1　図形の性質

証明問題を扱う前に図形の性質について述べる．図形の性質の理解が証明問題を解く上での重要な鍵になる．

1.1　等しい角度

角度が等しいことがわかるケースを挙げると次の通りとなる．

- 対頂角
- 平行線の同位角・錯角
- 共通の角
- 平行四辺形の向かい合った角
- 二等辺三角形の底角
- 等脚台形の上底，または下底の両端角
- 円周角の定理
- 計算

4 つ目以降は馴染みのない条件となっているはずだ．この他にも角が等しいケースはあるが，これくらいは頭に置いておきたい．これらを 2 つずつ紹介する．

1.1.1　対頂角

対頂角は 2 直線が交差するときに生まれる角度の関係である．図 1 のように 2 直線の間の角が等しくなる．最も基本的な性質である．

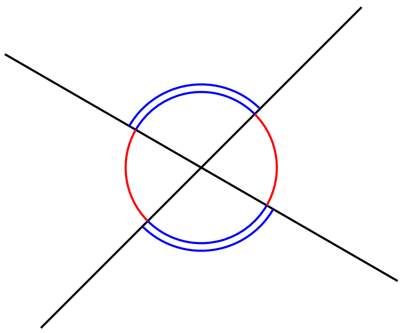

図 1　対頂角

1.1.2　平行線の同位角と錯角

平行線の錯角は 2 本の平行な直線の両方に交わる直線があるときに生じる角度の関係である．図 2 のように 2 つの箇所で同じような位置関係にある角度が等しくなるのが同位角の関係 (赤一重) である．錯角 (青二重) も何ら難しいものではない．

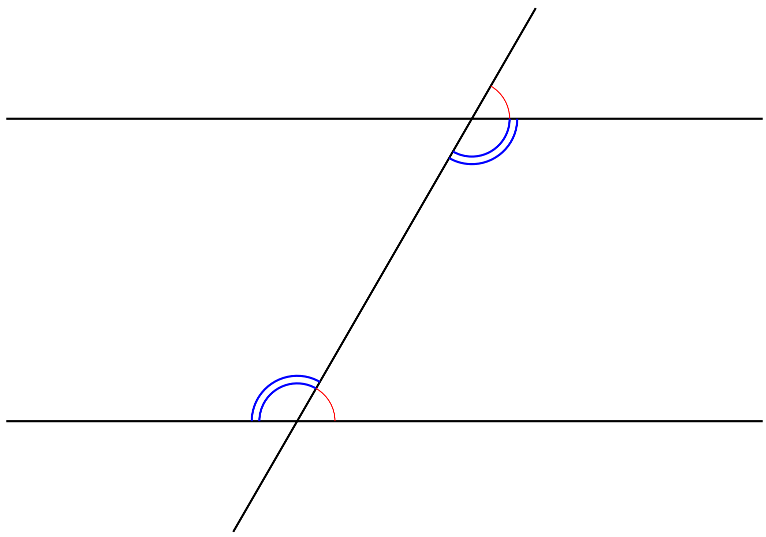

図 2　平行線の同位角と錯角

1.1.3　共通の角

最も簡単なのは共通の角である．しかし，以外にも忘れることがあるので注意が必要である．また，証明のときは書いたほうがいいのかという疑問を持つかもしれないが，必ず書くことを勧める．何かが等しいということを言うときは簡単であっても理由を書くこと[*1]を癖付けよう．

1.1.4　平行四辺形の向かい合った角

平行四辺形では向かい合った角が等しい．これは実際に問題で使うことがあるのか怪しい条件だが，1 度だけお目にかかったので紹介する．

他にも平行四辺形の隣り合った角の和が 180 度であったり，平行四辺形の条件を利用する問題はないわけではない．2 組の平行な直線があれば，それらで平行四辺形ができるのでそのような場合は注意しよう．

