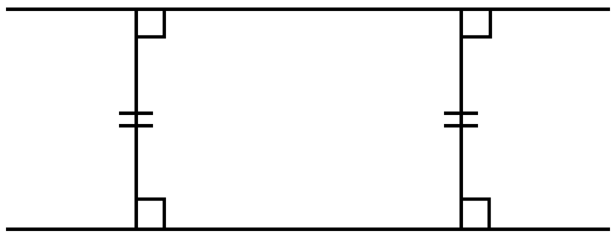

図 2　平行線の性質

これで AB と CD が平行でない[*6]ことが分かった。

ク, コ　AB と CD が平行なので、$\angle \mathrm{DCB} = \pi - \angle \mathrm{ABC}$ であることと、$\triangle \mathrm{DBC}$ に余弦定理を適応することで

$$\begin{aligned} \mathrm{BD}^2 &= \mathrm{BC}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2 \cdot \mathrm{BC} \cdot \mathrm{AC} \cdot \cos(\pi - \angle \mathrm{ABC}) \\ &= 9^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 9 \times \left(-\frac{7}{9}\right) \\ &= 132 \\ \therefore \mathrm{BD} &= 2\sqrt{33} \end{aligned}$$

サ, シ　答えは 1,6(順不同) である。

図 3 において箱ひげ図[*7]の読み方を示すことで解説とする。

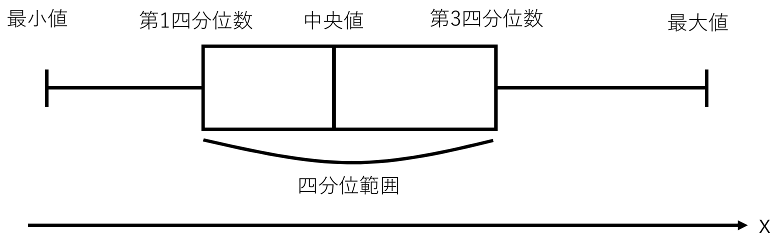

図 3　箱ひげ図

ス, セ　答えは 4,5(順不同)。

まず Z の示す意味を把握する。

$$\begin{aligned} Z &= \frac{W}{X} \\ \Leftrightarrow W &= Z \cdot X \end{aligned}$$

[*6] AB と CD が平行

[*7] そもそも箱ひげ図とは最小値、第 1 四分位数、中央値、第 3 四分位数、最大値の 5 数要約を表すグラフのことである。

よって X を横軸に、W を縦軸にとると Z は傾きを示しているとわかる。正直、傾きというと語弊があるがこの問題を解く上では十分な理解である。この理解があれば、l_1 から l_4 が Z にとっての目盛であることがわかる。(a) が男子短距離、(b) が女子短距離、(c) が男子長距離、(d) が女子長距離である。

ソ　$\sum$ をうまく使う[*8]と容易に計算できる。

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(w_k - \bar{w}) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\{x_k w_k - \bar{x}w_k - x_k\bar{w} + \bar{x}\bar{w}\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k w_k - \sum_{k=1}^{n}\bar{x}w_k - \sum_{k=1}^{n}x_k\bar{w} + \sum_{k=1}^{n}\bar{x}\bar{w}
\end{aligned}$$

ここまでくれば $\sum$ を 1 つずつ計算すればよい。この時、問題文中の注意書きの計算も使えば、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} x_k w_k &= x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_{n-1}w_{n-1} + x_n w_n \\
\sum_{k=1}^{n}\bar{x}w_k &= n\bar{x}\bar{w} \\
\sum_{k=1}^{n}x_k\bar{w} &= n\bar{x}\bar{w} \\
\sum_{k=1}^{n}\bar{x}\bar{w} &= n\bar{x}\bar{w}
\end{aligned}$$

よって

$$(\text{与式}) = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_{n-1}w_{n-1} + x_n w_n - n\bar{x}\bar{w}$$

