三角形の合同

近藤綜太

April 17, 2020

問題

次の図で △ABC は $\angle ABC = 90^\circ$ の直角二等辺三角形である．A, C から直線 m に下した垂線の交点をそれぞれ D, E とする． $AD = BE$ を証明せよ．

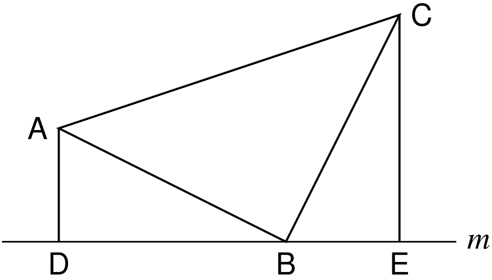
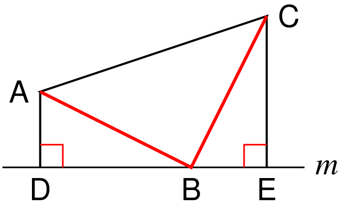


Figure: 問題

方針



$\triangle$ADB $\equiv$ $\triangle$BEC を証明する．

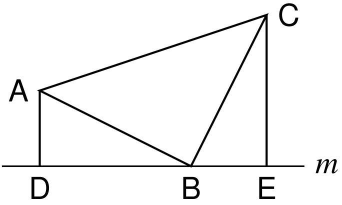
- AB = BC が二等辺三角形からわかる．
- $\angle$ADB = $\angle$BEC = 90°

直角三角形の斜辺がわかっている．そこで次のどちらかが分かれば良い．

- 直角ではない角が 1 組等しいこと
- 斜辺以外の辺の長さが 1 組等しいこと

同じ角度の引き算

方針から辺の長さを考えるのが難しいと分かれば，角度で何とかしようと考える．$\angle$CBE を計算することを考える．これは 2 通りの計算が考えられるはずだ．



- 直線 m による式

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{CBE} &= 180^\circ - \angle \mathrm{ABC} - \angle \mathrm{ABD} \\ &= 90^\circ - \angle \mathrm{ABD}\end{aligned}$$

- 三角形の内角の和が 180° による式

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{CBE} &= 180^\circ - \angle \mathrm{CEB} - \angle \mathrm{BCE} \\ &= 90^\circ - \angle \mathrm{BCE}\end{aligned}$$

これで，1 組の等しい角が見つかった．

解答例 (前半)

$\triangle$ABD と $\triangle$BCE において，
仮定より，

$$\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{BEC} = 90^\circ \qquad \cdots (1)$$

$\triangle$ABC が BA = BC の二等辺三角形より，

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} \qquad \cdots (2)$$

直線 m においては以下の式が成立する．

$$\angle \mathrm{CBE} = 180^\circ - \angle \mathrm{ABC} - \angle \mathrm{ABD} = 90^\circ - \angle \mathrm{ABD}$$

また，$\triangle$BCE において，三角形の内角の和が 180° より，

$$\angle \mathrm{CBE} = 180^\circ - \angle \mathrm{CEB} - \angle \mathrm{BCE} = 90^\circ - \angle \mathrm{BCE}$$

$$\therefore \angle \mathrm{ABD} = \angle \mathrm{BCE} \qquad \cdots (3)$$

解答例 (後半)

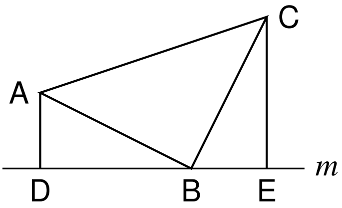
(1), (2), (3) より，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle \mathrm{ADB} \equiv \triangle \mathrm{BEC}$$

合同な三角形の対応する辺は等しいので,

$$\mathrm{AD} = \mathrm{BE} \quad \square$$

余談



左の図を使うと三平方の定理を証明することができる．これは第 20 代アメリカ大統領の
ジェームズ・A・ガーフィールド
が発表したものだ．
台形の面積を公式と，3 つの三角形の和との 2 つの方法で表すことで等式を作ると証明できる．
各自でやってみるとよい．

余談

きれいなスライドを作るのは最初だけ．以降は手書きの回答を表示します.
来週以降は，参加者がそれなりにいそうならやります．問題はみんなから集めるつもりです．なければ僕が用意します.