1.1.5　二等辺三角形の底角

これはみんなもよく知るところの条件だろう．図 3 のように二等辺三角形の底角は等しい．

1.1.6　等脚台形

等脚台形は二等辺三角形を底辺と平行な直線で切った図形である．図 4 が等脚台形である．もとが二等辺三角形であるから下底の両端の角が等しいのは明らかだ．上底に関しても等しいことは切り取った三角形が二等辺三角形であることからすぐにわかる．

1.1.7　円周角の定理

円周角の定理はある円に対しては同じ長さ[*2]の弧に対する円周角が等しいことを示している．

[*1] 明らかなことであるときは，明らかであると言うことも大事．
[*2] 同じ弧である必要はない．大事なのはこの長さと円周角が対応しているという理解である．

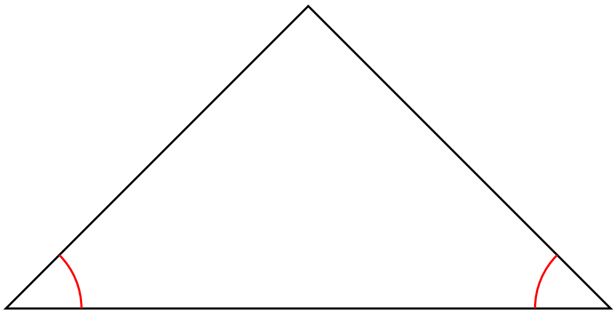

図 3　二等辺三角形の底角

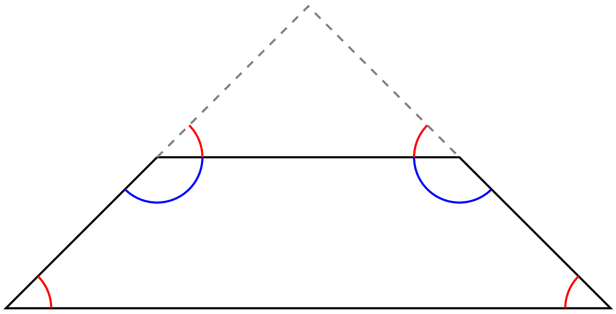

図 4　等脚台形

円周角の定理の利用のときは，必ずどの点を通る円なのかを明らかにしなければならない．具体的には例題を扱うときに述べる．

円周角の定理を使う円はたいてい自らの力で見つける必要があるので，これが思いつかないことで問題が解けなくなるという状況を散見する．

1.2　計算

なんとも漠然とした話であるが計算によって同じ角であるというのが入試問題では必ず出てくる．最もよく見るケースをここで紹介する．

図 5 は 2 組の直角な角が頂点を共有してずれるように配置されている．すると赤の角度は両方とも 90 度から青の角を引いたものとなっている．つまり，同じ角度なのだ．

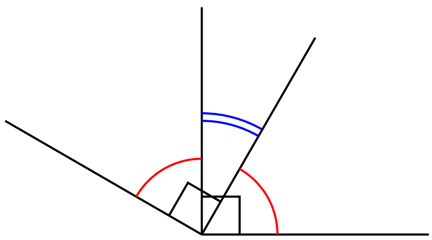

図 5　同じ角を引く

このようなケースは角度が数値としてわかるものが複数ある場合に現れる．同じ数値から同じ角度を引け

ば，当然残る角も等しくなるという流れだ．

1.3 等しい長さ

辺が等しくなる場合は円の半径である場合と，共通な辺の場合だけである．そのため，いちいち説明することはない．

1.4 辺の比

辺の長さの比が同じ場合はあまりない．辺の長さが数値としてわかっていない場合は必ず平行線が関係してくる．まず，一番簡単に現れるケースは図 6 のような状態である．3 本の平行線とそれらに交わる直線があると必ず線分の長さの比は等しくなる．