3　第 3 問

3.1　問題について

確率について和の法則、積の法則、条件付き確率の理解を問う問題。サイコロを 2 個扱った問題は表を描いてしまえばおしまいなので簡単な問題だといえる。

事象 X が時の事象 Y が起こる条件付き確率は

$$P_X(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} \tag{1}$$

[*8] 添え字が変化すること以外同じ項を足し合わせるような場合はすぐさま $\sum$ を使うことを考えよう

でるという公式[*9]は必ず覚えよう。

3.2　解答例

以下サイコロの出目の表記に関して大きいサイコロを L、小さいサイコロを S とし、二つ合わせて (L, S) で表す。

ア-カ　事象をそのまま集合として扱う。全体集合は U とする。

$$\begin{aligned} A &= \{(L,S)|L=4\} \\ &= \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\} \\ B &= \{(L,S)|L+S=7\} \\ &= \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} \\ C &= \{(L,S)|L+S=9\} \\ &= \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\} \end{aligned}$$

あとは計算。

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{n(A)}{n(U)} \\ &= \frac{1}{6} \\ P(B) &= \frac{1}{6} \\ P(C) &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

キ-コ　条件付き確率がでできたので、公式を使うべく $A \cap C$ を明らかにする。

$$\begin{aligned} A \cap C &= \{(L,S)|L=4 \text{ かつ } L+S=9\} \\ &= \{(4,5)\} \\ \therefore P(A \cap C) &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

そうしたら式 (1) より事象 C が起こったときの事象 A が起こる条件付き確率 $P_C(A)$ は

$$\begin{aligned} P_C(A) &= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

同様に $P_A(C)$ は

$$P_A(C) = \frac{1}{6}$$

[*9] 確率の乗法定理と言ったりもする。

サ, シ　まずは $A\cap B$ の確認

$$A\cap B=\{(4,3)\}$$
$$\therefore P(A\cap B)=\frac{1}{36}$$

したがって、

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)\quad\left(=\frac{1}{36}\right)$$

さらに

$$P(A\cap C)=\frac{1}{36}\qquad P(A)P(C)=\frac{1}{54}$$
$$\therefore P(A\cap C)>P(A)P(C)$$

ス-タ

$$\bar{A}\cap C=\{(3,6),(5,4),(6,3)\}$$
$$\therefore P(\bar{A}\cap C)=\frac{1}{12}$$

求める確率は

$$P(A\cap B)P(\bar{A}\cap C)=\frac{1}{432}$$

チ-テ　一瞬悩んでしまうような問題ではあるが直前の設問がヒントになっている。1 回目が $A\cap B$ で 2 回目が $\bar{A}\cap C$ ならば題意を満たしているからだ。この調子で題意を満たす場合を見つけ、それぞれ確率を計算し足し合わせればよいとわかる。この時、事象 B と事象 C が排反事象であることに注意すると以下の場合が題意を満たす。

下 2 つの確率に関しては以下のように算出した。

表 1　3 つの事象がちょうど 1 回ずつ起こる

1 回目	2 回目	確率
$A\cap B$	$\bar{A}\cap C$	$\frac{1}{432}$
$\bar{A}\cap C$	$A\cap B$	$\frac{1}{432}$
$A\cap C$	$\bar{A}\cap B$	$\frac{5}{1296}$
$\bar{A}\cap B$	$A\cap C$	$\frac{5}{1296}$

$$P(\bar{A}\cap B)=\frac{5}{36}$$
$$P(\bar{A}\cap B)\times P(A\cap C)=\frac{5}{36}\times\frac{1}{36}$$

求める確率は

$$\frac{1}{432}\times 2+\frac{5}{1296}\times 2=\frac{1}{81}$$

4　第 4 問

4.1　問題について

整数に関して約数や不定方程式への理解を問う問題。最後の設問は可能性のある選択肢の総当たりになるため正しい見当をつける必要がある。不定方程式の解法はまず方程式を満たす具体的な解を見つけることである。方法は以下に示す。

$$7x + 131y = 1 \quad \text{を解く}$$

まずは具体的な解を 1 つ求める。コツとしてはいきなり答えを求めないこと。表記の簡単のため[*10] $a = 7, b = 131$ と置く。

$$\begin{aligned} \text{ぱっと思いつくのが}\quad & 20a = 140 \\ \text{ここから}\quad & 20a - b = 9 \\ \text{1 桁になれば九九から考える。}\quad & 7 \times 4 = 28, 9 \times 3 = 27 \\ & 1 = 4a - 3(20a - b) \\ & \quad = -56a + 3b \end{aligned}$$

