5 月第 1 課題

近藤 綜太

May 4, 2020

はじめに

緊急事態宣言が延長され，休校期間が伸びそうになってきました．そこで，学校がなくとも学習の進度を守れるようにここでいくつかの課題を出していきたいと思います．
発展的な問題を出すこともあるので，グループのみんなで相談しながら解いてください．

問題 1

図の四角形 ABCD は平行四辺形である．この平行四辺形の面積を二等分する直線のうち，傾きが 1 であるものを求めよ．

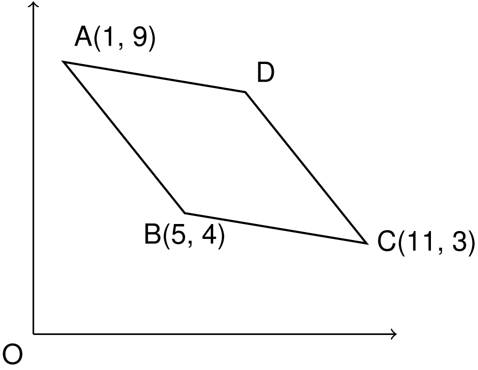

Figure: 平行四辺形

問題2

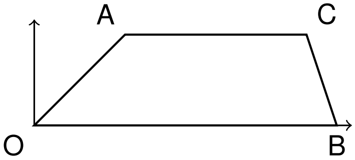

Figure: 台形

$$A : (6, 6)$$
$$B : (20, 0)$$
$$C : (18, 6)$$

以下の条件を満たす直線をそれぞれ求めよ．

1. 点 A を通り，台形 AOBC の面積を二等分にする直線
2. 点 (12, 6) を通り，台形 AOBC の面積を二等分にする直線
3. 傾き 1 で，台形 AOBC の面積を二等分にする直線

解答 1-1

平行四辺形を二等分にする直線の引き方を考える．
平行四辺形をその対角線で切ると，当然同じ形が 1 つでてくるので面積を二等分できる．ここから以下の図の 2 つの三角形の面積を考える．

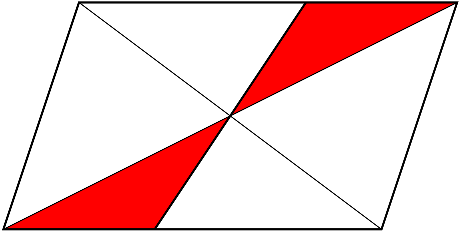

Figure: 平行四辺形を二等分

対角線の交点を通るようにすれば赤い三角形の面積は等しくなる．
このことを利用すれば，平行四辺形の 2 本の対角線の交点を通る直線が，平行四辺形を二等分するとわかる．

解答 1-2

平行四辺形の面積を二等分にする直線は 2 本の対角線の交点を通る直線であるとわかった．そして，2 本の対角線の交点はそれぞれの対角線の中点である．対角線 AC の中点は (6, 6) なので，これを通る傾き 1 の直線が答えである．

$$y = x$$

解答 2-1

面積を二等分するのだから，まずは全体の面積を計算する．

$$
\begin{aligned}
(\text{台形 AOBC}) &= \frac{1}{2} \times (AC + OB) \times 6 \\
&= 96
\end{aligned}
$$

これの二等分だから分けた後の面積は 48 であるとわかる．

解答 2-2

点 A を通り面積を二等分する直線を考える．点 A を通る直線が台形を分けるので次の場合が考えられる．

1. 線分 BC と交わる
2. 点 B を通る
3. 線分 OB と交わる．

まずはこのどれに当てはまるのかを確認する必要がある．これは実際に点 B を通るときに面積がどのように分割されるのかを確認すればいい．直線が点 B を通るとすると $\triangle \mathrm{ABO}$ は

$$\triangle \mathrm{ABO} = \frac{1}{2} \times 20 \times 6 = 60 > 48$$

となる．したがって，点 A を通り台形の面積を二等分する直線は線分 OB と交わる直線であるとわかる．

解答 2-3

点 A を通り線分 OB と交わる直線の線分 OB との交点を P とする．$\triangle$APO の面積は

$$\triangle \mathrm{APO} = \frac{1}{2} \times 6 \times \mathrm{OP}$$

これが 48 となる．

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 6 \times \mathrm{OP} &= 48 \\ \Leftrightarrow \mathrm{OP} &= 16 \\ \therefore \mathrm{P}\,(16, 0) & \end{aligned}$$

題意の直線は点 A(6, 6)，点 P(16, 0) を通る直線なので以下の式である．

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{48}{5}$$

解答 2-4

点 (12, 6) を通る直線で台形を二等分することを考えると答えは困難を極める．まず点 (12, 6) が何なのかを考える必要がある．
この点はなんと，ちょうど上底の中点に位置している．ここから引いた直線で台形を二等分すると考えると簡単だ．上底の中点と下底の中点の両方を通る直線であれば，台形の面積を二等分できる．このことは各自確認してほしい．
下底の中点は (10, 0) なので，求める直線は点 (12, 6) と点 (10, 0) を通る直線である．したがって答えは以下の式となる．

$$y = 3x - 30$$

解答 2-5

最後の問題はかなりの高難度となっている．ここでは場合分けを使いながら，最後は方程式の計算によって答えを求める．
まずは場合分けの話だ．台形が図の形であることから，傾き 1 の直線が台形を二つの部分に分けるのは次の場合が考えられる．

1. 線分 AC と交わる
2. 点 C を通る
3. 線分 BC と交わる

ここでも 1 番目のときと同じように考える．点 C を通る場合を考える．そして，傾き 1 の直線と線分 OB との交点を Q とする (Q(12, 0)) と $\triangle$CBQ の面積は以下で計算される．

$$
\begin{aligned}
\triangle \mathrm{CBQ} &= \frac{1}{2} \times \mathrm{BQ} \times 6 \\
&= 24
\end{aligned}
$$

ここから求める直線は線分 AC と交わることがわかる．

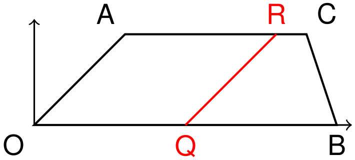

Figure: 台形と直線

台形に線分 AC と交わる直線を引く．線分 AC との交点を R，線分 OB との交点を Q とする．
R の座標を $(x, 6)$ とすると，直線の傾きが 1 であることから Q の座標は $x - 6, 0$ であるとわかる．
ここから台形 CBQR の面積を計算する．

解答 2-7

まずは上底と下底を求める.

$$(\text{上底}) = 18 - x$$
$$(\text{下底}) = 20 - (x - 6) = 26 - x$$

ここから台形の面積の公式を使う.

$$\begin{aligned}(\text{台形 CBQR}) &= \frac{1}{2} \times \{(18 - x) + (26 - x)\} \times 6 \\ &= 3(44 - 2x)\end{aligned}$$

これが 48 である x を求める.

$$3(44 - 2x) = 48$$
$$\Leftrightarrow -2x = 16 - 44$$
$$\therefore x = 14$$

したがって点 C(14, 6) を通る傾き 1 の直線が答えとなり次式である.

$$y = x - 8$$

解答 2-8

(別解)
四角形 OARQ が平行四辺形であることに気付いたら秒殺できる.

$$(\text{四角形 OARQ}) = \mathrm{OQ} \times 6 = 48$$
$$\therefore \mathrm{OQ} = 8$$

点 (8, 0) を通る傾き 1 の直線は次の通り.

$$y = x - 8$$

これでも十分な解答である.