逆に辺の長さの比が等しいことから，3 本の横線が平行であると言うこともできる[*3]．

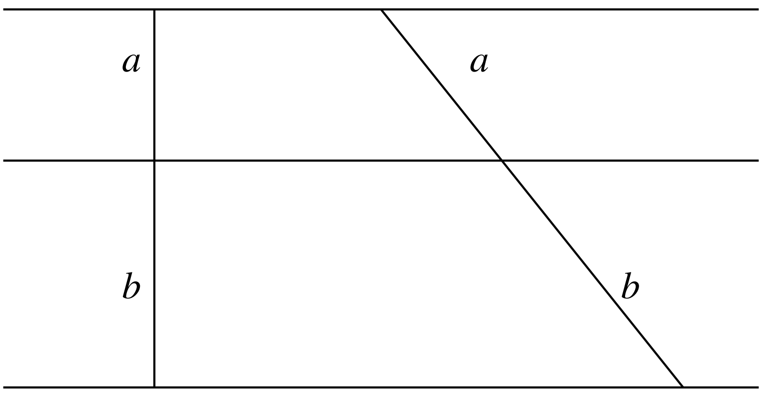

図 6 平行線による線分の比

平行線が関わるケースで重要なのは三角形の底辺とその平行な線である．図 7 は三角形の底辺に対して平行な線が引いてある．すると同じ辺の長さの比が 3 ヶ所に現れる．要注意なケースである．