もし九九で解が出なかったら、さらに小さい数を作り出せばいい。例の不定方程式の解の 1 つは $x = -56, y = 3$ だとわかった。ここから、

$$\begin{aligned} 7x + 131y &= 1 \\ 7 \times (-56) + 131 \times 3 &= 1 \\ 7(x + 56) + 131(y - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow -7(x + 56) &= 131(y - 3) \end{aligned}$$

最後に一押し。任意の整数を t とすると

$$x + 56 = 131t \qquad y - 3 = -7t$$

これで一般解が算出できた。

4.2　解答例

ア-ウ

$$144 = 2^4 \times 3^2$$

[*10] 当然手計算の時もこのように置く

エ, オ　正の約数の個数は素因数分解後に出てきた指数に 1 を足したものをかければよい。

$$(4+1)\times(3+1)=15$$

カ-ク　いきなり、特定の解を求めるのは困難である。よって次の問いの一般解を求めた後にこちらの回答を求める。

ケ-シ　先に述べた方法で一般解を求める。

$$\begin{aligned} a=144, b=7 \qquad &\text{とすると} \\ 4&=a-20b \\ 1&=4\times 2-7 \\ &=2(a-20b)-b \\ &=2a-41b \end{aligned}$$

よって $x=2, y=41$ が解の 1 つであることがわかる。ここから

$$\begin{gathered} 144(x-2)=7(y-41) \\ \text{任意の整数を } t \text{ とすると、} \\ x=7t+2 \\ y=144t+41 \end{gathered}$$

カ-ク　一般解がわかったところでもう一度この問いに戻る。x の絶対値が最小となるのは $t=0$ 時。

$$x=2, y=41$$

ス　誘導に従えば 144 の倍数でかつ 7 で割ると 1 余る数はすぐにわかる。

$$144x=7y+1$$

より $144x$ が問題の数そのものである。

$$144x=2^4\times 3^2(7t+2)$$

であるからうまく $(7t+2)$ の値をとってきて正の約数の個数を 18 個にしたい。この問いは幸運なことに実は、

$$144\times 2=2^5\times 3^2$$

しかない。また $2=7\times 0+2$ から正しいことがわかる。

セ, ソ　前問と異なり解答の候補がいくつか出てくるため、それが $7t+2$ を満たして、かつ最小になっているのかを確認しなければならない。候補は以下のパターンが考えれる。

1. $(7t+2)$ を素因数が 2,3 のみの数にする場合

   この場合 $144x$ として考えられるのは

$$\begin{aligned} 144\times 32&=2^9\times 3^2 \\ 144\times 18&=2^5\times 3^4 \\ 144\times 27&=2^4\times 3^5 \end{aligned}$$

答えの候補は 32,18,27 であるが $(7t+2)$ は満たさない。

2. $(7t+2)$ を 2,3 とは異なる素因数を含む数にする場合
この場合 $(7t+2)$ は素数 (p とする) であることがすぐにわかる。

$$2^4 \times 3^2 \times p^1$$

この数の正の約数の個数は $(4+1)(2+1)(1+1)=30$ となるからだ。では $(7t+2)$ で表される最小の素数は $t=3$ の時の 23。

以上の流れから 23 が答えと分かる。

5　第 5 問

5.1　問題要旨

三角形や円と直線にかかわる諸定理の理解を問う問題。この問題で使用した定理をあらかじめ挙げておこう。

- 三平方の定理
- 方べきの定理
- メネラウスの定理

そのほかにも三角形の五心の性質など平面図形の理解を様々問われている。

序盤は定理の単純な運用で済むが中盤に点 F の存在する場所を決定に骨を折る。適当に二択で回答してしまっては後の問題の点数がつかなくなてしまうので必ず理由のある回答をしたい。

満点を取るには分数と比の関係についてよく理解しているとすんなり解答できるのではないかと思われる。

5.2　解答例

ア-ウ　三平方の定理から BC の長さを決定し角の二等分線の性質を使う。

$$\begin{aligned}\mathrm{BC} &= \sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2}\\ &= \sqrt{5}\end{aligned}$$

