

因数分解

近藤綜太

April 26, 2020

因数分解の手順

因数分解は以下の手順を辛抱強く続ける.

- ① 式中のいくつかの項に対して共通因数のくくりだし
- ② 文字の置き換え (絶対ではない)
- ③ 公式の利用

いきなり公式が使えることはまずない. 共通因数のくくりだしを繰り返しながら, 公式が使える形や同じ形が出てくるところを探す.

問題 1

$(a^2 + b^2 - c^2)^2$ を展開すると (1) であるから,
 $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2$ を因数分解すると (2) となる. (灘高)

問題 2

以下の式を因数分解せよ.

$$ax^2 + 7ax + 12a$$

$$6x^2 - 6$$

$$3x^2 - 30x + 75$$

$$(5x - 1)^2 - y^2$$

$$(x + a)^2 - (y + 5)^2$$

$$3ax^2 - 18ax + 24a$$

$$25ax^2 - 16a$$

$$18ax^2 + 24ax + 8a$$

$$(x + y)^2 + 4(x + y) + 4$$

$$(x + 3)^2 - 2(x + 3) - 63$$

式の展開

式の展開はカッコの中から 1 つずつ項を取り出してペアを作る作業.

$$(a + b)(c + d)$$

から, 前のカッコと後ろのカッコから 1 つずつ取り出すことでペアを作る. この時できるペアは $(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)$ の 4 つ. ペアを全て掛け算して足すので

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

となる. 全てのペアを忘れずに書けば式の展開は間違いはない.

解答 1

(1) は式の展開．丁寧に計算すれば以下の式となる．

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2 - c^2)^2 &= a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2) \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2\end{aligned}$$

これと問題文の式を比較すると $4a^2b^2$ だけ問題文の式が小さいことがわかる．ここから次の計算によって因数分解がわかる．

$$\begin{aligned}&a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 \\ &= (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 \\ &= \{(a^2 + b^2 - c^2) + 2ab\}\{(a^2 + b^2 - c^2) - 2ab\} \\ &= \{(a + b)^2 - c^2\}\{(a - b)^2 - c^2\} \\ &= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c)\end{aligned}$$

因数分解の基本

因数分解の基本は次の 3 つ

① $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

② $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

③ たすきがけ

1 つ目は和と差の積と表現される公式. 問題式から見えるかどうかなので俗に視力検査¹という. 2 つ目は式の展開公式を逆にしたもの. a, b を見つければ因数分解ができる. 見つけ方としては, まず ab に注目する. 3 つ目はたすきがけ. 因数分解で一番難しいもので, 定期試験に出ることはそんなにない. 入試にはバンバン出る (かな).

¹ 見えたら間違えることはない. 視力検査と同じ.

$$(ax + b)(cx + d) = abx^2 + (ad + bc)x + bd$$

この展開の式を参考にして a, b, c, d を探す．探し方としては ac, bd に注目して $(a, c), (b, d)$ の候補をたくさん用意しいて，全てに $(ad + bc)$ を計算する．

2 番目，3 番目の因数分解に近道はなく，候補となる a, b などをまとめたら，全て計算して x の係数を確認する．

たすきがけは特に面倒なので，共通因数のくくりだしは必ず前にやっておく．

$$\begin{aligned} ax^2 + 7ax + 12a &= a(x^2 + 7x + 12) \\ &= a(x + 4)(x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3ax^2 - 18ax + 24a &= 3a(x^2 - 6x + 8) \\ &= 3a(x - 4)(x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x^2 - 6 &= 6(x^2 - 1) \\ &= 6(x - 1)(x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25ax^2 - 16a &= a(25x^2 - 16) \\ &= a(5x + 4)(5x - 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x^2 - 30x + 75 &= 3(x^2 - 10x + 25) \\ &= 3(x - 5)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}18ax^2 + 24ax + 8a &= 2a(9x^2 + 12x + 4) \\ &= 2a(3x + 2)^2\end{aligned}$$

2乗の展開公式を覚えておくとなすぐに計算できる．何かを2乗したものが出てきたら，疑わないといけない．

$$\begin{aligned}(x + a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2 \\ (ax + b)^2 &= a^2x^2 + 2abx + b^2\end{aligned}$$

解答 2-3

$$\begin{aligned}(5x-1)^2 - y^2 &= \{(5x-1) + y\}\{(5x-1) - y\} \\ &= (5x+y-1)(5x-y-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+y)^2 + 4(x+y) + 4 &= X^2 + 4X + 4 \quad (X = x+y) \\ &= (X+2)^2 \\ &= (x+y+2)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+a)^2 - (y+5)^2 &= \{(x+a) + (y+5)\}\{(x+a) - (y+5)\} \\ &= (x+y+a+5)(x-y+a-5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+3)^2 - 2(x+3) - 63 &= X^2 - 2X - 63 \quad (X = x+3) \\ &= (X-9)(X+7) \\ &= (X-6)(x+10)\end{aligned}$$

因数分解では式を見て公式を見つけられるか、くくりだすのにちょうどいい共通因数を見つけられるのかにかかっている。これはこうするというような公式があるわけではないので、たくさん問題を解いて覚えるしかない。