こちらでも，辺の比が等しいことから線分が平行であると言うことができる．

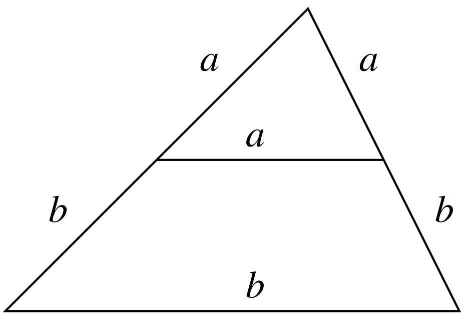

図 7 三角形の底辺と平行な線分

さらに，辺の比がわかる最も重要なケースは角の二等分線が関係するときである．図 8 のように，三角形の

[*3] 並行の証明自体があまり出てこないので使うことは少なめ．

1 つの頂点から引かれる角の二等分線が向かい合う辺に交わると，それによって分かれる 2 つの部分の比がわかるのだ．

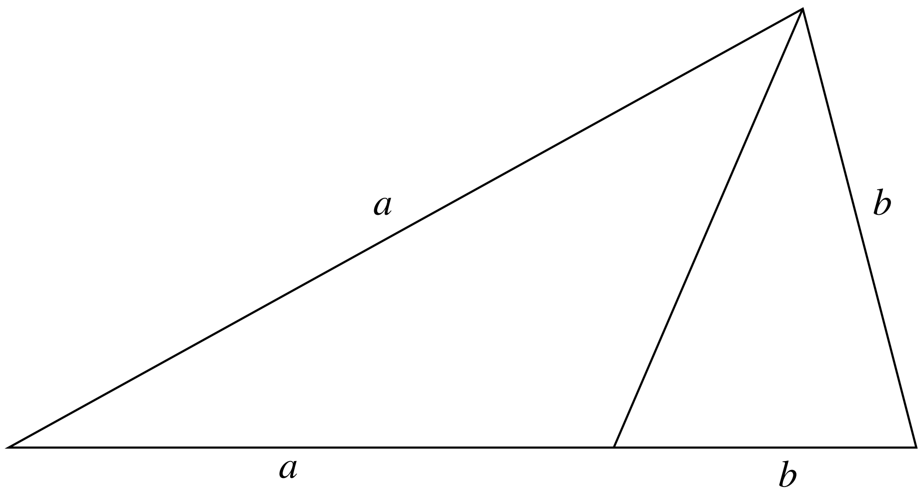

図 8　角の二等分線と線分の比

角の二等分線と出てきたら必ず疑うべき条件である．見落としは許されない．

1.5　証明に用いる定理

図形問題の一部では定理を用いるものがある．中学数学で扱う定理を紹介する．

1.5.1　円周角の定理

説明はすでにしている．図 9 で表される等しい角の関係である．また，円周角は中心角の半分であるという性質を忘れてはならない．

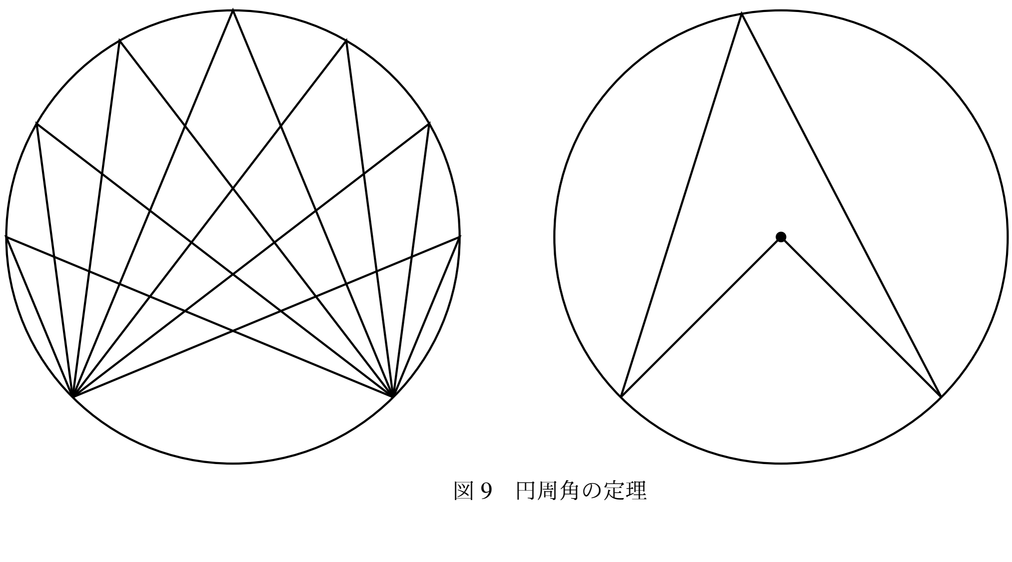

図 9　円周角の定理

1.5.2　中点連結定理

三角形の 2 辺の中点を結ぶ線分は，他の辺と並行であり長さは半分であるという定理である．今は

$$\mathrm{AM} = \mathrm{BM}$$
$$\mathrm{AN} = \mathrm{BN}$$

となっている．すると，

$$\mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}, \quad \mathrm{MN}//\mathrm{BC}$$

であることが中点連結定理から直ちにわかる．

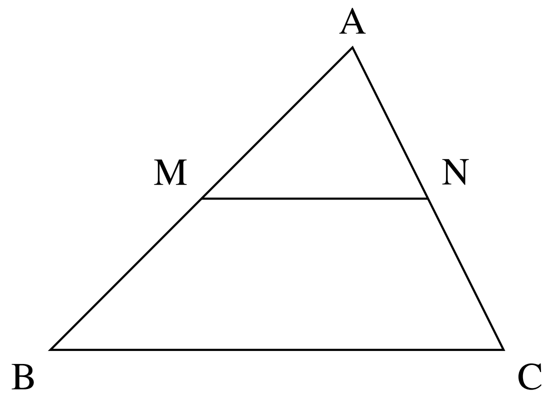

図 10　三角形の底辺と平行な線分

1.6　三平方の定理

直角三角形に成立する辺の長さに関する定理である．図 11 の直角三角形に対して次の式が成立する．

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2$$

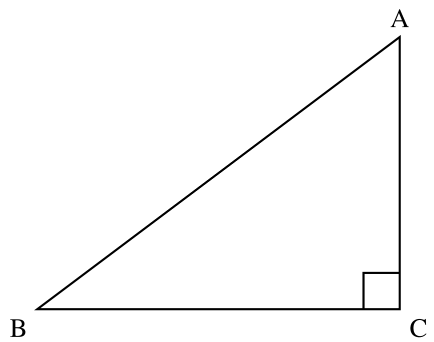

図 11　三平方の定理

定理の証明はネットに溢れているので自ら調べてみよう．