また線分 AD は $\angle$A の二等分線なので

$$\begin{aligned} \mathrm{BD}:\mathrm{DC} &= \mathrm{AB}:\mathrm{AC} \\ &= 2:1 \\ \therefore \mathrm{BD} &= \frac{2}{3}\mathrm{BC} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

エ-カ　方べきの定理を線分 BA と線分 BD、そして円に対し適応する。

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}\cdot\mathrm{BE} &= \mathrm{BD}^2 \\ &= \frac{20}{9} \end{aligned}$$

キ-ケ

$$\begin{aligned} \mathrm{BE} &= \frac{20}{9}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{10}{9} \end{aligned}$$

コ

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}} &= \frac{10}{9}\cdot\frac{3}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} &= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \therefore \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}} &< \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} \end{aligned}$$

サ　問題文から直前の分数の大小関係から点 F の位置、すなわち直線 AC と直線 DE の交点の位置を決定している。考え方としては $\angle$B を共有する $\triangle$BAC と $\triangle$BED の辺の長さの関係から答えを出したい。そのために図 4 と図 5 を与える。

図 4 は

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$$

を仮定したときのものである。これは上の式の同値変形から

$$\mathrm{BC}:\mathrm{BD} = \mathrm{BA}:\mathrm{BE}$$

を導き出せるから[*11]である。そしてこの場合をこの問題を解く上での基準に定める。では直前の問いで導かれた

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}} < \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$$

[*11] これでも不十分なら中学数学を復習するように

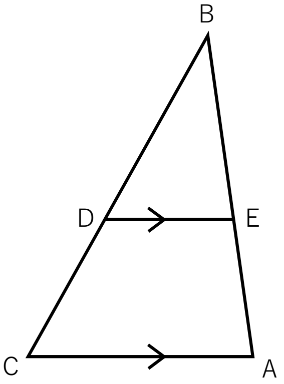

図 4　仮定の場合の図

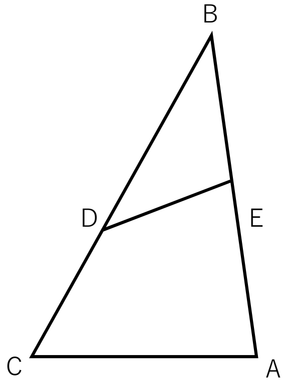

図 5　実際の場合の図

に注目する。比の値[*12]から攻めよう。

$$k < l \quad \text{とおくと}$$
$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}} = k$$
$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = l$$

とする。そうすると三角形の二辺の比がわかる。

$$\mathrm{BE} : \mathrm{BD} = k : 1$$
$$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = l : 1$$

ここまでくれば図 5 が自力で書けるだろう。先ほど基準にした図 4 は $k = l$ のときを表している。考えるべきは $k < l$ であるため、基準の図に比べ AB と BE の長さの比率を BE が短いように書き直せばいい。よって図 5 から点 F は辺 AC を C 側に延長したところにある。

シ, ス　△ABC と直線 EF にメネラウスの定理を適応して

$$\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{AF}} \cdot \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}} \cdot \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} = 1$$

ここでまだ出てきていない線分の長さを明らかにしておくと

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AB} - \mathrm{BE}$$
$$= \frac{8}{9}$$
$$\mathrm{DC} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{BC}$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{3}$$

[*12] $a : b$ の比の値は $\frac{a}{b}$ である。

よって

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{AF}} &= \frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{AE}} \cdot \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BD}} \\ &= \frac{5}{8}\end{aligned}$$

セ, ソ

$$\begin{aligned}\mathrm{CF} &= \frac{5}{8} \cdot \mathrm{AF} \\ &= \frac{5}{8}(\mathrm{CF}+1) \\ \Leftrightarrow \mathrm{CF} &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

タ　あらかじめ点 D が ∠A の二等分線上にあることから内心であるのではないかと疑うのが自然な流れ。ここで問題文の最後の式より

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{AC}} &= \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AB}} \\ \Leftrightarrow \mathrm{AB} : \mathrm{BF} &= \mathrm{AC} : \mathrm{CF}\end{aligned}$$

したがって、線分 BC は ∠ABF の二等分線。点 D は角の二等分線の交点なので内心。